Министерство образования и науки
Республики Таджикистан
Таджикский национальный университет

УДК 517.5

На правах рукописи

Айдармамадов Алишер Гуломалиевич

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ АППРОКСИМАЦИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ВЕСОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ БЕРГМАНА

01.01.01. – вещественный, комплексный и функциональный анализ

Д И С С Е Р Т А Ц И Я
на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель:
академик АН Республики
Таджикистан, доктор физ.-мат.
наук, профессор М.Ш.Шабозов

Душанбе – 2018

О Г Л А В Л Е Н И Е

Введение

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Работа посвящена вопросам наилучшего полиномиального приближения аналитических в круге функций и вычислению значений n-поперечников классов аналитических функций в весовом пространстве Бергмана. В обычном пространстве Бергмана указанные вопросы достаточно хорошо изучены в работах М.З.Двейрина, A.Pinkus, С.Б.Вакарчука, Ю.А.Фаркова, М.И.Гварадзе, P.L.Duren, B.W.Romberg, A.L.Shields, М.Ш.Шабозова, О.Ш.Шабозова, Г.А.Юсупова, М.Р.Лангаршоева, М.С.Саидусайнова и многих других. Хорошо известно, что в экстремальных задачах теории приближения функций большую роль играют точные неравенства, связывающие величины наилучшего приближения с интегралами и содержащие усреднённое значение модулей непрерывности производной заданного порядка функций. Эти неравенства позволяют установить новые связи между структурными свойствами функций и скоростью стремления к нулю величины наилучшего приближения функций.

В диссертационной работе изучены экстремальные задачи наилучшего приближения аналитических в круге функций комплексными алгебраическими полиномами в весовом пространстве Бергмана. Вычислены значения целой серии n-поперечников: бернштейновского, колмогоровского, гельфандовского, линейного и проекционного для различных классов функций, определяемых модулями непрерывности r-ых производных функций, принадлежащих пространству $B_{q,\gamma},\ 1 \le q \le \infty$, с заданным интегрируемым по площади единичного круга весом $\gamma := \gamma(|z|) > 0$.

Цель работы

- Найти точные неравенства типа С.Н.Бернштейна для комплексных алгебраических полиномов в пространстве $B_{q,\gamma},\ (1 \le q \le \infty)$.

- Найти точные значения верхней грани наилучшего приближения классов аналитических функций $B^{(r)}_{q,\gamma,a}$ в пространстве $B_{q,\gamma},\ (1 \le q \le \infty)$.

- Найти новые точные неравенства между величинами наилучшего полиномиального приближения аналитических в единичном круге функций и интегралами, содержащими усреднённые с весом значения модулей непрерывности в весовом пространстве Бергмана $B_{q,\gamma}$ $(1 \le q \le \infty,\ \gamma := \gamma(|z|) > 0)$.

- Найти точные значения различных n-поперечников классов функций, задаваемых модулями непрерывности высших порядков r-ых производных по аргументу.

Научная новизна

В диссертации получены следующие новые результаты:

- Найдены точные неравенства типа С.Н.Бернштейна для комплексных алгебраических полиномов в пространстве $B_{q,\gamma},\ (1 \le q \le \infty)$.

- Вычислена точная верхняя грань наилучшего приближения класса $B^{(r)}_{q,\gamma,a}$ в $B_{q,\gamma},\ (1 \le q \le \infty)$.

- Найдены точные неравенства между величинами наилучшего приближения функций и усреднёнными значениями модулей непрерывности r-ых производных по аргументу.

- Вычислены значения различных n-поперечников классов функций, задаваемых модулями непрерывности высших порядков r-ых производных по аргументу.

Основные методы исследования

В диссертации используются современные методы теории приближения вариационного содержания и методы решения экстремальных задач теории функций.

Теоретическая и практическая значимость

Диссертация имеет теоретический характер. Развитые в ней методы и полученные результаты могут применяться при решении других задач теории приближения. Главы диссертации в отдельности могут составить содержание специальных курсов для студентов и аспирантов высших учебных заведений, обучающихся по математическим специальностям.

Апробация работы

Основные результаты диссертации неоднократно докладывались и обсуждались на:

- семинарах отдела теории функций и функционального анализа Института математики им. А.Джураева АН Республики Таджикистан под руководством академика АН РТ М.Ш.Шабозова (Душанбе, 2012-2017 г.);

- международной научной конференции „Современные проблемы математического анализа и теории функций" (Душанбе, 29-30 июня 2012 г.);

- международной научной конференции „Современные проблемы теории функций и дифференциальных уравнений" (Душанбе, 17-18 июня 2013 г.);

- международной научной конференции „Современные проблемы математики и её преподавания", посвящённой 20-летию Конституции Республики Таджикистан (Худжанд, 28-29 июня 2014 г.);

- международной научной конференции „Математический анализ, дифференциальные уравнения и теория чисел" (Душанбе, 29-30 октября 2015 г.);

- международная школа-конференция, „Соболевские чтения" (Новосибирск, Россия, 18-22 декабря 2016 г.)

- международной научной конференции „Дифференциальные уравнения, математический анализ и теория чисел", посвященной 25-летию XVI сессии Верховного Совета Республики Таджикистан (Курган-Тюбе, 27-28 октября 2017 г.);

- международной научной конференции „Дифференциальные и интегральные уравнения с сингулярными коэффициентами и краевые задачи теории функции" (Душанбе, 27-28 февраля 2018 г.).

Публикации

Результаты автора по теме диссертации опубликованы в 10 работах. Из них 3 статьи опубликованы в изданиях, входящих в действующий перечень ВАК Российской Федерации, а 7 статьей в трудах международных конференций.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, двух глав, списка цитированной литературы из 60 наименования, занимает 82 страницы машинописного текста и набрана на LaTeX. Для удобства в диссертации применена сквозная нумерация теорем, лемм, следствий и формул. Они имеют тройную нумерацию, в которой первая цифра совпадает с номером главы, вторая указывает на номер параграфа, а третья на порядковый номер теорем, лемм, следствий или формулы в данном параграфе.

Краткое содержание работы

В первом параграфе первой главы излагаются необходимые определения, история вопроса и некоторые факты, используемые в дальнейшем. Во втором параграфе рассматривается задача о наилучшем полиномиальном приближении аналитических функций, принадлежащих весовому пространству Бергмана

Определение. *Пусть D – односвязная ограниченная область в плоскости комплексного переменного* $\mathbb{C}$, $f(z)$ *– аналитическая в* D

функция, $\gamma(|z|)$ – произвольная неотрицательная ненулевая суммируемая по области D весовая функция, такая, что

$$\iint\limits_{(D)} \gamma(|z|) \cdot |f(z)|^q d\sigma < \infty, \tag{0.0.1}$$

где $d\sigma = dxdy$ – элемент площади, а интеграл понимается в смысле Лебега. Множество всех аналитических функций $f(z) \in D$, для которых имеет место условие (0.0.1), образует банахово пространство, которое называется весовым пространством Бергмана $B_{q,\gamma}(D)$, $1 \le q \le \infty$ [14].

Говорят, что аналитическая в единичном круге $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ функция

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \ \ z = \rho e^{it}, \ \ 0 \le \rho < 1$$

принадлежит весовому пространству Бергмана $B_{q,\gamma} := B_{q,\gamma}(U)$, $1 \le q \le \infty$, если

$$\|f\|_{B_{q,\gamma}} = \left(\frac{1}{2\pi} \iint\limits_{(U)} \gamma(|z|) \cdot |f(z)|^q d\sigma \right)^{1/q} < \infty, \tag{0.0.2}$$

где $\gamma(|z|)$ – положительная суммируемая в круге $|z| < 1$ весовая функция. Очевидно, что норму (0.0.2) можно записать в более компактном виде

$$\|f\|_{B_{q,\gamma}} = \left(\int_0^1 \rho\gamma(\rho) M_q^q(f,\rho) d\rho \right)^{1/q} < \infty,$$

где, ради краткости, обозначено

$$M_q(f,\rho) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{it})|^q dt \right)^{1/q}, \ 1 \le q \le \infty.$$

Символом $H_{q,R}$ $(1 \le q \le \infty, \ 0 \le R < 1)$ обозначим банахово пространство Харди, состоящее из аналитических в круге $|z| < R$ функций, для которых

$$\|f\|_{H_{q,R}} := \lim_{\rho \to R-0} M_q(f,\rho).$$

При этом норма реализуется на угловых граничных значениях функций $f \in H_{q,R}$, то есть

$$\|f\|_{H_{q,R}} = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} |f(Re^{it})|^q dt\right)^{1/q}, & \text{если } 1 \le q < \infty, \\ \sup\limits_{t\in[0,2\pi]} |f(Re^{it})|, & \text{если } q = \infty. \end{cases}$$

В случае $R = 1$ полагаем $H_q := H_{q,1}$ и $\|f\|_{H_q} := \|f\|_{H_{q,1}}$.

Через $\mathcal{P}_n$ обозначим подпространство алгебраических полиномов комплексного переменного степени $\le n$, то есть всюду далее

$$\mathcal{P}_n := \left\{ p_n(z) : p_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k,\ a_k \in \mathbb{C},\ |a_k| \ne 0 \right\}.$$

Величину

$$E_{n-1}(f)_{B_{q,\gamma}} = \inf\{\|f - p_{n-1}\|_{B_{q,\gamma}} :\ p_{n-1}(z) \in \mathcal{P}_{n-1}\}$$

назовём наилучшим приближением функции $f(z)$ множеством $\mathcal{P}_{n-1}$ в пространстве $B_{q,\gamma}$, $1 \le q \le \infty$. При $q = 2$ имеет место следующее утверждение

Лемма 1.2.1. *Справедливо равенство*

$$E^2_{n-1}(f)_{B_{2,\gamma}} := \inf\left\{\|f - p_{n-1}\|^2_{B_{2,\gamma}} : p_{n-1}(z) \in \mathcal{P}_{n-1}\right\} =$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} |c_k|^2 \int\limits_0^1 \gamma(\rho)\rho^{2k+1} d\rho.$$

В дальнейшем, ради удобства, положено

$$\alpha_{nr} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1),\ n \ge r.$$

Далее $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел; $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$. Обозначим через $f^{(r)}(z)$ производную r-го порядка $f^r(z) = d^r f/dz^r$, а символом

$$f_a^{(r)}(z) = \partial^r f(\rho e^{it})/\partial t^r,\ 0 \le \rho < 1$$

обозначим производную r-го порядка по аргументу функции $f(z)$. При этом

$$f_a'(z) = f'(z) \cdot z_t' = f'(z) \cdot zi$$

и вообще для $r \geq 2$ справедливо рекуррентное соотношение

$$f_a^{(r)}(z) = \left\{ f_a^{(r-1)}(z) \right\}_a' .$$

Через $B_{q,\gamma}^{(r)}$ обозначим класс аналитических в круге $|z| < 1$ функций $f(z) \in B_{q,\gamma}$, для которых $\|z^r f^{(r)}\|_{B_{q,\gamma}} < \infty$. Аналогичным образом через $B_{q,\gamma,a}^{(r)}$ обозначим класс аналитических в круге $|z| < 1$ функций $f(z) \in B_{q,\gamma}$, у которых $\|f_a^{(r)}\|_{B_{q,\gamma}} < \infty$.

Основными результатами второго параграфа являются следующие утверждения

Теорема 1.2.1. *Справедливо равенство*

$$\sup_{f \in B_{2,\gamma}} \frac{E_{n-1}^2(f)_{B_{2,\gamma}}}{E_{n-1}^2(z^r f^{(r)})_{B_{2,\gamma}}} = \frac{1}{\alpha_{n,r}^2} :=$$

$$:= \frac{1}{[n(n-1) \cdots (n-r+1)]^2}, \ n \geq r.$$

Теорема 1.2.2. *Для произвольной функции $f \in B_{2,\gamma,a}^{(r)}$ имеет место точное неравенство*

$$\frac{E_{n-1}(f)_{B_{2,\gamma}}}{E_{n-1}(f_a^{(r)})_{B_{2,\gamma}}} \leq \frac{1}{n^r}.$$

Более того, имеет место экстремальное равенство

$$\sup_{f \in B_{2,\gamma,a}^{(r)}} \frac{E_{n-1}(f)_{B_{2,\gamma}}}{E_{n-1}(f_a^{(r)})_{B_{2,\gamma}}} = \frac{1}{n^r}.$$

В третьем параграфе первой главы рассматриваются некоторые точные неравенства для алгебраических полиномов в пространстве $B_{q,\gamma}, \ 1 \leq q < \infty$. Экстремальные свойства действительных алгебраических и тригонометрических полиномов, соответственно, на конечном отрезке и на всей оси исследовались тщательно и всесторонне. Достаточно в этой связи упомянуть известные неравенства С.Н.Бернштейна, С.М.Никольского, С.Б.Стечкина и их обобщения в различных банаховых пространствах. Что же касается получения точных неравенств для комплексных алгебраических полиномов в комплексных банаховых пространствах, то здесь можно указать, например, работы Л.В.Тайкова [11, 38, 39], С.Б.Вакарчука [15], С.Б.Вакарчука и М.Ш.Шабозова [18], Ю.А.Фаркова [44], М.Ш.Шабозова и О.Ш.Шабозова $[51, 54, 55]$ и других.

Основные результаты третьего параграфа первой главы содержатся в следующих трёх теоремах, которые являются обобщениями классических неравенств С.Н.Бернштейна в пространствах Харди H_q $(1 \leq q \leq \infty)$ и весовом пространстве Бергмана $B_{q,\gamma}$ $(1 \leq q \leq \infty)$.

Теорема 1.3.1. *Для любого полинома $p_n(z) \in \mathcal{P}_n$ при всех $1 \leq q \leq \infty$ и $0 < R \leq 1$ и любых $r, n \in \mathbb{N}$ справедливо точное неравенство*

$$\|(p_n)_a^{(r)}\|_{H_{q,R}} \leq R^n n^r \|p_n\|_{H_q}, \tag{0.0.3}$$

в том смысле, что существует полином $q_n(z) \in \mathcal{P}_n$, для которого (0.0.3) обращается в равенство.

Неравенство (0.0.3) является обобщением известных неравенств для полиномов в пространстве Харди H_q, $1 \leq q \leq \infty$, доказанных Л.В.Тайковым [38], которое доказано (0.0.3) в случае $R = 1$.

Теорема 1.3.2. *Для любого полинома $p_n(z) \in \mathcal{P}_n$ при всех $1 \leq q \leq \infty$, $0 < R \leq 1$ и любых $n, r \in \mathbb{N}$ в пространстве $B_{q,\gamma}$ имеет место точное неравенство*

$$\|(p_n)_a^{(r)}\|_{B_{q,\gamma,R}} \leq R^n n^r \|p_n\|_{B_{q,\gamma}}. \tag{0.0.4}$$

Существует полином $q_n(z) \in \mathcal{P}_n$, для которого (0.0.4) обращается в равенство.

Неравенство (0.0.4) в некотором смысле является обобщением известного неравенства С.Н.Бернштейна для алгебраических комплексных полиномов в весовом пространстве $B_{q,\gamma}, 1 \leq q \leq \infty$. В случае $\gamma(|z|) \equiv 1$ неравенство

(0.0.4) ранее доказано С.Б.Вакарчуком [16]. Для обычной r-ой производной $f^{(r)}$ неравенство (0.0.4) доказано М.Ш.Шабозовым и М.Р.Лангаршоевым [55].

Теорема 1.3.3. *Для любого полинома $p_n(z) \in \mathcal{P}_n$ при всех $1 \le q \le \infty,\ 0 < R \le 1$ и любых $n, r \in \mathbb{N}$ имеет место точное неравенство*

$$\|(p_n)_a^{(r)}\|_{B_{q,R}} \le R^n n^r \left(\int\limits_0^1 \rho^{nq+1}\gamma(\rho)d\rho\right)^{-1/q} \|p_n\|_{B_{q,\gamma}},$$

которое обращается в равенство для $q_n(z) = az^n,\ a \in \mathbb{C}$.

В четвертом параграфе первой главы доказывается ряд точных неравенств для произвольных функций $f \in B_{q,\gamma}$.

Приводим основные результаты даного параграфа.

Лемма 1.4.1. *Пусть $f(z)$ - аналитическая в $|z| < 1$ функция. Тогда $\|f\|_{B_{q,\gamma,R}}$ есть неубывающая функция по $R \in (0,1]$.*

Теорема 1.4.1. *Пусть $r, n \in \mathbb{N}$ и $1 \le q \le \infty$. Тогда при любом $R \in (0,1]$ и $n \ge r$ справедливы точные неравенства*

$$E_{n-1}(f)_{B_{q,\gamma,R}} \le R^n \cdot n^{-r} E_{n-1}(f_a^{(r)})_{B_{q,\gamma}}, \tag{0.0.5}$$

$$\|f - S_{n-1}(f)\|_{B_{q,\gamma,R}} \le R^n \cdot n^{-r} \|f_a^{(r)} - S_{n-1}(f_a^{(r)})\|_{B_{q,\gamma}}, \tag{0.0.6}$$

где $S_k(\varphi, z)$ – k-я частная сумма тейлоровского разложения $\varphi(z)$. Знак равенств в неравенстве (0.0.5) реализует функция $f_0(z) = az^n,\ a \in \mathbb{C}$. Положим $E_{n-1}(\mathfrak{N})_{B_{q,\gamma}} = \sup\{E_{n-1}(f)_{B_{q,\gamma}} : f \in \mathfrak{N}\}$.

Из теоремы 1.4.1 вытекают следующие следствия

Следствие 1.4.1. *Справедливы равенства*

$$E_{n-1}(B_{q,\gamma,a}^{(r)})_{B_{q,\gamma,R}} = \sup\left\{E_{n-1}(f)_{B_{q,\gamma,R}} : f \in B_{q,\gamma,a}^{(r)}\right\} = R^n \cdot n^{-r}.$$

Следствие 1.4.2. *Для произвольной аналитической в круге $|z| < 1$ функции при любом $R \in (0,1]$ и $1 \le q \le \infty$ справедливо неравенство*

$$E_{n-1}(f)_{B_{q,\gamma,R}} \le R^n \cdot E_{n-1}(f)_{B_{q,\gamma}}. \tag{0.0.7}$$

Если, кроме того, для $|z| < 1$, $f(z) = \sum\limits_{k=n}^{\infty} c_k z^k$, *то*

$$\|f\|_{B_{q,\gamma,R}} \le R^n \cdot \|f\|_{B_{q,\gamma}}. \tag{0.0.8}$$

Очевидно, что неравенства (0.0.7) и (0.0.8) соответственно вытекают из неравенств (0.0.5) и (0.0.6) при $r = 0$.

Теорема 1.4.2. *Для произвольного* $f(z) \in H_q$, $1 \le q \le \infty$ *при любом* $R \in (0,1]$ *справедливо точное неравенство*

$$E_{n-1}(f)_{B_{q,\gamma,R}} \le R^n \cdot \left(\int\limits_0^1 \rho^{nq+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{1/q} \cdot E_{n-1}(f)_{H_q},$$

которое обращается в равенство для $f(z) = z^n \in H_q \cap B_{q,\gamma,R}$.

Из теоремы 1.4.2 вытекает

Следствие 1.4.3. *В условиях теоремы 1.4.2 справедливо точное неравенство*

$$E_{n-1}(f)_{B_{q,\gamma,R}} \le R^n \cdot n^{-r} \cdot \left(\int\limits_0^1 \rho^{nq+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{1/q} \cdot E_{n-1}(f_a^{(r)})_{H_q}.$$

Следствие 1.4.4. *Справедливо равенство*

$$E_{n-1}(H_{q,a}^{(r)})_{B_{q,\gamma,R}} = R^n \cdot n^{-r} \cdot \left(\int\limits_0^1 \rho^{nq+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{1/q}.$$

Теорема 1.4.3. *Пусть* $n, r \in \mathbb{N}$ *и* $R \in (0,1]$. *Тогда справедливо равенство*

$$\mathcal{E}_{n-1}(B_{q,\gamma,a}^{(r)}, \Lambda^*)_{B_{q,\gamma,R}} = \sup\left\{ \|f - V_{\Lambda^*,n-1}(f)\|_{B_{q,\gamma,R}} : f \in B_{q,\gamma,a}^{(r)} \right\} = R^n \cdot n^{-r},$$

где Λ^* *- треугольная матрица с элементами*

$$\lambda_{k,n-1}^* = \begin{cases} 1, & k = \overline{0, r-1}, \\ 1 - k^r \cdot (2n-k)^{-r} \cdot R^{2(n-k)}, & k = \overline{r, n-1}, \end{cases}$$

а наилучший линейный метод $V_{\Lambda^*,n-1}(f)$ *имеет вид:*

$$V_{\Lambda^*,n-1}(f,z)=\sum_{k=0}^{r-1}c_kz^k+\sum_{k=r}^{n-1}\left\{1-\left(\frac{k}{2n-k}\right)^rR^{2(n-k)}\right\}c_kz^k.$$

Из теоремы 1.4.3 вытекает

Следствие 1.4.5. *Пусть аналитическая в круге $|z|<1$ функция $f(z)$ имеет разложение $f(z)=\sum\limits_{k=n}^{\infty}c_kz^k$ и $\|f\|_{B_{q,\gamma}}<\infty$. Тогда для любого $R\in(0,1]$ справедливо неравенство*

$$\left\|\sum_{k=n}^{\infty}k^{-r}c_kz^k\right\|_{B_{q,\gamma,R}}\le n^{-r}\cdot R^n\cdot\|f\|_{B_{q,\gamma}}.$$

В заключительном пятом параграфе первой главы изучаются аппроксимативные свойства аналитических в круге U функций $f\in B_{q,\gamma}$, структурные свойства которых характеризуются модулями непрерывности высших порядков. Модуль непрерывности произвольной функции $f\in B_{q,\gamma}$ определяется равенством

$$\omega_m(f,t)_{q,\gamma}:=\sup_{|h|\le t}\|\Delta_h^m(f,\cdot,\cdot)\|_{q,\gamma}=$$

$$=\sup_{|h|\le t}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}\rho\gamma(\rho)|\Delta_h^m(f;\rho,u)|^qd\rho du\right)^{1/q}, \tag{0.0.9}$$

где

$$\Delta_m(f;\rho,u,h)=\sum_{k=0}^{m}(-1)^kC_m^kf\left(\rho e^{i(u+kh)}\right)$$

– разность m-го порядка функции $f\left(\rho e^{it}\right)$ по аргументу t с шагом h, которую назовем интегральным модулем непрерывности m-го порядка.

При решении ряда задач полиномиальной аппроксимации функций в действительной области часто используют различные модификации модуля непрерывности (0.0.9) порядка m ($m\in\mathbb{N}$). Так, например, иногда удобнее использовать следующую усредненную характеристику гладкости

$$\left|\tilde{\Delta}_m(f;\rho,\tau,u)\right|^q=\frac{1}{\tau^m}\int_0^{\tau}\cdots\int_0^{\tau}\|\Delta_{\bar{h}}^mf(\rho e^{iu})\|_{B_{q,\gamma}}^qdh_1\cdots dh_m, \tag{0.0.10}$$

где

$$\bar{h} = (h_1, h_2, \cdots h_m), \Delta^m_{\bar{h}} := \Delta^1_{h_1} \circ \cdots \circ \Delta^1_{h_m},$$

$$\Delta^1_{\bar{h}_j} f(\rho e^{iu}) := f(\rho e^{i(u+h_j)}) - f(\rho e^{iu}), \quad j = \overline{1, m}.$$

Используя соотношение (0.0.10) согласно определению (0.0.9), полагаем

$$\Omega_m(f,t)_{q,\gamma} = \sup_{|u|\le t} \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} \rho\gamma(\rho) |\tilde{\Delta}_m(f;\rho,\tau,u)|^q d\rho d\tau \right)^{1/q}.$$

Известно [19], что при всех $1 \le q \le \infty$, $\Omega_m(f,t)_{q,\gamma} \asymp \omega_m(f,t)_{q,\gamma}$.

Среди актуальных задач теории полиномиальных аппроксимации аналитических в круге функций в весовом пространстве Бергмана $B_{q,\gamma}$, $q \ge 1$ наиболее важной является экстремальная задача отыскания точных констант в неравенствах типа Джексона – Стечкина

$$E_{n-1}(f)_{q,\gamma} \le \chi n^{-r} U_m(f_a^{(r)}, \tau/n)_{q,\gamma}, \tau \ge 0,$$

где U_m- заданная характеристика гладкости функции $f \in B_{q,\gamma}$, например модули непрерывности m -го порядка ω_m или Ω_m, χ - некоторая константа, зависящая только от значений r и m.

Нам в дальнейшем потребуется

Лемма 1.5.1. *Для любой аналитической функции* $f \in B^{(r)}_{q,\gamma,a}$ *справедливо равенство*

$$\Omega_m^2(f_a^{(r)},t)_{2,\gamma} = \sup_{|u|\le t} \left\{ 2^m \sum_{k=1}^{\infty} k^{2r} |c_k|^2 \left(1 - \frac{\sin ku}{ku}\right)^m \int\limits_0^1 \rho^{2k+1}\gamma(\rho) d\rho \right\}.$$

В этом же параграфе введена в рассмотрение следующая экстремальная характеристика

$$\chi_{m,n,r,p}(\varphi,h) := \sup_{\substack{f\in B^{(r)}_{2,\gamma,a} \\ f_a^{(r)} \ne const}} \frac{2^{m/2} \cdot E_{n-1}(f)_{2,\gamma}}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(f_a^{(r)},t)_{2,\gamma} \cdot \varphi(t) dt \right)^{1/p}},$$

где $m,n\in\mathbb{N}, r\in\mathbb{Z}_+, p,h\in\mathbb{R}_+, \varphi$ - неотрицательная суммируемая на отрезке $[0,h]$ функция.

Целью данной работы является распространение известного неравенства М.Ш.Шабозова и Г.А.Юсупова [57], доказанного для множеств $L_2^{(r)}[0,2\pi]$ - периодических r-раз дифференцируемых функций f для аналитических в единичном круге функций из пространство $B_{2,\gamma,a}^{(r)}$, и его последующее применение в задачах вычисления точных значений различных n-поперечников.

Имеет место следующее утверждение

Теорема 1.5.1. *Пусть $m,n\in\mathbb{N},\ r\in\mathbb{Z}_+,\ 0<p\le 2,\ 0<h\le\pi/n,\ \varphi$ - весовая на $[0,h]$ функция. Тогда справедливы равенства*

$$\chi_{m,n,r,p}(\varphi,h)=\{b_{n,m,r,p}(\varphi;h)\}^{-1},$$

где

$$b_{n,m,r,p}(\varphi;h)=n^r\cdot\left(\int\limits_0^h\left(1-\frac{\sin nt}{nt}\right)^{mp/2}\cdot\varphi(t)dt\right)^{1/p}.$$

Из теоремы 1.5.1 вытекают следующие следствия

Следствие 1.5.1. *Пусть $\varphi(t)\equiv 1,\ m,n\in\mathbb{N},\ r\in\mathbb{Z}_+,\ 0<p\le 2$ и $0<h\le 3\pi/(4n)$. Тогда имеет место равенство*

$$\sup_{\substack{f\in B_{2,\gamma,a}^{(r)}\\ f_a^{(r)}\neq const}}\frac{2^{m/2}\cdot n^{r-1/p}\cdot E_{n-1}(f)_{2,\gamma}}{\left(\int\limits_0^h\Omega_m^p(f_a^{(r)},t)_{2,\gamma}dt\right)^{1/p}}=\left(\int\limits_0^{nh}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{mp/2}dt\right)^{-1/p}. \qquad (0.0.11)$$

В частности, при $p=2/m,\ m\in\mathbb{N},\ r\in\mathbb{Z}_+,\ r\ge m/2$ из (0.0.11) следует, что

$$\sup_{\substack{f\in B_{2,\gamma,a}^{(r)}\\ f_a^{(r)}\neq const}}\frac{2^{m/2}\cdot n^{r-\frac{m}{2}}\cdot E_{n-1}(f)_{2,\gamma}}{\left(\int\limits_0^h\Omega_m^{2/m}(f_a^{(r)},t)_{2,\gamma}dt\right)^{m/2}}=\frac{1}{(nh-Si(nh))^{m/2}},$$

где $Si(x)=\int\limits_0^x\frac{\sin t}{t}dt$ - интегральный синус.

Следствие 1.5.2. *Пусть* $\varphi(t)\equiv t$, $m,n\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $p=2/m$, $r\geq m/2$ $0<h\leq\pi/n$. *Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{\substack{f\in B_{2,\gamma,a}^{(r)}\\ f_a^{(r)}\neq const}}\frac{n^{r-\frac{m}{2}}E_{n-1}(f)_{2,\gamma}}{\left(\int\limits_0^h t\Omega_m^{2/m}(f_a^{(r)},t)_{2,\gamma}dt\right)^{m/2}}=$$

$$=\{(nh)^2-2(1-\cos nh)\}^{-m/2}. \qquad (0.0.12)$$

В частном случае при $h=\pi/n$ *из (0.0.12) получаем*

$$\sup_{\substack{f\in B_{2,\gamma,a}^{(r)}\\ f_a^{(r)}\neq const}}\frac{n^{r-\frac{m}{2}}\cdot E_{n-1}(f)_{2,\gamma}}{\left(\int\limits_0^{\pi/n} t\Omega_m^{2/m}(f_a^{(r)},t)_{2,\gamma}dt\right)^{m/2}}=\frac{1}{(\pi^2-4)^{m/2}}.$$

В следующей теореме утверждение теоремы 1.5.1 распространено на величины наилучших приближений $E_{n-1}(f_a^{(r-s)})_{2,\gamma}$ последовательных производных $f_a^{(r-s)}$ $(s=1,2,...,r)$ множеством $\mathcal{P}_{n-1}$.

Теорема 1.5.2. *Пусть* $m,n\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $s=1,2,...,r$, $0<h\leq 3\pi/(4n)$, $\varphi\geq 0$ - *весовая на отрезке* $[0,h]$ *функция. Тогда имеет место равенство*

$$\sup_{\substack{f\in B_{2,\gamma,a}^{(r)}\\ f_a^{(r)}\neq const}}\frac{2^{m/2}\cdot n^s\cdot E_{n-1}(f_a^{(r-s)})_{2,\gamma}}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(f_a^{(r)},t)_{2,\gamma}\cdot\varphi(t)dt\right)^{1/p}}=$$

$$=\left(\int\limits_0^h\left(1-\frac{\sin nt}{nt}\right)^{mp/2}\varphi(t)dt\right)^{-1/p}.$$

Из теоремы 1.5.2 вытекает следующие утверждение

Следствие 1.5.3. *Пусть* $m,n\in\mathbb{N}$; $0<p\leq 2$; $r\in\mathbb{Z}_+$; $s=0,1,2,...,r$; $\varphi(t)\equiv 1$, $t\in(0,h]$, $h\in(0,\pi/n]$. *Тогда имеют место равенства*

$$\sup_{\substack{f\in B_{2,\gamma,a}^{(r)}\\ f_a^{(r)}\neq const}}\frac{2^{m/2}\cdot n^s\cdot E_{n-1}(f_a^{(r-s)})_{2,\gamma}}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(f_a^{(r)},t)_{2,\gamma}dt\right)^{1/p}}=$$

$$= \left(\int_0^h \left(1 - \frac{\sin nt}{nt}\right)^{mp/2} dt \right)^{-1/p}. \qquad (0.0.13)$$

В частности, при $p = 2/m$, $m \in \mathbb{N}$ *из (0.0.13) получаем*

$$\sup_{\substack{f \in B_{2,\gamma,a}^{(r)} \\ f_a^{(r)} \neq const}} \frac{2^{m/2} \cdot n^{s-m/2} \cdot E_{n-1}(f_a^{(r-s)})_{2,\gamma}}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^{2/m}(f_a^{(r)}, t)_{2,\gamma} dt\right)^{m/2}} = (nh - Si(nh))^{-m/2}.$$

Следствие 1.5.4. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N}$; $p = 2/m$; $r \in \mathbb{Z}_+$; $s = 0, 1, 2, ..., r$; $\varphi(t) \equiv 1$, $0 < t \leq h$, $0 < h \leq \pi/n$. *Тогда справедливы равенства*

$$\sup_{\substack{f \in B_{2,\gamma,a}^{(r)} \\ f_a^{(r)} \neq const}} \frac{n^{s-m/2} \cdot E_{n-1}(f_a^{(r-s)})_{2,\gamma}}{\left(\int\limits_0^h t\Omega_m^{2/m}(f_a^{(r)}, t)_{2,\gamma} dt\right)^{m/2}} =$$

$$= \{(nh)^2 - 2(1 - \cos nh)\}^{-m/2}. \qquad (0.0.14)$$

Из равенств (0.0.13) и (0.0.14) при $s = r$ *соответственно получаем (0.0.11) и (0.0.12).*

Во второй главе рассматривается задача вычисления точных значений различных n-поперечников классов аналитических функций, принадлежащих весовому пространству Бергмана $B_{q,\gamma}$ $(1 \leq q \leq \infty)$. Напомним необходимые обозначения и определения из первого параграфа второй главы, нужные нам в дальнейшем.

Пусть X – произвольное банахово пространство; S – единичный шар в нем; $\mathfrak{N}$ – некоторое выпуклое центрально-симметричное множество в X; $L_n \subset X$ - n-мерное линейное подпространство; $L^n \subset X$ – подпространство коразмерности n; $\mathcal{L}(X, L_n)$ – множество всех линейных ограниченных операторов, отображающих X в L_n; $\mathcal{L}^{\perp}(X, L_n)$ – подмножество проекторов в $\mathcal{L}(X, L_n)$.

Приближение фиксированного множества $\mathfrak{N} \subset X$ фиксированным подпространством $L_n \subset X$ определяется равенством

$$E_n(\mathfrak{N})_X = E(\mathfrak{N}, L_n)_X := \sup\left\{\inf\left\{\|f-\varphi\|_X : \varphi \in L_n\right\} : f \in \mathfrak{N}\right\}. \qquad (0.0.15)$$

Величина

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{N})_X = \mathcal{E}(\mathfrak{N}, L_n)_X :=$$

$$:= \inf\{\sup\{\|f - \Lambda(f)\|_X : f \in \mathfrak{N}\} : \Lambda \subset \mathcal{L}(X, L_n)\} \qquad (0.0.16)$$

характеризует наилучшее линейное приближение множества $\mathfrak{N}$ элементами подпространства $L_n \subset X$. Линейный оператор $\Lambda^*(\Lambda^* \subset \mathcal{L}(X, L_n))$, если он существует и реализует в (0.0.16) точную нижнюю грань, является наилучшим для $\mathfrak{N}$ линейным методом приближения;

$$\mathcal{E}_n^{\perp}(\mathfrak{N})_X = \mathcal{E}^{\perp}(\mathfrak{N}, L_n)_X =$$

$$= \inf\{\sup\{\|f - \Lambda f\|_X : f \in \mathfrak{M}\} : \Lambda \subset \mathcal{L}^{\perp}(X, L_n)\} \qquad (0.0.17)$$

– наилучшее приближение множества $\mathfrak{N} \subset X$ проекторами в пространстве X. Очевидно, что для величин (0.0.15) и (0.0.17), согласно определению, выполняется соотношение

$$E_n(\mathfrak{N})_X \leq \mathcal{E}_n(\mathfrak{N})_X \leq \mathcal{E}_n^{\perp}(\mathfrak{N})_X. \qquad (0.0.18)$$

Величины ([43], [31], стр. 341-342)

$$b_n(\mathfrak{N}, X) = \sup\{\sup\{\varepsilon > 0 : \varepsilon S \cap L_{n+1} \subset \mathfrak{N}\} : L_{n+1} \subset X\}, \qquad (0.0.19)$$

$$d_n(\mathfrak{N}, X) := \inf\{E(\mathfrak{N}, L_n)_X : L_n \subset X\}, \qquad (0.0.20)$$

$$d^n(\mathfrak{N}, X) = \inf\{\sup\{\|f\|_X : f \in \mathfrak{N} \cap L^n\} : L^n \subset X\}, \qquad (0.0.21)$$

$$\delta_n(\mathfrak{N}, X) = \inf\{\mathcal{E}(\mathfrak{N}, L_n)_X : L_n \subset X\}, \qquad (0.0.22)$$

$$\pi_n(\mathfrak{N}, X) = \inf\{\mathcal{E}^{\perp}(\mathfrak{N}, L_n) : L_n \subset X\} \qquad (0.0.23)$$

называют соответственно бернштейновским, колмогоровским, гельфандовским, бернштейновским, линейным и проекционным n-поперечниками.

Приведём определение классов функций, для которых во втором параграфе вычислены значения вышеперечисленных n-поперечников.

Пусть $\Psi_i(t)$ $(i=\overline{1,3};\ 0\le t<\infty)$ - непрерывные, неубывающие функции такие, что $\Psi_i(0)=0$. Символом $W_{p,a}^{(r)}(\Omega_m,\Psi_i)$ $\quad(i=\overline{1,3};\ 0<p\le 2)$, $m\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$ обозначим классов функций $f\in B_{2,\gamma,a}^{(r)}$, для которых при любом $h\in\mathbb{R}_+$, соответственно, имеют место неравенства

$$\int\limits_0^h \Omega_m^p(f_a^{(r)},t)_{2,\gamma}dt\le\Psi_1(h),$$

$$\frac{1}{h}\int\limits_0^h \Omega_m^p(f_a^{(r)},t)_{2,\gamma}dt\le\Psi_2(h),$$

$$\frac{2}{h^2}\int\limits_0^h t\Omega_m^p(f_a^{(r)},t)_{2,\gamma}dt\le\Psi_3(h).$$

Если $\mathfrak{N}$ – некоторый класс функций $f\in B_{2,\gamma,a}^{(r)}$, то наилучшее приближение этого класса в пространстве $B_{2,\gamma}$ обозначим

$$E_{n-1}(\mathfrak{N})_{B_{2,\gamma}}=\sup\Big\{E_{n-1}(f)_{B_{2,\gamma}}:\ f\in\mathfrak{N}\Big\}.$$

При $t=0$ полагая значение функции $\dfrac{\sin t}{t}$ равным 1, через t_* обозначим величину её аргумента, при котором эта функция достигает на полупрямой $\mathbb{R}_+:=[0,\infty)$ своё наименьшее значение. При этом число t_* $(4,49<t_*<4,51)$ есть минимальный положительный корень уравнения $t=\operatorname{tg}t$. Следуя обозначением [17], полагаем

$$\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)_*:=\begin{cases}1-\dfrac{\sin t}{t}, & \text{если }\ 0\le t\le t_*,\\[2mm] 1-\dfrac{\sin t_*}{t_*}, & \text{если }\ t_*\le t\le\infty.\end{cases}$$

Приведём основные результаты второго параграфа второй главы.

Теорема 2.2.1. *Пусть функция* Ψ_1 *при любых значениях* $h\in\mathbb{R}_+$, $m,n,r\in\mathbb{N}$, $1/r<p\le 2$, *удовлетворяет условию*

$$\left(\frac{\Psi_1(h)}{\Psi_1(\pi/n)}\right)^p\ge\int\limits_0^{nh}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)_*^{mp/2}dt\cdot\left\{\int\limits_0^{\pi}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{mp/2}dt\right\}^{-1}.\quad(0.0.24)$$

Тогда выполняются равенства

$$\lambda_n\left(W^{(r)}_{p,a}\left(\Omega_m,\Psi_1\right),B_{2,\gamma}\right)=E_{n-1}\left(W^{(r)}_{p,a}(\Omega_m,\Psi_1)\right)_{B_{2,\gamma}}=$$

$$=2^{-m/2}\left\{\int\limits_0^\pi\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{mp/2}dt\right\}^{-1/p}\cdot n^{-r+\frac{1}{p}}\cdot\Psi_1\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

где $\lambda_n(\cdot)$ *- любой из перечисленных выше* n*-поперечников. При этом множество мажорант* Ψ_1*, удовлетворяющих ограничению (0.0.24), не пусто. Этому условию удовлетворяет, например, функция* $\Psi_1^*=t^{\alpha/p}$*, где*

$$\alpha:=\frac{\pi}{\int\limits_0^\pi\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{mp/2}dt}.$$

Следствие 2.2.1. *В условиях теоремы 2.2.1 при* $r\geq m/2$*,* $m\in\mathbb{N}$ *справедливы равенства*

$$\lambda_n\left(W^{(r)}_{2/m,a}\left(\Omega_m,\Psi_1\right),B_{2,\gamma}\right)=E_{n-1}\left(W^{(r)}_{2/m,a}\left(\Omega_m,\Psi_1\right)\right)_{B_{2,\gamma}}=$$

$$=\left\{2\left(\pi-Si(\pi)\right)\right\}^{-m/2}\cdot n^{-r+\frac{m}{2}}\cdot\Psi_1(\frac{\pi}{n}),$$

где $Si(x)$ *- интегральный синус.*

Теорема 2.2.2. *Пусть* $m,n\in\mathbb{N}$*,* $r\in\mathbb{Z}_+$*,* $0<p\leq 2$ *и функция* Ψ_2 *при любых значениях* $h\in\mathbb{R}_+$ *удовлетворяет ограничению*

$$\left(\frac{\Psi_2(h)}{\Psi_2(\pi/n)}\right)^p\geq$$

$$\geq\frac{\pi}{nh}\cdot\left\{\int\limits_0^{nh}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)_*^{mp/2}dt\right\}\cdot\left\{\int\limits_0^\pi\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{mp/2}dt\right\}^{-1}. \qquad (0.0.25)$$

Тогда (при $\varphi(t)\equiv 1$*) выполняются равенства*

$$\lambda_n\left(W^{(r)}_{p,a}\left(\Omega_m,\Psi_2\right),B_{2,\gamma}\right)=E_{n-1}\left(W^{(r)}_{p,a}\left(\Omega_m,\Psi_2\right)\right)_{B_{2,\gamma}}=$$

$$=2^{-m/2}\cdot\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{mp/2}dt\right\}^{-1/p}\cdot n^{-r}\cdot\Psi_2\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

где $\lambda_n(\cdot)$ *- любой из* n*-поперечников* $b_n(\cdot)$, $d_n(\cdot)$, $d^n(\cdot)$, $\delta_n(\cdot)$, $\pi_n(\cdot)$. *Мажоранта* $\Psi_2^*(t) = t^{\alpha/p}$, *где*

$$\alpha := \frac{\pi}{\int\limits_0^\pi \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)^{mp/2} dt} - 1$$

удовлетворяет условию (0.0.25).

Следствие 2.2.2. *При выполнении условия теоремы 2.2.2 выполняются равенства*

$$\lambda_n(W^{(r)}_{2/m,a}(\Omega_m, \Psi_2), B_{2,\gamma}) = \mathcal{E}_{n-1}(W^{(r)}_{2/m,a}(\Omega_m, \Psi_2) =$$

$$= \left\{\frac{\pi}{2(\pi - Si(\pi))}\right\}^{m/2} \cdot \Psi_2\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Теорема 2.2.3. *Если функция* Ψ_2 *при любом* $h \in \mathbb{R}_+$ *и* $m, n \in \mathbb{N}$, $0 < p \leq 2$, $r \in \mathbb{Z}_+$ *удовлетворяет ограничению (2.2.20), то для* $s \in \mathbb{R}_+$ *справедливы равенства*

$$\sup\left\{E_{n-1}(f^{(r-s)})_{2,\gamma} : f \in W^{(r)}_{p,a}(\Omega_m, \Psi_2)\right\} =$$

$$= 2^{-m/2} \cdot n^{-s} \left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)^{mp/2} dt\right\}^{-1/p} \cdot \Psi_2\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Теорема 2.2.4. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ *и функция* Ψ_3 *при любых значениях* $h \in \mathbb{R}_+$ *удовлетворяет ограничению*

$$\left(\frac{\Psi_3(h)}{\Psi_3(\pi/n)}\right)^p \geq \left(\frac{\pi}{nh}\right)^2 \cdot \left\{\int\limits_0^{nh} t\left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)_*^{mp/2} dt\right\} \cdot \left\{\int\limits_0^{\pi} t\left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)^{mp/2} dt\right\}^{-1}.$$

Тогда (при $\varphi(t) \equiv t$*) имеют место равенства*

$$\lambda_n\left(W^{(r)}_{p,a}\left(\Omega_m, \Psi_3\right), B_{2,\gamma}\right) = E_{n-1}\left(W^{(r)}_{p,a}\left(\Omega_m, \Psi_3\right)\right)_{B_{2,\gamma}} =$$

$$= 2^{-(m+\frac{1}{p})}\left\{\frac{1}{\pi^2} \cdot \int\limits_0^\pi t\left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)^{mp/2} dt\right\}^{-1/p} \cdot n^{-r} \cdot \Psi_3\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

где $\lambda_n(\cdot)$ – любой из перечисленных выше n-поперечников.

Следствие 2.2.3. *Если выполнены все условия теоремы 2.2.3, то при $p = 2/m$, $m \in \mathbb{N}$ имеют место равенства*

$$\lambda_n\left(W^{(r)}_{2/m,a}\left(\Omega_m, \Psi_3\right), B_{2,\gamma}\right) = E_{n-1}\left(W^{(r)}_{2/m,a}\left(\Omega_m, \Psi_3\right)\right)_{B_{2,\gamma}} =$$

$$= \left\{2\left(1 - \frac{4}{\pi^2}\right)\right\}^{-m/2} \cdot n^{-r} \cdot \Psi_3(\frac{\pi}{n}).$$

ГЛАВА I

Приближении аналитических функций в весовом пространстве Бергмана $B_{q,\gamma}(D)$

§1.1. Определение и некоторые факты о пространстве Бергмана и весовом пространстве Бергмана.

1.1.1. Общие сведения о пространстве Бергмана $B_{q,\gamma}(D)$

Определение. *Пусть D – односвязная ограниченная область в плоскости комплексного переменного $\mathbb{C}$, $f(z)$ – аналитическая в D функция, $\gamma(|z|)$ – произвольная неотрицательная ненулевая суммируемая по области D весовая функция, такая, что*

$$\iint\limits_{(D)} \gamma(|z|) \cdot |f(z)|^q d\sigma = \iint\limits_{(D)} \gamma\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) |f(x+iy)|^q d\sigma < \infty, \qquad (1.1.1)$$

где $d\sigma = dxdy$ – элемент площади, а интеграл понимается в смысле Лебега. Множество всех аналитических функций $f(z) \in D$, для которых имеет место условие (1.1.1), образует банахово пространство, которое называется весовым пространством Бергмана $B_{q,\gamma}(D), 1 \leq q \leq \infty$ [14].

В дальнейшем полагаем

$$D := U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

и будем рассматривать пространство Бергмана $B_{q,\gamma}$ функций $f(z)$, аналитических в единичном круге U для которых

$$\|f\|_{B_{q,\gamma}} = \left(\frac{1}{2\pi} \iint\limits_{|z|<1} \gamma(|z|) \cdot |f(z)|^q d\sigma\right)^{1/q} < \infty, \qquad (1.1.2)$$

где $\gamma(|z|)$ – весовая функция, а $d\sigma = dxdy$ – элемент площади и интеграл понимается в смысле Лебега.

Переходя при помощи замены переменной в полярные координаты, норму (1.1.2) в весовом пространстве Бергмана $B_{q,\gamma}$ запишем в следующем виде

$$\|f\|_{B_{q,\gamma}} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho\gamma(\rho) |f(\rho e^{it})|^q d\rho dt \right)^{1/q} =$$

$$= \left(\int_0^1 \rho\gamma(\rho) M_q^q(f,\rho) d\rho \right)^{1/q} < \infty, \ 1 \le q \le \infty. \tag{1.1.3}$$

Если положить в (1.1.3) $\gamma(\rho) \equiv 1$, получаем пространство аналитических в единичном круге функций $B_{q,1} \equiv B_q, \ 1 \le q \le \infty$, изучение которых началось со знаменитой работы С.Бергмана [14], в которой изучена общая теория и различные приложения этого пространства.

Весьма частным случаем весовых пространств Бергмана являются введенные Г.Харди и И.Литтлвудом в работе [46] и введённом П.Л.Дьюреном, Б.В.Ромбергом и А.Л.Шильдсом [29] банаховы пространства $B_{q,(1-\rho)^{1/q-2}}$, $0 < q < 1$, множество аналитических функций $f(z)$, для которых

$$\|f\|_{B_{q,(1-\rho)^{1/q-2}}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1-\rho)^{1/q-2} \left| f(\rho e^{it}) \right| d\rho dt < \infty.$$

Наиболее известным специальным случаем весового пространства Бергмана является банахово пространство $B(p,q,\lambda)$ аналитических в U функций $f(z)$ для которых

$$\|f\|_{B_{p,q,\lambda}} = \left(\int_0^1 (1-\rho)^{\lambda(1/p-1/q)-1} M_q^\lambda(\rho,f) d\rho \right)^{1/\lambda} < +\infty,$$

где

$$M_q(\rho,f) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(\rho e^{it}) \right|^q dt \right)^{1/q},$$

$0 < p < q \le \infty, \ q \ge 1, \ 1 \le \lambda \le \infty$, изучавшееся М.И.Гварадзе [22].

Приводим описание модулей непрерывности высших порядков в пространстве $B_{q,\gamma}, 1 \leq q \leq \infty$. Сначала введём понятие модуль непрерывности первого порядка равенством

$$\omega(f,t)_{B_{q,\gamma}} = \sup_{|h|\leq t} \|f(\rho e^{i(h+\cdot)}) - f(\rho e^{i(\cdot)})\|_{B_{q,\gamma}} =$$

$$= \sup_{|h|\leq t} \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} \rho\gamma(\rho) \left| f(\rho e^{i(t+h)}) - f(\rho e^{it}) \right|^q d\rho dt \right)^{1/q}.$$

Модуль гладкости определим равенством

$$\omega_2(f,t)_{B_{q,\gamma}} = \sup_{|h|\leq t} \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} \rho\gamma(\rho) \left| f(\rho e^{i(t+h)}) - 2f(\rho e^{it}) + f(\rho e^{i(t-h)}) \right|^q d\rho dt \right)^{1/q},$$

поскольку функциям $\omega(f,t)_{B_{q,\gamma}}$ и $\omega_2(f,t)_{B_{q,\gamma}}$ присуще все свойства модулей непрерывности и модулей гладкости [28].

При $m \geq 2$ величину

$$\omega_m(f,t)_{B_{q,\gamma}} = \sup\left\{ \|\Delta_m(f,\cdot,\cdot,h)\|_{B_{q,\gamma}} : |h| \leq t \right\} =$$

$$= \sup\left\{ \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} \rho\gamma(\rho) |\Delta_m(f;\rho,u,h)|^q d\rho du \right)^{1/q} : |h| \leq t \right\}, \qquad (1.1.4)$$

где

$$\Delta_m(f;\rho,u,h) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_m^k f\left(\rho e^{i(u+kh)}\right)$$

– обычная разность m-го порядка функции $f\left(\rho e^{it}\right)$ по аргументу t с шагом h, назовем модулем непрерывности m-го порядка. В качестве примера вычислим модуль непрерывности m-го порядка функции $f_0(z) = z^n$.

Имеем

$$\Delta_m(f_0;\rho,u,h) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_m^k f_0\left(\rho e^{i(u+kh)}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_m^k \left(\rho e^{i(u+kh)}\right)^n = \rho^n e^{inu} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_m^k \left(e^{inh}\right)^k =$$

$$= \rho^n e^{inu} \sum_{k=0}^{m} C_m^k \left(-e^{inh}\right)^k = \rho^n e^{inu} \left(1 - e^{inh}\right)^m,$$

откуда получаем

$$\|\Delta_m(f_0, \cdot, \cdot, h)\|_{B_{q,\gamma}}^q = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} \rho\gamma(\rho) |\Delta_m(f_0; \rho, u, h)|^q d\rho dt =$$

$$= \left|1 - e^{inh}\right|^{mq} \cdot \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} \rho^{nq+1}\gamma(\rho) d\rho dt = \left|1 - e^{inh}\right|^{mq} \cdot \int\limits_0^1 \rho^{nq+1}\gamma(\rho) d\rho =$$

$$= |1 - (\cos nh + i \sin nh)|^{mq} \cdot \int\limits_0^1 \rho^{nq+1}\gamma(\rho) d\rho =$$

$$= \left|\sqrt{2(1 - \cos nh)}\right|^{mq} \cdot \int\limits_0^1 \rho^{nq+1}\gamma(\rho) d\rho = \left(2 \sin \frac{nh}{2}\right)^{mq} \cdot \int\limits_0^1 \rho^{nq+1}\gamma(\rho) d\rho.$$

Из равенство (1.1.4) сразу следует, что

$$\omega_m(f_0, t)_{B_{q,\gamma}} = \left(2 \sin \frac{nt}{2}\right)^m \cdot \left(\int\limits_0^1 \rho^{nq+1}\gamma(\rho) d\rho\right)^{1/q}, \ 1 \leq q \leq \infty.$$

Пусть $r \in \mathbb{N}$. Через $f^{(r)}(z) = d^r f / dz^r$ обозначим обычную производную функции $f(z)$, а символом

$$f_a^{(r)}(z) = \partial^r f(\rho e^{it}) / \partial t^r, \ 0 \leq \rho < 1$$

обозначим хорошо известную производную r-го порядка по аргументу t функции $f(z)$.

При этом положим

$$f_a^{'}(z) = f^{'}(z) \cdot z_t^{'} = f^{'}(z) \cdot zi$$

и вообще для $r \geq 2$ справедливо рекуррентное соотношение

$$f_a^{(r)}(z) = \left\{f_a^{(r-1)}(z)\right\}_a^{'}.$$

Вычислим модуль непрерывности m-го порядка для производных r-го порядка функции $f_0(z) = z^n \in B_{q,\gamma}, 1 \le q \le \infty$. Всюду, ради краткости, полагая

$$\alpha_{nr} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) := n!\left\{(n-r)!\right\}^{-1},\ n \ge r,$$

будем иметь

$$f_0^{(r)}(z) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)\cdot z^{n-r} = \alpha_{nr}\cdot z^{n-r},$$

$$f_{0,a}^{(r)}(z) = \partial^r f_0(\rho e^{it})/\partial t^r = (in)^r \cdot \rho^n e^{int} = (in)^r z^n.$$

Простыми вычислениями, из (1.1.4) получаем

$$\omega_m(z^r f_0^{(r)}, t)_{B_{q,\gamma}} = \left(2\sin\frac{nt}{2}\right)^m \cdot \alpha_{nr}\cdot\left(\int\limits_0^1 \rho^{nq+1}\gamma(\rho)d\rho\right)^{1/q}, \qquad (1.1.5)$$

$$\omega_m(f_{0,a}^{(r)}, t)_{B_{q,\gamma}} = \left(2\sin\frac{nt}{2}\right)^m \cdot n^r\cdot\left(\int\limits_0^1 \rho^{nq+1}\gamma(\rho)d\rho\right)^{1/q}. \qquad (1.1.6)$$

Легко доказать, что если у функции

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k,\ z = \rho e^{it},\ 0 \le \rho < 1, \qquad (1.1.7)$$

принадлежащей пространству $B_{q,\gamma}, 1 \le q \le \infty$, ее производные r-го порядка

$$f_a^{(r)}(z) = \sum_{k=1}^{\infty}(ik)^r c_k \rho^k e^{ikt} \equiv i^r \sum_{k=1}^{\infty} k^r c_k \cdot z^k, \qquad (1.1.8)$$

$$f^{(r)}(z) = \sum_{k=r}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-r+1)c_k z^{k-r} \equiv \sum_{k=r}^{\infty}\alpha_{k,r}c_k\cdot z^{k-r}, \qquad (1.1.9)$$

принадлежат пространству $B_{2,\gamma}$, то имеют место равенства

$$\omega_m^2(f_a^{(r)}, t)_{B_{2,\gamma}} =$$

$$= 2^m \sup_{|u|\le t}\left\{\sum_{k=0}^{\infty} k^{2r}\cdot|c_k|^2(1-\cos ku)^m \cdot \int\limits_0^1 \rho^{2k+1}\gamma(\rho)d\rho\right\}, \qquad (1.1.10)$$

$$\omega_m^2(z^r f^{(r)}, t)_{B_{2,\gamma}} =$$

$$= 2^m \sup_{|u|\le t} \left\{ \sum_{k=r}^{\infty} \alpha_{kr}^2 \cdot |c_k|^2 (1-\cos ku)^m \cdot \int_0^1 \rho^{2k+1}\gamma(\rho)d\rho \right\}. \qquad (1.1.11)$$

Равенствами (1.1.10) и (1.1.11) воспользуемся при выводе основных теорем в последующих параграфах.

§1.2. Наилучшее полиномиальное приближение аналитических функций в пространстве $B_{q,\gamma}$.

В последние десятилетия в теории приближения интенсивно изучались экстремальные задачи наилучшего полиномиального приближения аналитических в единичном круге функций в комплексных банаховых пространствах. Так, например, указанные экстремальные задачи в пространствах Харди H_p, $p \geq 1$ изучались Л.В.Тайковым [38–40], Н.Айнуллоевым и Л.Тайковым [11], С.Б.Вакарчуком [15], М.Ш.Шабозовым [47–56] и другими (см., например, работы [11–13], [47] и [49]).

В обычном пространстве Бергмана B_q, $q \geq 1$ систематическое изучение экстремальных задач теории полиномиального приближения начал С.Б.Вакарчук [16]. Указанная тематика в дальнейшем была продолжена в работах М.Ш.Шабозова [50], М.Ш.Шабозова и О.Ш.Шабозова [51] и М.Ш. Шабозова и М.Р. Лангаршоева [55]. Подобные результаты для других пространств аналитических функций нам неизвестны.

В этом параграфе, базируясь на схеме рассуждений вышеперечисленных работ, многие известные результаты перенесены на случай аналитических в единичном круге U функций, принадлежащих весовому пространству Бергмана. Сначала приводим необходимые понятия и определения, нужные нам для дальнейшего изложения.

Через $\mathcal{P}_n$ обозначим подпространство алгебраических полиномов, комплексного переменного степени $\leq n$, то есть всюду далее

$$\mathcal{P}_n := \left\{ p_n(z) : p_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k,\ a_k \in \mathbb{C},\ |a_k| \neq 0 \right\}.$$

Величину

$$E_{n-1}(f)_{B_{q,\gamma}} = \inf\{\|f - p_{n-1}\|_{B_{q,\gamma}} : p_{n-1}(z) \in \mathcal{P}_{n-1}\} \tag{1.2.1}$$

назовём наилучшим приближением функции $f(z)$ множеством $\mathcal{P}_{n-1}$ в пространстве $B_{q,\gamma}$, $1 \leq q \leq \infty$. При $q = 2$ имеет место следующее утверждение

Лемма 1.2.1. *Справедливо равенство*

$$E_{n-1}^2(f)_{B_{2,\gamma}} := \inf\left\{\|f-p_{n-1}\|_{B_{2,\gamma}}^2 : p_{n-1}(z)\in\mathcal{P}_{n-1}\right\} =$$

$$=\sum_{k=n}^{\infty}|c_k|^2\int\limits_0^1\gamma(\rho)\rho^{2k+1}d\rho. \tag{1.2.2}$$

Доказательство. В самом деле, в силу (1.1.3) и (1.2.1) имеем:

$$E_{n-1}^2(f)_{B_{2,\gamma}} := \inf\left\{\|f-p_{n-1}\|_{B_{2,\gamma}}^2 : p_{n-1}(z)\in\mathcal{P}_{n-1}\right\} =$$

$$=\inf_{p_{n-1}\in\mathcal{P}_{n-1}}\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{|z|<1}\gamma(|z|)\left|f(z)-p_{n-1}(z)\right|^2dz =$$

$$=\inf_{p_{n-1}\in\mathcal{P}_{n-1}}\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi}\rho\gamma(\rho)|f(\rho e^{it})-p_{n-1}(\rho e^{it})|^2d\rho dt =$$

$$=\inf_{p_{n-1}\in\mathcal{P}_{n-1}}\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi}\rho\gamma(\rho)\left|\sum_{k=0}^{\infty}c_k(\rho e^{it})^k-\sum_{k=0}^{n-1}d_k(\rho e^{it})^k\right|^2d\rho dt =$$

$$=\inf_{p_{n-1}\in\mathcal{P}_{n-1}}\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi}\rho\gamma(\rho)\left|\sum_{k=0}^{n-1}(c_k-d_k)(\rho e^{it})^k+\sum_{k=n}^{\infty}c_k(\rho e^{it})^k\right|^2d\rho dt =$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi}\rho\gamma(\rho)\left|\sum_{k=n}^{\infty}c_k(\rho e^{it})^k\right|^2d\rho dt =$$

$$=\frac{1}{2\pi}\cdot\sum_{k=n}^{\infty}|c_k|^2\cdot\int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi}\rho^{2k+1}\gamma(\rho)d\rho dt=\sum_{k=n}^{\infty}|c_k|^2\cdot\int\limits_0^1\gamma(\rho)\rho^{2k+1}d\rho,$$

чем и завершаем доказательство леммы 1.2.1.

В дальнейшем, ради удобства, положено

$$\alpha_{nr}=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1),\ n\geq r.$$

Далее $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел; $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N}\cup\{0\}$, $\mathbb{R}_+=(0,+\infty)$. Обозначим через $f^{(r)}(z)$ производную r-го порядка $f^{(r)}(z)=d^{(r)}f/dz^{(r)}$, а через $B^{(r)}_{q,\gamma}$ класс аналитических в круге $|z| < 1$ функций $f(z) \in B_{q,\gamma}$, для которых $\|z^r f^{(r)}\|_{B_{q,\gamma}} < \infty$. Аналогично через $B^{(r)}_{q,\gamma,a}$ обозначим класс аналитических в круге $|z| < 1$ функций $f(z) \in B_{q,\gamma}$, у которых $\|f_a^{(r)}\|_{B_{q,\gamma}} < \infty$.

Теорема 1.2.1. *Справедливо равенство*

$$\sup_{f\in B_{2,\gamma}} \frac{E^2_{n-1}(f)_{B_{2,\gamma}}}{E^2_{n-1}(z^r f^{(r)})_{B_{2,\gamma}}} = \frac{1}{\alpha^2_{n,r}} :=$$

$$:= \frac{1}{[n(n-1)\cdots(n-r+1)]^2},\ n \geq r. \tag{1.2.3}$$

Доказательство. В самом деле, для произвольной функции $f \in B_{2,\gamma}$ для величины $E_{n-1}(f)_{B_{2,\gamma}}$ согласно лемме 1.2.1 имеем:

$$E^2_{n-1}(f)_{B_{2,\gamma}} := \sum_{k=n}^{\infty} \alpha^2_{k,r} \cdot |c_k|^2 \cdot \int\limits_0^1 \gamma(\rho)d\rho.$$

Легко заметить, что если равенство

$$f^{(r)}(z) = \sum_{k=r}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-r+1)c_k z^{k-r} = \sum_{k=r}^{\infty} \alpha_{k,r} c_k \cdot z^{k-r}$$

умножить на z^r и вычислить наилучшее приближение функции $z^r f^{(r)}$ в пространстве $B_{2,\gamma}$, то в силу того, что

$$E^2_{n-1}(z^r f^{(r)})_{B_{2,\gamma}} = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha^2_{k,r} |c_k|^2 \cdot \int\limits_0^1 \gamma(\rho)\cdot\rho^{2k+1}d\rho,$$

мы получаем

$$\frac{E^2_{n-1}(f)_{B_{2,\gamma}}}{E^2_{n-1}(z^r f^{(r)})_{B_{2,\gamma}}} = \frac{\sum\limits_{k=n}^{\infty} |c_k|^2 \cdot \int\limits_0^1 \gamma(\rho)\rho^{2k+1}d\rho}{\sum\limits_{k=n}^{\infty} \alpha^2_{k,r}\cdot |c_k|^2 \int\limits_0^1 \gamma(\rho)\rho^{2k+1}d\rho} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\alpha^2_{n,r}} \cdot \frac{\sum\limits_{k=n}^{\infty} |c_k|^2 \cdot \int\limits_0^1 \gamma(\rho)\rho^{2k+1}d\rho}{\sum\limits_{k=n}^{\infty} |c_k|^2 \cdot \int\limits_0^1 \gamma(\rho)\rho^{2k+1}d\rho} = \frac{1}{\alpha^2_{n,r}}. \tag{1.2.4}$$

С другой стороны, для функции $f_0(z)=z^n$ имеем

$$z^r f_0^{(r)}(z)=\alpha_{n,r}z^n,\ \alpha_{n,r}:=n(n-1)\cdots(n-r+1),\ n\geq r,$$

а потому

$$E^2_{n-1}(z^r f_0^{(r)}(z))_{B_{2,\gamma}}=\|\alpha_{n,r}z^n\|^2_{B_{2,\gamma}}=\alpha^2_{n,r}\|z^n\|^2_{B_{2,\gamma}}=$$
$$=\alpha^2_{n,r}\cdot\int\limits_0^1\gamma(\rho)\rho^{2k+1}d\rho.$$

В силу полученных равенств запишем

$$\sup_{f\in B_{2,\gamma}}\frac{E^2_{n-1}(f)_{B_{2,\gamma}}}{E^2_{n-1}(z^r f^{(r)})_{B_{2,\gamma}}}\geq\frac{E^2_{n-1}(f_0)_{B_{2,\gamma}}}{E^2_{n-1}(z^r f_0^{(r)})_{B_{2,\gamma}}}=$$

$$=\frac{\int\limits_0^1\gamma(\rho)\rho^{2n+1}d\rho}{\alpha^2_{n,r}\int\limits_0^1\gamma(\rho)\rho^{2n+1}d\rho}=\frac{1}{\alpha^2_{n,r}}. \tag{1.2.5}$$

Сопоставляя оценку сверху (1.2.4) и оценку снизу (1.2.5), получаем равенство (1.2.3), чем и завершаем доказательство теоремы 1.2.1.

Теорема 1.2.2. *Для произвольной функции $f\in B^{(r)}_{2,\gamma,a}$ имеет место точное неравенство*

$$\frac{E_{n-1}(f)_{B_{2,\gamma}}}{E_{n-1}(f_a^{(r)})_{B_{2,\gamma}}}\leq\frac{1}{n^r}. \tag{1.2.6}$$

Более того справедливо экстремальное равенство

$$\sup_{f\in B^{(r)}_{2,\gamma,a}}\frac{E_{n-1}(f)_{B_{2,\gamma}}}{E_{n-1}(f_a^{(r)})_{B_{2,\gamma}}}=\frac{1}{n^r}. \tag{1.2.7}$$

Доказательство. Для произвольной функции $f\in B^{(r)}_{2,\gamma,a}$ производная $f_a^{(r)}(z)$ вычисляется по формуле

$$f_a^{(r)}(z)=\sum_{k=1}^{\infty}(ik)^r c_k z^k,$$

наилучшее приближение которой равно

$$E^2_{n-1}(f_a^{(r)})_{B_{2,\gamma}}=\sum_{k=n}^{\infty}k^{2r}|c_k|^2\cdot\int\limits_0^1\gamma(\rho)\rho^{2k+1}d\rho. \tag{1.2.8}$$

Учитывая равенства (1.2.2) и (1.2.8), получаем

$$\frac{E_{n-1}^2(f)_{B_{2,\gamma}}}{E_{n-1}^2(f_a^{(r)})_{B_{2,\gamma}}} = \frac{\sum\limits_{k=n}^{\infty}|c_k|^2 \cdot \int\limits_0^1 \gamma(\rho)\rho^{2k+1}d\rho}{\sum\limits_{k=n}^{\infty}k^{2r}|c_k|^2 \cdot \int\limits_0^1 \gamma(\rho)\rho^{2k+1}d\rho} \le$$

$$\le \frac{1}{n^{2r}} \cdot \frac{\sum\limits_{k=n}^{\infty}|c_k|^2 \cdot \int\limits_0^1 \gamma(\rho)\rho^{2k+1}d\rho}{\sum\limits_{k=n}^{\infty}|c_k|^2 \cdot \int\limits_0^1 \gamma(\rho)\rho^{2k+1}d\rho} = \frac{1}{n^{2r}}. \tag{1.2.9}$$

С другой стороны, для экстремальной функции $f_0(z) = z^n$, у которой $f_{0,a}^{(r)}(z) = (in)^r \cdot z^n$, имеем:

$$E_{n-1}^2(f_0)_{B_{2,\gamma}} = \int\limits_0^1 \gamma(\rho)\rho^{2n+1}d\rho$$

$$E_{n-1}^2(f_{0,a}^{(r)})_{B_{2,\gamma}} = n^{2r}\int\limits_0^1 \gamma(\rho)\rho^{2n+1}d\rho.$$

Используя эти равенства, запишем

$$\sup_{f\in B_{2,\gamma,a}^{(r)}} \frac{E_{n-1}^2(f)_{B_{2,\gamma}}}{E_{n-1}^2(f_{0,a}^{(r)})_{B_{2,\gamma}}} \ge \frac{E_{n-1}^2(f_0)_{B_{2,\gamma}}}{E_{n-1}^2(f_{0,a}^{(r)})_{B_{2,\gamma}}} =$$

$$= \frac{\int\limits_0^1 \gamma(\rho)\rho^{2n+1}d\rho}{n^{2r}\cdot\int\limits_0^1 \gamma(\rho)\rho^{2n+1}d\rho} = \frac{1}{n^{2r}}. \tag{1.2.10}$$

Требуемое равенство (1.2.7) получаем из сопоставлении оценку сверху (1.2.9) с оценкой снизу (1.2.10).

Теорема 1.2.2 доказана.

§1.3. Точные неравенства для алгебраических полиномов в пространстве $B_{q,\gamma},\ 1 \le q < \infty$

Экстремальные свойства алгебраических и тригонометрических полиномов, заданных на конечном отрезке и на всей оси исследовались достаточно полно. Достаточно в этой связи упомянуть известные неравенства С.Н.Бернштейна, С.М.Никольского, С.Б.Стечкина и их обобщения в различных банаховых пространствах. Что же касается получения точных неравенств для комплексных алгебраических полиномов в комплексных банаховых пространствах, то здесь можно указать, например, работы Л.В.Тайкова [11,38,39], С.Б.Вакарчука [15], С.Б.Вакарчука и М.Ш.Шабозова [18], Ю.А.Фаркова [44], М.Ш.Шабозова и О.Ш.Шабозова [51,54,55] и других.

Напомним, что аналитическая функция $f(z)$ принадлежит банаховому пространству Харди $H_q,\ 1 \le q \le \infty$, если

$$\|f\|_{H_q} = \lim\left\{M_q(f,\rho):\ \rho \to 1-0\right\} < \infty.$$

Хорошо известно, что норма функции $f(z) \in H_q,\ 1 \le q \le \infty$ реализуется на её угловых граничных значениях $f(e^{it})$.

Теорема 1.3.1. *Для любого полинома $p_n(z) \in \mathcal{P}_n$ при всех $1 \le q \le \infty$ и $0 < R \le 1$ и любых $r, n \in \mathbb{N}$ справедливо точное неравенство*

$$\|(p_n)_a^{(r)}\|_{H_{q,R}} \le R^n n^r \|p_n\|_{H_q}, \tag{1.3.1}$$

в том смысле, что существует полином $q_n(z) \in \mathcal{P}_n$, для которого (1.3.1) обращается в равенство.

Доказательство. Пусть $p_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k,\ a_k \in \mathbb{C}$ - произвольный полином из $\mathcal{P}_n$. Тогда очевидно, что при любом $R \in (0,1]$ имеет место непосредственно проверяемое интегральное представление

$$\left(p_n(Re^{it})\right)_a^{(r)} = \sum_{k=1}^{n} (ik)^r a_k (Re^{it})^k =$$

$$= \frac{e^{i\pi r/2}}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k e^{i(kt-(n-k)\theta)} \right) Q_{n,R,r}(\theta) d\theta =$$

$$= \frac{e^{i\pi r/2}}{2\pi} \int_0^{2\pi} p_n(\theta) e^{-in(\theta-t)} Q_{n,R,r}(\theta - t) d\theta, \tag{1.3.2}$$

где

$$Q_{n,R,r}(\theta) := R^n n^r + \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)^r R^{n-k} \cos k\theta$$

Докажем, что при всех $\theta \in [0, 2\pi]$ и $R \in (0,1)$ функция $Q_{n,R,r}(\theta) \geq 0$. Для этого воспользуемся следующей леммой из монографии А.Пинкуса

Лемма 1.3.1. ([34], стр.251-252) *Пусть*

$$H_R(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} a_k R^k \cos kt$$

и

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| < \infty.$$

Если $a_k \geq 0$, $\Delta a_k = a_k - a_{k+1} \geq 0$ *и* $\Delta^2 a_k = a_k - 2a_{k+1} + a_{k+2} \geq 0$ *для всех* k, *то тогда* $H_R(t) \geq 0$ *для всех* $t \in [0, 2\pi]$ *и* $R \in [0, 1]$.

Далее, применяя неравенство для сверток (см., например, [31, с.424]):

$$\|K * \varphi\|_{L_q[0,2\pi]} \leq \|\varphi\|_{L_q[0,2\pi]} \|K\|_{L[0,2\pi]}, \ 1 \leq q \leq \infty, \tag{1.3.3}$$

из равенства (1.3.2) и (1.3.3) получаем

$$\|(p_n)_a^{(r)}\|_{H_{q,R}} = \|p_n(R\cdot)_a^{(r)}\|_{H_q} \leq$$

$$\leq \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |p_n(\theta)|^q d\theta \right)^{1/q} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |Q_{n,R,r}(\theta)| d\theta \right) =$$

$$= \|p_n\|_{H_q} \cdot \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |R^n n^r + \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)^r R^{n-k} \cos k\theta| d\theta \right) =$$

$$= \|p_n\|_{H_q} \cdot \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (R^n n^r + \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)^r R^{n-k} \cos k\theta) d\theta \right) =$$

$$= \|p_n\|_{H_q} \cdot \left(R^n n^r + \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)^r R^{n-k} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos k\theta d\theta \right) =$$

$$= R^n \cdot n^r \|p_n\|_{H_q}. \ \ (1 \le q \le \infty)$$

Для полинома $p_n(z) = cz^n \ \ (c \in \mathbb{C}, \ n \in \mathbb{N})$ неравенство (1.3.1) обращается в равенство. В самом деле

$$p_{n,a}^{(r)}(z) = p_{n,a}^{(r)}(e^{it}) = \frac{d^r}{dt^r}(ce^{int}) = c \cdot (in)^r \cdot e^{int} = c \cdot (in)^r \cdot z^n$$

и мы имеем:

$$\|(p_n)_a^{(r)}\|_{H_{q,R}} = \|c \cdot (in)^r \cdot (Re^{int})^n\|_{H_q} = R^n \cdot n^r \cdot \|e^{int}\|_{H_q} =$$

$$= R^n \cdot n^r \|p_n\|_q, \ \ (1 \le q \le \infty),$$

откуда и следует утверждение теоремы 1.3.1. Теорема 1.3.1 доказана.

Неравенство (1.3.1) является обобщением неравенств для полиномов в пространстве Харди $H_q, \ q \ge 1$, доказанных Л.В.Тайковым [38].

Теорема 1.3.2. *Для любого полинома $p_n(z) \in \mathcal{P}_n$ при всех $1 \le q \le \infty, \ 0 < R \le 1$ и любых $n, r \in \mathbb{N}$ имеет место точное неравенство*

$$\|(p_n)_a^{(r)}\|_{B_{q,\gamma,R}} \le R^n n^r \|p_n\|_{B_{q,\gamma}}. \tag{1.3.4}$$

Существует полином $q_n(z) \in \mathcal{P}_n$, для которого (1.3.4) обращается в равенство.

Доказательство. Пусть $p_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k, \ a_k \in \mathbb{C}$ – произвольный полином из множества $\mathcal{P}_n$. Поскольку

$$(p_n(z))_a^{(r)} = \sum_{k=0}^{n} (ik)^r a_k z^k,$$

то непосредственной проверкой убедимся, что для любого $0 < R \le 1$ справедливо соотношение

$$p_{n,a}^{(r)}\left(R\rho e^{it}\right) = \sum_{k=1}^{n} (ik)^r \cdot a_k \cdot (R\rho)^k \cdot e^{ikt} =$$

$$= \frac{e^{i\pi r/2}}{2\pi} \cdot \int\limits_0^{2\pi} \left[\sum_{k=0}^{n} c_k \rho^k e^{i(kt-(n-k)\theta)}\right] \cdot Q_{R,n,r}(\theta) d\theta, \tag{1.3.5}$$

где ядро

$$Q_{R,n,r}(\theta) = R^n n^r + \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)^r \cdot R^{n-k} \cos k\theta,$$

для всех $\theta \in [0, 2\pi]$, $0 < R \leq 1$ является неотрицательным. Неотрицательность функции $Q_{R,n,r}(\theta)$ проверяется двойным преобразованием Абеля, а потому

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |Q_{R,n,r}(\theta)| \, d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q_{R,n,r}(\theta) d\theta = R^n \cdot n^r. \tag{1.3.6}$$

Применяя обобщенное интегральное неравенство Минковского

$$\left(\int_a^b \left| \int_c^d f(t,u) du \right|^p dt \right)^{1/p} \leq \int_c^d \left(\int_a^b |f(t,u)|^p \, dt \right)^{1/p} du, \tag{1.3.7}$$

из равенства (1.3.5) в связи с (1.3.6) получим

$$\left\| (p_n(\cdot))_a^{(r)} \right\|_{B_{q,\gamma}} =$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho\gamma(\rho) \left| \frac{e^{ir\pi/2}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\sum_{k=0}^{n} c_k \rho^k e^{i(kt-(n-k)\theta)} \right] Q_{R,n,r}(\theta) d\theta \right|^q d\rho dt \right)^{1/q} \leq$$

$$\leq \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho\gamma(\rho) \left| p_n(\rho e^{it}) \right|^q d\rho dt \right)^{1/q} \cdot \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |Q_{R,n,r}(\theta)| d\theta \right) =$$

$$= R^n \cdot n^r \cdot \|p_n\|_{B_{q,\gamma}}, 1 \leq q \leq \infty,$$

откуда и следует неравенство (1.3.4).

Докажем, что для полинома $p_n(z) = cz^n$, $c \in \mathbb{C}$ в неравенстве (1.3.4) имеет место знак равенства. Простые вычисления дают

$$\|p_n(z)\|_{B_{q,\gamma}} = \|cz^n\|_{B_{q,\gamma}} = |c| \cdot \|z^n\|_{B_{q,\gamma}} = |c| \cdot \left(\int_0^1 \rho^{nq+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{1/q},$$

$$\|(p_n(\cdot))_a^{(r)}(z)\|_{B_{q,\gamma,R}} = \|c(in)^r z^n\|_{B_{q,\gamma,R}} = n^r \cdot \|c(Rz)^n\|_{B_{q,\gamma}} = R^n \cdot n^r \cdot \|p_n(z)\|_{B_{q,\gamma}}.$$

Этим доказательство теоремы 1.3.2 завершается.

Неравенство (1.3.4) является обобщением известного неравенства С.Н.Бернштейна для комплексных алгебраических полиномов в весовом пространстве $B_{q,\gamma}$. В случае $\gamma(|z|) \equiv 1$ неравенство (1.3.4) ранее доказано С.Б.Вакарчуком [16]. Для обычной r-ой производной $f^{(r)}$ неравенство (1.3.4) доказано М.Ш.Шабозовым и М.Р.Лангаршоевым [55].

Теорема 1.3.3. *Для любого полинома $p_n(z) \in \mathcal{P}_n$ при всех $1 \leq q \leq \infty,\ 0 < R \leq 1$ и любых $n, r \in \mathbb{N}$ имеет место точное неравенство*

$$\|(p_n)_a^{(r)}\|_{B_{q,R}} \leq R^n n^r \left(\int\limits_0^1 \rho^{nq+1}\gamma(\rho)d\rho\right)^{-1/q} \|p_n\|_{B_{q,\gamma}}, \qquad (1.3.8)$$

которое обращается в равенство для $q_n(z) = az^n,\ a \in \mathbb{C}$.

Доказательство. Чтобы доказать неравенства (1.3.8), достаточно установить, что для произвольного полинома $p_n(z) \in \mathcal{P}_n$ имеет место соотношение

$$\|p_n\|_{B_q} \leq \left(\int\limits_0^1 \rho^{nq+1}\gamma(\rho)d\rho\right)^{-1/q} \|p_n\|_{B_{q,\gamma}}. \qquad (1.3.9)$$

С этой целью воспользуемся неравенством

$$\int\limits_{|z|=1} |p_n(z)|^q \cdot |dz| \leq \rho^{-(nq+1)} \int\limits_{|z|=\rho} |p_n(z)|^q \cdot |dz|, \qquad (1.3.10)$$

Е.Хилла, Г.Сеге и Х.Д.Тамаркиным [59], которая верна для любого $p_n(z) \in \mathcal{P}_n$ и всех $\rho \in (0, 1]$. Указанное неравенство (1.3.10) запишем в виде

$$\rho^{nq}\|p_n\|_{B_q}^q \leq M_q^q(p_n, \rho)$$

и умножим обе части на $\rho\gamma(\rho)$, а потом интегрируя по $\rho \in (0, 1]$ с учётом определения нормы в пространстве $B_{q,\gamma},\ 1 \leq q \leq \infty$ получим

$$\left(\int\limits_0^1 \rho^{nq+1}\gamma(\rho)d\rho\right)^{1/q} \|p_n\|_{B_q} \leq \|p_n\|_{B_{q,\gamma}},$$

откуда и вытекает неравенство (1.3.9). Требуемое неравенство (1.3.8) с учётом (1.3.9) вытекает из неравенств (1.3.1). Точность неравенств (1.3.8) для полинома $q_n(z) = az^n,\ a \in \mathbb{C}$ проверяется непосредственным вычислением. Теорема 1.3.3 доказана.

§1.4. Взаимосвязь наилучшего приближения функций полиномами в пространствах $B_{q,\gamma,R},\ q \geq 1$ и $H_{q,},\ q \geq 1$.

Через $B_{q,\gamma,R},\ R \in (0,1]$ (см. [60], с.172-179) обозначим пространство аналитических в круге $U_R := \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ функций $f(z) \in B_{q,\gamma},\ q \geq 1$, для которых

$$\|f(z)\|_{B_{q,\gamma,R}} \stackrel{def}{=} \|f(Rz)\|_{B_{q,\gamma}} < \infty,$$

а через $H_{q,R},\ R \in (0,1]$ обозначим пространство Харди аналитических в U_R функций $f(z)$, для которых

$$\|f(z)\|_{H_{q,R}} \stackrel{def}{=} \|f(Rz)\|_{H_q} < \infty.$$

Пусть

$$\mathcal{P}_n = \left\{ p_n(z) : \ p_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k,\ a_k \in \mathbb{C} \right\}$$

- подпространство всевозможных алгебраических полиномов комплексного переменного степени $\leq n$, а

$$E_{n-1}(f)_X \stackrel{def}{=} \inf \left\{ \|f - p_{n-1}\|_X : \ p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1} \right\}$$

- наилучшее приближение элемента $f \in X$ подпространством $\mathcal{P}_{n-1}$ в метрике пространства X. Если $\mathfrak{N}$ - некоторый класс функций, принадлежащий X, то требуется определить величину

$$E_{n-1}(\mathfrak{N})_X = \sup \left\{ E_{n-1}(f)_X : f \in \mathfrak{N} \right\},$$

которую назовем наилучшим приближением класса $\mathfrak{N}$ в пространстве X.

Всюду в дальнейшем предполагаем, что введенная в пространстве X норма $\|\cdot\|_X$ удовлетворяет следующим двум условиям:

а) $\|f(ze^{it})\|_X = \|f(z)\|_X$ - инвариантность относительно поворота;

б) $\|f(z)\|_X < \infty$ для всякой функции $f(z)$, аналитической в круге $|z| < 1$.

Легко проверить, что нормы

$$\|f\|_{B_{q,\gamma}} = \left(\int\limits_0^1 \rho\gamma(\rho) M_q^q(f,\rho) d\rho \right)^{1/q} < \infty$$

и

$$\|f\|_{H_q} = \lim \{M_q(f,\rho) : \ \rho \to 1-0\} < \infty$$

удовлетворяют условиям а) и б).

Пусть $r \in \mathbb{N}$. Производную порядка r функции $f(z)$ по аргументу t комплексного переменного $z = \rho e^{it}$ обозначим через $f_a^{(r)}(z)$. При этом

$$f_a^{(1)}(z) \stackrel{def}{=} \partial f(z)/\partial t = f^{(1)}(z) zi,$$

$$f_a^{(r)}(z) = \left\{ f_a^{(r-1)}(z) \right\}_a^{(1)}, \ r = 2, 3, ...,$$

а обычную производную r-го порядка функции $f(z)$ по переменному z обозначим символом

$$f^{(r)}(z) \stackrel{def}{=} d^r f/dz^r.$$

Обозначим через $B_{q,\gamma,a}^{(r)}$ - класс аналитических в круге $|z| < 1$ функций $f(z) \in B_{q,\gamma}$, удовлетворяющих неравенству $\|z^r f^{(r)}\|_{B_{q,\gamma}} \leq 1, \ \ q \geq 1$.

Аналогичным образом определим следующие классы аналитических функций:

$$B_{q,\gamma,a}^{(r)} = \left\{ f(z) \in B_{q,\gamma} : \ \|f_a^{(r)}\|_{B_{q,\gamma}} \leq 1 \right\},$$

$$H_{q,a}^{(r)} = \left\{ f(z) \in H_q : \ \|f_a^{(r)}\|_{H_q} \leq 1 \right\}.$$

Всюду в дальнейшем положим

$$\alpha_{n,r} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1), \ \ n \geq r, \ \ n, r \in \mathbb{N}.$$

Имеет место следующее простое утверждение

Лемма 1.4.1. *Пусть $f(z)$ - аналитическая в $|z| < 1$ функция. Тогда $\|f\|_{B_{q,\gamma,R}}$ есть неубывающая функция по $R \in (0,1]$.*

Доказательство. Воспользуемся хорошо известным интегральным представлением [23]

$$f(Rz) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\rho z e^{-i\theta})Q_{R,\rho}(\theta)d\theta, \ 0 \le R < \rho \le 1, \ |z| < 1,$$

где

$$Q_{R,\rho}(\theta) = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{R}{\rho}\right)^k \cos k\theta = (\rho^2 - R^2)(\rho^2 - 2\rho R\cos\theta + R^2)^{-1} \ge 0$$

- ядро Пуассона, для которого

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |Q_{R,\rho}(\theta)|d\theta = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} Q_{R,\rho}(\theta)d\theta = 1.$$

Применяя обобщенное неравенство Минковского (см. [31], стр.395)

$$\left\|\int\limits_a^b f(\cdot,u)du\right\|_{L_p[c,d]} \le \int\limits_a^b \|f(\cdot,u)\|_{L_p[c,d]}du, \ 1 \le p \le \infty, \tag{1.4.1}$$

в силу условия а) об инвариантности нормы относительно поворота в пространстве $B_{q,\gamma}$, $1 \le q \le \infty$ для $R < \rho$ получаем

$$\|f(Rz)\|_{B_{q,\gamma}} = \left(\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{|z|<1}\gamma(|z|)|f(Rz)|^q d\sigma\right)^{1/q} =$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{|z|<1}\gamma(|z|)\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\rho z e^{-i\theta})Q_{R,\rho}(\theta)d\theta\right|^q d\sigma\right)^{1/q} \le$$

$$\le \left(\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{|z|<1}\gamma(|z|)|f(\rho z)|^q d\sigma\right)^{1/q}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|Q_{R,\rho}(\theta)|d\theta\right) = \|f(\rho z)\|_{B_{q,\gamma}}.$$

Лемма 1.4.1 доказана.

Теорема 1.4.1. *Пусть* $r, n \in \mathbb{N}$ *и* $1 \le q \le \infty$. *Тогда при любом* $R \in (0, 1]$ *и* $n \ge r$ *справедливы точные неравенства*

$$E_{n-1}(f)_{B_{q,\gamma,R}} \le R^n \cdot n^{-r} \cdot E_{n-1}(f_a^{(r)})_{B_{q,\gamma}}, \tag{1.4.2}$$

$$\|f - S_{n-1}(f)\|_{B_{q,\gamma,R}} \leq R^n \cdot n^{-r} \|f_a^{(r)} - S_{n-1}(f_a^{(r)})\|_{B_{q,\gamma}}, \qquad (1.4.3)$$

где $S_k(\varphi, z)$ – k-я частная сумма тейлоровского разложения $\varphi(z)$. Знак равенства в неравенстве (1.4.2) реализует функция $f_0(z) = az^n,\ a \in \mathbb{C}$.

Доказательство. Не умаляя общности, докажем неравенство (1.4.2). Пусть

$$q_{n-1}(\zeta) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \zeta^k$$

- произвольный полином из множество $\mathcal{P}_{n-1}$. Тогда при любом $R \in (0, 1]$ справедливо равенство [23]

$$f(Rz) - p_{n-1}(Rz) = \frac{1}{2\pi n^r} \int_0^{2\pi} \left[f_a^{(r)}(ze^{-i\theta}) - q_{n-1}(ze^{-i\theta}) \right] \times$$

$$\times R^n e^{in\theta} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} n^r (n+k)^{-r} \cos k\theta \right] d\theta, \qquad (1.4.4)$$

где

$$p_{n-1}(Rz) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k (Rz)^k + \sum_{k=0}^{n-1} a_k (2n-k)^{-r} \cdot R^{2(n-k)} (Rz)^k -$$

$$- \sum_{k=0}^{n-1} k^r (2n-k)^{-r} c_k R^{2(n-k)} (Rz)^k,$$

c_k - тейлоровские коэффициенты функции $f(z)$.

В справедливости равенства (1.4.4) убедимся разложением подынтегральной функции и интегрированием почленно и далее применяя двойного преобразовании Абеля легко установить, что (см. также леммы 2.3 из [34], стр.251-252)

$$1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} n^r (n+k)^{-r} \cos k\theta \geq 0. \qquad (1.4.5)$$

Из равенства (1.4.4) применением обобщенного неравенства (1.4.1) Минковского с учетом соотношения (1.4.5) и свойства инвариантности нормы в $B_{q,\gamma}$ получаем

$$\|f(Rz) - p_{n-1}(Rz)\|_{B_{q,\gamma}} \leq$$

$$\le R^n \cdot n^{-r}\|f_a^{(r)}(ze^{-i\theta}) - q_{n-1}(ze^{-i\theta})\|_{B_{q,\gamma}} =$$

$$= R^n \cdot n^{-r}\|f_a^{(r)}(z) - q_{n-1}(z)\|_{B_{q,\gamma}}. \qquad (1.4.6)$$

Выбирая в качестве $q_{n-1}(\zeta)$ полином наилучшего приближения функции $f_a^{(r)}(z)$ в пространстве $B_{q,\gamma},\ 1 \le q \le \infty$, имеем

$$\|f - p_{n-1}\|_{B_{q,\gamma,R}} \le R^n \cdot n^{-r} E_n(f_a^{(r)})_{B_{q,\gamma}},$$

откуда сразу следует неравенство (1.4.2), и этим завершается доказательство теоремы 1.4.1. Легко убедиться, что неравенство (1.4.2) справедливо также при $r = 0$. Из доказанной теоремы вытекает

Следствие 1.4.1. *Справедливы равенства*

$$E_{n-1}(B_{q,\gamma,a}^{(r)})_{B_{q,\gamma,R}} = \sup\left\{E_{n-1}(f)_{B_{q,\gamma,R}} : f \in B_{q,\gamma,a}^{(r)}\right\} = R^n \cdot n^{-r}. \qquad (1.4.7)$$

Следствие 1.4.2. *Для произвольной аналитической в круге $|z| < 1$ функции при любом $R \in (0,1]$ и $1 \le q \le \infty$ справедливо неравенство*

$$E_{n-1}(f)_{B_{q,\gamma,R}} \le R^n \cdot E_{n-1}(f)_{B_{q,\gamma}}. \qquad (1.4.8)$$

Если, кроме того, для $|z| < 1,\ f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} c_k z^k$, то

$$\|f\|_{B_{q,\gamma,R}} \le R^n \cdot \|f\|_{B_{q,\gamma}}. \qquad (1.4.9)$$

Очевидно, что неравенства (1.4.8) и (1.4.9) соответственно вытекают из (1.4.2) и (1.4.3) при $r = 0$.

Теорема 1.4.2. *Для произвольного $f(z) \in H_q,\ 1 \le q \le \infty$ при любом $R \in (0,1]$ справедливо неравенство*

$$E_{n-1}(f)_{B_{q,\gamma,R}} \le R^n \cdot \left(\int_0^1 \rho^{nq+1}\gamma(\rho)d\rho\right)^{1/q} \cdot E_{n-1}(f)_{H_q}. \qquad (1.4.10)$$

Неравенство (1.4.10) обращается в равенство для $f(z) = z^n \in H_q \cap B_{q,\gamma,R}$.

Доказательство. Пусть $q_{n-1}(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k$ и $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k,\ z = Re^{it}$, $R \in [0,1]$. Разложением подынтегральной функции в ряд Тейлора и почленным интегрированием можно убедиться в справедливости равенства

$$\frac{\rho^n}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left[f(e^{i\theta})-q_{n-1}(e^{i\theta})\right]e^{in(t-\theta)}Q_\rho(t-\theta)d\theta=f(\rho e^{it})-p_{n-1}(\rho e^{it}),\quad (1.4.11)$$

где

$$Q_\rho(t)=1+2\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k\cos kt\geq 0 \quad (1.4.12)$$

- ядро Пуассона, для которого $\|Q_\rho\|_{L[0,2\pi]}=1$, а полином $p_{n-1}(z)\in\mathcal{P}_{n-1}$ определяется равенством

$$p_{n-1}(z)=\sum_{k=0}^{n-1}c_kz^k+\sum_{k=0}^{n-1}(a_k-c_k)\rho^{2(n-k)}z^k,\quad z=\rho e^{it},\quad 0<\rho\leq 1.$$

Из равенства (1.4.11) и неравенства (1.4.1) с учетом (1.4.12) сразу следует, что

$$\|f-p_{n-1}\|_{B_{q,\gamma}}\leq\left(\int\limits_0^1\rho^{nq+1}\gamma(\rho)d\rho\right)^{1/q}\|f-q_{n-1}\|_{H_q}. \quad (1.4.13)$$

Теперь из неравенства (1.4.13) в силу (1.4.8) немедленно следует соотношение (1.4.10), точность которого для $f_0(z)=az^n, a\in\mathbb{C}$ проверяется непосредственным вычислением. Из теоремы 1.4.2 вытекает

Следствие 1.4.3. *В условиях теоремы 1.4.2 справедливо точное неравенство*

$$E_{n-1}(f)_{B_{q,\gamma,R}}\leq R^n\cdot n^{-r}\cdot\left(\int\limits_0^1\rho^{nq+1}\gamma(\rho)d\rho\right)^{1/q}\cdot E_{n-1}(f_a^{(r)})_{H_q}. \quad (1.4.14)$$

Доказательство. Неравенство (1.4.14) вытекает из соотношения (1.4.10) и соответствующих неравенств

$$E_{n-1}(f)_{H_q}\leq n^{-r}\cdot E_{n-1}(f_a^{(r)})_{H_q},$$

доказанных Л.В.Тайковым [38]. В свою очередь, из (1.4.14) вытекает следующее

Следствие 1.4.4. *Справедливы равенства*

$$E_{n-1}(H_{q,a}^{(r)})_{B_{q,\gamma,R}} = \sup\left\{E_{n-1}(f)_{B_{q,\gamma,R}} : f \in H_{q,a}^{(r)}\right\} =$$

$$= R^n \cdot n^{-r} \cdot \left(\int\limits_0^1 \rho^{nq+1}\gamma(\rho)d\rho\right)^{1/q}. \qquad (1.4.15)$$

Найдём наилучший линейный метод приближения в пространстве $B_{q,\gamma}$ для класса функций $B_{q,\gamma}^{(r)}$, $B_{q,\gamma,a}^{(r)}$ $(1 \le q \le \infty)$.

Пусть функция

$$F(z) = \sum_{k=r}^{\infty} b_k z^k \quad (b_k \ne 0, k = r, r+1, \cdots, r \ge 0) \qquad (1.4.16)$$

аналитическая в единичном круге и такова, что

$$\lim_{k\to\infty} |b_k|^{1/k} = 1.$$

Каждой функции

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \qquad (1.4.17)$$

аналитической в круге $|z| < R$, сопоставим аналитическую в том же круге функцию $f_*(z)$, определяемую равенством

$$f_*(z) = \sum_{k=r}^{\infty} b_k c_k z^k.$$

Например, если в равенстве (1.4.16) положить $b_k \stackrel{def}{=} \alpha_{k,r}$, то мы получаем

$$F(z) = \sum_{k=r}^{\infty} \alpha_{k,r} z^k = \sum_{k=r}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-r+1)z^k =$$

$$= z^r \sum_{k=r}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-r+1)z^{k-r} = z^r \left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k\right)^{(r)} =$$

$$= z^r \left(\frac{1}{1-z}\right)^r = z^r \left[(1-z)^{-1}\right]^{(r)} =$$

$$= z^r r!(1-z)^{-r-1} = r! z^r (1-z)^{-r-1},$$

$$f_*(z)=\sum_{k=r}^{\infty}\alpha_{k,r}c_kz^k=z^r\sum_{k=r}^{\infty}\alpha_{k,r}c_kz^{k-r}=$$

$$=z^r\sum_{k=r}^{\infty}k(k-1)\cdots(k-r+1)c_kz^{k-r}=$$

$$=z^r\left(\sum_{k=0}^{\infty}c_kz^k\right)^{(r)}=z^rf^{(r)}(z).$$

Таким образом, при специальном выборе функции $F(z)$ и нормы в банаховом пространстве X можно определить класс аналитических в круге $|z|<1$ функций с нормой $\|\cdot\|_X$ так, чтобы

$$\|f_*\|_X=\|z^mf^{(r)}\|_X\le 1$$

или

$$\|f_*\|_X=\|f_a^{(r)}\|_X\le 1.$$

Указанный класс функций может представлять собой любой из хорошо изученных в теории аппроксимации классов функций с ограниченной по норме производной целого или дробного порядка или с ограниченным по норме пространством X интегродифференциальным оператором М.М.Джрбашяна (см. [26], [27]). При $X=B_{q,\gamma}$ и $X=H_q$ получаем введенные выше классы функций $B_{q,\gamma}^{(r)}$, $B_{q,\gamma,a}^{(r)}$, $H_q^{(r)}$ или $H_{q,a}^{(r)}$.

Сопоставим функцию $f(z)$, имеющую разложение (1.4.17), посредством произвольной треугольной матрицы комплексных чисел $\Lambda=\{\lambda_{k,n-1}\}$ последовательностью полиномов

$$V_{\Lambda,n-1}(f,z)=\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_{k,n}c_kz^k.$$

Величина

$$\mathcal{E}_{n-1}(f,\Lambda)_{B_{q,\gamma,R}}=\|f(z)-V_{\Lambda,n-1}(f,z)\|_{B_{q,\gamma,R}}$$

характеризует скорость приближения функции $f(z)$ полиномами $V_{\Lambda,n-1}(f,z)$ или линейными методами Λ в пространстве $B_{q,\gamma,R}$.

Наилучшим линейным методом приближения на классе $B^{(r)}_{B_{q,\gamma,R}}$, является треугольная матрица $\Lambda^* = \{\lambda^*_{k,n-1}\}$ такая, что

$$\mathcal{E}_{n-1}(B^{(r)}_{q,\gamma,R}, \Lambda^*)_{B_{q,\gamma,R}} \stackrel{def}{=} \inf_{\Lambda} \sup_{f \in B_{q,\gamma,R}} \mathcal{E}_{n-1}(f, \Lambda)_{B_{q,\gamma,R}} = \sup_{f \in B_{q,\gamma,R}} \mathcal{E}_{n-1}(f, \Lambda^*)_{B_{q,\gamma,R}}.$$

Всюду в дальнейшем мы будем рассматривать ядро $F(z)$ вида (1.4.16), удовлетворяющее следующему условию

Определение [27]. *Ядро $F(z)$ назовем допустимым в круге $|z| < R$, если при всех $\rho < R$, $|\theta| \le \pi$ и $n \ge r$ выполняется неравенство*

$$1 + 2Re\left[b_n \sum_{k=1}^{\infty} b^{-1}_{n+k} \rho^k e^{ik\theta}\right] \ge 0.$$

В нашем случае, для класса $B^{(r)}_{q,\gamma}$ ядро

$$F(z) = r! z^r (1-z)^{-r-1}$$

и

$$b_n \stackrel{def}{=} \alpha_{n,r} = n(n-1)\cdots(n-r+1) = n!\left\{(n-r)!\right\}^{-1} > 0.$$

Более того, условие положительности

$$1 + 2Re\left(\alpha_{n,r} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{-1}_{n+k,r} \rho^k e^{ik\theta}\right) =$$

$$= 1 + 2\alpha_{n,r} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{-1}_{n+k,r} \rho^k \cos k\theta \ge 0 \qquad (1.4.18)$$

вытекает из приведённой леммы 2.3 монографии А.Пинкуса ([34], с.251-252).

Теорема 1.4.3. *Пусть $n, r \in \mathbb{N}$ и $R \in (0,1]$. Тогда справедливо равенство*

$$\mathcal{E}_{n-1}(B^{(r)}_{q,\gamma,a}, \Lambda^*)_{B_{q,\gamma,R}} = \sup\left\{\|f - V_{\Lambda^*,n-1}(f)\|_{B_{q,\gamma,R}} : f \in B^{(r)}_{q,\gamma,a}\right\} = R^n \cdot n^{-r},$$

где Λ^* - треугольная матрица с элементами

$$\lambda^*_{k,n-1} = \begin{cases} 1, & k = \overline{0, r-1}, \\ 1 - k^r \cdot (2n-k)^{-r} \cdot R^{2(n-k)}, & k = \overline{r, n-1}, \end{cases}$$

а наилучший линейный метод $V_{\Lambda^*,n-1}(f)$ *имеет вид:*

$$V_{\Lambda^*,n-1}(f,z)=\sum_{k=0}^{r-1}c_kz^k+\sum_{k=r}^{n-1}\left\{1-\left(\frac{k}{2n-k}\right)^r R^{2(n-k)}\right\}c_kz^k.$$

Из теоремы 1.4.3 вытекает

Следствие 1.4.5. *Пусть аналитическая в круге* $|z|<1$ *функция* $f(z)$ *имеет разложение* $f(z)=\sum\limits_{k=n}^{\infty}c_kz^k$ *и* $\|f\|_{B_{q,\gamma}}<\infty$. *Тогда для любого* $R\in(0,1]$ *справедливо неравенство*

$$\left\|\sum_{k=n}^{\infty}k^{-r}c_kz^k\right\|_{B_{q,\gamma,R}}\le n^{-r}\cdot R^n\cdot\|f\|_{B_{q,\gamma}}.$$

§1.5. Наилучшее приближение аналитических функций в пространстве $B_{q,\gamma}$ посредством модулей непрерывности m-го порядка

В данном параграфе изучаются аппроксимативные свойства аналитических в круге U функций $f \in B_{q,\gamma}$, структурные свойства которых характеризуются модулями непрерывности высших порядков. Модуль непрерывности произвольной функции $f \in B_{q,\gamma}$ мы определили равенством

$$\omega_m(f,t)_{q,\gamma} := \sup_{|h|\le t} \|\Delta_h^m(f,\cdot,\cdot)\|_{q,\gamma} =$$

$$= \sup_{|h|\le t} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho\gamma(\rho) |\Delta_h^m(f;\rho,u)|^q d\rho du \right)^{1/q}. \qquad (1.5.1)$$

При решении ряда задач полиномиальной аппроксимации функций в действительной области часто используют различные модификации модулей непрерывности (1.5.1) порядка m ($m \in \mathbb{N}$). Так, например, иногда удобнее использовать следующую усредненную характеристику гладкости

$$\left|\tilde{\Delta}_m(f;\rho,\tau,u)\right|^q = \frac{1}{\tau^m} \int_0^\tau \cdots \int_0^\tau \|\Delta_{\bar h}^m f(\rho e^{iu})\|_{B_{q,\gamma}}^q dh_1 \cdots dh_m, \qquad (1.5.2)$$

где

$$\bar h = (h_1, h_2, \cdots h_m), \Delta_{\bar h}^m := \Delta_{h_1}^1 \circ \cdots \circ \Delta_{h_m}^1,$$

$$\Delta_{\bar h_j}^1 f(\rho e^{iu}) := f(\rho e^{i(u+h_j)}) - f(\rho e^{iu}), \quad j = \overline{1,m}.$$

Используя соотношение (1.5.2), согласно определению (1.5.1) полагаем

$$\Omega_m(f,t)_{q,\gamma} = \sup_{|u|\le t} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho\gamma(\rho) |\tilde{\Delta}_m(f;\rho,\tau,u)|^q d\rho d\tau \right)^{1/q}. \qquad (1.5.3)$$

В работе [35] доказано, что при всех $0 < q < 1$ выполняется отношение слабой эквивалентности

$$\Omega_m(f,t)_{q,\gamma} \asymp \omega_m(f,t)_{q,\gamma}. \qquad (1.5.4)$$

Для $1 \le q < \infty$ соотношение (1.5.4) доказано в работе [19].

Среди актуальных задач теории полиномиальных аппроксимации аналитических в круге функций в весовом пространстве Бергмана $B_{q,\gamma},\ q \ge 1$ наиболее важной является экстремальная задача отыскания точных констант в неравенствах типа Джексона – Стечкина

$$E_{n-1}(f)_{q,\gamma} \le \chi n^{-r} U_m(f_a^{(r)}, \tau/n)_{q,\gamma}, \tau \ge 0,$$

где U_m– заданная характеристика гладкости функции $f \in B_{q,\gamma}$, например модули непрерывности m -го порядка ω_m или Ω_m, χ - некоторая константа, зависящая только от значений r и m.

Нам в дальнейшем потребуется

Лемма 1.5.1. *Для любой аналитической функции $f \in B^{(r)}_{q,\gamma,a}$ спроведливо равенство*

$$\Omega_m^2(f_a^{(r)}, t)_{2,\gamma} = \sup_{|u|\le t} \left\{ 2^m \sum_{k=1}^{\infty} k^{2r} |c_k|^2 \left(1 - \frac{\sin ku}{ku}\right)^m \int_0^1 \rho^{2k+1} \gamma(\rho) d\rho \right\}. \quad (1.5.5)$$

Доказательство. Воспользуясь тем, что

$$\Omega_m(f,t)_2 = \left\{ \frac{1}{t^m} \int_0^t \cdots \int_0^t \|\Delta_{\bar h}^m f(\rho e^{it})\|^2 dh_1 ... dh_m \right\}^{1/2}, \ t > 0, \qquad (1.5.6)$$

где

$$\bar h = (h_1, h_2, ..., h_m),\ \Delta_{\bar h}^m = \Delta_{h_1}^1 \circ \cdots \circ \Delta_{h_m}^1,$$

$$\Delta_{h_j}^1 f(\rho e^{it}) = f(\rho e^{i(t+h_j)}) - f(\rho e^{it}), \quad j = \overline{1, m}.$$

Применяя равенство Парсеваля к разности

$$\Delta_{\bar h}^m f(\rho e^{it}) = \Delta_{h_1}^1 \circ \cdots \circ \Delta_{h_m}^1 f(\rho e^{it}) =$$

$$= \Delta_{h_1}^1 \circ \cdots \circ \Delta_{h_m}^1 \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k \rho^k e^{ikt} \right) =$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}c_k\rho^k e^{ikt}\left[(e^{ikh_1}-1)(e^{ikh_2}-1)\cdots(e^{ikh_m}-1)\right]=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}c_k\rho^k e^{ikt}\cdot\prod_{j=1}^{m}(e^{ikh_j}-1),$$

после вычислений нормы в пространстве $B_{2,\gamma}$ получим

$$\|\Delta_h^m f(\rho e^{i\theta})\|_{B_{2,\gamma}}^2=2^m\sum_{k=0}^{\infty}|c_k|^2\prod_{j=1}^{m}(1-\cos kh_j)\int\limits_0^1\rho^{2k+1}\gamma(\rho)d\rho. \qquad (1.5.7)$$

Подставляя равенство (1.5.7) в (1.5.6), получаем

$$\Omega_m^2(f,t)_2=\frac{1}{t^m}\int\limits_0^t\cdots\int\limits_0^t\left\{2^m\sum_{k=0}^{\infty}|c_k|^2\prod_{j=1}^{m}(1-\cos kh_j)\int\limits_0^1\rho^{2k+1}\gamma(\rho)d\rho\right\}\times$$

$$\times dh_1\cdots dhm=2^m\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2\left(1-\frac{\sin ku}{ku}\right)^m\int\limits_0^1\rho^{2k+1}\gamma(\rho)d\rho. \qquad (1.5.8)$$

Аналогичным образом, так как

$$f_a^{(r)}(\rho e^{it})=\sum_{k=1}^{\infty}(ik)^r c_k\rho^k e^{ikt},$$

то, поступая как и выше, будем иметь

$$\Delta_h^m f_a^{(r)}(\rho e^{it})=\sum_{k=1}^{\infty}(ik)^r c_k\rho^k e^{ikt}\prod_{j=1}^{m}(e^{ikh_j}-1) \qquad (1.5.9)$$

и, применяя равенство Парсеваля из (1.5.9), с учётам равенства (1.5.6) сразу получаем

$$\Omega_m^2(f_a^{(r)},t)_{2,\gamma}=\sup_{|u|\le t}\left\{2^m\sum_{k=1}^{\infty}k^{2r}|c_k|^2\left(1-\frac{\sin ku}{ku}\right)^m\int\limits_0^1\rho^{2k+1}\gamma(\rho)d\rho\right\},$$

чем и завершаем доказательство леммы 1.5.1.

Введём в рассмотрение следующую экстремальную характеристику

$$\chi_{m,n,r,p}(\varphi,h):=\sup_{\substack{f\in B_{2,\gamma,a}^{(r)}\\ f_a^{(r)}\ne const}}\frac{2^{m/2}\cdot E_{n-1}(f)_{2,\gamma}}{\left(\int\limits_0^h\Omega_m^p(f_a^{(r)},t)_{2,\gamma}\cdot\varphi(t)dt\right)^{1/p}}, \qquad (1.5.10)$$

где $m,n\in\mathbb{N}, r\in\mathbb{Z}_+, p,h\in\mathbb{R}_+, \varphi$ - неотрицательная суммируемая на отрезке $[0,h]$ функция.

Целью данной работы является распространение известного неравенства М.Ш.Шабозова и Г.А.Юсупова [57], доказанного для множеств $L_2^{(r)}[0,2\pi]$ - периодических r-раз дифференцируемых функций f для аналитических в единичном круге функций из пространство $B_{2,\gamma,a}^{(r)}$, и его последующее применение в задачах вычисления точных значений различных n-поперечников.

Теорема 1.5.1. *Пусть* $m,n\in\mathbb{N},\ r\in\mathbb{Z}_+,\ 0<p\le 2,\ 0<h\le\pi/n,\ \varphi$ *- весовая на* $[0,h]$ *функция. Тогда справедливы равенства*

$$\chi_{m,n,r,p}(\varphi,h)=\{b_{n,m,r,p}(\varphi;h)\}^{-1}, \tag{1.5.11}$$

где

$$b_{n,m,r,p}(\varphi;h)=n^r\cdot\left(\int\limits_0^h\left(1-\frac{\sin nt}{nt}\right)^{mp/2}\cdot\varphi(t)dt\right)^{1/p}. \tag{1.5.12}$$

Доказательство. Воспользуясь тем, что для функции $f\in B_{q,\gamma,a}^{(r)}$ имеет место соотношение (1.5.5), а также тем фактом, что для любых $h\in\mathbb{R}_+$ и $0<p\le 2$ справедлив упрощенный вариант неравенства Минковского (см., например, [34] с.32):

$$\left(\int\limits_0^h\left(\sum_{k=n}^{\infty}|f_k(t)|^2\right)^{p/2}dt\right)^{1/p}\ge\left(\sum_{k=n}^{\infty}\left(\int\limits_0^h|f_k(t)|^pdt\right)^{2/p}\right)^{1/2},$$

будем иметь

$$\left(\int\limits_0^h\Omega_m^p(f_a^{(r)},t)_{2,\gamma}\varphi(t)dt\right)^{1/p}\ge$$

$$\ge 2^{m/2}\left(\int\limits_0^h\left[\sum_{k=n}^{\infty}k^{2r}|c_k|^2\left(1-\frac{\sin kt}{kt}\right)^m\cdot\int\limits_0^1\rho^{2k+1}\gamma(\rho)d\rho\right]^{p/2}\varphi(t)dt\right)^{1/p}=$$

$$= 2^{m/2}\cdot\left(\int\limits_0^h \left[\sum_{k=n}^{\infty} k^{2r}|c_k|^2\left(1-\frac{\sin kt}{kt}\right)^m\cdot[\varphi(t)]^{2/p}\cdot\int\limits_0^1 \rho^{2k+1}\gamma(\rho)d\rho\right]^{p/2} dt\right)^{1/p} \geq$$

$$\geq 2^{m/2}\cdot\left(\sum_{k=n}^{\infty}\left[k^{rp}|c_k|^p\left(\int\limits_0^h (1-\frac{\sin kt}{kt}\right)^{mp/2}\varphi(t)\left(\int\limits_0^1 \rho^{2k+1}\gamma(\rho)d\rho\right)^{p/2} dt\right]^{2/p}\right)^{1/2} =$$

$$= 2^{m/2}\left(\sum_{k=n}^{\infty}|c_k|^2\left[k^{rp}\cdot\int\limits_0^h\left(1-\frac{\sin kt}{kt}\right)^{mp/2}\varphi(t)dt\cdot\left(\int\limits_0^1 \rho^{2k+1}\gamma(\rho)d\rho\right)^{p/2}\right]^{2/p}\right)^{1/2} =$$

$$= 2^{m/2}\left(\sum_{k=n}^{\infty}|c_k|^2\left[(b_{k,m,r,p}(\varphi,h))^p\cdot\left(\int\limits_0^1 \rho^{2k+1}\gamma(\rho)d\rho\right)^{p/2}\right]^{2/p}\right)^{1/2} \geq$$

$$\geq 2^{m/2}\left(\inf_{n\leq k<\infty} b_{k,m,r,p}(\varphi,h)\right)\cdot\left(\sum_{k=n}^{\infty}|c_k|^2\int\limits_0^1 \rho^{2k+1}\gamma(\rho)d\rho\right)^{1/2} =$$

$$= 2^{m/2}\cdot E_{n-1}(f)_{2,\gamma}\inf_{n\leq k<\infty} b_{k,m,r,p}(\varphi,h). \qquad (1.5.13)$$

Докажем теперь, что

$$\inf_{n\leq k<\infty} b_{k,m,r,p}(\varphi,h) = b_{n,m,r,p}(\varphi,h). \qquad (1.5.14)$$

Нам нужно доказать, что при любых $k,m,n\in\mathbb{N}, k\geq n, r\in\mathbb{Z}_+$ и $0<p\leq 2$ и $\varphi\geq 0$ - суммируемая на $[0,h]$ не эквивалентная нулю функция выполняется неравенство

$$k^{rp}\int\limits_0^h\left(1-\frac{\sin kt}{kt}\right)^{mp/2}\varphi(t)dt \geq n^{rp}\int\limits_0^h\left(1-\frac{\sin nt}{nt}\right)^{mp/2}\varphi(t)dt, \qquad (1.5.15)$$

что и равносильно равенству (1.5.14).

В [20] доказано, что при любых $\nu,\alpha\in\mathbb{R}_+$ и $x\geq 1$ и $0<y\leq 3\pi/4$ выполняется неравенство

$$x^{\nu}\left(1-\frac{\sin xy}{xy}\right)^{\alpha} \geq \left(1-\frac{\sin y}{y}\right)^{\alpha}. \qquad (1.5.16)$$

Если в (1.5.16) полагать $x = k/n$, $k, n \in \mathbb{N}$, $k \geq n$, $y = nt$, $0 < t \leq h$, $\nu = rp$, $r \in \mathbb{N}$, $0 < p \leq 2$ и $\alpha = mp/2$, то получаем

$$k^{rp}\left(1 - \frac{\sin kt}{kt}\right)^{mp/2} \geq n^{rp}\left(1 - \frac{\sin kt}{kt}\right)^{mp/2}. \tag{1.5.17}$$

Умножая обе стороны неравенства на функцию $\varphi \geq 0$ и проинтегрируя от $t = 0$ до $t = h$, получаем (1.5.15), и тем самым требуемое равенство (1.5.14) доказано.

Продолжая с учётом равенства (1.5.14) и неравенства (1.5.13), будем иметь

$$\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(f_a^{(r)}, t)_{2,\gamma} \cdot \varphi(t) \cdot dt\right)^{1/p} \geq$$
$$\geq 2^{m/2} \cdot E_{n-1}(f)_{2,\gamma} \cdot b_{n,m,r,p}(\varphi, h). \tag{1.5.18}$$

Из (1.5.18) получаем

$$\frac{2^{m/2} \cdot E_{n-1}(f)_{2,\gamma}}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(f_a^{(r)}, t)_{2,\gamma}\varphi(t)dt\right)^{1/p}} \leq \frac{1}{b_{n,m,r,p}(\varphi, h)}.$$

Последнее неравенство имеет место для произвольной функции $f \in B_{2,\gamma,a}^{(r)}$, а потому для величины (1.5.10) получаем оценку сверху

$$\chi_{m,n,r,p}(\varphi; h) \leq \{b_{n,m,r,p}(\varphi, h)\}^{-1}. \tag{1.5.19}$$

С целью получения оценки снизу величины (1.5.10) введём в рассмотрение функцию $f_0(z) = z^n \in B_{2,\gamma}$, для которой непосредственными вычислениями получаем

$$E_{n-1}^2(f_0)_{2,\gamma} = \int\limits_0^1 \rho^{2n+1}\gamma(\rho)d\rho, \tag{1.5.20}$$

$$\Omega_m(f_{0,a}^{(r)}; t)_{2,\gamma} = 2^{m/2} \cdot n^r \cdot \left(1 - \frac{\sin nt}{nt}\right)^{m/2} \cdot \int\limits_0^1 \rho^{2n+1}\gamma(\rho)d\rho =$$
$$= 2^{m/2} \cdot n^r \cdot \left(1 - \frac{\sin nt}{nt}\right)^{m/2} \cdot E_{n-1}(f_0)_{2,\gamma} \tag{1.5.21}$$

Учитывая определение величины (1.5.10) и равенств (1.5.20) и (1.5.21), будем иметь

$$\chi_{m,n,r,p}(\varphi;h) \geq \frac{2^{m/2}\cdot E_{n-1}(f_0)_{2,\gamma}}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(f_{0,a}^{(r)},t)_{2,\gamma}\cdot\varphi(t)dt\right)^{1/p}} =$$

$$= \frac{1}{n^r\left(\int\limits_0^h \left(1-\frac{\sin nt}{nt}\right)^{mp/2}\varphi(t)dt\right)^{1/p}} = \frac{1}{b_{n,m,r,p}(\varphi,h)}. \qquad (1.5.22)$$

Сравнивая оценку сверху (1.5.19), и оценку снизу (1.5.22), получаем требуемое равенство (1.5.11). Теорема 1.5.1 доказана.

Из теоремы 1.5.1 вытекают следующие следствия

Следствие 1.5.1. *Пусть* $\varphi(t)\equiv 1$, $m,n\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $0<p\leq 2$ *и* $0<h\leq 3\pi/(4n)$. *Тогда имеет место равенство*

$$\sup_{\substack{f\in B_{2,\gamma,a}^{(r)}\\ f_a^{(r)}\neq const}} \frac{2^{m/2}\cdot n^{r-1/p}\cdot E_{n-1}(f)_{2,\gamma}}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(f_a^{(r)},t)_{2,\gamma}dt\right)^{1/p}} =$$

$$= \left(\int\limits_0^{nh}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{mp/2}dt\right)^{-1/p}. \qquad (1.5.23)$$

В частности, при $p=2/m$, $m\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $r\geq m/2$ *из (1.5.23) следует, что*

$$\sup_{\substack{f\in B_{2,\gamma,a}^{(r)}\\ f_a^{(r)}\neq const}} \frac{2^{m/2}\cdot n^{r-\frac{m}{2}}\cdot E_{n-1}(f)_{2,\gamma}}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^{2/m}(f_a^{(r)},t)_{2,\gamma}dt\right)^{m/2}} = \frac{1}{(nh-Si(nh))^{m/2}}, \qquad (1.5.24)$$

где $Si(x)=\int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}dt$ *- интегральный синус.*

Следствие 1.5.2. *Пусть* $\varphi(t)\equiv t$, $m,n\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $p=2/m$, $r\geq m/2$,

$0<h\le\pi/n$. Тогда справедливо равенство

$$\sup_{\substack{f\in B^{(r)}_{2,\gamma,a}\\ f_a^{(r)}\neq const}}\frac{n^{r-\frac{m}{2}}E_{n-1}(f)_{2,\gamma}}{\left(\int\limits_0^h t\Omega_m^{2/m}(f_a^{(r)},t)_{2,\gamma}dt\right)^{m/2}}=$$

$$=\{(nh)^2-2(1-\cos nh)\}^{-m/2}. \qquad (1.5.25)$$

Отметем,что в частном случае при $h=\pi/n$ из (1.5.25) получаем

$$\sup_{\substack{f\in B^{(r)}_{2,\gamma,a}\\ f_a^{(r)}\neq const}}\frac{n^{r-\frac{m}{2}}\cdot E_{n-1}(f)_{2,\gamma}}{\left(\int\limits_0^{\pi/n} t\Omega_m^{2/m}(f_a^{(r)},t)_{2,\gamma}dt\right)^{m/2}}=\frac{1}{(\pi^2-4)^{m/2}}.$$

Известно, что если аналитическая в единичном круге функция $f\in B^{(r)}_{q,\gamma,a}$, то все её промежуточные производные $f^{(r-s)}(s=1,2,...,r-1)$ также принадлежат пространству $B_{2,\gamma}$ и для таких функций имеет место неравенство типа Колмогорова [56]

$$E_{n-1}(f_a^{(r-s)})_{B_{2,\gamma}}\le(E_{n-1}(f_a^{(r)})_{B_{2,\gamma}})^{1-\frac{s}{r}}\cdot(E_n(f)_{B_{2,\gamma}})^{s/r}. \qquad (1.5.26)$$

Теперь заметим, что из равенства (1.5.11) для произвольной функции $f\in B^{(r)}_{2,\gamma,a}$, у которой $f_a^{(r)}\neq const$, вытекает неравенство

$$E_{n-1}(f)_{B_{2,\gamma}}\le 2^{-m/2}\cdot n^{-r}\left(\int\limits_0^h\left(1-\frac{\sin nt}{nt}\right)^{mp/2}\varphi(t)dt\right)^{-1/p}\times$$

$$\times\left(\int\limits_0^h\Omega_m^p(f_a^{(r)},t)_{2,\gamma}\cdot\varphi(t)dt\right)^{1/p}, \qquad (1.5.27)$$

из которого при $r=0$ имеем

$$E_{n-1}(f)_{B_{2,\gamma}}\le 2^{-m/2}\cdot\left(\int\limits_0^h\left(1-\frac{\sin nt}{nt}\right)^{mp/2}\varphi(t)dt\right)^{-1/p}\times$$

$$\times\left(\int\limits_0^h\Omega_m^p(f,t)_{2,\gamma}\cdot\varphi(t)dt\right)^{1/p}. \qquad (1.5.28)$$

Заменяя в (1.5.28) функцию f на $f_a^{(r)}$, запишем

$$E_{n-1}(f_a^{(r)})_{B_{2,\gamma}} \le 2^{-m/2} \cdot \left(\int\limits_0^h \left(1 - \frac{\sin nt}{nt}\right)^{mp/2} \varphi(t)dt\right)^{-1/p} \times$$

$$\times \left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(f_a^{(r)}, t)_{2,\gamma} \cdot \varphi(t)dt\right)^{1/p}. \tag{1.5.29}$$

Подставляя в правую часть неравенства (1.5.26) вместо $E_n(f_a^{(r)})_{2,\gamma}$ и $E_n(f)_{2,\gamma}$ их оценки из правых частей соотношений (1.5.28) и (1.5.29) соответственно, для произвольного $0 < h \le 3\pi/(4n)$ получаем оценки сверху

$$\sup_{\substack{f \in B_{2,\gamma,a}^{(r)} \\ f_a^{(r)} \ne const}} \frac{2^{m/2} \cdot n^s \cdot E_{n-1}(f_a^{(r-s)})_{2,\gamma}}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(f_a^{(r)}, t)_{2,\gamma} \varphi(t)dt\right)^{1/p}} \le$$

$$\le \left(\int\limits_0^h \left(1 - \frac{\sin nt}{nt}\right)^{mp/2} \varphi(t)dt\right)^{-1/p}. \tag{1.5.30}$$

Для получения оценки снизу рассмотрим функцию $f_0(z) = z^n \in B_{q,\gamma,a}^{(r)}$, для которой

$$E_{n-1}^2(f_{0,a}^{(r-s)})_{2,\gamma} = n^{2(r-s)} \cdot \int\limits_0^1 \rho^{2n+1}\gamma(\rho)d\rho,$$

$$\Omega_m^2(f_{0,a}^{(r)}, t)_{2,\gamma} = 2^m \cdot n^{2r} \left(1 - \frac{\sin nt}{nt}\right)^m \cdot \int\limits_0^1 \rho^{2n+1}\gamma(\rho)d\rho,$$

будем иметь

$$\sup_{\substack{f \in B_{2,\gamma,a}^{(r)} \\ f_a^{(r)} \ne const}} \frac{2^{m/2} \cdot n^s \cdot E_{n-1}(f_a^{(r-s)})_{2,\gamma}}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(f_a^{(r)}, t)_{2,\gamma} \varphi(t)dt\right)^{1/p}} \ge$$

$$\ge \frac{2^{m/2} \cdot n^s \cdot E_{n-1}(f_{0,a}^{(r-s)})_{2,\gamma}}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(f_{0,a}^{(r)}, t)_{2,\gamma} \cdot \varphi(t)dt\right)^{1/p}} =$$

$$= \left(\int\limits_0^h \left(1 - \frac{\sin nt}{nt} \right)^{mp/2} \cdot \varphi(t)dt \right)^{-1/p}. \qquad (1.5.31)$$

Сравнивая оценки сверху (1.5.30) и снизу (1.5.31), получаем

Теорема 1.5.2. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $s = 1, 2, ..., r$, $0 < h \leq 3\pi/(4n)$, $\varphi \geq 0$ *- весовая на отрезке* $[0, h]$ *функция. Тогда имеет место равенство*

$$\sup_{\substack{f \in B_{2,\gamma,a}^{(r)} \\ f_a^{(r)} \neq const}} \frac{2^{m/2} \cdot n^s \cdot E_{n-1}(f_a^{(r-s)})_{2,\gamma}}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(f_a^{(r)}, t)_{2,\gamma} \cdot \varphi(t)dt \right)^{1/p}} =$$

$$= \left(\int\limits_0^h \left(1 - \frac{\sin nt}{nt} \right)^{mp/2} \varphi(t)dt \right)^{-1/p}. \qquad (1.5.32)$$

Следствие 1.5.3. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N}$; $0 < p \leq 2$; $r \in \mathbb{Z}_+$; $s = 0, 1, 2, ..., r$; $\varphi(t) \equiv 1$, $t \in (0, h]$, $h \in (0, \pi/n]$. *Тогда имеют место равенства*

$$\sup_{\substack{f \in B_{2,\gamma,a}^{(r)} \\ f_a^{(r)} \neq const}} \frac{2^{m/2} \cdot n^s \cdot E_{n-1}(f_a^{(r-s)})_{2,\gamma}}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(f_a^{(r)}, t)_{2,\gamma} dt \right)^{1/p}} =$$

$$= \left(\int\limits_0^h \left(1 - \frac{\sin nt}{nt} \right)^{mp/2} dt \right)^{-1/p}. \qquad (1.5.33)$$

В частности, при $p = 2/m$, $m \in \mathbb{N}$ *из (1.5.33) получаем*

$$\sup_{\substack{f \in B_{2,\gamma,a}^{(r)} \\ f_a^{(r)} \neq const}} \frac{2^{m/2} \cdot n^{s-m/2} \cdot E_{n-1}(f_a^{(r-s)})_{2,\gamma}}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^{2/m}(f_a^{(r)}, t)_{2,\gamma} dt \right)^{m/2}} = (nh - Si(nh))^{-m/2}. \qquad (1.5.34)$$

Следствие 1.5.4. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N}$; $p = 2/m$; $r \in \mathbb{Z}_+$; $s = 0, 1, 2, ..., r$;

$\varphi(t) \equiv 1$, $0 < t \le h$, $0 < h \le \pi/n$. *Тогда справедливы равенства*

$$\sup_{\substack{f \in B^{(r)}_{2,\gamma,a} \\ f^{(r)}_a \ne const}} \frac{n^{s-m/2} \cdot E_{n-1}(f^{(r-s)}_a)_{2,\gamma}}{\left(\int\limits_0^h t\Omega_m^{2/m}(f^{(r)}_a, t)_{2,\gamma} dt\right)^{m/2}} =$$

$$= \left\{(nh)^2 - 2(1 - \cos nh)\right\}^{-m/2}. \qquad (1.5.35)$$

Из равенств (1.5.33) - (1.5.35) при $s = r$ *соответственно получаем (1.5.23) - (1.5.25).*

ГЛАВА II

Точные значения поперечников некоторых классов аналитических функций в весовом пространстве $B_{q,\gamma}$

§2.1. Основные обозначения и определения

2.1.1. Определение n-поперечников

Сначала излагаем необходимые определения и обозначения, которыми будем пользоваться в дальнейшем во последующих параграфах.

Пусть X – некоторое банахово пространство; S – единичный шар в X; $\mathfrak{N}$ – некоторое выпуклое центрально-симметричное подмножество в X; $L_n \subset X$ – подпространство размерности n; $L^n \subset X$ – подпространство коразмерности n; $\mathcal{L}(X, L_n)$ – множество всех линейных ограниченных операторов, отображающих X в L_n, $X \to L_n$; $\mathcal{L}^{\perp}(X, L_n)$ – подмножество проекторов из $\mathcal{L}(X, L_n)$.

Задача приближение фиксированного множества $\mathfrak{N} \subset X$ фиксированным подпространством L_n этого же пространства X задаётся соотношением

$$E(\mathfrak{N}, L_n)_X := \sup\left\{\inf\left\{\|f-\varphi\|_X : \varphi \in L_n\right\} : f \in \mathfrak{N}\right\}. \tag{2.1.1}$$

Величина

$$\mathcal{E}(\mathfrak{N}, L_n)_X := \inf\{\sup\{\|f-\Lambda(f)\|_X : f \in \mathfrak{N}\} : \Lambda \subset \mathcal{L}(X, L_n)\} \tag{2.1.2}$$

есть наилучшее линейное приближение множества $\mathfrak{N}$ элементами подпространства $L_n \subset X$. Линейный оператор $\Lambda^*(\Lambda^* \subset \mathcal{L}(X, L_n))$, если он существует, реализующий в (2.1.2) точную нижнюю грань, то есть такой, что

$$\mathcal{E}(\mathfrak{N}, L_n)_X = \sup\{\|f-\Lambda^*(f)\|_X; f \in \mathfrak{N}\},$$

является наилучшим для $\mathfrak{N}$ линейным методом приближения.

$$\mathcal{E}_n^{\perp}(\mathfrak{N})_X := \mathcal{E}^{\perp}(\mathfrak{N}, L_n)_X =$$

$$= \inf\{\sup\{\|f - \Lambda f\|_X : f \in \mathfrak{N}\} : \Lambda \subset \mathcal{L}^{\perp}(X, L_n)\} \qquad (2.1.3)$$

– наилучшее приближение множества $\mathfrak{N} \subset X$ проекторами в пространстве X. Очевидно, что для величин (2.1.1)-(2.1.3), согласно определению, выполняется соотношение

$$E_n(\mathfrak{N})_X \leq \mathcal{E}_n(\mathfrak{N})_X \leq \mathcal{E}_n^{\perp}(\mathfrak{N})_X. \qquad (2.1.4)$$

Величины ([43], [31], стр. 341-342)

$$b_n(\mathfrak{N}, X) = \sup\{\sup\{\varepsilon > 0 : \varepsilon S \cap L_{n+1} \subset \mathfrak{N}\} : L_{n+1} \subset X\}, \qquad (2.1.5)$$

$$d_n(\mathfrak{N}, X) := \inf\{E(\mathfrak{N}, L_n)_X : L_n \subset X\}, \qquad (2.1.6)$$

$$d^n(\mathfrak{N}, X) = \inf\{\sup\{\|f\|_X : f \in \mathfrak{N} \cap L^n\} : L^n \subset X\}, \qquad (2.1.7)$$

$$\delta_n(\mathfrak{N}, X) = \inf\{\mathcal{E}(\mathfrak{N}, L_n)_X : L_n \subset X\}, \qquad (2.1.8)$$

$$\pi_n(\mathfrak{N}, X) = \inf\{\mathcal{E}^{\perp}(\mathfrak{N}, L_n) : L_n \subset X\} \qquad (2.1.9)$$

называют соответственно бернштейновским, колмогоровским, гельфандовским, бернштейновским, линейным и проекционным n-поперечниками.

Если существует подпространство $L_n^* \subset X$, $dim L_n^* = n$, на котором нижняя грань в (2.1.5) достигается, то есть

$$d_n(\mathfrak{N}, X) = E(\mathfrak{N}, L_n^*)_X,$$

то L_n^* называют экстремальным подпространством для $d_n(\mathfrak{N}, X)$. Экстремальное подпространство L_n^* является наилучшим аппаратом приближения множества $\mathfrak{N}$ среди всех подпространств $\{L_n\} \subset X$.

Подпространство $\tilde{L_n} \subset X$, $dim\tilde{L_n} = n$ (если оно существует), для которого

$$\delta_n(\mathfrak{N}, X) = \mathcal{E}(\mathfrak{N}, \bar{L_n})_X,$$

называют экстремальным для $\delta_n(\mathfrak{N}, X)$. Особый интерес представляет отыскание экстремальных подпространств $\hat{L_n} \subset X$, $dim\hat{L_n} = n$, таких, что

$$E(\mathfrak{N}, \hat{L_n})_X = \mathcal{E}(\mathfrak{N}, \hat{L_n})_X = d_n(\mathfrak{N}, X) = \delta_n(\mathfrak{N}, X).$$

Если существует подпространство $\bar{L}_{n+1} \subset X,\ dim\ \bar{L}_{n+1} = n+1$, для которого

$$b_n(\mathfrak{N}, X) = \sup\{\varepsilon > 0 : \varepsilon S \cap \bar{L}_{n+1} \subset \mathfrak{N}\},$$

то оно является экстремальным для $b_n(\mathfrak{N}, X)$. Подпространство $L_*^n \subset X$ коразмерности n (если оно существует) такое, что

$$d^n(\mathfrak{N}, X) = \sup\{\|f\|_X : f \in \mathfrak{N} \cap L_*^n\},$$

называют экстремальным для $d^n(\mathfrak{N}, X)$. Напомним, что между перечисленными выше n-поперечниками имеют место следующие соотношения

$$b_n(\mathfrak{N}, X) \le \begin{matrix} d_n(\mathfrak{N}, X) \\ d^n(\mathfrak{N}, X) \end{matrix} \le \delta_n(\mathfrak{N}, X) \le \pi(\mathfrak{N}, X). \qquad (2.1.10)$$

Если X – гильбертово пространство, то между перечисленными n-поперечниками (2.1.5)-(2.1.9) имеют место соотношения (см., например, [31], [40]):

$$b_n(\mathfrak{N}, X) \le d^n(\mathfrak{N}, X) \le d_n(\mathfrak{N}, X) = \delta_n(\mathfrak{N}, X) = \pi(\mathfrak{N}, X). \qquad (2.1.11)$$

§2.2. Точные значения n-поперечников некоторых классов аналитических функций, принадлежащих $B_{2,\gamma}$

Нам для изложения дальнейших результатов, необходимы некоторые определения и понятия, приведённые в [42].

Пусть S – единичный шар в $B_{2,\gamma}$, $\mathfrak{N}$ – выпуклое центрально симметричное множество из $B_{2,\gamma}$; $\Lambda_n \subset B_{2,\gamma}$ – n-мерное подпространство; $\Lambda^n \subset B_{2,\gamma}$ – подпространство коразмерности n; $\mathcal{L}$: $B_{2,\gamma} \to \Lambda_n$ – непрерывный линейный оператор; $\mathcal{L}^{\perp} : B_{2,\gamma} \to \Lambda_n$ – непрерывный линейный оператор проектирования.

Величины

$$b_n(\mathfrak{N}; B_{2,\gamma}) = \sup\left\{\sup\left\{\varepsilon > 0 : \ \varepsilon S \cap \Lambda_{n+1} \subset \mathfrak{N}\right\} : \Lambda_{n+1} \subset B_{2,\gamma}\right\},$$

$$d_n(\mathfrak{N}; B_{2,\gamma}) = \inf\left\{\sup\left\{\inf\left\{\|f-g\| : g \in \Lambda_n\right\} : f \in \mathfrak{N}\right\} : \Lambda_n \subset B_{2,\gamma}\right\},$$

$$\delta_n(\mathfrak{N}; B_{2,\gamma}) = \inf\left\{\inf\left\{\sup\left\{\|f-\mathcal{L}f\| : f \in \mathfrak{N}\right\} : \mathcal{L}B_{2,\gamma} \subset \Lambda_n\right\} : \Lambda_n \subset B_{2,\gamma}\right\},$$

$$d^n(\mathfrak{N}; B_{2,\gamma}) = \inf\left\{\sup\left\{\|f\| : f \in \mathfrak{N} \cap \Lambda^n\right\} : \Lambda^n \subset B_{2,\gamma}\right\},$$

$$\pi_n(\mathfrak{N}; B_{2\gamma}) = \inf\Big\{\inf\Big\{\sup\Big\{\|f-\mathcal{L}^{\perp}f\| : f \in \mathfrak{N}\Big\} : \mathcal{L}^{\perp}B_{2,\gamma} \subset \Lambda_n\Big\} : \Lambda_n \subset B_{2,\gamma}\Big\}$$

называют соответственно бернштейновским, колмогоровским, линейным, гельфандовским, проекционным n-поперечниками.

В гильбертовом пространстве $B_{2,\gamma}$ между перечисленными n - поперечниками выполняются соотношения:

$$b_n(\mathfrak{N}; B_{2,\gamma}) \le d^n(\mathfrak{N}; B_{2,\gamma}) \le d_n(\mathfrak{N}; B_{2,\gamma}) =$$

$$= \delta_n(\mathfrak{N}; B_{2,\gamma}) = \pi_n(\mathfrak{N}; B_{2,\gamma}). \tag{2.2.1}$$

Посредством модуля непрерывности (1.5.3) определим следующие классы функций.

Пусть $\Psi_i(t)$ $(i = \overline{1,3};\ 0 \le t < \infty)$ - непрерывные, неубывающие функции такие, что $\Psi_i(0) = 0$. Символом $W_{p,a}^{(r)}(\Omega_m, \Psi_i)$ $(i = \overline{1,3};\ 0 < p \le 2)$, $m \in \mathbb{N}$,

$r \in \mathbb{Z}_+$ обозначим классов функций $f \in B^{(r)}_{2,\gamma,a}$, для которых при любом $h \in \mathbb{R}_+$ соответственно, имеют место неравенства

$$\int\limits_0^h \Omega_m^p(f_a^{(r)}, t)_{2,\gamma} dt \le \Psi_1(h),$$

$$\frac{1}{h}\int\limits_0^h \Omega_m^p(f_a^{(r)}, t)_{2,\gamma} dt \le \Psi_2(h),$$

$$\frac{2}{h^2}\int\limits_0^h t\Omega_m^p(f_a^{(r)}, t)_{2,\gamma} dt \le \Psi_3(h).$$

Если $\mathfrak{N}$ – некоторый класс функций $f \in B^{(r)}_{2,\gamma,a}$, то наилучшее приближение этого класса в пространстве $B_{2,\gamma}$ обозначим

$$E_{n-1}(\mathfrak{N})_{B_{2,\gamma}} = \sup\Big\{E_{n-1}(f):\ f \in \mathfrak{N}\Big\}.$$

При $t = 0$ полагая значение функции $\dfrac{\sin t}{t}$ равным 1, через t_* обозначим величину её аргумента, при котором эта функция достигает на полупрямой $\mathbb{R}_+ := [0, \infty)$ своё наименьшее значение. При этом число t_* $(4,49 < t_* < 4,51)$ есть минимальный положительный корень уравнения $t = \operatorname{tg} t$. Следуя обозначением [17], полагаем

$$\left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)_* := \begin{cases} 1 - \dfrac{\sin t}{t}, & \text{если } \ 0 \le t \le t_*, \\ 1 - \dfrac{\sin t_*}{t_*}, & \text{если } \ t_* \le t \le \infty. \end{cases} \tag{2.2.2}$$

Одним из основных результатов второго параграфа является следующее утверждение

Теорема 2.2.1. *Пусть функция* Ψ_1 *при любых значениях* $h \in \mathbb{R}_+$, $m, n, r \in \mathbb{N}$, $1/r < p \le 2$, *удовлетворяет условию*

$$\left(\frac{\Psi_1(h)}{\Psi_1(\pi/n)}\right)^p \ge \int\limits_0^{nh} \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)_*^{mp/2} dt \cdot \left\{\int\limits_0^{\pi} \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)^{mp/2} dt\right\}^{-1}. \tag{2.2.3}$$

Тогда выполняются равенства

$$\lambda_n\left(W^{(r)}_{p,a}\left(\Omega_m,\Psi_1\right),B_{2,\gamma}\right)=E_{n-1}\left(W^{(r)}_{p,a}(\Omega_m,\Psi_1)\right)_{B_{2,\gamma}}=$$

$$=2^{-m/2}\left\{\int\limits_0^\pi\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{mp/2}dt\right\}^{-1/p}\cdot n^{-r+\frac{1}{p}}\cdot\Psi_1\left(\frac{\pi}{n}\right),\qquad(2.2.4)$$

где $\lambda_n(\cdot)$ *- любой из перечисленных выше* n*-поперечников. При этом множество мажорант* Ψ_1*, удовлетворяющих ограничению (2.2.3), не пусто. Этому условию удовлетворяет, например, функция* $\Psi_1^*=t^{\alpha/p}$*, где*

$$\alpha:=\frac{\pi}{\int\limits_0^\pi\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{mp/2}dt}.$$

Доказательство. Используя равенство (1.5.24) для произвольной функции $f\in B^{(r)}_{2,\gamma,a}$, получаем неравенство

$$E_{n-1}(f)_{2,\gamma}\le$$

$$\le 2^{-m/2}\cdot n^{-r+\frac{1}{p}}\left(\int\limits_0^{nh}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{mp/2}dt\right)^{-1/p}\cdot\left(\int\limits_0^h\Omega_m^p(f_a^{(r)},t)_{2,\gamma}dt\right).\quad(2.2.5)$$

Полагая в неравенстве (2.2.5) $h=\pi/n$ и учитывая определение класса $W^{(r)}_{p,a}(\Omega_m,\Psi_1)$, получаем оценку сверху величины наилучшего полиномиального приближения

$$E_{n-1}\left(W^{(r)}_{p,a}(\Omega_m,\Psi_1)\right)_{B_{2,\gamma}}\le$$

$$\le 2^{-m/2}\cdot n^{-r+\frac{1}{p}}\cdot\left(\int\limits_0^{nh}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{mp/2}dt\right)^{-1/p}\cdot\Psi_1\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

откуда для всех перечисленных n-поперечников получаем

$$\lambda_n\left(W^{(r)}_{p,a}\left(\Omega_m,\Psi_1\right),B_{2,\gamma}\right)\le$$

$$\leq 2^{-m/2} \cdot n^{-r+\frac{1}{p}} \cdot \left(\int\limits_0^{\pi} \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)^{mp/2} \right)^{-1/p} \cdot \Psi_1\left(\frac{\pi}{n}\right). \qquad (2.2.6)$$

Для вычисления оценок снизу рассматриваемых n-поперечников согласно (2.2.1) достаточно получить оценку снизу бернштейновского n-поперечника $b_n\left(W_{p,a}^{(r)}(\Omega, \Psi), B_{2,\gamma}\right)$. С этой целью во множество $\mathcal{P}_n \cap B_{2,\gamma}$ вводим в рассмотрение шар

$$S_{n+1} = \left\{ p_n \in \mathcal{P}_n : \|p_n\|_{B_{2,\gamma}} \leq 2^{-m/2} \left(\int\limits_0^{\pi} \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)^{mp/2} dt \right)^{-1/p} n^{-r+\frac{1}{p}} \cdot \Psi_1\left(\frac{\pi}{n}\right) \right\}.$$

Используя равенство (1.5.6) для произвольного $p_n \in B_{2,\gamma}^{(r)}$, получаем

$$\Omega_m\left(p_{n,a}^{(r)}, t\right)_{2,\gamma} \leq$$

$$\leq 2^{m/2} \cdot n^r \cdot \left(1 - \frac{\sin nt}{nt}\right)_*^{m/2} \cdot \|p_n\|_{2,\gamma}, \quad 0 < nt \leq 3\pi/4. \qquad (2.2.7)$$

Для произвольного полинома $p_n \in S_{n+1}$ в силу условия (2.2.3) и неравенство (2.2.7) с учётом определения класса получаем

$$\int\limits_0^h \Omega_m^p(p_{n,a}^{(r)}, t)_{2,\gamma} \leq 2^{mp/2} \cdot n^{rp} \cdot \|p_n\|_{2,\gamma}^p \cdot \int\limits_0^h \left(1 - \frac{\sin nt}{nt}\right)_*^{mp/2} dt \leq$$

$$\leq 2^{mp/2} \cdot n^{rp-1} \cdot \|p_n\|_{2,\gamma}^p \cdot \int\limits_0^{nh} \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)_*^{mp/2} dt \leq$$

$$\leq \int\limits_0^{nh} \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)_*^{mp/2} dt \cdot \left\{ \int\limits_0^{\pi} \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)^{mp/2} dt \right\} \cdot \Psi_1\left(\frac{\pi}{n}\right) \leq \Psi(h),$$

где $h \in \mathbb{R}_+$. Отсюда следует, что шар S_{n+1} содержится в классе $W_{p,a}^{(r)}(\Omega_m, \Psi_1)$. Поэтому, воспользуясь определением бернштейновского n-поперечника и соотношением (2.2.1), имеем

$$\lambda_n\left(W_{p,a}^{(r)}\left(\Omega_m, \Psi_1\right), B_{2,\gamma}\right) \geq b_n\left(W_{p,a}^{(r)}(\Omega_m, \Psi_1), B_{2,\gamma}\right) \geq b_n\left(S_n, B_{2,\gamma}\right) \geq$$

$$\geq 2^{-m/2} \cdot \left(\int\limits_0^{\pi} \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)^{mp} dt \right)^{-1/p} \cdot n^{-r+1/p} \cdot \Psi_1 \left(\frac{\pi}{n}\right). \tag{2.2.8}$$

Сравнивая оценку сверху (2.2.6) и оценку снизу (2.2.8), получаем равенства (2.2.4). Теперь покажем, что функция $\Psi_1^*(t) = t^{\alpha/p}$, где

$$\alpha := \alpha(m,p) = \frac{\pi}{\int\limits_0^{\pi} \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)^{mp/2} dt}, \tag{2.2.9}$$

удовлетворяет условию (2.2.3). Для числа α легко получить границы значений

$$\frac{mp}{2} + 1 < \alpha < mp + 1. \tag{2.2.10}$$

После подстановки Ψ_1^* в (2.2.3) получаем

$$\left(\frac{nh}{\pi}\right)^{\alpha} \geq \int\limits_0^{nh} \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)_*^{mp/2} dt \cdot \left\{ \int\limits_0^{\pi} \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)^{mp/2} dt \right\}^{-1}. \tag{2.2.11}$$

Полагая $nh = \mu\pi$, где $0 \leq \mu < \infty$, имеем

$$\mu^{\alpha} \geq \int\limits_0^{\mu\pi} \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)_*^{mp/2} dt \cdot \left\{ \int\limits_0^{\pi} \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)^{mp/2} dt \right\}^{-1}, \tag{2.2.12}$$

которую с учётом (2.2.9) запишем в виде

$$\mu^{\alpha} \geq \frac{\alpha}{\pi} \cdot \int\limits_0^{\mu\pi} \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)_*^{mp/2} dt. \tag{2.2.13}$$

Введём в рассмотрение вспомогательную функцию

$$\varphi(\mu) = \mu^{\alpha} - \frac{\alpha}{\pi} \cdot \int\limits_0^{\mu\pi} \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)_*^{mp/2} dt. \tag{2.2.14}$$

Докажем, что $\varphi(\mu) \geq 0$ при любых $0 \leq \mu < \infty$. Отдельно рассмотрим три случая а) $0 \leq \mu \leq 1$; б) $1 \leq \mu \leq t_*/\pi$; в) $t_*/\pi \leq \mu < \infty$.

Пусть $0 \leq \mu \leq 1$. Так как для $0 \leq t \leq \pi$, $\sin t/t \geq 1 - t^2/6$, то учитывая (2.2.14) получаем

$$\varphi(\mu) = \mu^{\alpha} \left(1 - \frac{\alpha t^{mp-\alpha}}{\pi mp \cdot 6^{mp/2}}\right). \tag{2.2.15}$$

Из (2.2.10) и (2.2.15) следует, что при $t \to 0+0$ функция φ принимает положительные значения. Покажем, что на всём интервале $(0,1)$ функция $\varphi(\mu)$ положительна. Предположим, что это не так и существует интервал $\eta \in (0,1)$, в котором φ меняет знак. Так как, согласно (2.2.14) и (2.2.9), $\varphi(0)=\varphi(1)=0$, то в силу теоремы Ролля производная

$$\varphi'(\mu)=\alpha\cdot\left[\mu^{\alpha-1}-\left(1-\frac{\sin\mu\pi}{\mu\pi}\right)^{mp/2}\right]$$

на интервале $(0,1)$ имеет не менее двух различных нулей и ещё $\varphi'(0)=\varphi'(1)=0$. Столько же нулей имеет функция

$$\varphi_*(\mu)=\pi\cdot\mu^{2\cdot\frac{\alpha-1}{mp}+1}-\mu\pi+\sin\mu\pi$$

и, кроме того, $\varphi_*(0)=\varphi_*(1)=0$, а потому

$$\varphi_*'(\mu)=\pi\cdot\left(\frac{2(\alpha-1)}{mp}+1\right)\cdot\mu^{\frac{2(\alpha-1)}{mp}}-\pi\cdot(1-\cos\mu\pi)$$

должна иметь на $(0,1)$ не менее трёх различных нулей и, кроме того, $\varphi_*'=0$. На основании аналогичных соображений вторая производная

$$\varphi_*''(\mu)=\pi\cdot\left(\frac{2(\alpha-1)}{mp}+1\right)\cdot\frac{2(\alpha-1)}{mp}\cdot\mu^{\frac{2(\alpha-1)}{mp}-1}-\pi^2\cdot\sin\mu\pi \qquad (2.2.16)$$

должна иметь на $(0,1)$ не менее трёх различных нулей. Но φ_*'' как разность выпуклой вверх и выпуклой вниз функций не может иметь на $(0,1)$ трёх различных нулей. Полученное противоречие доказывает неравенство (2.2.13) в случае а).

Переходя к рассмотрению случая б), заметим, что при всех $\mu\in(1,t_*/\pi)$ функция $\varphi_*'(\mu)$ принимает только положительные значения и, так как

$$\varphi_*'(1)=\pi\cdot\left(\frac{2(\alpha-1)}{mp}-1\right)>0,$$

то $\varphi_*'(\mu)>0$ для любого $\mu\in[1,t_*/\pi]$. Следовательно, φ_*' - монотонно возрастающая функция на $[1,t_*/\pi]$, а потому φ_* возрастает на этой отрезке, а значит функция $\varphi'(\mu)$ на этом отрезке является возрастающей. Это значит, что неравенство (2.2.13) выполняется и для случая б).

Переходя к рассмотрению случая б), из (2.2.14) получаем

$$\varphi(\mu)=\mu^{\alpha}-\frac{\alpha}{\pi}\cdot\int\limits_{0}^{t_*}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{mp/2}dt-\frac{\alpha}{\pi}\left(1-\frac{\sin t_*}{t_*}\right)^{mp/2}\cdot(\mu\pi-t_*). \quad (2.2.17)$$

Дифференцируя функцию (2.2.17), имеем

$$\varphi^{\prime}(\mu)=\alpha\cdot\left\{\mu^{\alpha-1}-\left(1-\frac{\sin t_*}{t_*}\right)^{mp/2}\right\}. \quad (2.2.18)$$

Из (2.2.18) получаем

$$\varphi^{\prime}\left(\frac{t_*}{\pi}\right)=\alpha\cdot\left\{\left(\frac{t_*}{\pi}\right)^{\alpha-1}-\left(1-\frac{\sin t_*}{t_*}\right)^{mp/2}\right\}>0. \quad (2.2.19)$$

Из (2.2.18) и (2.2.19) следует, что функция $\varphi^{\prime}(\mu)$ является положительной монотонно возрастающей. Поскольку в силу случая б) $\varphi(t_*/\pi)>0$, то функция φ является неотрицательной на множестве $t_*/\pi\le t<\infty$ и, таким образам, неравенство (2.2.13) выполняется и в случае в). Теорема 2.2.1 полностью доказана.

Следствие 2.2.1. *В условиях теоремы 2.2.1 при* $r\ge m/2$, $m\in\mathbb{N}$ *справедливы равенства*

$$\lambda_n\left(W^{(r)}_{2/m,a}\left(\Omega_m,\Psi_1\right),B_{2,\gamma}\right)=E_{n-1}\left(W^{(r)}_{2/m,a}\left(\Omega_m,\Psi_1\right)\right)_{B_{2,\gamma}}=$$

$$=\left\{2\left(\pi-Si(\pi)\right)\right\}^{-m/2}\cdot n^{-r+\frac{m}{2}}\cdot\Psi_1(\frac{\pi}{n}),$$

где $Si(x)$ *- интегральный синус.*

Теорема 2.2.2. *Пусть* $m,n\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $0<p\le 2$ *и функция* Ψ_2 *при любых значениях* $h\in\mathbb{R}_+$ *удовлетворяет ограничению*

$$\left(\frac{\Psi_2(h)}{\Psi_2(\pi/n)}\right)^{p}\ge$$

$$\ge\frac{\pi}{nh}\cdot\left\{\int\limits_{0}^{nh}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)_{*}^{mp/2}dt\right\}\cdot\left\{\int\limits_{0}^{\pi}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{mp/2}dt\right\}^{-1}. \quad (2.2.20)$$

Тогда (при $\varphi(t)\equiv 1$*) выполняются равенства*

$$\lambda_n\left(W^{(r)}_{p,a}\left(\Omega_m,\Psi_2\right),B_{2,\gamma}\right)=E_{n-1}\left(W^{(r)}_{p,a}\left(\Omega_m,\Psi_2\right)\right)_{B_{2,\gamma}}=$$

$$= 2^{-m/2} \cdot \left\{ \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)^{mp/2} dt \right\}^{-1/p} \cdot n^{-r} \cdot \Psi_2\left(\frac{\pi}{n}\right), \qquad (2.2.21)$$

где $\lambda_n(\cdot)$ *- любой из* n*-поперечников* $b_n(\cdot)$, $d_n(\cdot)$, $d^n(\cdot)$, $\delta_n(\cdot)$, $\pi_n(\cdot)$. *Мажоранта* $\Psi_2^*(t) = t^{\alpha/p}$, *где*

$$\alpha := \frac{\pi}{\int\limits_0^{\pi} \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)^{mp/2} dt} - 1$$

удовлетворяет условию (2.2.20).

Доказательство. Для произвольной $f \in B_{2,\gamma,a}^{(r)}$ неравенство (2.2.5) перепишем в нужном нам виде

$$E_{n-1}(f)_{2,\gamma} \leq$$

$$\leq 2^{-m/2} \cdot n^{-r} \cdot \left(\frac{1}{nh} \int\limits_0^{nh} \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)^{mp/2} dt \right)^{-1/p} \cdot \left(\frac{1}{h} \int\limits_0^{h} \Omega_m^p(f_a^{(r)}, t)_{2,\gamma} dt \right)^{1/p},$$

откуда при $nh = \pi$ с учётом определения класса $W_p^{(r)}(\Omega_m, \Psi_2)$ и соотнашения (2.2.1) запишем оценку сверху

$$\lambda_n\left(W_p^{(r)}\left(\Omega_m, \Psi_2\right), B_{2,\gamma}\right) \leq E_{n-1}\left(W_p^{(r)}\left(\Omega_m, \Psi_2\right)\right)_{B_{2,\gamma}} \leq$$

$$\leq 2^{-m/2} \left\{ \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)^{mp/2} dt \right\}^{-1/p} \cdot \Psi_2(\frac{\pi}{n}). \qquad (2.2.22)$$

Далее, введя в рассмотрение шар

$$S_{n+1}^* = \left\{ P_n \in \mathcal{P} : \|P_n\|_{2,\gamma} \leq 2^{-m/2} \left(\frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)^{mp/2} dt \right)^{-1/p} \cdot n^{-r} \cdot \Psi_2\left(\frac{\pi}{n}\right) \right\}$$

и используя ограничения (2.2.20) для производного $P_n \in S_{n+1}^*$, имеем:

$$\frac{1}{h} \int\limits_0^{h} \Omega_{m,a}^p(f_{n,a}^{(r)}, t)_{2,\gamma} dt \leq 2^{mp/2} \cdot n^{rp} \cdot \frac{1}{nh} \cdot \int\limits_0^{nh} \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)_*^{mp/2} dt \cdot \|P_n\|_{2,\gamma}^p \leq$$

$$\leq \frac{1}{nh}\cdot\int\limits_0^{nh}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{mp/2}dt\cdot\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{mp/2}dt\right)^{-1}\cdot\Psi_2\left(\frac{\pi}{n}\right)\leq\Psi_2(h),$$

откуда и следует ограничение $S_{n+1}^{*} \subset W_p^{(r)}(\Omega_m, \Psi_2)$. Откуда для бернштейновского n -поперечника получаем

$$b_n\left(W_{p,a}^{(r)}(\Omega_m,\Psi_2),B_{2,\gamma}\right)\geq b_n\left(S_{n+1}^{*},B_{2,\gamma}\right)\geq$$

$$\geq 2^{-m/2}\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{mp/2}dt\right\}^{-1/p}\cdot n^{-r}\cdot\Psi_2\left(\frac{\pi}{n}\right) \qquad (2.2.23)$$

Требуемые равенства (2.2.21) получаем из сравнение неравенств (2.2.22) и (2.2.23) и этим доказательство теоремы 2.2.2 завершается.

Следствие 2.2.2. *При выполнении условия теоремы 2.2.2 выполняются равенства*

$$\lambda_n(W_{2/m,a}^{(r)}(\Omega_m,\Psi_2),B_{2,\gamma})=\mathcal{E}_{n-1}(W_{2/m,a}^{(r)}(\Omega_m,\Psi_2)=\left\{\frac{\pi}{2(\pi-Si(\pi))}\right\}^{m/2}\cdot\Psi_2\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Теорема 2.2.3. *Если функция Ψ_2 при любом $h\in\mathbb{R}_+$ и $m,n\in\mathbb{N}$, $0<p\leq 2$, $r\in\mathbb{Z}_+$ удовлетворяет ограничению (2.2.20), то для $s\in\mathbb{R}_+$ справедливы равенства*

$$\sup\left\{E_{n-1}(f^{(r-s)})_{2,\gamma}:f\in W_{p,a}^{(r)}(\Omega_m,\Psi_2)\right\}=$$

$$=2^{-m/2}\cdot n^{-s}\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{mp/2}dt\right\}^{-1/p}\cdot\Psi_2\left(\frac{\pi}{n}\right). \qquad (2.2.24)$$

Доказательство. В самом деле, из соотношения (1.5.33) при $h=\pi/n$ для произвольной функции $f\in B_{2,\gamma}^{(r)}$ получаем

$$E_{n-1}\left(f_a^{(r-s)}\right)_{2,\gamma}\leq 2^{-m/2}\cdot n^{-s}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{mp/2}dt\right)^{-1/p}\cdot\Psi_2\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Отсюда, используя определение класса $W_{p,a}^{(r)}(\Omega_m,\Psi_2)$, имеем

$$\sup\left\{E_{n-1}(f^{(r-s)})_{B_{2,\gamma}} : f \in W^{(r)}_{p,a}(\Omega_m, \Psi_2)\right\} \leq$$

$$\leq 2^{-m/2} \cdot n^{-s} \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)^{mp/2} dt\right)^{-1/p} \cdot \Psi_2\left(\frac{\pi}{n}\right). \qquad (2.2.25)$$

При доказательстве теоремы 2.2.2 было доказано, что для всех комплексных алгебраических полиномов $p_n(z) \in \mathcal{P}_n$, удовлетворяющих условию

$$\|P_n\|_{2,\gamma} \leq 2^{-m/2} \cdot n^{-s} \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)^{mp/2} dt\right)^{-1/p} \cdot \Psi_2\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

принадлежит классу $W^{(r)}_{p,a}\left(\Omega_m, \Psi_2\right)$. Рассмотрим функцию

$$f_*(z) = 2^{-m/2} \cdot n^{-s} \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)^{mp/2} dt\right)^{-1/p} \cdot \Psi_2\left(\frac{\pi}{n}\right) \cdot \frac{z^n}{\|z^n\|_{2,\gamma}}.$$

Поскольку $f_* \in W^{(r)}_{p,a}\left(\Omega_m, \Psi_2\right)$ и, кроме того,

$$E_{n-1}\left(f^{(r-s)}_{*,a}\right)_{2,\gamma} =$$

$$= 2^{-m/2} \cdot n^{-s} \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)^{mp/2} dt\right)^{-1/p} \cdot \Psi_2\left(\frac{\pi}{n}\right), \qquad (2.2.26)$$

то мы имеем

$$\sup\left\{E_{n-1}(f^{(r-s)})_{2,\gamma} : f \in W^{(r)}_{p,a}(\Omega_m, \Psi_2)\right\} \geq E_{n-1}\left(f^{(r-s)}_{*,a}\right)_{2,\gamma} =$$

$$= 2^{-m/2} \cdot n^{-s} \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)^{mp/2} dt\right)^{-1/p} \cdot \Psi_2\left(\frac{\pi}{n}\right). \qquad (2.2.27)$$

Сопоставляя неравенства (2.2.25) и (2.2.27), получаем требуемое неравенство (2.2.24). Отметим, что при выводе равенства (2.2.26) мы пользовались тем, что если

$$f_*(z) = cz^n \cdot \|z\|^{-1}_{2,\gamma},$$

то

$$f_{*,a}^{(r-s)}(z) = c \cdot (in)^{r-s} \cdot z^n \cdot \|z^n\|_{2,\gamma}, \quad c = const > 0,$$

а потому

$$E_{n-1}\left(f_{*,a}^{(r-s)}\right)_{2,\gamma} = cn^{r-s} \quad (s = 0, 1, ..., r).$$

Теорема 2.2.4. *Пусть m, n - натуральные числа, $r = 0, 1, 2, ...$; а функция Ψ_3 при любых $h > 0$ удовлетворяет условию*

$$\left(\frac{\Psi_3(h)}{\Psi_3(\pi/n)}\right)^p \geq \left(\frac{\pi}{nh}\right)^2 \cdot \left\{\int\limits_0^{nh} t\left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)_*^{mp/2} dt\right\} \cdot \left\{\int\limits_0^{\pi} t\left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)^{mp/2} dt\right\}^{-1}.$$

Тогда (при $\varphi(t) \equiv t$) имеют место равенства

$$\lambda_n\left(W_{p,a}^{(r)}(\Omega_m, \Psi_3), B_{2,\gamma}\right) = E_{n-1}\left(W_{p,a}^{(r)}(\Omega_m, \Psi_3)\right)_{B_{2,\gamma}} =$$

$$= 2^{-(m+\frac{1}{p})}\left\{\frac{1}{\pi^2} \cdot \int\limits_0^{\pi} t\left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)^{mp/2} dt\right\}^{-1/p} \cdot n^{-r} \cdot \Psi_3\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

где $\lambda_n(\cdot)$ – любой из перечисленных выше n-поперечников.

Следствие 2.2.3. *Если выполнены все условия теоремы 2.2.3, то при $p = 2/m$, $m \in \mathbb{N}$ имеют место равенства*

$$\lambda_n\left(W_{2/m,a}^{(r)}(\Omega_m, \Psi_3), B_{2,\gamma}\right) = E_{n-1}\left(W_{2/m,a}^{(r)}(\Omega_m, \Psi_3)\right)_{B_{2,\gamma}} =$$

$$= \left\{2\left(1 - \frac{4}{\pi^2}\right)\right\}^{-m/2} \cdot n^{-r} \cdot \Psi_3(\frac{\pi}{n}).$$

Заключение

Основные результаты диссертационной работы заключаются в следующем:

- Найдены точные неравенства типа С.Н.Бернштейна для комплексных алгебраических полиномов в пространстве $B_{q,\gamma},\ (1 \le q \le \infty)$.
- Вычислена точная верхняя грань наилучшего приближения класса $B_{q,\gamma,a}^{(m)}$ в $B_{q,\gamma},\ (1 \le q \le \infty)$.
- Найдены точные неравенства между величинами наилучшего приближения функций и усреднёнными значениями модулей непрерывности r-ых производных по аргументу.
- Вычислены значения различных n-поперечников классов функций, задаваемых модулями непрерывности высших порядков r-ых производных по аргументу.

Дальнейшее развитие исследований по теме диссертационной работы может быть связано с рассмотрением аналогичных задач для аналитических в бикруге функций и разработкой аппроксимационных свойств для таких функций, поскольку именно в случае функций двух переменных указанные задачи имеют применение в уравнениях математической физики и численного анализа.

Список литературы

1. Айдармамадов А.Г. Поперечники классов аналитических в единичном круге функций в весовом пространстве Бергмана //ДАН РТ. 2012. Т.55, №7. С.540-544.

2. Айдармамадов А.Г. О поперечниках классов аналитических в единичном круге функций в весовом пространстве Бергмана //Материалы международной научной конференции „Современные проблемы математического анализа и теории функций” (Душанбе, 29-30 июня 2012 г. С.14-16).

3. Айдармамадов А.Г. Значение поперечников некоторых классов аналитических функций в весовом пространстве Бергмана //ДАН РТ. 2013. Т.56, №1. С.18-22. С.40-50.

4. Айдармамадов А.Г. Точные значения поперечников некоторых классов функций в пространстве Бергмана с весом //Материалы международной научной конференции „Современные проблемы теории функций и дифференциальных уравнений” (Душанбе, 17-18 июня 2013 г. С.14-15).

5. Айдармамадов А.Г. О наилучшем приближении аналитических функций в весовом пространстве Бергмана //ДАН РТ. 2014. Т.57, №3. С.184-191.

6. Айдармамадов А.Г. О приближении функций в пространстве Бергмана //Материалы международной научной конференции „Современные проблемы математики и её преподавания”, посвященной 20-летию Конституции Республики Таджикистан (Худжанд, 2014, 2(29). С.17-20).

7. Айдармамадов А.Г. Поперечники некоторых функциональных классов в весовом пространстве Бергмана //Материалы международной научной конференции „Математический анализ, дифференциальные уравнения и теория чисел” (Душанбе, 29-30 октября 2015 г. С.43-45).

8. Айдармамадов А.Г. Поперечники некоторых классов функций в пространстве Бергмана //Международная школа-конференция, „Соболевские чтения” (Новосибирск, Россия, 18-22 декабря 2016 г.)

9. Айдармамадов А.Г. Наилучшее приближение и значение поперечников некоторых классов аналитических функций в весовом пространстве Бергмана $B_{q,\gamma}$, $1 \le q \le \infty$ //Материалы международной научной конференции „Дифференциальные уравнения, математический анализ и теория чисел” посвященной 25-летию XVI сессии Верховного Совета Республики Таджикистан (Курган-Тюбе, 27-28 октября 2017 г. С.23-24).

10. Айдармамадов А.Г. Наилучшее приближение аналитических функций в весовом пространстве Бергмана //Материалы международной научной конференции „Дифференциальные и интегральные уравнения с сингулярными коэффициентами и краевые задачи теории функции” (Душанбе, 27-28 февраля 2018 г. С.21-24).

11. Айнуллоев Н., Тайков Л.В. Наилучшие приближения в смысле А.Н.Колмогорова классов аналитических в единичном круге функций //Матем. заметки. 1986. Т.40, №3. С.341-351.

12. Бабенко К.И. О наилучших приближениях одного класса аналитических функций //Изв. АН СССР. 1958. Т.22, №5. С.631-640.

13. Белый В.И. К вопросу о наилучших линейных методах приближения функций, аналитических в единичном круге //Укр. мат. журнал. 1967. Т.19, №2. С.104-108.

14. Bergman S. The cernel function and conformal mapping //Math. surveys, N.Y.: Amer. Math. Society. 1950. 163 p.

15. Вакарчук С.Б. О поперечниках некоторых классов аналитических функций в пространстве Харди H_2 //Укр. мат. журнал. 1989. Т.41, №6.

С.799-802.

16. Вакарчук С.Б. Наилучшие линейные методы приближения и поперечники классов аналитических в круге функций //Матем. заметки. 1995. Т.57, №1. С.30-39.

17. Vakarchuk S.B., Zabutna V.I. Widths of function classes from L_2 and exact constants in Jackson type inequalities //East Journal on Approximation. Bulgarian Academy of Sciences : Sofia. 2008. V.14, №4. P.29-39.

18. Вакарчук С.Б., Шабозов М.Ш. О поперечниках классов функций, аналитических в круге //Матем. сборник РАН. 2010. Т.201, №8. С.3-22.

19. Вакарчук С.Б., Шабозов М.Ш., Забутная В.И. Структурные характеристики функций из L_2 и точные значения поперечников некоторых функциональных классов //Укр. матем. вiсник. 2014. Т.11, №3. С.417-441.

20. Вакарчук С.Б., Забутная В.И. Неравенства типа Джексона-Стечкина для специальных модулей непрерывности и поперечники функциональных классов в пространстве L_2 //Матем. заметки. 2012. Т.92, №44. С.497-514.

21. Гварадзе М.И. О пространствах $B(p, q, \lambda)$ аналитических функций //Сообщ. АН ГССР. 1975. Т.77, №2. С.273-276.

22. Гварадзе М.И. Об одном классе пространств аналитических функций //Матем. заметки. 1977. Т.21, №2. С.141-150.

23. Двейрин М.З., Чебаненко И.В. О полиномиальной аппроксимации в банаховых пространствах аналитических функций //Теория отображений и приближение функций //Киев: Наукова думка. 1983. С.62-73.

24. Двейрин М.З. Поперечники и ε-энтропия классов функций, аналитических в единичном круге. В кн.: Теория функций, функциональный

анализ и их приложения вып. 23. Изд-во Харьк. ун-та. 1975. С.32-46.

25. Двейрин М.З. Задачи наилучшего приближения классов функций, аналитических в единичном круге. В кн.: Теория приближения функций //М.: Наука. 1977. С.129-132.

26. Джрбашян М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области //М.: Наука. 1966.

27. Джрбашян М.М. Обобщенный оператор Римана - Лиувилля и некоторые его применения //Изв. АН СССР. Сер. матем. 1968. Т.5. С. 1075-1111.

28. Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами //М.: Наука. 1977. 151 с.

29. Duren P.L., Romberg B.W., Shields A.L. Linear functionals of H^p spaces with $0 < p < 1$ //I. reine und angew f*ü*r Math. 1969. 238. P.32-60.

30. Корнейчук Н.П. Экстремальные задачи теории приближения //М.: Наука. 1976. 320 с.

31. Корнейчук Н.П. Точные константы в теории приближения //М.: Наука. 1987. 424 с.

32. Корнейчук Н.П. О наилучшем равномерном приближении дифференцируемых функций //ДАН СССР. 1961. Т.141. С.304-307.

33. Лигун А.А. Некоторые неравенства между наилучшими приближениями и модулями непрерывности в пространстве L_2 //Матем. заметки. 1978. Т.24, №6. С.785-792.

34. Pinkus A. n-Widths in Approximation Theory - Berlin : Springer - Verlag. 1985. 251 p.

35. Руновский К.В. О приближении семействами линейных полиномиальных операторов в пространствах $L_p,\ 0 < p < 1$ //Матем. сборник. 1994. Т.185, №8. С.81-102.

36. Руновский К.В. Об одной оценке для интегрального модуля гладкости //Изв. вузов. Матем. 1992. №1. С.78-80.

37. Степанец А.И. Равномерные приближения тригонометрическими полиномами //Киев: Наукова думка. 1981. 324 с.

38. Тайков Л.В. О наилучшем приближении в среднем некоторых классов аналитических функций //Матем. заметки. 1967. Т.1, №2. С.155-162.

39. Тайков Л.В. Некоторые точные неравенства в теории приближения функций //Analysis Mathematica. 1976. Т.2. С.77-85.

40. Тайков Л.В. Поперечники некоторых классов аналитических функций //Матем. заметки. 1977. Т.22, №2. С.285-295.

41. Тихомиров В.М. Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений //Усп. матем. наук. 1960. Т.15, №3.

42. Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений //М.:МГУ. 1976. 324 с.

43. Тихомиров В.М. Теория приближений //Итоги науки и техники. Совр. пробл. математики. Фундам. направления ВИНТИ. 1987. Т.11. С.103-260.

44. Фарков Ю.А. Поперечники классов Харди и Бергмана в шаре из C^n //Усп. матем. наук. 1990. Т.45, №25. С.197-198.

45. Харди Г.Г., Литтльвуд Дж.Е и Полиа Г. Неравенства //М. 1948. 456 с.

46. Hardy G.H., Littlewood I.E. Some properties of fractional integrals II //Math. Z. 1931. V.34, №3. P.403-439.

47. Шабозов М.Ш., Шабозов О.Ш. Поперечники некоторых классов аналитических в единичном круге функций //ДАН РТ. 1997. Т.40, №9-10. С.54-61.

48. Шабозов М.Ш. О поперечниках в пространстве Харди H_2 классов аналитических функций, определяемых модулями непрерывности высших порядков //ДАН РТ. 1998. Т.41, №9. С.48-53.

49. Шабозов М.Ш., Шабозов О.Ш. Поперечники некоторых классов аналитических функций в пространстве Харди H_2 //Матем. заметки. 2000. Т.68, №5. С.796-800.

50. Шабозов М.Ш. Поперечники некоторых классов аналитических функций в пространстве Бергмана //ДАН России. 2002. Т.383, №2. С.171-174.

51. Шабозов М.Ш, Шабозов О.Ш. О наилучшем приближении и точные значения поперечников некоторых классов функций в пространстве Бергмана $B_p, 1 \leq p \leq \infty$ //ДАН России. 2006. Т.410, №4. С.461-464.

52. Шабозов М.Ш., Саидусайнов М.С. Неравенство типа Колмогорова в весовом пространстве Бергмана //ДАН РТ. 2007. Т.50, №1. С.14-19.

53. Шабозов М.Ш. Поперечники некоторых классов аналитических функций в весовом пространстве Бергмана //ДАН РТ. 2007. Т.50, №3. С.205-211.

54. Шабозов М.Ш., Шабозов О.Ш. О наилучшем приближении некоторых классов аналитических функций в весовых пространствах Бергмана //ДАН России. 2007. Т.412, №4. С.466-469.

55. Шабозов М.Ш., Лангаршоев М.Р. Наилучшее приближение некоторых классов функций в весовом пространстве Бергмана //Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн.н. 2009. №3(136). С.7-23.

56. Шабозов М.Ш., Саидусайнов М.С. Неравенство типа Колмогорова в весовом пространстве Бергмана //Современные проблемы анализа и

преподавания математики. Материалы межд. науч. конф., посв. 105–летию академика С.М.Никольского. – Москва, Россия, 17-19 мая 2010г. С.88-89.

57. Шабозов М.Ш., Юусупов Г.А. Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 некоторых классов 2π-периодических функций и точные значения их поперечников //Матем. заметки. 2011. Т.90, №5. С.764-775.

58. Шабозов М.Ш., Лангаршоев М.Р. О наилучших линейных методах и значениях поперечников некоторых классов аналитических функций в весовом пространстве Бергмана //Докл. РАН. 2013. Т.450, №5. С.518-521.

59. Шихалиев Н.И. //Докл. АН Азерб. ССР. 1975. Т.31, №8. С.172-179.

60. Юсупов Г.А. О наилучшем линейном методе приближения аналитических в круге функций в весовом пространстве Бергмана //ДАН РТ. 2008. Т.51, №3. С.172-179.