Министерство образования и науки
Республики Таджикистан
Худжандский государственный университет
им. Б.Гафурова

На правах рукописи

Бекназаров Джурабек Холмаматович

ПРИБЛИЖЕНИЯ СУММАМИ ФУРЬЕ – ЧЕБЫШЁВА И ТОЧНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ N-ПОПЕРЕЧНИКОВ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ

01.01.01 — Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Д И С С Е Р Т А Ц И Я
на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор Тухлиев Камаридин

Д У Ш А Н Б Е – 2 0 1 8

О Г Л А В Л Е Н И Е

Введение

Актуальность темы. Теория приближения функций - одна из наиболее интенсивно развивающихся областей современной математики. Объектом теории приближения являются задачи, связанные с необходимостью заменить сложные функции линейными суммами конечного числа более простых функций так, чтобы возникающая при этом погрешность была минимальной. Для нахождения минимальной погрешности требуется найти точную верхнюю грань погрешности приближения заданным методом на фиксированном классе функций, то есть приходиться решать экстремальную задачу, чтобы получить окончательной результат. Таким образом, решение надо довести до точных констант, где ни убавить, ни прибавить уже, в сущности, ничего нельзя. Эта последняя задача требует отыскания точных значений различных поперечников на заданных классах функций.

Цели и задачи исследования

В диссертационной работе решаются ряд конкретных экстремальных задач, связанных с:

- вычислением точных верхних граней отклонений заданных классов функций от их частных сумм ряда Фурье-Чебышёва в пространстве $L_{2,\mu}$(глава I);
- отысканием точное неравенство Джексона - Стечкина между величиной наилучшего приближения функции частными суммами Фурье-Чебышёва и обобщенными модулями непрерывности m-го порядка, определяемыми дифференциальным оператором второго порядка (глава I);
- вычислением точных значений n-поперечников классов функций, задаваемых специальными модулями непрерывности m-го порядка, определяемыми дифференциальным оператором второго порядка (глава II);

Методы исследования. При решении указанных задач в качестве аппарата приближения используются классические ортогональные многочлены Чебышева первого рода. При этом в качестве инструмента исследования используются современные методы теории приближения оптимизационного содержания и методы решения экстремальных задач теории функций.

Научная новизна исследований. Результаты диссертации являются новыми, получены автором самостоятельно и состоят в следующем:

- найдены точные оценки скорости сходимости ряда Фурье-Чебышёва на некоторых классах функций, задаваемых дифференциальным оператором второго порядка и характеризующихся усреднённым значением обобщённого модуля непрерывности m-го порядка в пространстве $L_{2,\mu}$. ;
- найдено точное неравенство Джексона - Стечкина между величиной наилучшего приближения функции частными суммами Фурье-Чебышёва и специальными модулями непрерывности m-го порядка, определяемыми дифференциальным оператором второго порядка;
- вычислены точные значения n-поперечников некоторых классов функций, задаваемых специальными модулями непрерывности m-го порядка, определяемыми дифференциальным оператором второго порядка;

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Развитые в ней методы и полученные результаты могут применяться в других экстремальных задачах теории приближений. Главы диссертации в отдельности могут составить содержание специальных курсов для студентов и аспирантов высших учебных заведений, обучающихся по специальности математики и прикладной математики.

Апробация работы. Основные результаты диссертации неоднократно докладывались и обсуждались на:

- семинарах отдела теории функций и функционального анализа Института математики им. А.Джураева АН Республики Таджикистан под руководством академика АН РТ М.Ш.Шабозова (Душанбе, 2013-2018 г.);
- международной научной конференции „Современные проблемы математики и её преподавания", посвящённой 20-летию Конституции Республики Таджикистан (Худжанд, 28-29 июня 2014 г.);
- международной научной конференции, посвящённой 80-летию член- корреспондента АН Республики Таджикистан, доктора физико- математи-

ческих наук, профессора Стаценко Владислава Яковлевича "Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений" (Душанбе, 27-28 апреля 2015 г.);

- международной летней математической Школы-Конференции С.Б. Стечкина по теории функций (Таджикистан, Душанбе, 15 - 25 августа 2016 года);
- Республиканской научно-практической конференции "Современные проблемы естественных наук" (Душанбе, Филиал МГУ им. М.В.Ломоносова, 24 ноября 2017 г.);
- международной научной конференции "Дифференциальные и интегральные уравнения с сингулярными коэффицентами кроевые задачи теории функции" посвященной 90-летию академика АН РТ Л.Г.Михайлова (Таджикистан, Душанбе, 28 февраля 2018 года);
- международной научной конференции "Современные проблемы математики и её приложения" посвященной 70-летию академика АН РТ М.И.Илолова (Таджикистан, Душанбе, 14-15 марта 2018 года);

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 10 печатных работах автора. Из них 3 статьей опубликованы в рецензируемых журналах из перечня ВАК при Президента Республики Таджикистан и ВАК Российской Федерации, а 7 статьей в трудах международных конференций. Из совместных с К.Тухлиевым [42, 45–47] работ на защиту выносятся лишь результаты, полученные лично автором.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, двух глав, списка цитированной литературы из 51 наименований, занимает 81 страниц машинописного текста и набрана на LaTeX. Для удобства в диссертации применена сквозная нумерация теорем, лемм, следствий и формул. Они имеют тройную нумерацию, в которой первая цифра совпадает с номером главы, вторая указывает на номер параграфа, а третья на порядковый номер теорем, лемм, следствий или формулы в данном параграфе.

Содержание диссертации

В первой главе диссертации изучается экстремальная задача об отыскании верхней грани наилучших приближений на классах дифференцируемых функций суммами Фурье – Чебышёва в пространстве $L_{2,\mu}[-1,1]$ с весом $\mu(x) := 1/\sqrt{1-x^2}$ Чебышёва первого рода.

Приведём нужные нам в дальнейшем определения и обозначения.

Пусть $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел; $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$; $\mathbb{R}_+$ — множество всех положительных чисел вещественной оси.

При решении некоторых экстремальных задач теории приближения для изучения структурных и конструктивных свойств функции $f \in L_2$ часто используют различные модификации обычного модуля непрерывности m-го порядка

$$\omega_m(f,t) = \sup\left\{ \left\| \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} f(x+(m-k)h) \right\|_{L_2} : \ |h| \le t \right\}. \qquad (0.0.1)$$

Отметим, что в последнее время с целью оптимизации неравенства Джексона – Стечкина рассматривают различные модификации классического определения модуля непрерывности (0.0.1). Такая постановка задач обусловлена специфическими условиями рассматриваемых экстремальных задач на классах функций и иногда приводит к результатам, раскрывающим содержательной сущности исследуемых проблем. Хорошо известно, что в вопросах разложения функций в ряд Фурье по тригонометрической системе существенную роль играет оператор сдвига $T_h f(x) = f(x+h)$ и определяемые с его помощью обычные модули непрерывности различных порядков (см., например, монографии Н.К.Бари [1], А.Зигмунд [2]).

При изучении вопросов разложения функций в ряд Фурье – Чебышёва в гильбертовом пространстве $L_{2,\mu}[-1,1]$ с весом Чебышёва $\mu(x) := 1/\sqrt{1-x^2}$, вместо обычного модуля непрерывности, используется оператор обобщённого сдвига, с помощью которого определяются обобщённые модули непрерывности m-ых порядков и классы функций, которые характеризуются этими модулями непрерывности. Экстремальная задача отыскания точной оценки скорости сходимости рядов Фурье – Чебышёва на указанных классах функций сводится к исследованию величины, равной точной верхней грани уклонения частных сумм рядов Фурье – Чебышёва на рассматриваемых классах функций. Здесь нами получены неравенства типа Джексона – Стечкина, связывающие величину $\mathcal{E}_{n-1}(f)_{L_{2,\mu}}$ — наилучшее приближение функции f алгебраическими многочленами степени не выше n–1, с усреднённым положительным весом обобщённым модулем непрерывности m-го порядка $\Omega_m(\mathcal{D}^r f, t)_{2,\mu}$, определяемой ниже, где $\mathcal{D}$ – дифференциальный оператор второго порядка Чебышёва. Для различных классов функций, определяемых указанными модулями непрерывности и заданной мажорантной функции, удовлетворяющей определённым ограничениям, вычислены точные значения всех перечисленных в первой главе n-поперечников в пространстве $L_{2,\mu}[-1,1]$.

В последнее время появился ряд работ, в которых вопросы наилучшего приближения функций рассматриваются на конечном отрезке. Так, например, А.Г.Бабенко [3] получил точное неравенство типа Джексона – Стечкина в случае приближения на отрезке $[0,\pi]$ действительных измеримых 2π-периодических функций вида $f(x) = \varphi(\cos x)$ подпространством косинус-полиномов

$$\mathcal{F}_{n-1} := \left\{\mathcal{F}: \ \mathcal{F}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cos kx, \ a_k \in \mathbb{R}\right\}$$

в пространстве $L^2_{\alpha,\beta}[0,\pi]$ $(\alpha,\, \beta > -1)$ с нормой

$$\|f\|_{L^2_{\alpha,\beta}} = \left\{\int\limits_0^\pi f^2(x)\left(\sin\frac{x}{2}\right)^{2\alpha+1}\left(\cos\frac{x}{2}\right)^{2\beta+1}dx\right\}^{1/2} < \infty.$$

Дальнейшее исследование этой задачи в общем случае приведено в работах Д.В.Горбачева (по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля), при $\alpha = \beta \geq -1/2$ Д.В.Чертовой [4], а при любых $\alpha > \beta \geq -1/2$ Во Тхи Куком [5]. Для функций многих переменных в пространстве $L_p(\mathbb{R}^d)$ со степенным весом указанная задача решена в работах А.В.Иванова и В.И.Иванова [6, 7]. В работе [8] С.Б.Вакарчук доказал точное неравенство типа Джексона – Стечкина для приближения действительных измеримых на отрезке $[-1,1]$ функций f подпространством $\mathcal{P}_{n-1}$ – алгебраических многочленов степени

$\leq n-1$ в пространстве $L_2[-1,1]$ с обычной нормой

$$\|f\|_{L_2[-1,1]} = \left(\int\limits_{-1}^{1} f^2(x)dx\right)^{1/2} < \infty.$$

В данной главе мы продолжим исследования в этом направлении и докажем точные неравенства типа Джексона – Стечкина для наилучшего приближения действительных измеримых на отрезке $[-1,1]$ функций f с весом $\mu(x) := 1/\sqrt{1-x^2}$ элементами подпространства $\mathcal{P}_{n-1}$ в гильбертовом пространстве

$$L_{2,\mu}[-1,1] := L_2\Big((\sqrt{1-x^2})^{-1}; [-1,1]\Big)$$

с конечной нормой

$$\|f\|_{L_{2,\mu}[-1,1]} = \left(\int\limits_{-1}^{1} \mu(x) f^2(x)dx\right)^{1/2} := \left(\int\limits_{-1}^{1} \frac{f^2(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx\right)^{1/2}.$$

Следуя работы [9, 10], в пространстве $L_{2,\mu}[-1,1]$ рассмотрим оператор

$$F_h f(x) :=$$

$$:= \frac{1}{2}\left[f\left(x\cos h + \sqrt{1-x^2}\sin h\right) + f\left(x\cos h - \sqrt{1-x^2}\sin h\right)\right], \qquad (0.0.2)$$

который будем называть *оператором обобщённого сдвига,* и введём конечные разности первого и высших порядков равенствами

$$\Delta_h^1(f,x) = F_h f(x) - f(x) = (F_h - I)f(x),$$

$$\Delta_h^m(f,x) = \Delta_h(\Delta_h^{m-1}(f,\cdot),x) = (F_h - I)^m f(x) =$$
$$= \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k}\binom{m}{k} F_{h,k} f(x),$$

где $F_{h,0}f(x) \equiv f(x),\ F_{h,k}f(x) = F_h(F_{h,k-1}f(x)),\ k = 1,2,\ldots,m;\ m \in \mathbb{N}$ и I — единичный оператор в пространстве $L_{2,\mu}$ и по введенным конечным разностям определим *обобщённый модуль непрерывности m-го порядка* равенством

$$\Omega_m(f,t)_{L_{2,\mu}[-1,1]} = \sup\Big\{\|\Delta_h^m(f,\cdot)\|_{L_{2,\mu}[-1,1]} :\ |h| \leq t\Big\}. \qquad (0.0.3)$$

Для формулировки последующих результатов, напомним необходимые понятия и определения.

Пусть $\mathfrak{S}$ — единичный шар в пространстве $L_{2,\mu}$; Q — выпуклое центрально – симметричное подмножество из $L_{2,\mu}$; $\Lambda_n \subset L_{2,\mu}$ — n-мерное подпространство; $\Lambda^n \subset L_{2,\mu}$ — подпространство коразмерности n; $\mathscr{L} : L_{2,\mu} \to \Lambda_n$ — непрерывный линейный оператор; $\mathscr{L}^{\perp} : L_{2,\mu} \to \Lambda_n$ — непрерывный оператор линейного проектирования. Величины

$$b_n(Q, L_{2,\mu}) = \sup\left\{\sup\left\{\varepsilon > 0,\ \varepsilon\mathfrak{S} \cap \Lambda_{n+1} \subset Q\right\} : \Lambda_{n+1} \subset L_{2,\mu}\right\}, \qquad (0.0.4)$$

$$d^n(Q, L_{2,\mu}) = \inf\left\{\sup\left\{\|f\| : f \in Q \cap \Lambda^n\right\} : \Lambda^n \subset L_{2,\mu}\right\}, \qquad (0.0.5)$$

$$d_n(Q, L_{2,\mu}) = \inf\left\{\sup\left\{\inf\left\{\|f - g\| : g \in \Lambda_n\right\} : f \in Q\right\} : \Lambda_n \subset L_{2,\mu}\right\}, \qquad (0.0.6)$$

$$\delta_n(Q, L_{2,\mu}) = \inf\left\{\inf\left\{\sup\left\{\|f - \mathscr{L}f\| : f \in Q\right\} : \mathscr{L}L_{2,\mu} \subset \Lambda_n\right\} : \Lambda_n \subset L_{2,\mu}\right\}, \qquad (0.0.7)$$

$$\Pi_n(Q, L_{2,\mu}) = \inf\Big\{\inf\Big\{\sup\Big\{\|f - \mathscr{L}^{\perp}f\| : f \in Q\Big\} : \mathscr{L}^{\perp}L_{2,\mu} \subset \Lambda_n\Big\} : \Lambda_n \subset L_{2,\mu}\Big\} \qquad (0.0.8)$$

называют соответственно *бернштейновским, гельфандовским, колмогоровским, линейным, проекционным n-поперечниками.*

Пусть далее

$$T_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad T_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(k \arccos x),\ k = 1, 2, \ldots \qquad (0.0.9)$$

– ортонормированная система многочленов Чебышёва первого рода в пространстве $L_{2,\mu}[-1,1]$ относительно скалярного произведения

$$(f, g) = \int\limits_{-1}^{1} \mu(x) f(x) g(x) dx.$$

Тогда, как хорошо известно (см., напр., [12, с.91-98]),

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) T_k(x) \qquad (0.0.10)$$

есть ряд Фурье – Чебышёва функции $f \in L_{2,\mu}[-1,1]$, а

$$c_k(f) = \int\limits_{-1}^{1} \mu(x) f(x)\, T_k(x) dx \qquad (0.0.11)$$

– коэффициенты Фурье – Чебышёва. Равенство в (0.0.10) понимается в смысле сходимости в пространстве $L_{2,\mu}[-1,1]$.

Пусть теперь $\mathcal{D} = (1-x^2)\dfrac{d^2}{dx^2} - x\dfrac{d}{dx}$ – дифференциальный оператор второго порядка Чебышёва. Операторы высших порядков определим последовательно, полагая $\mathcal{D}^r f = \mathcal{D}(\mathcal{D}^{r-1}f)$, $(r = 2,3,\ldots)$. Известно [12, с.54], что многочлены (0.0.9) удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$(1-x^2)T_k''(x) - xT_k'(x) + k^2T_k(x) = 0, \qquad (0.0.12)$$

а потому из (0.0.12) сразу следуют равенства

$$\mathcal{D}T_k(x) = -k^2T_k(x), \ldots, \mathcal{D}^rT_k(x) = (-1)^r k^{2r}T_k(x). \qquad (0.0.13)$$

В [9] доказано, что для произвольной функции $f \in L_{2,\mu}[-1,1]$, имеющей обобщённые производные в смысле Леви [13, с.172], коэффициенты Фурье – Чебышёва (0.0.11) ряда (0.0.10) удовлетворяют соотношениям

$$c_k(f) = (-1)^r\, k^{-2r}\, c_k(\mathcal{D}^r f),\ k = 1,2,\ldots, \qquad (0.0.14)$$

$$c_k(F_hf) = \cos kh \cdot c_k(f),\ k = 1,2,\ldots, \qquad (0.0.15)$$

где функция F_hf определена равенством (0.0.2).

Обозначим через $L_{2,\mu}^{(2r)}[-1,1]$ $(r \in \mathbb{Z}_+, L_{2,\mu}^{(0)}[-1,1] = L_{2,\mu}[-1,1])$ – множество функций $f \in L_{2,\mu}[-1,1]$, у которых производная $\mathcal{D}^r f$ принадлежит пространству $L_{2,\mu}[-1,1]$. Пользуясь соотношениями (0.0.13) – (0.0.15) и равенством Парсеваля, из (0.0.10) для произвольной функции $f \in L_{2,\mu}^{(2r)}[-1,1]$ и $r \in \mathbb{Z}_+$ получаем

$$\|\Delta_h^m(\mathcal{D}^r f)\|^2_{L_{2,\mu}[-1,1]} = \sum_{k=1}^{\infty}(1-\cos kh)^{2m}k^{4r}c_k^2(f). \qquad (0.0.16)$$

Учитывая соотношение (0.0.16), модуль непрерывности (0.0.3) запишем в виде

$$\Omega_m^2(\mathcal{D}^r f, t)_{L_{2,\mu}[-1,1]} = \sup\left\{\sum_{k=1}^{\infty} k^{4r}c_k^2(f)(1-\cos kh)^{2m} :\ |h| \le t\right\}. \qquad (0.0.17)$$

Пусть

$$\mathcal{E}_{n-1}(f)_{L_{2,\mu}[-1,1]} = \inf\Big\{\|f - p_{n-1}\|_{L_{2,\mu}[-1,1]}:\ p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}\Big\} \tag{0.0.18}$$

– наилучшее приближение функции $f \in L_{2,\mu}$ элементами подпространства $\mathcal{P}_{n-1}$. Хорошо известно, что среди всех элементов $p_n \in \mathcal{P}_{n-1}$ частичная сумма

$$S_{n-1}(f,x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(f) T_k(x)$$

ряда (0.0.10) доставляет минимум величине (0.0.18). При этом

$$\mathcal{E}_{n-1}(f)_{L_{2,\mu}[-1,1]} = \|f - S_{n-1}(f)\|_{L_{2,\mu}[-1,1]} = \left(\sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f)\right)^{1/2}. \tag{0.0.19}$$

Нам в дальнейшем понадобится следующая простая лемма.

Лемма 1.1.1. *Для произвольной* $f \in L_{2,\mu}^{(2r)}[-1,1]$ *имеет место точное неравенство*

$$\mathcal{E}_{n-1}(f)_{L_{2,\mu}[-1,1]} \le n^{-2r} \mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^r f)_{L_{2,\mu}[-1,1]}.$$

Следствие 1.1.1. *Для любых* $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ *справедливо равенство*

$$\sup\left\{\frac{\mathcal{E}_{n-1}(f)_{L_{2,\mu}[-1,1]}}{\mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^r f)_{L_{2,\mu}[-1,1]}}:\ f \in L_{2,\mu}^{(2r)}[-1,1]\right\} = \frac{1}{n^{2r}}.$$

Рады простоты условимся, что всюду далее, в соотношениях общего характера, ради краткости, вместо $L_{2,\mu}[-1,1]$, $L_{2,\mu}^{(2r)}[-1,1]$, $\|f\|_{L_{2,\mu}[-1,1]}$ будем писать, соответственно, просто $L_{2,\mu}$, $L_{2,\mu}^{(2r)}$, $\|f\|_{2,\mu}$.

Во втором параграфе найдены точные оценки скорости сходимости ряда Фурье – Чебышёва на некоторых классах функций, задаваемых дифференциальным оператором второго порядка и характеризующихся усреднённым значением обобщённого модуля непрерывности m-го порядка $\Omega_m(\mathcal{D}^r f, t)_{2,\mu}$ в пространстве $L_{2,\mu}$. Иными словами, в метрике пространства $L_{2,\mu}$ получены точные неравенства, которые связывают наилучшие приближения дифференцируемых функций алгебраическими полиномами с интегралами, содержащими обобщённые модули непрерывности высших порядков производных этих функций. Вычислены точные верхние грани отклонений заданных классов функций от их частных сумм ряда Фурье – Чебышёва в гильбертовом пространстве $L_{2,\mu}$.

Следующая теорема является в определённом смысле аналогом и обобщением одной теоремы В.В.Шалаева [14] для пространства $L_{2,\mu}$.

Теорема 1.2.1. *Пусть* $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ *и* $f \in L_{2,\mu}^{(2r)}$. *Тогда при любом* $n \in \mathbb{N}$ *имеет место неравенство*

$$\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu} \leq \frac{1}{n^{2r}} \left(\frac{n}{2} \int\limits_0^{\pi/n} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f, h)_{2,\mu} \sin nh dh \right)^m .$$

Из теоремы 1.2.1 сразу вытекает

Следствие 1.2.1. *В утверждении теоремы 1.2.1 имеет место равенство*

$$\sup_{f \in L_{2,\mu}^{(2r)}} \frac{n^{2r}\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}}{\left(\frac{n}{\pi} \int\limits_0^{\pi/n} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f, t)_{2,\mu} \sin nt\, dt \right)^m} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^m .$$

Следствие 1.2.3. *На множестве* $L_{2,\mu}^{(2r)}$, *у которых модуль непрерывности* $\Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f, t)_{2,\mu}$ *на отрезке* $[0, \pi/n]$ *является выпуклым вверх, имеет место равенство*

$$\sup_{f \in L_{2,\mu}^{(2r)}} \frac{n^{2r}\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}}{\Omega_m(\mathcal{D}^r f, \pi/(2n))_{2,\mu}} = 1. \tag{0.0.20}$$

Верхняя грань в (0.0.20) *реализует функция*

$$f_0(x) = T_n(x) := \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(n \arccos x) \in L_{2,\mu}^{(2r)}.$$

Теорема 1.2.2. *Пусть* $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $f \in L_{2,\mu}^{(2r)}$ *и* $0 \leq t \leq \pi/n$. *Тогда при любом* $n \in \mathbb{N}$ *справедливо неравенство*

$$\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu} \leq \left\{ \frac{nt}{nt - \sin nt} \right\}^m \frac{1}{n^{2r}} \left(\frac{1}{t} \int\limits_0^{t} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f, h)_{2,\mu}\, dh \right)^m .$$

Следствие 1.2.4. *При любых* $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $f \in L_{2,\mu}^{(2r)}$ *и* $0 < t \leq \pi/n$ *справедливо равенство*

$$\sup_{f \in L_{2,\mu}^{(2r)}} \frac{n^{2r}\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}}{\left(\dfrac{1}{t}\displaystyle\int\limits_0^t \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f, h)_{2,\mu}\, dh\right)^m} = \left(1 - \frac{\sin nt}{nt}\right)^{-m}.$$

В частности,

$$\sup_{f \in L_{2,\mu}^{(2r)}} \frac{n^{2r}\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}}{\left(\dfrac{n}{\pi}\displaystyle\int\limits_0^{\pi/n} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f, h)_{2,\mu}\, dh\right)^m} = 1.$$

Отметим, что теорема 1.2.2 и следствие 1.2.4 в некотором смысле являются обобщением результата С.Б.Вакарчука [15] о полиномиальном приближении 2π-периодических функций, принадлежащих пространству $L_2[0, 2\pi]$, на случай приближения функций, принадлежащих пространству $L_{2,\mu}$.

Имеет место также следующее утверждение.

Теорема 1.2.3. *Пусть* $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $f \in L_{2,\mu}^{(2r)}$ *и* $0 < t \leq \pi/n$. *Тогда при любом* $n \in \mathbb{N}$ *справедливо неравенство*

$$\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu} \leq$$

$$\leq \left\{1 - \left(\frac{2}{nt}\sin\frac{nt}{2}\right)^2\right\}^{-m} \frac{1}{n^{2r}} \left(\frac{2}{t^2}\int\limits_0^t (t-\tau)\Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f, \tau)_{2,\mu} d\tau\right)^m.$$

Следствие 1.2.5. *В утверждении теоремы* 1.2.3 *при любых* $0 < nt \leq \pi$, $n \in \mathbb{N}$ *справедливо равенство*

$$\sup_{f \in L_{2,\mu}^{(2r)}} \frac{n^{2r}\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}}{\left(\dfrac{2}{t^2}\displaystyle\int\limits_0^t (t-\tau)\Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f, \tau)_{2,\mu}\, d\tau\right)^m} = \left\{1 - \left(\frac{2}{nt}\sin\frac{nt}{2}\right)^2\right\}^{-m}.$$

В третьем параграфе первой главы решаются задачи отыскания верхних граней приближения некоторых классов функций частными суммами ряда Фурье-Чебышёва в пространстве $L_{2,\mu}$. С этой целью определим нужные нам классы функций посредством некоторых заданных мажорантных функций.

Пусть $\Psi_i(t)\,(i=1,2,3)$ – произвольные непрерывные неубывающие на полусегменте $[0,+\infty)$ функции такие, что $\Psi_i(0)=0\,(i=1,2,3)$.

Введём в рассмотрение следующие классы функций:

$W_m^{(r)}(\mathcal{D},\Psi_1)$ – класс функций $f\in L_{2,\mu}^{(2r)}$ $(r=0,1,\ldots,L_{2,\mu}^{(0)}=L_{2,\mu})$, для которых при любых $m,n\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$ выполняется неравенство

$$\frac{n}{\pi}\int\limits_0^{\pi/n}\Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^rf,t)_{2,\mu}\sin ntdt\le\Psi_1\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

$W_{m,h}^{(r)}(\mathcal{D},\Psi_2)$ – класс функций $f\in L_{2,\mu}^{(2r)}$, для которых при любых $m,n\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$ и $0<h\le\pi/n$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{h}\int\limits_0^{h}\Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^rf,\tau)_{2,\mu}d\tau\le\Psi_2\left(h\right)$$

и, наконец, $W_{m,h}^{(r)}(\mathcal{D},\Psi_3)$ – аналогичный класс функций, для которых

$$\frac{2}{h^2}\int\limits_0^{h}(h-\tau)\Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^rf,\tau)_{2,\mu}d\tau\le\Psi_3\left(h\right).$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1.3.1. *При любых* $m,n\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$ *и* $0<h\le\pi/n$ *справедливы равенства*

$$\mathcal{E}_{n-1}\Big(W_m^{(r)}(\mathcal{D},\Psi_1)\Big)_{2,\mu}=\left(\frac{\pi}{2}\right)^m\frac{1}{n^{2r}}\,\Psi_1^m\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

$$\mathcal{E}_{n-1}\Big(W_{m,h}^{(r)}(\mathcal{D},\Psi_2)\Big)_{2,\mu}=\left(1-\frac{\sin nh}{nh}\right)^{-m}\frac{1}{n^{2r}}\,\Psi_2^m\left(h\right),$$

$$\mathcal{E}_{n-1}\Big(W_{m,h}^{(r)}(\mathcal{D},\Psi_3)\Big)_{2,\mu}=\left\{1-\left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-m}\frac{1}{n^{2r}}\,\Psi_3^m\left(h\right).$$

где

$$\mathcal{E}_{n-1}(\mathfrak{M})_{2,\mu}=sup\left\{\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2_\mu}:f\in\mathfrak{M}\right\}.$$

Следствие 1.3.1. *В утверждении теоремы* 1.3.1, *соответственно при* $h = \pi/(2n)$ *и* $h = \pi/n$, *справедливы равенства*

$$\mathcal{E}_{n-1}\Big(W^{(r)}_{m,\pi/(2n)}(\mathcal{D},\Psi_2)\Big)_{2,\mu} = \left(\frac{\pi}{\pi-2}\right)^m \frac{1}{n^{2r}}\,\Psi_2^m\left(\frac{\pi}{2n}\right),$$

$$\mathcal{E}_{n-1}\Big(W^{(r)}_{m,\pi/n}(\mathcal{D},\Psi_3)\Big)_{2,\mu} = \left(\frac{\pi^2}{\pi^2-4}\right)^m \frac{1}{n^{2r}}\,\Psi_3^m\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Далее с помощью теорема 1.3.1 доказываются следующие утверждение:

Теорема 1.3.2. *Для произвольного* $n \in \mathbb{N}$ *справедливы равенства*

$$\sup\Big\{|c_n(f)|:\ f \in W^{(r)}_m(\mathcal{D},\Psi_1)\Big\} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^m \frac{1}{n^{2r}}\,\Psi_1^m\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

$$\sup\Big\{|c_n(f)|:\ f \in W^{(r)}_{m,h}(\mathcal{D},\Psi_2)\Big\} = \left(\frac{\pi}{\pi-2}\right)^m \frac{1}{n^{2r}}\,\Psi_2^m\left(\frac{\pi}{2n}\right),$$

$$\sup\Big\{|c_n(f)|:\ f \in W^{(r)}_{m,h}(\mathcal{D},\Psi_3)\Big\} = \left(\frac{\pi^2}{\pi^2-4}\right)^m \frac{1}{n^{2r}}\,\Psi_3^m\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Отметим, что под неравенствами типа Джексона – Стечкина в широком смысле в любом нормированном пространстве X понимают соотношение вида

$$E_{n-1}(f)_X \le \chi\, n^{-r}\Omega_m(f^{(r)},\tau/n)_X,\quad r\in\mathbb{Z}_+,\ \tau>0,$$

в которых погрешность приближения индивидуальной функции f оценивается через модуль непрерывности m-го порядка Ω самой приближаемой функции f или некоторой её производной $f^{(r)} \in X$. Здесь возникает экстремальная задача отыскания точных констант в неравенстве типа Джексона – Стечкина между величинами наилучших приближений и значениями модулей непрерывности (0.0.17).

Пусть

$$\chi_{n,m,r}\left(\Omega_m;\pi/n\right)_{2,\mu} = \sup_{f\in L^{(2r)}_{2,\mu}} \frac{n^{2r}\mathscr{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}}{\Omega_m(\mathcal{D}^r f;\pi/n)_{2,\mu}}$$

– точная константа в неравенстве типа Джексона–Стечкина

$$\mathscr{E}_{n-1}(f)_{2,\mu} \le \chi\cdot n^{-2r}\Omega_m(\mathcal{D}^r f;\pi/n)_{2,\mu},$$

где $\Omega_m(\mathcal{D}^r f;\pi/n)_{2,\mu}$ и $\mathscr{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}$ определяются соответственно как в равенствах (0.0.17) и (0.0.19).

Введём обозначение

$$\widetilde{\Omega}_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f;\tau)_{2,\mu} := \frac{1}{\tau}\int\limits_0^{\tau} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; h)_{2,\mu}\, dh. \qquad (0.0.21)$$

В четвёртой параграфе доказывается следующее утверждение.

Теорема 1.4.1. *Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $f \in L_2^{(2r)}$ и $0 < t \le \pi/n$. Тогда справедливы равенства*

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)} \\ f^{(r)}\neq const}} \frac{n^{2r}\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}}{\left(\dfrac{1}{t}\displaystyle\int\limits_0^t \widetilde{\Omega}_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; h)\, dh\right)^m} = \left(1 - \frac{Si(nh)}{nh}\right)^{-m}, \qquad (0.0.22)$$

где $Si(x) = \displaystyle\int\limits_0^x \frac{\sin u}{u}\, du$ – интегральный синус. Существует функция $f_0 \in L_2^{(2r)}$, реализующая в (0.0.22) верхнюю грань.

Отметим, что доказанное равенство (0.0.22) в некотором смысле является обобщением и распространением известных результатов Л.В.Тайкова [16] (случай $m = 1$) и С.Б.Вакарчука [15] (случай $m \ge 1$, $m \in \mathbb{N}$) о наилучшем полиномиальном приближении периодических дифференцируемых функций $f \in L_{2[0,2\pi]}^{(r)}$ на случай приближения функций $f \in L_{2,\mu}^{(2r)}$ частными суммами Фурье–Чебышёва $S_{n-1}(f, x)$.

Теорема 1.4.2. *Для произвольной $t \in (0, \pi/n]$ справедливо неравенство*

$$\frac{2^m}{n^{2r}(nt)^{2m}} \le \sup_{f\in L_2^{(2r)}} \frac{\mathscr{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}}{\Omega_m(\mathcal{D}^r f; t)_{2,\mu}} \le \frac{2^m}{n^{2r}}\left(\frac{1}{(nt)^2} + \frac{1}{2}\right)^m. \qquad (0.0.23)$$

Из (0.0.23), в частности, для константы Джексона–Стечкина вытекает двусторонняя оценка

$$\left(\frac{2}{\pi^2}\right)^m \cdot \frac{1}{n^{2r}} \le \chi_{n,m,r}(\Omega_m; \pi/n)_{2,\mu} \le \frac{2^m}{n^{2r}}\left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{2}\right)^m.$$

Замечание. Теорема 1.4.2 является обобщением одного результата С.Б.Вакарчука [15] о наилучшем полиномиальном приближении периодической дифференцируемой функции $f \in L_2[0, 2\pi]$, для обычных модулей непрерывности m-го порядка $\omega_m(f^{(r)}; t)_2$ на случай наилучшего полиномиального приближения функции $f \in L_{2,\mu}[-1,1]$, гладкостные структурные характеристики которой выражаются через обобщённый модуль непрерывности m-го порядка $\Omega_m(\mathcal{D}^r f;t)_{2,\mu}$.

Далее, пусть $\mathscr{F}(t)$ – непрерывная неубывающая положительная в области $[0,+\infty)$ функция такая, что $\mathscr{F}(0)=0$.

Через $\widetilde{W}_{m,h}^{(r)}(\mathcal{D},\mathscr{F})$, $m,n\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+=\mathbb{N}\cup\{0\}$, $0<h\le\pi/n$ обозначим класс функций $f\in L_2^{(2r)}$, для которых при любом $h\in\mathbb{R}_+$ имеет место неравенство

$$\frac{1}{h}\int\limits_0^h \widetilde{\Omega}_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f;\tau)d\tau \le \mathscr{F}\left(h\right).$$

В этих обозначениях справедлива следующая

Теорема 1.4.3. *Пусть $m,n\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$ и $0<h\le\pi/n$. Тогда справедливо равенство*

$$\mathscr{E}_{n-1}\Big(\widetilde{W}_{m,h}^{(r)}(\mathcal{D},\mathscr{F})\Big)=\frac{1}{n^{2r}}\left(1-\frac{Si(nh)}{nh}\right)^{-m}\mathscr{F}^m\left(h\right).$$

В качестве приложения теоремы 1.4.3 рассмотрим задачу о точном вычислении верхних граней модулей коэффициентов Фурье на рассмотренном классе функций. Экстремальная задача вычисления верхних граней модулей коэффициентов Фурье на различных классах дифференцируемых функций рассматривалась в работах многих математиков (см., например [17] и приведённую там литературу). Аналогичная задача представляет определённый интерес для коэффициентов Фурье–Чебышёва $c_n(f)$, которая в общем случае формулируется следующим образом: если $\mathfrak{N}$ – некоторый класс функций, принадлежащий пространству $L_{2,\mu}$, то требуется найти величину

$$\mathscr{L}_n(\mathfrak{N})=\sup\Big\{\,|c_n(f)|:\ f\in\mathfrak{N}\,\Big\}.$$

Из доказанной теоремы 1.4.3 в качестве следствия получаем

Теорема 1.4.4. *Для любых $n\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $0<h\le\pi/n$ имеет место равенство*

$$\mathscr{L}_n(\widetilde{W}_{m,h}^{(r)}(\mathcal{D},\mathscr{F}))=\frac{1}{n^{2r}}\left(1-\frac{Si(nh)}{nh}\right)^{-m}\mathscr{F}^m(h)$$

и, в частности, при $h=\pi/n$ имеем

$$\mathscr{L}_n(\widetilde{W}^{(r)}_{m,\pi/n}(\mathcal{D},\mathscr{F}))=\frac{1}{n^{2r}}\left(\frac{\pi}{\pi-Si(\pi)}\right)^m\mathscr{F}^m\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Во второй главе решается ряд конкретных экстремальных задач, связанных с вычислением точных значений n-поперечников классов функций, задаваемых *специальными модулями непрерывности m-го порядка, определяемыми дифференциальным оператором второго порядка Чебышёва* .

Основными результатами второго параграфа второй главы являются следующие утверждения:

Теорема 2.2.1. *Пусть функция $\Psi_1(u)$ удовлетворяет условию*

$$\Psi_1^2\left(\frac{u}{\mu}\right)\int\limits_0^{\mu\pi}(sin^2\frac{2t}{2})_*\sin\frac{t}{\mu}dt\le\mu\Psi_1^2(u)$$

при любом $\mu>0$ и любом $u\in(0,2\pi]$. Тогда справедливы равенства

$$\lambda_n\left(W^{(r)}_m(\mathcal{D},\Psi_1),L_{2,\mu}\right)=\left(\frac{\pi}{2}\right)^m\frac{1}{n^{2r}}\Psi_1^m\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

где $\lambda_n(\cdot)$ – любой из перечисленных выше n-поперечников (2.1.1) – (2.1.5).

Теорема 2.2.2. *Если мажоранта $\Psi_2(h)$ при любом $h\in\mathbb{R}_+$ удовлетворяет ограничениям*

$$\frac{\Psi_2(h)}{\Psi_2(\pi/(2n))}\ge\frac{\pi}{\pi-2}\begin{cases}1-\dfrac{\sin nh}{nh}, & \text{если}\quad 0<nh\le\pi,\\[2mm] 2-\dfrac{\pi}{nh}, & \text{если}\quad nh\ge\pi,\end{cases}\tag{0.0.24}$$

то для любых $m,n\in\mathbb{N}$ и $r\in\mathbb{Z}_+$ имеют место равенства

$$\lambda_n\left(W^{(r)}_{m,h}(\mathcal{D},\Psi_2),L_{2,\mu}\right)=\mathcal{E}_n\left(W^{(r)}_{m,h}(\mathcal{D},\Psi_2)\right)_{2,\mu}=\left(\frac{\pi}{\pi-2}\right)^m\frac{1}{n^{2r}}\Psi_2^m\left(\frac{\pi}{2n}\right),$$

где $\lambda_n(\cdot)$ – любой из перечисленных выше n-поперечников (2.1.1) – (2.1.5). *Множество мажорант, удовлетворяющих ограничению* (0.0.24), *не пусто.*

В ходе доказательства теоремы 2.2.2 показано, что функция $\Psi_2(t):=t^\alpha$, где $\alpha=2/(\pi-2)$, удовлетворяет условию (0.0.24).

Теорема 2.2.3. *Пусть мажоранта Ψ_3 для любого $h \in \mathbb{R}_+$ удовлетворяет условию*

$$\frac{\Psi_3(h)}{\Psi_3(\pi/n)} \geq \frac{2\pi^2}{\pi^2-4} \cdot \frac{1}{h^2} \cdot \int\limits_0^h (h-t)(1-\cos nt)_* dt. \qquad (0.0.25)$$

Тогда для любых чисел $m, n \in \mathbb{N}$ и $r \in \mathbb{Z}_+$ справедливо равенство

$$\lambda_n\left(W_{m,h}^{(r)}(\mathcal{D}, \Psi_3), L_{2,\mu}\right) = \left(\frac{\pi^2}{\pi^2-4}\right)^m \frac{1}{n^{2r}} \Psi_3^m\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

где $\lambda_n(\cdot)$ – любой из перечисленных выше n-поперечников (2.1.1) – (2.1.5). *Функции Ψ_3, удовлетворяющие ограничению* (0.0.25)*, существуют.*

Легко доказать, что степенная функция $\Psi_3(u) = u^\alpha$, где $\alpha = 8/(\pi^2-4)$, удовлетворяет ограничению (0.0.25).

В завершающем третьем параграфе второй главы вычислены точные значения различных n-поперечников некоторых классов функций в пространстве $L_{2,\mu}$.

Следуя [20, с.25], назовём неубывающую на положительной полуоси $[0, \infty)$ функцию $\Phi(t)$ k-мажорантой, если функция $t^{-k}\Phi(t)$ не возрастает на $[0, \infty)$ и $\Phi(t) \to 0$ при $t \to 0$, причём $\Phi(0) = 0$. При $k = 1$ функцию $\Phi(t)$ называют просто мажорантой.

При помощи модуля непрерывности (0.0.3) определим следующий класс функций. Пусть $\Phi(t)$ $0 \leq t < \infty$ – произвольная непрерывная неубывающая функция, такая, что $\Phi(0) = 0$. Символом $W_{m,p}^{(r)}(\mathcal{D}, \Phi)$, $1/(2r) < p \leq 2$, $m, r \in \mathbb{N}$ обозначим класс функций $f \in L_{2,\mu}^{(2r)}$, для которых при любом $t \in \mathbb{R}_+$ выполняется условие

$$\frac{1}{t}\int\limits_0^t \Omega_m^p(\mathcal{D}^r f, \tau)_{2,\mu}\, d\tau \leq \Phi^p(t).$$

Теорема 2.3.1. *Пусть $m, n, r \in \mathbb{N}$, $1/(2r) < p \leq 2$ и функция Φ_1 при любых значениях $t \in [0, \pi]$ удовлетворяет условию*

$$\left(\frac{\Phi(t)}{\Phi(\pi/n)}\right)^p \geq \frac{\pi}{nt}\int\limits_0^{nt} (sin^2\frac{\tau}{2})_*^{2mp} d\tau \left(\int\limits_0^{\pi} (sin^2\frac{\tau}{2})^{2mp} d\tau\right)^{-1}. \qquad (0.0.26)$$

Тогда выполняются равенства

$$\lambda_n(W^{(r)}_{m,p}(\mathcal{D},\Phi);L_{2,\mu}) = \mathcal{E}_{n-1}(W^{(r)}_{m,p}(\mathcal{D},\Phi))_{L_{2,\mu}} =$$

$$= \left\{ \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\pi} (1-\cos\tau)^{mp} d\tau \right\}^{-1/p} n^{-2r}\,\Phi(\pi/n),$$

где $\lambda_n(\cdot)$ *– любой из перечисленных выше* n*-поперечников* (2.1.1) *–* (2.1.5), *а*

$$\mathcal{E}_{n-1}(W^{(r)}_{m,p}(\mathcal{D},\Phi))_{L_{2,\mu}} \overset{def}{=} \sup\Big\{ \mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu} : \ f \in W^{(r)}_{m,p}(\mathcal{D},\Phi) \Big\}.$$

Множество мажорант Φ, *для которых выполняется ограничение* (0.0.26), *не пусто.*

При доказательстве теоремы 2.3.1 приводится пример функции, удовлетворяющей условию (0.0.26). Это функция имеет вид $\Phi^*(t) := t^{\alpha/p}$, где

$$\alpha \overset{def}{=} \frac{\pi}{\int\limits_0^{\pi} \left(\sin\frac{\tau}{2}\right)^{2mp} d\tau} - 1.$$

Из теоремы 2.3.1 вытекает

Следствие 2.3.1. *Для любых* $m,n,r \in \mathbb{N}$, $1/(2r) < p \le 2$ *справедливы равенства*

$$\lambda_n(W^{(r)}_{m,p}(\mathcal{D},\Phi^*);L_{2,\mu}) = \mathcal{E}_{n-1}(W^{(r)}_{m,p}(\mathcal{D},\Phi^*))_{L_{2,\mu}} =$$

$$= 2^m(\alpha+1)^{-1/p}\,\pi^{\alpha/p}\,n^{-(2r+\alpha/p)}.$$

Теорема 2.3.2. *Пусть* $m,n,r \in \mathbb{N}$, $1/(2r) < p \le 2$. *Если функция* Φ *при любом* $t \in [0,\pi]$ *удовлетворяет условию* (0.0.26) *теоремы* 2.3.1, *то*

$$\sup\Big\{ \mathcal{E}_{n-1}(D^s f)_{2,\mu} : \ f \in W^{(r)}_{m,p}(\mathcal{D},\Phi) \Big\} =$$

$$= n^{-2(r-s)} \left(\frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\pi} (1-\cos\tau)^{mp} d\tau \right)^{-1/p} \Phi(\pi/n)$$

при $s = 0,1,\ldots,r$.

ГЛАВА I

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ СУММАМИ ФУРЬЕ – ЧЕБЫШЁВА В ПРОСТРАНСТВЕ $L_{2,\mu}[-1,1]$

При решении экстремальных задач теории аппроксимация функций в различных банаховых пространствах часто пользуются основной характеристикой гладкости функции – модулем непрерывности. В последнее время с целью оптимизации неравенства Джексона – Стечкина рассматривают различные модификации классического определения модуля непрерывности. Это обусловлено специфическими условиями рассматриваемых экстремальных задач и иногда приводит к результатам, раскрывающим содержание сущности рассматриваемых задач. При решении задач приближении непериодических функций алгебраическими многочленами, в частности при доказательстве весовых неравенств для алгебраических полиномов, в работах М.К.Потапова [21,22], А.Ю.Напеденина [23] предложены различные усредняющие операторы, играющие роль модуля непрерывности.

Хорошо известно, что при разложения периодической функции в ряд Фурье основной роль играет оператор сдвига $T_h f(x) = f(x+h)$, при помощи которого определяют обычные модули непрерывности высших порядков (см., например, монографии Н.К.Бари [1], А.Зигмунд [2]). В случае приближении 2π-периодических функций, особенно при решении экстремальных задач, в пространстве $L_2[0,2\pi]$ вместо оператора сдвига $T_h f(x) = f(x+h)$ используется оператор Стеклова (см., например, работы В.А.Абилова и Ф.В.Абиловой [24], С.Б.Вакарчука и В.И.Забутной [25], М.Ш.Шабозова и К.Тухлиева [26], М.Ш.Шабозова и Г.А.Юсупова [27]).

При изучении вопроса разложения функций в ряд Фурье-Чебышёва в гильбертовом пространстве $L_{2,\mu}[-1,1]$ с весом Чебышёва $\mu(x) := 1/\sqrt{1-x^2}$ вместо обычного модуля непрерывности используется оператор обобщённого сдвига, с помощью которого определяются обобщённые модули непрерывности m-ых порядков и классы функций, которые характеризуются этими модулями непрерывности. Экстремальная задача отыскания точной оценки скорости сходимости ряда Фурье-Чебышёва на указанных классах функций сводится к нахождению точной верхней грани частных сумм ряда Фурье – Чебышёва на рассматриваемых классах функций.

В этой главе найдены точные неравенства Джексона – Стечкина, в котором величины наилучшего полиномиального приближения функции $f \in L_{2,\mu}$ точно оценивается посредством интегралов от усреднённых с положительным весом обобщённого модуля непрерывности m-го порядка $\Omega_m(\mathcal{D}^r f, t)_{2,\mu}$, определяемого ниже, где $\mathcal{D}$ – оператор второго порядка Чебышёва. Для различных классов функций, задаваемых указанными модулями непрерывности и мажорантной, удовлетворяющей некоторым условиям, вычислены значения всех ранее перечисленных n-поперечников в пространстве $L_{2,\mu}[-1,1]$.

§1.1. Обозначения и вспомогательные утверждения

В настоящее время известны целый ряд важных теорем, в котором найдены точные константы в неравенстве типа Джексона – Стечкина и дано их применение в задачах вычислении значений различных n-поперечников заданных классов функций, принадлежащих гильбертовом пространству 2π-периодических функций $L_2 := L_2[0, 2\pi]$ с нормой

$$\|f\|_{L_2} = \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} < \infty.$$

Изложение указанных вопросов дано в известных монографиях по теории аппроксимации Н.П.Корнейчука [28, 29], В.М.Тихомирова [30], В.И.Иванова и О.И.Смирнова [31].

В последние десятилетия появились целый ряд работ, в которых подобные экстремальные задачи рассматриваются на конечном отрезке. В случае приближения на отрезке $[0, \pi]$ 2π-периодических функций вида $f(x) = \varphi(\cos x)$ подпространством косинус-полиномов

$$\mathcal{F}_{n-1} := \left\{\mathcal{F} :\ \mathcal{F}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cos kx,\ a_k \in \mathbb{R}\right\}$$

точное неравенство типа Джексона – Стечкинав в пространстве $L^2_{\alpha,\beta}[0, \pi]$ $(\alpha,\ \beta > -1)$ с нормой

$$\|f\|_{L^2_{\alpha,\beta}} = \left\{\int\limits_0^{\pi} f^2(x)\left(\sin\frac{x}{2}\right)^{2\alpha+1}\left(\cos\frac{x}{2}\right)^{2\beta+1} dx\right\}^{1/2} < \infty.$$

получил А.Г.Бабенко [3].

Отметим, что в общем случае при $\alpha = \beta \geq -1/2$ дальнейшее исследование этой задачи приведено Д.В.Чертовой [4]. Во Тхи Кук [5] решил эту задачу в случае $\alpha > \beta \geq -1/2$. В работах А.В.Иванова и В.И.Иванова [6, 7] указанная задача решена для функций многих переменных в пространстве $L_p(\mathbb{R}^d)$ со степенным весом. Для полиномиального приближения функции f множеством $\mathcal{P}_{n-1}$- алгебраических полиномов степени не более $n-1$ в пространстве

$L_2[-1,1]$ с нормой

$$\|f\|_2 := \|f\|_{L_2[-1,1]} = \left(\int\limits_{-1}^{1} f^2(x)dx\right)^{1/2} < \infty.$$

точное неравенство Джексона – Стечкина, впервые были получено С.Б.Вакарчуком в работе [8].

Продолжая исследования указанных авторов мы в этой главе получаем точные неравенства типа Джексона – Стечкина для наилучшего приближения вещественных суммируемых на отрезке $[-1,1]$ функций f с весом $\mu(x) := 1/\sqrt{1-x^2}$ элементами подпространства $\mathcal{P}_{n-1}$ в гильбертовом пространстве

$$L_{2,\mu}[-1,1] := L_2\Big((\sqrt{1-x^2})^{-1}; [-1,1]\Big)$$

соответствующей нормой

$$\|f\|_{L_{2,\mu}[-1,1]} = \left(\int\limits_{-1}^{1} \mu(x)f^2(x)dx\right)^{1/2} := \left(\int\limits_{-1}^{1} \frac{f^2(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx\right)^{1/2}.$$

Следуя работу [9], в пространстве $L_{2,\mu}[-1,1]$ рассмотрим оператор

$$F_h f(x) = \frac{1}{2}\left[f\left(x\cos h + \sqrt{1-x^2}\sin h\right) + f\left(x\cos h - \sqrt{1-x^2}\sin h\right)\right], \quad (1.1.1)$$

который будем называть *оператором сдвига.* Введём в рассмотрение конечные разности первого и высших порядков при помощи оператора сдвига $F_h f(x)$ равенствами

$$\Delta_h^1(f,x) = F_h f(x) - f(x) = (F_h - I)f(x),$$

$$\Delta_h^m(f,x) = \Delta_h(\Delta_h^{m-1}(f,\cdot),x) = (F_h - I)^m f(x) = \sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k}F_h^k f(x),$$

где $F_h^0 f(x) \equiv f(x)$, $F_h^k f(x) = F_h(F_h^{k-1}f(x))$, $k = 1,2,\ldots,m$; $m \in \mathbb{N}$ и I – единичный оператор в пространстве $L_{2,\mu}$. По введённым конечным разностям определим обобщённый модуль непрерывности равенством

$$\Omega_m(f,t)_{L_{2,\mu}[-1,1]} = \sup\Big\{\|\Delta_h^m(f,\cdot)\|_{L_{2,\mu}[-1,1]} : \ |h| \le t\Big\}. \quad (1.1.2)$$

Пусть

$$T_0(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}},\quad T_k(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(k\arccos x),\ k=1,2,\ldots \tag{1.1.3}$$

–последовательность многочленов Чебышёва, которые ортонормированы с чебышёвским весом $\mu(x):=1/\sqrt{1-x^2}$ на отрезке $[-1,1]$. Хорошо известно (см., напр., [12, с.91-98]), что разложение функции $f\in L_{2,\mu}[-1,1]$ в ряд Фурье–Чебышёва имеет вид

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(f)T_k(x) \tag{1.1.4}$$

а где

$$c_k(f)=\int\limits_{-1}^{1}\mu(x)f(x)\,T_k(x)dx \tag{1.1.5}$$

– коэффициенты Фурье – Чебышёва. Знак равенство в соотношение (1.1.4) следует понимать в смысле сходимости в метрике пространстве $L_{2,\mu}[-1,1]$.

Пусть теперь $\mathcal{D}=(1-x^2)\dfrac{d^2}{dx^2}-x\dfrac{d}{dx}$ – дифференциальный оператор второго порядка Чебышёва. Положим $\mathcal{D}^2f=\mathcal{D}(\mathcal{D}^1f)$, $\mathcal{D}^rf=\mathcal{D}(\mathcal{D}^{r-1}f)$, $(r=2,3,\ldots)$. Хорошо известно [12, с.54], что многочлены Чебышёва удовлетворяют следующему дифференциальному уравнению

$$(1-x^2)T_k''(x)-xT_k'(x)+k^2T_k(x)=0. \tag{1.1.6}$$

Из равенство (1.1.6) рекуррентно, находим

$$\mathcal{D}T_k(x)=-k^2T_k(x),\ldots,\mathcal{D}^rT_k(x)=(-1)^rk^{2r}T_k(x). \tag{1.1.7}$$

В работе В.А.Абилова и Ф.В.Абиловой [9] доказано, что для произвольной функции $f\in L_{2,\mu}[-1,1]$, имеющей непрерывные производные до $(2r)$-го порядка, коэффициенты Фурье – Чебышёва (1.1.5) ряда Фурье – Чебышёва (1.1.4) удовлетворяют равенствам

$$c_k(f)=(-1)^r\,k^{-2r}\,c_k(\mathcal{D}^rf),\ k=1,2,\ldots, \tag{1.1.8}$$

$$c_k(F_hf)=\cos kh\cdot c_k(f),\ k=1,2,\ldots, \tag{1.1.9}$$

где функция $F_h f$ – есть оператор сдвига, определённой равенством (1.1.1).

Пусть $L_{2,\mu}^{(2r)}[-1,1]$ ($r \in \mathbb{Z}_+, L_{2,\mu}^{(0)}[-1,1] = L_{2,\mu}[-1,1]$) – совокупность функций $f \in L_{2,\mu}[-1,1]$, у которых производная $\mathcal{D}^r f$ принадлежит пространству $L_{2,\mu}[-1,1]$.

Пользуясь равенствами (1.1.7) – (1.1.9) и тождеством Парсеваля, из (1.1.4) для произвольной функции $f \in L_{2,\mu}^{(2r)}$ получаем равенство [9]

$$\|\Delta_h^m(\mathcal{D}^r f)\|_{2,\mu}^2 = \sum_{k=1}^{\infty}(1-\cos kh)^{2m}k^{4r}c_k^2(f). \tag{1.1.10}$$

Учитывая формулу (1.1.10), модуль непрерывности (1.1.2) запишем в следующем виде

$$\Omega_m^2(\mathcal{D}^r f, t)_{2,\mu} = \sup\left\{\sum_{k=1}^{\infty} k^{4r}c_k^2(f)(1-\cos kh)^{2m} : \ |h| \le t\right\}. \tag{1.1.11}$$

Равенством

$$\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu} = \inf\Big\{\|f - p_{n-1}\|_{2.\mu} : \ p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}\Big\} \tag{1.1.12}$$

определим величину наилучшего приближение функции $f \in L_{2,\mu}$ элементами множества $\mathcal{P}_{n-1}$. В монографии П.К.Суетина [12, с. 26] доказано, что точняя нижняя грань в (1.1.12) реализует частичная сумма

$$S_{n-1}(f,x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(f)T_k(x)$$

ряда Фурье–Чебышёва (1.1.4), причём

$$\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu} = \|f - S_{n-1}(f)\|_{2,\mu} = \left(\sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f)\right)^{1/2}. \tag{1.1.13}$$

Имеет место следующая простая

Лемма 1.1.1. *Для произвольной* $f \in L_{2,\mu}^{(2r)}[-1,1]$ *справедливо точное неравенство*

$$\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu} \le n^{-2r}\mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^r f)_{2,\mu}. \tag{1.1.14}$$

Доказательство. Учитывая равенство (1.1.8) из соотношение (1.1.13) для произвольной функции $f \in L_{2,\mu}^{(2r)}[-1,1]$ будем иметь

$$\mathcal{E}_{n-1}^2(f)_{2,\mu} = \sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f) =$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} k^{-4r} c_k^2(\mathcal{D}^r f) \leq n^{-4r} \sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(\mathcal{D}^r f) = n^{-4r} \mathcal{E}_{n-1}^2(\mathcal{D}^r f)_{2,\mu}.$$

Очевидно, что знак равенства в (1.1.14) доставляет функция

$$f_0(x) := T_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(n \arccos x),$$

которая принадлежит классу $L_{2,\mu}^{(2r)}[-1,1]$ и для которой имеют место равенства

$$\mathcal{E}_{n-1}(f_0)_{2,\mu} = 1,\ \mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^r f_0)_{2,\mu} = n^{2r}.$$

Этим утверждение леммы 1.1.1. доказано. Из леммы вытекает

Следствие 1.1.1. *Для любых натуральных n и целых неотрицательных r справедливо равенство*

$$\sup\left\{ \frac{\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}}{\mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^r f)_{2,\mu}} :\ f \in L_{2,\mu}^{(2r)}[-1,1] \right\} = \frac{1}{n^{2r}}.$$

Условимся, что всюду далее в соотношениях общего характера, ради краткости, вместо $L_{2,\mu}[-1,1], L_{2,\mu}^{(2r)}[-1,1],\ \|f\|_{L_{2,\mu}[-1,1]}$ будем писать, соответственно, $L_{2,\mu}, L_{2,\mu}^{(2r)},\ \|f\|_{2,\mu}$.

В дальнейшем функцию $\varphi(t)$ будем называть весовой функцией на отрезке $[0,h]$, если $\varphi(t)$ является неотрицательной измеримой суммируемой на $[0,h]$ и нигде не обращается в нуль на $[0,h]$.

§1.2. Точные оценки среднеквадратическое полиномиальное приближение в пространстве $L_{2,\mu}$

В этом параграфе найдены точные оценки скорости сходимости ряда Фурье-Чебышёва на некоторых классах функций, задаваемых дифференциальным оператором второго порядка и характеризующихся усреднённым значением обобщённого модуля непрерывности m-го порядка $\Omega_m(\mathcal{D}^r f, t)_{2,\mu}$ в пространстве $L_{2,\mu}$. Иными словами, в метрике пространства $L_{2,\mu}$ получены точные неравенства, для наилучшее полиномиальное приближение дифференцируемых функций усреднёнными интегралами, содержащими значения модули непрерывности высших порядков производных этих функций. Найдены точные верхние грани отклонений заданных классов функций от их частных сумм ряда Фурье-Чебышёва в пространстве $L_{2,\mu}$.

Следующая теорема является в определённом смысле аналогом и обобщением одной теоремы работы В.В.Шалаева [14] для пространства $L_{2,\mu}$.

Теорема 1.2.1. *Пусть n, m-произвольные натуральные числа, $r \in \mathbb{Z}_+$ и $f \in L_{2,\mu}^{(2r)}$. Тогда справедливо неравенство*

$$\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu} \le \frac{1}{n^{2r}} \left(\frac{n}{2} \int_0^{\pi/n} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f, h)_{2,\mu} \sin nh dh \right)^m . \tag{1.2.1}$$

Доказательство. Применяя неравенства Гёльдера для рядов при любых $m, n \in \mathbb{N}$ и $r \in \mathbb{Z}_+$ для произвольной $f \in L_{2,\mu}^{(2r)}$ из (1.1.13) с учётом равенства (1.1.10) имеем

$$\mathcal{E}_{n-1}^2(f)_{2,\mu} - \sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f) \cos kh = \sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f) - \sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f) \cos kh =$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} (1 - \cos kh)\, c_k^2(f) = \sum_{k=n}^{\infty} |c_k(f)|^{2-1/m} |c_k(f)|^{1/m} (1 - \cos kh) \le$$

$$\le \left(\sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f) \right)^{1-1/(2m)} \left(\sum_{k=n}^{\infty} (1 - \cos kh)^{2m} c_k^2(f) \right)^{1/(2m)} \le$$

$$\le \Big(\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu} \Big)^{2-1/m} n^{-2r/m} \left(\sum_{k=n}^{\infty} (1 - \cos kh)^{2m}\, k^{4r}\, c_k^2(f) \right)^{1/(2m)} =$$

$$= \Big(\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}\Big)^{2-1/m} n^{-2r/m} \, \|\Delta_h^m(\mathcal{D}^r f)\|_{2,\mu}^{1/m} \le$$

$$\le \Big(\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}\Big)^{2-1/m} n^{-2r/m} \, \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f, h)_{2,\mu}.$$

Итак, мы доказали неравенство

$$\mathcal{E}_{n-1}^2(f)_{2,\mu} \le$$
$$\le \Big(\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}\Big)^{2-1/m} n^{-2r/m} \, \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f, h)_{2,\mu} + \sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f) \cos kh. \tag{1.2.2}$$

Умножая обе стороны полученного неравенства (1.2.2) на $\sin nh$ и интегрируя по аргументу h в промежутке $[0, \pi/n]$, получаем

$$\frac{2}{n}\, \mathcal{E}_{n-1}^2(f)_{2,\mu} \le \Big(\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}\Big)^{2-1/m} n^{-2r/m} \int\limits_0^{\pi/n} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f, h)_{2,\mu} \sin nh \, dh +$$
$$+ \sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f) \int\limits_0^{\pi/n} \sin nh \cos kh \, dh. \tag{1.2.3}$$

Но так как

$$\int\limits_0^{\pi/n} \sin nh \cos kh \, dh = \begin{cases} 0, & \text{если } k = n, \\ -\dfrac{2n}{k^2 - n^2} \cdot \cos^2\left(\dfrac{k\pi}{2n}\right), & \text{если } k > n, \end{cases}$$

то второе слагаемое в правой части неравенства (1.2.3) неположительно, а потому из (1.2.3) имеем

$$\frac{2}{n}\, \mathcal{E}_{n-1}^2(f)_{2,\mu} \le \Big(\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}\Big)^{2-1/m} n^{-2r/m} \int\limits_0^{\pi/n} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f, h)_{2,\mu} \sin nh \, dh,$$

откуда

$$\mathcal{E}_{n-1}^{1/m}(f)_{2,\mu} \le n^{-2r/m+1} \cdot \frac{1}{2} \int\limits_0^{\pi/n} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f, h)_{2,\mu} \sin nh \, dh$$

или, что то же,

$$\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu} \le \frac{1}{n^{2r}} \left(\frac{n}{2} \int\limits_0^{\pi/n} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f, h)_{2,\mu} \sin nh \, dh \right)^m, \tag{1.2.4}$$

откуда и следует утверждение теоремы 1.2.1.

Из теоремы 1.2.1 получаем

Следствие 1.2.1. *Справедливо равенство*

$$\sup_{f\in L_{2,\mu}^{(2r)}}\frac{n^{2r}\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}}{\left(\dfrac{n}{\pi}\displaystyle\int\limits_0^{\pi/n}\Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f,t)_{2,\mu}\sin nt\,dt\right)^m}=\left(\frac{\pi}{2}\right)^m. \tag{1.2.5}$$

Доказательство. В самом деле, из неравенства (1.2.4) имеем

$$\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}=\|f-S_{n-1}(f)\|_{2,\mu}\le\frac{1}{n^{2r}}\left(\frac{n}{2}\int\limits_0^{\pi/n}\Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f,t)_{2,\mu}\sin nt\,dt\right)^m=$$

$$=\frac{1}{n^{2r}}\left(\frac{\pi}{2}\right)^m\left(\frac{n}{\pi}\int\limits_0^{\pi/n}\Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f,t)_{2,\mu}\sin nt\,dt\right)^m,$$

откуда сразу запишем

$$\frac{n^{2r}\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}}{\left(\dfrac{n}{\pi}\displaystyle\int\limits_0^{\pi/n}\Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f,t)_{2,\mu}\sin nt\,dt\right)^m}\le\left(\frac{\pi}{2}\right)^m, \tag{1.2.6}$$

и поскольку неравенство (1.2.6) верно для произвольной функции $f\in L_{2,\mu}^{(2r)}$, то, переходя к верхней грани по всем функциям $f\in L_{2,\mu}^{(2r)}$, будем иметь

$$\sup_{f\in L_{2,\mu}^{(2r)}}\frac{n^{2r}\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}}{\left(\dfrac{n}{\pi}\displaystyle\int\limits_0^{\pi/n}\Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f,t)_{2,\mu}\sin nt\,dt\right)^m}\le\left(\frac{\pi}{2}\right)^m. \tag{1.2.7}$$

С другой стороны, для функции

$$f_0(x):=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(n\arccos x)=T_n(x)$$

имеем

$$\|\Delta_h^m(\mathcal{D}^r f_0)\|_{2,\mu}^2=(1-\cos nh)^{2m}n^{4r},\quad 0<h\le\pi/n,$$

$$\|f_0 - S_{n-1}(f_0)\|_{2,\mu} = \|f_0\|_{2,\mu} = 1,$$

а потому

$$\Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f_0, t)_{2,\mu} = n^{2r/m}(1 - \cos nt), \quad 0 < h \le \pi/n.$$

$$\left(\frac{n}{\pi}\int\limits_0^{\pi/n} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f_0, t)_{2,\mu} \sin nt\, dt\right)^m =$$

$$= \left(\frac{n}{\pi}\int\limits_0^{\pi/n} n^{2r/m}(1 - \cos nt) \sin nt\, dt\right)^m =$$

$$= \left(n^{2r/m}\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}(1 - \cos t)\sin t dt\right)^m = n^{2r}\left(\frac{2}{\pi}\right)^m,$$

$$\|f_0 - S_{n-1}(f_0)\|_{2,\mu}^2 = \|T_n\|_{2,\mu}^2 \equiv 1.$$

Используя полученные соотношения, имеем

$$\sup_{f \in L_{2,\mu}^{(2r)}} \frac{n^{2r}\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}}{\left(\frac{n}{\pi}\int\limits_0^{\pi/n} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f, t)_{2,\mu} \sin nt\, dt\right)^m} \ge$$

$$\ge \frac{n^{2r}\|f_0 - S_{n-1}(f_0)\|_{2,\mu}}{\left(\frac{n}{\pi}\int\limits_0^{\pi/n} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f_0, t)_{2,\mu} \sin nt\, dt\right)^m} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^m. \qquad (1.2.8)$$

Сопоставляя оценки сверху (1.2.7) с оценкой (1.2.8) приходим к равенство (1.2.5). Следствия 1.2.1 доказана.

Следствие 1.2.2. *При любых $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ для произвольной функции $f \in L_{2,\mu}^{(2r)}$ справедливо неравенство*

$$\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu} \le n^{-2r}\,\Omega_m(\mathcal{D}^r f, \pi/n)_{2,\mu}. \qquad (1.2.9)$$

В самом деле, пользуясь тем, что модуль непрерывности $\Omega_m(\mathcal{D}^r f, \pi/n)_{2,\mu}$ не убывает для $t \in (0, \pi/n]$, из (1.2.1) имеем

$$\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu} \le n^{-2r} \left(\Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f, \pi/n)_{2,\mu} \cdot \frac{n}{2} \int\limits_0^{\pi/n} \sin ntdt \right)^m =$$

$$= n^{-2r}\, \Omega_m(\mathcal{D}^r f, \pi/n)_{2,\mu}.$$

В случае, когда $\Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f, \pi/n)_{2,\mu}$ выпукла вверх на отрезке $[0, \pi/n]$, оценка (1.2.9) может быть улучшена. В самом деле, существует линейная функция $\varphi(t) := \varphi(f, t)$ такая, для которой

$$\varphi\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \Omega_m^{1/m}\left(\mathcal{D}^r f, \frac{\pi}{2n}\right)_{2,\mu}, \quad \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f, t)_{2,\mu} \le \varphi(t), \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{n}.$$

Запишем интеграл в (1.2.1) в следующем виде

$$\int\limits_0^{\pi/n} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f, t)_{2,\mu} \sin ntdt = \int\limits_0^{\pi/n} \left\{ \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f, t)_{2,\mu} - \varphi(t) \right\} \sin ntdt +$$

$$+ \int\limits_0^{\pi/n} \left\{ \varphi(t) - \Omega_m^{1/m}\left(\mathcal{D}^r f, \frac{\pi}{2n}\right)_{2,\mu} \right\} \sin ntdt + \Omega_m^{1/m}\left(\mathcal{D}^r f, \frac{\pi}{2n}\right)_{2,\mu} \int\limits_0^{\pi/n} \sin ntdt.$$

Первый интеграл в правой части полученного равенства неположителен, второй, как показывает элементарное вычисление, равен нулю, а потому

$$\int\limits_0^{\pi/n} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f, t)_{2,\mu} \sin ntdt \le$$

$$\le \Omega_m^{1/m}\left(\mathcal{D}^r f, \frac{\pi}{2n}\right)_{2,\mu} \int\limits_0^{\pi/n} \sin ntdt = \frac{2}{n} \Omega_m^{1/m}\left(\mathcal{D}^r f, \frac{\pi}{2n}\right)_{2,\mu}.$$

Подставляя полученную оценку в (1.2.1), приходим к следующему утверждению.

Следствие 1.2.3. *На множестве $L_{2,\mu}^{(2r)}$, у которого модуль непрерывности $\Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f, t)_{2,\mu}$ на отрезке $[0, \pi/n]$ выпуклый вверх, справедливо равенство*

$$\sup_{f \in L_{2,\mu}^{(2r)}} \frac{n^{2r} \mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}}{\Omega_m(\mathcal{D}^r f, \pi/(2n))_{2,\mu}} = 1. \tag{1.2.10}$$

Верхнюю грань в (1.2.10) *достигается для функции*

$$f_0(x) = T_n(x) := \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(n\arccos x) \in L_{2,\mu}^{(2r)}.$$

Теорема 1.2.2. *Пусть* m*-произвольное натуральное,* r*-неотрицательное целое и* $f \in L_{2,\mu}^{(2r)}$ $0 \le t \le \pi/n$. *Тогда справедливо неравенство*

$$\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu} \le \left\{\frac{nt}{nt-\sin nt}\right\}^m \frac{1}{n^{2r}} \left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f, h)_{2,\mu}\, dh\right)^m.$$

Доказательство. Интегрируя обе части неравенство (1.2.2) по аргументу h по отрезку $[0,t]$ $(0 \le t \le \pi/n)$, будем иметь

$$t\,\mathcal{E}_{n-1}^2(f)_{2,\mu} \le$$

$$\le \Big(\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}\Big)^{2-1/m} n^{-2r/m}\int\limits_0^t \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f, h)_{2,\mu}\, dh + \sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f)\frac{\sin kt}{k}. \tag{1.2.11}$$

Отсюда, после деление обе части неравенства (1.2.11) на t, получаем

$$\mathcal{E}_{n-1}^2(f)_{2,\mu} \le \Big(\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}\Big)^{2-1/m} n^{-2r/m}\cdot\frac{1}{t}\int\limits_0^t \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f, h)_{2,\mu}\, dh +$$

$$+\sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f)\frac{\sin kt}{kt}. \tag{1.2.12}$$

Пользуясь неравенством (см., например, [16])

$$\max_{u \ge nt}\left|\frac{\sin u}{u}\right| = \frac{\sin nt}{nt}, \tag{1.2.13}$$

справедливое при $(0 < nt \le \pi/2)$, из (1.2.12) имеем

$$\mathcal{E}_{n-1}^2(f)_{2,\mu}\left(1 - \frac{\sin nt}{nt}\right) \le$$

$$\leq \left(\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}\right)^{2-1/m} n^{-2r/m} \cdot \frac{1}{t}\int\limits_0^t \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f, h)_{2,\mu}\, dh,$$

откуда

$$\left(1-\frac{\sin nt}{nt}\right)\left(\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}\right)^{1/m} \leq \frac{1}{n^{2r/m}} \cdot \frac{1}{t}\int\limits_0^t \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f, h)_{2,\mu}\, dh$$

из которого имеем

$$\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu} \leq \left\{\frac{nt}{nt-\sin nt}\right\}^m \frac{1}{n^{2r}}\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f, h)_{2,\mu}\, dh\right)^m, \tag{1.2.14}$$

Теоремы 1.2.2. доказана

Следствие 1.2.4. *Пусть натуральных m, n, неотрицательных целое r, $f \in L_{2,\mu}^{(2r)}$ и $0 < t \leq \pi/n$ выполняется равенство*

$$\sup_{f\in L_{2,\mu}^{(2r)}} \frac{n^{2r}\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}}{\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f, h)_{2,\mu}\, dh\right)^m} = \left(1-\frac{\sin nt}{nt}\right)^{-m}.$$

В частности,

$$\sup_{f\in L_{2,\mu}^{(2r)}} \frac{n^{2r}\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}}{\left(\frac{n}{\pi}\int\limits_0^{\pi/n} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f, h)_{2,\mu}\, dh\right)^m} = 1.$$

Доказательство. Пользуясь неравенством (1.2.14), для произвольной $f \in L_{2,\mu}^{(2r)}$, будем иметь оценку сверху

$$\sup_{f\in L_{2,\mu}^{(2r)}} \frac{n^{2r}\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}}{\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f, h)_{2,\mu}\, dh\right)^m} \leq \left(1-\frac{\sin nt}{nt}\right)^{-m}, \tag{1.2.15}$$

Для функции $g_0(x) := T_n(x) = \sqrt{2/\pi}\,\cos(n \arccos x)$ имеем:

$$\|g_0 - S_{n-1}(g_0)\|_{2,\mu} \equiv 1,$$

$$\frac{1}{t}\int\limits_0^t \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r g_0, h)_{2,\mu} dh = n^{2r/m}\frac{1}{t}\int\limits_0^t (1-\cos nt)dt =$$

$$= n^{2r/m}\left(1-\frac{\sin nt}{nt}\right), \quad 0 < t \leq \frac{\pi}{n},$$

то мы получаем

$$\sup_{f\in L_{2,\mu}^{(2r)}} \frac{n^{2r}\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}}{\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f, h)_{2,\mu}\, dh\right)^m} \geq \frac{n^{2r}\|g_0 - S_{n-1}(g_0)\|_{2,\mu}}{\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r g_0, h)_{2,\mu}\, dh\right)^m} =$$

$$= \frac{n^{2r}}{n^{2r}\left(1-\frac{\sin nt}{nt}\right)^m} = \left(1-\frac{\sin nt}{nt}\right)^{-m}. \tag{1.2.16}$$

Сопоставляя оценку сверх (1.2.15) с оценкой снизу (1.2.16) приходим к утверждению следствия 1.2.4.

Отметим, что теорема 1.2.2 и следствие 1.2.4 являются обобщением результата С.Б.Вакарчука [15] доказанного для переодических функций в $L_2[0, 2\pi]$, на случай приближении функций, принадлежащих пространству $L_{2,\mu}$.

Имеет место

Теорема 1.2.3. *Пусть m-натуральное, r-целое неотрицательное, $f \in L_{2,\mu}^{(2r)}$ и $0 < t \leq \pi/n$. Тогда справедливо точное неравенство*

$$\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu} \leq$$

$$\leq \left\{1-\left(\frac{2}{nt}\sin\frac{nt}{2}\right)^2\right\}^{-m}\frac{1}{n^{2r}}\left(\frac{2}{t^2}\int\limits_0^t (t-\tau)\Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f, \tau)_{2,\mu} d\tau\right)^m.$$

Доказательство. Интегрируя по t в отрезке $[0, u]$ обе части неравенства (1.2.11) получаем

$$\frac{u^2}{2}\,\mathcal{E}_{n-1}^2(f)_{2,\mu} \leq$$

$$\leq \Big(\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}\Big)^{2-1/m} n^{-2r/m} \int\limits_0^u \int\limits_0^t \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f, h)_{2,\mu}\, dh dt + \sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f) \frac{1-\cos ku}{k^2}.$$

Воспользовавшись элементарным тождеством

$$\int\limits_0^u \int\limits_0^t \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f, h)_{2,\mu}\, dh dt = \int\limits_0^u (u-t)\Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f, t)_{2,\mu}\, dt,$$

и поделив обе стороны полученного соотношения на $u^2/2$, приходим к неравенству

$$\mathcal{E}_{n-1}^2(f)_{2,\mu} \leq \sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f) \left(\frac{2}{ku}\sin\frac{ku}{2}\right)^2 +$$

$$+\Big(\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}\Big)^{2-1/m} \frac{1}{n^{2r/m}} \cdot \frac{2}{u^2} \int\limits_0^u (u-t)\Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f, t)_{2,\mu}\, dt. \qquad (1.2.17)$$

Используя соотношение (1.2.13), из (1.2.17) выводим

$$\mathcal{E}_{n-1}^2(f)_{2,\mu} \left\{1 - \left(\frac{2}{nu}\sin\frac{nu}{2}\right)^2\right\} \leq$$

$$\leq \Big(\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}\Big)^{2-1/m} \frac{1}{n^{2r/m}} \cdot \frac{2}{u^2} \int\limits_0^u (u-t)\Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f, t)_{2,\mu}\, dt.$$

Отсюда получаем

$$\Big(\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}\Big)^{1/m} \leq$$

$$\leq \left\{1 - \left(\frac{2}{nu}\sin\frac{nu}{2}\right)^2\right\}^{-1} \frac{1}{n^{2r/m}} \cdot \frac{2}{u^2} \int\limits_0^u (u-t)\Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f, t)_{2,\mu}\, dt.$$

Возведя обе стороны последнего неравенства в степень m, будем иметь

$$\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu} \leq$$

$$\leq \left\{1 - \left(\frac{2}{nu}\sin\frac{nu}{2}\right)^2\right\}^{-m} \frac{1}{n^{2r}} \left(\frac{2}{u^2} \int\limits_0^u (u-t)\Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f, t)_{2,\mu}\, dt\right)^m, \qquad (1.2.18)$$

откуда и следует утверждение теоремы 1.2.3.

Следствие 1.2.5. *При любых* $0 < nt \leq \pi$, $n \in \mathbb{N}$ *имеет место равенство*

$$\sup_{f\in L_{2,\mu}^{(2r)}} n^{2r}\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}\cdot\left(\frac{2}{t^2}\int\limits_0^t (t-\tau)\Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f,\tau)_{2,\mu}\,d\tau\right)^{-m} =$$

$$=\left\{1-\frac{4}{n^2t^2}\sin^2\frac{nt}{2}\right\}^{-m}, \qquad (1.2.19)$$

В частности, пологая в (1.2.19) $t=\pi/n$ *получаем*

$$\sup_{f\in L_{2,\mu}^{(2r)}}\frac{n^{2r}\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}}{\left(2\left(\frac{n}{\pi}\right)^2\int\limits_0^{\pi/n}\left(\frac{\pi}{n}-\tau\right)\Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f,\tau)_{2,\mu}\,d\tau\right)^m}=\left\{\frac{\pi^2}{\pi^2-4}\right\}^m,$$

Доказательство. Из (1.2.18) для любой $f\in L_{2,\mu}^{(2r)}$ будем иметь оценку сверху

$$\sup_{f\in L_{2,\mu}^{(2r)}}\frac{n^{2r}\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}}{\left(\frac{2}{t^2}\int\limits_0^t (t-\tau)\Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f,\tau)_{2,\mu}\,d\tau\right)^m}\leq\left\{1-\frac{4}{n^2t^2}\sin^2\frac{nt}{2}\right\}^{-m}. \qquad (1.2.20)$$

С целью получения обратного неравенства, равной правой части (1.2.20), введём в рассмотрение функцию $g_0(x)=\sqrt{2/\pi}\cos(n\arccos x)$, для которой при доказательстве следствия 1.2.1 установили равенство

$$\Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r g_0,\tau)_{2,\mu}=n^{2r/m}(1-\cos n\tau),\quad 0<\tau\leq\pi/n.$$

Далее, простой подсчёт показывает, что

$$\left(\frac{2}{t^2}\int\limits_0^t (t-\tau)\Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r g_0,\tau)_{2,\mu}d\tau\right)^m=n^{2r}\left\{1-\frac{4}{n^2t^2}\sin^2\frac{nt}{2}\right\}^m.$$

Воспользовавшись этой формулой, получаем оценку снизу

$$\sup_{f\in L_{2,\mu}^{(2r)}}\frac{n^{2r}\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}}{\left(\frac{2}{t^2}\int\limits_0^t (t-\tau)\Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f,\tau)_{2,\mu}\,d\tau\right)^m}\geq$$

$$\geq \frac{n^{2r}\|g_0 - S_{n-1}(g_0)\|_{2,\mu}}{\left(\dfrac{2}{t^2}\displaystyle\int\limits_0^t (t-\tau)\Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r g_0, \tau)_{2,\mu}\, d\tau\right)^m} =$$

$$= \frac{n^{2r}}{n^{2r}\left\{1 - \frac{4}{n^2t^2}\sin^2\frac{nt}{2}\right\}^m} = \left\{1 - \frac{4}{n^2t^2}\sin^2\frac{nt}{2}\right\}^{-m}. \qquad (1.2.21)$$

Из неравенств (1.2.20) и (1.2.21), получаем требуемое равенство (1.2.19).

§1.3. Точные верхные грани приближения некоторых классов функций суммами Фурье-Чебышёва в $L_{2,\mu}$

В данном параграфе приведём решении экстремальной задачи отыскания верхних граней приближения заданного класса функций посредством частных сумм ряда Фурье-Чебышёва

$$S_{n-1}(f,x)=\sum_{k=0}^{n-1} c_k(f)\,T_k(x)$$

в пространстве $L_{2,\mu}$. Приводим определение классов функций, которые задаются мажорантными функциями. Пусть $\Psi_1(t),\Psi_2(t),\Psi_3(t)$ – произвольные непрерывные и неубывающие на положительной полуоси $[0,+\infty)$ функции, в нуле обращающие в нул: $\Psi_i(0)=0\ \ (i=1,2,3)$.

Введём в рассмотрение классов функций:

$W_m^{(r)}(\mathcal{D},\Psi_1)$ — класс функций $f\in L_{2,\mu}^{(2r)}$ $(r=0,1,\ldots,L_{2,\mu}^{(0)}=L_{2,\mu})$, для которых при любых натуральных $m,n\in\mathbb{N}$, и $r\in\mathbb{Z}_+$ выполняется ограничение

$$\frac{n}{\pi}\int\limits_0^{\pi/n}\Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f,t)_{2,\mu}\sin nt dt\le\Psi_1\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Аналогичным образом, $W_{m,h}^{(r)}(\mathcal{D},\Psi_2)$ — класс функций $f\in L_{2,\mu}^{(2r)}$, для которых при любых натуральных m,n и целых неотрицательных r и $0<h\le\pi/n$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{h}\int\limits_0^{h}\Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f,\tau)_{2,\mu}d\tau\le\Psi_2\left(h\right).$$

Через $W_{m,h}^{(r)}(\mathcal{D},\Psi_3)$ обозначим аналогичный класс функций, для которых выполняется ограничение

$$\frac{2}{h^2}\int\limits_0^{h}(h-\tau)\Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f,\tau)_{2,\mu}d\tau\le\Psi_3\left(h\right).$$

Основной результат данного параграфа является

Теорема 1.3.1. *При любых натуральных m, n и целых положительных r, $0 < h \leq \pi/n$ справедливы равенства*

$$\mathcal{E}_{n-1}\Big(W_m^{(r)}(\mathcal{D},\Psi_1)\Big)_{2,\mu} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^m \frac{1}{n^{2r}}\,\Psi_1^m\left(\frac{\pi}{n}\right), \tag{1.3.1}$$

$$\mathcal{E}_{n-1}\Big(W_{m,h}^{(r)}(\mathcal{D},\Psi_2)\Big)_{2,\mu} = \left(1-\frac{\sin nh}{nh}\right)^{-m} \frac{1}{n^{2r}}\,\Psi_2^m\,(h)\,, \tag{1.3.2}$$

$$\mathcal{E}_{n-1}\Big(W_{m,h}^{(r)}(\mathcal{D},\Psi_3)\Big)_{2,\mu} = \left\{1-\frac{4}{n^2h^2}\sin^2\frac{nh}{2}\right\}^{-m} \frac{1}{n^{2r}}\,\Psi_3^m\,(h)\,. \tag{1.3.3}$$

Доказательство. Соотношения (1.3.1) – (1.3.3) доказываются одинаково, а потому мы докажем только равенство (1.3.3). Используя определение класса $W_{m,h}^{(r)}(\mathcal{D},\Psi_3)$, из неравенства (1.2.18) для произвольной $f \in W_{m,h}^{(r)}(\mathcal{D},\Psi_3)$ имеем

$$\mathcal{E}_{n-1}\Big(W_{m,h}^{(r)}(\mathcal{D},\Psi_3)\Big)_{2,\mu} := \sup\Big\{\,\|f-S_{n-1}(f)\|_{2,\mu}:\ f\in W_{m,h}^{(r)}(\mathcal{D},\Psi_3)\,\Big\} \leq$$

$$\leq \left\{1-\frac{4}{n^2h^2}\sin^2\frac{nh}{2}\right\}^{-m} \frac{1}{n^{2r}}\,\Psi_3^m\,(h)\,. \tag{1.3.4}$$

Легко проверить, что функция

$$g_1(x) = \left\{1-\left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-m} \frac{1}{n^{2r}}\,\Psi_3^m\,(h)\,T_n(x),$$

где по-прежнему $T_n(x) = \sqrt{2/\pi}\cos(n\arccos x)$, $-1 \leq x \leq 1$ принадлежит классу $W_{m,h}^{(r)}(\mathcal{D},\Psi_3)$ и для этой функции

$$\|g_1-S_{n-1}(g_1)\|_{2,\mu} = \|g_1\|_{2,\mu} = \left\{1-\left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-m} \frac{1}{n^{2r}}\,\Psi_3^m\,(h)\,,$$

а используя это равенство мы получаем оценку снизу

$$\sup\Big\{\,\|f-S_{n-1}(f)\|_{2,\mu}:\ f\in W_{m,h}^{(r)}(\mathcal{D},\Psi_3)\,\Big\} \geq$$

$$\geq \|g_1 - S_{n-1}(g_1)\|_{2,\mu} =$$

$$= \left\{1 - \left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-m} \frac{1}{n^{2r}}\,\Psi_3^m\,(h)\,. \qquad (1.3.5)$$

Сопоставив оценки сверху (1.3.4) и снизу (1.3.5), приходим к неравенству (1.3.3), чем и завершаем доказательство теоремы 1.3.1.

Следствие 1.3.1. *В утверждении теоремы 1.3.1, соответственно при* $h = \pi/(2n)$ *и* $h = \pi/n$, *справедливы равенства*

$$\mathcal{E}_{n-1}\Big(W^{(r)}_{m,\pi/(2n)}(\mathcal{D}, \Psi_2)\Big)_{2,\mu} = \left(\frac{\pi}{\pi - 2}\right)^m \frac{1}{n^{2r}}\,\Psi_2^m\left(\frac{\pi}{2n}\right),$$

$$\mathcal{E}_{n-1}\Big(W^{(r)}_{m,\pi/n}(\mathcal{D}, \Psi_3)\Big)_{2,\mu} = \left(\frac{\pi^2}{\pi^2 - 4}\right)^m \frac{1}{n^{2r}}\,\Psi_3^m\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Теперь рассмотрим вопрос о точной верхней грани модулей коэффициентов Фурье – Чебышёва

$$c_n(f) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} T_n(x)dx$$

на изученных нами выше классах функций.

Теорема 1.3.2. *Для произвольного* $n \in \mathbb{N}$ *имеют место равенства*

$$\sup\Big\{|c_n(f)|:\ f \in W^{(r)}_m(\mathcal{D}, \Psi_1)\Big\} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^m \frac{1}{n^{2r}}\,\Psi_1^m\left(\frac{\pi}{n}\right), \qquad (1.3.6)$$

$$\sup\Big\{|c_n(f)|:\ f \in W^{(r)}_{m,h}(\mathcal{D}, \Psi_2)\Big\} = \left(\frac{\pi}{\pi - 2}\right)^m \frac{1}{n^{2r}}\,\Psi_2^m\left(\frac{\pi}{2n}\right), \qquad (1.3.7)$$

$$\sup\Big\{|c_n(f)|:\ f \in W^{(r)}_{m,h}(\mathcal{D}, \Psi_3)\Big\} = \left(\frac{\pi^2}{\pi^2 - 4}\right)^m \frac{1}{n^{2r}}\,\Psi_3^m\left(\frac{\pi}{n}\right). \qquad (1.3.8)$$

Доказательство. Равенства (1.3.6) – (1.3.8) доказываются одинаково, а потому, без умаления общности, приводим доказательство равенства (1.3.6). Учитывая тот факт, что частная сумма $S_{n-1}(f,x)$ ряда (1.1.4) ортогональна полиному $T_n(x)$, запишем

$$c_n(f) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{T_n(x))}{\sqrt{1-x^2}}[f(x) - S_{n-1}(f,x)]dx. \qquad (1.3.9)$$

Применив к правой части (1.3.9) неравенство Коши – Буняковского, с учётом соотношения (1.2.20), получаем

$$\sup\left\{|c_n(f)|:\ f\in W_m^{(r)}(\mathcal{D},\Psi_1)\right\}\le$$

$$\le\sup\left\{\|f-S_{n-1}(f)\|_{2,\mu}:\ f\in W_m^{(r)}(\mathcal{D},\Psi_1)\right\}$$

$$\le\left(\frac{\pi}{2}\right)^m\frac{1}{n^{2r}}\,\Psi_1^m\left(\frac{\pi}{n}\right). \tag{1.3.10}$$

Простыми вычислениями легко убедиться, что функция

$$f_0(x)=\left(\frac{\pi}{2}\right)^m\frac{1}{n^{2r}}\,\Psi_1^{2m}\left(\frac{\pi}{n}\right)\,T_n(x),$$

где

$$T_n(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(n\arccos x),$$

принадлежит классу $W_m^{(r)}(\mathcal{D},\Psi_1)$ и для этой функции имеем

$$\sup\left\{|c_n(f)|:\ f\in W_m^{(r)}(\mathcal{D},\Psi_1)\right\}\ge|c_n(f_0)|=$$

$$=\left|\int\limits_{-1}^{1}\frac{f_0(x)}{\sqrt{1-x^2}}T_n(x)dx\right|=$$

$$=\left(\frac{\pi}{2}\right)^m\frac{1}{n^{2r}}\Psi_1^m\left(\frac{\pi}{n}\right). \tag{1.3.11}$$

Равенство (1.3.6) сразу следует из сопоставления неравенств (1.3.10) и (1.3.11). Теорема 1.3.2 доказана.

§1.4. Неравенства Джексона – Стечкина для обобщённых модулей непрерывности, определяемых дифференциальными операторами второго порядка, в пространстве $L_{2,\mu}$

Неравенства, связывающие наилучшее приближение функции с модулями непрерывности более высоких порядков, называются неравенствами типа Джексона – Стечкина. Имеет место большое количество опубликованных работ, в которых получен интересные результаты, посвященных неравенствам типа Джексона – Стечкина и их обобщениям в различных пространствах. Что же касается наилучших среднеквадратических приближений, то отметим работы [3, 16, 27, 31–37] и приведённая в них цитированной литературы.

Символом

$$\chi_{n,m,r}\left(\Omega_m; \pi/n\right)_{2,\mu} = \sup_{f\in L_{2,\mu}^{(2r)}} \frac{n^{2r}\mathscr{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}}{\Omega_m(\mathcal{D}^r f; \pi/n)_{2,\mu}}$$

обозначим точную константу в неравенстве типа Джексона–Стечкина

$$\mathscr{E}_{n-1}(f)_{2,\mu} \leq \chi \cdot n^{-2r}\Omega_m(\mathcal{D}^r f; \pi/n)_{2,\mu},$$

где $\Omega_m(\mathcal{D}^r f; \pi/n)_{2,\mu}$ и $\mathscr{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}$ определяются соответственно как в равенствах (1.1.11) и (1.1.13).

Всюду далее введём обозначение

$$\widetilde{\Omega}_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; \tau)_{2,\mu} := \frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; h)_{2,\mu}\, dh. \tag{1.4.1}$$

Теорема 1.4.1. *Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $f \in L_2^{(2r)}$ и $0 < t \leq \pi/n$. Тогда справедливы равенства*

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)} \\ f^{(r)}\neq const}} \frac{n^{2r}\mathscr{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}}{\left(\dfrac{1}{t}\displaystyle\int\limits_0^t \widetilde{\Omega}_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; h)_{2,\mu}\, dh\right)^m} = \left(1 - \frac{Si(nh)}{nh}\right)^{-m}, \tag{1.4.2}$$

где $Si(x) = \displaystyle\int\limits_0^x \frac{\sin u}{u}\, du$ – интегральный синус. Существует функция $f_0 \in L_2^{(2r)}$, реализующая в (1.4.2) верхнюю грань.

Доказательство. Применяя неравенства Гёльдера для рядов, при любых $m,n\in\mathbb{N}$ и $r\in\mathbb{Z}_+$, для произвольной $f\in L_{2,\mu}^{(2r)}$ с учётом равенства (1.1.10) и определения модуля непрерывности Ω_m, имеем

$$\mathscr{E}_{n-1}^2(f)_{2,\mu}-\sum_{k=n}^{\infty}c_k^2(f)\cos kh=\sum_{k=n}^{\infty}c_k^2(f)-\sum_{k=n}^{\infty}c_k^2(f)\cos kh=$$

$$=\sum_{k=n}^{\infty}(1-\cos kh)\,c_k^2(f)=\sum_{k=n}^{\infty}|c_k(f)|^{2-1/m}|c_k(f)|^{1/m}(1-\cos kh)\le$$

$$\le\left(\sum_{k=n}^{\infty}c_k^2(f)\right)^{1-1/(2m)}\left(\sum_{k=n}^{\infty}(1-\cos kh)^{2m}c_k^2(f)\right)^{1/(2m)}\le$$

$$\le\Big(\mathscr{E}_{n-1}(f)\Big)^{2-1/m}n^{-2r/m}\left(\sum_{k=n}^{\infty}(1-\cos kh)^{2m}\,k^{4r}\,c_k^2(f)\right)^{1/(2m)}=$$

$$=\Big(\mathscr{E}_{n-1}(f)\Big)^{2-1/m}n^{-2r/m}\,\|\Delta_h^m(\mathcal{D}^rf)\|^{1/m}\le$$

$$\le\Big(\mathscr{E}_{n-1}(f)\Big)^{2-1/m}n^{-2r/m}\,\Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^rf;h).$$

Полученное неравенство перепишем в виде

$$\mathscr{E}_{n-1}^2(f)_{2,\mu}\le\Big(\mathscr{E}_{n-1}(f)\Big)^{2-1/m}n^{-2r/m}\,\Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^rf;h)+\sum_{k=n}^{\infty}c_k^2(f)\cos kh. \tag{1.4.3}$$

Интегрируя обе стороны неравенство (1.4.3) по аргументу h в промежутке $[0,\tau]$, где $0<\tau\le\pi/n$, получаем

$$\tau\,\mathscr{E}_{n-1}^2(f)_{2,\mu}\le\Big(\mathscr{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}\Big)^{2-1/m}n^{-2r/m}\int_0^{\tau}\Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^rf;h)_{2,\mu}\,dh+$$

$$+\sum_{k=n}^{\infty}c_k^2(f)\frac{\sin k\tau}{k}. \tag{1.4.4}$$

Поделив обе части полученного неравенства на число τ и снова интегрируя по τ в пределах от 0 до t, будем иметь

$$t\,\mathscr{E}_{n-1}^2(f)_{2,\mu}\le\Big(\mathscr{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}\Big)^{2-1/m}n^{-2r/m}\int_0^t\left(\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}\Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^rf;h)_{2,\mu}\,dh\right)d\tau+$$

$$+\sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f) \int\limits_0^t \frac{\sin k\tau}{k\tau}\, d\tau.$$

Отсюда, пользуясь обозначением (1.4.2) и определением интегрального синуса $Si(x) = \int\limits_0^x \frac{\sin u}{u}\, du$, получаем неравенство

$$\mathscr{E}_{n-1}^2(f)_{2,\mu} \le \Big(\mathscr{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}\Big)^{2-1/m} n^{-2r/m} \left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \widetilde{\Omega}_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; \tau)_{2,\mu}\, d\tau\right)$$

$$+\sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f) \frac{Si(kt)}{kt}. \tag{1.4.5}$$

Далее учитывая, что функция $\frac{Si(kt)}{kt}$ для значений $k \ge n$ является монотонно убывающей, имеем

$$\max\left\{\frac{Si(kt)}{kt} :\ k \ge n\right\} = \frac{Si(nt)}{nt},$$

используя которую, из (1.4.5) получаем

$$\left(1 - \frac{Si(nt)}{nt}\right) \mathscr{E}_{n-1}^2(f)_{2,\mu} \le \Big(\mathscr{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}\Big)^{2-1/m} n^{-2r/m} \cdot \frac{1}{t}\int\limits_0^t \widetilde{\Omega}_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; \tau)_{2,\mu}\, d\tau.$$

Последнее неравенство запишем в нужном нам виде

$$\mathscr{E}_{n-1}(f) \le \frac{1}{n^{2r}} \left(1 - \frac{Si(nt)}{nt}\right)^{-m} \left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \widetilde{\Omega}_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; \tau)_{2,\mu}\, d\tau\right)^m.$$

Отсюда для произвольной $f \in L_{2,\mu}^{(2r)}$ получаем оценку

$$\frac{n^{2r}\mathscr{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}}{\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \widetilde{\Omega}_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; \tau)_{2,\mu}\, d\tau\right)^m} \le \left(1 - \frac{Si(nt)}{nt}\right)^{-m}. \tag{1.4.6}$$

Для получения оценки снизу, равной правой части (1.4.6) вводим в рассмотрение функцию $f_0(x) := \sqrt{2/\pi}\cos(n \arccos x) = T_n(x) \in L_2^{(2r)}$, для которой простым подсчётом получаем $\mathscr{E}_{n-1}(f_0)_{2,\mu} = \|f_0\|_{2,\mu} = 1$;

$$\Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f_0; h)_{2,\mu} = n^{2r/m}(1 - \cos nh), \quad 0 < h \le \pi/n;$$

$$\widetilde{\Omega}_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f_0;\tau)_{2,\mu} := \frac{1}{\tau}\int\limits_0^{\tau}\Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f_0;h)dh = n^{2r/m}\left(1-\frac{\sin n\tau}{n\tau}\right);$$

$$\frac{1}{t}\int\limits_0^{t}\widetilde{\Omega}_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f_0;\tau)_{2,\mu}d\tau = n^{2r/m}\cdot\frac{1}{t}\int\limits_0^{t}\left(1-\frac{\sin n\tau}{n\tau}_{\;2,\mu}\right)d\tau =$$

$$= n^{2r/m}\left(1-\frac{1}{nt}\int\limits_0^{nt}\frac{\sin\tau}{\tau}d\tau\right) = n^{2r/m}\left(1-\frac{Si(nt)}{nt}\right).$$

Учитывая полученное соотношение, запишем оценку снизу

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(2r)}\\ f\neq const}}\frac{n^{2r}\mathscr{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}}{\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^{t}\widetilde{\Omega}_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f;h)_{2,\mu}\,dh\right)^m} \geq \frac{n^{2r}\mathscr{E}_{n-1}(f_0)_{2,\mu}}{\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^{t}\widetilde{\Omega}_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f_0;\tau)_{2,\mu}\,d\tau\right)^m} =$$

$$= \frac{n^{2r}}{n^{2r}\left(1-\frac{Si(nt)}{nt}\right)^m} = \left(1-\frac{Si(nt)}{nt}\right)^{-m}, \quad 0<t\leq\pi/n. \tag{1.4.7}$$

Требуемое неравенство(1.4.2) получаем из сопоставлении неравенств (1.4.6) и (1.4.7). Теорема 1.4.1. доказана.

Доказанное равенство (1.4.2) в некотором смысле является обобщением и распространением известных результатов Л.В.Тайкова [16] (случай $m=1$) и С.Б.Вакарчука [15] (случай $m\geq 1$, $m\in\mathbb{N}$) о приближении периодических дифференцируемых функций $f\in L_2^{(r)}$ на случай приближения функций $f\in L_{2,\mu}^{(2r)}$ частными суммами Фурье–Чебышёва.

Теорема 1.4.2. *При всех $t\in(0,\pi/n]$ справедливо неравенство*

$$\frac{2^m}{n^{2r}(nt)^{2m}} \leq \sup_{f\in L_2^{(2r)}}\frac{\mathscr{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}}{\Omega_m(\mathcal{D}^r f;t)_{2,\mu}} \leq \frac{2^m}{n^{2r}}\left(\frac{1}{(nt)^2}+\frac{1}{2}\right)^m. \tag{1.4.8}$$

Из (1.4.8), в частности, для константы Джексона–Стечкина имеет место двусторонняя оценка

$$\left(\frac{2}{\pi^2}\right)^m\cdot\frac{1}{n^{2r}} \leq \chi_{n,m,r}(\Omega_m;\pi/n)_{2,\mu} \leq \frac{2^m}{n^{2r}}\left(\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{2}\right)^m. \tag{1.4.9}$$

или что то же

$$\left(\frac{2}{\pi^2}\right)^m \cdot \frac{1}{n^{2r}} \le \chi_{n,m,r}(\Omega_m;\pi/n)_{2,\mu} \le \left(\frac{2}{\pi^2}+1\right)^m \frac{1}{n^{2r}}.$$

Доказательство. В самом деле, беря интеграл от обоих частей неравенство (1.4.4) по переменному τ в пределах от $\tau=0$ до $\tau=t$, получаем

$$\frac{t^2}{2}\mathscr{E}^2_{n-1}(f)_{2,\mu} \le \Big(\mathscr{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}\Big)^{2-1/m} n^{-2r/m}\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f;h)_{2,\mu}\,dhd\tau+$$

$$+\sum_{k=n}^\infty c_k^2(f)\frac{1-\cos kt}{k^2}. \tag{1.4.10}$$

Выполнив интегрирование по частям в повторном интеграле и оценив числовой ряд в правой части (1.4.10), запишем

$$\frac{t^2}{2}\mathscr{E}^2_{n-1}(f)_{2,\mu} \le \Big(\mathscr{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}\Big)^{2-1/m} n^{-2r/m}\int\limits_0^t (t-\tau)\Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f;\tau)_{2,\mu}\,d\tau+$$

$$+\frac{1}{n^2}\sum_{k=n}^\infty c_k^2(f)(1-\cos kt). \tag{1.4.11}$$

Применив неравенство Гёльдера к числовому ряду в (1.4.11), получим

$$\frac{t^2}{2}\mathscr{E}^2_{n-1}(f)_{2,\mu} \le \Big(\mathscr{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}\Big)^{2-1/m} n^{-2r/m}\int\limits_0^t (t-\tau)\Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f;\tau)_{2,\mu}\,d\tau+$$

$$+\frac{1}{n^2}\left\{\sum_{k=n}^\infty |c_k(f)|^{2-1/m}|c_k(f)|^{1/m}(1-\cos kt)\right\} \le$$

$$\le \Big(\mathscr{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}\Big)^{2-1/m} n^{-2r/m}\int\limits_0^t (t-\tau)\Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f;\tau)_{2,\mu}\,d\tau+$$

$$+\frac{1}{n^2}\left\{\Big(\mathscr{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}\Big)^{2-1/m} n^{-2r/m}\Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f;t)_{2,\mu}\right\} =$$

$$=\frac{1}{n^{2+2r/m}}\Big(\mathscr{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}\Big)^{2-1/m}\left\{\Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f;t)_{2,\mu}+n^2\int\limits_0^t (t-\tau)\Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f;\tau)_{2,\mu}\,d\tau\right\}.$$

Поделив обе части полученного неравенство на $\mathscr{E}^2_{n-1}(f)_{2,\mu}$ и умножив на $\left(\mathscr{E}^2_{n-1}(f)_{2,\mu}\right)^{1/m}$ приходим к неравенству

$$\frac{t^2}{2}\left(\mathscr{E}^2_{n-1}(f)_{2,\mu}\right)^{1/m} \le \frac{1}{n^{2+2r/m}}\left\{\Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f;t)_{2,\mu} + n^2\int\limits_0^t (t-\tau)\Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f;\tau)_{2,\mu}\,d\tau\right\}$$

Оценив интеграл в правой части этого неравенства и пользуясь монотонной возрастании Ω_m получаем

$$\frac{t^2}{2}\left(\mathscr{E}^2_{n-1}(f)_{2,\mu}\right)^{1/m} \le \frac{1}{n^{2+2r/m}}\Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f;t)_{2,\mu} + \left(1+\frac{(nt)^2}{2}\right)$$

Возведя обе части полученного неравенства в степень m будем иметь

$$\frac{t^{2m}}{2^m}\mathscr{E}_{n-1}(f)_{2,\mu} \le \frac{1}{n^{2(m+r)}}\cdot\Omega_m(\mathcal{D}^r f;t)_{2,\mu}\left(1+\frac{(nt)^2}{2}\right)^m.$$

Отсюда имеем

$$\frac{\mathscr{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}}{\Omega_m(\mathcal{D}^r f;t)_{2,\mu}} \le \frac{2^m}{n^{2r}}\left(\frac{1}{(nt)^2}+\frac{1}{2}\right)^m. \tag{1.4.12}$$

Оценку в (1.4.8) получим для функции $f_0(x) = T_n(x)$, для которой $\mathscr{E}_{n-1}(f_0)_{2,\mu} = 1$. Простой подсчёт показывает, что

$$\Omega_m(\mathcal{D}^r f_0;t)_{2,\mu} = n^{2r}\left(2\sin^2\frac{nt}{2}\right)^m \le n^{2r}\cdot\frac{(nt)^{2m}}{2^m}.$$

Имеем

$$\sup_{f\in L_2^{(2r)}}\frac{\mathscr{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}}{\Omega_m(\mathcal{D}^r f;t)_{2,\mu}} \ge \frac{\mathscr{E}_{n-1}(f_0)_{2,\mu}}{\Omega_m(\mathcal{D}^r f_0;t)_{2,\mu}} \ge \frac{2^m}{n^{2r}(nt)^{2m}}. \tag{1.4.13}$$

Требуемое двойное неравенство (1.4.8) получим из сопоставления неравенств (1.4.12) и (1.4.13), а неравенство (1.4.9) следует из (1.4.8) при $t = \pi/n$, чем и завершаем доказательство теоремы 1.4.2.

Замечание. Доказанная теорема 1.4.2 является обобщением одного результата С.Б.Вакарчука [15] о среднеквадратическом приближении периодической дифференцируемой функции $f \in L_2[0,2\pi]$, для обычных модулей гладкости m-го порядка $\omega_m(f^{(r)};t)_2$ на случай наилучшего среднеквадратическом приближении функции $f\in L_{2,\mu}[-1,1]$, гладкостные структурные характеристики которой выражаются через обобщённый модуль непрерывности m-го порядка $\Omega_m(\mathcal{D}^rf;t)_{2,\mu}$.

Пусть $\mathscr{F}(t)$ – непрерывная неубывающая положительная в области $[0,+\infty)$ функция такая, что $\mathscr{F}(0)=0$.

Через $\widetilde{W}^{(r)}_{m,h}(\mathcal{D},\mathscr{F})$, $m,n\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+=\mathbb{N}\cup\{0\}$, $0<h\leq\pi/n$ обозначим класс функций $f\in L_2^{(2r)}$, для которых при любом $h\in\mathbb{R}_+$ имеет место неравенство $\frac{1}{h}\int_0^h\widetilde{\Omega}_m^{1/m}(\mathcal{D}^rf;\tau)_{2,\mu}d\tau\leq\mathscr{F}\left(h\right).$

В этих обозначениях справедлива следующая

Теорема 1.4.3. *Пусть* $m,n\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$ *и* $0<h\leq\pi/n$. *Тогда справедливо равенство*

$$\mathscr{E}_{n-1}\Big(\widetilde{W}^{(r)}_{m,h}(\mathcal{D},\mathscr{F})\Big)=\frac{1}{n^{2r}}\left(1-\frac{Si(nh)}{nh}\right)^{-m}\mathscr{F}^m\left(h\right). \tag{1.4.14}$$

Доказательство. Используя определение класса $\widetilde{W}^{(r)}_{m,h}(\mathcal{D},\mathscr{F})_{2,\mu}$, из неравенства (1.4.6) получаем оценку сверху

$$\sup\Big\{\,\mathscr{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}:\ f\in\widetilde{W}^{(r)}_{m,h}(\mathcal{D},\mathscr{F})_{2,\mu}\,\Big\}\leq$$

$$\leq\frac{1}{n^{2r}}\left(1-\frac{Si(nh)}{nh}\right)^{-m}\mathscr{F}^m\left(h\right). \tag{1.4.15}$$

Чтобы поучить оценку снизу введём в рассмотрении функцию

$$f_1(x)=\frac{1}{n^{2r}}\left(1-\frac{Si(nh)}{nh}\right)^{-m}\mathscr{F}^m\left(h\right)T_n(x).$$

Легко проверить, что функция $f_1\in\widetilde{W}^{(r)}_{m,h}(\mathcal{D},\mathscr{F})$, кроме того

$$\|f_1\|=\frac{1}{n^{2r}}\left(1-\frac{Si(nh)}{nh}\right)^{-m}\mathscr{F}^m\left(h\right),$$

а потому имеем

$$\sup\Big\{\,\mathscr{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}:\ f\in\widetilde{W}^{(r)}_{m,h}(\mathcal{D},\mathscr{F})\,\Big\}\geq$$

$$\geq \mathscr{E}_{n-1}(f)_{2,\mu} = \|f_1\|_{2,\mu} = \frac{1}{n^{2r}}\left(1 - \frac{Si(nh)}{nh}\right)^{-m} \mathscr{F}^m(h). \qquad (1.4.16)$$

Сравнивая неравенства (1.4.15) и (1.4.16), получаем равенство (1.4.14). Этим завершается доказательство теоремы 1.4.3.

В качестве приложения теоремы 1.4.3 рассмотрим задачу о точном вычислении верхних граней модулей коэффициентов Фурье на рассмотренном классе функций. Экстремальная задача вычисления *sumremum*, модулей коэффициентов Фурье на различных классах дифференцируемых функций рассматривалась в работах многих математиков (см., например [17] и приведённую там литературу). Аналогичная задача представляет определённый интерес для коэффициентов Фурье–Чебышёва $c_n(f)$, которая в общем случае формулируется следующим образом: если $\mathfrak{N}$ – некоторый множество функций, принадлежащий пространству $L_{2,\mu}$, то требуется найти величину $\mathscr{L}_n(\mathfrak{N}) = \sup\left\{ |c_n(f)| : \ f \in \mathfrak{N} \right\}$. Из доказанной теоремы 1.4.3 в качестве следствия получаем

Теорема 1.4.4. *Для любых $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < h \leq \pi/n$ имеет место равенство*

$$\mathscr{L}_n(\widetilde{W}^{(r)}_{m,h}(\mathcal{D}, \mathscr{F})) = \frac{1}{n^{2r}}\left(1 - \frac{Si(nh)}{nh}\right)^{-m} \mathscr{F}^m(h), \qquad (1.4.17)$$

и, в частности, при $h = \pi/n$ имеем

$$\mathscr{L}_n(\widetilde{W}^{(r)}_{m,\pi/n}(\mathcal{D}, \mathscr{F})) = \frac{1}{n^{2r}}\left(\frac{\pi}{\pi - Si(\pi)}\right)^{m} \mathscr{F}^m\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Доказательство. В силу ортогональности частной суммы Фурье–Чебышёва $S_{n-1}(f;x)$ и полинома $T_n(x)$, коэффициенты Фурье–Чебышёва $c_n(f)$ представляются в следующем виде

$$c_n(f) = \int_{-1}^{1} \mu(x)\Big[f(x) - S_{n-1}(f;x)\Big]T_n(x)dx. \qquad (1.4.18)$$

К интегралу в правой части (1.4.18), применив интегральное неравенство Коши–Буняковского и используя соотношения (1.1.10) и (1.4.14), разу получаем нужную оценку сверху

$$\sup\left\{|c_n(f)|:\ f\in \widetilde{W}^{(r)}_{m,h}(\mathcal{D},\mathscr{F})\right\}\le \frac{1}{n^{2r}}\left(1-\frac{Si(nh)}{nh}\right)^{-m}\mathscr{F}^m(h). \qquad (1.4.19)$$

Для получения оценки снизу, равной величине стоящей в правой части неравенства (1.4.19), введём в рассмотрению функцию

$$f_1(x)=\frac{1}{n^{2r}}\left(1-\frac{Si(nh)}{nh}\right)^{-m}\mathscr{F}^m(h)T_n(x),$$

которая, как мы показали при доказательстве теоремы 1.4.3, принадлежит рассматриваемому классу $\widetilde{W}^{(r)}_{m,h}(\mathcal{D},\mathscr{F})$ и для которой

$$\sup\left\{|c_n(f)|:\ f\in \widetilde{W}^{(r)}_{m,h}(\mathcal{D},\mathscr{F})\right\}\ge |c_n(f_1)|=$$

$$=\frac{1}{n^{2r}}\left(1-\frac{Si(nh)}{nh}\right)^{-m}\mathscr{F}^m(h) \qquad (1.4.20)$$

Требуемое равенство (1.4.17) следует из сопоставления оценки сверху (1.4.18) и снизу (1.4.20), чем и завершаем доказательство.

В [38] доказано, что при любых натуральных m,n, целых неотрицательных r, $0<p\le 2$, $0<h<\pi$, $\varphi(t)$ – весовая функция на отрезке $[0,h]$, то для аппроксимационной характеристики

$$M_{n,m,r,p}(\varphi;h)=\sup_{f\in L^{(r)}_{2,\mu}}\frac{\mathscr{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}}{(\int\limits_0^h\Omega^p_m(\mathcal{D}^rf;t)_{2,\mu}\varphi(t)dt)^{1/p}},$$

где $\Omega^p_m(\mathcal{D}^rf;t)_{2,\mu}$ и $\mathscr{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}$ определяются соответственно как в равенствах (1.1.11) и (1.1.13), выполняются неравенства

$$\{\alpha_{n,m,r,p}(\varphi,h)\}^{-1}\le M_{n,m,r,p}(\varphi;h)\le\{\inf_{n\le k<\infty}\alpha_{k,m,r,p}(\varphi,h)\}^{-1},$$

где

$$\alpha_{k,m,r,p}(\varphi;h)=\left(k^{2rp}\int\limits_0^h(2sin^2\frac{kt}{2})^{mp}\varphi(t)dt\right)^{1/p}.$$

При этом, если $\inf\limits_{n\le k<\infty}\alpha_{k,m,r,p}(\varphi,h)=\alpha_{n,m,r,p}(\varphi,h)$, то имеет место равенство

$$M_{n,m,r,p}(\varphi;h)=\left(k^{2rp}\int\limits_0^h(2sin^2\frac{kt}{2})^{mp}\varphi(t)dt\right)^{-1/p}.$$

Непосредственным вычислением легко доказать, что если $\varphi(t)\equiv 1$, $m,n,r\in\mathbb{N},\ \ 1/(2r)\le p\le 2;\ \ 0<h\le 3\pi/(4n)$, то

$$M_{n,m,r,p}(1;h)=\{\alpha_{n,m,r,p}(1,h)\}^{-1}:=\{n^{2rp}\int\limits_0^h(2sin^2\frac{kt}{2})^{mp}dt\}^{-1/p}. \qquad (1.4.21)$$

ГЛАВА II

ПОПЕРЕЧНИКИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ КЛАССОВ В МЕТРИКЕ ПРОСТРАНСТВА $L_{2,\mu}[-1,1]$

§2.1. Определение поперечников

Для формулировки последующих результатов напомним необходимые понятия и нужные нам в дальнейшем определения.

Пусть $\mathfrak{S}$ — единичный шар в пространстве $L_{2,\mu}$; Q — выпуклое центрально-симметричное подмножество из $L_{2,\mu}$; $\Lambda_n \subset L_{2,\mu}$ — n-мерное подпространство; $\Lambda^n \subset L_{2,\mu}$ — подпространство коразмерности n; $\mathscr{L} : L_{2,\mu} \to \Lambda_n$ — непрерывный линейный оператор; $\mathscr{L}^{\perp} : L_{2,\mu} \to \Lambda_n$ — непрерывный оператор линейного проектирования. Величины

$$b_n(Q, L_{2,\mu}) = \sup\left\{\sup\left\{\varepsilon > 0,\ \varepsilon\mathfrak{S} \cap \Lambda_{n+1} \subset Q\right\} : \Lambda_{n+1} \subset L_{2,\mu}\right\}, \qquad (2.1.1)$$

$$d^n(Q, L_{2,\mu}) = \inf\left\{\sup\left\{\|f\| : f \in Q \cap \Lambda^n\right\} : \Lambda^n \subset L_{2,\mu}\right\}, \qquad (2.1.2)$$

$$d_n(Q, L_{2,\mu}) = \inf\left\{\sup\left\{\inf\left\{\|f-g\| : g \in \Lambda_n\right\} : f \in Q\right\} : \Lambda_n \subset L_{2,\mu}\right\}, \qquad (2.1.3)$$

$$\delta_n(Q, L_{2,\mu}) = \inf\left\{\inf\left\{\sup\left\{\|f - \mathscr{L}f\| : f \in Q\right\} : \mathscr{L}L_{2,\mu} \subset \Lambda_n\right\} : \Lambda_n \subset L_{2,\mu}\right\}, \qquad (2.1.4)$$

$$\Pi_n(Q, L_{2,\mu}) = \inf\left\{\inf\left\{\sup\left\{\|f - \mathscr{L}^{\perp}f\| : f \in Q\right\} : \mathscr{L}^{\perp}L_{2,\mu} \subset \Lambda_n\right\} : \Lambda_n \subset L_{2,\mu}\right\} \qquad (2.1.5)$$

называют соответственно *бернштейновским, гельфандовским, колмогоровским, линейным, проекционным n-поперечниками.*

Известно, что перечисленные выше n-поперечники монотонны по n и в гильбертовом пространстве $L_{2,\mu}$ связаны соотношениями:

$$b_n(Q; L_{2,\mu}) \le d^n(Q; L_{2,\mu}) \le d_n(Q; L_{2,\mu}) = \delta_n(Q; L_{2,\mu}) = \Pi_n(Q; L_{2,\mu}). \qquad (2.1.6)$$

Первое неравенство $b_n(Q) \le d_n(Q)$ справедливо для любого банахова пространства, и его можно найти в монографии А.Пинкуса [40, с.19], а все остальное в книге В.М.Тихомирова [30, с.239].

§2.2. Значение n-поперечников классов функций $W_m^{(r)}(\mathcal{D},\Psi_1)$, $W_{m,h}^{(r)}(\mathcal{D},\Psi_2)$ и $W_{m,h}^{(r)}(\mathcal{D},\Psi_3)$

В параграфе 1.3 первой главы мы ввели в рассмотрение классов функций $W_m^{(r)}(\mathcal{D},\Psi_1)$, $W_{m,h}^{(r)}(\mathcal{D},\Psi_2)$ и $W_{m,h}^{(r)}(\mathcal{D},\Psi_3)$ и на этих классах функций вычислили значения точных верхних граней отклонения от их частных сумм ряда Фурье-Чебышёва в пространстве $L_{2,\mu}$. Полученные результаты позволяют найти точные значения всех перечисленных в параграфе 2.1 n-поперечников (2.1.1) – (2.1.5) на указанных классах функций в $L_{2,\mu}$. Введём обозначение

$$(sinkx)_* = \begin{cases} sinkx, & \text{если} \quad 0 < kx \le \pi/2, \\ 1, & \text{если} \quad kx > \pi/2. \end{cases} \tag{2.2.1}$$

Теорема 2.2.1. *Пусть функция $\Psi_1(u)$ удовлетворяет условию*

$$\Psi_1^2\left(\frac{u}{\mu}\right)\int\limits_0^{\mu\pi}(sin^2\frac{2t}{2})_*\sin\frac{t}{\mu}dt \le \mu\Psi_1^2(u) \tag{2.2.2}$$

при любом $\mu > 0$ и любом $u \in (0, 2\pi]$. Тогда имеет место равенства

$$\lambda_n\left(W_m^{(r)}(\mathcal{D},\Psi_1), L_{2,\mu}\right) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^m \frac{1}{n^{2r}}\Psi_1^m\left(\frac{\pi}{n}\right), \tag{2.2.3}$$

где $\lambda_n(\cdot)$ – любой из n-поперечников $b_n(Q;L_{2,\mu}), d^n(Q;L_{2,\mu}), d_n(Q;L_{2,\mu})$, $\delta_n(Q;L_{2,\mu}), \Pi_n(Q;L_{2,\mu})$.

Доказательство. Используя равенство (1.3.1) и неравенство между n-поперечниками (1.1.6) запишем оценки сверху для всех аппроксимационных величин

$$\lambda_n\left(W_m^{(r)}(\mathcal{D},\Psi_1), L_{2,\mu}\right) \le$$

$$\le \mathcal{E}_n\left(W_m^{(r)}(\mathcal{D},\Psi_1)\right)_{2,\mu} = (\pi/2)^m n^{-2r}\Psi_1^m(\pi/n). \tag{2.2.4}$$

Для получения оценок снизу n-поперечников рассмотрим в $\mathcal{P}_n \cap L_{2,\mu}$ шар

$$\mathcal{B}_{n+1} := \left\{p_n \in \mathcal{P}_n: \ \|p_n\|_{2,\mu} \le (\pi/2)^m\, n^{-2r}\, \Psi_1^m(\pi/n)\right\}$$

и покажем его принадлежность классу $W_m^{(r)}(\mathcal{D},\Psi_1)$, то есть покажем, что при ограничении (2.2.2) для произвольной $p_n\in\mathcal{P}_n$ и любых $u\in(0,\pi]$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{u}\int\limits_0^u \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r p_n,t)_{2,\mu}\sin\frac{\pi t}{u}dt\le\Psi_1(u).$$

Используя равенством (1.1.10), для произвольного $p_n\in\mathcal{P}_n$ получаем формулу

$$\|\Delta_h^m(\mathcal{D}^r p_n)\|_{2,\mu}^2=\sum_{k=1}^n(2sin^2\frac{kh}{2})^{2m}\,k^{4r}\,c_k^2(p_n). \tag{2.2.5}$$

Из равенства (2.2.5), учитывая определению модуля непрерывности (1.1.2), равенства (2.2.1) для любого полинома $p_n\in\mathcal{B}_{n+1}$, $1\le k\le n$, $0<nt\le\pi$ запишем неравенство

$$\Omega_m^2(\mathcal{D}^r p_n,t)_{2,\mu}\le(2sin^2\frac{nt}{2})_*^{2m}\,n^{4r}\,\sum_{k=1}^n c_k^2(p_n)=$$

$$=(2sin^2\frac{nt}{2})_*^{2m}\,n^{4r}\,\|p_n\|_{2,\mu}^2\le(\pi/2)^{2m}\,(2sin^2\frac{nt}{2})_*^{2m}\,\Psi_1^{2m}\,(\pi/n)\,. \tag{2.2.6}$$

Из (2.2.6) с учётом определения класса $W_m^{(r)}(\mathcal{D},\Psi_1)$ и ограничения (2.2.2) для любого $u\in(0,2\pi]$ и $\mu>0$ получаем

$$\frac{1}{u}\int\limits_0^u \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f,t)_{2,\mu}\sin\frac{\pi t}{u}dt\le$$

$$\le\frac{\pi}{2u}\Psi_1\left(\frac{\pi}{n}\right)\int\limits_0^u(2sin^2\frac{nt}{2})_*\sin\frac{\pi t}{u}dt=$$

$$=\frac{n}{2\mu}\Psi_1\left(\frac{u}{\mu}\right)\int\limits_0^u(2sin^2\frac{nt}{2})_*\sin\frac{nt}{\mu}dt=$$

$$=\frac{1}{2\mu}\Psi_1\left(\frac{u}{\mu}\right)\int\limits_0^{nu}(2sin^2\frac{t}{2})_*\sin\frac{t}{\mu}dt=$$

$$=\frac{1}{\mu}\Psi_1\left(\frac{u}{\mu}\right)\int\limits_0^{\mu\pi}(2sin^2\frac{t}{2})_*\sin\frac{t}{\mu}dt\le\Psi_1(u), \tag{2.2.7}$$

тогда включение $\mathcal{B}_{n+1} \subset W_m^{(r)}(\mathcal{D}, \Psi_1)$ следует из неравенства (2.2.7). Используя неравенство между n поперечниками и определение бернштейновского n-поперечника, получаем соответствующую оценки снизу рассматриваемых n-поперечников

$$\lambda_n\left(W_m^{(r)}(\mathcal{D}, \Psi_1), L_{2,\mu}\right) \geq b_n\left(W_m^{(r)}(\mathcal{D}, \Psi_1), L_{2,\mu}\right) \geq$$

$$\geq b_n\left(\mathcal{B}_{n+1}, L_{2,\mu}\right) = (\pi/2)^m\, n^{-2r}\, \Psi_1^m(\pi/n). \tag{2.2.8}$$

Требуемые равенства (2.2.3) получаем из сравнение оценков (2.2.4) и (2.2.8). В работе [41] доказано, что мажорантные функции $\Psi_1(t)$, удовлетворяющие условию (2.2.2) доказанной теоремы, существуют. В заключение отметим, что доказанная теорема является в определённом смысле обобщением результата теоремы 2 работы В.В.Шалаева [14] для пространства $L_{2,\mu}$.

Теорема 2.2.2. *Пусть мажоранта $\Psi_2(h)$ при любом $h \in \mathbb{R}_+$ удовлетворяет условиям*

$$\frac{\Psi_2(h)}{\Psi_2(\pi/(2n))} \geq \frac{\pi}{\pi-2}\begin{cases} 1-\dfrac{\sin nh}{nh}, & \text{если} \quad 0 < nh \leq \pi, \\ 2-\dfrac{\pi}{nh}, & \text{если} \quad nh \geq \pi, \end{cases} \tag{2.2.9}$$

Тогда для любых натуральных m, n и целых неотрицательных r имеют место равенства

$$\lambda_n\left(W_{m,h}^{(r)}(\mathcal{D}, \Psi_2), L_{2,\mu}\right) = \mathcal{E}_n\left(W_{m,h}^{(r)}(\mathcal{D}, \Psi_2)\right)_{2,\mu} =$$

$$= \left(\frac{\pi}{\pi-2}\right)^m \frac{1}{n^{2r}}\, \Psi_2^m\left(\frac{\pi}{2n}\right), \tag{2.2.10}$$

где $\lambda_n(\cdot)$ – любой из n-поперечников Бернштейна $b_n(\cdot)$, Колмогорова $d_n(\cdot)$, Гельфанда $d^n(\cdot)$ линейный $\delta_n(\cdot)$ проекционный $\Pi_n(\cdot)$. Существует мажорантная функция Ψ, для которой выполняются условия (2.2.9).

Доказательство. Полагая в равенстве (1.3.2) $h = \pi/(2n)$, получаем оценку сверху всех аппроксимационных величин $b_n(\cdot) - \Pi_n(\cdot)$.

$$\lambda_n\left(W_{m,h}^{(r)}(\mathcal{D}, \Psi_2), L_{2,\mu}\right) \leq \left(\frac{\pi}{\pi-2}\right)^m \frac{1}{n^{2r}}\, \Psi_2^m\left(\frac{\pi}{2n}\right). \tag{2.2.11}$$

Для получения оценок снизу всех n-поперечников рассмотрим во множестве $\mathcal{P}_n \cap L_{2,\mu}$ сферу

$$\mathcal{B}_{n+1}^{*} := \left\{ p_n \in \mathcal{P}_n : \ \|p_n\|_{2,\mu} \le \left(\frac{\pi}{\pi-2}\right)^{m} \frac{1}{n^{2r}}\,\Psi_2^{m}\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right\}.$$

Докажем, что $\mathcal{B}_{n+1}^{*} \subset W_{m,h}^{(r)}(\mathcal{D},\Psi_2)$. Для этого, поступая так же, как и при доказательстве теоремы 2.2.1, для произвольной $p_n \in \mathcal{P}_n$ из равенства (2.2.1) получаем неравенство

$$\Omega_m^2(\mathcal{D}^r p_n, t)_{2,\mu} \le \left(\frac{\pi}{\pi-2}\right)^{2m} (2sin^2\frac{nt}{2})_*^{2m}\,\Psi_2^{2m}\left(\frac{\pi}{2n}\right).$$

Отсюда с учётом первого из ограничений (2.2.9) и определения класса $W_{m,h}^{(r)}(\mathcal{D},\Psi_2)$ запишем

$$\frac{1}{h}\int\limits_0^h \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f, t)_{2,\mu}dt \le$$

$$\le \frac{\pi}{\pi-2}\,\Psi_2\left(\frac{\pi}{2n}\right)\cdot\frac{1}{h}\int\limits_0^h (2sin^2\frac{nt}{2})_* dt =$$

$$= \frac{\pi}{\pi-2}\cdot\Psi_2\left(\frac{\pi}{2n}\right)\cdot\frac{1}{h}\left(h - \frac{\sin nh}{n}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{\pi-2}\cdot\left(1-\frac{\sin nh}{nh}\right)\cdot\Psi_2\left(\frac{\pi}{2n}\right) \le \Psi_2(h). \tag{2.2.12}$$

Если же $h \ge \pi/n$, то, используя второе ограничение из условий (2.2.9), поучаем

$$\le \frac{1}{h}\int\limits_0^h \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f, t)_{2,\mu}dt \le$$

$$\frac{\pi}{\pi-2}\,\Psi_2\left(\frac{\pi}{2n}\right)\cdot\frac{1}{h}\int\limits_0^h (2sin^2\frac{nt}{2})_* dt =$$

$$= \frac{\pi}{\pi-2}\,\Psi_2\left(\frac{\pi}{2n}\right)\cdot\frac{1}{h}\left\{\int\limits_0^{\pi/n}(2sin^2\frac{nt}{2})dt + \int\limits_{\pi/n}^{h} 2dt\right\} =$$

$$= \frac{\pi}{\pi - 2} \cdot \left(2 - \frac{\pi}{nh}\right) \cdot \Psi_2\left(\frac{\pi}{2n}\right) \leq \Psi_2(h). \tag{2.2.13}$$

Из (2.2.12) и (2.2.13) следует включение $\mathcal{B}_{n+1}^* \subset W_{m,h}^{(r)}(\mathcal{D}, \Psi_2)$. Используя соотношение (2.1.6) между n-поперечниками и определение бернштейновского поперечника, получаем нужную оценку снизу

$$\lambda_n\left(W_{m,h}^{(r)}(\mathcal{D}, \Psi_2), L_{2,\mu}\right) \geq b_n\left(W_{m,h}^{(r)}(\mathcal{D}, \Psi_2), L_{2,\mu}\right) \geq$$

$$\geq b_n\left(\mathcal{B}_{n+1}^*, L_{2,\mu}\right) = \left(\frac{\pi}{\pi - 2}\right)^m \frac{1}{n^{2r}} \Psi_2^{2m}\left(\frac{\pi}{2n}\right). \tag{2.2.14}$$

Сопоставляя неравенства (2.2.11) и (2.2.14), получаем равенства (2.2.10).

Во второй части доказательства данной теоремы докажем, что мажорантные функции $\Psi_2(t)$, удовлетворяющих условию (2.2.9), существуют. Для рассмотрим функцию $\Psi_2(t) := t^\alpha$, где $\alpha = 2/(\pi - 2)$, и убедимся, что для неё соотношение (2.2.9) выполняется. Конкретизируя в (2.2.9) функцию Ψ_2, получаем неравенства

$$\left(\frac{2nh}{\pi}\right)^\alpha \geq \frac{\pi}{\pi - 2}\begin{cases} 1 - \dfrac{sinnh}{nh}, & \text{если } \ 0 < nh \leq \pi, \\ 2 - (2/\mu), & \text{если } \ nh \geq \pi. \end{cases} \tag{2.2.15}$$

Положим $2nh = \mu\pi$, где $0 \leq \mu < \infty$, и неравенство (2.2.15) запишем в следующем виде

$$\mu^\alpha \geq \frac{\pi}{\pi - 2}\begin{cases} 1 - \dfrac{2}{\mu\pi}\sin\dfrac{\mu\pi}{2}, & \text{если } \ 0 < \mu \leq 2, \\ 2 - \dfrac{2}{\mu}, & \text{если } \ \mu \geq 2 \end{cases} \tag{2.2.16}$$

или, что то же самое,

$$\mu^{\alpha+1} \geq \frac{\pi}{\pi - 2}\begin{cases} \mu - \dfrac{2}{\pi}\sin\dfrac{\mu\pi}{2}, & \text{если } \ 0 < \mu \leq 2, \\ 2(\mu - 1), & \text{если } \ \mu \geq 2, \end{cases}$$

которое ещё предстоит доказать. С этой целью на отрезке $[0, 2]$ вводим в рассмотрение функцию

$$\varphi(\mu) = \mu^{\alpha+1} - \frac{\pi}{\pi - 2}\left(\mu - \frac{2}{\pi}\sin\frac{\mu\pi}{2}\right)$$

и докажем, что для значений $\mu \in [0,2]$ функция $\varphi(\mu) \geq 0$. Сначала докажем это утверждение на отрезке $[0,1]$. Так как при $\mu \to 0+0$

$$\varphi(\mu) = \mu^{\alpha+1}\left[1 - \frac{\pi^3}{24(\pi-2)}O(\mu^{2-\alpha})\right],$$

то в сколь угодно малой окрестности нуля $\varphi(\mu) > 0$, и если бы $\varphi(\mu)$ изменяла знак в некоторой точке $\xi \in [0,1]$, то, в силу равенства $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, пришли бы к заключение, что производная первого порядка

$$\varphi'(\mu) = (\alpha+1)\mu^{\alpha} - \frac{\pi}{\pi-2}\left(1 - \cos\frac{\mu\pi}{2}\right) :=$$

$$:= (\alpha+1)\left[\mu^{\alpha} - 1 + \cos\frac{\mu\pi}{2}\right]$$

имеет на сегменте $(0,1)$ два различных нуля и ещё $\varphi'(0) = \varphi'(1) = 0$. Отсюда следует, что вторая производная

$$\varphi''(\mu) = (\alpha+1)\left[\alpha\mu^{\alpha-1} - \frac{\pi}{2}\sin\frac{\mu\pi}{2}\right]$$

имеет на сегменте $(0,1)$ не менее трёх нулей и, ещ "е, $\varphi''(0) = 0$ в силу неравенства $\alpha = 2/(\pi-2) > 1$. Таким образом отсюда следует существование трёх различных нулей на интервале $(0,1)$ производной третьего порядка

$$\varphi'''(\mu) = (\alpha+1)\left[\alpha(\alpha-1)\mu^{\alpha-2} - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2\cos\frac{\mu\pi}{2}\right].$$

Поскольку производная третьего порядка $\varphi'''(\mu)$ представляет собой разность выпуклой вниз и выпуклой вверх функций, то это невозможно. Из геометрических соображений ясно, что функция $\varphi'''(\mu)$ не может иметь более двух нулей, а потому в случае $\mu \in [0,1]$ неравенство (2.2.16) выполняется.

Если $\mu \in (1,2]$ то из условий $\varphi(1) = \varphi'(1) = 0$ и $\varphi''(\mu) > 0$ сразу следует, что $\varphi(\mu) \geq 0$ и, таким образом, для значений $\mu \in (1,2]$ первое неравенство в (2.2.16) имеет место.

Пусть $\mu \in (1,\infty]$ Исходя из второго неравенства (2.2.16), введём в рассмотрение функцию

$$\varphi_1(\mu) = \mu^{\alpha+1} - \frac{2\pi}{\pi-2}(\mu-1)$$

и докажем, что $\varphi_1(\mu) \geq 0$ при всех $\mu \in (2, \infty]$. Так как $\alpha + 1 = \pi/(\pi - 2)$, то запишем

$$\varphi_1'(\mu) = (\alpha+1)\mu^\alpha - \frac{2\pi}{\pi - 2} = (\alpha+1)(\mu^\alpha - 2) \geq 0$$

и поскольку $\varphi_1(2) = 2^{\alpha+1} - \dfrac{2\pi}{\pi-2} > 0$, то $\varphi_1(\mu) > 0$ при любом $2 \leq \mu < \infty$. Отсюда следует, что второе неравенство в (2.2.16) в точках $\mu \in [2, \infty)$ выполняется. Теорема 2.2.2 полностью доказана.

Теорема 2.2.3. *Пусть мажоранта Ψ_3 для любого $h \in \mathbb{R}_+$ удовлетворяют условию*

$$\frac{\Psi_3(h)}{\Psi_3(\pi/n)} \geq \frac{2\pi^2}{\pi^2 - 4} \cdot \frac{1}{h^2} \cdot \int\limits_0^h (h-t)(1 - \cos nt)_* dt. \tag{2.2.17}$$

Тогда для любых чисел $m, n \in \mathbb{N}$ и $r \in \mathbb{Z}_+$ имеет место равенство

$$\lambda_n\left(W_{m,h}^{(r)}(\mathcal{D}, \Psi_3), L_{2,\mu}\right) = \left(\frac{\pi^2}{\pi^2-4}\right)^m \frac{1}{n^{2r}}\, \Psi_3^m\left(\frac{\pi}{n}\right), \tag{2.2.18}$$

где $\lambda_n(\cdot)$ – любой из аппроксимационных величин (2.1.1) – (2.1.5). *Функции Ψ_3, удовлетворяющие ограничению* (2.2.17), *существуют.*

Доказательство. Оценки сверху для всех n-поперечников получаем из равенства (1.3.3) при $h = \pi/n$:

$$\lambda_n\left(W_{m,h}^{(r)}(\mathcal{D}, \Psi_3), L_{2,\mu}\right) \leq \mathcal{E}_n(W_{m,h}^{(r)}(\mathcal{D}, \Psi_3))_{2,\mu} =$$

$$= \left(\frac{\pi^2}{\pi^2-4}\right)^m \frac{1}{n^{2r}}\, \Psi_3^m\left(\frac{\pi}{n}\right). \tag{2.2.19}$$

Для получения оценок снизу введём в рассмотрение шар

$$\mathcal{B}_{n+1}^{**} := \left\{ p_n \in \mathcal{P}_n : \ \|p_n\|_{2,\mu} \leq \left(\frac{\pi^2}{\pi^2-4}\right)^m \frac{1}{n^{2r}} \Psi_3^m\left(\frac{\pi}{n}\right) \right\}$$

и воспользуясь тем, что для произвольного $p_n \in \mathcal{P}_n$, из (2.2.1) следует нужное нам неравенство

$$\Omega_m^2(\mathcal{D}^r p_n, t)_{2,\mu} \leq \left(\frac{\pi^2}{\pi^2-4}\right)^{2m} (1 - \cos nt)_*^{2m} \Psi_3^{2m}\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Учитывая условие (2.2.17), запишем

$$\frac{2}{h^2}\int\limits_0^h (h-t)\Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f,t)_{2,\mu}dt \le$$

$$\le \frac{\pi^2}{\pi^2-4}\,\Psi_3\left(\frac{\pi}{n}\right)\,\frac{2}{h^2}\int\limits_0^h (h-t)(1-\cos nt)_* dt \le \Psi_3(h),$$

которое означает, что $\mathcal{B}_{n+1}^{**}\subset W_{m,h}^{(r)}(\mathcal{D},\Psi_3)$. Отсюда имеем:

$$\lambda_n\left(W_{m,h}^{(r)}(\mathcal{D},\Psi_3),L_{2,\mu}\right)\ge b_n\left(W_{m,h}^{(r)}(\mathcal{D},\Psi_3),L_{2,\mu}\right)\ge$$

$$\ge b_n\left(\mathcal{B}_{n+1}^{**},L_{2,\mu}\right)=\left(\frac{\pi^2}{\pi^2-4}\right)^m\,\frac{1}{n^{2r}}\,\Psi_3^{2m}\left(\frac{\pi}{n}\right). \tag{2.2.20}$$

Из неравенств (2.2.19) и (2.2.20) получаем требуемое равенство (2.2.18). Теперь укажем мажоранта Ψ_3, для которой выполняется ограничении (2.2.17), не пусто. С этой целю рассмотрим, например, степенную функцию

$$\Psi_3(u)=u^\alpha,\quad \text{где}\quad \alpha=8/(\pi^2-4).$$

Тогда (2.2.17) приобретает вид

$$\left(\frac{nh}{\pi}\right)^\alpha\ge\frac{\pi^2}{\pi^2-4}\cdot\frac{2}{h^2}\int\limits_0^h(h-t)(1-\cos nt)_*dt.$$

Вычислив интеграл в правой части полученного неравенства, получаем

$$\left(\frac{nh}{\pi}\right)^\alpha\ge\frac{\pi^2}{\pi^2-4}\begin{cases}1-\left(\dfrac{2}{nh}\sin\dfrac{nh}{2}\right)^2, & \text{если}\ \ 0<nh\le\pi,\\[2ex] 2\left(1-\dfrac{\pi}{nh}\right)^2+\dfrac{\pi^2-4}{(nh)^2}, & \text{если}\ \ nh\ge\pi,\end{cases} \tag{2.2.21}$$

которое предстоит нам доказать. Полагая в (2.2.21) $nh=v\pi$, $0<v<\infty$, приводим (2.2.21) к следующему виду

$$v^\alpha\ge\frac{\pi^2}{\pi^2-4}\begin{cases}1-\left(\dfrac{2}{\pi v}\sin\dfrac{\pi v}{2}\right)^2, & \text{если}\ \ 0<v\le 1,\\[2ex] 2\left(1-\dfrac{1}{v}\right)^2+\dfrac{\pi^2-4}{\pi^2v^2}, & \text{если}\ \ v\ge 1\end{cases}$$

или, что то же,

$$v^{\alpha+2} \geq \frac{\pi^2}{\pi^2-4} \begin{cases} v^2 - \left(\dfrac{2}{\pi}\sin\dfrac{\pi v}{2}\right)^2, & \text{если} \ \ 0 < v \leq 1, \\ 2(v-1)^2 + \dfrac{\pi^2-4}{\pi^2}, & \text{если} \ \ v \geq 1. \end{cases} \tag{2.2.22}$$

Учитывая первого неравенства в (2.2.22) на отрезке $[0,1]$ введём вспомогательную функцию

$$\psi_1(v) := v^{\alpha+2} - \frac{\pi^2}{\pi^2-4}\left(v^2 - \frac{4}{\pi^2}\sin^2\frac{\pi v}{2}\right) =$$

$$= v^{\alpha+2} - \frac{1}{\pi^2-4}\left((\pi v)^2 - 2\left(1-\cos\pi v\right)\right), \quad 0 < v \leq 1. \tag{2.2.23}$$

Учитывая $\alpha = 8/(\pi^2-4)$, откуда $1 < \alpha < 2$, при $u \to 0+0$ получаем

$$\psi_1(v) = v^{\alpha+2}\left(1 - \frac{\pi^4}{12(\pi^2-4)}O(v^{2-\alpha})\right). \tag{2.2.24}$$

Из соотношение (2.2.24) следует, что в любом отрезке $[0,\eta]$, где $0 < \eta < 1$, функция $\psi_1(v)$ неотрицательна. Покажем, что и на всём отрезке $[0,1]$ функция $\psi_1(v)$ является таковой. С этой целью применим метод рассуждений от обратного, полагая, что на интервале $(0,1)$ существует точка $0 < \xi < 1$, в которой наша функция $\psi_1(v)$ изменяет свой знак. Из (2.2.23) следует, что $\psi_1(0) = \psi_1(1) = 0$, а потому в силу теоремы Ролля функция

$$\psi_1'(v) = (\alpha+2)v^{\alpha+1} - \frac{2\pi^2}{\pi^2-4}\left(v - \frac{1}{\pi}\sin\pi v\right) \tag{2.2.25}$$

должна иметь на интервале $(0,1)$ по крайней мере двух различны х нулей. Поскольку $\alpha = 8/(\pi^2-4) > 1$, то из формулы (2.2.25) следует, что $\psi_1'(0) = \psi_1'(1) = 0$. Но тогда вторая производная

$$\psi_1''(v) = (\alpha+2)(\alpha+1)v^{\alpha} - (\alpha+2)(1-\cos\pi v)$$

должна иметь на множестве $(0,1)$ по меньшей мере трёх различных нулей и, кроме того, $\psi_1''(0) = 0$. Следовательно, и у третьей производной

$$\psi_1'''(v) = (\alpha+2)(\alpha+1)\alpha\, v^{\alpha-1} - (\alpha+2)\pi\sin\pi v \tag{2.2.26}$$

на интервале $(0,1)$ должно быть по меньшей мере трёх различных нулей. Но, как вытекает из (2.2.26), $\psi_1'''(0)=0$, четвёртая производная

$$\psi_1^{(4)}(v)=(\alpha+2)(\alpha+1)\alpha(\alpha-1)\,v^{\alpha-2}-(\alpha+2)\pi^2\cos\pi v \qquad (2.2.27)$$

обязана иметь на $(0,1)$ по меньшей мере трёх различных нулей. Из формулы (2.2.27) получаем, что функция, $\psi_1^{(4)}(v)$ на интервале $(0,1)$ является разностью двух функций, из которых первая положительна и является выпуклой вниз, а вторая является выпуклой вверх и положительной на интервале $(0,1/2)$ и отрицательной и выпуклой вниз на интервале $(1/2,1)$. Из графика функции, очевидно, что $\psi_1^{(4)}(v)$ на $(0,1)$ может иметь не более двух различных нулей. Это противоречие доказывает справедливость первого неравенства в соотношении (2.2.22).

Исследуем из второго неравенства в (2.2.22), на множестве $1\le v<\infty$,. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\psi_2(v):=v^{\alpha+2}-1-2\,(v-1)^2\,\pi^2/(\pi^2-4)=v^{\alpha+2}-1-(\alpha+2)\,(v-1)^2\,.$$

Дифференцируя последнее равенство и имея ввиду, что $1<\alpha<2$, имеем

$$\psi_2'(v)=(\alpha+2)\left(v^{\alpha+1}-2v+2\right)>0,\ 1\le v<\infty$$

и, так как $\psi_2(1)=0$, то на множестве $1\le v<\infty$ функция $\psi_2(v)\ge 0$, а значит второе неравенство в (2.2.22) имеет место. Теорема 2.2.3 доказана.

Пусть Ψ – возрастающая непрерывная функция на полуинтервале $[0;\infty)$, и такая, что $\Psi(0)=0$. Функцию Ψ будем называть мажорантной. Обозначим через $W_{2,p}^{(2,r)}(\Omega_m,\Psi)$ класс функций $f\in L_{2,\mu}^{(2r)}$, где $0<p\le 2$, $r,m\in\mathbb{N}$, для которых выполняется неравенство

$$\int\limits_0^h \Omega_m^p(\mathcal{D}^r f;t)_{2,\mu}dt\le\Psi^p(h).$$

Обозначим также

$(\sin t)_*:=\{\sin t$, если $0\le t\le\pi/2; 1$, если $t\ge\pi/2\}$

$(1-\cos t)_*:=\{1-\cos t$, если $0\le t\le\pi$; 2 если $t\ge\pi\}$

Сформулируем основной результат статьи.

Теорема 2.2.4. *Пусть m, n-произвольные натуральные числа, $p \in (1/(2r), 2]$, $h \in (0, \pi]$ и для мажоранта Ψ выполняется условию*

$$\Psi^p(\pi/n) \int\limits_0^{nh/2} (\sin t)_*^{2mp} dt \le \Psi^p(h) \int\limits_0^{\pi/2} (\sin t)^{2mp} dt. \tag{2.2.28}$$

Тогда выполняются равенства

$$\lambda_n(W_{2,p}^{(2r)}(\Omega_m, \Psi); L_{2,\mu}) = \mathscr{E}_{n-1}(W_{2,p}^{(2r)}(\Omega_m, \Psi))_{2,\mu} =$$

$$= 2^{-(m+\frac{1}{p})} n^{-2r+\frac{1}{p}} \left(\int\limits_0^{\pi/2} (\sin t)^{2mp} dt \right)^{-\frac{1}{p}} \Psi(\frac{\pi}{n}), \tag{2.2.29}$$

где $\lambda_n(\cdot)$–любой из аппроксимационных величин $b_n(\cdot) - \Pi_n(\cdot)$.

$$\mathscr{E}_{n-1}(W_{2,p}^{(2r)}(\Omega_m, \Psi))_{2,\mu} \stackrel{def}{=} \sup\{\mathscr{E}_{n-1}(f_{2,\mu} : f \in W_{2,p}^{(2r)}(\Omega_m, \Psi)\}.$$

Существуют мажорантные функции Ψ, для которых выполняется условие (2.2.28).

Доказательство. Для произвольной функции $f \in L_{2,\mu}$, из равенства (1.4.21), получаем оценку сверху величины $\mathscr{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}$:

$$\mathscr{E}_{n-1}(f)_{2,\mu} \le n^{-2r} \left(\int\limits_0^h (1 - \cos nt)^{mp} dt \right)^{-\frac{1}{p}} \left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(\mathcal{D}^r f, t)_{2,\mu} dt \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.2.30}$$

Из неравенства (2.2.30) при $h = \pi/n$ и соотношения (2.1.6) учитывая определение класса $W_{2,p}^{2r}(\Omega_m, \Psi)$ получаем

$$\lambda_n \left(W_{2,p}^{(2r)}(\Omega_m, \Psi); L_{2,\mu} \right) \le \mathscr{E}_{n-1} \left(W_{2,p}^{(2r)}(\Omega_m, \Psi) \right)_{2,\mu} \le$$

$$\le n^{-2r} \left(\int\limits_0^{\pi/n} (1 - \cos nt)^{mp} dt \right)^{-\frac{1}{p}} \Psi(\frac{\pi}{n}) =$$

$$= 2^{-(m+\frac{1}{p})} n^{-2r+\frac{1}{p}} \left(\int\limits_0^{\pi/2} (\sin t)^{2mp} dt \right)^{-\frac{1}{p}} \Psi(\frac{\pi}{n}). \tag{2.2.31}$$

Согласно неравенствам (2.1.6), чтобы получить оценку снизу всех n-поперечников достаточно оценить снизу бернштейновский n–поперечник класса $W_{2,p}^{(2r)}(\Omega_m,\Psi)$. Для этого в множество $\mathcal{P}_n\bigcap L_{2,\mu}$ введём в рассмотрение $(n+1)$-мерный шар полиномов

$$S_{n+1}\overset{def}{=}\left\{p_n\in\mathcal{P}_n:\|p_n\|_{2,\mu}\le 2^{-(m+\frac{1}{p})}n^{-2r+\frac{1}{p}}\left(\int\limits_0^{\pi/2}(\sin t)^{2mp}\,dt\right)^{-\frac{1}{p}}\Psi(\frac{\pi}{n})\right\}$$

и воспользуемся следующим неравенством, доказанным в работе [7]:

$$\Omega_m(\mathcal{D}^r p_n;t)_{2,\mu}\le n^{2r}(1-\cos nt)_*^m\|p_n\|_{2,\mu}=n^{2r}(2sin^2\frac{nt}{2})_*^m\|p\|_{2,\mu}. \qquad (2.2.32)$$

С этой целью сначало обе стороны неравенства (2.2.32) возведём в степень p $(1/(2r)<p\le 2)$, проинтегрируем по t отрезке [0,h] и в правой части полученного неравенства произведём замену переменной $nt=u$, после чего заменим норму многочлена $p_n\in S_{n+1}$ радиусом сферы, и учитывая ограничения (2.2.28) получаем

$$\int\limits_0^h\Omega_m^p(\mathcal{D}^r p_n;t)_{2,\mu}dt\le n^{2rp}\|p_n\|_{2,\mu}^p\int\limits_0^h(2sin^2\frac{nt}{2})_*^{mp}dt\le$$

$$\le 2^{-(mp+1)}n^{-2rp+1}\left(\int\limits_0^{\pi/2}(\sin t)^{2mp}dt\right)^{-1}\Psi^p(\pi/n)2^{mp+1}n^{2rp-1}\int\limits_0^{nh/2}(\sin t)_*^{2mp}dt=$$

$$=\Psi^p(\pi/n)\int\limits_0^{nh/2}(\sin t)_*^{2mp}dt\left(\int\limits_0^{\pi/2}(\sin t)^{2mp}dt\right)^{-1}\le\Psi(h).$$

Этим включение $S_{n+1}\subset W_{2,p}^{(2r)}(\Omega_m,\Psi)$ доказано. Отсюда, согласно определению бернштейновского $n-$поперечника, имеем

$$b_n(W_{2,p}^{(2r)}(\Omega_m,\Psi),L_{2,\mu})\ge b_n(S_{n+1};L_{2,\mu})\ge$$

$$\ge 2^{-(m+\frac{1}{p})}n^{-2r+\frac{1}{p}}\left(\int\limits_0^{\pi/2}(\sin t)^{2mp}dt\right)^{-1/p}\Psi(\frac{\pi}{n}) \qquad (2.2.33)$$

Сопоставляя оценку сверху (2.2.31) и оценку снизу (2.2.33), получаем равенство (2.2.28). Легко заметить, что функция $\Psi_*(t) := t^{\alpha/p}$, где

$$\alpha := \alpha(m,p) = \frac{\pi}{2}\left(\int\limits_0^{\pi}(\sin t)^{2mp}dt\right)^{-1}, \qquad (2.2.34)$$

удовлетворяет ограничению (2.2.28) Воспользуясь элементарным неравенством $\sin t \geq (2/\pi)t$, $(0 \leq t \leq \pi/2)$, имеем

$$\alpha := \alpha(m,p) = \frac{\pi}{2}\left(\int\limits_0^{\pi/2}(\sin t)^{2mp}dt\right)^{-1} \leq \frac{\pi}{2}\left(\int\limits_0^{\pi/2}\left(\frac{2}{\pi}t\right)^{2mp}dt\right)^{-1} =$$

$$= \left(\int\limits_0^{1} t^{2mp}dt\right)^{-1} = 2mp+1. \qquad (2.2.35)$$

Аналогичным образом, учитывая неравенство $|\sin t| \leq 1$, $t \in \mathbb{R}$, получаем

$$\alpha := \alpha(m,p) = \frac{\pi}{2}\left(\int\limits_0^{\pi/2}(\sin t)^{2mp}dt\right)^{-1} \geq \frac{\pi}{2}\cdot\frac{2}{\pi} = 1. \qquad (2.2.36)$$

Из неравенств (2.2.35) и (2.2.36) получаем границу значений α:

$$1 < \alpha < 2mp+1. \qquad (2.2.37)$$

Подставляя функцию Ψ_* в условие (2.2.28) приходим к неравенству

$$\left(\frac{nh}{\pi}\right)^{\alpha} \geq \int\limits_0^{nh/2}(\sin t)_*^{2mp}dt \int\limits_0^{\pi/2}(\sin t)^{2mp}dt. \qquad (2.2.38)$$

Полагая $nh = \mu\pi (0 \leq \mu < \infty)$, неравенство (2.2.38) запишем в виде

$$\mu^{\alpha} \geq \int\limits_0^{\mu\pi/2}(\sin t)_*^{2mp}dt\left(\int\limits_0^{\pi/2}(\sin t)^{2mp}dt\right)^{-1}. \qquad (2.2.39)$$

Указанная нами формула (2.2.34) для $\alpha = \alpha(m,p)$ получаем, если приравниваем производных по μ от левой и правой частей неравенства (2.2.39) при значение $\mu = 1$. С учётом формулы (2.2.36) неравенство (2.2.39) запишется в виде

$$\mu^{\alpha} \geq \frac{2\alpha}{\pi} \int\limits_{0}^{\mu\pi/2} (\sin t)_{*}^{2mp} dt. \tag{2.2.40}$$

В [38] доказано, что при всех $\mu \in \mathbb{R}$ неравенство (2.2.40) имеет место, а значит условия (2.2.28) при всех значениях α из неравенства (2.2.37) выполняется. Теорема 2.2.4 доказана.

Следствие 2.2.1. *Для любых натуральных m, n, r и $p \in (1/(2r), 2)]$ справедливы равенства*

$$\lambda_n(W_{2,p}^{(2r)}(\Omega_m, \Psi); L_{2,\mu}) = \mathscr{E}_{n-1}(W_{2,p}^{(2r)}(\Omega_m, \Psi))_{2,\mu} = 2^{-m} \cdot \pi^{\alpha-1/p} \cdot \alpha^{1/p} \cdot n^{-2r-\alpha+\frac{1}{p}}.$$

Пользуясь схемой рассуждений, приведенную в [40], легко доказать следующую теорему.

Теорема 2.2.5. *Пусть m, n, r произвольные натуральные числа и $p \in (1/(2r), 2)]$. Если функция Ψ при любом $h \in (0, \pi]$ удовлетворяет ограничению (2.2.28), то для всех $s = \overline{0, r}$ выполняются соотношения*

$$\sup\{\mathscr{E}_{n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu} : f \in W_{2,p}^{2r}(\Omega_m, \Psi)\} =$$

$$= 2^{-(m+\frac{1}{p})} \cdot n^{-2(r-s)+\frac{1}{p}} \left(\int\limits_{0}^{\pi/2} (\sin t)^{mp} dt \right)^{-1/p} \Psi(\pi/n).$$

§2.3. Значение n-поперечников классов функций $W_{m,p}^{(r)}(\mathcal{D},\Phi)$ в пространстве $L_{2,\mu}$

В этом параграфе через $W_{m,p}^{(r)}(\mathcal{D},\Phi)$, $p\in(1/(2r),2]$ $m,r\in\mathbb{N}$ обозначим множество функций $f\in L_{2,\mu}^{(2r)}$, для которых при любом $t\in\mathbb{R}_+$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{t}\int\limits_0^t\Omega_m^p(\mathcal{D}^rf,\tau)_{2,\mu}\,d\tau\le\Phi^p(t).$$

Теорема 2.3.1. *Пусть $m,n,r\in\mathbb{N}$, $p\in(1/(2r),2]$ и функция Φ для значениях $t\in\mathbb{R}_+$ удовлетворяет ограничению*

$$\left(\frac{\Phi(t)}{\Phi(\pi/n)}\right)^p\ge\frac{\pi}{nt}\int\limits_0^{nt}(sin^2\frac{\tau}{2})_*^{2mp}d\tau\left(\int\limits_0^{\pi}(sin^2\frac{\tau}{2})^{mp}d\tau\right)^{-1}. \qquad (2.3.1)$$

Тогда имеют места

$$\lambda_n(W_{m,p}^{(r)}(\mathcal{D},\Phi),L_{2,\mu})=\mathcal{E}_{n-1}(W_{m,p}^{(r)}(\mathcal{D},\Phi))_{L_{2,\mu}}=$$

$$=\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}(2sin^2\frac{\tau}{2})^{mp}d\tau\right\}^{-1/p}n^{-2r}\,\Phi(\pi/n), \qquad (2.3.2)$$

где $\lambda_n(\cdot)$ – любой из аппроксимационных величин (2.1.1) – (2.1.5), *а*

$$\mathcal{E}_{n-1}(W_{m,p}^{(r)}(\mathcal{D},\Phi))_{L_{2,\mu}}\overset{def}{=}\sup\Big\{\,\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}:\ f\in W_{m,p}^{(r)}(\mathcal{D},\Phi)\Big\}.$$

Функции Φ, удовлетворяющих ограничению (2.3.1), *существуют.*

Доказательство. Для произвольной функции $f\in L_{2,\mu}$, при $h=\pi/n$ и $\varphi(t)\equiv 1$ из соотношения (2.2.32) получаем оценку сверху величины $\mathscr{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}$

$$\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}\le$$

$$\le n^{-2r}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}(2sin^2\frac{\tau}{2})^{mp}d\tau\right)^{-1/p}\left(\frac{n}{\pi}\int\limits_0^{\pi/n}\Omega_m^p(\mathcal{D}^rf,\tau)_{2,\mu}d\tau\right)^{1/p}. \qquad (2.3.3)$$

Отсюда с учётом определение класса $W^{(r)}_{m,p}(\mathcal{D},\Phi)$ и неравенство (2.1.6), получаем

$$\lambda_n(W^{(r)}_{m,p}(\mathcal{D},\Phi),L_{2,\mu})\le\mathcal{E}_{n-1}(W^{(r)}_{m,p}(\mathcal{D},\Phi))_{L_{2,\mu}}\le$$
$$\le\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi(2sin^2\frac{\tau}{2})^{mp}d\tau\right)^{-1/p}n^{-2r}\,\Phi(\pi/n). \qquad (2.3.4)$$

Для получении оценки снизу рассматриваемых аппроксимационных величин в силу неравенств (2.1.6) оценим снизу бернштейновский n-поперечник класса $W^{(r)}_{m,p}(\mathcal{D},\Phi)$. В множестве $\mathcal{P}_n\cap L^{(2r)}_{2,\mu}$ введём в рассмотрение шар

$$\sigma_{n+1}\overset{def}{=}\left\{p_n\in\mathcal{P}_n:\ \|p_n\|_{2,\mu}\le\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi(2sin^2\frac{\tau}{2})^{mp}d\tau\right)^{-1/p}n^{-2r}\,\Phi(\pi/n)\right\}.$$

Поскольку при любых натуральных $k\le n$ и $h\ge 0$ выполняется неравенство

$$(2sin^2\frac{kh}{2})^{2m}\le(2sin^2\frac{nh}{2})^{2m}_*,$$

то для произвольной $p_n\in\sigma_{n+1}$ из (2.2.5) получаем

$$\|\Delta^m_h(\mathcal{D}^rp_n)\|^2_{2,\mu}\le n^{4r}(2sin^2\frac{nh}{2})^{2m}_*\,\|p_n\|^2_{2,\mu}$$

или, учитывая соотношение (1.1.2), запишем

$$\Omega_m(\mathcal{D}^rp_n,\tau)_{2,\mu}\le n^{2r}(2sin^2\frac{nh}{2})^m_*\|p_n\|_{2,\mu}. \qquad (2.3.5)$$

Отсюда, как и в предыдующем теореме, после выполнение некоторых алгебраических преобразований получаем

$$\frac{1}{t}\int\limits_0^t\Omega^p_m(\mathcal{D}^rp_n,\tau)_{2,\mu}d\tau\le n^{2rp}\|p_n\|^p_{2,\mu}\cdot\frac{1}{t}\int\limits_0^t(2sin^2\frac{n\tau}{2})^{mp}_*d\tau\le$$

$$\le\frac{\pi}{nt}\int\limits_0^{nt}(2sin^2\frac{u}{2})^{mp}_*du\left(\int\limits_0^\pi(2sin^2\frac{u}{2})^{mp}du\right)^{-1}\Phi^p(\pi/n)\le\Phi^p(t).$$

Полученное соотношение означает, что шар $\sigma_{n+1} \subset W_{m,p}^{(r)}(\mathcal{D}, \Phi)$. С другой стороны с учётом определение бернштейновского n-поперечника и неравенств (2.1.6), имеем

$$\lambda_n(W_{m,p}^{(r)}(\mathcal{D}, \Phi), L_{2,\mu}) \geq b_n(W_{m,p}^{(r)}(\mathcal{D}, \Phi), L_{2,\mu}) \geq b_n(\sigma_{n+1}, L_{2,\mu}) \geq$$

$$\geq \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi (1-\cos\tau)^{mp} d\tau\right)^{-1/p} n^{-2r}\,\Phi(\pi/n). \tag{2.3.6}$$

Из сопоставления оценку сверху (2.3.4) и снизу (2.3.6), получаем равенство (2.3.2). Теперь покажем, что функция $\Phi_1^*(t) := t^{\alpha/p}$, где

$$\alpha \overset{def}{=} \frac{\pi}{\int\limits_0^\pi \left(\sin\frac{\tau}{2}\right)^{2mp} d\tau} - 1 \tag{2.3.7}$$

удовлетворяет (2.3.1). Оценим число $\alpha := \alpha(m,p)$ из равенства (2.3.7). Воспользуясь неравенством $\sin x \geq (2/\pi)x$ $(0 \leq x \leq \pi/2)$, имеем:

$$\alpha = \alpha(m,p) = \pi\cdot\left(\int\limits_0^\pi \left(\sin\frac{\tau}{2}\right)^{2mp} d\tau\right)^{-1} - 1 \leq \pi\left(\int\limits_0^\pi \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{2mp} d\tau\right)^{-1} - 1 = 2mp.$$

Аналогичным образом, учитывая неравенство $|\sin x| \leq 1$, $x \in \mathbb{R}$, получаем

$$\alpha = \alpha(m,p) = \pi\cdot\left(\int\limits_0^\pi \left(\sin\frac{\tau}{2}\right)^{2mp} d\tau\right)^{-1} - 1 \geq \frac{\pi}{\pi} - 1 = 0.$$

Мы доказали, что число α удовлетворяет неравенство

$$0 < \alpha < 2mp. \tag{2.3.8}$$

Выясним смысл условие (2.3.1) теоремы 2.3.1. Запишем в явном виде функцию Φ^* в (2.3.1):

$$\left(\frac{nt}{\pi}\right)^\alpha = \frac{\pi}{nt}\cdot\int\limits_0^{nt} \left(\sin\frac{\tau}{2}\right)_*^{2mp} d\tau \cdot \left(\int\limits_0^\pi \left(\sin\frac{\tau}{2}\right)^{2mp} d\tau\right)^{-1}. \tag{2.3.9}$$

Если теперь полагать $nt = \mu\pi$ $(0 \le \mu < \infty)$, то неравенство (2.3.9) запишется в виде то

$$\mu^{\alpha+1} \ge \int\limits_0^{\mu\pi} \left(\sin\frac{\tau}{2}\right)_*^{2mp} d\tau \left(\int\limits_0^{\pi} \left(\sin\frac{\tau}{2}\right)^{2mp} d\tau\right)^{-1}. \tag{2.3.10}$$

Найденная значение α в формула (2.3.7) для $\alpha = \alpha(m,p)$ есть результат приравнивания производных по μ от левой и правой частей неравенства (2.3.10) при $\mu = 1$. В силу (2.3.7), неравенство (2.3.10) преобретает вид

$$\mu^{\alpha+1} \ge \frac{\alpha+1}{\pi} \int\limits_0^{\mu\pi} \left(\sin\frac{\tau}{2}\right)_*^{2mp} d\tau, \tag{2.3.11}$$

Теперь докажем 2.6.11. Рассуждения проведём отдельно для разных случаев:

а) $\mu \in [0,1]$, **б)** $\mu \in [1,\infty)$.

Пусть $\mu \in [1,\infty)$. Очевидно, что в окрестности нуля неравенство (2.3.11) имеет место. Так как

$$\varphi(\mu) := \mu^{\alpha+1} - \frac{\alpha+1}{\pi} \int\limits_0^{\mu\pi} \left(\sin\frac{\tau}{2}\right)^{2mp} d\tau =$$

$$= \mu^{\alpha+1} \left[1 - \frac{\pi^{2mp}(\alpha+1)}{2^{2mp}\,(2mp+1)}\, O(\mu^{2mp-\alpha})\right],$$

то, в силу правой части неравенство (2.3.8), функция φ является положительной функцией. Докажем, что φ на отрезке $[0,1]$ положительна. Но, если допустить, что в некоторой точке $\eta \in (0,1)$ функция φ меняет знак, то из равенства $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, по теореме Ролля, вытекает, что производная

$$\varphi'(\mu) = (\alpha+1)\left[\mu^{\alpha} - \left(\sin\frac{\mu\pi}{2}\right)^{2mp}\right] \tag{2.3.12}$$

должна иметь на интервале $(0,1)$ не менее двух различных нулей. Из (2.3.12) следует, что столько различных нулей и в тех же точках интервала $(0,1)$ имеет функция

$$\varphi_*(\mu) = \mu^{\alpha/(2mp)} - \sin\frac{\mu\pi}{2}.$$

Поскольку, кроме того, $\varphi_*(0) = \varphi_*(1) = 0$, то функция φ_* имеет на $[0,1]$ по меньшей мере четырёх нулей. Тогда повторно в силу теоремы Ролля производная

$$\varphi_*'(\mu) = \frac{\alpha}{2mp} \cdot \mu^{\alpha/(2mp)-1} - \frac{\pi}{2}\cos\frac{\mu\pi}{2} \tag{2.3.13}$$

обращается в нуль, по крайней мере в трёх различных точках интервала $(0,1)$. Таким образом в силу (2.3.8) функция $\mu^{\alpha/(2mp)-1}$ является положительной монотонно убывающей выпуклой вниз функцией на $(0,1)$, $\cos(\mu\pi/2)$ – монотонно убывающая выпуклая вверх функция на этом же интервале, а потому из геометрических соображений на основании (2.3.13) следует, что производная φ_*' на интервале $(0,1)$ может иметь не более двух различных нулей, и мы приходим к противоречию. Этим доказано неравенство (2.3.11) в случае **а)**.

Рассматривая случая **б)**, функцию φ запишем в виде

$$\varphi(\mu) = \mu^{\alpha+1} - \frac{\alpha+1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\left(\sin\frac{\tau}{2}\right)^{2mp} d\tau - \frac{\alpha+1}{\pi}\int\limits_{\pi}^{\mu\pi}\left(\sin\frac{\tau}{2}\right)_*^{2mp} d\tau =$$

$$= \mu^{\alpha+1} - 1 - (\alpha+1)(\mu-1). \tag{2.3.14}$$

Вычисли в производную, для всех $\mu \in [1,\infty)$ имеем

$$\varphi'(\mu) = (\alpha+1)(\mu^{\alpha}-1) \geq 0.$$

Теперь из (2.3.14), следует, что $\varphi(1) = 0$, а потому $\varphi(\mu) \geq 0$ при $1 \leq \mu < \infty$. Но это означает, что неравенство (2.3.11) имеет место и в случае **б)**. Таким образом доказано, что условие (2.3.1) справедливо для функции Φ^* при любом $t \in \mathbb{R}_+$. Теорема 2.3.1 доказана. Из доказанной теоремы 2.3.1 вытекает

Следствие 2.3.1. *При всех $m,n,r \in \mathbb{N}$, $1/(2r) < p \leq 2$ имеют место равенства*

$$\lambda_n(W_{m,p}^{(r)}(\mathcal{D},\Phi^*), L_{2,\mu}) = \mathcal{E}_{n-1}(W_{m,p}^{(r)}(\mathcal{D},\Phi^*))_{L_{2,\mu}} =$$

$$= 2^m(\alpha+1)^{-1/p}\,\pi^{\alpha/p}\,n^{-(2r+\alpha/p)}.$$

Теорема 2.3.2. *Пусть m, n, r-натуральные числа и $p \in (1/(2r), 2]$ Если функция Φ при любом $t \in \mathbb{R}_+$ удовлетворяет условию (2.3.1) теоремы 2.3.1, то для всех $s = \overline{0, r}$ справедливы равенства*

$$\sup\Big\{\ \mathcal{E}_{n-1}(D^s f)_{2,\mu}:\ f \in W^{(r)}_{m,p}(\mathcal{D}, \Phi)\Big\} =$$

$$= n^{-2(r-s)}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}(2sin^2\frac{\tau}{2})^{mp}d\tau\right)^{-1/p}\Phi(\pi/n). \tag{2.3.15}$$

Доказательство. Для любой $f \in L^{(2r)}_{2,\mu}$ и $h \in [0, \pi/n]$ из соотношения (1.4.21) пологая $\varphi(t) \equiv 1$ получаем

$$\mathcal{E}_{n-1}(D^s f)_{2,\mu} \leq$$

$$\leq n^{-2(r-s)}\left(\frac{1}{h}\int\limits_0^{h}\Omega_m^p(D^r f, t)_{2,\mu}dt\right)^{1/p}\left(\frac{1}{h}\int\limits_0^{h}(2sin^2\frac{nt}{2})^{mp}dt\right)^{-1/p}. \tag{2.3.16}$$

Учитывая определение класса $W^{(r)}_{m,p}(\mathcal{D}, \Phi)$, из (2.3.16) при $h = \pi/n$ получаем

$$\mathcal{E}_{n-1}(D^s f)_{2,\mu} \leq n^{-2(r-s)}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}(2sin^2\frac{t}{2})^{mp}dt\right)^{-1/p}\Phi(\pi/n). \tag{2.3.17}$$

В теореме 2.3.1 мы установили, что множество полиномов $p_n \in \mathcal{P}_n$, удовлетворяющих условию

$$\|p_n\|_{2,\mu} \leq n^{-2r}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}(2sin^2\frac{t}{2})^{mp}dt\right)^{-1/p}\Phi(\pi/n),$$

содержится класс $W^{(r)}_{m,p}(\mathcal{D}, \Phi)$. Рассмотрим функцию

$$f_1(t) \overset{def}{=} n^{-2r}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}(2sin^2\frac{t}{2})^{mp}dt\right)^{-1/p}\Phi(\pi/n)T_n(x).$$

Так как

$$\|f_1\|_{2,\mu} = n^{-2r}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}(2sin^2\frac{t}{2})^{mp}dt\right)^{-1/p}\Phi(\pi/n),$$

то функция f_1 принадлежит сфере σ_{n+1}, введённой при доказательстве теоремы 2.3.1, а значит $f_1 \in W_{m,p}^{(r)}(\mathcal{D}, \Phi)$, и поскольку

$$\mathcal{E}_{n-1}(D^s f_1)_{2,\mu} = n^{-2(r-s)} \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (2sin^2 \frac{t}{2})^{mp} dt \right)^{-1/p} \Phi(\pi/n),$$

то имеем

$$\sup\Big\{ \mathcal{E}_{n-1}(D^s f)_{2,\mu} : \ f \in W_{m,p}^{(r)}(\mathcal{D}, \Phi)\Big\} \geq \mathcal{E}_{n-1}(D^s f_1)_{2,\mu} =$$

$$= n^{-2(r-s)} \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (2sin^2 \frac{t}{2})^{mp} d\tau \right)^{-1/p} \Phi(\pi/n). \qquad (2.3.18)$$

Сопоставляя неравенства (2.3.17) и (2.3.18), получаем равенство (2.3.15). Теорема 2.3.2 доказана.

Заключение

Основные результаты диссертационной работы заключается в следующем:

- найдены точные оценки скорости сходимости ряда Фурье-Чебышёва на некоторых классах функций, задаваемых дифференциальным оператором второго порядка и характеризующихся усреднённым значением обобщённого модуля непрерывности m-го порядка в пространстве $L_{2,\mu}$;

- найдено точное неравенство Джексона - Стечкина между величиной наилучшего приближения функции частными суммами Фурье-Чебышёва и специальными модулями непрерывности m-го порядка, определяемыми дифференциальным оператором второго порядка;

- вычислены точные значения n-поперечников некоторых классов функций, задаваемых специальными модулями непрерывности m-го порядка, определяемыми дифференциальным оператором второго порядка;

Работа носит теоретический характер. Развитые в ней методы и полученные результаты могут применяться в других экстремальных задачах теории приближений. Главы диссертации в отдельности могут составить содержание специальных курсов для студентов и аспирантов высших учебных заведений, обучающихся по специальности математики и прикладной математики.

Список литературы

1. Бари Н.К. Тригонометрические ряды. – М.: Физматгиз, 1961, 936 с.
2. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. В 2 ч. – М.: Мир, 1965, т.1, 616 с., т.2, 537 с.
3. Бабенко А.Г. О точной константе в неравенстве Джексона в L^2 // Матем. заметки, 1986, т.39, №5, С. 651-664.
4. Чертова Д.В. Теоремы Джексона в пространствах L_p, $1 \le p \le 2$ с периодическим весом Якоби // Известия ТулГУ. Естественные науки, 2009, вып.1, С. 5-27.
5. Кук Во Тхи. Операторы обобщённого сдвига в пространствах L_p на торе с весом Якоби и их применение // Известия ТулГУ. Естественные науки, 2012, вып.1, С. 17-43.
6. Иванов А.В., Иванов В.И. Теория Данкля и теорема Джексона в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$ со степенным весом // Труды ИММ УрО РАН, 2010, т.16, №4, С. 180-192.
7. Иванов А.В., Иванов В.И. Оптимальные аргументы в неравенстве Джексона в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$ со степенным весом // Мат. заметки, 2013, т.94, №3, С. 338-348.
8. Вакарчук С.Б. О неравенствах типа Джексона в $L_2[-1,1]$ и точных значениях n-поперечники функциональных классов // Укр. матем. вiсник, 2006, т.3, №1, С. 116-133.
9. Абилов В.А., Абилова Ф.В. Об одной квадратурной формуле // Журнал выч. мат. и мат. физ., 2002, т.42, №4. С. 451-458.
10. Шабозов М.Ш., Тухлиев К. Неравенства Джексона - Стечкина с обобщёнными модулями непрерывности и поперечники некоторых классов функций. // Труды Института математики и механики УрО РАН, 2015, т.21, №4, С. 292-308.

11. Kolmogoroff A.N. Über die besste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionklassen // Ann. of Math., 1936, v.37, P. 107-110.

12. Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены. – М.: Наука, 1979, 416 с.

13. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1979, 480 с.

14. Шалаев В.В. О поперечниках в L_2 классов дифференцируемых функций, определяемых модулями непрерывности высших порядков // Укр. матем. журнал, 1991, т.43, №1, С. 125-129.

15. Вакарчук С.Б. Неравенства типа Джексона и поперечники классов функций в L_2 // Матем. заметки, 2006, т.80, №1, С. 11-19.

16. Тайков Л.В. Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности функций из L_2 // Матем. заметки, 1976, т.20, №3, С. 433-438.

17. Степанец А.И. Равномерные приближения тригонометрическими полиномами. – Киев: Наукова думка, 1981, 340 с.

18. Peetre J. On the connection between the theory of interpolation spaces and approximation theory // Colloqium on Constructive Function Theory. Budapest, 1969.

19. Вакарчук С.Б. $\mathcal{K}$-функционалы и точные значения n-поперечников некоторых классов из L_2 // Матем. заметки, 1999, т.66, №4, С. 494-499.

20. Шевчук А.И. Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций. – Киев: Наукова думка, 1992, 225 с.

21. Потапов М.К. О применении одного оператора обобщённого сдвига в теории приближений // Вестник Московского ун-та. Серия 1. Матем., мех., 1998, №3, С. 38-48.

22. Потапов М.К. О применении несимметричных операторов обобщённого сдвига в теории приближений // Теория функций, её приложения и

смежные вопросы. Материалы V Казанской международной летней школы-конференции (Казань, 27 инюня - 4 июля 2001 г.). Тр. матем. центра им. Н.И.Лобачесвского, 2001, т.78, С. 185-189.

23. Напеденина А.Ю. О совпадении классов функций, определяемых оператором обобщённого сдвига или порядком наилучшего приближения // Вестник Московского ун-та. Серия 1. Матем., мех., 2004, №2, С. 29-33.

24. Абилов В.А., Абилова Ф.В. Некоторые вопросы приближения 2π-периодических функций суммами Фурье в пространстве $L_2(2\pi)$ // Матем. заметки, 2004, т.76, №6, С. 803-811.

25. Вакарчук С.Б., Забутная В.И. Неравенства типа Джексона-Стечкина для специальных модулей непрерывности и поперечники функциональных классов в пространстве L_2 // Матем. заметки, 2012, т.92, №4, С. 497-514.

26. Шабозов М.Ш., Тухлиев К. Наилучшие полиномиальные приближения и поперечники некоторых функциональных классов в L_2 // Матем. заметки, 2013, т.94, №6, С. 905-914.

27. Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников некоторых классов функций в L_2 // Сибир. матем. журнал, 2011, т.52, №6, С. 1414-1427.

28. Корнейчук Н.П. Экстремальные задачи теории приближения. – М.: Наука, 1976, 320 с.

29. Корнейчук Н.П. Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987, 424 с.

30. Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений. - М.: МГУ, 1976, 325 с.

31. Иванов В.И., Смирнов О.И. Константы Джексона и константы Юнга в пространствах L_p. – Тула: ТулГУ, 1995, 192 с.

32. Черных Н.И. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 // Мат. заметки, 1967, Т. 2, №5, С. 513-522.

33. Тайков Л.В. Структурные и конструктивные характеристики функций из L_2 // Мат. заметки, 1979, Т. 25, №2, С. 217-223.

34. Лигун А.А. Некоторые неравенства между наилучшими приближениями и модулями непрерывности в пространстве L_2 // Мат. заметки. 1978, Т. 24, №6, С. 785-792.

35. Бабенко А.Г., Черных Н.И., Шевалдин В.Т. Неравенства Джексона – Стечкина в L_2 с тригонометрическим модулем непрерывности // Мат. заметки. 1999, Т. 65, №6, С. 928-932.

36. Вакарчук С.Б. Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников функциональных классов из L_2 // Мат. заметки. 2005, Т. 78, №5, С. 792-796.

37. Тухлиев К. Наилучшие приближения и поперечники некоторых классов сверток в L_2 // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2016, Т.22, №4, С. 284-294.

38. Шабозов М.Ш., Тухлиев К. K-функционалы и точные значения n-поперечников некоторых классов из $L_2\big((\sqrt{1-x^2})^{-1}, [-1,1]\big)$ // Известия Тульского госуниверситета. Естест. науки, 2014, вып. 1, ч.1, С. 83-97.

39. Butzer P.L. Legendre transform methods in the solution of basic problems in algebraic approximation // Coloquia Mathematica Societatis János Bolyai. Budapesht (Functious, Series, Operators), 1980, v.30, P.277-301.

40. Pinkus A. n-Widths in Approximation Theory. – Berlin: Springer–Verlag, 1985, 292 p.

41. Айнуллоев Н. Значение поперечников некоторых классов дифференцируемых функций в L_2 // Доклады АН ТаджССР, 1984, т.27, №8, С. 415-418.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи, опубликованные в рецензируемых журналах из перечня ВАК при Президенте Республики Таджикистан и Российской Федерации:

42. Тухлиев К., Бекназаров Дж.Х. О наилучшем приближении функций суммами Фурье-Чебышёва в $L_{2,\mu}[-1,1]$ // ДАН РТ. 2014, т.57, №3, С. 177-183.

43. Бекназаров Дж.Х. Верхние грани отклонения некоторых классов функций от их частных сумм рядов Фурье-Чебышёва в пространстве L_2 // Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н. 2015. №1(158). С. 20-32.

44. Бекназаров Дж.Х. О наилучшем приближении функций суммами Фурье-Чебышёва и поперечники некоторых классов функций // Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н. 2016. №3(164). С. 15-25.

В других изданиях:

45. Тухлиев К., Бекназаров Дж.Х. О наилучшем приближении дифференцируемых функций суммами Фурье-Чебышёва и неравенства Джексона-Стечкина в пространстве $L_{2,\mu}$ // В материалах международной научной конференции "Современные проблемы математики и её преподавания" посвященная 20-летию Конституции Республики Таджикистан. (Худжанд, 28-29 июня 2014 г.), С. 91-93.

46. Тухлиев К., Бекназаров Дж.Х.Приближении функций суммами Фурье-Чебышёва в $L_{2,\mu}[-1,1]$ // В материалах международной научной конференции "Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений". Душанбе. 27-28 апреля 2015г. С. 42-45.

47. Тухлиев К., Бекназаров Дж.Х. Приближении функций суммами Фурье-Чебышёва и поперечники некоторых классов функций // Сборник статей Международной научно-практической конференции 18 октября 2015 г., Екатеринбург, С. 16-18.

48. Бекназаров Дж.Х. Приближение функций суммами Фурье-Чебышёва и поперечники классов функций // Труды международной летней математической Школы-Конференции С.Б. Стечкина по теории функций. Таджикистан. Душанбе. 15 - 25 августа 2016 г. С. 57-60.

49. Бекназаров Дж.Х. Приближении функций суммами Фурье-Чебышёва и поперечники классов функций в пространстве $L_{2,\mu}$ // Материалы республиканской научно-практической конференции "Современные проблемы естественных наук", 24 ноября 2017 г., Филиал МГУ им. М.В.Ломоносова в городе Душанбе. С. 8-10.

50. Бекназаров Дж.Х. Приближение функций суммами Фурье - Чебышёва в пространстве $L_{2,\mu}[-1,1]$ // В материалах международной научной конференции "Дифференциальные и интегральные уравнения с сингулярными коэффицентами кроевые задачи теории функции" посвященной 90-летию академика АН РТ Л.Г.Михайлова. Таджикистан. Душанбе. 28 февраля 2018 г. С. 35-38.

51. Бекназаров Дж.Х. Значение n поперечников в некоторых классов функций // В материалах международной научной конференции "Современные проблемы математики и её приложения" посвященной 70-летию академика АН РТ М.И.Илолова. Таджикистан, Душанбе, 14-15 марта 2018 г. С. 12-15.