Министерство образования и науки
Республики Таджикистан
Таджикский национальный университет

УДК 517.5

На правах рукописи

Алигаваров Сурадж Алигаварович

ОПТИМАЛЬНЫЕ КВАДРАТУРНЫЕ И КУБАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ

01.01.01. – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Д И С С Е Р Т А Ц И Я
на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель:
академик АН Республики
Таджикистан, доктор физ.-мат.
наук, профессор М.Ш.Шабозов

Д У Ш А Н Б Е – 2 0 1 8

О Г Л А В Л Е Н И Е

В в е д е н и е 3

Глава I. Об оптимальных оценках квадратурных формул для некоторых классов функций 23

§1.1. Общая постановка экстремальной задачи отыскания наилучших квадратурных формул 23

1.1.1. Классы функций 23

1.1.2. Экстремальная задача отыскания наилучших квадратурных формул. Постановка задач 24

§1.2. Наилучшие весовые квадратурные формулы для класса $H^1[a,b]$ 27

§1.3. О погрешности усложнённых квадратурных формул для классов функций $W^{(r)}H_p^{\omega}[a,b](1 \leq p \leq \infty)$ и $W^{(r)}H_p^{\omega_2}[a,b]$ $(1 \leq p \leq \infty)$ 35

Глава II. О наилучших кубатурных формулах на классов функций, задаваемых модулями непрерывности 44

§2.1 Постановка задач 44

§2.2 Обобщение результатов параграфа 1.2 на двумерный случай для класса $H^{(1,1)}(Q)$ 49

§2.3. Об оптимальных кубатурных формулах для классов $H_2^{\omega_1,\omega_2}(Q)$, и $H_{2,\rho_q}^{\omega}(Q)(1 \leq q \leq \infty)$ 63

§2.4. Обобщение на многомерном случае 77

Заключение 84

Л и т е р а т у р а 85

Введение

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Известно, что задача приближённого вычисления определённых интегралов возникла сразу же после создания теории интегрального исчисления. С тех пор возникло множество приближённых методов вычисления определённых интегралов. Указанная задача и сегодня является одной из наиболее важных задач численного анализа и не утратила своей актуальности.

Развитие методов приближённого интегрирования привело к известным экстремальным задачам отыскания *наилучших* (*оптимальных*) квадратурных формул в смысле С.М.Никольского [26] и А.Сарда [29]. К середине восьмидесятых годов прошлого столетия в решении экстремальных задач теории квадратур наблюдался значительный прогресс. Для соболевских классов периодических дифференцируемых функций с ограниченной по норме старшей производной в пространстве L_p $(1 \le p \le \infty)$ и классов функций, задаваемых модулями непрерывности r-й производной, задача отыскания наилучших квадратурных формул полностью была решена. Эти и другие наиболее важные результаты приведены Н.П.Корнейчуком в „Добавлении" к известной монографии С.М.Никольского [26]. Н.П.Корнейчук, наряду со значительным успехом в этой области, отмечает, что решение аналогичных задач для других типов определённых интегралов, таких как определённые интегралы с весовой функцией, сингулярные интегралы с фиксированной особенностью, криволинейные интегралы, поверхностные интегралы, не решены, а для многомерных определённых интегралов наилучшие кубатурные формулы известны в очень редких случаях. Поэтому решение экстремальных задач отыскания наилучших квадратурных и кубатурных формул для перечисленных интегралов является своевременным и актуальным.

Цель работы

Цель работы состоит в нахождении наилучших или оптимальных квадратурных и кубатурных формул для различных классов функций, задаваемых модулями непрерывности, и нахождение их точных оценок погрешности на рассматриваемых классах функций.

Научная новизна

В диссертации получены следующие основные результаты:

- Найдены наилучшие квадратурные формулы с весом для классов $H^{(1)}[a,b]$ на конечном и бесконечном отрезках интегрирования.

- Найдены точные оценки погрешности усложнённых квадратурных формул для классов дифференцируемых функций, задаваемых модулями непрерывности и гладкости в $L_p(1 \le p \le \infty)$.

- Найдены точные оценки наилучших кубатурных формул с весом для классов $H^{(1,1)}(Q)$ на конечной и бесконечной областях интегрирования.

- Найдены наилучшие кубатурные формулы для классов функций $H_2^{\omega_1,\omega_2}(Q)$ и $H_{2,\rho_q}^{\omega}(Q)(1 \le q \le \infty)$, задаваемых модулями непрерывности.

- Найдены точные оценки погрешности кубатурных формул на многомерном случае, определяемых модулями непрерывности.

Основные методы исследования

В работе используются современные методы исследования экстремальных задач нахождения квадратурных и кубатурных формул, метод Корнейчука оценки снизу погрешности квадратур и кубатур на классах функций, обращающих в нуль квадратурную сумму в областях интегрирования.

Теоретическая и практическая значимость

Полученные результаты имеют как теоретическое, так и прикладное значение. Они могут быть использованы при численном решении интегральных уравнений и оптимизации погрешности их решений на классах функций малой гладкости. Главы диссертации в отдельности могут составить содержание специальных курсов для студентов и аспирантов высших учебных заведений, обучающихся по математическим специальностям.

Апробация работы

Основные результаты диссертации неоднократно докладывались и обсуждались на:

- семинарах отдела теории функций и функционального анализа Института математики им. А.Джураева АН Республики Таджикистан под руководством академика АН РТ М.Ш.Шабозова (Душанбе, 2013-2018 г.);
- международной научной конференции «Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений» (Душанбе, 27-28 апреля 2015 г.);
- международной научной конференции «Математический анализ, дифференциальные уравнения и теория чисел», посвящённой 75-летию доктора физико-математических наук, профессора Сабирова Темура Сафаровича (Душанбе, 29-30 октября 2015 г.);
- международной летней математической Школе-Конференции С.Б.Стечкина по теории функций (Душанбе, 15-25 августа 2016г.);
- международной научной конференции «Дифференциальные и интегральные уравнения с сингулярными коэффициентами и краевые задачи теории функций», посвящённой 90-летию доктора физико-математических наук, академика Михайлова Леонида Григорьевича (Душанбе, 27-28 февраля 2018 г.).

Публикации

Результаты автора по теме диссертации опубликованы в 8 работах [2–8, 28]. Из них 4 статьи опубликовано в изданиях, входящих в действующий Перечень ВАК Республики Таджикистан, а 4 статей в трудах международных конференций. Из совместной с Парвонаевой З.А. работы [28] на защиту вносится лишь результаты, полученные лично авторам.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, двух глав, списка цитированной литературы из 37 наименований, занимает 88 страниц машинописного текста и набрана на LaTeX. Для удобства в диссертации применена сквозная нумерация теорем, лемм, следствий и формул. Они имеют тройную нумерацию, в которой первая цифра совпадает с номером главы, вторая указывает на номер параграфа, а третья на порядковый номер теорем, лемм, следствий или формулы в данном параграфе.

Краткое содержание работы

В первом параграфе первой главы приводится определение классов функций и общая постановка экстремальной задачи отыскания наилучших квадратурных формул с весом.

Рассматривается квадратурная формула (см. [26])

$$\int_a^b q(t)f(t)dt = \sum_{k=1}^{n} p_k f(t_k) + R_n(f;q), \tag{0.0.1}$$

в которой весовая функция $q(t) \geq 0$ на отрезке $[a,b]$ интегрируема, $P = \{p_k\}_{k=1}^n$ – вектор коэффициентов, $T = \{t_k : a \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n \leq b\}$ – вектор узлов, а $R_n(f;q) := R_n(q;f;P,T)$ – погрешность квадратурной формулы (0.0.1) на функцию $f(t)$.

Если $\mathfrak{M} = \{f(t)\}$ – некоторый класс функций $f(t)$, заданных и определенных на конечном или бесконечном отрезке $[a,b]$, то через

$$R_n(q;\mathfrak{M};P,T) = \sup\{|R_n(q;f;P,T)| : f \in \mathfrak{M}\} =$$

$$= \sup\left\{\left|\int_a^b q(t)f(t)dt - \sum_{k=1}^{n} p_k f(t_k)\right| : f \in \mathfrak{M}\right\} \tag{0.0.2}$$

обозначим наибольшую допустимую погрешность квадратурной формулы (0.0.1) на классе функций $\mathfrak{M}$. Очевидно, что погрешность квадратурной формулы на классе $\mathfrak{M}$ зависит от выбора вектора коэффициентов

$P = \{p_k\}_{k=1}^n$ и вектора узлов $T = \{t_k\}_{k=1}^n$. Если $\mathcal{A}$ – множество векторов узлов и коэффициентов, для которых квадратурная формула (0.0.1) имеет смысл, то требуется найти величину

$$\mathscr{E}_n(q;\mathfrak{M}) = \inf\Big\{R_n(q;\mathfrak{M};P,T) : (P,T) \subset \mathcal{A}\Big\}. \tag{0.0.3}$$

При этом, если существует вектор коэффициентов $P^* = \{p_k^*\}_{k=1}^n$ и вектор узлов $T^* = \{t_k^*\}_{k=1}^n$, для которых достигается нижняя грань в (0.0.3), то есть если

$$\mathscr{E}_n(q;\mathfrak{M}) = R_n(q;\mathfrak{M};P^*,T^*),$$

то квадратурная формула (0.0.1) называется *наилучшей* или *оптимальной* квадратурной формулой на классе $\mathfrak{M}$ в смысле С.М.Никольского [26], а вектор (P^*,T^*) называется наилучшим вектором коэффициентов и узлов квадратурной формулы (0.0.1).

Если известны значения подынтегральной функции в концах отрезка интегрирования $x = a$ и $x = b$, то вместо формулы (0.0.1) удобнее ввести в рассмотрение квадратурную формулу типа А.А.Маркова [26, с.156]

$$\int_a^b q(t)f(t)dt = p_0 f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} p_k f(t_k) + p_n f(b) + R_n(f;q), \tag*{(0.0.1)$'$}$$

задаваемую векторами узлов $T := \{t_k : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b\}$ (узлы $t_0 = a$ и $t_n = b$ фиксированные) и коэффициентов $P = \{p_k\}_{k=0}^n$, где $q(t)$-неотрицательная интегрируемая хотя бы в несобственном смысле весовая функция.

Задача отыскания весовых квадратурных формул типа $(0.0.1)'$ для класса Липшица

$$H^{(1)}[a,b] := \Big\{f \in C[a,b] :\ |f(t') - f(t'')| \le |t' - t''|,\ \ \forall\, t',t'' \in [a,b]\Big\}$$

была решена Т.Н.Бусаровой [15].

Во втором параграфе первой главы аналогичная задача нами рассматривается для квадратурной формулы общего вида (0.0.1).

Здесь примем следующие обозначения

$$a \le t_1 < t_2 < \ldots t_{n-1} < t_n \le b,$$

$$x_0 = a,\ x_k = (t_k + t_{k+1})/2,\ k = 1, 2, \ldots, n-1;\ x_n = b,$$

$$q_1(t) = \int\limits_a^t q(u)du,\ q_2(t) = \int\limits_a^t q_1(u)du.$$

Основным результатом второго параграфа является следующая теорема

Теорема 1.2.1. *Для класса $H^1[a,b]$ оптимальный вектор узлов $T^* = \{t_k^*\}_{k=1}^n$ наилучшей квадратурной формулы вида (0.0.1) определяется из решения системы*

$$\begin{cases} 2q_1(t_1) - q_1\left(\dfrac{t_1+t_2}{2}\right) = 0, \\ 2q_1(t_k) - q_1\left(\dfrac{t_{k-1}+t_k}{2}\right) - q_1\left(\dfrac{t_k+t_{k+1}}{2}\right) = 0, \quad k = 2, \ldots, n-1, \\ 2q_1(t_n) - q_1\left(\dfrac{t_{n-1}+t_n}{2}\right) - q_1(b) = 0, \end{cases} \tag{0.0.4}$$

а наилучшие коэффициенты $P^* = \{p_k^*\}_{k=1}^n$ определяются равенствами

$$p_k^* = \int\limits_{x_{k-1}^*}^{x_k^*} q(t)dt,\ x_0^* = a,\ x_k^* = (t_k^* + t_{k+1}^*)/2,\ k = 1, 2, \ldots, n-1;\ x_n^* = b. \tag{0.0.5}$$

При этом для оптимальной погрешности наилучшей квадратурной формулы на всём классе $H^{(1)}[a,b]$ справедливо равенство

$$\mathscr{E}_n(H^{(1)}[a,b], q) =$$

$$= 2\sum_{k=1}^n q_2(t_k^*) - 2\sum_{k=1}^{n-1} q_2\left(\frac{t_k^* + t_{k+1}^*}{2}\right) + (b - t_n^*)q_1(b) - q_2(b). \tag{0.0.6}$$

В качестве наиболее важного применения теоремы 1.2.1 рассмотрим конкретный случай, когда вес $q(t) = e^{-t}$, $[a,b] = [0, +\infty]$. В этом случае система (0.0.4) имеет единственное решение [16]

$$e^{-t_1} = n/(n+1), \quad e^{-t_n} = [n(n+1)]^{-1},$$

$$e^{-\frac{t_k}{2}} = e^{-\frac{t_1}{2}} - (e^{-\frac{t_1}{2}} - e^{-\frac{t_n}{2}})\frac{k-1}{n-1}, (k = 2, 3, \ldots, n-1),$$

откуда находим $t_k = \ln \dfrac{n(n+1)}{(n-k+1)^2},\ p_k = 2\dfrac{n+1-k}{n(n+1)},\ k = 1, 2, \ldots, n.$

Таким образом, мы приходим к следующему утверждению

Теорема 1.2.2. *Среды всех квадратурных формул вида (0.0.1) при* $q(t) = e^{-t}, [a, b] = [0, +\infty]$ *наилучшей является единственная формула*

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-t} f(t) dt = \sum_{k=1}^{n} \frac{2(n+1-k)}{n(n+1)} f\left(\ln \frac{n(n+1)}{(n-k+1)^2}\right) + R_n(f, e^{-t}).$$

Для погрешности этой формулы на классах H^1 *и* W^1_∞ *справедлива точная отценка*

$$\mathscr{E}_n(H^{(1)}, e^{-t}) = \mathscr{E}_n(W^{(1)}_\infty, e^{-t}) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Отметим, что во втором параграфе второй главы результаты теоремы Т.Н.Бусаровой [15] и теоремы 1.2.1 обобщаются на функции двух переменных.

В третьем параграфе первой главе рассматривается задача об оценке погрешности усложнённых квадратурных формул для некоторых классов дифференцируемых функций, задаваемых модулями непрерывности и гладкости в пространстве $L_p[a, b]$ $(1 \le p \le \infty)$ функций с конечной нормой

$$\left\|f\right\|_p := \left\|f\right\|_{L_p[a,b]} = \left(\int\limits_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p}.$$

Пусть дана произвольная квадратурная формула

$$\int\limits_0^1 f(x) dx = \sum_{k=1}^{n} p_k f(x_k) + R_n(f) := L(0, 1; f) + R_n(f), \tag{0.0.7}$$

определяемая векторами коэффициентов $P = \{p_k\}_{k=1}^n$ и узлов $X = \{x_k\}_{k=1}^n$. Требуется при помощи квадратурной формулы (0.0.7) вычислить определённый интеграл

$$\int\limits_a^b f(x) dx.$$

С этой целью разделим отрезок $[a,b]$ на n равных частей точками $\xi_k = a+k(b-a)/n$ $(k=1,2,\ldots,n)$ и, применяя к каждому интервалу (ξ_{k-1},ξ_k) $(k = 1,2,\ldots,n)$ квадратурную формулу (0.0.7), получим усложненную квадратурную формулу

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} L(\xi_{k-1},\xi_k;f) + R_n(f). \tag{0.0.8}$$

Для всех $p \in [1,\infty]$ равенствами

$$\omega(f,t)_p := \omega_1(f,t)_p = \sup_{|h|\le t}\left\{\int\limits_a^{b-h} |f(x+t)-f(x)|^p dx\right\}^{1/p}, \ 1 \le p \le \infty$$

и

$$\omega_2(f,t)_p := \sup_{|h|\le t}\left\{\int\limits_a^{b-h} |f(x+t)-2f(x)+f(x-t)|^p dx\right\}^{1/p}, \ 1 \le p \le \infty$$

определим соответственно интегральный модуль непрерывности и модуль гладкости функции $f \in L_p[a,b]$, а через $W^{(r)}H_p^{\omega}[a,b]$ и $W^{(r)}H_p^{\omega_2}[a,b]$ обозначим классы функций $f(x)$, у которых $(r-1)$-я производная соответственно удовлетворяет условия

$$\omega(f^{(r)},t)_p \le \omega(t)_p, \ \omega_2(f^{(r)},t)_p \le \omega_2(t)_p, \ 1 \le p \le \infty,$$

где $\omega(t)_p$ и $\omega_2(t)_p$ – заданные в пространстве $L_p[a,b]$ модули непрерывности и модули гладкости, то есть неубывающие полуаддитивные на $[0,b-a]$ непрерывные функции, в нуле равные нулю.

В монографии С.М.Никольского [26] доказано, что если усложнённая квадратурная формула (0.0.8) точна на множестве всех полиномов степени r, то для погрешности этой формулы на всём классе $W^{(r)}H_\infty^{\omega}[a,b]$ имеет место неравенство

$$R_n^*(W^{(r)}H_\infty^{\omega}[a,b]) := \sup\left\{|R_n^*(f)| : f \in W^{(r)}H_\infty^{\omega}[a,b]\right\} =$$

$$= \sup_{f\in W^{(r)}H_\infty^{\omega}[a,b]}\left|\int\limits_a^b f(x)dx - \sum_{k=1}^{n} L(\xi_{k-1},\xi_k;f)\right| \le$$

$$\leq (b-a)^{(r+1)}\frac{c_r}{n^r}\omega\left(\frac{b-a}{n}\right), \tag{0.0.9}$$

где

$$c_r := \frac{1}{(r-1)!}\int\limits_a^b \left|\frac{(1-t)^r}{r} - \sum_{k=0}^{n-1} p_k(x_k-t)_+^{(r-1)}\right| dt,$$

$$(x_k-t)_+^{r-1} = [\max(0, x_k-t)]^{r-1}.$$

Основными результатами третьего параграфа первой главы являются следующие утверждения

Теорема 1.3.1. *Пусть квадратурная формула (0.0.7) точна на множестве полиномов степени r. Тогда погрешность усложнённой квадратурной формулы (0.0.8) на пересечении классов $W^{(r)}H_p^{\omega} \cap W^{(r)}H_p^{\omega_2}$ допускает оценку*

$$R_n^*(W^{(r)}H_p^{\omega} \cap W^{(r)}H_p^{\omega_2}[a,b]) \leq$$

$$\leq \frac{(b-a)^{r+1/q}}{2n^r}\left[c_r^{(q)}\int\limits_0^1 \omega_2\left(\frac{b-a}{2n}t\right)_p dt + 2c_{r+1}^{(q)}\omega\left(\frac{b-a}{2n}\right)_p\right], \tag{0.0.10}$$

где

$$c_r^{(q)} := \left\|F_r\right\|_{L_q[0,1]};\ F_r(t) = \frac{1}{(r-1)!}\left[\frac{(1-t)^r}{r} - \sum_{k=1}^{m} p_k(x_k-t)_+^{(r-1)}\right]. \tag{0.0.11}$$

Теорема 1.3.2. *Пусть квадратурная формула (0.0.7) точна на множестве многочленов степени $r+1$. Тогда для погрешности формулы (0.0.8) на классе функций $W^{(r)}H_p^{\omega_2}[a,b]$ справедливо оценка*

$$R_n^*(W^{(r)}H_p^{\omega_2}[a,b]) \leq$$

$$\leq \frac{(b-a)^{r+1/q}}{n^r}\left[c_r^{(q)}\int\limits_0^1 (1-t)\omega_2\left(\frac{b-a}{n}t\right)_p dt + c_{r+2}^{(q)}\omega_2\left(\frac{b-a}{n}\right)_p\right],\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1. \tag{0.0.12}$$

Следствие 1.3.1. *В условиях теоремы 1.3.2, при $\omega_2(t)_p = t^{\alpha}$ $(0 < \alpha \leq 1)$ имеет место неравенство*

$$R_n(W^{(r)}H_p^{(\alpha)}[a,b]) \leq$$

$$\le \frac{(b-a)^{r+\alpha+\frac{1}{q}}}{n^{r+\alpha}} \left\{ \frac{c_r^{(q)}}{(\alpha+1)(\alpha+2)} + c_{r+2}^{(q)} \right\},$$

где константы $c_r^{(q)}$ *и* $c_{r+2}^{(q)}$ *определяются по формуле (0.0.11).*

В первом параграфе второй главы, ограничиваясь двумерным случаем, рассмотрим для функций $f(x,y)$, заданных на прямоугольнике

$$Q := \{a \le x \le b, c \le y \le d\},$$

кубатурную формулу

$$\iint\limits_{(Q)} q(x,y)f(x,y)dxdy = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} p_{kl} f(x_k, y_l) + R_{mn}(f;q), \qquad (0.0.13)$$

определяемую вектором $(P;X,Y)$ коэффициентов $P = \{p_{kl}\}_{k,l=1}^{m,n}$, и узлов

$$X := \{x_k : a \le x_1 < x_2 < \ldots < x_m \le b\},$$

$$Y := \{y_l : c \le y_1 < y_2 < \ldots < y_n \le d\},$$

$R_{mn}(f;q) := R_{mn}(f;q;P,X,Y)-$ погрешность формулы (0.0.13) на функцию f, а $q(x,y)$ - неотрицательная интегрируемая (хотя бы в несобственном смысле) весовая в области Q функция.

Для краткости точки прямоугольника Q будем иногда обозначать через $M := M(x,y)$, а узлы через $M_{ki} := M(x_k, y_i)(k = 1,2,\ldots,m; i = 1,2\ldots,n)$.

Очевидно, что если $\mathfrak{M} = \{f(x,y)\}$ - некоторый класс функций $\{f(x,y)\}$, определённых в области Q, то для каждой $f(x,y) \in \mathfrak{M}$ погрешность формулы (0.0.13) имеет вполне числовое значение

$$R_{mn}(f;q;P,X,Y) = \left| \iint\limits_{(Q)} q(x,y)f(x,y)dxdy - \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} p_{kl} f(x_k, y_l) \right|.$$

При фиксированных векторах

$$\Big(P;X;Y\Big) = \Big(\{p_{kl}\},\{x_k\},\{y_l\}\Big)$$

наилучшей оценкой погрешности кубатурной формулы (0.0.13) с весовой функцией $q(x,y) \geq 0$ на классе функций $\mathfrak{M}$ является верхняя грань

$$R_{mn}(\mathfrak{M}; q; P, X, Y) =$$

$$= \sup \left\{ \left| \iint\limits_{(Q)} q(x,y) f(x,y) dxdy - \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} p_{kl} f(x_k, y_l) \right| : f \in \mathfrak{M} \right\}. \quad (0.0.14)$$

Ясно, что при конкретно заданной весовой функции $q(x,y) \geq 0$ верхняя грань (0.0.14) на классе функций $\mathfrak{M}$ зависит только от выбора векторов узлов $X = \{x_k\},\ Y = \{y_l\}$ и коэффициентов $P = \{p_{kl}\}$.

В связи с этим в теории кубатур возникают следующие экстремальные задачи построения весовых кубатурных формул вида (0.0.13).

Требуется при фиксированных узлах (X, Y) найти величину

$$\mathscr{E}_{mn}(\mathfrak{M}; q; P^*, X, Y) = \inf_{P} R_{mn}(\mathfrak{M}; q; P, X, Y). \quad (0.0.15)$$

Кубатурная формула (0.0.13), для которой достигается нижняя грань для вектора коэффициентов $P^* = \{p^*_{kl}\}_{k,l=1}^{m,n}$ в равенстве (0.0.15), называется *наилучшей* или *оптимальной по коэффициентам* кубатурной формулой на классе $\mathfrak{M}$. Задача (0.0.15) называется задачей Сарда [29].

Наиболее общей задачей является следующая задача: требуется при произвольных векторах коэффициентов $P = \{p_{kl}\}_{k,l=1}^{m,n}$ и произвольных векторах узлов $X = \{x_k\}_{k=1}^{m},\ \ Y = \{y_l\}_{l=1}^{n}$ найти величину

$$\mathscr{E}_{mn}(\mathfrak{M}; q) = \inf_{(P,X,Y)} R_{mn}(\mathfrak{M}; q, P, X, Y). \quad (0.0.16)$$

Кубатурная формула вида (0.0.13), для которой достигается нижняя грань для вектора коэффициентов и узлов

$$(P^*, X^*, Y^*) = \Big(\{p^*_{kl}\}_{k,l=1}^{m,n},\ \{x^*_k\}_{k=1}^{m},\ \{y^*_l\}_{l=1}^{n} \Big),$$

то есть когда

$$\mathscr{E}_{mn}(\mathfrak{M}; q) = R_{mn}(\mathfrak{M}; q, P^*, X^*, Y^*),$$

называется *наилучшей* или *оптимальной в смысле С.М.Никольского* для класса функций $\mathfrak{M}$ и весовой функции $q(x,y) \geq 0$. При этом вектор (P^*, X^*, Y^*) называется *наилучшим* или *оптимальным* вектором коэффициентов и узлов.

Приводим определение классов функций двух переменных, рассматриваемых нами в дальнейшем. Всюду далее обозначим через $H_1^{\omega_1,\omega_2}(Q)$ - класс определённых на прямоугольнике Q функций $f(x,y)$ таких, что для любых двух точек $(x',y'),(x'',y'') \in Q$ выполняется неравенство

$$|f(x',y') - f(x'',y'')| \leq \omega_1(|x'-x''|) + \omega_2(|y'-y''|), \tag{0.0.17}$$

где $\omega_1(\delta)$, $\omega_2(\delta)$ – заданные модули непрерывности, то есть непрерывные функции, удовлетворяющие соотношениям

$$0 \leq \omega_1(\delta'') - \omega_1(\delta') \leq \omega_1(\delta''-\delta'),\ (0 \leq \delta' \leq \delta'' \leq b-a,\ \ \omega_1(0)=0.)$$

$$0 \leq \omega_2(\delta'') - \omega_2(\delta') \leq \omega_2(\delta''-\delta'),\ (0 \leq \delta' \leq \delta'' \leq d-c,\ \ \omega_2(0)=0.)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что неравенство (0.0.17) эквивалентно системе неравенств

$$|f(x',y) - f(x'',y)| \leq \omega_1(|x'-x''|),\ \ c \leq y \leq d,$$

$$|f(x,y') - f(x,y'')| \leq \omega_2(|y'-y''|),\ \ a \leq x \leq b.$$

В частности, если $\omega_1(t) = K_1 t^\alpha (K_1 > 0,\ 0 < \alpha \leq 1)$, $\omega_2(\tau) = K_2\tau^\beta$ $(K_2 > 0,\ 0 < \beta \leq 1)$, то мы получаем класс Гёльдера для функций двух переменных с константами K_1, K_2 и показателями α, β $(0 < \alpha, \beta \leq 1)$ следующего вида

$$|f(x',y') - f(x'',y'')| \leq K_1|x'-x''|^\alpha + K_2|y'-y''|^\beta.$$

В частности, при $K_1 = K_2 = 1, \alpha = \beta = 1$ получаем класс Липшица $H^{(1,1)}(Q), Q = [a,b] \times [c,d]$ функций, удовлетворяющих условию

$$|f(x',y') - f(x'',y'')| \leq |x'-x''| + |y'-y''|.$$

Наряду с классом $H_1^{\omega_1,\omega_2}(Q)$ будем рассматривать класс $H_{1,\rho_q}^{\omega}(Q)$ $(1 \le q \le \infty)$ функций $f(x,y)$, заданных и интегрируемых на Q таких, что

$$|f(M') - f(M'')| \le \omega(\rho_q(M',M'')),$$

где $\rho_q(M',M'')$ – l_q $(1 \le q \le \infty)$-расстояние между точками $M'(x',y'), M''(x'',y'') \in Q$, то есть

$$\rho_q(M',M'') = \sqrt[q]{|x'-x''|^q + |y'-y''|^q},\ (1 < q < \infty),$$

$$\rho_1(M',M'') = |x'-x''| + |y'-y''|, \quad q = 1,$$

$$\rho_\infty(M',M'') = \max\big\{|x'-x''|, |y'-y''|\big\}, \quad q = \infty,$$

а $\omega(\delta)$– заданный модуль непрерывности для $0 \le \delta \le \sqrt[q]{(b-a)^q + (d-c)^q}$.

Параллельно будем рассматривать классы $H_2^{\omega_1,\omega_2}(Q)$ и $H_{2,\rho_q}^{\omega}(Q)$ функций $f(x,y)$, определённых на Q и для любых точек

$$M' = M(x',y'), M'' = M(x'',y'') \ \text{ и } \ M^* = M\left(\frac{x'+x''}{2}, \frac{y'+y''}{2}\right),$$

принадлежащих области Q и удовлетворяющих условиям

$$|f(M') + f(M'') - 2f(M^*)| \le 2\left[\omega_1\left(\frac{|x'-x''|}{2}\right) + \omega_2\left(\frac{|y'-y''|}{2}\right)\right],$$

$$|f(M') + f(M'') - 2f(M^*| \le 2\omega\left(\sqrt[q]{\left|\frac{x'-x''}{2}\right|^q + \left|\frac{y'-y''}{2}\right|^q}\right).$$

Заметим, что в принятых обозначениях, например, включение $f(x,y) \in H_{1,\rho_\infty}^{\omega}(Q)$ предполагает выполнение неравенства

$$|f(M') - f(M'')| \le \omega\Bigg(\max\Big[|x'-x''|, |y'-y''|\Big]\Bigg) =$$

$$= \max\Bigg(\omega(|x'-x''|), \omega(|y'-y''|)\Bigg),$$

а включение $f(x,y) \in H_{2,\rho_\infty}^{\omega}(Q)$ означает автоматическое выполнение неравенства

$$|f(M') + f(M'') - 2f(M^*)| \le 2\omega\Bigg(\max\left[\frac{|x'-x''|}{2}, \frac{|y'-y''|}{2}\right]\Bigg) \le$$

$$\leq 2\max\left(\omega\left(\frac{|x'-x''|}{2}\right),\omega\left(\frac{|y'-y''|}{2}\right)\right).$$

Определим промежуточный класс $H_{2-\alpha}^{\omega_1,\omega_2}(Q)$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$ между определёнными выше классами функций $H_1^{\omega_1,\omega_2}(Q)$ и $H_2^{\omega_1,\omega_2}(Q)$ следующим образом: $H_{2-\alpha}^{\omega_1,\omega_2}(Q)$ состоит из всех функций $f(x,y)$, определенных в области Q и для любых указанных выше точек M', M'' и M^* из области Q и любого $\alpha\in[0,1]$ удовлетворяющих условию

$$|(1+\alpha)f(M')+(1-\alpha)f(M'')-2f(M^*)| \leq 2\left[\omega_1\left(\frac{|x'-x''|}{2}\right)+\omega_2\left(\frac{|y'-y''|}{2}\right)\right].$$

Аналогичным образом определим класс $H_{2-\alpha,\rho_q}^{\omega}(Q), (0 \leq \alpha \leq 1)$ $(1 \leq q \leq \infty)$ – функций $f(x,y)$, определенных на Q и удовлетворяющих условию

$$|(1+\alpha)f(M')+(1-\alpha)f(M'')-2f(M^*)| \leq$$

$$\leq (1+\alpha)\omega(\rho_q(M',M^*))+(1-\alpha)\omega(\rho_q(M^*,M'')), \tag{0.0.18}$$

где $\rho_q(M',M'')-l_q$ - расстояние между точками $M'(x',y'), M''(x'',y'')\in Q$. Из неравенства (0.0.18) сразу следует, что в крайних точках $\alpha=0$ и $\alpha=1$ класс $H_{2-\alpha,\rho_q}^{\omega}(Q)$ совпадает, соответственно, с классами $H_{2,\rho_q}^{\omega}(Q)$ и $H_{1,\rho_q}^{\omega}(Q)$.

Во втором параграфе второй главы результаты теоремы 1.2.0 и теоремы 1.2.1 обобщаются на классе $H^{(1.1)}(Q)$, $Q=[a,b]\times[c,d]$ функций двух переменных. Положим

$$q_1(t)=\int\limits_a^t q(u)du,\ q_2(t)=\int\limits_a^t q_1(u)du,$$

$$\rho_1(\tau)=\int\limits_c^\tau \rho(u)du,\ \rho_2(\tau)=\int\limits_c^\tau \rho_1(u)du.$$

Справедлива следующая теорема

Теорема 2.2.1. *Среди кубатурных формул вида Маркова*

$$\iint\limits_{(Q)} q(t)\rho(\tau)f(t,\tau)dtd\tau=\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}p_{kl}f(t_k,\tau_l)+R_{mn}(f;q\rho) \tag{0.0.19}$$

с весовой функцией $q(t)\rho(\tau)$ *оптимальной на классе* $H^{(1,1)}(Q)$ *является кубатурная формула, узлы которой*

$$T^* = \{\, t_k^* : a = t_0^* < t_1^* < ... < t_{m-1}^* < t_m^* = b \,\},$$

$$\mathcal{T}^* = \{\, \tau_l^* : c = \tau_0^* < \tau_1^* < ... < \tau_{n-1}^* < \tau_n^* = d \,\}$$

реализуют минимум выражение

$$\mathcal{J}(a, t_1, t_2, ..., t_{m-1}, b;\ c, \tau_1, \tau_2, .., \tau_{n-1}, d) =$$

$$= q_1(b)\left\{2\sum_{k=1}^{m-1} q_2(t_k) - 2\sum_{k=1}^{m} q_2\left(\frac{t_{k-1}+t_k}{2}\right) + q_2(b)\right\} +$$

$$+\rho_1(d)\left\{2\sum_{l=1}^{n-1} \rho_2(\tau_l) - 2\sum_{l=1}^{n} \rho_2\left(\frac{\tau_{l-1}+\tau_l}{2}\right) + \rho_2(d)\right\}$$

и коэффициенты которой определяются равенствами

$$p_{kl}^* = \iint\limits_{(Q_{kl}^*)} q(t)\rho(\tau)dtd\tau,$$

где

$$Q_{kl}^* = \{x_k^* \le t \le x_{k+1}^*,\ y_l^* \le \tau \le y_{l+1}^*\},$$

$$x_0^* = a, x_k^* = (t_{k-1}^* + t_k^*)/2,\ k = 1, 2, ..., m;\ x_{m+1}^* = t_m^* = b,$$

$$y_0^* = c, y_l^* = (\tau_{l-1}^* + \tau_l^*)/2,\ l = 1, 2, ..., n;\ y_{n+1}^* = \tau_n^* = d.$$

Наилучшая оценка остатка на классе $H^{(1,1)}(Q)$ *равна*

$$\mathscr{E}_{mn}(H^{(1,1)}(Q); q\rho) =$$

$$= q_1(b)\left\{2\sum_{k=1}^{m-1} q_2(t_k^*) - 2\sum_{k=1}^{m} q_2\left(\frac{t_{k-1}^*+t_k^*}{2}\right) + q_2(b)\right\} +$$

$$+\rho_1(d)\left\{2\sum_{l=1}^{n-1}\rho_2(\tau_l^*)-2\sum_{l=1}^{n}\rho_2\left(\frac{\tau_{l-1}^*+\tau_l^*}{2}\right)+\rho_2(d)\right\}. \qquad (0.0.20)$$

Теорема 2.2.2. *Среди кубатурных формул вида Маркова (0.0.19) с весовой функцией $q(t,\tau)=e^{2(t+\tau)}$ наилучшей на классе $H^{(1,1)}(Q)$ является формула, оптимальные узлы и коэффициенты которой определяются формулами*

$$\begin{cases} t_k^*=\ln\dfrac{(m-k+1)e^a+ke^b}{m+1}, & k=1,2,...,m,\\ \tau_l^*=\ln\dfrac{(n-l+1)e^c+le^d}{n+1}, & l=1,2,...,n \end{cases} \qquad (0.0.21)$$

и

$$\begin{cases} p_{kl}^*=\dfrac{(e^b-e^a)(e^c-e^d)}{(m+1)^2(n+1)^2}[(m-k+1)e^a+ke^b][(n-l+1)e^c+le^d],\\ p_{k0}^*=\dfrac{(e^b-e^a)(e^c-e^d)e^c}{2(m+1)^2(n+1)}[(m-k+1)e^a+ke^b],(k=1,2,...,m),\\ p_{0l}^*=\dfrac{(e^b-e^a)(e^c-e^d)e^a}{2(m+1)(n+1)^2}[(n-l+1)e^c+le^d],(l=1,2,...,n),\\ p_{00}^*=\dfrac{(e^b-e^a)(e^c-e^d)}{4(m+1)(n+1)},\ p_{m+1,n+1}^*=\dfrac{(e^b-e^a)(e^c-e^d)e^{b+d}}{4(m+1)(n+1)}. \end{cases} \qquad (0.0.22)$$

Точная оценка погрешности оптимальной кубатурной формулы Маркова на классе $H^{(1,1)}(Q)$ определяется равенством

$$\mathscr{E}_{mn}(H^{(1,1)}(Q);\ e^{2(t+\tau)})=\frac{(e^b-e^a)(e^d-e^c)}{4}\cdot\left(\frac{e^b-e^c}{m+1}+\frac{e^d-e^c}{n+1}\right).$$

Основными результатами второго параграфа второй главы являются следующие нижеприведенные утверждения

Теорема 2.2.3. *Среди кубатурных формул вида*

$$\iint\limits_{(Q)} q(t)\rho(\tau)f(t,\tau)dtd\tau=\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}p_{kl}f(t_k,\tau_l)+R_{mn}(f;q\rho) \qquad (0.0.23)$$

с весовой функцией $q(t)\rho(\tau)$ оптимальной на классе $H^{(1,1)}(Q)$ является формула, узлы которой

$$T^* = \{\, t_k^* : a \leqslant t_1^* < t_2^* < ... < t_{m-1}^* < t_m^* \leqslant b \,\},$$

$$\mathcal{T}^* = \{\, \tau_l^* : c \leqslant \tau_1^* < \tau_2^* < ... < \tau_{n-1}^* < \tau_n^* \leqslant d \,\},$$

реализуют минимум выражение

$$\mathscr{F}(t_1, t_2, ..., t_m;\ \tau_1, \tau_2, .., \tau_n) =$$

$$= q_1(b)\left\{2\sum_{k=1}^{m} q_2(t_k) - 2\sum_{k=1}^{m-1} q_2\left(\frac{t_k + t_{k+1}}{2}\right) + (b - t_m)q_1(b) - q_2(b)\right\} +$$

$$+\rho_1(d)\left\{2\sum_{l=1}^{n} \rho_2(\tau_l) - 2\sum_{l=1}^{n-1} \rho_2\left(\frac{\tau_l + \tau_{l+1}}{2}\right) + (d - \tau_n)\rho_1(d) - \rho_2(d)\right\}$$

и коэффициенты которой определяются равенствами

$$p_{kl}^* = \iint\limits_{(Q_{kl}^*)} q(t)\rho(\tau)dtd\tau,$$

где

$$Q_{kl}^* = \{x_{k-1}^* \leq t \leq x_k^*,\ y_{l-1}^* \leq \tau \leq y_l^*\},$$

$$x_0^* = a, x_k^* = (t_k^* + t_{k+1}^*)/2,\ k = 1, 2, ..., m-1;\ x_m^* = b,$$

$$y_0^* = c, y_l^* = (\tau_l^* + \tau_{l+1}^*)/2,\ l = 1, 2, ..., n-1;\ y_n^* = d.$$

Наилучшая оценка остатка на классе $H^{(1,1)}(Q)$ определяется равенством

$$\mathscr{E}_{mn}(H^{(1,1)}(Q); q\rho) =$$

$$= q_1(b)\left\{2\sum_{k=1}^{m} q_2(t_k^*) - 2\sum_{k=1}^{m-1} q_2\left(\frac{t_k^* + t_{k+1}^*}{2}\right) + (b - t_m^*)q_1(b) - q_2(b)\right\} +$$

$$+\rho_1(d)\left\{2\sum_{l=1}^{n}\rho_2(\tau_l^*)-2\sum_{l=1}^{n-1}\rho_2\left(\frac{\tau_l^*+\tau_{l+1}^*}{2}\right)+(d-\tau_n^*)\rho_1(d)-\rho_2(d)\right\}. \quad (0.0.24)$$

Теорема 2.2.4. *Среди всех кубатурных формул вида (0.0.23) с весовой функцией* $q(t,\tau) = e^{-(t+\tau)}$ *наилучшей на классе* $H^{(1,1)}(Q_1)$ $(Q_1 := \{0 \leqslant t, \tau \leqslant \infty\})$ *является формула, у которой узлы и коэффициенты определены формулами*

$$(T^*,\mathcal{T}^*)=\left\{(t_k^*,\tau_l^*): t_k^*=\frac{m(m+1)}{(m-k+1)^2}\ \tau_l^*=\frac{n(n+1)}{(n-l+1)^2}\right\} \quad (0.0.25)$$

и

$$P^*=\left\{p_{kl}^*: p_{kl}^*=4\frac{m+1-k}{m(m+1)}\cdot\frac{n+1-l}{n(n+1)}\ k=\overline{1,m};\ l=\overline{1,n}\right\}, \quad (0.0.26)$$

причём точная оценка погрешности наилучшей кубатурной формулы на всем классе $H^{(1,1)}(Q_1)$ *равна*

$$\mathscr{E}_{mn}(H^{(1,1)}(Q_1),e^{-(t+\tau)})=\ln\left((1+\frac{1}{m})(1+\frac{1}{n})\right).$$

В третьем параграфе второй главы рассматривается экстремальная задача отыскания наилучших кубатурных формул вида (0.0.13) в случае $q(x,y)\equiv 1$ для введенных в первом параграфе второй главы классов функций, задаваемых модулями непрерывности.

Основными результатами третьего параграфа второй главы являются следующие утверждения

Теорема 2.3.1. *Среди кубатурных формул вида*

$$\iint\limits_{(Q)} f(x,y)dxdy=\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}p_{ki}f(x_k,y_i)+R_{mn}(f) \quad (0.0.27)$$

наилучшей для классов функций $H_1^{\omega_1,\omega_2}(Q)$, $H_2^{\omega_1,\omega_2}(Q)$ *и* $H_{1,\rho_q}^{\omega}(Q)$, $H_{2,\rho_q}^{\omega}(Q)$ $Q:=[a,b]\times[c,d]$ $(1\le q\le\infty)$ *является формула*

$$\iint\limits_{(Q)} f(x,y)dxdy=4h\eta\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}f(a+(2k-1)h,c+(2i-1)\eta)+R_{mn}(f), \quad (0.0.28)$$

где $h = (b-a)/(2m)$, $\eta = (d-c)/(2n)$. *Для погрешности наилучшей кубатурной формулы (0.0.28) на перечисленных классах функций справедливы точные оценки*

$$\begin{gathered}\mathscr{E}_{mn}(H_2^{\omega_1,\omega_2}(Q)) = \mathscr{E}_{mn}(H_1^{\omega_1,\omega_2}(Q)) = \\ = 2m(d-c)\int\limits_0^h \omega_1(t)dt + 2n(b-a)\int\limits_0^\eta \omega_2(\tau)d\tau, \end{gathered} \qquad (0.0.29)$$

$$\begin{gathered}\mathscr{E}_{mn}(H_{2,\rho_q}^{\omega}(Q)) = \mathscr{E}_{mn}(H_{1,\rho_q}^{\omega}(Q)) = \\ = 4mn\int\limits_0^h\int\limits_0^\eta \omega\Big(\sqrt[q]{t^q+\tau^q}\Big)dtd\tau. \end{gathered} \qquad (0.0.30)$$

Лемма 2.3.1. *Если* $\omega_1(t)$, $\omega_2(\tau)$ *и* $\omega(\delta)$ *являются произвольными модулями непрерывности соответственно на отрезках* $0 \le t \le b-a$, $0 \le \tau \le d-c$ *и* $0 \le \delta \le d = \sqrt[q]{(b-a)^q + (d-c)^q}$ $(1 \le q \le \infty)$ *(d-диаметр области Q), то при любых* $\alpha \in [0,1]$ *имеют место следующие включения*

$$H_1^{\omega_1,\omega_2}(Q) \subset H_{2-\alpha}^{\omega_1,\omega_2}(Q) \subset H_2^{\omega_1,\omega_2}(Q), \qquad (0.0.31)$$

$$H_{1,\rho_q}^{\omega}(Q) \subset H_{2-\alpha,\rho_q}^{\omega}(Q) \subset H_{2,\rho_q}^{\omega}(Q) \ \ (1 \le q \le \infty). \qquad (0.0.32)$$

Из этой леммы вытекают следующий утверждения

Следствие 2.3.1. *В условиях леммы для погрешности кубатурной формулы (0.0.28) при произвольном векторе* $(P;X,Y)$ *и любой* $\alpha \in [0,1]$ *справедливы неравенства*

$$R_{mn}(H_1^{\omega_1,\omega_2}(Q);P;X,Y) \le R_{mn}(H_{2-\alpha}^{\omega_1,\omega_2}(Q);P;X,Y) \le R_{mn}(H_2^{\omega_1,\omega_2}(Q);P;X,Y),$$

$$R_{mn}(H_{1,\rho_q}^{\omega}(Q);P;X,Y) \le R_{mn}(H_{2-\alpha,\rho_q}^{\omega}(Q);P;X,Y) \le R_{mn}(H_{2,\rho_q}^{\omega}(Q);P;X,Y),$$

откуда, в свою очередь, сразу вытекают также неравенства

$$\begin{gathered}\mathscr{E}_{mn}(H_1^{\omega_1,\omega_2}(Q)) \le \mathscr{E}_{mn}(H_{2-\alpha}^{\omega_1,\omega_2}(Q)) \le \mathscr{E}_{mn}(H_2^{\omega_1,\omega_2}(Q)), \\ \mathscr{E}_{mn}(H_{1,\rho_q}^{\omega}(Q)) \le \mathscr{E}_{mn}(H_{2-\alpha,\rho_q}^{\omega}(Q)) \le \mathscr{E}_{mn}(H_{2,\rho_q}^{\omega}(Q)), \end{gathered} \qquad (0.0.33)$$

где $\rho_q(M', M'')$ – l_q $(1 \leq q \leq \infty)$*-расстояние между точками* $M'(x', y'), M''(x'', y'') \in Q$.

Воспользуясь результатом теоремы 2.3.1 и следствием 2.3.1, сформулируем следующее утверждение

Теорема 2.3.2. *Среди кубатурных формул общего вида (0.0.27) при любом* $\alpha \in [0, 1]$ *оптимальной для классов функций* $H^{\omega_1,\omega_2}_{2-\alpha}(Q)), H^{\omega}_{2-\alpha,\rho_q}(Q)$ *является формула прямоугольников (0.0.28). Для точной оценки погрешности формулы (0.0.28) на этих классах функций справедливы равенства*

$$\mathscr{E}_{mn}(H^{\omega_1,\omega_2}_{2-\alpha}(Q)) = 2m(d-c)\int\limits_0^h \omega_1(t)dt + 2n(b-a)\int\limits_0^\eta \omega_2(\tau)d\tau,$$

$$\mathscr{E}_{mn}(H^{\omega}_{2-\alpha,\rho_q}(Q)) = 4mn\int\limits_0^h\int\limits_0^\eta \omega\Big(\sqrt[q]{t^q+\tau^q}\Big)dtd\tau.$$

Теорема 2.3.3. *Наилучшая кубатурная формула (0.0.28) для классов функций* $H^{\omega_1,\omega_2}_{2-\alpha}(Q), H^{\omega}_{2-\alpha,\rho_q}(Q)$ *при всех* $\alpha \in [0, 1]$ *единственна.*

ГЛАВА I

ОБ ОПТИМАЛЬНЫХ ОЦЕНКАХ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ

§1.1. Общая постановка экстремальной задачи отыскания наилучших квадратурных формул

1.1.1. Классы функций

Всюду далее $[a,b]$ – конечный отрезок действительной оси или неотрицательный полуось $R := [0,+\infty)$.

Через $C[a,b]$ обозначим – совокупность непрерывных функций $f(t)$, определенных на отрезке $[a,b]$, а через $C^{(r)}[a,b](r = 0,1,2,\cdots;\ C^{(0)}[a,b] \equiv C[a,b])$ – обозначим множество r-раз непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ функций. Пусть $H^{\omega}[a,b]$ – множество кусочно-непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций $f(t)$, для которых выполняется ограничение

$$|f(t^{''}) - f(t^{'})| \le \omega(|t^{''} - t^{'}|),\ \forall\ \ t^{'}, t^{''} \in [a,b].$$

Здесь $\omega(t)$ – фиксированный модуль непрерывности, то есть неубывающая полуаддитивная на отрезке $[a,b]$ функция, в нуле равная нулю: $\omega(0) = 0$. При $\omega(t) = Kt^{\alpha},\ 0 < \alpha \le 1$, множество $H^{\omega}[a,b]$ превращается в класс Гёльдера $KH^{\alpha}[a,b]$, удовлетворяющих условию

$$|f(t^{''}) - f(t^{'})| \le K|t^{''} - t^{'}|^{\alpha},\ \forall\ \ t^{'}, t^{''} \in [a,b].$$

При $\alpha = 1$, $H^1[a,b]$ – класс Липшица с константой K и порядка $\alpha \equiv 1$ функций удовлетворяющих условию

$$H^1[a,b] = \left\{ f : |f(t^{''}) - f(t^{'})| \le K|t^{''} - t^{'}|,\ t^{'}, t^{''} \in [a,b] \right\}.$$

Через $W^{(1)}[a,b]$ – обозначим класс функций $f(t) \in C[a,b]$, имеющих на этом отрезке кусочно-непрерывную производную $f^{'}(t)$, для которой

$$supvrai \left\{ |f^{'}(t)| :\ t \in [a,b] \right\} \le 1.$$

$$W^{(r)}H^{\omega}[a,b]\ (r=0,1,2,\cdots;\ W^{(0)}H^{\omega}[a,b]\equiv H^{\omega}[a,b])$$

– множество функций $f(t)\in C^{(r-1)}[a,b]$, у которых существует кусочно-непрерывная производная $f^{(r)}(t)\in H^{\omega}[a,b]$.

$$W^{(r)}L_p[a,b]\ (1\le p\le\infty;\ r=0,1,2,\cdots;\ W^{(0)}L_p[a,b]\equiv L_p[a,b])$$

– множество функций $f(t)$, у которых производная $r-1$-го порядка абсолютно-непрерывна, а производная r-го порядка $f^{(r)}(t)\in L_p[a,b]$ существует и удовлетворяет условию

$$\|f^{(r)}\|_p:=\|f^{(r)}\|_{L_p}=\left(\int\limits_a^b|f^{(r)}(t)|^p dt\right)^{1/p}\le 1.$$

1.1.2. Экстремальная задача отыскания наилучших квадратурных формул. Постановка задач

Экстремальная задача отыскания наилучших квадратурных формул восходит к А.Н.Колмогорова и формулируется следующим образом:

Пусть задана квадратурная формула (см. [26])

$$\int\limits_a^b q(t)f(t)dt=\sum_{k=1}^n p_k f(t_k)+R_n(f;q), \tag{1.1.1}$$

в которой весовая функция $q(t)\ge 0$ на отрезке $[a,b]$ интегрируема, $P=\{p_k\}_{k=1}^n$ – вектор коэффициентов, $T=\{t_k: a\le t_1<t_2<\cdots<t_n\le b\}$ – вектор узлов, а $R_n(f;q):=R_n(q;f;P,T)$ – ошибка(погрешность) квадратурной формулы (1.1.1) для заданной функции $f(t)$.

Пусть $\mathfrak{M}$ – некоторый класс функций $f(t)$, заданных и определенных на произвольном(конечном или бесконечном) отрезке $[a,b]$. Через

$$R_n(q;\mathfrak{M};P,T)=\sup\Big\{|R_n(q;f;P,T)|: f\in\mathfrak{M}\Big\}=$$

$$=\sup\left\{\left|\int\limits_a^b q(t)f(t)dt-\sum_{k=1}^n p_k f(t_k)\right|: f\in\mathfrak{M}\right\} \tag{1.1.2}$$

обозначим верхнюю грань допустимую погрешность квадратурной формулы (1.1.1) на заданной классе функций $\mathfrak{M}$. Ясно, что погрешность квадратурной формулы на классе $\mathfrak{M}$ зависит от выбора вектора коэффициентов $P = \{p_k\}_{k=1}^n$ и вектора узлов $T = \{t_k\}_{k=1}^n$. Если $\mathcal{A}$ – множество векторов узлов и коэффициентов, для которых квадратурная формула (1.1.1) имеет смысл, то задача состоит в нахождении величину

$$\mathscr{E}(q;\mathfrak{M}) = \inf\Big\{R_n(q;\mathfrak{M};P,T) : (P,T) \subset \mathcal{A}\Big\}. \tag{1.1.3}$$

Если существует вектор коэффициентов $P^* = \{p_k^*\}_{k=1}^n$ и вектор узлов $T^* = \{t_k^*\}_{k=1}^n$, для которых достигается нижняя грань в (1.1.3), т.е. если

$$\mathscr{E}_n(q;\mathfrak{M}) = R_n(q;\mathfrak{M};P^*,T^*),$$

то квадратурная формула (1.1.1) называется *наилучшей* или *оптимальной* квадратурной формулой на классе $\mathfrak{M}$ в смысле С.М.Никольского [26], а вектор (P^*, T^*) называется наилучшим вектором коэффициентов и узлов квадратурной формулы (1.1.1).

Точно также, если существует вектор коэффициентов $P^* = \{p_k^*\}_{k=1}^n$, который реализует нижнюю грань

$$\mathscr{E}_n(q;\mathfrak{M};T) = \inf\Big\{R_n(q;\mathfrak{M};P,T) : P \subset \mathcal{A}\Big\}, \tag{1.1.4}$$

то квадратурная формула (1.1.1) называется наилучшей по коэффициентам квадратурной формулой при заданном векторе узлов $T = \{t_k\}_{k=1}^n$ или оптимальной квадратурной формулой в смысле Сарда [29].

Если известны значения подынтегральной функции в концах отрезка интегрирования $x = a$ и $x = b$, то вместо формулы (1.1.1) удобнее ввести в рассмотрению квадратурную формулу типа А.А Маркова (см., напр. [26, с.156])

$$\int\limits_a^b q(t)f(t)dt = p_0 f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} p_k f(t_k) + p_n f(b) + R_n(f;q), \tag*{(1.1.1)$'$}$$

задаваемую векторами узлов $T := \{t_k : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b\}$ (узлы $t_0 = a$ и $t_n = b$ фиксированные) и коэффициентов $P = \{p_k\}_{k=0}^{n}$, где $q(t) \geq 0$ - интегрируемая на отрезке $[a, b]$ весовая функция. Очевидно, что для нахождения наилучшей квадратурной формулы типа $(1.1.1)'$ в смысле С.М.Никольского или А.Сарда требуется решить задачи (1.1.2) - (1.1.4)

В теории квадратурных формул задача (1.1.3) называется задачей Колмогорова-Никольского, а (1.1.4) - задачей Сарда.

Почти все результаты о решении задачи (1.1.3) приведены в обстоятельном дополнении Н.П.Корнейчука к монографии С.М.Никольского [26] изданной в 1988г. Тем не менее существуют много других экстремальных задач, так или иначе связанных с задачами С.М.Никольского и А.Сарда, которые требуют своего решения. К таким задачам относятся, например, задачи (1.1.3) и (1.1.4) с заданными конкретными весовыми функциями, имеющие небольшое число особенностей на отрезке интегрирования, у которых интеграл от весовой функции может существовать в смысле главного значения Римана. Таким образом, требуется решать задачу (1.1.3) для сингулярных интегралов с конечным числом особенностей внутри или в крайних точках.

Отметим, что экстремальная поиск задача наилучших квадратурных формул для сингулярных интегралов или весовых квадратурных формул, в случае когда вес $q(t)$ на отрезке $[a, b]$ имеет особенности, сформулирована Н.П.Корнейчуком [26]. Некоторые результаты в этом направлении получены А.А.Женсыкбаевым [18], М.Ш.Шабозовым [31], Л.А.Онеговым [27], В.А.Бойковым [14] и М.Ш.Шабозовым совместно с учениками [32–37].

§1.2. Наилучшие весовые квадратурные формулы для класса $H^1[a,b]$

Приводим нужные нам в дальнейшем определение классов функций из монографии [26].

Пусть $KH^{(1)} := KH^{(1)}[a,b]$ - класс функций Липшица порядка 1 с константой K, то есть множество функций $f(t)$, заданных и определённых на отрезке $[a,b]$ и для любых двух точек $t^{'}, t^{''} \in [a,b]$, удовлетворяющих условию

$$|f(t^{'}) - f(t^{''})| \leq K|t^{'} - t^{''}|,$$

а $W^{(1)}L_\infty(K;[a,b]) := W_\infty^{(1)}(K;[a,b])$ - множество всех функций $f(t)$, для которых

$$\underset{a\leq t\leq b}{supvrai}|f(t^{'})| \leq K.$$

Ясно, что $KH^{(1)}[a,b] \equiv W_\infty^{(1)}(K;[a,b])$. В самом деле, если функция $f \in W_\infty^{(1)}(K;[a,b])$, то для любых двух точек $x', x" \in [a,b]$, применяя формулу конечных приращения Лагранжа, имеем

$$|f(x') - f(x'')| = |f'(\xi)||x' - x''| \leq K|x' - x''| \quad (x' \leq \xi \leq x''),$$

то есть эта же функция принадлежит классу Липшица с константой K. Наоборот, если функция f принадлежит классу Липшица с константой K:

$$|f(x') - f(x'')| \leq K|x' - x''| \quad \forall\ x', x'' \in [a,b],$$

то запишем полученное неравенство в виде

$$\left|\frac{f(x') - f(x'')}{x' - x''}\right| \leq K$$

и, устремив x' к x'', имеем

$$|f'(x'')| = \lim_{x'\to x''}\left|\frac{f(x') - f(x'')}{x' - x''}\right| \leq K,$$

и так как x'' - произвольная точка отрезка $[a,b]$, то для всех значений $x \in [a,b]$ получаем, что $|f'(x)| \leq K$, то есть что $f \in W_\infty^{(1)}(K;[a,b])$. Но это значит, что $KH^{(1)}[a,b] \equiv W_\infty^{(1)}(K;[a,b])$.

Рассмотрим весовую квадратурную формулу следующего вида [26, с.13]

$$\int\limits_a^b q(t)f(t)\;dt = \sum_{k=1}^{n} p_k f(t_k) + R_n(f;q), \tag{1.2.1}$$

задаваемую векторами узлов $T = \{t_k : a \le t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n \le b\}$ и коэффициентов $P = \{p_k\}_{k=1}^n$, $R_n(f,q) = R_n(f,q;P,T)$ - погрешность формулы (1.2.1) на функцию $f(t)$, а $q(t)$ - неотрицательная, интегрируемая на отрезке $[a,b]$ весовая функция.

Всюду далее в качестве $\mathfrak{M}$ будем рассматривать класс $KH^{(1)}[a,b]$, полагая, ради простоты, $K \equiv 1$. Найдем наилучшую квадратурную формулу вида (1.2.1) для класса $H^{(1)}[a,b]$ для произвольного интегрируемого веса $q(t)$ на отрезке $[a,b]$. Отметим, что сформулированная задача для квадратурной формулы типа А.А.Маркова $(1.1.1)'$ ранее было решена Т.Н.Бусаровой [15].

Положим

$$x_0 = t_0 = a,\; x_k = (t_{k-1}+t_k)/2,\; k=1,2,\ldots,n;\; x_{n+1} = t_n = b.$$

$$q_1(t) = \int\limits_a^t q(u)du,\; q_2(t) = \int\limits_a^t q_1(u)du.$$

Приводим один результат из [15] в виде следующее утверждение

Теорема 1.2.0 [15]. *Для класса $H^1[a,b]$ оптимальный вектор узлов $T^0 = \{t_k^0\}_{k=1}^n$ наилучшей квадратурной формулы типа Маркова* $(1.1.1)'$ *определяется из решения системы*

$$2q_1(t_k) - q_1\left(\frac{t_{k-1}+t_k}{2}\right) - q_1\left(\frac{t_k+t_{k+1}}{2}\right) = 0, \quad k = 1,\ldots,n-1. \tag{1.2.2}$$

Если $T^0 = \{t_0^0, t_1^0, \ldots, t_n^0,\}$ - решение системы (1.2.2), то оптимальные векторы коэффициентов $P^0 = \{p_0^0, p_1^0, \ldots, p_n^0,\}$ определяются равенствами

$$p_k^0 = \int\limits_{x_k^0}^{x_{k+1}^0} q(t)dt,\; x_0^0 = a,\; x_k^0 = (t_{k-1}^0 + t_k^0)/2,\; k=1,2,\ldots,n;\; x_{n+1}^0 = b.$$

При этом для оптимальной погрешности наилучшей квадратурной формулы на всём классе $H^{(1)}[a,b]$ справедливо равенство

$$\mathscr{E}_n(H^{(1)}[a,b],q) = 2\sum_{k=1}^{n} q_2(t_k^0) - 2\sum_{k=1}^{n+1} q_2\left(\frac{t_{k-1}^0 + t_k^0}{2}\right) + q_2(b).$$

Таким образом, для квадратурной формулы (1.2.1) требуется найти величину

$$\mathscr{E}_n(H^{(1)}[a,b],q) = \inf_{(P,T)} R_n(H^{(1)}[a,b],q;P,T). \tag{1.2.3}$$

Оценим сначала величину (1.2.3) снизу. При этом пользуемся хорошо известным методом Н.П.Корнейчука [20] получения оценки снизу погрешности квадратурных формул, согласно которому каждому вектору узлов $T = \{t_k\}_{k=1}^n$ сопоставляется подмножество $H_T^{(1)}[a,b]$ функций $f(t) \in H^{(1)}[a,b]$, в узлах t_k обращающихся в нуль:

$$H_T^{(1)}[a,b] = \Big\{ f : f \in H^{(1)}[a,b], f(t_k) = 0, k = 1,2,\ldots,n \Big\}.$$

Очевидна погрешность $R_n(f,q)$ формулы (1.2.1) для класса $H_T^{(1)}[a,b]$ не зависит от вектора коэффициентов $P = \{p_k\}_{k=1}^n$:

$$|R_n(f,q)| := |R_n(f,q,T)| = \int_a^b q(t) f_T(t) dt.$$

Отсюда имеем

$$\mathscr{E}_n(H_T^{(1)}[a,b],q) = \inf_T R_n(H_T^{(1)}[a,b];q,T) = \inf_T \int_a^b q(t) f_T(t)\,dt. \tag{1.2.4}$$

В силу включения $H_T^{(1)}[a,b] \subset H^{(1)}[a,b]$ из (1.2.4) сразу следует оценка снизу

$$\mathscr{E}_n(H^{(1)}[a,b];q) \geq \mathscr{E}_n(H_T^{(1)}[a,b];q) = \inf_T \int_a^b q(t) f_T(t)\,dt, \tag{1.2.5}$$

где

$$f_T(t) = |t - t_k|,\ (x_{k-1} \leq t \leq x_k,\ k = 1,\ldots,n),$$

$$x_0 = a,\ x_k = (t_k + t_{k+1})/2,\ k = 1, 2, \ldots, n-1;\ x_n = b.$$

Далее положим

$$q_1(t) = \int_a^t q(u)du,\ q_2(t) = \int_a^t q_1(u)du.$$

Справедлива следующая

Теорема 1.2.1. *Для класса $H^1[a,b]$ оптимальный вектор узлов $T^* = \{t_k^*\}_{k=1}^n$ наилучшей квадратурной формулой вида (1.2.1) определяется из решения системы*

$$\begin{cases} 2q_1(t_1) - q_1\left(\dfrac{t_1 + t_2}{2}\right) = 0, \\ 2q_1(t_k) - q_1\left(\dfrac{t_{k-1} + t_k}{2}\right) - q_1\left(\dfrac{t_k + t_{k+1}}{2}\right) = 0, \quad k = 2, \ldots, n-1, \\ 2q_1(t_n) - q_1\left(\dfrac{t_{n-1} + t_n}{2}\right) - q_1(b) = 0, \end{cases} \tag{1.2.6}$$

а наилучшие коэффициенты $P^* = \{p_k^*\}_{k=1}^n$ определяются равенствами

$$p_k^* = \int_{x_{k-1}^*}^{x_k^*} q(t)dt,\ x_0^* = a,\ x_k^* = (t_k^* + t_{k+1}^*)/2,\ k = 1, 2, \ldots, n-1;\ x_n^* = b. \tag{1.2.7}$$

Для оптимальной погрешности наилучшей квадратурной формулы на всём классе $H^{(1)}[a,b]$ справедливо равенство

$$\mathscr{E}_n(H^{(1)}[a,b], q) =$$

$$= 2\sum_{k=1}^n q_2(t_k^*) - 2\sum_{k=1}^{n-1} q_2\left(\frac{t_k^* + t_{k+1}^*}{2}\right) + (b - t_n^*)q_1(b) - q_2(b). \tag{1.2.8}$$

Доказательство. В самом деле, вычисляя интегрированием по частям интеграл в правой части (1.2.5), получаем

$$\int_a^b q(t)f_T(t)dt = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |t - t_k| q(t)dt = \sum_{k=1}^n \left\{ \int_{x_{k-1}}^{t_k} (t_k - t)q(t)dt + \int_{t_k}^{x_k} (t - t_k)q(t)\,dt \right\} =$$

$$= \sum_{k=1}^n \left\{ \int_{x_{k-1}}^{t_k} q_1(t)dt - (t_k - x_{k-1}) \int_a^{x_{k-1}} q(u)du + (x_k - t_k) \int_a^{x_k} q(u)du - \int_{t_k}^{x_k} q_1(t)dt \right\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left\{ \int_a^{t_k} q_1(t)dt - \int_a^{x_{k-1}} q_1(t)dt - (t_k - x_{k-1})q_1(x_{k-1}) + (x_k - t_k)q_1(x_k) - \right.$$

$$\left. - \int_a^{x_k} q_1(t)dt + \int_a^{t_k} q_1(t)dt \right\} = \sum_{k=1}^{n} \left\{ q_2(t_k) - q_2(x_{k-1}) - (t_k - x_{k-1})q_1(x_{k-1}) + \right.$$

$$\left. + (x_k - t_k)q_1(x_k) - q_2(x_k) + q_2(t_k) \right\} = 2\sum_{k=1}^{n} q_2(t_k) - 2\sum_{k=1}^{n-1} q_2(x_k) - q_2(b) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-1}(x_k - t_k)q_1(x_k) + (b - t_n)q_1(b) - \sum_{k=2}^{n}(t_k - x_{k-1})q_1(x_{k-1}) =$$

$$= 2\sum_{k=1}^{n} q_2(t_k) - 2\sum_{k=1}^{n-1} q_2(x_k) + (b - t_n)q_1(b) - q_2(b) - \sum_{k=1}^{n-1}(t_{k+1} + t_k - 2x_k)q_1(x_k) =$$

$$= 2\sum_{k=1}^{n} q_2(t_k) - 2\sum_{k=1}^{n-1} q_2(x_k) + (b - t_n)q_1(b) - q_2(b), \qquad (1.2.9)$$

поскольку в силу того что $x_k = (t_{k+1} + t_k)/2$, $k = 1, 2 \ldots, n-1$, сумма

$$\sum_{k=1}^{n-1}(t_{k+1} + t_k - 2x_k)q_1(x_k) \equiv 0$$

Далее положим

$$\mathscr{F}(t_1, t_2, \ldots, t_n) = 2\sum_{k=1}^{n} q_2(t_k) - 2\sum_{k=1}^{n-1} q_2(x_k) + (b - t_n)q_1(b) - q_2(b) =$$

$$= 2\sum_{k=1}^{n} q_2(t_k) - 2\sum_{k=1}^{n-1} q_2\left(\frac{t_k + t_{k+1}}{2}\right) + (b - t_n)q_1(b) - q_2(b). \qquad (1.2.10)$$

Таким образом, требуется найти минимум функции $\mathscr{F}(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ при условию

$$(b - t_n) + (t_n - t_{n-1}) + \cdots + (t_2 - t_1) + (t_1 - a) = b - a, \qquad (1.2.11)$$

то есть требуется найти минимум величины (1.2.10) по всем векторам узлов $T = \{t_k\}_{k=1}^{n}$, удовлетворяющие условию (1.2.11).

Необходимые условия существования экстремума функции $\mathscr{F}(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ приводят к решению системы уравнений

$$
\begin{cases}
\dfrac{d\mathscr{F}}{dt_1} = 2\left(q_2'(t_1) - \dfrac{1}{2}q_2'\left(\dfrac{t_1+t_2}{2}\right)\right) = 0,\\[2ex]
\dfrac{d\mathscr{F}}{dt_2} = 2\left(q_2'(t_2) - \dfrac{1}{2}q_2'\left(\dfrac{t_1+t_2}{2}\right) - \dfrac{1}{2}q_2'\left(\dfrac{t_2+t_3}{2}\right)\right) = 0,\\[2ex]
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\[1ex]
\dfrac{d\mathscr{F}}{dt_{n-1}} = 2\left(q_2'(t_{n-1}) - \dfrac{1}{2}q_2'\left(\dfrac{t_{n-2}+t_{n-1}}{2}\right) - \dfrac{1}{2}q_2'\left(\dfrac{t_{n-1}+t_n}{2}\right)\right) = 0,\\[2ex]
\dfrac{d\mathscr{F}}{dt_n} = 2q_2'(t_n) - q_2'\left(\dfrac{t_{n-1}+t_n}{2}\right) - q_2'(b) = 0.
\end{cases}
$$

Переписывая полученную систему в виде

$$
\begin{cases}
2q_1(t_1) - q_1\left(\dfrac{t_1+t_2}{2}\right) = 0,\\[2ex]
2q_1(t_k) - q_1\left(\dfrac{t_{k-1}+t_k}{2}\right) - q_1\left(\dfrac{t_k+t_{k+1}}{2}\right) = 0, \quad k = 2,\dots,n-1,\\[2ex]
2q_1(t_n) - q_1\left(\dfrac{t_{n-1}+t_n}{2}\right) - q_1(b) = 0,
\end{cases}
$$

получаем требуемую систему (1.2.6).

Таким образом, если решение $T^* = \{t_1^*, t_2^*, \dots, t_n^*\}$ системы (1.2.6) существует и единственно, то оно определяет как раз точку минимума функции $\mathscr{F}(t_1, t_2, \dots, t_n)$. В этом случае с учётом включения $H_T^{(1)}[a,b] \subset H^{(1)}[a,b]$ получаем

$$
\mathscr{E}_n(H^{(1)}[a,b], q) \ge \inf_{(P,T)} \mathscr{E}_n(H_T^{(1)}[a,b], q; P, T) =
$$

$$
= \min_{t_k} \mathscr{F}(t_1, t_2, \dots, t_n) = \mathscr{F}(t_1^*, t_2^*, \dots, t_n^*) =
$$

$$
= 2\sum_{k=1}^{n} q_2(t_k^*) - 2\sum_{k=1}^{n-1} q_2\left(\frac{t_k^*+t_{k+1}^*}{2}\right) + (b - t_n^*)q_1(b) - q_2(b). \qquad (1.2.12)
$$

Теперь получим оценку сверху величины $\mathscr{E}_n(H^{(1)}[a,b]; q)$. Полагаем

$$
p_k^* = \int\limits_{x_{k-1}^*}^{x_k^*} q(t)dt, \quad k = 1, \dots, n, \qquad (1.2.13)
$$

где

$$x_0^* = a,\ x_k^* = (t_k^* + t_{k+1}^*)/2,\ k = 1, 2, \ldots, n-1;\ x_n^* = b.$$

Воспользовавшись вектором коэффициентов (1.2.13), для произвольной функции $f \in H^{(1)}[a,b]$ имеем:

$$\big|R_n(f,q;P^*,T^*)\big| = \left|\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}^*}^{x_k^*} \big[f(t) - f(t_k^*)\big] q(t)dt\right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}^*}^{x_k^*} \big|t - t_k^*\big| q(t)dt = \int\limits_a^b q(t) f_{T^*}(t)dt =$$

$$= 2\sum_{k=1}^{n} q_2(t_k^*) - 2\sum_{k=1}^{n-1} q_2\left(\frac{t_k^* + t_{k+1}^*}{2}\right) + (b - t_n^*)q_1(b) - q_2(b) =$$

$$= \mathscr{F}(t_1^*, t_2^*, ..., t_n^*),$$

откуда сразу следует оценка сверху

$$\mathscr{E}_n(H^{(1)}[a,b];q) \leq \mathscr{F}(t_1^*, t_2^*, ..., t_n^*). \tag{1.2.14}$$

Таким образом, если решение системы (1.2.6) единственно, то правые части неравенства (1.2.12) и (1.2.14) совпадают и тогда будем иметь

$$\mathscr{E}_n(H^{(1)}[a,b];q) = \mathscr{E}_n(W_\infty^{(1)}[a,b];q) =$$

$$= \inf_{(P,T)} R_n(H^{(1)}[a,b],q;P,T) = \mathscr{F}(t_1^*, t_2^*, ..., t_n^*) =$$

$$= 2\sum_{k=1}^{n} q_2(t_k^*) - 2\sum_{k=1}^{n-1} q_2\left(\frac{t_k^* + t_{k+1}^*}{2}\right) + (b - t_n^*)q_1(b) - q_2(b),$$

причём вектор $P^* = \{p_k^*\}_{k=1}^n$ оптимальных коэффициентов определяется формулами (1.2.13), а вектор $T^* = \{t_k^*\}_{k=1}^n$ оптимальных узлов определяется единственным решением системы (1.2.6), чем и завершаем доказательство теоремы 1.2.1.

В качестве применения теоремы 1.2.1 рассмотрим конкретный случай, когда вес $q(t) = e^{-t}$, $[a,b] = [0, +\infty]$. В этом случае система (1.2.6) имеет единственное решение [16]

$$e^{-t_1} = n/(n+1), \quad e^{-t_n} = [n(n+1)]^{-1},$$

$$e^{-\frac{t_k}{2}} = e^{-\frac{t_1}{2}} - (e^{-\frac{t_1}{2}} - e^{-\frac{t_n}{2}})\frac{k-1}{n-1}, (k = 2, 3, \ldots, n-1),$$

откуда находим $t_k = \ln \dfrac{n(n+1)}{(n-k+1)^2},\ p_k = 2\dfrac{n+1-k}{n(n+1)},\ k = 1, 2, \ldots, n.$

Таким образом, нами доказано

Теорема 1.2.2. *Среди всех квадратурных формул вида (1.2.1) при* $q(t) = e^{-t}, [a, b] = [0, +\infty]$ *наилучшей является единственная формула*

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-t} f(t)dt = \sum_{k=1}^{n} \frac{2(n+1-k)}{n(n+1)} f\left(\ln \frac{n(n+1)}{(n-k+1)^2}\right) + R_n(f, e^{-t}).$$

Для погрешности этой формулы на классах $H^{(1)}$ *и* $W_\infty^{(1)}$ *справедливо точная оценка*

$$\mathscr{E}_n(H^{(1)}, e^{-t}) = \mathscr{E}_n(W_\infty^{(1)}, e^{-t}) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

§1.3. О погрешности усложнённых квадратурных формул для классов функций $W^{(r)}H_p^{\omega}[a,b](1 \le p \le \infty)$ и $W^{(r)}H_p^{\omega_2}[a,b](1 \le p \le \infty)$

Данный параграф посвящён уточнению оценки погрешности усложнённых квадратурных формул для некоторых классов дифференцируемых функций, задаваемых модулями непрерывности $\omega(f,\delta)$ и гладкости $\omega_2(f,\delta)$ в пространстве $L_p[a,b]$, $1 \le p \le \infty$ функций с конечной нормой

$$\left\|f\right\|_p := \left\|f\right\|_{L_p[a,b]} = \begin{cases} \int\limits_a^b |f(x)|^p dx, \ 1 \le p < \infty \\ supvrai\Big\{|f(x)| : a \le x \le b\Big\}, \ p = \infty. \end{cases}$$

Приведём известные факты, нужные нам для дальнейшего. Пусть на отрезке $[0,1]$ задана система точек (узлов)

$$0 \le x_1 < x_2 < \dots < x_n \le 1 \tag{1.3.1}$$

и чисел (весов)

$$p_1, p_2, \dots, p_n. \tag{1.3.2}$$

Составим линейный функционал(квадратурной суммы)

$$L(f) = L(f;0,1) = \sum_{k=1}^{n} p_k f(x_k), \tag{1.3.3}$$

где f – заданная произвольная непрерывная на отрезке $[0,1]$ функция.

Полагаем, что $L(f)$ – есть приближенное значение интеграла от $f(x)$ на отрезке $[0,1]$:

$$\int\limits_0^1 f(x)dx \approx L(f). \tag{1.3.4}$$

Итак, (1.3.4) есть (приближённая) квадратурная формула, определенная узлами (1.3.1) и весами (1.3.2).

Пусть теперь задан произвольный отрезок $[\alpha, \beta]$. Будем называть квадратурную формулу

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \approx L(\alpha, \beta; f), \tag{1.3.5}$$

где

$$L(\alpha, \beta; f) \approx \sum_{k=1}^{n} p'_k f(x'_k),$$

подобной формуле (1.3.4), а функционал $L(\alpha, \beta; f)$ – *подобным функционалу* $L(f)$, если система точек $\alpha, x_1, x_2, \ldots, x_n, \beta$ геометрически подобна системе $0, x_1, x_2, \ldots, x_n, 1$, а веса p'_k относятся соответственно к весам p_k как длина отрезка $[\alpha, \beta]$ к единице, иначе говоря, если выполняются соотношения

$$x'_k = \alpha + x_k(\beta - \alpha), \quad p'_k = p_k(\beta - \alpha), \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

На практике, если требуется вычислить приближённо определённый интеграл

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx,$$

обычно поступают следующим образом: выбирают конкретную квадратурную формулу (1.3.4), например формулу Симпсона, делят отрезок $[a, b]$ на n равных частей точками $\xi_k = a + k(b - a)/n$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ и к каждому отдельному частичному интервалу (ξ_{k-1}, ξ_k) $(k = \overline{1, n})$ применяют квадратурную формулу, подобную формулу (1.3.4), соответствующую интервалу (ξ_{k-1}, ξ_k):

$$\int\limits_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} f(x)dx \approx L(\xi_{k-1}, \xi_k; f).$$

Таким образом, исходя из квадратурной формулы (1.3.4), которую будем называть подобной, мы получим усложнённую квадратурную формулу С.М.Никольского (см. напр., [26, с.38])

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} L(\xi_{k-1}, \xi_k; f). \tag{1.3.6}$$

При помощи формулы (1.3.6) получаем известные усложнённые квадратурные формулы прямоугольника

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\Big(a+\frac{2k-1}{2n}(b-a)\Big),$$

трапеций

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2n}\left\{f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1} f\Big(a+\frac{b-a}{n}k\Big)+f(b)\right\},$$

Симпсона

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx$$

$$\approx \frac{b-a}{2n}\left\{f(a)+4\sum_{k=1}^{n} f\Big(a+\frac{2k-1}{2n}(b-a)\Big)+2\sum_{k=1}^{n-1} f\Big(a+\frac{k}{n}(b-a)\Big)+f(b)\right\},$$

а также квадратурные формулы Котеса и многие другие.

Равенствами

$$\omega(f,t)_p := \omega_1(f,t)_p = \sup_{|h|\le t}\left\{\int\limits_a^{b-h} |f(x+t)-f(x)|^p dx\right\}^{1/p},\ 1\le p\le\infty$$

и

$$\omega_2(f,t)_p := \sup_{|h|\le t}\left\{\int\limits_a^{b-h} |f(x+t)-2f(x)+f(x-t)|^p dx\right\}^{1/p},\ 1\le p\le\infty$$

определим соответственно интегральный модуль непрерывности и модуль гладкости функции $f\in L_p[a,b]$. Через $W^{(r)}H_p^{\omega}[a,b]$ и $W^{(r)}H_p^{\omega_2}[a,b]$ обозначим классы функций $f(x)$, у которых $(r-1)$-я производная удовлетворяет ограничения

$$\omega(f^{(r)},t)_p \le \omega(t)_p,\ \omega_2(f^{(r)},t)_p \le \omega_2(t)_p,\ 1\le p\le\infty,$$

где $\omega(t)_p$ и $\omega_2(t)_p$ – заданные в пространстве $L_p[a,b]$ модули непрерывности и модули гладкости.

В монографии [26] доказано, что если усложнённая квадратурная формула (1.3.6) точна на множестве всех полиномов степени r, то для погрешности этой формулы на всём классе $W^{(r)}H^{\omega}_{\infty}[a,b]$ имеет место неравенство

$$R^*_n(W^{(r)}H^{\omega}_{\infty}[a,b]) := \sup\left\{|R^*_n(f)| : f \in W^{(r)}H^{\omega}_{\infty}[a,b]\right\} =$$

$$= \sup_{f\in W^{(r)}H^{\omega}_{\infty}[a,b]} \left| \int\limits_a^b f(x)dx - \sum_{k=1}^{n} L(\xi_{k-1},\xi_k;f) \right| \le$$

$$\le (b-a)^{(r+1)}\frac{c_r}{n^r}\omega\left(\frac{b-a}{n}\right), \tag{1.3.7}$$

где

$$c_r := \frac{1}{(r-1)!}\int\limits_a^b \left| \frac{(1-t)^r}{r} - \sum_{k=0}^{n-1} p_k(x_k-t)_+^{(r-1)} \right| dt,$$

$$(x_k-t)_+^{r-1} = [\max(0,x_k-t)]^{r-1}.$$

В работе [1] дано обобщение неравенства (1.3.7) для интегральных модулей непрерывности $\omega(f^{(r)},t)_p$ и гладкости $\omega_2(f^{(r)},t)_p$. Здесь мы дадим уточнение приведённых в [1] результатов для классов $W^{(r)}H^{\omega}_p[a,b]$ и $W^{(r)}H^{\omega_2}_p[a,b]$, используя некоторые новые свойства функции Стеклова.

Приведём свойства функции Стеклова, нужные нам для дальнейшего, из монографии [17, с.133-139].

Пусть $h > 0, f \in L_1[a,b]$. Функцией Стеклова первого порядка для функции $f(x)$ с шагом h называется функция $f_h(x)$, определённая равенством

$$f_h(x) = \frac{1}{h}\int\limits_{-h/2}^{h/2} f(x+t)dt. \tag{1.3.8}$$

Функция Стеклова порядка 2 для функции $f(x)$ с шагом h называется функция, определённая равенством

$$f_{hh}(x) = \frac{1}{h}\int\limits_{-h/2}^{h/2} f_h(x+t)dt.$$

В [17, с.137] доказано, что

$$f_{hh}(x)=\frac{1}{h}\int\limits_0^h\Big\{f(x+t)+f(x-t)\Big\}\left(1-\frac{t}{h}\right)dt \tag{1.3.9}$$

и, так как

$$\frac{2}{h}\int\limits_0^h\left(1-\frac{t}{h}\right)dt=1,$$

то, используя равенство (1.3.9), имеем

$$f_{hh}(x)-f(x)=\frac{1}{h}\int\limits_0^h\Big\{f(x+t)-2f(x)+f(x-t)\Big\}dt. \tag{1.3.10}$$

Применяя обобщённое неравенство Минковского [9, с.395], из (1.3.10) получаем следующее соотношение

$$\Big\|f-f_{hh}\Big\|_p\le\frac{1}{h}\int\limits_0^h\omega_2(f,t)_p\left(1-\frac{t}{h}\right)dt=\int\limits_0^1\omega_2(f,th)_p(1-t)dt,$$

откуда для произвольной $f\in W^{(r)}H_p^{\omega_2}[a,b]$ получаем неравенство

$$\Big\|f^{(r)}-f_{hh}^{(r)}\Big\|_p\le\int\limits_0^1\omega_2(f^{(r)},th)_p(1-t)dt\le\int\limits_0^1\omega_2(th)_p(1-t)dt. \tag{1.3.11}$$

Аналогичным образом, представляя функцию (1.3.8) в виде

$$f_h(x)=\frac{1}{h}\int\limits_0^{h/2}\Big\{f(x+t)+f(x-t)\Big\}dt,$$

получим равенство

$$f_h(x)-f(x)=\frac{1}{h}\int\limits_0^{h/2}\Big\{f(x+t)-2f(x)+f(x-t)\Big\}dt,$$

откуда, снова применяя обобщённое неравенство Минковского, приходим к следующему неравенству

$$\Big\|f-f_h\Big\|_p\le\frac{1}{h}\int\limits_0^{h/2}\omega_2(f,t)_pdt=\frac{1}{2}\int\limits_0^1\omega_2\left(f,ht/2\right)_p dt,$$

откуда для любой $f \in W^{(r)}H_p^{\omega_2}[a,b]$ следует оценка

$$\left\| f^{(r)} - f_h^{(r)} \right\|_p \le \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \omega_2(f^{(r)}, ht/2)_p dt \le \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \omega_2(ht/2)_p dt. \tag{1.3.12}$$

Нам понадобятся ещё следующие два неравенства [9, с.225]

$$\left\| f_h' \right\|_p \le 2\omega(f, h/2)_p, \ \left\| f_{hh}'' \right\|_p \le h^{-2}\omega_2(f,h)_p. \tag{1.3.13}$$

Если $\mathfrak{M}$ – некоторый класс функций, заданных и определённых на отрезке $[a,b]$, то требуется найти точное значение или оценить сверху величины погрешности усложнённой квадратурной формулы (1.3.6):

$$R_n^*(\mathfrak{M}) = \sup\Big\{ |R_n^*(f)| : \ f \in \mathfrak{M} \Big\}. \tag{1.3.14}$$

Теорема 1.3.1. *Пусть квадратурная формула (1.3.4) точна на множестве полиномов степени r. Тогда погрешность усложнённой квадратурной формулы (1.3.6) на пересечении классов $W^{(r)}H_p^{\omega} \cap W^{(r)}H_p^{\omega_2}$ допускает оценку*

$$R_n^*(W^{(r)}H_p^{\omega} \cap W^{(r)}H_p^{\omega_2}[a,b]) \le$$

$$\le \frac{(b-a)^{r+1/q}}{2n^r}\left[c_r^{(q)} \int\limits_0^1 \omega_2\left(\frac{b-a}{2n}t\right)_p dt + 2c_{r+1}^{(q)} \omega\left(\frac{b-a}{2n}\right)_p \right], \tag{1.3.15}$$

где

$$c_r^{(q)} := \left\| F_r \right\|_{L_q[0,1]}; \ F_r(t) = \frac{1}{(r-1)!}\left[\frac{(1-t)^r}{r} - \sum_{k=1}^m p_k (x_k - t)_+^{(r-1)} \right]. \tag{1.3.16}$$

Теорема 1.3.2. *Пусть квадратурная формула (1.3.4) точна на множестве многочленов степени $r+1$. Тогда для погрешности формулы (1.3.6) на классе функций $W^{(r)}H_p^{\omega_2}[a,b]$ справедливо оценка*

$$R_n^*(W^{(r)}H_p^{\omega_2}[a,b]) \le$$

$$\le \frac{(b-a)^{r+1/q}}{n^r}\left[c_r^{(q)} \int\limits_0^1 (1-t)\omega_2\left(\frac{b-a}{n}t\right)_p dt + c_{r+2}^{(q)} \omega_2\left(\frac{b-a}{n}\right)_p \right], \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{1.3.17}$$

Мы здесь приводим доказательство теоремы 1.3.2, поскольку доказательство теоремы 1.3.1 проводится аналогичным образом.

Доказательство. Пусть $h = (b-a)/n$. Произвольную функцию $f \in W^{(r)}H_p^{\omega_2}[a,b]$ представим в виде

$$f(x) = [f(x) - f_{hh}(x)] + f_{hh}(x) := \mathscr{F}_{hh}(f,x) + f_{hh}(x) \tag{1.3.18}$$

и разложим по формуле Тейлора с остаточным членом в интегральной форме (см. [26, с.24])

$$f(x) = Q_{r+1}(x) + \frac{1}{(r-1)!}\int_0^1 (x-t)_+^{r-1}\mathscr{F}_{hh}^{(r)}(f,t)dt +$$
$$+\frac{1}{(r+1)!}\int_0^1 (x-t)_+^{r+1} f_{hh}^{(r+2)}(t)dt, \tag{1.3.19}$$

где $Q_{r+1}(x)$ - некоторый полином степени $r+1$, линейно зависящий от производных $\mathscr{F}_{hh}^{(r-1)}(f,x)$ и $f_{hh}^{(r+2)}$, $r \in \mathbb{N}$. Подставляя равенство (1.3.19) в квадратурную формулу (1.3.4), после некоторых простых преобразований для остатка формулы (1.3.4) получим

$$R_n(f) = \int_0^1 f(x)dx - \sum_{k=1}^n p_k f(x_k) =$$
$$= \int_0^1 F_r(t)\mathscr{F}_{hh}^{(r)}(f,t)dt + \int_0^1 F_{(r+2)}(t) f_{hh}^{(r+2)}(t)dt. \tag{1.3.20}$$

В силу равенства (1.3.20) и формулы (6.13) из монографии [26, с.39], для произвольной функции $f \in W^{(r)}H_p^{\omega_2}[a,b]$ погрешность усложнённой квадратурной формулы (1.3.6) представима в виде

$$R_n^*(f) = \int_a^b f(x)dx - \sum_{k=1}^n L(\xi_{k-1},\xi_k;f) =$$
$$= h^{r+1}\sum_{k=1}^n \left\{ \int_0^1 F_r(u)\mathscr{F}_{hh}^{(r)}(f,\xi_k+hu)du + h^2\int_0^1 F_{(r+2)}(u) f_{hh}^{(r+2)}(\xi_k+hu)du \right\}. \tag{1.3.21}$$

Оценивая по абсолютной величине равенство (1.3.21) и применяя неравенство Гёльдера для интегралов, получаем

$$|R_n^*(f)| \leq h^{r+1}\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(\int_0^1 |F_r(u)|^q du\right)^{1/q}\left(\int_0^1 |\mathscr{F}_{hh}^{(r)}(f,\xi_k+hu)|^p du\right)^{1/p}+\right.$$

$$\left.+h^2\left(\int_0^1 |F_{(r+2)}(u)|^q du\right)^{1/q}\left(\int_0^1 |f_{hh}^{(r+2)}(\xi_k+hu)|^p du\right)^{1/p}\right\}=$$

$$= h^{r+1-\frac{1}{p}}\left\{c_r^{(q)}\sum_{k=1}^{n}\left(\int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} |\mathscr{F}_{hh}^{(r)}(f,u)|^p du\right)^{1/p}+c_{r+2}^{(q)}h^2\sum_{k=1}^{n}\left(\int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} |f_{hh}^{(r+2)}(u)|^p du\right)^{1/p}\right\}\leq$$

$$\leq h^{r+\frac{1}{q}}\left\{c_r^{(q)}\left(\sum_{k=1}^{n}\int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} |\mathscr{F}_{hh}^{(r)}(f,u)|^p du\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{n}1^q\right)^{1/q}+\right.$$

$$\left.+c_{r+2}^{(q)}h^2\left(\sum_{k=1}^{n}\int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} |f_{hh}^{(r+2)}(u)|^p du\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{n}1^q\right)^{1/q}\right\}\leq$$

$$\leq h^{r+\frac{1}{q}}n^{1/q}\left\{c_r^{(q)}||\mathscr{F}_{hh}^{(r)}||_{L_p}+c_{r+2}^{(q)}h^2||f_{hh}^{(r+2)}||_{L_p}\right\},\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\ 1\leq p\leq\infty. \tag{1.3.22}$$

Учитывая, что согласно неравенству (1.3.11)

$$\left\|\mathscr{F}_{hh}^{(r)}\right\|_{L_p}=\left\|f^{(r)}-f_{hh}^{(r)}\right\|_p\leq\int_0^1(1-t)\omega_2\left(\frac{b-a}{n}t\right)_p dt, \tag{1.3.23}$$

а согласно второму из неравенств (1.3.13)

$$h^2\left\|f_{hh}^{(r+2)}\right\|_{L_p}\leq\omega_2(f^{(r)},h)_p\leq\omega_2(h)_p\equiv\omega_2\left(\frac{b-a}{n}\right)_p, \tag{1.3.24}$$

то подставляя в правую часть неравенства (1.3.22) соотношения (1.3.23) и (1.3.24), получаем

$$|R_n^*(f)| \leq$$

$$\leq \frac{(b-a)^{r+1/q}}{n^r} \left\{ c_r^{(q)} \int\limits_0^1 (1-t)\omega_2\left(\frac{b-a}{n}t\right)_p dt + c_{r+2}^{(q)}\omega_2\left(\frac{b-a}{n}\right)_p \right\}. \quad (1.3.25)$$

Поскольку неравенство (1.3.25) имеет место для любой функции $f \in W^{(r)}H_p^{\omega_2}[a,b]$, то из (1.3.25) вытекает (1.3.17), и этим доказательство теоремы 1.3.2 завершается.

Следствие 1.3.1. *В условиях теоремы 1.3.2, при* $\omega_2(t)_p = t^\alpha$ $(0 < \alpha \leq 1)$ *имеет место неравенство*

$$R_n(W^{(r)}H_p^{(\alpha)}[a,b]) \leq$$

$$\leq \frac{(b-a)^{r+\alpha+\frac{1}{q}}}{n^{r+\alpha}} \left\{ \frac{c_r^{(q)}}{(\alpha+1)(\alpha+2)} + c_{r+2}^{(q)} \right\},$$

где константы $c_r^{(q)}$ *и* $c_{r+2}^{(q)}$ *определяются по формуле (1.3.16).*

ГЛАВА II

О НАИЛУЧШИХ КУБАТУРНЫХ ФОРМУЛАХ НА КЛАССОВ ФУНКЦИЙ, ЗАДАВАЕМЫХ МОДУЛЯМИ НЕПРЕРЫВНОСТИ

§2.1. Постановка задач

В первом параграфе второй главы, ограничиваясь двумерным случаем, рассмотрим для функций $f(x,y)$, заданных на прямоугольнике

$$Q := \{a \le x \le b, c \le y \le d\},$$

кубатурную формулу

$$\iint\limits_{(Q)} q(x,y)f(x,y)dxdy = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} p_{kl}f(x_k,y_l) + R_{mn}(f;q), \tag{2.1.1}$$

определяемую вектором $(P;X,Y)$ коэффициентов $P = \{p_{kl}\}_{k,l=1}^{m,n}$ и узлов

$$X := \{x_k : a \le x_1 < x_2 < \ldots < x_m \le b\},$$

$$Y := \{y_k : c \le y_1 < y_2 < \ldots < y_n \le d\},$$

$R_{mn}(f;q) := R_{mn}(f;q;P,X,Y)-$ погрешность кубатурной формулы (2.1.1) на функцию f, а $q(x,y) \ge 0$ - интегрируемая весовая в области Q функция.

Ради удобства иногда точки прямоугольника Q обозначим через $M := M(x,y)$, а узлы через $M_{ki} := M(x_k,y_i)(k = 1,2,\ldots,m; i = 1,2\ldots,n)$.

Ясно, что если $\mathfrak{M}$ - некоторый класс функций $\{f(x,y)\}$, заданных и определённых в области Q, то для каждой $f \in \mathfrak{M}$ погрешность формулы (2.1.1) имеет числовое значение

$$R_{mn}(f;q;P,X,Y) = \left| \iint\limits_{(Q)} q(x,y)f(x,y)dxdy - \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} p_{kl}f(x_k,y_l) \right|.$$

При заданных вектор коэффициентах и узлах

$$\Big(P; X; Y\Big) = \Big(\{p_{kl}\}, \{x_k\}, \{y_l\}\Big)$$

максимально допустимой оценкой погрешности кубатурной формулы (2.1.1) с весовой функцией $q(x, y) \geq 0$ на классе функций $\mathfrak{M}$ является верхняя грань

$$R_{mn}(\mathfrak{M}; q; P, X, Y) =$$

$$= \sup \left\{ \left| \iint\limits_{(Q)} q(x, y) f(x, y) dx dy - \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} p_{kl} f(x_k, y_l) \right| : f \in \mathfrak{M} \right\}. \quad (2.1.2)$$

При конкретно заданной весовой функции $q(x, y) \geq 0$ верхняя грань (2.1.2) на классе функций $\mathfrak{M}$ зависит только от выбора векторов узлов $X = \{x_k\}$, $Y = \{y_l\}$ и коэффициентов $P = \{p_{kl}\}$.

Таким образом в теории кубатур возникают следующие экстремальные задачи построения кубатурных формул вида (2.1.1):

При фиксированных узлах (X, Y) требуется найти величину

$$\mathscr{E}_{mn}(\mathfrak{M}; q; P^*, X, Y) = \inf_{P} R_{mn}(\mathfrak{M}; q; P, X, Y). \quad (2.1.3)$$

Кубатурная формула (2.1.1), для которой достигается нижняя грань для вектора коэффициентов $P^* = \{p^*_{kl}\}_{k,l=1}^{m,n}$ в равенстве (2.1.3), называется *наилучшей* или *оптимальной по коэффициентам* кубатурной формулой на классе $\mathfrak{M}$. Задача (2.1.3) называется задачей Сарда [29].

Таким образом возникает следующая экстремальная задача: требуется при произвольных векторах коэффициентов $P = \{p_{kl}\}_{k,l=1}^{m,n}$ и произвольных векторах узлов $X = \{x_k\}_{k=1}^{m}$, $Y = \{y_l\}_{l=1}^{n}$ найти значения величину

$$\mathscr{E}_{mn}(\mathfrak{M}; q) = \inf_{(P,X,Y)} R_{mn}(\mathfrak{M}; q, P, X, Y). \quad (2.1.4)$$

Если для кубатурной формулы вида (2.1.1), достигается нижняя грань для вектора коэффициентов и узлов

$$(P^*, X^*, Y^*) = \Big(\{p^*_{kl}\}_{k,l=1}^{m,n},\ \{x^*_k\}_{k=1}^{m},\ \{y^*_l\}_{l=1}^{n}\Big),$$

то есть когда

$$\mathscr{E}_{mn}(\mathfrak{M};q)=R_{mn}(\mathfrak{M};q;P^*,X^*,Y^*),$$

называется *наилучшей* или *оптимальной в смысле С.М.Никольского* для класса функций $\mathfrak{M}$ и весовой функцией $q(x,y)\geq 0$. При этом вектор (P^*,X^*,Y^*) называется *наилучшим* или *оптимальным* вектором коэффициентов и узлов.

В этой главе мы излагаем решение сформулированных задач (2.1.3) и (2.1.4) для некоторых конкретно заданных классов функций.

Оптимальные кубатурные формулы для различных классов функций приведены в монографиях С.М.Никольского [26], Н.П.Корнейчука [20], Н.С.Бахвалова [10] В.Ф.Бабенко [11–13], М.И.Левина и Ю.Г.Гиршовича [21, 22],Н.Е.Лушпай [24], И.И.Ибрагимова и Р.И.Алиева [19], Н.Е.Лушпай и С.В.Переверзева [25], М.Ш.Шабозова [30] и многих других.

Дадим определение классов функций двух переменных, которых будем рассматривать в дальнейшем.

Обозначим через $H_1^{\omega_1,\omega_2}(Q)$ - класс определённых на прямоугольнике Q функций $f(x,y)$ таких, что для любых двух точек $(x',y'),(x'',y'')\in Q$ удовлетворяют условию

$$|f(x',y')-f(x'',y'')|\leq\omega_1(|x'-x''|)+\omega_2(|y'-y''|),\tag{2.1.5}$$

где $\omega_1(\delta)$, $\omega_2(\delta)$ – заданные модули непрерывности, то есть непрерывные функции, удовлетворяющие соотношениям

$$0\leq\omega_1(\delta'')-\omega_1(\delta')\leq\omega_1(\delta''-\delta'),\ (0\leq\delta'\leq\delta''\leq b-a,\ \ \omega_1(0)=0),$$

$$0\leq\omega_2(\delta'')-\omega_2(\delta')\leq\omega_2(\delta''-\delta'),\ (0\leq\delta'\leq\delta''\leq d-c,\ \ \omega_2(0)=0).$$

Проводя непосредственной проверкой можно убедиться, что условия (2.1.5) эквивалентно системе двух неравенств

$$|f(x',y)-f(x'',y)|\leq\omega_1(|x'-x''|),\ \ c\leq y\leq d,$$

$$|f(x,y')-f(x,y'')|\leq\omega_2(|y'-y''|),\ \ a\leq x\leq b.$$

В частности, если $\omega_1(t) = K_1 t^{\alpha}(K_1 > 0,\ 0 < \alpha \leq 1)$, $\omega_2(\tau) = K_2\tau^{\beta}$ $(K_2 > 0,\ 0 < \beta \leq 1)$, то мы получаем класс Гёльдера для функции двух переменных с константами K_1, K_2 и показателями α, β $(0 < \alpha, \beta \leq 1)$ следующего вида

$$|f(x',y') - f(x'',y'')| \leq K_1|x'-x''|^{\alpha} + K_2|y'-y''|^{\beta}.$$

При $K_1 = K_2 = 1, \alpha = \beta = 1$ получаем хорошо известный класс Липшица $H^{(1,1)}(Q), Q = [a,b] \times [c,d]$:

$$|f(x',y') - f(x'',y'')| \leq |x'-x''| + |y'-y''|.$$

Параллельно с классом $H_1^{\omega_1,\omega_2}(Q)$ будем рассматривать класс $H_{1,\rho_q}^{\omega}(Q)$ $(1 \leq q \leq \infty)$ функций $f(x,y)$, заданных и интегрируемых на Q таких, что

$$|f(M') - f(M'')| \leq \omega(\rho_q(M',M'')),$$

где $\rho_q(M',M'')$ - расстояние между точками $M'(x',y'), M''(x'',y'') \in Q$, то есть

$$\rho_q(M',M'') = \sqrt[q]{|x'-x''|^q + |y'-y''|^q},\ (1 < q < \infty),$$

$$\rho_1(M',M'') = |x'-x''| + |y'-y''|, \quad q = 1,$$

$$\rho_{\infty}(M',M'') = \max\big\{|x'-x''|, |y'-y''|\big\}.\ \ q = \infty,$$

а $\omega(\delta)$ – заданный модуль непрерывности на отрезке $[0, \sqrt[q]{(b-a)^q + (d-c)^q}]$, $(1 \leq q \leq \infty)$.

Будем также рассматривать классы $H_2^{\omega_1,\omega_2}(Q)$ и $H_{2,\rho_q}^{\omega}(Q)$ функций $f(x,y)$, определённых на Q и для любых трёх точек

$$M' = M(x',y'), M'' = M(x'',y'') \ \text{ и } \ M^* = M\left(\frac{x'+x''}{2}, \frac{y'+y''}{2}\right),$$

из области Q и удовлетворяющих следующим условиям

$$|f(M') + f(M'') - 2f(M^*)| \leq 2\left[\omega_1\left(\frac{|x'-x''|}{2}\right) + \omega_2\left(\frac{|y'-y''|}{2}\right)\right],$$

$$|f(M') + f(M'') - 2f(M^*| \leq 2\omega\left(\sqrt[q]{\left|\frac{x'-x''}{2}\right|^q + \left|\frac{y'-y''}{2}\right|^q}\right).$$

Заметим, что в принятых обозначениях, например, включение $f(x,y) \in H^{\omega}_{1,\rho_\infty}(Q)$ предполагает выполнение неравенства

$$|f(M') - f(M'')| \leq \omega\left(\max\Big[|x' - x''|, |y' - y''|\Big]\right) =$$

$$= \max\left(\omega(|x' - x''|), \omega(|y' - y''|)\right),$$

а включение $f(x,y) \in H^{\omega}_{2,\rho_\infty}(Q)$ означает автоматическое выполнение неравенства

$$|f(M') + f(M'') - 2f(M^*)| \leq 2\omega\left(\max\left[\frac{|x' - x''|}{2}, \frac{|y' - y''|}{2}\right]\right) \leq$$

$$\leq 2\max\left(\omega\left(\frac{|x' - x''|}{2}\right), \omega\left(\frac{|y' - y''|}{2}\right)\right).$$

§2.2. Обобщение результатов параграфа 1.2 на двумерный случай для класса $H^{(1,1)}(Q)$

Полученный в теореме 1.2.1 результат может быть распространен на классе $H^{(1.1)}(Q),\ Q = [a,b]\times[c,d]$ функций двух переменных $f(t,\tau)\in C(Q)$, удовлетворяющих для любых двух точек $(t',\tau'),\ (t'',\tau'')\in Q$ условию

$$\left|f(t',\tau') - f(t'',\tau'')\right| \le |t'-t''| + |\tau'-\tau''|.$$

Далее положим

$$q_1(t) = \int\limits_a^t q(u)du,\ q_2(t) = \int\limits_a^t q_1(u)du,$$

$$\rho_1(\tau) = \int\limits_c^\tau \rho(u)du,\ \rho_2(\tau) = \int\limits_c^\tau \rho_1(u)du.$$

Справедлива следующая теорема, являющаяся обобщением теоремы 1.2.0 Т.Н.Бусаровой из второго параграфа первой главы для кубатурной формулы типа А.А.Маркова функции двух переменных

Теорема 2.2.1. *Среди кубатурных формул вида Маркова*

$$\iint\limits_{(Q)} q(t)\rho(\tau)f(t,\tau)dtd\tau = \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n} p_{kl}f(t_k,\tau_l) + R_{mn}(f;q\rho), \tag{2.2.1}$$

с весовой функцией $q(t)\rho(\tau)$, оптимальной на классе $H^{(1,1)}(Q)$ является кубатурная формула, узлы которой

$$T^* = \{\, t_k^* : a = t_0^* < t_1^* < ... < t_{m-1}^* < t_m^* = b\,\},$$

$$\mathcal{T}^* = \{\, \tau_l^* : c = \tau_0^* < \tau_1^* < ... < \tau_{n-1}^* < \tau_n^* = d\,\}$$

реализуют минимум выражение

$$\mathcal{J}(a,t_1,t_2,...,t_{m-1},b;\ c,\tau_1,\tau_2,..,\tau_{n-1},d) =$$

$$= q_1(b)\left\{2\sum_{k=1}^{m-1} q_2(t_k) - 2\sum_{k=1}^{m} q_2\left(\frac{t_{k-1}+t_k}{2}\right) + q_2(b)\right\} +$$

$$+\rho_1(d)\left\{2\sum_{l=1}^{n-1} \rho_2(\tau_l) - 2\sum_{l=1}^{n} \rho_2\left(\frac{\tau_{l-1}+\tau_l}{2}\right) + \rho_2(d)\right\}.$$

и коэффициенты которой определяются равенствоми

$$p^*_{kl} = \iint\limits_{(Q^*_{kl})} q(t)\rho(\tau)dtd\tau,$$

где

$$Q^*_{kl} = \{x^*_k \le t \le x^*_{k+1},\ y^*_l \le \tau \le y^*_{l+1}\},$$

$$x^*_0 = a, x^*_k = (t^*_{k-1} + t^*_k)/2,\ k = 1, 2, ..., m;\ x^*_{m+1} = t^*_m = b,$$

$$y^*_0 = c, y^*_l = (\tau^*_{l-1} + \tau^*_l)/2,\ l = 1, 2, ..., n;\ y^*_{n+1} = \tau^*_n = d.$$

Наилучшая оценка остатка на классе $H^{(1,1)}(Q)$ равна

$$\mathscr{E}_{mn}(H^{(1,1)}(Q); q\rho) =$$

$$= q_1(b)\left\{2\sum_{k=1}^{m-1} q_2(t^*_k) - 2\sum_{k=1}^{m} q_2\left(\frac{t^*_{k-1}+t^*_k}{2}\right) + q_2(b)\right\} +$$

$$+\rho_1(d)\left\{2\sum_{l=1}^{n-1} \rho_2(\tau^*_l) - 2\sum_{l=1}^{n} \rho_2\left(\frac{\tau^*_{l-1}+\tau^*_l}{2}\right) + \rho_2(d)\right\}, \qquad (2.2.2)$$

Доказательство. Согласно общей постановке отыскания наилучших кубатурных формул, требуется найти величину

$$\mathscr{E}_{mn}(H^{(1,1)}(Q), q\rho) = \inf_{(P;T,\mathcal{T})\in\mathcal{A}} R_{mn}(H^{(1,1)}(Q), q\rho; P, T, \mathcal{T}),$$

где $\mathcal{A}$ - множество векторов коэффициентов и узлов, для которых формула (2.2.1) имеет смысл. Оценку снизу на классе $H^{(1,1)}(Q)$ кубатурной формулы (2.2.1) получаем известным методом Н.П.Корнейчука [26], а именно введём в рассмотрение подкласс $H^{(1,1)}_{T\mathcal{T}}(Q)$ функций $f(t.\tau)$, которые в узлах (t_k, τ_l)

$(k=\overline{0,m};\ l=\overline{0,n})$ обращаются в нуль $f(t_k,\tau_l)=0$ $(k=\overline{0,m};\ l=\overline{0,n})$. В этом случае, как хорошо известно [26, стр.179]:

$$\mathscr{E}_{mn}(H^{(1,1)}(Q);q\rho)\geq\mathscr{E}_{mn}(H^{(1,1)}_{T\mathcal{T}}(Q);q\rho)=$$

$$\geq\inf_{(T,\mathcal{T})\subset A}\left\{\sum_{k=0}^{m}\int\limits_{c}^{d}\rho(\tau)d\tau\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}q(t)(|t-t_k|)dt+\right.$$

$$\left.+\sum_{l=0}^{n}\int\limits_{a}^{b}q(t)dt\int\limits_{y_l}^{y_{l+1}}\rho(\tau)(|\tau-\tau_l|)d\tau\right\}=$$

$$=\inf_{(T,\mathcal{T})\subset A}\left\{\sum_{k=0}^{m}\int\limits_{c}^{d}\rho(\tau)\left(\int\limits_{t_k}^{x_{k+1}}q(t)(t-t_k)dt+\int\limits_{x_k}^{t_k}q(t)(t_k-t)dt\right)d\tau+\right.$$

$$\left.+\sum_{l=0}^{n}\int\limits_{a}^{b}q(t)\left(\int\limits_{\tau_l}^{y_{l+1}}\rho(\tau)(\tau-\tau_l)d\tau+\int\limits_{y_l}^{\tau_l}\rho(\tau)(\tau_l-\tau)d\tau\right)dt\right\}=$$

$$=\inf_{(T,\mathcal{T})\subset A}\mathcal{J}(a,t_1,t_2,...,t_{m-1},b;\ c,\tau_1,\tau_2,..,\tau_{n-1},d),$$

получаем

$$\mathcal{J}(a,t_1,t_2,...,t_{m-1},b;\ c,\tau_1,\tau_2,..,\tau_{n-1},d)=$$

$$=q_1(b)\cdot\sum_{k=1}^{m}\left\{\int\limits_{t_k}^{(t_k+t_{k+1})/2}q(t)(t-t_k)dt+\int\limits_{(t_{k-1}+t_k)/2}^{t_k}q(t)(t_k-t)dt\right\}+$$

$$+\rho_1(d)\cdot\sum_{l=1}^{n}\left\{\int\limits_{\tau_l}^{(\tau_l+\tau_{l+1})/2}\rho(\tau)(\tau-\tau_l)d\tau+\int\limits_{(\tau_{l-1}+\tau_l)/2}^{\tau_l}\rho(\tau)(\tau_l-\tau)d\tau\right\},$$

откуда интегрированием по частям имеем:

$$\mathcal{J}(a,t_1,t_2,...,t_{m-1},b;\ c,\tau_1,\tau_2,..,\tau_{n-1},d)=$$

$$= q_1(b)\left\{2\sum_{k=1}^{m-1} q_2(t_k) - 2\sum_{k=1}^{m} q_2\left(\frac{t_{k-1}+t_k}{2}\right) + q_2(b)\right\} +$$

$$+\rho_1(d)\left\{2\sum_{l=1}^{n-1} \rho_2(\tau_l) - 2\sum_{l=1}^{n} \rho_2\left(\frac{\tau_{l-1}+\tau_l}{2}\right) + \rho_2(d)\right\}.$$

Таким образом дело сводится к нахождению

$$\min_{t_k,\tau_i} \mathcal{J}(a, t_1, t_2, ..., t_{m-1}, b;\ c, \tau_1, \tau_2, .., \tau_{n-1}, d).$$

Приравняв нулю частные производные $\partial\mathcal{J}_1/\partial t_k = 0,\ k = 1, 2, ..., m-1,$ $\partial\mathcal{J}_1/\partial\tau_l = 0,\ l = 1, 2, ..., n-1$, придем к следующей системе уравнений

$$\begin{cases} 2q_1(t_k) - q_1\left(\frac{t_{k-1}+t_k}{2}\right) - q_1\left(\frac{t_k+t_{k+1}}{2}\right) = 0,\ k = \overline{1, m-1}, \\ 2\rho_1(\tau_l) - \rho_1\left(\frac{\tau_{l-1}+\tau_l}{2}\right) - \rho_1\left(\frac{\tau_l+\tau_{l+1}}{2}\right) = 0,\ l = \overline{1, n-1}. \end{cases} \tag{2.2.3}$$

При этом, если решение $T^* = \{t_k^*\}, \mathcal{T}^* = \{\tau_l^*\}$ системы (2.2.3) существует, то оно определяет единственную точку минимума функции

$$\mathcal{J}(a, t_1, t_2, ..., t_{m-1}, b;\ c, \tau_1, \tau_2, .., \tau_{n-1}, d).$$

Тем самым имеем:

$$\mathcal{E}_{mn}(H^{(1,1)}(Q); q\rho) = R_{mn}(H^{(1,1)}(Q); q\rho; P^*, T^*, \mathcal{T}^*) =$$

$$= \int\limits_a^b q(t)dt\left\{2\sum_{k=1}^{m-1}\int\limits_a^{t_k^*} q_1(t)dt - 2\sum_{k=1}^{m}\int\limits_a^{(t_{k-1}^*+t_k^*)/2} q_1(t)dt + \int\limits_a^b q_1(t)dt\right\} +$$

$$+ \int\limits_c^d \rho(\tau)d\tau\left\{2\sum_{k=1}^{n-1}\int\limits_c^{\tau_k^*} \rho_1(\tau)d\tau - 2\sum_{k=1}^{n}\int\limits_c^{(\tau_{k-1}^*+\tau_k^*)/2} \rho_1(\tau)d\tau + \int\limits_c^d \rho_1(\tau)d\tau\right\} =$$

$$= q_1(b)\left\{2\sum_{k=1}^{m-1} q_2(t_k^*) - 2\sum_{k=1}^{m} q_2\left(\frac{t_{k-1}^* + t_k^*}{2}\right) + q_2(b)\right\} +$$

$$+\rho_1(d)\left\{2\sum_{l=1}^{n-1} \rho_2(\tau_l^*) - 2\sum_{l=1}^{n} \rho_2\left(\frac{\tau_{l-1}^* + \tau_l^*}{2}\right) + \rho_2(d)\right\},$$

где векторы оптимальных узлов $T^* = \{t_k^*\}$, $\mathcal{T}^* = \{\tau_i^*\}$ определяются решением системы (2.2.3), а вектор $P^* = \{p_{kl}^*\}$ оптимальных коэффициентов определяется формулой

$$p_{kl}^* = \iint\limits_{(Q_{kl}^*)} q(t)\rho(\tau)dtd\tau. \tag{2.2.4}$$

Рассмотрим одно применение теоремы 2.2.1.

Пусть $q(t,\tau) = e^{2(t+\tau)} = e^{2t}e^{2\tau} = q(t)\cdot\rho(\tau)$. Тогда из системы (2.2.3) сразу получаем [15]

$$\begin{cases} 2e^{t_k} = e^{t_{k-1}} + e^{t_{k+1}}, & k = 1,2,...,m, \\ 2e^{\tau_l} = e^{\tau_{l-1}} + e^{\tau_{l+1}}, & l = 1,2,...,n. \end{cases}$$

Единственное решение этой системы имеет вид

$$\begin{cases} t_k^* = \ln\dfrac{(m-k+1)e^a + ke^b}{m+1}, & k = 1,2,...,m, \\ \tau_l^* = \ln\dfrac{(n-l+1)e^c + le^d}{n+1}, & l = 1,2,...,n. \end{cases} \tag{2.2.5}$$

По формуле (2.2.4) находим значение оптимальных коэффициентов

$$\begin{cases} p_{kl}^* = \dfrac{(e^b-e^a)(e^c-e^d)}{(m+1)^2(n+1)^2}[(m-k+1)e^a + ke^b][(n-l+1)e^c + le^d], \\ p_{k0}^* = \dfrac{(e^b-e^a)(e^c-e^d)e^c}{2(m+1)^2(n+1)}[(m-k+1)e^a + ke^b], (k = 1,2,...,m), \\ p_{0l}^* = \dfrac{(e^b-e^a)(e^c-e^d)e^a}{2(m+1)(n+1)^2}[(n-l+1)e^c + le^d], (l = 1,2,...,n), \\ p_{00}^* = \dfrac{(e^b-e^a)(e^c-e^d)}{4(m+1)(n+1)},\ p_{m+1,n+1}^* = \dfrac{(e^b-e^a)(e^c-e^d)e^{b+d}}{4(m+1)(n+1)}. \end{cases} \tag{2.2.6}$$

Теорема 2.2.2. *Среди кубатурных формул вида Маркова (2.2.1) с весовой функцией $q(t,\tau)=e^{2(t+\tau)}$, наилучшей на классе $H^{(1,1)}(Q)$ является формула, оптимальные узлы и коэффициенты которой определяются формулами (2.2.5) и (2.2.6).*

Точная оценка погрешности оптимальной кубатурной формулы Маркова на классе $H^{(1,1)}(Q)$, определяется равенствам

$$\mathscr{E}_{mn}(H^{(1,1)}(Q);\; e^{2(t+\tau)}) = \frac{(e^b-e^a)(e^d-e^c)}{4}\cdot\left(\frac{e^b-e^c}{m+1}+\frac{e^d-e^c}{n+1}\right).$$

Теорема 2.2.3. *Среди кубатурных формул вида*

$$\iint\limits_{(Q)} q(t)\rho(\tau)f(t,\tau)dtd\tau = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} p_{kl}f(t_k,\tau_l)+R_{mn}(f;q\rho) \qquad (2.2.7)$$

с весовой функцией $q(t)\rho(\tau)$, оптимальной на классе $H^{(1,1)}(Q)$ является формула, узлы которой

$$T^* = \{\, t_k^* : a \leqslant t_1^* < t_2^* < ... < t_{m-1}^* < t_m^* \leqslant b\,\},$$

$$\mathcal{T}^* = \{\, \tau_l^* : c \leqslant \tau_1^* < \tau_2^* < ... < \tau_{n-1}^* < \tau_n^* \leqslant d\,\}$$

реализуют минимум выражение

$$\mathscr{F}(t_1,t_2,...,t_m;\;\tau_1,\tau_2,..,\tau_n) =$$

$$= q_1(b)\left\{2\sum_{k=1}^{m} q_2(t_k) - 2\sum_{k=1}^{m-1} q_2\left(\frac{t_k+t_{k+1}}{2}\right) + (b-t_m)q_1(b) - q_2(b)\right\} +$$

$$+\rho_1(d)\left\{2\sum_{l=1}^{n}\rho_2(\tau_l) - 2\sum_{l=1}^{n-1}\rho_2\left(\frac{\tau_l+\tau_{l+1}}{2}\right) + (d-\tau_n)\rho_1(d) - \rho_2(d)\right\}$$

и коэффициенты которой определяются равенствами

$$p_{kl}^* = \iint\limits_{(Q_{kl}^*)} q(t)\rho(\tau)dtd\tau,$$

где

$$Q_{kl}^* = \{x_{k-1}^* \le t \le x_k^*,\ y_{l-1}^* \le \tau \le y_l^*\},$$

$$x_0^* = a, x_k^* = (t_k^* + t_{k+1}^*)/2,\ k = 1, 2, ..., m-1;\ x_m^* = b,$$

$$y_0^* = c, y_l^* = (\tau_l^* + \tau_{l+1}^*)/2,\ l = 1, 2, ..., n-1;\ y_n^* = d.$$

Наилучшая оценка остатка на классе $H^{(1,1)}(Q)$ определяется равенствам

$$\mathscr{E}_{mn}(H^{(1,1)}(Q); q\rho) =$$

$$= q_1(b)\left\{2\sum_{k=1}^{m} q_2(t_k^*) - 2\sum_{k=1}^{m-1} q_2\left(\frac{t_k^* + t_{k+1}^*}{2}\right) + (b - t_m^*)q_1(b) - q_2(b)\right\} +$$

$$+\rho_1(d)\left\{2\sum_{l=1}^{n} \rho_2(\tau_l^*) - 2\sum_{l=1}^{n-1} \rho_2\left(\frac{\tau_l^* + \tau_{l+1}^*}{2}\right) + (d - \tau_n^*)\rho_1(d) - \rho_2(d)\right\}. \quad (2.2.8)$$

Доказательство. Оценим сначала снизу величину

$$\mathscr{E}_{mn}(H^{(1,1)}(Q), q\rho) = \inf_{(P;T,\mathcal{T})} R_{mn}(H^{(1,1)}(Q), q\rho; P, T, \mathcal{T}).$$

При этом пользуемся хорошо известным методом Н.П.Корнейчука [20] получения оценки снизу погрешности кубатурных формул, согласно которому каждому вектору узлов $(T, \mathcal{T})$ сопоставляется подмножество

$$H_{T,\mathcal{T}}^{(1,1)}(Q) = \Big\{f : f \in H^{(1,1)}(Q), f(t_k, \tau_l) = 0,\ k = 1, ..., m;\ l = 1, ..., n\Big\}.$$

Очевидно, погрешность $R_{mn}(f, q\rho)$ формулы (2.2.7) для класса $H_{T\mathcal{T}}^{(1,1)}(Q)$ не зависит от вектора коэффициентов $P^* = \{p_{kl}^*\}$:

$$|R_{mn}(f, q\rho)| := |R_{mn}(f, q\rho, T, \mathcal{T})| = \iint\limits_{(Q)} q(t)\rho(\tau)f_{T,\mathcal{T}}(t, \tau)dtd\tau.$$

Отсюда имеем

$$\mathscr{E}_{mn}(H^{(1,1)}_{T\mathcal{T}}(Q), q\rho) =$$

$$= \inf_{(T,\mathcal{T})} R_{mn}(H^{(1,1)}_{T,\mathcal{T}}(Q); q\rho, T\mathcal{T}) = \inf_{(T,\mathcal{T})} \iint\limits_{(Q)} q(t)\rho(\tau) f_{T\mathcal{T}}(t,\tau)dtd\tau. \qquad (2.2.9)$$

В силу включения $H^{(1,1)}_{T\mathcal{T}}(Q) \subset H^{(1,1)}(Q)$ из (2.2.9) сразу следует оценка снизу

$$\mathscr{E}_{mn}(H^{(1,1)}(Q); q\rho) \geq$$

$$\geq \mathscr{E}_{mn}(H^{(1,1)}_{T\mathcal{T}}(Q); q\rho) = \inf_{(T,\mathcal{T})} \iint\limits_{(Q)} q(t)\rho(\tau) f_{T\mathcal{T}}(t,\tau)dtd\tau, \qquad (2.2.10)$$

где

$$f_{T\mathcal{T}}(t,\tau) = \{|t-t_k| + |\tau - \tau_l|\},$$

$$(x_{k-1} \leq t \leq x_k,\ k = 1, \ldots, m;\ \ y_{l-1} \leq \tau \leq y_l,\ l = 1, \ldots, n),$$

$$x_0 = a,\ x_k = (t_k + t_{k+1})/2,\ k = 1, 2, \ldots, m-1;\ x_m = b,$$

$$y_0 = c,\ y_l = (\tau_l + \tau_{l+1})/2,\ l = 1, 2, \ldots, n-1;\ y_n = d.$$

В самом деле, из правой части равенства

$$\mathscr{E}_{mn}(H^{(1,1)}(Q); q\rho) \geq$$

$$\geq \inf_{(T,\mathcal{T})} \left\{ \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{c}^{d} \rho(\tau)d\tau \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} q(t)(|t-t_k|)dt + \right.$$

$$\left. + \sum_{l=1}^{n} \int\limits_{a}^{b} q(t)dt \int\limits_{y_{l-1}}^{y_l} \rho(\tau)(|\tau - \tau_l|)d\tau \right\} =$$

$$= \inf_{(T,\mathcal{T})} \left\{ \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{c}^{d} \rho(\tau) \left(\int\limits_{x_{k-1}}^{t_k} q(t)(t_k - t)dt + \int\limits_{t_k}^{x_k} q(t)(t-t_k)dt \right) d\tau + \right.$$

$$+\sum_{l=1}^{n}\int_a^b q(t)\left(\int_{y_{l-1}}^{\tau_l}\rho(\tau)(\tau_l-\tau)d\tau+\int_{\tau_l}^{y_l}\rho(\tau)(\tau-\tau_i)d\tau\right)dt\Bigg\}=$$

$$=\inf_{(T,\mathcal{T})}\mathscr{F}(t_1,t_2,...,t_m;\ \tau_1,\tau_2,..,\tau_n)$$

получаем

$$\mathscr{F}(t_1,t_2,...,t_m;\ \tau_1,\tau_2,..,\tau_n)=$$

$$=\rho_1(d)\cdot\sum_{k=1}^{m}\left\{\int_{x_{k-1}}^{t_k}q(t)(t_k-t)dt+\int_{t_k}^{x_k}q(t)(t-t_k)dt\right\}+$$

$$+q_1(b)\cdot\sum_{l=1}^{n}\left\{\int_{y_{l-1}}^{\tau_l}\rho(\tau)(\tau_l-\tau)d\tau+\int_{\tau_l}^{y_l}\rho(\tau)(\tau-\tau_l)d\tau\right\},$$

откуда интегрированием по частям имеем:

$$\mathscr{F}(t_1,t_2,...,t_m;\ \tau_1,\tau_2,..,\tau_n)=$$

$$=\rho_1(d)\sum_{k=1}^{m}\left\{\int_{x_{k-1}}^{t_k}q_1(t)dt-(t_k-x_{k-1})\int_a^{x_{k-1}}q(u)du+(x_k-t_k)\int_a^{x_k}q(u)du-\int_{t_k}^{x_k}q_1(t)dt\right\}+$$

$$+q_1(b)\sum_{l=1}^{n}\left\{\int_{y_{l-1}}^{\tau_l}\rho_1(\tau)d\tau-(\tau_l-y_{l-1})\int_c^{y_{l-1}}\rho(u)du+(y_l-\tau_l)\int_c^{y_k}\rho(u)du-\int_{\tau_l}^{y_l}\rho_1(\tau)d\tau\right\}=$$

$$=\rho_1(d)\sum_{k=1}^{m}\left\{\int_a^{t_k}q_1(t)dt-\int_a^{x_{k-1}}q_1(t)dt-(t_k-x_{k-1})q_1(x_{k-1})+(x_k-t_k)q_1(x_k)-\right.$$

$$\left.-\int_a^{x_k}q_1(t)dt+\int_a^{t_k}q_1(t)dt\right\}+q_1(b)\sum_{l=1}^{n}\left\{\int_c^{\tau_l}\rho_1(\tau)d\tau-\int_c^{y_{l-1}}\rho_1(\tau)d\tau-\right.$$

$$-(\tau_l-y_{l-1})\rho_1(y_{l-1})+(y_l-\tau_l)\rho_1(y_l)-\int\limits_c^{y_l}\rho_1(\tau)d\tau+\int\limits_c^{\tau_l}\rho_1(\tau)d\tau\Bigg\}=$$

$$=\rho_1(d)\sum_{k=1}^{m}\Bigg\{q_2(t_k)-q_2(x_{k-1})-(t_k-x_{k-1})q_1(x_{k-1})+(x_k-t_k)q_1(x_k)-q_2(x_k)+q_2(t_k)\Bigg\}+$$

$$+q_1(b)\sum_{l=1}^{n}\Bigg\{\rho_2(\tau_l)-\rho_2(y_{l-1})-(\tau_l-y_{l-1})\rho_1(y_{l-1})+(y_l-\tau_l)\rho_1(y_l)-\rho_2(y_l)+\rho_2(\tau_l)\Bigg\}=$$

$$=\rho_1(d)\Bigg\{2\sum_{k=1}^{m}q_2(t_k)-2\sum_{k=1}^{m-1}q_2(x_k)-q_2(b)+\sum_{k=1}^{m-1}(x_k-t_k)q_1(x_k)+$$

$$+(b-t_n)q_1(b)-\sum_{k=2}^{m}(t_k-x_{k-1})q_1(x_{k-1})\Bigg\}+q_1(b)\Bigg\{2\sum_{l=1}^{n}\rho_2(\tau_l)-2\sum_{l=1}^{n-1}\rho_2(y_l)-$$

$$-\rho_2(d)+\sum_{l=1}^{n-1}(y_l-\tau_l)\rho_1(y_l)+(d-\tau_n)\rho_1(d)-\sum_{l=2}^{n}(\tau_l-y_{l-1})\rho_1(y_{l-1})\Bigg\}=$$

$$=\rho_1(d)\Bigg\{2\sum_{k=1}^{m}q_2(t_k)-2\sum_{k=1}^{m-1}q_2(x_k)+(b-t_m)q_1(b)-q_2(b)-\sum_{k=1}^{m-1}(t_{k+1}+t_k-2x_k)q_1(x_k)\Bigg\}+$$

$$+q_1(b)\Bigg\{2\sum_{l=1}^{n}q_2(\tau_l)-2\sum_{l=1}^{n-1}\rho_2(y_l)+(d-\tau_n)\rho_1(d)-\rho_2(d)-\sum_{l=1}^{n-1}(\tau_{l+1}+\tau_l-2y_l)\rho_1(y_l)\Bigg\}.$$

Поскольку в силу того, что

$$x_k=(t_k+t_{k+1})/2,\ k=1,2\dots,m-1,$$

$$y_l=(\tau_l+\tau_{l+1})/2,\ l=1,2\dots,n-1,$$

то суммы

$$\sum_{k=1}^{m-1}(t_{k+1}+t_k-2x_k)q_1(x_k)\equiv 0,$$

$$\sum_{l=1}^{n-1}(\tau_{l+1}+\tau_l-2y_l)\rho_1(y_l)\equiv 0.$$

Далее положим

$$\mathscr{F}(t_1,t_2,...,t_m;\ \tau_1,\tau_2,..,\tau_n)=$$
$$=\rho_1(d)\left\{2\sum_{k=1}^{m}q_2(t_k)-2\sum_{k=1}^{m-1}q_2\left(\frac{t_{k+1}+t_k}{2}\right)+(b-t_m)q_1(b)-q_2(b)\right\}+$$

$$+q_1(b)\left\{2\sum_{l=1}^{n}q_2(\tau_l)-2\sum_{l=1}^{n-1}\rho_2(\left(\frac{\tau_{l+1}+\tau_l}{2}\right))+(d-\tau_n)\rho_1(d)-\rho_2(d)\right\}$$

Приравняв нулю частные производные $\partial\mathscr{F}/\partial t_k=0,\ k=1,2,...,m,$ $\partial\mathscr{F}/\partial\tau_l=0,\ l=1,2,...,n,$ придем к следующей системе уравнений

$$\begin{cases} 2q_1(t_1)-q_1\left(\dfrac{t_1+t_2}{2}\right)=0, \\ 2q_1(t_k)-q_1\left(\dfrac{t_{k-1}+t_k}{2}\right)-q_1\left(\dfrac{t_k+t_{k+1}}{2}\right)=0, \quad k=2,\dots,m-1, \\ 2q_1(t_m)-q_1\left(\dfrac{t_{m-1}+t_m}{2}\right)-q_1(b)=0, \\ 2\rho_1(\tau_1)-\rho_1\left(\dfrac{\tau_1+t_2}{2}\right)=0, \\ 2\rho_1(\tau_l)-\rho_1\left(\dfrac{\tau_{l-1}+\tau_l}{2}\right)-\rho_1\left(\dfrac{\tau_l+\tau_{l+1}}{2}\right)=0, \quad l=2,\dots,n-1, \\ 2\rho_1(\tau_n)-\rho_1\left(\dfrac{\tau_{n-1}+t_n}{2}\right)-\rho_1(d)=0. \end{cases} \tag{2.2.11}$$

При этом, если решение $T^*=\{t_k^*\},\mathcal{T}^*=\{\tau_l^*\}$ системы (2.2.11) существует и единственно, то оно определяет как раз точку минимума функции

$$\mathscr{F}(t_1,t_2,\dots,t_m;\ \tau_1,\tau_2,\dots,\tau_n).$$

В этом случае с учётом включения $H^{(1,1)}_{T\mathcal{T}}(Q)\subset H^{(1,1)}(Q)$ получаем

$$\mathscr{E}_{mn}(H^{(1,1)}(Q),q\rho)\geq\inf_{(P,T,\mathcal{T})}R_{mn}(H^{(1,1)}_{T\mathcal{T}}(Q),q\rho;P,T,\mathcal{T})=$$

$$= \min_{t_k\tau_l} \mathscr{F}(t_1, t_2, \ldots, t_m;\ \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n) = \mathscr{F}(t_1^*, t_2^*, \ldots, t_m^*;\ \tau_1^*, \tau_2^*, \ldots, \tau_n^*) =$$

$$= \rho_1(d)\left\{2\sum_{k=1}^{m} q_2(t_k^*) - 2\sum_{k=1}^{m-1} q_2\left(\frac{t_{k+1}^* + t_k^*}{2}\right) + (b - t_m^*)q_1(b) - q_2(b)\right\} +$$

$$+q_1(b)\left\{2\sum_{l=1}^{n} q_2(\tau_l^*) - 2\sum_{l=1}^{n-1} \rho_2(\left(\frac{\tau_{l+1}^* + \tau_l^*}{2}\right)) + (d - \tau_n^*)\rho_1(d) - \rho_2(d)\right\} \quad (2.2.12)$$

Теперь получим оценку сверху. Полагаем

$$p_{kl}^* = \iint\limits_{(Q_{kl}^*)} q(t)\rho(\tau) dt d\tau, \quad (2.2.13)$$

где

$$Q_{kl}^* = \{x_{k-1}^* \le t \le x_k^*,\ y_{l-1}^* \le \tau \le y_l^*\},$$

$$x_0^* = a, x_k^* = (t_k^* + t_{k+1}^*)/2,\ k = 1, 2, ..., m-1;\ x_m^* = b,$$

$$y_0^* = c, y_l^* = (\tau_l^* + \tau_{l-1}^*)/2,\ l = 1, 2, ..., n-1;\ y_n^* = d.$$

Воспользовавшись вектором коэффициентов (2.2.13), для произвольной функции $f \in H^{(1,1)}(Q)$ имеем:

$$\left|R_{mn}(f, q\rho; P^*, T^*\mathcal{T}^*)\right| = \left|\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} \iint\limits_{Q_{kl}^*} \left[f(t,\tau) - f(t_k^*, \tau_l^*)\right] q(t)\rho(\tau) dt d\tau\right| \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} \iint\limits_{Q_{kl}^*} \left\{\left|t - t_k^*\right| + \left|\tau - \tau_l^*\right|\right\} q(t)\rho(\tau) dt d\tau = \iint\limits_{(Q)} q(t)\rho(\tau) f_{T^*,\mathcal{T}^*}(t,\tau) dt d\tau =$$

$$= \rho_1(d)\left\{2\sum_{k=1}^{m} q_2(t_k^*) - 2\sum_{k=1}^{m-1} q_2\left(\frac{t_{k+1}^* + t_k^*}{2}\right) + (b - t_m^*)q_1(b) - q_2(b)\right\} +$$

$$+q_1(b)\left\{2\sum_{l=1}^{n} q_2(\tau_l^*) - 2\sum_{l=1}^{n-1} \rho_2(\left(\frac{\tau_{l+1}^* + \tau_l^*}{2}\right)) + (d - \tau_n^*)\rho_1(d) - \rho_2(d)\right\} =$$

$$= \mathscr{F}(t_1^*, t_2^*, \ldots, t_m^*;\ \tau_1^*, \tau_2^*, \ldots, \tau_n^*),$$

откуда сразу следует верхняя оценка

$$\mathscr{E}_{mn}(H^{(1,1)}(Q);q\rho) \le \mathscr{F}(t_1^*,t_2^*,\ldots,t_m^*;\ \tau_1^*,\tau_2^*,\ldots,\tau_n^*). \tag{2.2.14}$$

Очевидно, что если решение системы (2.2.11) определяется единственным образом, то правые части неравенства (2.2.12) и (2.2.14) совпадают и тогда получаем

$$\mathscr{E}_{mn}(H^{(1,1)}(Q);q\rho) = \inf_{(P;T,\mathcal{T})} R_{nm}(H^{(1,1)}(Q),q\rho;P,T,\mathcal{T}) =$$

$$= \mathscr{F}(t_1^*,t_2^*,\ldots,t_m^*;\ \tau_1^*,\tau_2^*,\ldots,\tau_n^*) =$$

$$= \rho_1(d)\left\{2\sum_{k=1}^{m} q_2(t_k^*) - 2\sum_{k=1}^{m-1} q_2\left(\frac{t_{k+1}^*+t_k^*}{2}\right) + (b-t_m^*)q_1(b) - q_2(b)\right\} +$$

$$+ q_1(b)\left\{2\sum_{l=1}^{n} q_2(\tau_l^*) - 2\sum_{l=1}^{n-1} \rho_2\left(\frac{\tau_{l+1}^*+\tau_l^*}{2}\right) + (d-\tau_n^*)\rho_1(d) - \rho_2(d)\right\},$$

при этом вектор $P^* = \{p_{kl}^*\}$ оптимальных коэффициентов определяется формулами (2.2.13), а вектор $T^* = \{t_k^*\}, \mathcal{T}^* = \{\tau_l^*\}$ оптимальных узлов определяется единственным решением системы (2.2.11), чем и завершаем доказательство теоремы 2.2.2.

В качестве приложения теоремы 2.2.2 приводим обобщение теоремы 1.2.2 первой главы на случай функций двух переменных

Пусть $q(t,\tau) = e^{-(t+\tau)},\ Q_1 := [0,+\infty)\times[0,+\infty)$. В этом случае решение системы (2.2.11) имеет вид

$$\begin{cases} e^{-t_1} = m/(m+1), \quad e^{-t_m} = \left[(m+1)\right]^{-1}, \\ e^{-\frac{t_k}{2}} = e^{-\frac{t_1}{2}} - (e^{-\frac{t_1}{2}} - e^{-\frac{t_n}{2}})\dfrac{k-1}{n-1}, (k=2,3,\ldots,m-1), \\ e^{-\tau_1} = n/(n+1), \quad e^{-\tau_n} = \left[n(n+1)\right]^{-1}, \\ e^{-\frac{\tau_l}{2}} = e^{-\frac{\tau_1}{2}} - (e^{-\frac{\tau_1}{2}} - e^{-\frac{\tau_n}{2}})\dfrac{l-1}{n-1}, (l=2,3,\ldots,n-1). \end{cases} \tag{2.2.15}$$

Решая систему (2.2.15), с учётом результатов параграфа 1.2 первой главы, запишем явный вид оптимального вектора узлов и коэффициентов

$$(T^*, \mathcal{T}^*) = \left\{ (t_k^*, \tau_l^*) : t_k^* = \frac{m(m+1)}{(m-k+1)^2} \ \tau_l^* = \frac{n(n+1)}{(n-l+1)^2} \right\} \tag{2.2.16}$$

$$P^* = \left\{ p_{kl}^* : p_{kl}^* = 4\frac{m+1-k}{m(m+1)} \cdot \frac{n+1-l}{n(n+1)} \ k = \overline{1,m}; \ l = \overline{1,n} \right\}. \tag{2.2.17}$$

Итак, нами доказана следующая

Теорема 2.2.4. *Среди всех кубатурных формул вида (2.2.7) с весовой функцией $q(t,\tau) = e^{-(t+\tau)}$ наилучшей на классе $H^{(1,1)}(Q_1)$ является формула, у которой узлы и коэффициенты определены формулами (2.2.16) и (2.2.17), причём точная оценка погрешности наилучшей формулы на всем классе $H^{(1,1)}(Q_1)$ равна*

$$\mathscr{E}_{mn}(H^{(1,1)}(Q_1), e^{-(t+\tau)}) = \ln\left((1+\frac{1}{m})(1+\frac{1}{n}) \right).$$

§2.3. Об оптимальных кубатурных формулах для классов $H_2^{\omega_1,\omega_2}(Q)$ и $H_{2,\rho_q}^{\omega}(Q)(1 \le q \le \infty)$

В этом параграфе решаем экстремальную задачу отыскания наилучших кубатурных формул вида (2.1.1) в случае $q(x,y) \equiv 1$, для введенных в начале главы классов функций, задаваемых модулями непрерывности.

Сформулируем основной результат этого параграфа

Теорема 2.3.1. *Среди кубатурных формул вида*

$$\iint\limits_{(Q)} f(x,y)dxdy = \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} p_{ki} f(x_k, y_i) + R_{mn}(f) \tag{2.3.1}$$

наилучшей для классов функций $H_1^{\omega_1,\omega_2}(Q)$, $H_2^{\omega_1,\omega_2}(Q)$ *и* $H_{1,\rho_q}^{\omega}(Q)$, $H_{2,\rho_q}^{\omega}(Q)$ $(1 \le q \le \infty)$ *является формула*

$$\iint\limits_{(Q)} f(x,y)dxdy = 4h\eta \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} f\Big(a+(2k-1)h, c+(2i-1)\eta\Big) + R_{mn}(f), \tag{2.3.2}$$

где $h = (b-a)/(2m)$, $\eta = (d-c)/(2n)$. *Для погрешности наилучшей кубатурной формулы (2.3.2) на перечисленных классах функций справедливы точные оценки*

$$\mathscr{E}_{mn}(H_2^{\omega_1,\omega_2}(Q)) = \mathscr{E}_{mn}(H_1^{\omega_1,\omega_2}(Q)) =$$

$$= 2m(d-c)\int\limits_0^h \omega_1(t)dt + 2n(b-a)\int\limits_0^\eta \omega_2(\tau)d\tau, \tag{2.3.3}$$

$$\mathscr{E}_{mn}(H_{2,\rho_q}^{\omega}(Q)) = \mathscr{E}_{mn}(H_{1,\rho_q}^{\omega}(Q)) =$$

$$= 4mn\int\limits_0^h\int\limits_0^\eta \omega\Big(\sqrt[q]{t^q+\tau^q}\Big)dtd\tau. \tag{2.3.4}$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что равенства (2.3.3) и (2.3.4) для классов $H_1^{\omega_1,\omega_2}(Q)$ и $H_{1,\rho_q}^{\omega}(Q)$ в частном случае $q = 2$ для евклидова расстояния $\rho_2(M', M'')$ ранее были доказаны Н.П.Карнейчуком (см. [26, с.177-185]). Для классов $H_2^{\omega_1,\omega_2}(Q)$,$H_{1,\rho_q}^{\omega}(Q)$ и $H_{2,\rho_q}^{\omega}(Q)$ при всех q $(1 \le q \le \infty)$

равенства (2.3.3) и (2.3.4) доказываются по схеме рассуждений, приведенной в работе [26]. Ради полноты, приведём доказательство (2.3.4) сначала в случае $q = 1$ для класса $H^{\omega}_{1,\rho_1}(Q)$, а затем в общем случае для класса $H^{\omega}_{1,\rho_q}(Q)$ $(1 \le q \le \infty)$. В самом деле, следуя рассуждению работы [26], каждому вектору (X, Y), определяющему решётку узлов $M_{ki} = M(x_k, y_i)$, поставим в соответствие множество $H^{\omega}_{1,\rho_1,X,Y}(Q)$ функций $f(x, y) \in H^{\omega}_{1,\rho_1,X,Y}(Q))$ таких, что $f(M_{ki}) = 0$ $(k = 1, 2, ..., m;\ i = 1, 2, ..., n)$. Пусть заданно произвольный вектор узлов (X, Y). Если $f(x, y) \in H^{\omega}_{1,\rho_1,X,Y}(Q)$, то для любой точки $M(x, y) \in Q$ и любого узла M_{ki} будем иметь

$$|f(M)| = |f(M) - f(M_{ki}| \le \omega(\rho_1(M, M_{ki})) = \omega(|x - x_k| + |y - y_i|)$$

и, следовательно, в силу решётчатого расположения узлов M_{ki}, а также монотонности модуля непрерывности $\omega(\delta)$ имеет место неравенство

$$|f(M)| \le \min_{k,i} \omega(|x - x_k| + |y - y_i|) \le$$
$$\le \omega(\min_k |x - x_k| + \min_i |y - y_i|) \equiv \Psi_{X,Y}(M). \tag{2.3.5}$$

Докажем, что функция $\Psi_{X,Y}(M) \in H^{\omega}_{1,\rho_1}(Q)$. В самом деле, для произвольных точек $M' = M(x', y'), M'' = M(x'', y'')$, пользуясь свойствами модуля непрерывности, имеем

$$|\Psi_{X,Y}(M'') - \Psi_{X,Y}(M')| = \left|\omega\left(\min_k |x'' - x_k| + \min_i |y'' - y_i|\right) - \right.$$
$$\left. -\omega\left(\min_k |x' - x_k| + \min_i |y' - y_i|\right)\right| \le$$
$$\le \omega\left(\left|\min_k |x'' - x_k| - \min_k |x' - x_k|\right| + \left|\min_i |y'' - y_i| - \min_i |y' - y_i|\right|\right) \le$$
$$\le \omega\left(\min_k |x'' - x'| + \min_i |y'' - y'|\right).$$

Поскольку, кроме того, $\Psi_{X,Y}(M_{ki}) = 0$, то $\Psi_{X,Y} \in H^{\omega}_{1,\rho_1,X,Y}(Q)$. Это с учётом неравенства (2.3.5) приводит к соотношению

$$R_{mn}(H^{\omega}_{1,\rho_1,X,Y}(Q); X, Y) = \sup\left\{\left|\iint_{(Q)} f(x, y)dxdy\right| : f \in H^{\omega}_{1,\rho_1,X,Y}(Q)\right\} =$$

$$= \iint\limits_{(Q)} \Psi_{X,Y}(X,Y)dxdy = R_{mn}(\Psi_{X,Y}). \tag{2.3.6}$$

Применяя лемму Д.7 (см., [26, с.178]) к правой части равенства (2.3.6), сразу получаем неравенство

$$R_{mn}(\Psi_{X,Y}) \geq R_{mn}(\Psi_{X^*,Y^*}),$$

где вектор X^*, Y^* – вектор, задаваемый равенствами

$$\begin{gathered} x_k^* = a + (2k-1)h, \ k = 1,2,...,m, \ h = (b-a)/(2m), \\ y_i^* = c + (2i-1)\eta, \ i = 1,2,...,n, \ \eta = (d-c)/(2n). \end{gathered} \tag{2.3.7}$$

Таким образом, учитывая равенство (2.3.6), получаем

$$\begin{gathered} \mathscr{E}_{mn}(H^{\omega}_{1,\rho_1}(Q)) \geq \inf\{R_{mn}(H^{\omega}_{1,\rho_1,X,Y}(Q); X,Y)\} = \\ = R_{mn}(\Psi_{X^*,Y^*}) = \iint\limits_{(Q)} \Psi_{X^*,Y^*}(X,Y)dxdy. \end{gathered} \tag{2.3.8}$$

Рассмотрим кубатурную формулу (2.3.1), заданную вектором $(P^*; X^*, Y^*)$ узлов (2.3.7) и коэффициентов $p^*_{ki} = 4h\eta$ ($k = 1,2,...,m$; $i = 1,2,...,n$). Очевидно, что p_{ki} есть площадь прямоугольника

$$d^*_{ki} = \Big\{a + 2(k-1)h < x < a + 2kh, \quad c + 2(i-1)\eta < y < c + 2i\eta\Big\}$$

с центром в узле $M(x_k^*, y_i^*)$, а потому для любого $f \in H^{\omega}_{1,\rho_1}(Q)$ имеем

$$\begin{gathered} |R_{mn}(f; X^*, Y^*; P^*)| = \\ = \left| \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \iint\limits_{d^*_{ki}} [f(x,y) - f(x_k^*, y_i^*)]dxdy \right| \leq \\ \leq \left| \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \iint\limits_{d^*_{ki}} \omega(|x - x_k^*| + |y - y_i^*|)dxdy \right| = \\ = \iint\limits_{(Q)} \Psi_{X^*,Y^*}(x,y)dxdy = R_{mn}(\Psi_{X^*,Y^*}). \end{gathered}$$

Поскольку последнее неравенство справедливо для любой функции $f \in H^{\omega}_{1,\rho_1}(Q)$, то имеем

$$\mathscr{E}_{mn}(H^{\omega}_{1,\rho_1}(Q)) \le R_{mn}(\Psi_{X^*,Y^*}). \tag{2.3.9}$$

Сравнение оценки снизу (2.3.8) и сверху (2.3.9) приводит к равенству

$$\mathscr{E}_{mn}(H^{\omega}_{1,\rho_1}(Q)) = R_{mn}(\Psi_{X^*,Y^*}) = \iint\limits_{(Q)} \Psi_{X^*,Y^*}(x,y)dxdy =$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} \iint\limits_{d^*_{ki}} \omega\Big(|x-x^*_k| + |y-y^*_i|\Big)dxdy =$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{a+2(k-1)h}^{a+2kh} \int\limits_{c+2(i-1)\eta}^{c+2i\eta} \omega\Big(|x-x^*_k| + |y-y^*_i|\Big)dxdy =$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} \left\{ \int\limits_{a+2(k-1)h}^{x^*_k} \int\limits_{c+2(i-1)\eta}^{c+2i\eta} \omega\Big((x^*_k - x) + |y-y^*_i|\Big)dxdy + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{x^*_k}^{a+2kh} \int\limits_{c+2(i-1)\eta}^{c+2i\eta} \omega\Big((x^*_k - x) + |y-y^*_i|\Big)dxdy \right\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} \left\{ \int\limits_{c+2(i-1)\eta}^{c+2i\eta} \int\limits_{0}^{h} \omega\Big(t + |y-y^*_i|\Big)dtdy + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{c+2(i-1)\eta}^{c+2i\eta} \int\limits_{0}^{h} \omega\Big(t + |y-y^*_i|\Big)dtdy \right\} =$$

$$= 2m \sum_{i=1}^{n} \left\{ \int\limits_{c+2(i-1)\eta}^{c+2i\eta} \int\limits_{0}^{h} \omega\Big(t + |y-y^*_i|\Big)dtdy \right\} =$$

$$= 2m \sum_{i=1}^{n} \left\{ \int\limits_{0}^{h} \int\limits_{c+2(i-1)\eta}^{y^*_i} \omega\Big(t + (y^*_i - y)\Big)\Big)dtdy + \right.$$

$$+\int\limits_0^h \int\limits_{y_i^*}^{c+2i\eta} \omega\Big(t+(y-y_i^*))\Big)dtdy\Bigg\} =$$

$$= 2m\sum_{i=1}^n \left\{ \int\limits_0^h \int\limits_0^\eta \omega(t+\tau)dtd\tau + \int\limits_0^h \int\limits_0^\eta \omega(t+\tau)dtd\tau \right\} =$$

$$= 4mn \int\limits_0^h \int\limits_0^\eta \omega(t+\tau)dtd\tau. \qquad (2.3.10)$$

Применяя стандартные методы математического анализа для вычисления двойного интеграла в правой части (2.3.10), приходим к следующему равенству

$$\mathscr{E}_{mn}(H^\omega_{1,\rho_1}) = 4mn \int\limits_0^h \int\limits_0^\eta \omega(t+\tau)dtd\tau =$$

$$= 4mn \begin{cases} \int\limits_0^h t\omega(t)dt + h\int\limits_h^\eta \omega(t)dt + \int\limits_\eta^{\eta+h} (\eta+h-t)\omega(t)dt, & \eta > h; \\ \int\limits_0^\eta t\omega(t)dt + \eta\int\limits_\eta^h \omega(t)dt + \int\limits_h^{h+\eta} (\eta+h-t)\omega(t)dt, & \eta < h; \\ \int\limits_0^h t\omega(t)dt + \int\limits_h^{2h} (2h-t)\omega(t)dt, & h = \eta. \end{cases}$$

Этим мы доказали равенство (2.3.4) в случае $q = 1$. Поступая аналогичным образом для случая $q = \infty$, получаем

$$\mathscr{E}_{mn}(H^\omega_{1,\rho_\infty}(Q)) = 4mn \int\limits_0^h \int\limits_0^\eta \max\Big\{\omega(t), \omega(\tau)\Big\} dtd\tau. \qquad (2.3.11)$$

Очевидно, что если, например, $h > \eta$, то из (2.3.11) сразу получаем

$$\mathscr{E}_{mn}(H^\omega_{1,\rho_\infty}(Q)) = 4mn\eta \int\limits_0^h \omega(t)dt = 2m(d-c)\int\limits_0^h \omega(t)dt.$$

Если же $h < \eta$, то из (2.3.11) имеем

$$\mathscr{E}_{mn}(H^{\omega}_{1,\rho_\infty}(Q)) = 2n(b-a)\int\limits_0^{\eta}\omega(\tau)d\tau.$$

Рассмотрим теперь случай $1 < q < \infty$. В самом деле, пусть $H^{\omega}_{1,\rho_q,X,Y}(Q)$ - множество функций $f(x,y) \in H^{\omega}_{1,\rho_q,X,Y}(Q)$, обращающихся в нуль в узлах $M_{ki} = M(x_k, y_i)$ решётки узлов, задаваемой векторами узлов X, Y.

Если $f(x,y) \in H^{\omega}_{1,\rho_q,X,Y}(Q)$, то мы имеем

$$|f(M)| = |f(M) - f(M_{ki}| \le \omega(\rho_q(M, M_{ki})) =$$

$$= \omega\left(\sqrt[q]{|x-x_k|^q + |y-y_i|^q}\right)\ (1 \le q \le \infty).$$

Откуда запишем

$$|f(M)| \le \min_{x_k,y_i}\omega(\rho_q(M,M_{ki})) = \min_{x_k,y_i}\omega\left(\sqrt[q]{|x-x_k|^q + |y-y_i|^q}\right) =$$

$$= \omega\left(\sqrt[q]{\min_k|x-x_k|^q + \min_i|y-y_i|^q}\right) = F_{X,Y}(M) = F_{X,Y}(x,y).$$

В силу леммы Д.6 (см., [26, с.177]) функция $F_{X,Y}(x,y) \in H^{\omega}_{1,\rho_q,X,Y}(Q)$ и

$$F_{X,Y}(x,y) = \min_{x_k,y_i}\omega\left(\sqrt[q]{|x-x_k|^q + |y-y_i|^q}\right) =$$

$$= \omega\left(\sqrt[q]{\min_k|x-x_k|^q + \min_i|y-y_i|^q}\right).$$

Таким образом,

$$R_{mn}(H^{\omega}_{1,\rho_q,X,Y}(Q); X, Y) = \iint\limits_{(Q)} F_{X,Y}(x,y)dxdy = R_{mn}(F_{X,Y}).$$

Если фиксировать произвольный вектор (X,Y), то при любом $y \in [c,d]$ функция

$$g(X,x) = F_{X,Y}(x,y) = \min_k\omega\left(\sqrt[q]{|x-x_k|^q + \gamma}\right),$$

где $\gamma = \min\limits_i |y-y_i|^q$, удовлетворяет условиям леммы Д.7 (см., [26, с.178]), применение которой приводит к неравенству

$$R_{mn}(F_{X,Y}) = \int\limits_a^b \int\limits_c^d F_{X,Y}(x,y)dxdy \geq \int\limits_a^b \int\limits_c^d F_{X^*,Y}(x,y)dxdy = R_{mn}(F_{X^*,Y}(x,y)).$$

Аналогично, применяя при каждом фиксированном $x \in [a,b]$ леммы Д.7 (см., [26, с.178]) к функции $g(Y,y) = F_{X^*,Y}(x,y)$, находим, что

$$R_{mn}(F_{X^*,Y}) = \int\limits_a^b \int\limits_c^d F_{X^*,Y}(x,y)dxdy \geq \int\limits_a^b \int\limits_c^d F_{X^*,Y^*}(x,y)dxdy = R_{mn}(F_{X^*,Y^*}).$$

Следовательно,

$$\mathscr{E}_{mn}(H^{\omega}_{1,\rho_q}(Q)) \geq \inf_{X,Y} R(F_{X,Y}) = R(F_{X^*,Y^*}).$$

С другой стороны, так же как и для класса $H_1^{\omega_1,\omega_2}(Q)$, легко проверить, что для любой функции $f \in H^{\omega}_{1,\rho_q}(Q)$

$$|R_{mn}(f; X^*, Y^*; P^*)| =$$
$$= \left| \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \iint\limits_{d^*_{ki}} [f(x,y) - f(x^*_k, y^*_i)]dxdy \right| \leq$$
$$\leq \left| \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \iint\limits_{d^*_{ki}} \omega\left(\sqrt[q]{|x-x^*_k|^q + |y-y^*_i|^q}\right) dxdy \right| =$$
$$= \iint\limits_{(Q)} F_{X^*,Y^*}(x,y)dxdy = R_{mn}(F_{X^*,Y^*}).$$

Из этих оценок следуют соотношения

$$\mathscr{E}_{mn}(H^{\omega}_{1,\rho_q}(Q)) = R_{mn}(F_{X^*,Y^*}) = \iint\limits_{(Q)} F_{X^*,Y^*}(x,y)dxdy =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \iint\limits_{d^*_{ki}} \omega\left(\sqrt[q]{|x-x^*_k|^q + |y-y^*_i|^q}\right) dxdy =$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{a+2(k-1)h}^{a+2kh} \int\limits_{c+2(i-1)\eta}^{c+2i\eta} \omega\left(\sqrt[q]{|x-x_k^*|^q+|y-y_i^*|^q}\right)dxdy =$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} \left\{ \int\limits_{a+2(k-1)h}^{x_k^*} \int\limits_{c+2(i-1)\eta}^{c+2i\eta} \omega\Big(\sqrt[q]{(x_k^*-x)^q+|y-y_i^*|^q}\Big)dxdy+\right.$$

$$\left.+ \int\limits_{x_k^*}^{a+2kh} \int\limits_{c+2(i-1)\eta}^{c+2i\eta} \omega\Big(\sqrt[q]{(x-x_k^*)^q+|y-y_i^*|^q}\Big)dxdy \right\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} \left\{ \int\limits_{c+2(i-1)\eta}^{c+2i\eta} \int\limits_{0}^{h} \omega\Big(\sqrt[q]{t^q+|y-y_i^*|^q}\Big)dtdy+\right.$$

$$\left.+ \int\limits_{c+2(i-1)\eta}^{c+2i\eta} \int\limits_{0}^{h} \omega\Big(\sqrt[q]{t^q+|y-y_i^*|^q}\Big)dtdy \right\} =$$

$$= 2m\sum_{i=1}^{n} \left\{ \int\limits_{c+2(i-1)\eta}^{c+2i\eta} \int\limits_{0}^{h} \omega\Big(\sqrt[q]{t^q+|y-y_i^*|^q}\Big)dtdy \right\} =$$

$$= 2m\sum_{i=1}^{n} \left\{ \int\limits_{0}^{h} \int\limits_{c+2(i-1)\eta}^{y_i^*} \omega\Big(\sqrt[q]{t^q+(y_i^*-y)^q}\Big)dtdy+\right.$$

$$\left.+ \int\limits_{0}^{h} \int\limits_{y_i^*}^{c+2i\eta} \omega\Big(\sqrt[q]{t^q+(y-y_i^*)^q}\Big)dtdy \right\} =$$

$$= 2m\sum_{i=1}^{n} \left\{ \int\limits_{0}^{h}\int\limits_{0}^{\eta} \omega(\sqrt[q]{t^q+\tau^q})dtd\tau + \int\limits_{0}^{h}\int\limits_{0}^{\eta} \omega(\sqrt[q]{t^q+\tau^q})dtd\tau \right\} =$$

$$= 4mn \int\limits_{0}^{h}\int\limits_{0}^{\eta} \omega(\sqrt[q]{t^q+\tau^q})dtd\tau. \tag{2.3.12}$$

Таким образом, равенства (2.3.4) для класса $H^{\omega}_{1,\rho_q}(Q)$ при $1 < q < \infty$ также доказано.

Теперь докажем (2.3.4) для класса $H^{\omega}_{2,\rho_q}(Q)$. Легко проверить, что равенство (2.3.12) справедливо и на классе функций $H^{\omega}_{2,\rho_q}(Q)$. В самом деле, представим погрешность формулы (2.3.1) с заданным вектором $(P^*; X^*, Y^*)$ узлов и коэффициентов в виде

$$R_{mn}(f; X^*, Y^*; P^*) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_0^h\int\limits_0^q \Big[f(x_k^*+t, y_i^*+\tau) + f(x_k^*+t, y_i^*-\tau)+$$

$$+f(x_k^*-t, y_i^*+\tau) + f(x_k^*-t, y_i^*-\tau) - 4f(x_k^*, y_i^*)\Big]dtd\tau. \qquad (2.3.13)$$

Оценивая по абсолютной величине равенство (2.3.13), сразу получим

$$\mathscr{E}_{mn}(H^{\omega}_{2,\rho_q}(Q)) \le R_{mn}(H^{\omega}_{2,\rho_q}(Q); X^*, Y^*; P^*) \le$$

$$\le 4mn\int\limits_0^h\int\limits_0^\eta \omega\left(\sqrt[q]{t^q+\tau^q}\right)dtd\tau = \mathscr{E}_{mn}(H^{\omega}_{1,\rho_q}(Q)). \qquad (2.3.14)$$

С другой стороны, учитывая включение $H^{\omega}_{1,\rho_q}(Q) \subset H^{\omega}_{2,\rho_q}(Q)$, имеем:

$$\mathscr{E}_{mn}(H^{\omega}_{2,\rho_q}(Q)) \ge \mathscr{E}_{mn}(H^{\omega}_{1,\rho_q}(Q)) = 4mn\int\limits_0^h\int\limits_0^\eta \omega\left(\sqrt[q]{t^q+\tau^q}\right)dtd\tau. \qquad (2.3.15)$$

Сравнивая неравенства (2.3.14) и (2.3.15), приходим к равенству (2.3.4). Теорема 2.3.1 полностью доказана.

Определим промежуточный класс $H^{\omega_1,\omega_2}_{2-\alpha}(Q)$ $(0 \le \alpha \le 1)$ между определёнными выше классами функций $H^{\omega_1,\omega_2}_1(Q)$ и $H^{\omega_1,\omega_2}_2(Q)$ следующим образом: $H^{\omega_1,\omega_2}_{2-\alpha}(Q)$ состоит из всех функций $f(x,y)$, определенных в области Q, и для любых указанных выше точек M', M'' и M^* из области Q и любого $\alpha \in [0,1]$, удовлетворяющих условию

$$|(1+\alpha)f(M')+(1-\alpha)f(M'')-2f(M^*)| \le 2\left[\omega_1\left(\frac{|x'-x''|}{2}\right)+\omega_2\left(\frac{|y'-y''|}{2}\right)\right].$$

Аналогичным образом определим класс $H^{\omega}_{2-\alpha,\rho_q}(Q), 0 \le \alpha \le 1$ $(1 \le q \le \infty)$ – функций $f(x,y)$, определенных на Q и удовлетворяющих условию

$$|(1+\alpha)f(M')+(1-\alpha)f(M'')-2f(M^*)| \le$$

$$\leq (1+\alpha)\omega(\rho_q(M', M^*)) + (1-\alpha)\omega(\rho_q(M'', M^*)), \qquad (2.3.16)$$

где $\rho_q(M', M'') - l_q$-расстояние между точками $M'(x', y'), M''(x'', y'') \in Q$. Из неравенства (2.3.16) сразу следует, что в крайних точках $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$ класс $H^{\omega}_{2-\alpha,\rho_q}(Q)$ совпадает, соответственно, с классами $H^{\omega}_{2,\rho_q}(Q)$ и $H^{\omega}_{1,\rho_q}(Q)$. Докажем, что класс $H^{\omega}_{2-\alpha,\rho_q}(Q)$ является промежуточным для этих классов.

Лемма 2.3.1. *Если* $\omega_1(t)$, $\omega_2(\tau)$ *и* $\omega(\delta)$ *являются произвольными модулями непрерывности соответственно на отрезках* $0 \leq t \leq b-a$, $0 \leq \tau \leq d-c$ *и* $0 \leq \delta \leq d = \sqrt[q]{(b-a)^q + (d-c)^q}$ $(1 \leq q \leq \infty)$ *(d-диаметр области Q), то при любых* $\alpha \in [0,1]$ *имеют место следующие включения*

$$H_1^{\omega_1,\omega_2}(Q) \subset H_{2-\alpha}^{\omega_1,\omega_2}(Q) \subset H_2^{\omega_1,\omega_2}(Q), \qquad (2.3.17)$$

$$H^{\omega}_{1,\rho_q}(Q) \subset H^{\omega}_{2-\alpha,\rho_q}(Q) \subset H^{\omega}_{2,\rho_q}(Q) \ \ (1 \leq q \leq \infty). \qquad (2.3.18)$$

Доказательство. Не уменьшая общности, докажем включение (2.3.18), так как включение (2.3.17) доказывается аналогичным образом. Сначала докажем левую часть (2.3.18), то есть докажем, что для $0 \leq \alpha \leq 1$ имеет место включение $H^{\omega}_{1,\rho_q}(Q) \subset H^{\omega}_{2-\alpha,\rho_q}(Q)$. В самом деле, из (2.3.16) сразу следует, что если $f \in H^{\omega}_{1,\rho_q}(Q)$ $(1 \leq q \leq \infty)$, то

$$\Big|(1+\alpha)f(M') + (1-\alpha)f(M'') - 2f(M^*)\Big| =$$

$$= \Big|(1+\alpha)[f(M') - f(M^*)] + (1-\alpha)[f(M'') - f(M^*)]\Big| \leq$$

$$\leq (1+\alpha)\omega(\rho_1(M', M^*)) + (1-\alpha)\omega(\rho_1(M^*, M'')) =$$

$$= (1+\alpha)\omega\left(\sqrt[q]{\left|\frac{x'-x''}{2}\right|^q + \left|\frac{y'-y''}{2}\right|^q}\right) +$$

$$+(1-\alpha)\omega\left(\sqrt[q]{\left|\frac{x'-x''}{2}\right|^q + \left|\frac{y'-y''}{2}\right|^q}\right) =$$

$$= 2\omega\left(\sqrt[q]{\left|\frac{x'-x''}{2}\right|^q+\left|\frac{y'-y''}{2}\right|^q}\right),$$

а это означает, что $f \in H^{\omega}_{2-\alpha,\rho_q}(Q)$ при всех $\alpha \in [0,1]$, и таким образом левая часть включения (2.3.18) доказана. Теперь докажем, что $H^{\omega}_{2-\alpha,\rho_q}(Q) \subset H^{\omega}_{2,\rho_q}(Q)$. Очевидно, что если при любом $\alpha \in [0,1]$ функция $f \in H^{\omega}_{2-\alpha,\rho_q}(Q)$, то одновременно выполняются оба неравенства

$$\Big|(1+\alpha)f(M')+(1-\alpha)f(M'')-2f(M^*)\Big| \leq$$

$$\leq (1+\alpha)\omega(\rho_1(M',M^*))+(1-\alpha)\omega(\rho_1(M^*,M'')),$$

$$\Big|(1-\alpha)f(M')+(1+\alpha)f(M'')-2f(M^*)\Big| \leq$$

$$\leq (1-\alpha)\omega(\rho_q(M',M^*))+(1+\alpha)\omega(\rho_q(M^*,M'')).$$

Учитывая эти неравенства, для произвольной функции $f \in H^{\omega}_{2,\rho_q}(Q)$ будем иметь

$$\Big|f(M')+f(M'')-2f(M^*)\Big| =$$

$$= \Big|[(1+\alpha)f(M')+(1-\alpha)f(M'')-2f(M^*)]+$$

$$+[(1-\alpha)f(M')+(1+\alpha)f(M'')-2f(M^*)]\Big|/2 \leq$$

$$\leq \Big|(1+\alpha)f(M')+(1-\alpha)f(M'')-2f(M^*)\Big|/2+$$

$$+\Big|(1-\alpha)f(M')+(1+\alpha)f(M'')-2f(M^*)\Big|/2 \leq$$

$$\leq \Big\{(1+\alpha)\omega(\rho_q(M',M^*))+(1-\alpha)\omega(\rho_q(M^*,M''))+$$

$$+(1-\alpha)\omega(\rho_q(M',M^*))+(1+\alpha)\omega(\rho_q(M^*,M''))\Big\}/2=$$

$$=\omega(\rho_q(M',M^*))+\omega(\rho_q(M^*,M''))=$$

$$=2\omega\left(\sqrt[q]{\left|\frac{x'-x''}{2}\right|^q+\left|\frac{y'-y''}{2}\right|^q}\right),$$

то есть $f\in H^{\omega}_{2-\alpha,\rho_q}(Q)$, чем и завершаем доказательство леммы для класса $H^{\omega}_{2-\alpha,\rho_q}(Q)$. Из доказанной леммы вытекает следующее утверждение

Следствие 2.3.1. *В условиях леммы для погрешности кубатурной формулы (2.3.2) при произвольном векторе $(P;X,Y)$ и любой $\alpha\in[0,1]$ справедливы неравенства*

$$R_{mn}(H_1^{\omega_1,\omega_2}(Q);P;X,Y)\le R_{mn}(H_{2-\alpha}^{\omega_1,\omega_2}(Q);P;X,Y)\le R_{mn}(H_2^{\omega_1,\omega_2}(Q);P;X,Y),$$

$$R_{mn}(H^{\omega}_{1,\rho_q}(Q);P;X,Y)\le R_{mn}(H^{\omega}_{2-\alpha,\rho_q}(Q);P;X,Y)\le R_{mn}(H^{\omega}_{2,\rho_q}(Q);P;X,Y),$$

откуда, в свою очередь, сразу вытекают также неравенства

$$\begin{gathered}\mathscr{E}_{mn}(H_1^{\omega_1,\omega_2}(Q))\le\mathscr{E}_{mn}(H_{2-\alpha}^{\omega_1,\omega_2}(Q))\le\mathscr{E}_{mn}(H_2^{\omega_1,\omega_2}(Q)),\\ \mathscr{E}_{mn}(H^{\omega}_{1,\rho_q}(Q))\le\mathscr{E}_{mn}(H^{\omega}_{2-\alpha,\rho_q}(Q))\le\mathscr{E}_{mn}(H^{\omega}_{2,\rho_q}(Q)),\end{gathered}\tag{2.3.19}$$

где $\rho_q(M',M'')-l_q$ $(1\le q\le\infty)$-расстояние между точками $M'(x',y')$, $M''(x'',y'')\in Q$.

Воспользуясь результатом теоремы 2.3.1 и следствием 2.3.1, докажем следующее утверждение

Теорема 2.3.2. *Среди кубатурных формул общего вида (2.3.1) при любом $\alpha\in[0,1]$ оптимальной для классов функций $H_{2-\alpha}^{\omega_1,\omega_2}(Q)), H^{\omega}_{2-\alpha,\rho_q}(Q)$ является формула прямоугольников (2.3.2). Для точной оценки погрешности формулы (2.3.2) на этих классах функций справедливы равенства*

$$\mathscr{E}_{mn}(H_{2-\alpha}^{\omega_1,\omega_2}(Q))=2m(d-c)\int\limits_0^h\omega_1(t)dt+2n(b-a)\int\limits_0^\eta\omega_2(\tau)d\tau,\qquad(2.3.3)'$$

$$\mathscr{E}_{mn}(H^{\omega}_{2-\alpha,\rho_q}(Q)) = 4mn\int\limits_0^h\int\limits_0^\eta \omega\Big(\sqrt[q]{t^q+\tau^q}\Big)dtd\tau, \qquad (2.3.4)'$$

Доказательство. Не уменьшая общности, докажем равенство $(2.3.4)'$. Согласно второму неравенству (2.3.19) следствия 2.3.1 и равенству (2.3.4), сразу запишем оценку снизу при всех $\alpha\in[0,1]$ и $1\le q\le\infty$:

$$\mathscr{E}_{mn}(H^{\omega}_{2-\alpha,\rho_q}(Q)) \ge$$

$$\ge \mathscr{E}_{mn}(H^{\omega}_{1,\rho_q}(Q)) = 4mn\int\limits_0^h\int\limits_0^\eta \omega\Big(\sqrt[q]{t^q+\tau^q}\Big)dtd\tau, \qquad (2.3.20)$$

и доказательство сводится к получению оценки сверху, совпадающей с правой частью неравенства (2.3.20). С этой целью для произвольной $f\in H^{\omega}_{1,\rho_q}(Q)$, оценивая по абсолютной величине равенство (2.3.13), получаем

$$R_{mn}(H^{\omega}_{1,\rho_q}(Q);X^*,Y^*;P^*) = 4mn\int\limits_0^h\int\limits_0^\eta \omega\Big(\sqrt[q]{t^q+\tau^q}\Big)dtd\tau,$$

и, согласно второму неравенству из (2.3.19), имеем

$$\mathscr{E}_{mn}(H^{\omega}_{2-\alpha,\rho_q}(Q)) \le \mathscr{E}_{mn}(H^{\omega}_{2,\rho_q}(Q)) = R_{mn}(H^{\omega}_{2,\rho_q}(Q);X^*,Y^*;P^*) =$$

$$= 4mn\int\limits_0^h\int\limits_0^\eta \omega\Big(\sqrt[q]{t^q+\tau^q}\Big)dtd\tau, \qquad (2.3.21)$$

Требуемое равенство $(2.3.4)'$ получаем из сопоставления неравенств (2.3.20) и (2.3.21). Аналогичным образом доказывается равенство $(2.3.3)'$, чем и завершаем доказательство теоремы 2.3.2.

Теорема 2.3.3. *Наилучшая кубатурная формула (2.3.2) для классов функций $H^{\omega_1,\omega_2}_{2-\alpha}(Q), H^{\omega}_{2-\alpha,\rho_q}(Q)$ при всех $\alpha\in[0,1]$ единственна.*

Доказательство. Не умаляя общности, утверждение теоремы докажем для класса $H^{\omega}_{2-\alpha,\rho_q}(Q)$. Будем следовать схеме рассуждения работы [23]. Предположим, что это не так, а именно, что существует конкретная формула вида (2.3.1) с вектором узлов и коэффициентов (X^0,Y^0,P^0), имеющая на классе функций $H^{\omega}_{2-\alpha,\rho_q}(Q)$ точную оценку погрешности, равную правой части равенства $(2.3.4)'$. Тогда из соотношения

$$4mn\int\limits_0^h\int\limits_0^\eta \omega\left(\sqrt[q]{t^q+\tau^q}\right)dtd\tau =$$

$$= \inf\{R_{mn}(H^{\omega}_{1,\rho_q}(Q); P; X, Y) : (P; X, Y)\} \leq$$

$$\leq R_{mn}(H^{\omega}_{1,\rho_q}(Q) : X^0, Y^0; P^0) = 4mn\int\limits_0^h\int\limits_0^\eta \omega\left(\sqrt[q]{t^q+\tau^q}\right)dtd\tau.$$

получим, что

$$\mathscr{E}_{mn}(H^{\omega}_{1,\rho_q}(Q)) = R_{mn}(H^{\omega}_{1,\rho_q}(Q) : X^0, Y^0; P^0) =$$

$$= 4mn\int\limits_0^h\int\limits_0^\eta \omega\left(\sqrt[q]{t^q+\tau^q}\right)dtd\tau.$$

Из полученного равенства заключаем, что формула (2.3.1) с векторами узлов и коэффициентов (X^0, Y^0, P^0) должна быть наилучшей и для класса $H^{\omega}_{1,\rho_q}(Q)$, чего быть не может, поскольку, как доказано в теореме 2.3.1 (равенство (2.3.4)), среди всех формул вида (2.3.1) формула прямоугольников (2.3.2) является наилучшей. Теорема 2.3.3 доказана.

§2.4. Обобщение на многомерном случае

В заключение этой главы отметим, что все доказанные в предыдущих параграфах теоремы можно обобщить на многомерном случае. Приводим некоторые результаты для многомерного случая.

Пусть $f(\boldsymbol{x}) := f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ определена и интегрируема в m-мерном параллелепипеде $Q = \{a_i \le x_i \le b_i;\ i = 1, 2, \ldots, m\}$ и

$$J(f) := \underset{(Q)}{\int \cdots \int} f(x_1, x_2, \ldots, x_m)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_m = \int\limits_{(Q)} f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}. \tag{2.4.1}$$

Любая кубатурная формула для приближённого вычисления интеграла (2.4.1) имеет вид

$$J(f) \approx L(f; P, X) = \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu f(M_\nu) \tag{2.4.2}$$

и задаётся вектором коэффициентов и узлов

$$(P, X) = \{p_1, p_2, \ldots, p_n; M_1, M_2, \ldots, M_n\},$$

где $M_\nu = M(x_1^\nu, x_2^\nu, \ldots, x_m^\nu)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ – произвольные точки области Q, а p_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ – произвольные действительные числа.

Через $\mathcal{A}$ обозначим все возможные векторы (P, X), где $P = \{p_\nu\}_{\nu=1}^{n}$, p_ν - любые числа, а векторы $X = \{X_1, X_2, \ldots, X_m\}$, $X_i = (x_i^1, \ldots, x_i^{n_i})$ задаются m произвольными системами чисел

$$a_i \le x_i^1 < x_i^2 < \ldots < x_i^{n_i} \le b_i \ (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{2.4.3}$$

Узлы кубатурной формулы (2.4.2) являются точками

$$M_{k_1,\ldots,k_m} = M(x_1^{k_1},\ x_2^{k_2}, \ldots,\ x_m^{k_m})\ \ (k_i = 1, 2, \ldots, n_i;\ i = 1, 2, \ldots, m)$$

решетки, определяемой системами чисел (2.4.3). Кубатурная формула в этом случае имеет вид

$$J(f) \approx L(f; P, X) = \sum_{k_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{k_m=1}^{n_m} p_{k_1,\ldots,k_m} f(M_{k_1,\ldots,k_m}) \tag{2.4.4}$$

или сокращённо

$$J(f) \approx L(f; P, X) = \sum_{\mathbf{k}=1}^{\mathbf{n}} p_{\mathbf{k}} f(M_{\mathbf{k}}). \tag{2.4.4$'$}$$

Отметим, что кубатурная формула (2.4.4) (или (2.4.4)$'$) была введена и исследована в работе Н.П.Корнейчука [20] для некоторых классов функций, задаваемых модулями непрерывности. Ясно, что заданием множества векторов $\mathcal{A}$ определяется класс кубатурных формул, для которых $(P, X) \in \mathcal{A}$.

Пусть $R(f; P, X)$ – погрешность кубатурной формулы (2.4.4)$'$. Полагаем

$$R(\mathfrak{M}; P, X) = \sup\Big\{|R(f; P, X)| : f \in \mathfrak{M}\Big\},$$

где $\mathfrak{M}$ – некоторый класс функций $f(\boldsymbol{x})$, интегрируемых в области Q. Задача состоит в отыскании величины

$$\mathscr{E}(\mathfrak{M}) = \inf\Big\{R(\mathfrak{M}; P, X) : \ (P, X) \in \mathcal{A}\Big\},$$

а также вектора $(\tilde{P}, \tilde{X}) \in \mathcal{A}$, для которого

$$\mathscr{E}(\mathfrak{M}) = R(\mathfrak{M}; \tilde{P}, \tilde{X}).$$

Кубатурная формула, определяемая вектором $(\tilde{P}, \tilde{X})$, является наилучшей для класса $\mathfrak{M}$ среди всех кубатурных формул, у которых $(P, X) \in \mathcal{A}$. Здесь в качестве $\mathfrak{M}$ рассматривается класс $H_q^{\omega,m}$ $(1 \le q \le \infty,\ m \in \mathbb{N})$ – функций $f(\boldsymbol{x}) := f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, определенных в области Q и таких, что для любых точек $M'(x_1^{'}, x_2^{'}, \ldots, x_m^{'})$ и $M''(x_1^{''}, x_2^{''}, \ldots, x_m^{''})$ из Q выполняется неравенство

$$|f(M') - f(M'')| \le \omega[\rho_q(M', M'')], \tag{2.4.5}$$

где

$$\rho_q(M', M'') = \left\{\sum_{i=1}^{m} |x_i^{'} - x_i^{''}|^q\right\}^{1/q}, \quad 1 \le q < \infty,$$

и

$$\rho_\infty(M', M'') = \max_{1 \le i \le m} |x_i^{'} - x_i^{''}|, \quad q = \infty,$$

а $\omega(t)$ – заданный на отрезке $0 \le t \le d := \left\{\sum_{i=1}^{m}(b_i - a_i)^q\right\}^{1/q}$, $1 \le q \le \infty$ модуль непрерывности, то есть неубывающая полуаддитивная на отрезке $[0, d]$ функция, в нуле равная нулю.

Нам для доказательства основного результата понадобятся следующие утверждения

Лемма 2.4.1 [26, с.177]. *Пусть в области Q m-мерного пространства фиксированы произвольные точки $M_1, M_2, \dots M_\nu$, и пусть функция $q(M)$ определена равенством*

$$q(M) = \min_{1\le j\le \nu} \varphi[\rho(M, M_j)], M \in Q,$$

где $\varphi(u)$ - неубывающая и полуаддитивная на $[0, d]$ (d - диаметр области Q) функция, а $\rho(M, M_j)$ - какое-нибудь расстояние между точками M и M_j из Q. Тогда для любых двух точек $M', M'' \in Q$ выполняется неравенство

$$|q(M') - q(M'')| \le \varphi[\rho(M', M'')].$$

Лемма 2.4.2 [26, с.177]. *Пусть $\varphi(u)$ – неубывающая для $0 \le u \le b-a$ функция. При фиксированном $m = 1, 2, \dots,$ каждому вектору $T = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$ ($a \le t_1 < t_2 < \dots < t_m \le b$) сопоставим функцию*

$$g(T; t) = \min_{1\le k\le m} \varphi(|t - t_k|) + C, \ a \le t \le b,$$

где C - константа. Тогда если $T_0 = \{t_1^0, \ t_2^0, \dots, \ t_m^0\}$, где $t_k^0 = a + (2k-1)h$, $h = (b-a)/(2m)$, то для любого вектора T справедливо неравенства

$$\int_a^b g(T; t)\, dt \ge \int_a^b g(T_0; t)\, dt.$$

Используя схему рассуждений, приведенную в [20], легко доказать следующее утверждение

Теорема 2.4.1. *Среди всех кубатурных формул (2.4.4) с произвольными коэффициентами p_k и узлами в точках произвольной решётки*

(2.4.3) наилучшей для класса $H_q^{\omega,m}$ $(1 \le q \le \infty)$ *при фиксированном векторе* $\boldsymbol{n} = (n_1,\ n_2, \ldots,\ n_m)$ *является кубатурная формула*

$$J(f) \approx L(f; P, X) = \sum_{\boldsymbol{k}=1}^{\boldsymbol{n}} \tilde{p}_{\boldsymbol{k}} f(\tilde{M}_{\boldsymbol{k}}) \tag{2.4.6}$$

с равномерной решёткой узлов

$$\tilde{x}_i^{k_i} = a_i + (2k_i - 1)h_i,\ h_i = \frac{b_i - a_i}{2n_i} \tag{2.4.7}$$

$$(k_i = 1, 2, \ldots, n_i;\ i = 1, 2, \ldots, m)$$

и равными весами

$$\tilde{p}_{\boldsymbol{k}} := \tilde{p}_{k_1,\ldots,k_m} = \prod_{i=1}^{m} \frac{b_i - a_i}{n_i} \quad (1 \le k_i \le n_i;\ i = 1, 2, \ldots, m).$$

Для точной оценки погрешности формулы (2.4.6) на всем классе $H_q^{\omega,m}$ $(1 \le q \le \infty,\ m \in \mathbb{N})$ *имеет место равенство*

$$\mathscr{E}(H_q^{\omega,m}(Q)) =$$

$$= 2^m n_1 n_2 \ldots n_m \int\limits_0^{h_1} \int\limits_0^{h_2} \ldots \int\limits_0^{h_m} \omega\Big[(t_1^q + t_2^q + \cdots + t_m^q)^{1/q}\Big]\, dt_1 dt_2 \ldots dt_m, \tag{2.4.8}$$

$$\mathscr{E}(H_\infty^{\omega,m}(Q)) =$$

$$= 2^m n_1 n_2 \ldots n_m \int\limits_0^{h_1} \int\limits_0^{h_2} \ldots \int\limits_0^{h_m} \omega\left(\max_{1 \le i \le \infty} \{t_i\}\right)\, dt_1 dt_2 \ldots dt_m.$$

В частности, для класса Липшица с константой M *порядка* α $(0 < \alpha \le 1)$ *из (2.4.8) вытекает равенство*

$$\mathscr{E}(MH_q^{\alpha,m}) = 2^m n_1 n_2 \ldots n_m M \int\limits_0^{h_1} \int\limits_0^{h_2} \ldots \int\limits_0^{h_m} (t_1^q + t_2^q + \cdots + t_m^q)^{\alpha/q}\, dt_1 dt_2 \ldots dt_m.$$

$$\mathscr{E}(MH_\infty^{\alpha,m}) = 2^m n_1 n_2 \ldots n_m M \int\limits_0^{h_1} \int\limits_0^{h_2} \ldots \int\limits_0^{h_m} \max_{1 \le i \le \infty} \{t_i^\alpha\}\, dt_1 dt_2 \ldots dt_m.$$

Доказательство. Не умаляя общности, приводим доказательство равенство (2.4.8) Оценку снизу получаем общеизвестным методом Н.П.Корнейчука [20]. Следуя данному рассуждению, каждому вектору $X = \{X_1, X_2, \ldots, X_m\}, X_i = (x_i^1, \ldots, x_i^{n_i})$, задающему решётку узлов

$$M_{k_1,\ldots,k_m} = M(x_1^{k_1},\ x_2^{k_2}, \ldots,\ x_m^{k_m}) \ \ (k_i = 1, 2, \ldots, n_i;\ i = 1, 2, \ldots, m),$$

сопоставим множество $H_{q,X}^{\omega,m}(Q)$ функций $f(\boldsymbol{x}) \in H_{q,X}^{\omega,m}(Q)$ таких, что $f(M_{k_1,\ldots,k_m}) = 0$. Фиксируем произвольный вектор $X = \{X_1, X_2, \ldots, X_m\}$, $X_i = (x_i^1, \ldots, x_i^{n_i})$ узлов $M_{k_1,\ldots,k_m}$. Если $f(\boldsymbol{x}) \in H_{q,X}^{\omega,m}(Q)$ и $M(x_1^{k_1},\ x_2^{k_2}, \ldots,\ x_m^{k_m})$ - любая точка из Q, то для каждого узла $M_{k_1,\ldots,k_m}$ будем иметь

$$|f(M)| = |f(M) - f(M_{k_1,\ldots,k_m})| \le$$

$$\le \omega(\rho_q(M, M_{k_1,\ldots,k_m})) = \omega\left(\left\{\sum_{i=1}^{m} |x_i - x_i^{n_i}|^q\right\}^{1/q}\right) (1 \le q < \infty).$$

Откуда запишем

$$|f(M)| \le \min_{1\le k_i\le n_i} \omega(\rho_q(M, M_{k_1,\ldots,k_m})) = \min_{1\le k_i\le n_i} \omega\left(\left\{\sum_{i=1}^{m} |x_i - x_i^{k_i}|^q\right\}^{1/q}\right) =$$

$$= \omega\left(\left\{\sum_{i=1}^{m} \min_{1\le k_i\le n_i} |x_i - x_i^{k_i}|^q\right\}^{1/q}\right) = F_X(M) = F_X(x_1, x_2, \ldots, x_m).$$

В силу леммы 2.4.1 функция $F_X(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in H_{q,X}^{\omega,m}(Q)$ и

$$F_X(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \min_{x_i^{k_i}} \omega\left(\left\{\sum_{i=1}^{m} |x_i - x_i^{k_i}|^q\right\}^{1/q}\right) =$$

$$= \omega\left(\left\{\sum_{i=1}^{m} \min_{1\le k_i\le n_i} |x_i - x_i^{k_i}|^q\right\}^{1/q}\right).$$

Таким образом,

$$R(H_{q,X}^{\omega,m}, X) = \int\limits_{(Q)} F_X(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} = R(F_X),$$

где значения функция F зависят только от вектора узлов X.

Пусть $X = \{X_1, X_2, \dots, X_m\}$ - произвольный вектор, а $\widetilde{X} = \{\widetilde{X}_1, \widetilde{X}_2, \dots, \widetilde{X}_m\}$ - вектор, заданный равенствами 2.4.7. Так как $\omega(t)$ не убывает, то при фиксированных $x_2, x_3, \dots, x_m$ функция

$$g(x_1) = g(X_1, x_1) = F_X(x_1, x_2, \dots, x_m) = \min_{1 \le k_i \le n_i} \omega\left(\sqrt[q]{|x_1 - x_1^{k_1}|^q + \alpha}\right)$$

и

$$\alpha = \sum_{i=2}^{m} \min_{1 \le k_i \le n_i} |x_i - x_i^{k_i}|^q$$

удовлетворяет условию леммы 2.4.2, применение которой приводит к неравенству

$$R(F_X) = \int\limits_{(Q)} F_X(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} \geqslant \int\limits_{(Q)} F_{\widetilde{X}}(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} = R(F_{\widetilde{X}}).$$

Зададим теперь кубатурную формулу (2.4.4) вектором $\widetilde{X} = \{\widetilde{X}_1, \widetilde{X}_2, \dots, \widetilde{X}_m\}$ узлов $\widetilde{M}_{k_1,\dots,k_m} = M(\widetilde{x}_1^{k_1},\ \widetilde{x}_2^{k_2}, \dots,\ \widetilde{x}_m^{k_m})$ по равномерной решётке (2.4.7) и равными весами (2.4.8). Очевидно, вес $\widetilde{p}_k$ есть объем любого из $n_1, n_2, \dots, n_m$ равных параллелепипедов $\widetilde{d}_k = \widetilde{d}_{k_1 \dots k_m}$

$$a_i + 2(k_i - 1)h_i \le x_i^{k_i} \le a_i + 2k_i h_i$$

$$(1 \le k_i \le n_i\ i = 1, 2, \dots, n)$$

с центром в узлах $\widetilde{M}_k$. Поэтому, какова бы ни была функция $f(\boldsymbol{x}) \in H_p^{\omega,m}(Q)$, будем иметь

$$|R(f; \widetilde{X}, \widetilde{P})| = \left| \sum_{\mathbf{k}=1}^{\mathbf{n}} \int\limits_{\widetilde{d}_{\mathbf{k}}} [f(x_1, x_2, \dots, x_m) - f(\widetilde{x}_1^{k_1}, \widetilde{x}_2^{k_2}, \dots, \widetilde{x}_m^{k_m})] d\boldsymbol{x} \right| \le$$

$$\le \left| \sum_{\mathbf{k}=1}^{\mathbf{n}} \int\limits_{\widetilde{d}_{\mathbf{k}}} \omega\left(\sqrt[q]{|x_1 - \widetilde{x}_1^{k_1}|^q + |x_2 - \widetilde{x}_2^{k_2}|^q + \dots + |x_m + \widetilde{x}_m^{k_m}|^q}\right) d\boldsymbol{x} \right| =$$

$$= \int\limits_{(Q)} F_{\widetilde{X}}(x_1, x_2, \dots, x_m)\, dx_1 dx_2 \dots dx_m = R(F_{\widetilde{X}})$$

Из этих оценок следуют соотношения

$$\mathscr{E}(H_q^{\omega,m}(Q)) = R(F_{\widetilde{X}}) = \int_{(Q)} \cdots \int F_{\widetilde{X}}(x_1, x_2, \dots, x_m)\, dx_1 dx_2 \dots dx_m =$$

$$= \sum_{k_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{k_m=1}^{n_m} \int_{\widetilde{d}_k} \cdots \int \omega\left(\sqrt[q]{|x_1 - \widetilde{x}_1^{k_1}|^q + |x_2 - \widetilde{x}_2^{k_2}|^q + \dots + |x_m - \widetilde{x}_m^{k_m}|^q}\right) d\boldsymbol{x} =$$

$$= \sum_{k_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{k_m=1}^{n_m} \int\limits_{a_1+2(k_1-1)h_1}^{a_1+2k_1h_1} \dots \int\limits_{a_m+2(k_m-1)h_m}^{a_m+2k_mh_m} \omega\left(\sqrt[q]{|x_1 - \widetilde{x}_1^{k_1}|^q + \dots + |x_m - \widetilde{x}_m^{k_m}|^q}\right) d\boldsymbol{x} =$$

$$= \sum_{k_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{k_m=1}^{n_m} \left\{ \int\limits_{a_1+2(k_1-1)h_1}^{\widetilde{x}_1^{k_1}} \dots \int\limits_{a_m+2(k_m-1)h_m}^{a_m+2k_mh_m} \omega\left(\sqrt[q]{(\widetilde{x}_1^{k_1} - x_1)^q + \dots + |x_m - \widetilde{x}_m^{k_m}|^q}\right) d\boldsymbol{x} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{k_m=1}^{n_m} \int\limits_{\widetilde{x}_1^{k_1}}^{a_1+2k_1h_1} \dots \int\limits_{a_m+2(k_m-1)h_m}^{a_m+2k_mh_m} \omega\left(\sqrt[q]{(x_1 - \widetilde{x}_1^{k_1})^q + \dots + |x_m - \widetilde{x}_m^{k_m}|^q}\right) d\boldsymbol{x} \right\} =$$

$$= \sum_{k_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{k_m=1}^{n_m} \left\{ \int\limits_{a_m+2(k_m-1)h_m}^{a_m+2k_mh_m} \dots \int\limits_0^{h_1} \omega\left(\sqrt[q]{{t_1}^q + \dots + |x_m - \widetilde{x}_m^{k_m}|^q}\right) d\boldsymbol{x} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{k_m=1}^{n_m} \int\limits_{a_m+2(k_m-1)h_m}^{a_m+2k_mh_m} \dots \int\limits_0^{h_1} \omega\left(\sqrt[q]{{t_1}^q + \dots + |x_m - \widetilde{x}_m^{k_m}|^q}\right) d\boldsymbol{x} \right\} = \dots$$

$$= 2^{m-1} n_1 \dots n_{m-1} \sum_{k_m=1}^{n_m} \left\{ \int\limits_0^{h_1} \dots \int\limits_{a_m+2(k_m-1)h_m}^{\widetilde{x}_m^{k_m}} \omega\left(\sqrt[q]{{t_1}^q + \dots + (\widetilde{x}_m^{k_m} - x_m)^q}\right) d\boldsymbol{x} + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^{h_1} \dots \int\limits_{\widetilde{x}_m^{k_m}}^{a_m+2k_mh_m} \omega\left(\sqrt[q]{{t_1}^q + {t_2}^q + \dots + (x_m - \widetilde{x}_m^{k_m})^q}\right) d\boldsymbol{x} \right\} =$$

$$= 2^m n_1 n_2 \dots n_m \int\limits_0^{h_1} \int\limits_0^{h_2} \dots \int\limits_0^{h_m} \omega\Big[(t_1^q + t_2^q + \dots + t_m^q)^{1/q}\Big]\, dt_1 dt_2 \dots dt_m.$$

Теорема 2.4.1 доказана.

Заключение

Основные результаты диссертационной работы заключаются в следующем:

- Найдены оптимальные весовые квадратурные формулы для классов $H^{(1)}[a, b]$ на конечном и бесконечном отрезках интегрирования.
- Найдены точные оценки погрешности усложнённых квадратурных формул для классов дифференцируемых функций, задаваемых модулями непрерывности и модулями гладкости в $L_p(1 \leq p \leq \infty)$.
- Найдены точные оценки оптимальных весовых кубатурных формул для классов $H^{(1,1)}(Q)$ на конечной и бесконечной областях интегрирования.
- Найдены оптимальные кубатурные формулы для классов функций $H_2^{\omega_1,\omega_2}(Q)$ и $H^{\omega}_{2,\rho_q}(Q)(1 \leq q \leq \infty)$, задаваемых модулями непрерывности.
- Найдены точные оценки погрешности кубатурных формул в многомерном случае, задаваемых модулями непрерывности.

Данные результаты имеют как прикладное, так и теоретическое значение. Они могут быть использованы при решении интегральных уравнений и оптимизации погрешности их решений на классах функций малой гладкости.

Список литературы

1. Алиев Р.М., Джафаров А.С. Об оценке погрешности квадратурных формул // Изв. АН Азербайджанской ССР. Серия физ.-тех. и матем. наук. 1965. №5. С.23-29.
2. Алигаваров С.А. Наилучшие кубатурные формулы для некоторых классов функций, двух переменных, задаваемых модулями непрерывности //Изв. АН РТ. Отд. физ-мат., хим., геол. и техн. н. 2013. №2(151). С.28-39.
3. Алигаваров С.А. Оптимальные кубатурные формулы для классов функций, задаваемых модулями непрерывности. //ДАН РТ. 2014. Т.57, №4. С.267-271.
4. Алигаваров С.А. Об оценке погрешности усложнённых квадратурных формул для некоторых классов дифференцируемых функций //ДАН РТ. 2016. Т.59, №7-8. С.290-296.
5. Алигаваров С.А. О погрешности усложнённых квадратурных формул для некоторых классов дифференцируемых функций // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений» (Душанбе, 27-28 апреля 2015г. С.12-14).
6. Алигаваров С.А. Наилучшая кубатурная формула для некоторых классов функций двух переменных // Материалы международной научной конференции «Математический анализ, дифференциальные уравнения и теория чисел» (Душанбе, 29-30 октября 2015г. С.45-46).
7. Алигаваров С.А. Наилучшие кубатурные формулы для некоторых классов функций многих переменных, задаваемых модулем непрерывности // Труды международной летней математической школы – конференции С.Б. Стечкина по теории функций. (Душанбе, 15-25 августа 2016г. С.29-31).

8. Алигаваров С.А. О наилучших кубатурных формулах для некоторых классов функций, задаваемых модулями непрерывности // Материалы международной научной конференции «Дифференциальные и интегральные уравнения с сингулярными коэффициентами и краевые задачи теории функции» (Душанбе, 27-28 февраля 2018г. С.24-26.)
9. Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации. - М.: Наука, 1965.
10. Бахвалов Н.С. Численные методы. - М.:Наука, 1975. 631с.
11. Бабенко В.Ф. Асимптотически точная оценка остатка наилучших для некоторых классов функций кубатурных формул //Матем.заметки, 1976, т.19, №3, с.313-332.
12. Бабенко В.Ф. Точная асимптотика остатков оптимальных для некоторых классов функций весовых кубатурных формул // Матем. заметки. 1976. Т.20, №4. С.589-595
13. Бабенко В.Ф. Об оптимальной оценке погрешности кубатурных формул на некоторых классах непрерывных функций //Analysis Mathematica. 1977. Т.3, №1. С.3-9.
14. Бойков И.В. Оптимальные по точности алгоритмы приближенного вычисления сингулярных интегралов. – Саратов: Из-во Саратовского университета, 1983. 210с.
15. Бусарова Т.Н. Оптимизация некоторых весовых квадратурных формул // В сб.: Исследования по современным проблемам суммирования и приближения функций и их приложениям. – Днепропетровск: ДГУ. 1980. С.17-21.
16. Гиршович Ю. О некоторых наилучших квадратурных формулах на бесконечном интервале // Изв. АН Эстонской ССР, Сер. физика математика. 1975. Т.24, №1. С.121-123.
17. Жук В.В. Аппроксимация периодических функций. – Л.: Из-во ЛГУ. 1982, 386с.
18. Женсыкбаев А.А. Моносплайны минимальной нормы и наилучшие квадратурные формулы // Успехи матем. наук. 1981. Т.36, №4. С.107-159.

19. Ибрагимов И.И., Алиев Р.М. О некоторых наилучших кубатурных формулах // Изв. АН Азерб.ССР. 1967. №3-4. С.154-161.
20. Корнейчук Н.П. Наилучшие кубатурные формулы для некоторых классов функций многих переменных // Мат.заметки. 1968. Т.3, №5. С.565-576.
21. Левин М.И., Гиршович Ю.Г. Экстремальные задачи для кубатурных формул // ДАН ССР. 1977. Т.236, №6. С.1303-1306.
22. Левин М.И., Гиршович Ю.Г. Наилучшие кубатурные формулы на множествах периодических функций // Изв. АН Эст.ССР. Сер. физ. матем., 1977. Т.26, №2, С.114-122.
23. Лебедь Г.К., О квадратурных формулах с наименьшей оценкой остатка на некоторых классах функций // Изв. АН СССР. Сер. матем., 1970. Т.34, №3. С.639-661
24. Лушпай Н.Е. О наилучших кубатурных формулах для одного класса дифференцируемых функций двух переменных // Сб.работ асп.ДГУ (матем. и механика).- Днепропетровск: 1972. С.35-39.
25. Лушпай Н.Е., Переверзев С.В. О наилучших кубатурных формулах для классов дифференцируемых функций двух переменных // В сб. Исслед. по совр. проблемам суммирования и приближения функций и их приложениями. – Днепропетровск: 1976. С.38-45.
26. Никольский С.М. Квадратурные формулы. – М.: Наука, 1988. 256с.
27. Онегов Л.А. Об одной наилучшей квадратурной формуле для сингулярных интегралов с неподвижной особенностью // Изв. вузов. Математика. 1981. №9. С.76-79.
28. Парвонаева З.А., Алигаваров С.А. О наилучших весовых квадратурных формул для некоторых классов функций //ДАН РТ. 2015. Т.58, №7. С.564-568.
29. Sard A. Best approximation integration formulas, best approximate formulas // American J. of Math., 1949. LXXI. p.80-91.

30. Шабозов М.Ш. О наилучших кубатурных формулах с весом // Изв. АН Тадж. ССР. Отд. физ.-мат. и геолого-хим. наук, 1980, №4. С.86-90.
31. Шабозов М.Ш. Об одном подходе к исследованию оптимальных квадратурных формул для сингулярных интегралов с фиксированной особенностью // Укр. мат. журнал. 1995. Т.47, №9. С.1300-1305.
32. Шабозов М.Ш., Сабоиев Р.С. Об оптимальном вычислении интегралов от быстроосциллирующих функций // Вестник ХоГУ. Сер. 1. 2004. №6. С.17-22.
33. Шабозов М.Ш., Сабоиев Р.С. Об оптимизации приближенного интегрирования быстроосциллирующих функций // ДАН РТ. 2004 Т.47, №3. С.14-19.
34. Шабозов М.Ш., Сабоиев Р.С. О наилучших по коэффициентам весовых квадратурных формулах имеющих фиксированные особенности // Вестник ХоГУ. Сер. 1. 2006. №7. С.42-54.
35. Шабозов М.Ш., Сабоиев Р.С., Хамдамов Ш.Дж. Оптимизация некоторых весовых квадратурных формул в пространстве $L_1[ab]$ // ДАН РТ. 2009. Т.52, №1. С.5-9.
36. Шабозов М.Ш., Парвонаева З.А. О наилучших по коэффициентам весовых квадратурных формулах для классов функций, задаваемых модулями непрерывности // ДАН РТ. 2006. Т.49, №7. С.589-596.
37. Шабозов М.Ш., Парвонаева З.А. Наилучшие кубатурные формулы для некоторых классов функций // Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат. хим. геол. и тех. н. 2008. №3(132). С.7-16.