ТАДЖИКСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Козиев Гулназар Мавлоназарович

НЕКОТОРЫЕ ДВУМЕРНЫЕ СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ С НЕЧЁТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

01.01.01 - Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация
на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель: доктор физико–математических наук, профессор Джангибеков Гулходжа

Душанбе – 2019

Содержание

Введение (Обзор литературы. Основные результаты работы)

Актуальность темы исследования. Основным объектом исследования данной диссертационной работой является действующий в лебеговом пространстве функций с весом $L^p_{\beta-2/p}(D)(1 < p < \infty, 0 < \beta < 2)$ двумерный сингулярный интегральный оператор Михлина-Кальдерона-Зигмунда [1]-[5]

$$(S_m f)(z) = \frac{|m|}{2\pi i^{|m|}} \iint\limits_D \frac{e^{-im\theta}}{|\zeta - z|^2} f(\zeta) ds_\zeta, \quad \theta = \arg(\zeta - z), \tag{0.1}$$

где D - ограниченная область комплексной плоскости, граница Γ которой состоит из конечного числа простых замкнутых кривых Ляпунова Γ, не пересекающихся между собой, $m \neq 0$ - целое число.

Интегральные уравнения с такими операторами встречаются во многих задачах теории обобщённых аналитических функций (И.Н.Векуа [6]), теории квазиконформных отображений (Л.Альфорс [7], М.Шиффер [8]), теории дифференциальных уравнений с частными производными (Б.В.Боярский [9], А.Д.Джураев [10] - [12], В.Н.Монахов [13]) и другие. Впервые такие уравнения рассматривал И.Н.Векуа [6] методом сжимающих отображений. А.Д.Джураев [10] исследовал двумерные сингулярные интегральные уравнения в пространствах $L_p(D), 2 < p < \infty$ при помощи редукции к краевым задачам для обобщёных аналитических функций. И.И.Комяк [14]-[16] и Н.Л.Василевский [17]-[19] применили при изучении двумерных уравнений в пространствах $L^p(D), 1 < p < \infty$ методы теории банаховых алгебр.

Разработанная Р.В.Дудучавой [20],[21] L_p - теория, $1 < p < \infty$, многомерных сингулярных интегральных уравнений на многообразиях с краем даёт возможность свести исследование нётеровых свойств уравнений, содержащих операторы S_m и их различные комбинации, к факторизации соответствующих рациональных матриц-функций, а точнее, к нахождению их частных индексов. При этом представляет интерес установить критерий нётеровости рассматриваемого двумерного сингулярного интегрального уравнения в виде явных условий на его коэффициенты. Для широкого класса интегральных уравнений это проделано в работах Г.Джангибекова (см. напр.[22]-[24]), К.Х.Бойматова и Г.Джангибекова [25] а также в работах учеников Джангибекова Г.[26]-[29]. Во всех вышеуказанных работах рассматривались случаи, когда сингулярный интеграл S_m имел характеристику четного порядка. Что касается случая нечетного m, то в этом направлении была выполнена лишь одна работа [30].

Данная диссертационная работа посвящена исследованию нётеровых свойств двумерных сингулярных интегральных операторов по ограниченной области с нечетной характеристикой с непрерывными, а также разрывными коэффициентами.

Цель работы. Целью диссертационной работы является исследование вопроса разрешимости некоторых классов двумерных сингулярных интегральных уравнений по ограниченной области с нечетными характеристиками с непрерывными, а также с разрывными коэффициентами.

Научная новизна. Результаты, выносимые на защиту, являются новыми и заключаются в следующем:

- для одного класса двумерных сингулярных интегральных операторов с нечётной характеристикой по ограниченной области в лебеговых пространствах с весом найдены эффективные необходимые и достаточные условия нётеровости и получена формула для подсчёта индекса;

- для некоторых шестикомпонентных классов двумерных сингулярных интегральных операторов с нечётной характеристикой по ограниченной области в лебеговых пространствах с весом получены необходимые и достаточные условия нётеровости, а также даны формулы для подсчёта индекса оператора;

- для одного модельного двумерного сингулярного интегрального уравнения с нечётной характеристикой и с разрывным коэффициентом путём перехода к бесконечной системе интегральных уравнений с ядром Коши и с ядрами однородными степени -1 получены необходимые и достаточные условия нётеровости и формула для подсчёта индекса;

- доказана теорема разрешимости одного класса двумерных сингулярных интегральных операторов с нечётной характеристикой и разрывным коэффициентом и получена формула для подсчёта индекса;

Теоретическая и практическая значимость работы. Результаты, полученные в диссертации, носят теоретический характер. Они могут послужить основой для дальнейших теоретических исследований в теории краевых задач для уравнений с частными производными.

Практическая ценность работы определяется прикладной значимостью сингулярных интегральных уравнений в решении прикладных задач механики и других разделов физики.

Методы исследования. Применяемый в диссертации метод основан на элементах функционального анализа и теории функций комплексных переменных, а также методе факторизации матриц-функций.

Апробации результатов. Основные результаты работы докладывались автором и обсуждались на семинарах кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений Таджикского национального университета. Результаты диссертации были представлены в ходе выступлений на следующих конференциях:

- международной научной конференции, посвященной 85-летию академика АН РТ Л.Г.Михайлова (Душанбе, 17-18 июня 2013 г.);
- международной научной конференции, посвященной 20-летию Конституции РТ (Худжанд, 28-29 июня 2014 г.);
- международной научной конференции, посвященной 80-летию члена - кореспондента АН РТ, доктора физико-математических наук, профессора Стеценко Владислава Яковлевича (Душанбе, 27-28 апреля 2015 г.)
- международной научной конференции "Современные проблемы математики и ее приложения" (Душанбе, Филиал Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова, 2016 г.);
- международной научной конференции, посвященной 90-летию акаде-

мика АН РТ, лауреата государственной премии имени Абуали ибн Сино Михайлова Леонида Григорьевича (Душанбе, 27-28 февраля 2018 г.);

Публикации и личный вклад автора. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [51]–[60]. Из них статьи [51]–[55], опубликованы в изданиях, входящих а действующий перечень ВАК при Президенте РТ и ВАК РФ, а работы [56]-[60] в прочих изданиях.

Работы [51] - [54] опубликованы в соавторстве с научным руководителем, которому принадлежит постановка задач и общее руководство, а диссертанту доказательство основных результатов.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, шести разделов, списка цитированной литературы из 60 наименований и заключения, занимает 79 страниц машинописного текста и набрана на LaTeX. Для удобства в диссертации применена сквозная нумерация теорем, лемм и формул. Они имеют двойную нумерацию, в которой первая цифра совпадает с номером раздела, вторая указывает на номер теорем, лемм или формулы в данном подразделе.

Содержание диссертации. Работа состоит из шести разделов. Раздел 1 носит вспомогательный характер. В нём описаны используемые в работе пространства функций и приводятся основные понятия и факты теории нётеровых операторов в банаховых пространствах.

В разделе 2 в пространстве $L^p_{\beta-2/p}(D)$:

$$L^p_{\beta-2/p}(D) = \{f(z) : |z|^{\beta-2/p} f(z) = F(z) \in L^p(D), ||f||_{L^p_{\beta-2/p}} = ||F||_{L^p}\},$$

$(1 < p < \infty, 0 < \beta < 2)$ рассматривается следующее интегральное уравнение:

$$A \equiv a(z)I + b(z)K + c(z)S_m + d(z)\overline{S}_m K, \tag{0.2}$$

где $m > 0$ - нечётное число и $a(z), b(z), c(z), d(z)$ - непрерывные в $\overline{D}$ функции.

Оператору A из (0.2) ставится в сответсвие следующая матрица функция:

$$G_{\mathcal{A}}(z,t) = \begin{pmatrix} a(z) + c(z)\overline{t}^m & b(z) - d(z)t^m \\ \overline{b(z)} + \overline{d(z)}\overline{t}^m & \overline{a(z)} - \overline{c(z)}t^m \end{pmatrix}.$$

Показывается, что имеет место

Лемма 0.1. *Матрица $G_{\mathcal{A}}(z,t)$ невырождена для всех $z \in \overline{D}$ и $|t| = 1$ тогда и только тогда, когда для $\forall z \in \overline{D}$ выполнено одно из неравенств*

$$\Delta_1^2(z) > |\lambda(z)|^2 - |\mu(z)|^2 \quad \forall z \in \overline{D}, \tag{0.3}$$

$$\Delta_2^2(z) > |\lambda(z)|^2 - |\mu(z)|^2 \quad \forall z \in \overline{D}, \tag{0.4}$$

причем (0.3) и (0.4) не могут одновременно выполняться ни при одном значении $z \in \overline{D}$, где

$$\Delta_1 = |a|^2 - |b|^2,\ \Delta_2 = |c|^2 - |d|^2,\ \lambda = \overline{a}c - b\overline{d},\ \mu = a\overline{d} - \overline{c}b.$$

Доказывается что справедлива следующая

Теорема 0.1. *Для нётеровости оператора A в пространстве $L_p(D)$ $1 < p < \infty$ необходимо и достаточно выполнение одного из следующих (исключающих друг друга) условий:*

$$\Delta_1^2(z) > |\lambda(z)|^2 - |\mu(z)|^2 \quad \forall z \in \overline{D}, \tag{0.5}$$

$$\Delta_2^2(z) > |\lambda(z)|^2 - |\mu(z)|^2 \quad \forall z \in \overline{D} \quad \text{и} \quad \mu(\tau) \neq 0 \quad \forall \tau \in \Gamma. \tag{0.6}$$

При этом, если выполнено условие (0.5), то индекс оператора A равен нулю, а при выполнении (0.6) его индекс $\varkappa$ равен $\varkappa = mInd_{\Gamma}\mu(t)$.

В разделе 3 настоящей работы изучается шестикомпонентное интегральное уравнение с нечётной характеристикой вида

$$\mathcal{A} \equiv a(z)I + b(z)K + (c(z)I + d(z)K)S_m + (e(z)I + h(z)K)\overline{S}_m = g(z), \quad (0.7)$$

где коэффициенты $a(z),\ b(z),\ c(z),\ d(z),\ e(z),\ h(z)$ - непрерывные в $\overline{D} = D \cup \Gamma$ комплекснозначные функции.

В векторном пространстве

$$L_p^2(D) = \{(f_1, f_2) : f_1, f_2 \in L^p(D)\}, \quad 1 < p < \infty$$

рассмотрим следующий матричный оператор

$$A = \begin{pmatrix} a(z)I + c(z)S_m - e(z)S_{-m} & b(z)I - d(z)S_{-m} + h(z)S_m \\ \overline{b(z)}I + \overline{d(z)}S_m - \overline{h(z)S_{-m}} & \overline{a(z)}I - \overline{c(z)}S_{-m} + \overline{e(z)}S_m \end{pmatrix},$$

где $S_{-m} = -\overline{S}_m$. Доказывается, что имеет место

Лемма 0.2. *Нётеровость оператора $\mathcal{A} : L_p(D) \longrightarrow L_p(D)$ эквивалентна нётеровости оператора $A : L_p^2(D) \longrightarrow L_p^2(D)$.*

Поскольку символ оператора S_m равен $\frac{\overline{\sigma}^m}{|\sigma|^m}(\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2 \neq 0)$, то, согласно [20],[21] для нётеровости операторной матрицы A необходимо, чтобы его символический определитель $\det G_A(z,t) \neq 0$ для всех $z \in \overline{D}, |t| = 1$, где $G_A(z,t)$:

$$G_A(z,t) = \begin{pmatrix} a(z) + c(z)\overline{t}^m - e(z)t^m & b(z) - d(z)t^m + h(z)\overline{t}^m \\ \overline{b(z)} + \overline{d(z)}\overline{t}^m - \overline{h(z)}t^m & \overline{a(z)} - \overline{c(z)}t^m + \overline{e(z)}\overline{t}^m \end{pmatrix}.$$

Лемма 0.3. *Матрица $G_A(z,t)$ невырождена для всех $z \in \overline{D}$ и $|t| = 1$ тогда и только тогда, когда для $\forall z \in \overline{D}$ выполнено одно из неравенств*

$$\Delta_1^2(z) + |\mu_1(z)|^2 + |\mu_3(z)|^2 > |\lambda_1(z)|^2 + |\lambda_3(z)|^2 \quad \forall z \in \overline{D}, \tag{0.8}$$

$$\Delta_2^2(z) + |\mu_1(z)|^2 + |\lambda_2(z)|^2 > |\lambda_1(z)|^2 + |\mu_2(z)|^2 \quad \forall z \in \overline{D}, \tag{0.9}$$

$$\Delta_3^2(z) + |\mu_3(z)|^2 + |\lambda_2(z)|^2 > |\lambda_3(z)|^2 + |\mu_2(z)|^2 \quad \forall z \in \overline{D}. \tag{0.10}$$

При этом никакие два из этих неравенств не могут одновременно выполняться ни при одном значении $z \in \overline{D}$, где

$$\Delta_1 = |a|^2 - |b|^2,\ \Delta_2 = |c|^2 - |d|^2,\ \lambda_1 = \overline{a}c - b\overline{d},\ \mu_1 = a\overline{d} - \overline{b}c,$$

$$\lambda_2 = \overline{h}c - e\overline{d}, \quad \mu_2 = h\overline{d} - \overline{e}c, \quad \lambda_3 = \overline{a}e - b\overline{h}, \quad \mu_3 = a\overline{h} - \overline{b}e.$$

Теорема 0.2. *Для нётеровости оператора A в пространстве $L_p(D)$ $1 < p < \infty$, необходимо и достаточно выполнение одного из следующих (исключающих друг друга) условий:*

$$\Delta_1^2(z) + |\mu_1(z)|^2 + |\mu_3(z)|^2 > |\lambda_1(z)|^2 + |\lambda_3(z)|^2 \quad \forall z \in \overline{D} \quad \forall z \in \overline{D}, \tag{0.11}$$

$$\Delta_2^2(z)+|\mu_1(z)|^2+|\lambda_2(z)|^2 > |\lambda_1(z)|^2+|\mu_2(z)|^2 \quad \forall z \in \overline{D} \quad \text{и} \quad \mu_1(\tau) \neq 0 \quad \forall \tau \in \Gamma. \tag{0.12}$$

$$\Delta_1^3(z)+|\mu_3(z)|^2+|\lambda_2(z)|^2 > |\lambda_3(z)|^2+|\mu_2(z)|^2 \quad \forall z \in \overline{D} \quad \text{и} \quad \mu_3(\tau) \neq 0 \quad \forall \tau \in \Gamma. \tag{0.13}$$

При этом, если выполнено условие (0.11), то индекс оператора A равен нулю, а при выполнении (0.12) его индекс $\varkappa$ равен

$$\varkappa = mInd_\Gamma \mu_1(t),$$

а если выполнено (0.13), то

$$\varkappa = -mInd_{\Gamma}\mu_3(t).$$

В разделе 4 в комплексной плоскости переменной $z = x + iy$ изучается следующее модельное интегральное уравнение

$$f(z) - \lambda \frac{z}{|z|}(S_1\overline{f})(z) = g(z), \tag{0.14}$$

где

$$(S_1\overline{f})(z) = \frac{1}{2\pi i}\iint\limits_D \frac{e^{-i\theta}}{|\zeta - z|^2}\overline{f(\zeta)}ds_\zeta, \quad \theta = \arg(\zeta - z), \quad D = \{z : |z| < 1\},$$

интеграл понимается в смысле главного значения по Коши, λ - комплексный параметр, черта над функцией $f(z)$ означает переход к комплексно-сопряжённым значениям.

Предполагается, что искомая функция $f(z)$ и свободный член $g(z)$ принадлежат банахову пространству $L^p_{\beta-2/p}(D)$:

$$L^p_{\beta-2/p}(D) = \{f(z) : |z|^{\beta-2/p}f(z) = F(z) \in L^p(D), ||f||_{L^p_{\beta-2/p}} = ||F||_{L^p}\},$$

где $1 < p < \infty$, β - число из интервала $(0, 1)$.

Характерной особенностью уравнения (0.14) является то, что оно содержит в ядре сингулярную особенность с нечётной характеристикой $e^{-i\theta}$, причём коэффициент при сингулярном интеграле имеет в точке $z = 0$ существенный разрыв вида $\frac{z}{|z|}$. Как выясняется, оба эти обстоятельства существенно влияют на нётеровость и индекс уравнения (0.14)

Применяя к уравнению (0.14) метод работы [41] относительно коэффициентов Фурье $f_k(r)$ искомой функции $f(z)$, получим бесконечное число интегральных уравнений вида

$$(A_k f_k)(r) \equiv f_k(r) + |\lambda|^2 [S_\Gamma + \Theta_k]^2 f_k(r) = q_k(r), k = 0, 1, \cdots \tag{0.15}$$

с сингулярным интегральным оператором Коши и оператором с однородным ядром степени -1 :

$$(S_\Gamma f_k)(r) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_0^1 \frac{f_k(\rho)}{\rho - r} d\rho, \quad (\Theta_k f_k)(r) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_0^1 \frac{1}{r} \Theta_k \left(\frac{\rho}{r}\right) f_k(\rho) d\rho,$$

где $\Theta_k(\tau)$ функция Лежандра с полуцелым индексом. Согласно результатам [44] и [45], символы этих операторов имеют вид:

$$s_\beta(x) = \operatorname{cth} \pi(x + i\beta), \quad H_k(x) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_0^\infty \Theta_k(\rho) \rho^{-\beta + ix} d\rho,$$

где

$$\operatorname{cth} z = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}},$$

β - показатель веса пространства $L^p_{\beta - 1/p}(0, 1)$ из интервала $(0, 1) (1 < p < \infty)$.

$$A_{k,\beta}(x) = 1 + |\lambda|^2 \left[s_\beta^2(x) + 2 s_\beta(x) H_k(x) + H_k^2(x)\right], x \in (-\infty, +\infty), k = 0, 1, \ldots. \tag{0.16}$$

$$A_{k,\beta,p}(x, \xi) = \begin{cases} A_{k,\beta}(x), & \text{если} \quad x \in (-\infty, +\infty), \\ 1 + |\lambda|^2 s_{1/p}^2(\xi), & \text{если} \quad x = \pm\infty, \quad \xi \in (-\infty, +\infty). \end{cases} \tag{0.17}$$

Доказывается, что найдется такое натуральное число N_0, что при $k > N_0$ все интегральные уравнения (0.15) безусловно разрешимы единственным образом. Имеет место

Теорема 0.3 *Для нормальной разрешимости уравнения (0.14) в пространстве* $L^p_{\beta-2/p}(D)(1 < p < \infty, 0 < \beta < 1)$ *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\prod_{k=0}^{N_0} A_{k,\beta,p}(x,\xi) \neq 0, \quad -\infty \leq x \leq +\infty, \quad -\infty \leq \xi \leq +\infty,$$

при этом индекс уравнения (0.14) равен

$$\varkappa = \sum_{k=0}^{N_0} Ind A_{k,\beta,p}(x,\xi).$$

В разделе 5 изучается следующий класс двумерных сингулярных интегральных уравнений с нечётной характеристикой и разрывными коэффициентами

$$a(z)f(z) + \frac{b(z)}{2\pi i}\frac{z}{|z|}\iint\limits_D \frac{e^{-i\theta}}{|\zeta - z|^2}\overline{f(\zeta)}ds_\zeta + c(z)\iint\limits_D B_1(z,\overline{\zeta})f(\zeta)ds_\zeta = g(z), \tag{0.18}$$

где $z \in D$, $\theta = \arg(\zeta - z)$, ds_ζ – элемент плоской меры Лебега, первый интеграл понимается в смысле главного значения по Коши. В соответствии с этим сопряженным к (0.18) будет уравнение

$$\begin{aligned} a(z)\psi(z) - \frac{1}{2\pi}\iint\limits_D \overline{b(\zeta)}\frac{\overline{\zeta}}{|\zeta|}\frac{\overline{\psi(\zeta)}ds_\zeta}{(\overline{\zeta} - \overline{z})^2} + \\ + \iint\limits_D c(\zeta)B_1(\zeta,\overline{z})\psi(\zeta)ds_\zeta = q(z), z \in D, \end{aligned} \tag{0.19}$$

где $\psi(z)$, $q(z) \in L^{p'}_{2-\beta-2/p'}(D)$.

$B_1(z,\zeta)$ – поликерн-функция Бергмана области D, представимая через функцию Грина для оператора Лапласа $G(z)$ в виде (см. [30])

$$B_1(z,\overline{\zeta}) = \frac{1}{4\pi}\sum_{k,l=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k+1)!(l+1)!}C^k_{-\frac{1}{2}}C^l_{-\frac{1}{2}}(\zeta - z)^k(\overline{\zeta} - \overline{z})^l\frac{\partial^{k+l+2}G(z,\zeta)}{\partial z^k\partial\overline{\zeta}^l},$$

где

$$C_\alpha^k = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}.$$

Функция $B_1(z,\zeta)$ имеет особенности лишь при $z = \zeta \in \Gamma$.

Теорема 0.4. *Пусть в (0.18) $a(z), b(z), c(z)$ непрерывны в $\overline{D}, b(0) = 0$. Если $|a(z)| + |b(z)| \neq 0$ при $z \in \overline{D},\ a(t) + c(t) \neq 0$ при $t \in \Gamma$, то уравнение (0.18) нётерово в каждом из пространств $L^p_{\beta-2/p}(D),\ 1 < p < \infty,\ 0 < \beta < 1$; его индекс*

$$\varkappa = -Ind_\Gamma\{a(t) + c(t)\},$$

однородное уравнение (0.18), а также однородное уравнение (0.19) имеют одни и те же решения во всех указанных пространствах.

Теорема 0.5. *Пусть в (0.18) $a(z),\ b(z),\ c(z)$ непрерывны в $\overline{D}$ и $a(0) = 0$. Если $|a(z)| \neq |b(z)|,\ z \in \overline{D},\ a(t) + c(t) \neq 0$ при $t \in \Gamma$, то:*

1) уравнение (0.18) нётерово в каждом из пространств $L^p_{\beta-2/p}(D)$, $0 < \beta < 1,\ 0 < p < \infty$; причем его индекс равен

$$\varkappa = -\{Ind_\Gamma(a(t) + c(t)) + 1\}$$

2) однородное уравнение (0.18), а также (0.19) имеют одни и те же решения во всех указанных пространствах.

Теорема 0.6. *Пусть $a(z),\ b(z),\ c(z)$ непрерывны в $\overline{D}$ и $a(0) \neq 0$. Если $|a(z)| + |b(z)| \neq 0$, $z \in \overline{D},\ a(t) + c(t) \neq 0\ t \in \Gamma$, и*

$$\prod_{k=0}^{N_0} A_{k,\beta,p}(x,\xi) \neq 0, \quad -\infty \leq x \leq +\infty, \quad -\infty \leq \xi \leq +\infty,$$

то:

1) уравнение (0.18) нётерово в $L^p_{\beta-2/p}(D)$, при этом индекс уравнения

(0.18) равен

$$\varkappa = -Ind_{\Gamma}\{a(t)+c(t)\} + \varkappa_{n\beta}(\lambda),$$

где

$$\varkappa_{n\beta} = \sum_{k=0}^{N_0} IndA_{k,\beta,p}(x,\xi);$$

2) для рассматриваемого фиксированного значения β, $0<\beta<2$, однородное уравнение (0.18) имеет одни и те же решения во всех пространствах. $L^p_{\beta-2/p}(D)$, а однородное уравнение (0.19) *– в $L^p_{2-\beta-2/p}(D)$, $1<p<\infty$.*

В разделе 6 изучается следующий класс двумерных сингулярных интегральных уравнений с нечётной характеристикой и разрывными коэффициентами

$$A \equiv a(z)I + b(z)K + c(z)\frac{z}{|z|}S_1 + d(z)\frac{\overline{z}}{|z|}\overline{S_1}K + e(z)\overline{B_1} + h(z)B_1K + T \tag{0.20}$$

в пространстве $L^p_{\beta-2/p}(D)$, $1<p<\infty$, $0<\beta<1$, где I - тождественный оператор; $a(z)$, $b(z)$, $c(z)$, $d(z)$, $e(z), h(z)$ - непрерывные в $\overline{D}=DU\Gamma$ комплекснозначные функции,

$$(S_1f)(z) = \frac{1}{2\pi i}\iint\limits_D \frac{e^{-i\theta}}{|\zeta-z|^2} f(\zeta)ds_\zeta, \quad z\in D,$$

$$(Kf)(z) = \overline{f(z)}, \quad \theta = \arg(\zeta - z).$$

Лемма 0.4. *Матрица $G_A(z,t)$ невырожденна для всех $z\in\overline{D}$ и $|t|=1$ тогда и только тогда, когда для $\forall z\in\overline{D}$ выполнено одно из неравенств*

$$\Delta_1^2(z) + |\mu(z)|^2 > |\lambda(z)|^2 \quad \forall z\in\overline{D}, \tag{0.21}$$

$$\Delta_2^2(z) + |\mu(z)|^2 > |\lambda(z)|^2 \quad \forall z\in\overline{D}. \tag{0.22}$$

При этом эти неравенства не могут одновременно выполняться ни при одном значении $z \in \overline{D}$, где

$$\Delta_1 = |a|^2 - |b|^2,\ \Delta_2 = |c|^2 - |d|^2,\ \lambda = \overline{a}c - b\overline{d},\ \mu = a\overline{d} - \overline{b}c,$$

$$e_1 = \overline{a}e - b\overline{h},\ h_1 = \overline{a}h - b\overline{e},\ e_2 = \overline{d}e - c\overline{h},\ h_2 = \overline{d}h - c\overline{e}.$$

Пусть $\Lambda = |\frac{d(0)}{a(0)}|$, если $a(0) \neq 0$, равно $|\frac{c(0)}{b(0)}|$, если $b(0) \neq 0$. Доказана следующая

Теорема 0.7. *Пусть в (0.20) $\lambda(0) = 0$. Если $\Lambda \neq 1$ и выполняется одно из двух исключающих друг друга условий (0.21) или (0.22), то оператор A из (0.20) нётеров в $L^p_{\beta-2/p}(D)$, $1 < p < \infty$, $0 < \beta < 1$, причём если выполнено условие (0.21), то индекс оператора A*

$$\varkappa = 2Ind_\Gamma\{\Delta_1(t) + e_1(t) - \lambda_1(t)\beta_1(t)\overline{h_1(t)}\} - \varkappa_\beta(\Lambda),$$

а если выполнено условие (0.22), то

$$\varkappa = 2Ind_\Gamma\{e_2(t) + \beta_2(t)(\Delta_2(t) - \lambda_2(t)\overline{h_2(t)})\} - \varkappa_\beta(\Lambda).$$

$$\varkappa_{n\beta} = \sum_{k=0}^{N_0} IndA_{k,\beta,p}(x,\xi).$$

1 Описание пространств функций и некоторые вспомогательные сведения

Определение 1.1. Простую замкнутую гладкую кривую Γ назовём кривой Ляпунова, если она удовлетворяет следующему условию: касательная к кривой образует с постоянным направлением угол, удовлетворяющий условию Гельдера относительно дуги s кривой Γ.

1.1 Описание используемых пространств функций

Пусть D - конечная односвязная область комплексной плоскости, ограниченная простой замкнутой кривой Ляпунова Γ и содержащая внутри точку $z = 0$.

Пространство $\mathbf{L^p_{\beta-2/p}(D)}$ - это множество комплекснозначных измеримых в D функций $f(z)$, для которых функция $F(z) = |z|^{\beta-2/p}f(z)$ суммируема с p - ой степенью, где $1 < p < \infty$, $0 < \beta < 2$. Норма в $L^p_{\beta-2/p}(D)$ вводится по формуле

$$||f(z)||_{L^p_{\beta-2/p}} = \left(\iint\limits_D |F(z)|^p ds_z\right)^{1/p} = ||F||_{L^p}.$$

1.2 Нётеровы операторы и основные их свойства

В этом пункте приводятся основные понятия и факты теории нётеровых операторов в банаховых пространствах, которыми мы будем пользоваться в работе. Доказательства всех приводимых здесь утверждений можно найти, например, в монографии [31].

Пусть X - банахово пространстве, A - линейный ограниченный оператор, действующий в X, A^* - сопряжённый к нему оператор, действующий в сопряжённом пространство X^*. Множество $KerA$ всех решений уравнения

$$Ax = 0 \tag{1.1}$$

называется множеством нулей или ядром оператора A. Множество $KerA$ является подпространством пространства X. Размерность подпространства $KerA$, то есть число линейно независимых решений уравнения (1.1), будем обозначать через $\alpha_A = dimKerA$. Через $KerA^*$ обозначим подпространства нулей оператора A^*, то есть множество всех решений уравнения

$$A^*x = 0 \tag{1.2}$$

называется ядром оператора A^* и, наконец, $\beta_A = \alpha_{A^*} = KerA^*$. Числа α_A, β_A называются дефектными числами оператора A. Если хотя бы одно из чисел α_A и β_A - конечное, то их разность называется индексом оператора A и обозначается через $IndA$,

$$IndA = \alpha_A - \beta_A. \tag{1.3}$$

Очевидно, $IndA$ конечен тогда и только тогда, когда обе размерности α_A и β_A - конечны.

Для того чтобы уравнение

$$Ax = y, \ y \in X \tag{1.4}$$

имело хотя бы одно решение, необходимо, чтобы свободный член y был ортогонален к $KerA^*$ (иначе говоря, чтобы элемент y аннулировался любым функционалом $u \in KerA^*$). Действительно, если уравнение (1.4) имеет решение x, а $u \in KerA^*$, то

$$(y, u) = (Ax, u) = (x, A^*u) = (x, 0) = 0,$$

где круглыми скобками обозначено значение функционала на соответствующем элементе.

Если упомянутое выше условие ортогональности достаточно для разрешимости уравнения (1.3), то говорят, что оператор A нормально разрешим. Таким образом, можно дать следующее

Определение 1.2. Оператор A называется нормально разрешимым в смысле Хаусдорфа, если неоднородное уравнение (1.4) разрешимо тогда и только тогда, когда его правая часть y ортогональна всем решениям сопряжённого однородного уравнения (1.2).

Известна следующая теорема Хаусдорфа: для того чтобы оператор был нормально разрешимым, необходимо и достаточно, чтобы его область значений была замкнутой.

Определение 1.3. Оператор A называется нётеровым в X, если он нормально разрешим и числа α_A, β_A конечны.

Определение 1.4. Индексом $IndA$ нётерова оператора A называется целым числом $IndA = \alpha_A - \beta_A$.

Следующее определение из всего множества нётеровых операторов выделяет подмножество фредгольмовых операторов:

Определение 1.5. Нётеров оператор, индекс которого равен нулю, называется фредгольмовым.

Свойство 1.1. (теорема о композиции). Если A и B нётеровы операторы в X, то их композиция AB также нётерова в X, причём $IndAB = IndA{+}IndB$.

Свойство 1.2. Если A нётеров в X, то и A^* нётеров в X^*, причём $IndA^*{=}{-}IndA$.

Свойство 1.3. (возмущение вполне непрерывным оператором). Если A нётеров, а T вполне непрерывен в X, то $A+T$ также нётеров в X, причём $Ind(A+T) = IndA$.

Свойство 1.4. (возмущение малым по норме оператором). Если A нётеров в X, то существует такое $\varepsilon = \varepsilon(A)$, что для всех операторов B таких, что $||B|| < \varepsilon$, оператор $A+B$ нётеров в X и $Ind(A+B) = IndA$.

Говорят, что оператор A допускает левую (правую) регуляризацию, если существует линейный ограниченный оператор R такой, что произведение RA (AR) является оператором Фредгольма. Оператор R в этом случае называется левым (правым) регуляризатором оператора A.

Свойство 1.5. Для того чтобы оператор A был нётеровым, необходимо и достаточно, чтобы у него существовали левый и правый регуляризаторы.

Определение 1.6. Нётеровы операторы A и B называются гомотопными, если существует семейство нётеровых операторов $A(t)$, $t \in [0,1]$, которое равномерно непрерывно по норме на сегменте $[0,1]$: по любому заданному $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что, если $|t_1 - t_2| < \delta$, то $||A(t_1) - A(t_2)|| < \varepsilon$, и $A(0) = A,\ A(1) = B$.

Свойство 1.6. Если операторы A и B гомотопны, то

$$IndA = IndB.$$

Определение 1.7. Говорят, что неособенная матрица-функция $G(t)$ размера $n \times n$ допускает левую стандартную факторизацию на Γ, если справедливо следующее представление для $G(t)$:

$$G(t) = G^{+}(t)B(t)G^{-}(t), t \in \Gamma,$$

где $G^{\pm}(t)$ - непрерывные на Γ матрицы-функции, аналитически продолжимы в области $D^{\pm}$ и обратимы там, соответственно; $B(t) = \{t^{\varkappa_1}, \cdots, t^{\varkappa_n}\}$ - диагональная матрица-функция порядка $n \times n$, $\varkappa_1 \geq \varkappa_2 \geq \cdots \geq \varkappa_n$ - частные индексы (целые числа),

$$\varkappa = Ind_{\Gamma}G(t) = \frac{1}{2\pi}[\arg \det G(t)]_{\Gamma} = \sum_{j=1}^{n} \varkappa_j \text{—суммарный индекс матрицы} \quad G.$$

Аналогичным образом определяется правая стандартная факторизация. Стандартная факторизация называется канонической, если все частные индексы матрицы $G(t)$ равны нулю. Очевидно, что каждая правая (левая) факторизация матрицы $G(t)$ порождает левую (правую) факторизацию обратной матрицы $G^{-1}(t)$.

Факторизация матриц-функций является основным звеном теории векторной краевой задачи Римана для аналитических функций. Основополагающие результаты по этому направлению получены в известных работах Ф.Д.Гахова [32], Н.И.Мусхелишвили [33], Н.П.Векуа [34], И.Б.Симоненко [35],[36].

1.3 Локальная нётеровость операторов

Определение 1.8. Существенной нормой оператора A называется величина

$$|||A||| = \inf_{K} ||A - K||,$$

где K пробегает множество всех вполне непрерывных операторов. Если $|||A||| = 0$, то оператор является вполне непрерывным, и наоборот.

Операторы A и B называются эквивалентными, если $|||A - B||| = 0$, и коротко это записывается так: $A \sim B$.

Определение 1.9. Если M - измеримое множество, то P_M означает оператор, действующий по правилу:

$$(P_M f)(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in M, \\ 0, & \text{если } x \notin M. \end{cases}$$

Определение 1.10. Оператор A называется оператором локального типа, если для любых двух замкнутых непересекающихся множеств F_1 и F_2 оператор $P_{F_1} A P_{F_2}$ вполне непрерывен.

Определение 1.11. Операторы A и B называются эквивалентными в точке x_0, если по любому $\varepsilon > 0$ найдётся такая окрестность u точки x_0, что

$$|||AP_u - BP_u||| < \varepsilon \quad \text{и} \quad |||P_u A - P_u B||| < \varepsilon.$$

Сокращённо это пишется как $A \sim B$.

Следующие понятия являются локальным аналогом понятий регуляризатора оператора Нётера.

Определение 1.12. Говорят, что оператор $R_\Lambda(R_\Pi)$ является локальным левым (правым) регуляризатором оператора A в точке x_0, если найдётся такая окрестность u точки x_0, что $R_\Lambda A P_u \sim P_u (R_\Pi A P_u \sim P_u)$.

Определение 1.13. Оператор A называется локальным оператором Нётера в точке x_0, если он обладает левым и правым локальными регуляризаторами в точке x_0.

Имеются теоремы, устанавливающие связь между понятиями локальной нётеровости и эквивалентности в точке (см.[35]-[37]).

Теорема 1.1. *Если A, B - операторы, действующие из $L_p(D)$ в $L_p(D)$, и $A \sim B$, то операторы A и B одновременно обладают локальным левым регуляризатором в точке x_0 (локальный правый регуляризатор в точке x_0) либо не обладают. В этих условиях операторы A и B одновременно либо являются локально нётеровыми в точке x_0, либо не являются локально нётеровыми в точке x_0.*

Теорема 1.2. *Для того чтобы оператор A локального типа, действующий из $L_p(D)$ в $L_p(D)$, был оператором Нётера, необходимо и достаточно, чтобы в каждой точке $z \in D$ оператор A был локальным оператором Нётера.*

Теорема 1.3. *Если оператор A локального типа, действующий из $L_p(D)$ в $L_p(D)$, в каждой точке $z \in D$ обладает правым (левым) локальным регуляризатором локального типа, то оператор A обладает правым (левым) регуляризатором.*

2 Нётеровость и индекс четырёхкомпонентного сингулярного интегрального оператора с нечётной характеристикой и непрерывными коэффициентами

Пусть D - ограниченная область комплексной плоскости $z = x + iy$, граница Γ которой состоит из конечного числа взаимно не пересекающихся простых замкнутых кривых Ляпунова. В лебеговом пространстве $L^p(D), 1 < p < \infty$, рассмотрим операторы S_m и K, действующие по формулам

$$(S_m f)(z) = \frac{|m|}{2\pi i^{|m|}} \iint\limits_D \frac{e^{-im\theta}}{|\zeta - z|^2} f(\zeta) ds_\zeta, \quad z \in D,$$

$$(Kf)(z) = \overline{f(z)}, \quad \theta = \arg(\zeta - z),$$

где черта над функцией означает переход к комплексно - сопряжённым значениям, $m \neq 0$ - целое число, ds_ζ - элемент плоской меры лебега, интеграл понимается в смысле главного значения по Коши, то есть как предел по норме в $L^p(D), 1 < p < \infty$:

$$v.p. \frac{|m|}{2\pi i^{|m|}} \iint\limits_D \frac{e^{-im\theta}}{|\zeta - z|^2} f(\zeta) ds_\zeta = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{|m|}{2\pi i^{|m|}} \iint\limits_{D \setminus D_\varepsilon(z)} \frac{e^{-im\theta}}{|\zeta - z|^2} f(\zeta) ds_\zeta,$$

где $D_\varepsilon(z)$ - круг радиуса ε с центром в точке $z : D_\varepsilon(z) = \{z : |\zeta - z| < \varepsilon\}$. По Михлину (см. [1]), функция $e^{-in\theta}$ называется характеристикой сингулярного интеграла.

2.1. Символ простейшего сингулярного оператора S_m

Для исследования сингулярных интегральных уравнений удобны теоремы, сформулированные в терминах символа оператора. По Михлину [1], символом сингулярного оператора, характеристика которого не зависит от полюса, является преобразование Фурье его ядра. Поэтому рассмотрим преобразование Фурье сингулярного ядра

$$\mathcal{K}(z) = \frac{|m|}{2\pi i^{|m|}} \frac{e^{-im\varphi}}{|z|^2}, \quad z = x + iy = re^{i\varphi},$$

$$F\mathcal{K} = \lim_{R\to\infty} \frac{|m|}{2\pi i^{|m|}} \iint\limits_{|z|<R} \frac{e^{-im\varphi}}{r^2} e^{i(xu+yv)} dxdy.$$

Переходя к полярным координатам

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ dxdy = rdxdy,\ u = \rho\cos\alpha,\ v = \rho\sin\alpha;$$

$$xu + vy = r\rho(\cos\alpha\cos\varphi + \sin\alpha\sin\varphi) = r\rho\cos(\varphi - \alpha),$$

имеем

$$FK = \frac{|m|}{2\pi i^{|m|}} \lim_{R\to\infty} \int\limits_0^R \frac{dr}{r} \int\limits_0^{2\pi} e^{i(-m\varphi + r\rho\cos(\varphi-\alpha))} d\varphi.$$

Положим $\gamma = \varphi - \alpha + \frac{\pi}{2}$, тогда

$$FK = \frac{|m|}{2\pi i^{|m|}} e^{-i(\alpha - \frac{\pi}{2})m} \lim_{R\to\infty} \int\limits_0^R \frac{dr}{r} \int\limits_0^{2\pi} e^{i(-m\gamma + r\rho\sin\gamma)} d\gamma.$$

Если m натуральное число и поскольку $e^{-i(\alpha-\frac{\pi}{2})m} = i^m e^{-i\alpha m}$, то получим

$$FK = \frac{m}{2\pi i^m} i^m e^{-i\alpha m} \int\limits_0^\infty \frac{dr}{r} \int\limits_0^{2\pi} e^{i(-m\gamma + r\rho\sin\gamma)} d\gamma.$$

Если внутренний интеграл разбить на сумму $\int_0^{2\pi} = \int_0^\pi + \int_\pi^{2\pi}$ и во втором интеграле γ заменить на $\gamma - 2\pi$, то получим

$$F\mathcal{K} = me^{-i\alpha m} \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^\infty \frac{dr}{r} \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{i(-m\gamma + r\rho\sin\gamma)} d\gamma =$$

$$= me^{-i\alpha m}\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty \frac{d\tau}{\tau}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{i(-m\theta+\tau\sin\gamma)}d\gamma = me^{-i\alpha m}\int\limits_0^\infty \mathcal{J}_m(\tau)\frac{d\tau}{\tau},$$

где $J_m(\tau)$ функция Бесселя

$$\mathcal{J}_m(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{i(-m\gamma+\tau\sin\gamma)}d\gamma.$$

Поэтому преобразование Фурье F сингулярного ядра $\mathcal{K}$ окончательно выражается через характеристику в виде (см.[38].стр.698)

$$F\mathcal{K} = me^{-i\alpha m}\cdot\frac{1}{m} = e^{-i\alpha m}.$$

Таким образом, символ оператора S_m (см.[1]) равен $\frac{\overline{\sigma}^m}{|\sigma|^m}(\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2 \neq 0)$. Норма оператора S_m в пространстве L_p оценивается максимумом модуля преобразования Фурье ядра этого оператора (см.[1], [3]) поэтому норма S_m в L_2 равна единице, и из результатов [3] следует, что предел (2) существует и определяет ограниченный оператор

$$S_m : L_p(D) \to L_p(D), \quad 1 < p < \infty.$$

2.2. Основной сингулярный интегральный оператор по ограниченной области

Операторы с сингулярным интегралом S_m в случае, когда m чётное число, изучались ранее различными авторами (см.напр. [12],[16], [23], [25]-[29]). В частности, в работе [25] установлены эффективные необходимые и достаточные условия нётеровости оператора

$$\mathcal{M}_2 \equiv a(z)I + b(z)K + c(z)S_2 + d(z)S_{-2}K$$

в пространстве $L^p(D)$ и получена формула для вычисления его индекса, где коэффициенты $a(z), b(z), c(z), d(z)$ - непрерывные в $\overline{D} = D \cup \Gamma$ комплекснозначные функции. Что касается случая нечётного m, то в этом направлении выполнена лишь одна работа Г. Джангибекова [30], в каторой в пространстве $L^p(D)$ построена алгебра операторов вида

$$\mathcal{M}_m \equiv a(z)I + b(z)S_m K + c(z)B_m + T, \tag{2.1}$$

в каторой $B_m = S_m S_{-m} + T,$ T - компактный в $L^p(D)$ оператор, и доказана

Теорема 2.1. *Для того чтобы произвольный оператор $\mathcal{M}_m$ из алгебры операторов вида (2.1) был нётеровым в пространстве $L^p(D), 1 < p < \infty$, необходимо и достаточно, чтобы $|a(z)|^2 + |b(z)|^2 \neq 0$ при $z \in \overline{D}$ и $a(t) + c(t) \neq 0$ при $t \in \Gamma$. При выполнении этих условий индекс оператора A из (1) равен $\varkappa = -\frac{m}{2\pi}[arg(a(t) + c(t))]$.*

В настоящем разделе в пространствах $L^p(D), 1 < p < \infty$ изучается оператор вида

$$A \equiv a(z)I + b(z)K + c(z)S_m + d(z)\overline{S}_m K, \tag{2.2}$$

где $m > 0$ - нечётное число и $a(z), b(z), c(z), d(z)$ - непрерывные в $\overline{D}$ функции.

При этом, поскольку A содержит оператор K - переход к комплексно-сопряжённым значениям, то естественно пространство $L^p(D)$ считать вещественным, то есть рассматривать его как линейное множество над полем вещественных чисел. Тогда все операторы из (2.2) будут обычными линейными ограниченными операторами. Всякий линейный ограниченный функционал на вещественном пространстве $L^p(D)$ представим единственным образом в виде

$$(f,\psi) = Re \iint\limits_D f(z)\psi(z)ds_z,$$

где $\psi(z) \in L^{p'}(D), 1 < p' < \infty, 1/p + 1/p' = 1$.

В соответствии с этим сопряжённым для оператора A в пространстве $L^{p'}(D)$ является оператор

$$A^* \equiv a(z)I + \overline{b(z)}K + S_m\big(c(z)I + \overline{d(z)}K\big).$$

В случае нётеровости под индексом оператора A понимается разность между количеством линейно независимых (над полем вещественных чисел) решений однородных уравнений $Af = 0$ и $A^*\psi = 0$. Прежде всего отметим, что уравнение (2.1) наряду с искомой функцией $f(z)$ также содержит её комплексно сопряжённую функцию $\overline{f(z)}$ и уравнения такого вида можно непосредственно свести к системе двух сингулярных интегральных уравнений с двумя неизвестными функциями $f(z)$ и $\overline{f(z)}$. Для этого к данному уравнению нужно присоединить другое уравнение, полученное переходом к комплексно сопряженным значениям. Далее в векторном пространстве

$$L^2_p(D) = \{(f_1, f_2) : f_1, f_2 \in L^p(D)\}, \quad 1 < p < \infty$$

рассмотрим оператор

$$U = \begin{pmatrix} a(z)I + c(z)S_m & b(z)I - d(z)S_{-m} \\ \overline{b(z)}I + \overline{d(z)}S_m & \overline{a(z)}I - \overline{c(z)}S_{-m} \end{pmatrix}.$$

2.3. Равносильность нётеровости оператора A матричному оператору U

Лемма 2.1. *Нётеровость оператора $A : L_p(D) \longrightarrow L_p(D)$ эквивалентна нётеровости оператора $U : L_p^2(D) \longrightarrow L_p^2(D)$.*

Действительно, если функция $f(z)$ является решением уравнения (2.1) из $L_p(D)$, то вектор $F = (f, \overline{f})$ будет решением системы $UF = Q$ из $L_p^2(D)$, где $Q = (g, \overline{g})$ и обратно, если вектор $F = (f_1, f_2)$ является решением системы $UF = q$ из $L_p^2(D)$, то вектор $(\overline{f}_2, \overline{f}_1)$ также будет решением. Но тогда решением системы $UF = Q$ из $L_p^2(D)$ будет следующий вектор $\left(\frac{f_1+\overline{f}_2}{2}, \frac{f_2+\overline{f}_1}{2}\right)$. Теперь отсюда вытекает, что функция $\frac{f_1+\overline{f}_2}{2}$ будет решением уравнения (2.1) из $L_p(D)$.

Пусть далее, k – обозначает число линейно независимых решений однородного уравнения (2.1) над полем вещественных чисел, l – число линейно независимых решений однородной системы $UF = 0$ над полем комплексных чисел. Покажем, что $k = l$. Пусть $\{f_j(z)\}, j = 1, 2, \cdots k$,– фундаментальная система решений однородного уравнения (2.1).Тогда векторы $F_j = (f_j, \overline{f}_j)\,(j = 1, 2, \cdots k)$ будут линейно независимыми решениями уравнения $UF = 0$. Действительно, если $\sum_{j=1}^{n} c_j F_j = 0$, то $\sum_{j=1}^{n} c_j f_j = 0$, $\sum_{j=1}^{n} c_j \overline{f}_j = 0$ или $\sum_{j=1}^{n} c_j f_j = 0$ и $\sum_{j=1}^{n} \overline{c}_j f_j = 0$. Отсюда $\sum_{j=1}^{n}(c_j + \overline{c}_j) f_j = 0$, $\sum_{j=1}^{n}(c_j - \overline{c}_j) f_j = 0$. Поэтому $c_j + \overline{c}_j = 0, c_j - \overline{c}_j = 0$, т.е. $c_j = 0$. Таким образом, $k \leq l$.

Совершенно аналогичным образом, как в ([34], стр.276), доказывается, что $k \geq l$.

Далее заметим, что так как любой ограниченный функционал на вещественном пространстве $L_p(D)$ представим единственным образом в виде

$$(f,\psi) = Re\iint\limits_D f(z)\psi(z)dS_z,$$

где $\psi(z) \in L_q(D)$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, то в соответствии с этим сопряженным к оператору A будет оператор

$$A^*\psi = a\psi + \overline{S}c\psi + S_m\overline{d\psi},$$

где $\psi \in L_q(D)$. Совершенно аналогично доказывается,что однородное сопряженное уравнение $A^*\psi = 0$ в пространстве $L_p(D)$ и соответствующая система уравнений $U^*\Psi = 0$ в векторном пространстве $L_p^2(D)$ имеют одинаковое число линейно независимых решений, определенным образом соответствующих друг другу.

Из установленного выше соответствия между решениями неоднородного интегрального уравнения $Af = g$ и неоднородной системы $UF = Q$ следует, что уравнение $Af = g$ и соответствующая система $UF = Q$ нормально разрешимы лишь одновременно. Этим доказательство леммы 2.1 завершается.

Прежде всего аналогично [34] устанавливается, что оператор A будет нётеровым тогда и только тогда, когда нётеровой в пространстве двумерных вектор-функций с координатами из $L^p(D), 1 < p < \infty$ является операторная матрица

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a(z)I + c(z)S_m & b(z)I - d(z)S_{-m} \\ \overline{b(z)}I + \overline{d(z)}S_m & \overline{a(z)}I - \overline{c(z)}S_{-m} \end{pmatrix},$$

где $S_{-m} = -\overline{S}_m$. Поскольку символ оператора S_m (см.[1]) равен $\frac{\overline{\sigma}^m}{|\sigma|^m}(\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2 \neq 0)$ то согласно [20],[21] для нётеровости операторной матрицы $\mathcal{A}$ необходимо, чтобы его символический определитель $\det G_{\mathcal{A}}(z,t) \neq 0$ для всех $z \in \overline{D}, |t| = 1$, где $G_{\mathcal{A}}(z,t)$:

$$G_{\mathcal{A}}(z,t) = \begin{pmatrix} a(z) + c(z)\overline{t}^m & b(z) - d(z)t^m \\ \overline{b(z)} + \overline{d(z)}\overline{t}^m & \overline{a(z)} - \overline{c(z)}t^m \end{pmatrix}.$$

2.4. Необходимые и достаточные условия невырожденности символа оператора A

Лемма 2.2. *Матрица $G_{\mathcal{A}}(z,t)$ невырождена для всех $z \in \overline{D}$ и $|t| = 1$ тогда и только тогда, когда для $\forall z \in \overline{D}$ выполнено одно из неравенств*

$$\Delta_1^2(z) > |\lambda(z)|^2 - |\mu(z)|^2 \quad \forall z \in \overline{D}, \tag{2.3}$$

$$\Delta_2^2(z) > |\lambda(z)|^2 - |\mu(z)|^2 \quad \forall z \in \overline{D}, \tag{2.4}$$

причем (2.3) и (2.4) не могут одновременно выполняться ни при одном значении $z \in \overline{D}$, где

$$\Delta_1 = |a|^2 - |b|^2,\ \Delta_2 = |c|^2 - |d|^2,\ \lambda = \overline{a}c - b\overline{d},\ \mu = a\overline{d} - \overline{c}b.$$

Действительно, пусть матрица $G_{\mathcal{A}}(z,t)$ при всех $z \in \overline{D}, |t| = 1$ невырождена, то есть

$$\det G_{\mathcal{A}}(z,t) = \big(a(z)+c(z)\overline{t}^m\big)\big(\overline{a(z)}-\overline{c(z)}t^m\big)-\big(b(z)-d(z)t^m\big)\big(\overline{b(z)}+\overline{d(z)}\overline{t}^m\big) =$$

$$= \Delta_1(z) - \Delta_2(z) + \lambda(z)\overline{t}^m - \overline{\lambda(z)}t^m \neq 0$$

для всех $z \in \overline{D}$ и $|t| = 1$. Это равносильно тому, что

$$\Delta_1(z) - \Delta_2(z) \neq 0 \quad \text{при} \quad \forall z \in \overline{D}, \tag{2.5}$$

ибо слагаемое $\lambda(z)\bar{t}^m - \overline{\lambda(z)}t^m = \lambda(z)e^{-im\varphi} - \overline{\lambda(z)}e^{im\varphi}$ является тригонометрическим полиномом относительно $\varphi \in [0, 2\pi]$ без свободного члена и не может сохранять для всех значений $\varphi \in [0, 2\pi]$ постоянный знак. Если теперь учесть тождество $|\lambda(z)|^2 - |\mu(z)|^2 = \Delta_1(z)\Delta_2(z)$, то получим, что неравенство (2.5) эквивалентно выполнению одного из неравенств (2.3) или (2.4).

2.5. Сведение оператора A к соответственным операторам A_1 и A_2

Рассмотрим теперь следующие ограниченные в $L^p(D)$ операторы:

$$T_1 = \overline{a(z)}I - b(z)K, \quad T_2 = \overline{d(z)}I - c(z)K.$$

Из леммы 2.2 следует, что при выполнении условия (2.3) оператор T_1 имеет непрерывный обратный, причём $A = T_1^{-1}A_1$,

$$A_1 = \Delta_1(z)I + \lambda(z)S_m + \overline{\mu(z)}\overline{S}_mK. \tag{2.6}$$

В случае (2.4) оператор T_2 имеет непрерывный обратный и $A = T_1^{-1}A_1$,

$$A_2 = \mu(z)I - \lambda(z)K - \Delta_2(z)\overline{S}_mK. \tag{2.7}$$

Таким образом, исследование нётеровости и индекса оператора A сводится к соответствующему исследованию операторов A_1 и A_2 из (2.6) и (2.7).

Теорема 2.2. *Для нётеровости оператора A в пространстве $L_p(D)$ $1 < p < \infty$ необходимо и достаточно выполнение одного из следующих (исключающих друг друга) условий:*

$$\Delta_1^2(z) > |\lambda(z)|^2 - |\mu(z)|^2 \quad \forall z \in \overline{D}, \tag{2.8}$$

$$\Delta_2^2(z) > |\lambda(z)|^2 - |\mu(z)|^2 \quad \forall z \in \overline{D} \quad \textit{и} \quad \mu(\tau) \neq 0 \quad \forall \tau \in \Gamma. \tag{2.9}$$

При этом, если выполнено условие (2.8), то индекс оператора A равен нулю, а при выполнении (2.9) его индекс $\varkappa$ равен $\varkappa = mInd_\Gamma \mu(t)$.

Из результатов [20],[21] следует, что для нётеровости оператора A необходимо выполнение (2.3) или (2.4).

2.6. Факторизация символической матрицы операторов A_1 и A_2

Рассмотрим сначала случай (2.4). Соответствующая оператору A_2 матрица-символ имеет вид

$$G_{\mathcal{A}}^{(2)}(z,t) = \begin{pmatrix} \mu(z) & -\lambda(z) - \Delta_2(z)t^m \\ -\overline{\lambda(z)} + \Delta_2(z)\bar{t}^m & \overline{\mu(z)} \end{pmatrix}.$$

Прежде всего заметим, что

$$\det G_{\mathcal{A}}^{(2)}(z,t) = -\Delta_2(z)\Big(\Delta_2(z) - \Delta_1(z) - \overline{\lambda(z)}t^m + \frac{\lambda(z)}{t^m}\Big),$$

и если функция $q(z)$ является корнем уравнения $\det G_{\mathcal{A}}^{(2)}(z,t) = 0$, лежащего внутри круга $|t| = 1$, то функция $-\frac{1}{\overline{q(z)}}$ также будет корнем этого уравнения. Поэтому $\det G_{\mathcal{A}}^{(2)}(z,t)$ можно представить в виде

$$\det G_{\mathcal{A}}^{(2)}(z,t) = -\frac{\Delta_2(z)\overline{\lambda(z)}}{t^m}\Big(t^m - q(z)\Big)\Big(t^m + \frac{1}{\overline{q(z)}}\Big),$$

при этом очевидно, что $Ind_{|t|=1} \det G_{\mathcal{A}}^{(2)}(z,t) = 0$, где

$$q = \frac{\Delta_1 - \Delta_2 - \sqrt{(\Delta_1 - \Delta_2)^2 + 4|\lambda|^2}}{2\overline{\lambda}},$$

$$-\frac{1}{\overline{q}} = \frac{\Delta_1 - \Delta_2 + \sqrt{(\Delta_1 - \Delta_2)^2 + 4|\lambda|^2}}{2\overline{\lambda}}.$$

Пусть теперь $z=\tau$ - любая точка границы области D. В дальнейшем нам понадобится следующее представление

$$\det G_{\mathcal{A}}^{(2)}(\tau,t)=\frac{F_\tau^+(t)}{F_\tau^-(t)},\quad \text{для}\quad \forall\quad |t|=1, \tag{2.10}$$

где $F_\tau^{\pm}(t)$ - аналитически продолжимые по t соответственно внутри и вне единичного круга $|t|=1$ функции:

$$F_\tau^+(t)=-\Delta_2\lambda(\tau)(t^m+\frac{1}{\overline{q(\tau)}}),\quad F_\tau^-(t)=\frac{1}{1-\frac{q(\tau)}{t^m}}.$$

Далее устанавливается, что если $\mu(\tau)\neq 0$ при всех $\tau\in\Gamma$ матрица-символ $G_{\mathcal{A}}^{(2)}(\tau,t)$ факторизуется с нулевыми частными индексами в виде

$$G_{\mathcal{A}}^{(2)}(\tau,t)=\Phi_\tau^-(t)\Phi_\tau^+(t)\equiv\begin{pmatrix}\mu(\tau) & -\lambda(\tau)-\Delta_2(\tau)t^m\\ -\overline{\lambda(\tau)}+\frac{\Delta_2(\tau)}{t^m} & \overline{\mu(\tau)}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\frac{(\overline{\lambda(\tau)}-\frac{\Delta_2(\tau)}{t^m})}{\mu(\tau)} & \frac{1}{F_\tau^-(t)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu(\tau) & -(\lambda(\tau)+\Delta_2(\tau)t^m)\\ 0 & \frac{F_\tau^+(t)}{\mu(\tau)}\end{pmatrix},$$

где $\Phi_\tau^{\pm}(t)$ - аналитически продолжимые по t соответственно в верхной и нижней плоскости функции. Это означает, что при выполнении условия (2.9) оператор A нётеров в $L^p(D), p>1$.

Если же $\mu(\tau_0)=0$ при некотором $\tau_0\in\Gamma$, то тогда матрица $G_{\mathcal{A}}^{(2)}(\tau_0,t)$ факторизуется с частными индексами $-m$ и m :

$$G_{\mathcal{A}}^{(2)}(\tau_0,t)\equiv\begin{pmatrix}0 & -\lambda(\tau_0)-\Delta_2(\tau_0)t^m\\ -\overline{\lambda}(\tau_0)+\frac{\Delta_2(\tau_0)}{t^m} & 0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-\frac{\lambda(\tau_0)}{t^m}-\Delta_2(\tau_0) & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t^m & 0\\ 0 & \frac{1}{t^m}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -\overline{\lambda(\tau_0)}t^m+\Delta_2(\tau_0) & 0\end{pmatrix}.$$

Таким образом, условие $\mu(\tau) \neq 0$, $\forall \tau \in \Gamma$ необходимо для нётеровости оператора A.

Для получения формулы индекса оператора A_2 рассмотрим следующий обратимый оператор

$$T_3 = I + \alpha(z)q(z)K,$$

где $q(z)$ - является корнем уравнения $\det G_{\mathcal{A}}^{(2)}(\tau, t) = 0$, такой, что $|q(z)| < 1$ для всех $z \in \overline{D}$, а функция $\alpha(z)$ имеет вид:

$$\alpha(z) = \frac{\mu(z)}{\Delta_2(z) + q(z)\overline{\overline{\lambda(z)}}}, \tag{2.11}$$

причём из (2.9) следует, что $|\alpha(z)| < 1, z \in \overline{D}$. Тогда устанавливается, что нётеровый оператор $T_3 A_2$ с точностью до вполне непрерывного оператора можно представить в виде

$$T_3 A_2 = \Delta_2(z)\Big(I - q(z)S_m - \frac{\overline{\overline{q(z)}}}{\alpha^*(z)}B_m K\Big)\Big(\alpha(z)I - \overline{S}_m K\Big), \tag{2.12}$$

где $\alpha * (z)$ является измеримой ограниченной функцией, имеющей на Γ равномерно достигаемые предельные значения, образующие непрерывную функцию $\alpha(z)$ из (2.11). Далее устанавливается, что первый сомножитель из (2.12) является обратимым оператором в $L^p, p > 1$, а второй в силу теоремы 1 нётеров и его индекс равен $\varkappa = mInd_\Gamma \alpha(t) = mInd_\Gamma \mu(t)$.

Рассмотрим теперь случай (2.3). Соответствующая оператору A_1 матрица-символ имеет вид

$$G_{\mathcal{A}}^{(1)}(z, t) = \begin{pmatrix} \Delta_1(z) + \lambda(z)\overline{t^m} & -\overline{\mu(z)}t^m \\ \mu(z)\overline{t}^m & \Delta_1(z) - \overline{\lambda(z)}t^m \end{pmatrix}.$$

Тогда матрица $G_{\mathcal{A}}^{(1)}(\tau, t)$ при всех $\tau \in \Gamma$ безусловно факторизуется (в явном виде) с нулевыми частными индексами. Действительно, если $\mu(\tau) \neq 0$ для всех $\tau \in \Gamma$, то

$$G_{\mathcal{A}}^{(1)}(\tau, t) = \Phi_{\tau}^{-}(t)\Phi_{\tau}^{+}(t) \equiv$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\Delta_1(\tau)+\frac{\lambda(\tau)}{t^m}}{\mu(\tau)} & \frac{t^m}{F_\tau^-(t)} - \frac{\mu(\tau)(\Delta_1(\tau)+\frac{\lambda(\tau)}{t^m})}{\Delta_1(\tau)F_\tau^-(\infty)} \\ \frac{1}{t^m} & -\frac{\mu(\tau)}{\Delta_1 F_\tau^-(\infty)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu(\tau) & -\frac{F_\tau^+(t)t^m}{F_\tau^-(\infty)\Delta_1(\tau)} + (\Delta_1(\tau) - \overline{\lambda(\tau)}t^m)t^m \\ 0 & -\frac{F_\tau^+(t)}{\mu(\tau)} \end{pmatrix}.$$

Если же $\mu(\tau_0) = 0$ в некоторой точке $\tau_0 \in \Gamma$, то тогда оператор A_1 в этой точке локально эквивалентен оператору

$$A_{1\tau_0} = \Delta_1(\tau_0)I + \lambda(\tau_0)S_m,$$

который в силу условия (2.3) локально нётеров (см.[35]).

Для вычисления индекса оператора A_1 построим семейство нётеровых операторов $M_\tau \equiv \Delta_1(z)I + \tau \cdot \lambda(z)S_m + \overline{\mu(z)S}_m K$, непрерывно по норме зависящих от параметра $\tau \in [0, 1]$. Поскольку $M_0 = \Delta_1(z)I + \overline{\mu(z)S}_m K$, $M_1 = A_1$, то в силу теоремы 1 индекс оператора A_1 равен нулю. Теорема 2.2. доказана.

Замечание 1. Если вместо (2.8) потребуем выполнения более сильного условия

$$|\Delta_1(z)| > |\lambda(z)| + |\mu(z)| \quad \forall z \in \overline{D}, \tag{2.13}$$

то тогда оператор A будет обратим в $L^p(D), 1 < p < \infty$. Действительно, поскольку условия нётеровости оператора A_1 от показателя p пространства $L^p(D)$ не зависят, то A_1 будет одновременно нётеровым или не нётеровым в $L^p(D)$ для всех $p \in (1, \infty)$. Так как $||S_m||_{L^2} = 1$ (см. [6]), то в силу (2.13) из принципа сжатых отображений следует обратимость оператора A_1 в $L^2(D)$. Индекс оператора A_1 равен нулю в любом $L^p(D)$ при $1 < p < \infty$, поэтому, в силу вложения $L^p(D) \subset L^2(D)$ $(p > 2)$, оператор A_1 имеет нулевое ядро в $L^p(D)$ при $p > 2$. При $1 < p < 2$ этот факт устанавливается путём перехода к сопряжённому оператору. Таким образом, показано, что A_1 обратимый оператор в $L^p(D)$, $1 < p < \infty$.

Замечание 2. В случае нётеровости оператора A в пространстве $L^p(D), 1 < p < \infty$, можно построить левые и правые ограниченные регуляризаторы оператора A в явном виде, а при постоянных коэффициентах a, b, c, d - обратный оператор A^{-1}. Это касается, также оператора A, где сингулярные интегралы S_m и $\overline{S}_m$ рассматриваются по всей комплексной плоскости E.

Замечание 3. Все полученные выше результаты сохраняются в весовом лебеговом пространстве $L^p_{\beta-2/p}(D)$:

$$L^p_{\beta-2/p}(D) = \{f(z) : |z|^{\beta-2/p} f(z) = F(z) \in L^p(D), ||f||_{L^p_{\beta-2/p}} = ||F||_{L^p}\},$$

где β - число из интервала $(0, 2), 1 < p < \infty$.

3 Исследование разрешимости шестикомпонентного интегрального оператора с нечётной характеристикой

3.1. Эквивалентность шестикомпонентного сингулярного интегрального оператора трем интегральным операторам более частного вида

Операторы с сингулярным интегралом S_m в случае, когда m чётное число, изучались ранее различными авторами (см.напр. [12],[16], [23]). В частности, в работах [25],[26], [39] установлены эффективные необходимые и достаточные условия нётеровости оператора

$$\mathcal{A} \equiv a(z)I + b(z)K + (c(z)I + d(z)K)S_m + (e(z)I + h(z)K)\overline{S}_m \tag{3.1}$$

в пространстве $L^p(D)$ и получена формула для вычисления его индекса, где $(Kf)(z) = \overline{f(z)}$, черта над функцией означает переход к комплексно сопряженным значениям, коэффициенты $a(z), b(z), c(z), d(z), e(z), h(z)$ - непрерывные в $\overline{D} = D \cup \Gamma$ комплекснозначные функции. Что касается случая нечётного m, то в этом направлении выполнены работы [30], [51], в которых в пространстве $L^p(D)$ построена теория нётера оператора $\mathcal{A}$ из (3.1).

Здесь в пространствах $L^p(D), 1 < p < \infty$ изучается уравнение

$$(\mathcal{A}f)(z) = g(z), \tag{3.2}$$

где $\mathcal{A}$ - оператор из (3.1), $m > 0$ - нечётное число.

При этом, поскольку $\mathcal{A}$ содержит оператор K - переход к комплексно-сопряжённым значениям, то естественно пространство $L^p(D)$ считать вещественным, то есть рассматривать его как линейное множество над полем вещественных чисел. Тогда все операторы из (3.2) будут обычными линейными ограниченными операторами. Всякий линейный ограниченный функционал на вещественном пространстве $L^p(D)$ представим единственным образом в виде

$$(f,\psi) = Re \iint\limits_D f(z)\psi(z)ds_z,$$

где $\psi(z) \in L^{p'}(D), 1 < p' < \infty, 1/p + 1/p' = 1$.

В соответствии с этим сопряжённым для оператора $\mathcal{A}$ в пространстве $L^{p'}(D)$ является оператор

$$\mathcal{A}^* \equiv a(z)I + \overline{b(z)}K + S_m\big(c(z)I + \overline{d(z)}K\big) + \overline{S}_m\big(e(z)I + \overline{h(z)}K\big).$$

В случае нётеровости под индексом оператора $\mathcal{A}$ понимается разность между количеством линейно независимых (над полем вещественных чисел) решений однородных уравнений $\mathcal{A}f = 0$ и $\mathcal{A}^*\psi = 0$.

Прежде всего заметим, что уравнение (3.2) наряду с искомой функцией $f(z)$ также содержит комплексно сопряженную функцию $\overline{f(z)}$ и уравнения такого вида можно непосредственно свести к системе двух сингулярных уравнений с двумя неизвестными функциями $f(z)$ и $\overline{f(z)}$, если присоединить к данному уравнению другое, полученное переходом к комплексно сопряженным значениям. Для этого в векторном пространстве

$$L_p^2(D) = \{(f_1, f_2) : f_1, f_2 \in L^p(D)\}, \quad 1 < p < \infty$$

рассмотрим оператор

$$A = \begin{pmatrix} a(z)I + c(z)S_m - e(z)S_{-m} & b(z)I - d(z)S_{-m} + h(z)S_m \\ \overline{b(z)}I + \overline{d(z)}S_m - \overline{h(z)S_{-m}} & \overline{a(z)}I - \overline{c(z)}S_{-m} + \overline{e(z)}S_m \end{pmatrix},$$

где $S_{-m} = -\overline{S}_m$. Так же, как в лемме 2.1 из раздела 2, доказывается, что имеет место

Лемма 3.1. *Нётеровость оператора $\mathcal{A} : L_p(D) \longrightarrow L_p(D)$ эквивалентна нётеровости оператора $A : L_p^2(D) \longrightarrow L_p^2(D)$.*

Поскольку символ оператора S_m равен $\frac{\overline{\sigma}^m}{|\sigma|^m}(\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2 \neq 0)$, то, согласно [20],[21] для нётеровости операторной матрицы A необходимо, чтобы его символический определитель $\det G_A(z,t) \neq 0$ для всех $z \in \overline{D}, |t| = 1$, где $G_A(z,t)$:

$$G_A(z,t) = \begin{pmatrix} a(z) + c(z)\overline{t}^m - e(z)t^m & b(z) - d(z)t^m + h(z)\overline{t}^m \\ \overline{b(z)} + \overline{d(z)}\overline{t}^m - \overline{h(z)}t^m & \overline{a(z)} - \overline{c(z)}t^m + \overline{e(z)}\overline{t}^m \end{pmatrix}.$$

Лемма 3.2. *Матрица $G_A(z,t)$ невырождена для всех $z \in \overline{D}$ и $|t| = 1$ тогда и только тогда, когда для $\forall z \in \overline{D}$ выполнено одно из неравенств*

$$\Delta_1^2(z) + |\mu_1(z)|^2 + |\mu_3(z)|^2 > |\lambda_1(z)|^2 + |\lambda_3(z)|^2 \quad \forall z \in \overline{D}, \tag{3.3}$$

$$\Delta_2^2(z) + |\mu_1(z)|^2 + |\lambda_2(z)|^2 > |\lambda_1(z)|^2 + |\mu_2(z)|^2 \quad \forall z \in \overline{D}, \tag{3.4}$$

$$\Delta_3^2(z) + |\mu_3(z)|^2 + |\lambda_2(z)|^2 > |\lambda_3(z)|^2 + |\mu_2(z)|^2 \quad \forall z \in \overline{D}. \tag{3.5}$$

При этом никакие два из этих неравенств не могут одновременно выполняться ни при одном значении $z \in \overline{D}$, где

$$\Delta_1 = |a|^2 - |b|^2,\ \Delta_2 = |c|^2 - |d|^2,\ \lambda_1 = \overline{a}c - b\overline{d},\ \mu_1 = a\overline{d} - \overline{b}c,$$

$$\lambda_2 = \overline{h}c - e\overline{d}, \quad \mu_2 = h\overline{d} - \overline{e}c, \quad \lambda_3 = \overline{a}e - b\overline{h}, \quad \mu_3 = a\overline{h} - \overline{b}e.$$

Действительно, пусть матрица $G_A(z,t)$ при всех $z \in \overline{D}, |t| = 1$ невырождена, то есть

$$\det G_A(z,t) = \Big(a(z) + c(z)\overline{t}^m - e(z)t^m\Big)\Big(\overline{a(z)} - \overline{c(z)}t^m + \overline{e(z)}\overline{t}^m\Big) -$$

$$-\Big(b(z) - d(z)t^m + h(z)\overline{t}^m\Big)\Big(\overline{b(z)} + \overline{d(z)}\overline{t}^m - \overline{h(z)}t^m\Big) =$$

$$= \Delta_1(z) - \Delta_2(z) - \Delta_3(z) - 2iIm\Big((\overline{\lambda_1(z)} + \lambda_3(z))t^m + \overline{\mu_2(z)}t^{2m}\Big) \neq 0$$

для всех $z \in \overline{D}$ и $|t| = 1$. Это равносильно тому, что

$$\Delta_1(z) - \Delta_2(z) - \Delta_3(z) \neq 0 \quad \text{при} \quad \forall z \in \overline{D}, \tag{3.6}$$

ибо слагаемое $Im\Big((\overline{\lambda_1(z)} + \lambda_3(z))e^{im\varphi} + \overline{\mu_2(z)}e^{2im\varphi}\Big)$ является тригонометрическим полиномом относительно $\varphi \in [0, 2\pi]$ без свободного члена и не может сохранять для всех значений $\varphi \in [0, 2\pi]$ постоянный знак. Если теперь учесть тождества

$$|\lambda_1(z)|^2 - |\mu_1(z)|^2 = \Delta_1(z)\Delta_2(z), \quad |\lambda_2(z)|^2 - |\mu_2(z)|^2 = \Delta_2(z)\Delta_3(z),$$

$$|\lambda_3(z)|^2 - |\mu_3(z)|^2 = \Delta_3(z)\Delta_1(z),$$

то получим, что неравенство (3.6) эквивалентно выполнению одного из неравенств (3.3)-(3.5).

Рассмотрим теперь следующие ограниченные в $L^p(D)$ операторы:

$$T_1 = \overline{a(z)}I - b(z)K, \quad T_2 = \overline{d(z)}I - c(z)K, \quad T_3 = \overline{h(z)}I - e(z)K.$$

Из леммы 3.2 следует, что при выполнении условия (3.3) оператор T_1 имеет непрерывный обратный, причём $A = T_1^{-1}A_1$,

$$A_1 = \Delta_1(z)I + \lambda_1(z)S_m + \overline{\mu_1(z)}\overline{S}_m K + \lambda_3(z)\overline{S}_m + \overline{\mu_3(z)}S_m K. \tag{3.7}$$

В случае (3.4) оператор T_2 имеет непрерывный обратный и $A = T_2^{-1} A_2$,

$$A_2 = \mu_1(z)I - \lambda_1(z)K - \Delta_2(z)\overline{S}_m K - \lambda_2(z)\overline{S}_m + \mu_2(z)S_m K, \qquad (3.8)$$

а в случае (3.5) оператор T_3 имеет непрерывный обратный и $A = T_3^{-1} A_3$,

$$A_3 = \mu_3(z)I - \lambda_3(z)K + \lambda_2(z)S_m + \overline{\mu_2(z)}\overline{S}_m K - \Delta_3(z)S_m K. \qquad (3.9)$$

Таким образом, исследование нётеровости и индекса оператора A сводится к соответствующему исследованию операторов A_1, A_2 и A_3 из (3.7)-(3.9).

Теорема 3.1. *Для нётеровости оператора A в пространстве $L_p(D)$ $1 < p < \infty$ необходимо и достаточно выполнение одного из следующих (исключающих друг друга) условий:*

$$\Delta_1^2(z) + |\mu_1(z)|^2 + |\mu_3(z)|^2 > |\lambda_1(z)|^2 + |\lambda_3(z)|^2 \quad \forall z \in \overline{D} \quad \forall z \in \overline{D}, \qquad (3.10)$$

$$\Delta_2^2(z) + |\mu_1(z)|^2 + |\lambda_2(z)|^2 > |\lambda_1(z)|^2 + |\mu_2(z)|^2 \quad \forall z \in \overline{D} \quad \text{и} \quad \mu_1(\tau) \neq 0 \quad \forall \tau \in \Gamma, \qquad (3.11)$$

$$\Delta_1^3(z) + |\mu_3(z)|^2 + |\lambda_2(z)|^2 > |\lambda_3(z)|^2 + |\mu_2(z)|^2 \quad \forall z \in \overline{D} \quad \text{и} \quad \mu_3(\tau) \neq 0 \quad \forall \tau \in \Gamma. \qquad (3.12)$$

При этом, если выполнено условие (3.10), то индекс оператора A равен нулю, а при выполнении (3.11) его индекс $\varkappa$ равен

$$\varkappa = m Ind_\Gamma \mu_1(t),$$

а если выполнено (3.12), то

$$\varkappa = -m Ind_\Gamma \mu_3(t).$$

3.2. Схема доказательства основной теоремы о нётеровости интегрального оператора

Рассмотрим сначала случай (3.11). Соответствующая оператору A_2 матрица-символ имеет вид

$$G_{\mathcal{A}}^{(2)}(z,t) = \begin{pmatrix} \mu_1(z) - \lambda_2(z)t^m & -\lambda_1(z) - \Delta_2(z)t^m + \mu_2(z)\bar{t}^m \\ -\overline{\lambda_1(z)} + \Delta_2(z)\bar{t}^m - \overline{\mu_2(z)}t^m & \overline{\mu_2(z)} + \overline{\lambda_2(z)}\bar{t}^m \end{pmatrix}.$$

Далее по схеме [30] устанавливается, что если $\mu_1(\tau) \neq 0$ при всех $\tau \in \Gamma$ матрица-символ $G_{\mathcal{A}}^{(2)}(\tau,t)$ факторизуется с нулевыми частным индексами. Это означает, что при выполнении условия (3.11) оператор $\mathcal{A}$ нётеров в $L^p(D), p > 1$. Если же $\mu(\tau_0) = 0$ при некотором $\tau_0 \in \Gamma$, то тогда матрица $G_{\mathcal{A}}^{(2)}(\tau_0,t)$ факторизуется с частными индексами: $\varkappa^- = -m$, $\varkappa^+ = m$, что является, согласно [20],[21] нарушением необходимого условия нётеровости оператора A_2. Таким образом, условие $\mu_1(\tau) \neq 0$, $\forall \tau \in \Gamma$ необходимо для нётеровости оператора A.

Для вычисления индекса оператора A_1 построим семейство нётеровых операторов

$$M_\tau \equiv \mu_1(z)I - \tau\lambda_1(z)K - \Delta_2(z)\overline{S}_m K - \lambda_2(z)\overline{S}_m + \tau\mu_2(z)S_m K,$$

непрерывно по норме зависящих от параметра $\tau \in [0,1]$. Поскольку

$$M_0 = \mu_1(z)I - \Delta_2(z)\overline{S}_m K - \lambda_2(z), \quad M_1 = A_2,$$

то в силу индекса оператора A_2 равен $\kappa = mInd_\Gamma \mu_1(t)$.

Совершенно аналогичным образом доказывается утверждение теоремы относительно условия (3.12).

Рассмотрим теперь случай (3.10). Соответствующая оператору A_1 матрица-символ имеет вид

$$G^{(1)}_{\mathcal{A}}(z,t) = \begin{pmatrix} \Delta_1(z) + \lambda_1(z)\overline{t}^m - \lambda_3(z)t^m & -\overline{\mu_1(z)}t^m - \mu_3(z)\overline{t}^m \\ \mu(z)\overline{t}^m + \overline{\mu_3(z)}t^m & \Delta_1(z) - \overline{\lambda(z)}t^m + \overline{\lambda_3(z)}\overline{t}^m \end{pmatrix}.$$

Тогда матрица $G^{(1)}_{\mathcal{A}}(\tau,t)$ при всех $\tau \in \Gamma$ безусловно факторизуется (в явном виде) с нулевыми частными индексами. При этом оператор A_1 гомотопируется к оператору

$$M_1 = \Delta_1(z)I + \overline{\mu_1(z)}\overline{S}_m K + \overline{\mu_3(z)}S_m K$$

и в силу [30] индекс оператора A равен нулю.

Замечание 1. Если вместо (3.10) потребуем выполнение более сильного условия

$$|\Delta_1(z)| > |\lambda_1(z)| + |\lambda_2(z)| + |\mu_1(z)| + \mu_2(z)| \quad \forall z \in \overline{D}, \tag{3.13}$$

то тогда оператор A будет обратим в $L^p(D), 1 < p < \infty$. Действительно, поскольку условия нётеровости оператора A_1 от показателя p пространства $L^p(D)$ не зависят, то A_1 будет одновременно нётеровым или не нётеровым в $L^p(D)$ для всех $p \in (1,\infty)$. Так как $\| S_m \|_{L^2} = 1$ (см. [6]), то в силу (3.13) из принципа сжатых отображений следует обратимость оператора A_1 в $L^2(D)$. Индекс оператора A_1 равен нулю в любом $L^p(D)$ при $1 < p < \infty$, поэтому в силу вложения $L^p(D) \subset L^2(D)$ $(p > 2)$ оператор A_1 имеет нулевое ядро в $L^p(D)$ при $p > 2$. При $1 < p < 2$ этот факт устанавливается путём перехода к сопряжённому оператору. Таким образом, показано, что A_1 обратимый оператор в $L^p(D)$, $1 < p < \infty$.

Замечание 2. В случае нётеровости оператора A в пространстве $L^p(D), 1 < p < \infty$ можно построить левые и правые ограниченные регуляризаторы оператора A в явном виде, а при постоянных коэффициентах a, b, c, d - обратный оператор A^{-1}. Это касается также оператора A, где сингулярные интегралы S_m и $\overline{S}_m$ рассматриваются по всей комплексной плоскости E.

Замечание 3. Все полученные выше результаты сохраняются в весовом лебеговом пространстве $L^p_{\beta-2/p}(D)$:

$$L^p_{\beta-2/p}(D) = \{f(z) : |z|^{\beta-2/p} f(z) = F(z) \in L^p(D), ||f||_{L^p_{\beta-2/p}} = ||F||_{L^p}\},$$

где β - число из интервала $(0, 2), 1 < p < \infty$.

4 Об одном модельном сингулярном интегральном уравнении с нечётной характеристикой и разрывным коэффициентом

В комплексной плоскости переменной $z = x + iy$ рассмотрим следующее модельное интегральное уравнение

$$f(z) - \lambda \frac{z}{|z|}(S_1\overline{f})(z) = g(z), \tag{4.1}$$

где

$$(S_1\overline{f})(z) = \frac{1}{2\pi i} \iint\limits_D \frac{e^{-i\theta}}{|\zeta - z|^2}\overline{f(\zeta)}ds_\zeta, \quad \theta = \arg(\zeta - z), \quad D = \{z : |z| < 1\},$$

интеграл понимается в смысле главного значения по Коши, λ - комплексный параметр, черта над функцией $f(z)$ означает переход к комплексно сопряжённым значениям.

Предполагается, что искомая функция $f(z)$ и свободный член $g(z)$ принадлежат банахову пространству $L^p_{\beta-2/p}(D)$:

$$L^p_{\beta-2/p}(D) = \{f(z) : |z|^{\beta-2/p}f(z) = F(z) \in L^p(D), ||f||_{L^p_{\beta-2/p}} = ||F||_{L^p}\},$$

где $1 < p < \infty$, β - число из интервала $(0, 1)$.

Характерной особенностью уравнения (4.1) является то, что оно содержит в ядре сингулярную особенность с нечётной характеристикой $e^{-i\theta}$, причём коэффициент при сингулярном интеграле имеет в точке $z = 0$ существенный разрыв вида $\frac{z}{|z|}$. Как выясняется, оба эти обстоятельства существенно влияют на нётеровость и индекс уравнения (4.1). Отметим, что алгебра операторов вида (4.1) с непрерывными коэффициентами изучена в работе [30].

4.1. Сведение модельного уравнения к бесконечной системе интегральных уравнений относительно коэффициентов Фурье искомой функции

Здесь мы следуем методу работы Л.Г.Михайлова [41], применённому им при исследовании интегральных уравнений с суммируемыми однородными ядрами порядка -2.

После замены переменных $\zeta = \sigma z$ уравнение (4.1) примет вид

$$f(z) = \frac{\lambda}{2\pi i} \iint\limits_{|\sigma|<\frac{1}{|z|}} \frac{\overline{\sigma} - 1}{|\sigma - 1|^3} \overline{f(\sigma z)} ds_\sigma + g(z), \quad |z| < 1. \tag{4.2}$$

Переходя к полярным координатам $z = re^{i\phi}, \zeta = \rho e^{i\alpha}, \sigma = \tau e^{i\gamma}$, умножив (4.2) на $e^{-ik\varphi}/2\pi$ и интегрируя по углу φ, после перемены порядка интегрирования для коэффициентов Фурье $f(r)$:

$$f_k(r) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(re^{i\varphi}) e^{-ik\varphi} d\varphi$$

получим

$$f_k(r) = \frac{\lambda}{2\pi i} \iint\limits_{|\sigma|<\frac{1}{|z|}} \frac{\overline{\sigma} - 1}{|\sigma - 1|^3} e^{ik\gamma} \overline{f_{-k}(\tau r)} ds_\sigma + g_k(r),\ k = 0, \pm 1 \cdots .$$

Совершив обратную замену $\sigma = \zeta/z$, будем иметь

$$f_k(r) = \frac{\lambda}{2\pi i} \Big(\frac{\overline{z}}{|z|}\Big)^{k-1} \iint\limits_{|\zeta|<1} \Big(\frac{\zeta}{|\zeta|}\Big)^k \frac{\overline{\zeta} - \overline{z}}{|\zeta - z|^3} \overline{f_{-k}(\rho)} ds_\zeta + g_k(r),\ k = 0, \pm 1 \cdots .$$

По формуле дифференцирования интегралов со слабой особенностью (см.[1] стр.85) получим

$$f_k(r) = \frac{\lambda}{\pi i} \Big(\frac{\overline{z}}{|z|}\Big)^{k-1} \frac{\partial}{\partial z} \iint\limits_{|\zeta|<1} \Big(\frac{\zeta}{|\zeta|}\Big)^k \frac{\overline{\zeta} - \overline{z}}{|\zeta - z|} \overline{f_{-k}(\rho)} ds_\zeta + g_k(r),\ k = 0, \pm 1 \cdots , \tag{4.3}$$

или же

$$f_k(r) = \frac{2\lambda}{\pi i}\Big(\frac{\overline{z}}{|z|}\Big)^{k-1}\frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{z}{|z|}\Big)^{k}\int\limits_0^1 \sqrt{\tau}Q_{k-1/2}(\tau)\overline{f_k(\rho)}d\rho + g_k(r),\ k = 0, \pm 1 \cdots , \tag{4.4}$$

где

$$Q_{k-1/2}(\tau) = \int\limits_0^{\pi} \frac{\cos k\gamma}{\sqrt{\tau + 1/\tau - 2\cos\gamma}}d\gamma = \int\limits_0^{\pi} \frac{\cos k\gamma}{\sqrt{2\,\mathrm{ch}\,\tau - 2\cos\gamma}}d\gamma,$$

$$\mathrm{ch}\,\tau = \frac{\tau + 1/\tau}{2}, \quad \tau = \begin{cases} \rho/r & \text{если} \quad \rho < r, \\ r/\rho & \text{если} \quad \rho > r \end{cases} , \quad k = 0, \pm 1 \cdots .$$

Отметим, что $Q_{k-1/2}(\tau)$ - являются сферическими функциями Лежандра второго рода с полуцелым индексом и могут быть выражены через полные эллиптические интегралы первого и второго рода (см.[38] стр.401, [42] стр.234):

$$K(\tau) = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\gamma}{\sqrt{1 - \tau^2\sin^2\gamma}}, \quad E(\tau) = \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \tau^2\sin^2\gamma}d\gamma,$$

где $0 < \tau < 1$.

Выполнив в (4.4) операцию дифференцирования, будем иметь

$$f_k(r) = \frac{\lambda}{\pi i}\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{\tau}}{r}\Big((k - 1/2)Q_{k-1/2}(\tau) - \tau Q'_{k-1/2}(\tau)\Big)\overline{f_{-k}(\rho)}d\rho + g_k(r), \tag{4.5}$$

где $\tau = \rho/r$, $k = 0, \pm 1 \cdots$.

Теперь, если учесть, что функция Лежандра $Q_{k-1/2}(\tau)$ при $\tau = 1$ имеет логарифмическую особенность (см.напр. [42] стр.249) и воспользоваться разложением этой функции из монографии Гобсона Е.В.([43] стр.217, см.также [38] стр.919), выделим её логарифмическую часть. Тогда относительно коэффициентов Фурье $f_k(r)$ искомой функции $f(z)$ получим следующие пары интегральных уравнений

$$\begin{aligned} f_k(r) &= \frac{\lambda}{\pi i}\int_0^1 \frac{\overline{f_{-k}(\rho)}}{\rho - r}d\rho + \frac{\lambda}{\pi i}\int_0^1 \frac{1}{r}\Theta_k\Big(\frac{\rho}{r}\Big)\overline{f_{-k}(\rho)}d\rho + g_k(r), \\ \overline{f_{-k}(r)} &= -\frac{\overline{\lambda}}{\pi i}\int_0^1 \frac{f_k(\rho)}{\rho - r}d\rho - \frac{\overline{\lambda}}{\pi i}\int_0^1 \frac{1}{r}\Theta_{-k}\Big(\frac{\rho}{r}\Big)f_k(\rho)d\rho + \overline{g_{-k}(r)}, \end{aligned} \tag{4.6}$$

где $k = 0, 1, \ldots$. Заметим, что функция Лежандра $Q_{k-1/2}(\tau)$ чётная функция, поэтому $\Theta_{-k}(\tau) = \Theta_k(\tau)$.

Первый интеграл в системе (4.6) понимается в смысле главного значения по Коши, а второй интеграл имеет суммируемое однородное ядро степени -1. В соответствии с исходным уравнением систему (4.6) следует рассматривать в пространстве $L^p_{\beta-1/p}(0,1)$, где $1 < p < \infty, 0 < \beta < 1$. Такие системы исследованы в работе Р.В.Дудучавы [44].

Подставляя значение $\overline{f_k(r)}$ из второго уравнения в первое, относительно коэффициентов Фурье $f_k(r)$ получим следующие одномерные интегральные уравнения

$$(\mathcal{A}_k f_k)(r) = f_k(r) + |\lambda|^2\Big[S_\Gamma + \Theta_k\Big]^2 f_k(r) = q_k(r), \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{4.7}$$

с сингулярным интегральным оператором Коши и оператором с однородным ядром степени -1 :

$$(S_\Gamma f_k)(r)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_0^1\frac{f_k(\rho)}{\rho-r}d\rho,\quad (\Theta_k f_k)(r)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_0^1\frac{1}{r}\Theta_k\Big(\frac{\rho}{r}\Big)f_k(\rho)d\rho.$$

Согласно результатам [44] и [45], символы этих операторов соответственно имеют вид:

$$s_\beta(x)=\operatorname{cth}\pi(x+i\beta),\quad H_k(x)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_0^\infty\Theta_k(\rho)\rho^{-\beta+ix}d\rho,$$

где

$$\operatorname{cth}z=\frac{e^z+e^{-z}}{e^z-e^{-z}},$$

β - показатель веса пространства $L^p_{\beta-1/p}(0,1)$ из интервала $(0,1)(1<p<\infty)$. Уравнению (4.7) сопоставим предсимвол

$$A_{k,\beta}(x)=1+|\lambda|^2\big[s^2_\beta(x)+2s_\beta(x)H_k(x)+H^2_k(x)\big],\tag{4.8}$$

где $x\in(-\infty,+\infty),\quad \beta\in(0,1),\quad k=0,1,\ldots.$

По предсимволу (4.8) определим символ оператора $\mathcal{A}_k$ из (4.7)

$$A_{k,\beta,p}(x,\xi)=\begin{cases}A_{k,\beta}(x), & \text{если}\quad x\in(-\infty,+\infty),\\ 1+|\lambda|^2s^2_{1/p}(\xi), & \text{если}\quad x=\pm\infty,\quad \xi\in(-\infty,+\infty).\end{cases}\tag{4.9}$$

Таким образом, из результатов [44] следует, что при фиксированном значении $k\,(k=0,1,\ldots)$ для нормальной разрешимости уравнения (4.7) в пространстве $L^p_{\beta-1/p}(0,1)$ $(1<p<\infty)$ необходимо и достаточно, чтобы

$$A_{k,\beta,p}(x,\xi)\neq0,\quad -\infty\le x\le+\infty,\quad -\infty\le\xi\le+\infty,\tag{4.10}$$

при этом $Ind\mathcal{A}_k=IndA_{k,\beta,p}$.

4.2. Исследование нётеровости одномерных систем интегральных уравнений и основная теорема

В предыдущем пункте исследование двумерного сингулярного интегрального уравнения (4.1) свелось к бесконечной системе (4.6), для нормальной разрешимости каждой из которых условия (4.10) необходимы и достаточны, однако отсюда ещё нётеровость исходного уравнения (4.1) не следует. Во-первых, надо доказать, что исходное уравнение эквивалентно конечной части системы (4.6). Во-вторых, после нахождения решений неоднородной системы (4.6) мы должны ещё показать, что они действительно образуют последовательность коэффициентов Фурье некоторой функции из $L^p_{\beta-2/p}(D)$, $1 < p < \infty$ и что ряд сходится по норме. Это можно сделать по способу из [41].

Пусть N-некоторое натуральное число. Введём в $L^p_{\beta-2/p}(D)$ замкнутые подпространства

$$L_N = \{f(z) : f(z) \in L^p_{\beta-2/p}(D),\ f_k(r) \equiv 0 \text{ при } |k| > N\},$$

$$L^N = \{f(z) : f(z) \in L^p_{\beta-2/p}(D),\ f_k(r) \equiv 0 \text{ при } |k| \le N\}.$$

Подпространства L^N и L_N замкнуты в $L^p_{\beta-2/p}(D)$, следовательно образуют банаховы пространства, и всякий элемент $f \in L^p_{\beta-2/p}(D)$ представим в виде $f = f_N + f^N$, $f_N \in L_N, f^N \in L^N$, причём такое представление единственно. Этому разложению $L^p_{\beta-2/p}(D)$ в прямую сумму подпространств L_N и L^N соответствует разложение уравнения (4.1) в эквивалентную ему совокупность

$$f_N = \lambda \Pi \overline{f}_N + g_N, \quad f_N,\, g_N \in L_N, \tag{4.11}$$

$$f^N = \lambda \Pi \overline{f}^N + g^N, \quad f^N,\, g^N \in L^N, \tag{4.12}$$

где

$$(\Pi f)(z) = \frac{1}{2\pi i}\frac{z}{|z|}\iint\limits_D \frac{e^{-i\theta}}{|\zeta - z|^2} f(\zeta) ds_\zeta.$$

Лемма 4.1. *Существует натуральное число N_0, такое, что уравнение из (4.12) безусловно разрешимо единственным образом в L^N при $N \geq N_0$.*

Доказательство. Пусть L_+^N - множество всех функций из L^N, для которых $f_k(r) \equiv 0$ при $k < -N$ и L_-^N - множество всех функций из L^N, для которых $f_k(r) \equiv 0$ при $k > N$. Эти множества замкнуты в L^N, и всякий элемент $f \in L^N$ единственным образом представим в виде

$$f = f_+ + f_-, \quad \text{где} \quad f_+ \in L_+^N, \quad f_- \in L_-^N.$$

Тогда уравнение $f^N = \lambda \Pi \overline{f}^N + g^N$ эквивалентно системе

$$\begin{aligned} f_+ &= \lambda \Pi \overline{f}_- + g_+, \\ f_- &= \lambda \Pi \overline{f}_+ + g_-. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Подставляя значение $\overline{f}_-$ из второго уравнения в первое, относительно f_+ получим следующее интегральное уравнение

$$f_+ = |\lambda|^2 \Pi \overline{\Pi} f_+ + G_+ \tag{4.14}$$

Теперь интегральный оператор Π представим в виде суммы двух операторов Π_1 и H_1 :

$$(\Pi f_+)(\zeta) \equiv \frac{1}{2\pi i}\frac{z}{|z|}\iint\limits_D \frac{e^{-i\theta}}{|\zeta - z|^2} f_+(\zeta) ds_\zeta = \frac{1}{2\pi i}\iint\limits_D \frac{\zeta e^{-i\theta}}{|\zeta||\zeta - z|^2} f_+(\zeta) ds_\zeta +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\iint\limits_D \frac{\frac{z(|\zeta|-|z|)}{|z|(\zeta-z)} - 1}{|\zeta||\zeta - z|} f_+(\zeta) ds_\zeta \equiv (\Pi_1 f_+)(z) + (H_1 f_+)(z),$$

где первое слагаемое - сингулярный интегральный оператор с нечётной характеристикой, а второй оператор имеет суммируемое с весом $\beta(0 < \beta < 1)$ однородное ядро порядка (-2) вида $\frac{1}{|z|^2} h\left(\frac{\zeta}{z}\right)$, где

$$h(\sigma) = \frac{\frac{|\sigma|-1}{\sigma-1} - 1}{|\sigma||\sigma - 1|}.$$

Подставляя значение Πf_+ в (4.14), имеем

$$f_+ = -|\lambda|^2 S_1 S_{-1} f_+ - |\lambda|^2 H_1 S_1 f_+ + G_+.$$

Используя тождество $S_1 S_{-1} = I - B_1$ из [1], где B_1 - оператор типа Бергмана, имеем

$$f_+ - \frac{|\lambda|^2}{1+|\lambda|^2} B_1 f_+ + \frac{|\lambda|^2}{1+|\lambda|^2} H_1 S_1 f_+ = \frac{1}{1+|\lambda|^2} G_+. \tag{4.15}$$

Докажем, что уравнение (4.15), а вместе с ним и система (4.13) однозначно обратимы на L^N. Действительно, поскольку ядро $|z|^{\beta - 2/p} h(\sigma)$ оператора H_1 суммируемо, то аппроксимируем его функциями вида $H_N(\tau, \gamma) = \sum_{|k| \le N} \omega_k(\tau) e^{ik\gamma}$. В силу того, что интегралы с такими ядрами являются операторами аннулирования на L^N, то там $H_1 = H_1 - H_N$, и поскольку сингулярный оператор S_1 ограничен в L^N , значит при достаточно большом N будет иметь место неравенство

$$\frac{|\lambda|^2}{1+|\lambda|^2}||H_1 S_1||_{L_N} \le |\frac{|\lambda|^2}{1+|\lambda|^2}|||H_1 - H_N||||S_1|| < 1.$$

Далее из результатов [30] следует, что оператор $I - \frac{|\lambda|^2}{1+|\lambda|^2}B_1$ из (4.15) имеет ограниченный обратный оператор $I + |\lambda|^2 B_1$. Поэтому оператор из левой части (4.15) как сумма корректно разрешимого и малого по норме операторов (см.[31]) корректно разрешим в L^N, то есть уравнение (4.15) однозначно разрешимо в L_N. Лемма доказана.

Что касается уравнения (4.11), то оно распадается на конечную часть системы (4.6), где $|k| \leq N_0, N_0$ - натуральное число из леммы.

Теорема 4.1 *Для нормальной разрешимости уравнения (4.1) в пространстве* $L^p_{\beta-2/p}(D)(1 < p < \infty, 0 < \beta < 1)$ *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\prod_{k=0}^{N_0} A_{k,\beta,p}(x,\xi) \neq 0, \quad -\infty \leq x \leq +\infty, \quad -\infty \leq \xi \leq +\infty,$$

при этом индекс уравнения (4.1) равен $\varkappa = \sum_{k=0}^{N_0} Ind A_{k,\beta,p}(x,\xi)$.

5 Об условиях нётеровости и индексе одного класса двумерных сингулярных интегральных уравнений с нечётной характеристикой и разрывными коэффициентами

Пусть D – конечная односвязная область комплексной плоскости, ограниченная простой замкнутой кривой Ляпунова Γ и содержащая внутри точку $z = 0$; $a(z)$, $b(z)$, $c(z)$ - комплекснозначные непрерывные в $\bar{D} = D \cup \Gamma$ функции; $B_1(z, \zeta)$ – поликерн-функция Бергмана области D, представимая через функцию Грина для оператора Лапласа $G(z)$ в виде (см. [30])

$$B_1(z,\overline{\zeta}) = \frac{1}{4\pi}\sum_{k,l=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k+1)!(l+1)!}C^k_{-\frac{1}{2}}C^l_{-\frac{1}{2}}(\zeta - z)^k(\overline{\zeta} - \overline{z})^l\frac{\partial^{k+l+2}G(z,\zeta)}{\partial z^k \partial \overline{\zeta}^l},$$

где

$$C^k_\alpha = \frac{\alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - k + 1)}{k!}.$$

Функция $B_1(z, \zeta)$ имеет особенности лишь при $z = \zeta \in \Gamma$.

Настоящая статья посвящена исследованию уравнения

$$a(z)f(z) + \frac{b(z)}{2\pi i}\frac{z}{|z|}\iint\limits_D \frac{e^{-i\theta}}{|\zeta - z|^2}\overline{f(\zeta)}ds_\zeta + c(z)\iint\limits_D B_1(z,\overline{\zeta})f(\zeta)ds_\zeta = g(z), \tag{5.1}$$

где $z \in D$, $\theta = \arg(\zeta - z)$, ds_ζ – элемент плоской меры Лебега, первый интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

Очевидно, если $b(0) \neq 0$, то коэффициент при сингулярном интеграле имеет в точке $z = 0$ существенный разрыв такой, что частичные пределы заполняют некоторую окружность. Уравнение (5.1) в случае, когда $D = \{z : |z| < 1\}, a(z) \equiv 1$, $b(z) \equiv const, c(z) \equiv 0$, изучено в работе

[52], где построена теория его разрешимости. Отметим, что уравнения с чётными характеристиками и разрывными коэффициентами исследованы ранее (см., напр., [23], [46], [47]). Указанные работы были выполнены под влиянием работ Л.Г.Михайлова [41], [48] по интегральным уравнениям с однородными ядрами.

В данной работе предполагается, что искомая функция $f(z)$ и свободный член $g(z)$ принадлежат банахову пространству $L^p_{\beta-2/p}(D)$:

$$L^p_{\beta-2/p}(D) = \{f(z) : |z|^{\beta-2/p} f(z) = F(z) \in L^p(D), \|f\|_{L^p_{\beta-2/p}} = \|F\|_{L^p}\},$$

где $1 < p < \infty,\ 0 < \beta < 2$.

При этом, хотя функции, входящие в $L^p_{\beta-2/p}(D)$, являются комплексно-значными, само пространство будем считать вещественным, то есть будем рассматривать его как линейное множество над полем вещественных чисел. Тогда не только оператор с поли-керн ядром Бергмана, но и другой оператор из (5.1), являющийся композицией сингулярного оператора с операцией комплексного сопряжения, будет обычным линейным ограниченным оператором в $L^p_{\beta-2/p}(D)$, что следует, например, из [49].

Всякий линейный ограниченный функционал на рассматриваемом (вещественном) пространстве $L^p_{\beta-2/p}(D)$ единственным образом представим в виде

$$(f, \psi) = Re \iint\limits_D f(z)\psi(z) ds_z,\ \psi \in L^{p'}_{2-\beta-2/p'}(D),\ \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

В соответствии с этим сопряженным к (5.1) будет уравнение

$$a(z)\psi(z) - \frac{1}{2\pi i} \iint\limits_D \overline{b(\zeta)} \frac{\overline{\zeta}}{|\zeta|} \frac{\overline{\psi(\zeta)} ds_\zeta}{(\overline{\zeta} - \overline{z})^2} + \iint\limits_D c(\zeta) B_1(\zeta, \overline{z}) \psi(\zeta) ds_\zeta = q(z),\ z \in D, \quad (5.1^*)$$

где $\psi(z)$, $q(z) \in L^{p'}{}_{2-\beta-2/p'}(D)$.

В случае нётеровости под индексом уравнения (5.1), как обычно, понимается разность между числом линейно-независимых решений однородного уравнения (5.1) в $L^p_{\beta-2/p}(D)$ и числом линейно-независимых решений однородного (5.1*) в $L^{p'}{}_{2-\beta-2/p'}(D)$.

5.1. Вспомогательные утверждения и формулировка основной теоремы

В этом пункте будем предполагать, что $D = \{z : |z| < 1\}$. Прежде всего, опираясь на [30], доказывается, что функция $B_1(z, \zeta)$ имеет вид

$$B_1(z, \overline{\zeta}) = \frac{e^{-i\alpha}}{\pi |1 - z\overline{\zeta}|^2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k (C^k_{\frac{1}{2}})^2 \sigma^{k-1} (1-\sigma)^{\frac{1}{2}-k}, \qquad (5.2)$$

где $\alpha = \arg(1 - z\overline{\zeta})$, $\sigma = \left| \frac{\zeta - z}{1 - z\overline{\zeta}} \right|^2$, $\quad |\sigma| < 1$. Выражение (5.2) можно привести к виду

$$B_1(z, \overline{\zeta}) = \frac{e^{-i\alpha}}{\pi |1 - z\overline{\zeta}|^2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k C^k_{\frac{1}{2}} C^k_{-\frac{1}{2}+k} \sigma^{k-1}. \qquad (5.3)$$

Введем следующие обозначения

$$(S_1 f)(z) = \frac{1}{2\pi i} \iint\limits_D \frac{e^{-i\theta}}{|\zeta - z|^2} f(\zeta) ds_\zeta, \ z \in \overline{D},$$

$$(S_{-1} f)(z) = \frac{1}{2\pi i} \iint\limits_D \frac{e^{i\theta}}{|\zeta - z|^2} f(\zeta) ds_\zeta, \ z \in \overline{D},$$

$$(B_1 f)(z) = \iint\limits_D B_1(z, \overline{\zeta}) f(\zeta) ds_\zeta \ z \in \overline{D}.$$

Для дальнейшего нам потребуется следующее утверждение из [30].

Лемма 5.1. *Пусть* $f(z) \in L^p_{\beta-2/p}(D), 1 < p < \infty, 0 < \beta < 2$, *тогда операторы* $I - B_1 - S_1S_{-1},\ \ S_{-1}B_1,\ \ B_1S_1,\ \ B_1^2 - B_1$ *вполне непрерывны в* $L^p_{\beta-2/p}(D)$.

Теорема 5.1. *Пусть в (5.1)* $a(z), b(z), c(z)$ *непрерывны в* $\overline{D}, b(0) = 0$. *Если* $|a(z)| + |b(z)| \neq 0$ *при* $z \in \overline{D},\ a(t) + c(t) \neq 0$ *при* $t \in \Gamma$, *то уравнение (5.1) нётерово в каждом из пространств* $L^p_{\beta-2/p}(D),\ 1 < p < \infty,\ 0 < \beta < 2$; *его индекс* $\varkappa = -Ind_\Gamma\{a(t) + c(t)\}$, *однородное уравнение (5.1) (а также однородное уравнение* (5.1*) *имеет одни и те же решения во всех указанных пространствах.*

З а м е ч а н и е 1. Если выполнены условия теоремы 1 и $b(z)\frac{z}{|z|} \equiv c(z)$, то (5.1) безусловно разрешимо единственным образом в $L^p_{\beta-2/p}(D)$.

Пусть теперь $n \neq 0,\ b(0) \neq 0$. Если при этом $a(0) = 0$, то условия нётеровости уравнения (5.1) и формула для вычисления его индекса вытекают из теоремы 1.

Для того чтобы убедиться в этом, достаточно переписать (5.1) в эквивалентном виде

$$\left(\frac{|z|}{z}\right) a(z)f(z) + \frac{b(z)}{2\pi i} \iint\limits_D \frac{e^{-i\theta}}{|\zeta - z|^2}\overline{f(\zeta)}ds_\zeta + \left(\frac{z}{|z|}\right)|z|c(z) \iint\limits_D B_1(z,\overline{\zeta})f(\zeta)ds_\zeta +$$

$$+\left(\frac{|z|}{z}\right)c(z)(1-|z|)\iint\limits_D B_1(z,\overline{\zeta})f(\zeta)ds_\zeta = \left(\frac{|z|}{z}\right)g(z),\ z \in D$$

и учесть, что последний оператор в левой части является вполне непрерывным в $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$.

В случае $a(0) \neq 0$ условия неётеровости уравнения (5.1) можно найти с помощью локального метода И.Б.Симоненко [35], исходя из результатов работы [50]. Однако при этом останется нерешенной задача нахождения формулы для индексов. Эту трудность удалось преодолеть за счёт построения операторов A_0, и A_1:

$$(A_0 f)(z) \equiv a(0) f(z) + \frac{b(0)}{2\pi i} \frac{z}{|z|} \iint\limits_D \frac{e^{-i\theta}}{|\zeta - z|^2} \overline{f(\zeta)} ds_\zeta, \quad z \in D,$$

(для его нётеровости необходимо, в частности, чтобы $|a(0)| \neq |b(0)|$);

$$(A_1 f)(z) \equiv (|a(0)|^2 + |b(0)|^2)^{-1} \Big\{ (\overline{a(0)} a(z) + b(0) \overline{b(z)}) f(z) +$$

$$+ \frac{1}{\pi} (\overline{a(0)} b(z) - b(0) \overline{a(z)}) \frac{1}{2\pi i} \frac{z}{|z|} \iint\limits_D \frac{e^{-i\theta}}{|\zeta - z|^2} \overline{f(\zeta)} ds_\zeta + (a(0))^{-1} \Big[|b(0)|^2 a(z) -$$

$$- a(0) b(0) \overline{b(z)} + (|a(0)|^2 + |b(0)|^2) c(z) \Big] \iint\limits_D B_1(z, \overline{\zeta}) f(\zeta) ds_\zeta \Big\}, \ z \in D,$$

для которых справедлива

Лемма 5.2. *Пусть $D = \{z : |z| < 1\}$ $a(z)$, $b(z)$, $c(z)$, непрерывны в $\overline{D}$, $a(0) \neq 0$, $|a(0)| \neq |b(0)|$) и A – оператор, образованный левой частью (5.1). Тогда*

$$A = A_0 A_1 + T_1,$$

где T_1 - вполне непрерывный в $L^p_{\beta - 2/p}(D)$ оператор.

Теперь с учетом известных фактов общей теории линейных операторов для получения условий нётеровости уравнения (5.1) в $L^p_{\beta-2/p}(D)$ и формулы для его индекса достаточно применить к оператору A_0 результаты [52], а к оператору A_1 – теорему 5.1.

5.2. Факторизация исходного сингулярного интегрального оператора

Переходим к рассмотрению уравнения (5.1) в случае произвольной области D, описанной в начале статьи. Пусть $\sigma = \omega(z)$ - однолистное конформное отображение области D на круг $|\sigma| < 1$, причём $\omega(0) = 0$; $z = \chi(\sigma)$-обратное отображение.

Для функции Грина $G(z,\zeta)$ области D справедлива формула (см. [30], с.252,258])

$$G(z,\zeta) = \ln \left| \frac{1-\omega(z)\overline{\omega(\zeta)}}{\omega(\zeta)-\omega(z)} \right|,$$

откуда

$$B(z,\zeta) = -\frac{2}{\pi}\frac{\partial^2 G(z,\zeta)}{\partial z \overline{\partial \zeta}} = \frac{1}{\pi}\frac{\omega'(z)\overline{\omega'(\zeta)}}{(1-\omega(z)\overline{\omega}(\zeta))^2},$$

где штрихом обозначена производная.

Подставим это выражение для $B_1(z,\overline{\zeta})$ в уравнение (5.1) и произведём там замену переменных $\zeta = \chi(\omega),\ z = \chi(\sigma)$. В результате, используя известные свойства конформных отображений (см. [[49], с 399, 411]), получим

$$a_1(\sigma)f_1(\sigma) + \frac{b_1(\sigma)}{2\pi i}\frac{\sigma}{|\sigma|}\iint\limits_{|\omega|<1} \frac{e^{-i\theta_1}}{|\omega-\sigma|^2}\overline{f_1(\omega)}ds_\omega + \frac{c_1(\sigma)}{\pi}\iint\limits_{|\omega|<1} B_1(\sigma,\overline{\omega})f_1(\omega)ds_\omega +$$
$$(T_2 f_1)(\sigma) = g_1(\sigma),\ |\sigma| < 1, \tag{5.4}$$

где T_2 - вполне непрерывный в $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)(|\sigma| < 1)$ оператор; $a_1(\sigma) = a(\chi(\sigma))$,

$$b_1(\sigma) = \frac{|\sigma|\chi(\sigma)}{\sigma|\chi(\sigma)|}\frac{\overline{\chi'(\sigma)}}{\chi'(\sigma)}b(\chi(\sigma)),$$

$$c_1(\sigma) = c(\chi(\sigma)),\ f_1(\sigma) = f(\chi(\sigma)),\ g_1(\sigma) = g(\chi(\sigma)).$$

Поскольку $\chi'(\sigma) \neq 0$ $(|\sigma| \leq 1)$, то из того, что $f(z), g(z) \in L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$, следует $f_1(\sigma), g_1(\sigma) \in L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(|\sigma| < 1)$ и обратно, а из непрерывности $a(z),\ b(z),\ c(z)$ и $\overline{D}$ вытекает непрерывность $a_1(\sigma),\ b_1(\sigma),\ c_1(\sigma)$ при $|\sigma| \leq 1$. Заметим еще, что $b_1(\sigma) = |b(\chi(\sigma))|$.

Теми же, что и выше, заменами переменных z, ζ уравнение (5.1^*) приводится к уравнению, сопряженному к (5.2), если положить $\psi_1(\sigma) = |\chi'(\sigma)|^2 \psi(\chi(\sigma)),\ \ q_1(\sigma) = |\chi'(\sigma)|^2 q(\chi(\sigma))$.

Применяя к уравнению (5.3) результаты и рассуждения п. 1, получим утверждения о разрешимости исходного уравнения (5.1).

Прежде всего (доказывая особо совпадение решений однородного уравнения во всех рассматриваемых пространствах) заключаем, что теорема 1 остается справедливой также в случае, когда D - произвольная область, описанная в начале статьи.

Далее имеет место

Теорема 5.2. *Пусть в (5.1)* $a(z),\ b(z),\ c(z)$ *непрерывны в* $\overline{D}$ *и* $a(0) = 0$. *Если* $|a(z)| \neq |b(z)|,\ z \in \overline{D},\ a(t) + c(t) \neq 0$ *при* $t \in \Gamma$, *то:*

1) уравнение (5.1) нётерово в каждом из пространств $L^p_{\beta-2/p}(D)$, $0 < \beta < 2,\ 0 < p < \infty$; *причём его индекс равен* $\varkappa = -Ind_\Gamma\{a(t) + c(t)\} + 1$;

2) однородное уравнение (5.1), а также (5.1^*) *имеют одни и те же решения во всех указанных пространствах.* В случае $a(0) \neq 0$ для удобства формулировки результатов введём предварительно некоторые обозначения с сингулярным интегральным оператором Коши и оператором с однородным ядром степени -1 :

$$(S_\Gamma f_k)(r) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_0^1 \frac{f_k(\rho)}{\rho - r}d\rho, \quad (\Theta_k f_k)(r) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_0^1 \frac{1}{r}\Theta_k\Big(\frac{\rho}{r}\Big)f_k(\rho)d\rho.$$

Согласно результатам [44] и [45], символы этих операторов соответственно имеют вид:

$$s_\beta(x) = \operatorname{cth}\pi(x + i\beta), \quad H_k(x) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_0^\infty \Theta_k(\rho)\rho^{-\beta+ix}d\rho,$$

где

$$\operatorname{cth} z = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}},$$

β - показатель веса пространства $L^p_{\beta-1/p}(0,1)$ из интервала $(0,1)(1 < p < \infty)$. Оператору A_0 сопоставим предсимвол

$$A_{k,\beta}(x) = 1 + |\lambda|^2\big[s^2_\beta(x) + 2s_\beta(x)H_k(x) + H^2_k(x)\big], \tag{5.5}$$

где $x \in (-\infty, +\infty), \quad \beta \in (0,1), \quad k = 0, 1, \dots .$

По предсимволу (5.4) определим символ оператора $\mathcal{A}_0$

$$A_{k,\beta,p}(x,\xi) = \begin{cases} A_{k,\beta}(x), & \text{если} \quad x \in (-\infty, +\infty), \\ 1 + |\lambda|^2 s^2_{1/p}(\xi), & \text{если} \quad x = \pm\infty, \quad \xi \in (-\infty, +\infty), \end{cases} \tag{5.6}$$

где $\lambda =|\ \frac{b(0)}{a(0)}\ |$.

Теорема 5.3. *Пусть $a(z),\ b(z),\ c(z)$ непрерывны в $\overline{D}$ и $a(0) \neq 0$. Если $|a(z)| + |b(z)| \neq 0,\ z \in \overline{D},\ a(t) + c(t) \neq 0\ t \in \Gamma,$ и*

$$\prod_{k=0}^{N_0} A_{k,\beta,p}(x,\xi) \neq 0, \quad -\infty \leq x \leq +\infty, \quad -\infty \leq \xi \leq +\infty,$$

то:

1) уравнение (5.1) нётерово в $L^p_{\beta-2/p}(D)$, *при этом индекс уравнения (5.1) равен*

$$\varkappa = -Ind_{\Gamma}\{a(t)+c(t)\} + \varkappa_{n\beta}(\lambda),$$

где

$$\varkappa_{n\beta} = \sum_{k=0}^{N_0} Ind A_{k,\beta,p}(x,\xi);$$

2) для рассматриваемого фиксированного значения β, $0 < \beta < 2$, *однородное уравнение (5.1) имеет одни и те же решения во всех пространствах.* $L^p_{\beta-2/p}(D)$, *а однородное уравнение* (5.1^*) *– в* $L^p_{2-\beta-2/p}(D)$, $1 < p < \infty$.

З а м е ч а н и е 1. Указанные в теоремах 1-3 условия нётеровости уравнения (5.1) в $L^p_{\beta-2/p}(D)$ являются необходимыми, что доказывается с использованием некоторых рассуждений и результатов [10]. Более того, при нарушении этих условий оператор, образованный левой частью (5.1), не имеет в $L^p_{\beta-2/p}(D)$ ни левого, ни правого ограниченных регуляризаторов.

О б о б щ е н и е. Изложенные выше результаты сохраняются, если вместо непрерывности $c(z)$ в $\overline{D}$ предположить лишь, что она является измеримой ограниченный функцией и имеет на Γ равномерно достигаемые предельные значения, образующие непрерывную функцию $c(t)$. Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что существует функция $c_0(z)$, непрерывная в $\overline{D}$ и совпадающая на Γ с $c(z)$, благодаря чему в представлении

$$c(z)\iint\limits_D B(z,\zeta)f(\zeta)ds_\zeta = c_0(z)\iint\limits_D B(z,\zeta)f(\zeta)ds_\zeta +$$

$$+[c(z)-c_0(z)]\iint\limits_D B(z,\zeta)f(\zeta)ds_\zeta$$

второе слагаемое дает вполне непрерывный в $L^p_{\beta-2/p}(D)$ оператор.

Добавим к этому, что если в (5.1) $a(z) = a_0(z)\frac{z}{|z|}$, где $a_0(z)$ непрерывна в $\overline{D}$, n_1 - целое число, то для сведения к рассмотренному случаю достаточно умножить уравнение (5.1) на $\frac{|z|}{z}$.

6 О нётеровости и индексе шестикомпонентного двумерного сингулярного интегрального оператора с нечётной характеристикой и разрывными коэффициентами

В настоящей работе устанавливаются эффективные необходимые и достаточные условия нётеровости некоторых двумерных сингулярных интегральных операторов с нечётной характеристикой и с разрывными коэффициентами при сингулярных интегралах.

Пусть D – конечная односвязная область комплексной плоскости, ограниченная простой замкнутой кривой Ляпунова Γ и содержащая внутри точку $z = 0$; $a(z)$, $b(z)$, $c(z)$ - комплекснозначные непрерывные в $\bar{D} = D \cup \Gamma$ функции; $B_1(z, \zeta)$ – поли-керн-функция Бергмана области D, представимая через функцию Грина для оператора Лапласа $G(z)$ в виде (см. [30])

$$B_1(z,\overline{\zeta}) = \frac{1}{4\pi}\sum_{k,l=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k+1)!(l+1)!}C^k_{-\frac{1}{2}}C^l_{-\frac{1}{2}}(\zeta - z)^k(\overline{\zeta} - \overline{z})^l\frac{\partial^{k+l+2}G(z,\zeta)}{\partial z^k\partial\overline{\zeta}^l},$$

где

$$C^k_\alpha = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}.$$

Функция $B_1(z, \zeta)$ имеет особенности лишь при $z = \zeta \in \Gamma$.

В настоящей работе изучается вопрос нётеровости и индекса оператора

$$A \equiv a(z)I + b(z)K + c(z)\frac{z}{|z|}S_1 + d(z)\frac{\overline{z}}{|z|}\overline{S_1}K + e(z)\overline{B_1} + h(z)B_1K \qquad (6.1)$$

в пространстве $L^p_{\beta-2/p}(D)$, $1 < p < \infty$, $0 < \beta < 1$, где I - тождественный оператор; $a(z)$, $b(z)$, $c(z)$, $d(z)$, $e(z), h(z)$ - непрерывные в $\overline{D} = DU\Gamma$ комплекснозначные функции,

$$(S_1 f)(z) = \frac{1}{2\pi i} \iint\limits_D \frac{e^{-i\theta}}{|\zeta - z|^2} f(\zeta) ds_\zeta, \quad z \in D,$$

$$(Kf)(z) = \overline{f(z)}, \quad \theta = \arg(\zeta - z).$$

При $b = c = h \equiv 0$ оператор (6.1) изучен в работах [52], [53]. Отметим, что исследованию разрешимости двумерных сингулярных интегральных операторов с нечётной характеристикой посвящены работы [51]-[55].

Для дальнейшего в $\overline{D}$ введем вспомогательные функции

$$\Delta_1 = |a|^2 - |b|^2,\ \Delta_2 = |c|^2 - |d|^2,\ \lambda_1 = \overline{a}c - b\overline{d},\ \mu_1 = a\overline{d} - \overline{b}c.$$

Прежде всего, подставляя в (6.1) вместо B_1 его представление вида $B_1 = I - S_1 S_{-1} + T$ (T - компактный оператор), на основе результатов [30] заключаем, что определяющую роль при исследовании на нётеровость играет матрица

$$G_z(\sigma) = \begin{pmatrix} a(z) + e(z) & b(z) + h(z) & c(z) - \frac{e(z)\sigma}{|\sigma|} & d(z) - \frac{h(z)\overline{\sigma}}{|\sigma|} \\ \overline{b(z)} + \overline{h(z)} & \overline{a(z)} + \overline{e(z)} & \overline{d(z)} - \frac{\overline{h(z)}\sigma}{|\sigma|} & \overline{c(z)} - \frac{\overline{e(z)}\overline{\sigma}}{|\sigma|} \\ -\frac{\overline{\sigma}}{|\sigma|} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{\overline{\sigma}}{|\sigma|} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

где $\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2,\ 0 \leq |\sigma| < \infty$. Доказывается, что имеет место

Лемма 6.1. *Матрица $G_A(z,t)$ невырождена для всех $z \in \overline{D}$ и $|t| = 1$ тогда и только тогда, когда для $\forall z \in \overline{D}$ выполнено одно из неравенств*

$$\Delta_1^2(z) + |\mu(z)|^2 > |\lambda(z)|^2 \quad \forall z \in \overline{D}, \tag{6.2}$$

$$\Delta_2^2(z) + |\mu(z)|^2 > |\lambda(z)|^2 \quad \forall z \in \overline{D}, \tag{6.3}$$

При этом эти неравенства не могут одновременно выполняться ни при одном значении $z \in \overline{D}$ *, где*

$$\Delta_1 = |a|^2 - |b|^2,\ \Delta_2 = |c|^2 - |d|^2,\ \lambda = \overline{a}c - b\overline{d},\ \mu = a\overline{d} - \overline{b}c,$$

$$e_1 = \overline{a}e - b\overline{h},\ h_1 = \overline{a}h - b\overline{e},\ e_2 = \overline{d}e - c\overline{h},\ h_2 = \overline{d}h - c\overline{e}.$$

Рассмотрим следующие ограниченные в $L^p_{\beta-2/p}(D)$ операторы:

$$T_1 = (\overline{a} + q_1\beta_1\overline{b})I - (b + q_1\beta_1 a)K,\ T_2 = (\overline{d} + q_2\beta_2\overline{c})I - (c + q_2\beta_2 d)K,$$

где $\beta_1 = \frac{\overline{\mu}}{\Delta_1 + q_1\overline{\lambda}}$, $\beta_2 = \frac{\mu}{\Delta_2 + q_2\overline{\lambda}}$, q_1, q_2 - корни уравнения $detG_A(t) = 0$. Из леммы 6.1 следует, что при выполнении условия (6.2) оператор T_1 имеет непрерывный обратный, причём

$$A = T_1^{-1}A_{1,}$$

$$A_1 = \Delta_1(I - \lambda_1\beta_1 K + \beta_1\overline{S_1}K - \lambda_1 S_1) + (e_1 - \lambda_1\beta_1\overline{h_1})\overline{B_1} + (h_1 - \lambda_1\beta_1\overline{e_1})B_1 K.$$

В случае (6.3) оператор T_2 имеет непрерывный обратный

$$A = T_2^{-1}A_{2,}$$

$$A_2 = \Delta_2(\beta_2 I - \lambda_2 K + \overline{S_1}K - \lambda_2\beta_2 S_1) + (e_2 - \lambda_2\beta_2\overline{h_2})\overline{B_1} + (h_2 - \lambda_2\beta_2\overline{e_2})B_1 K.$$

Таким образом, исследование нётеровости и индекса оператора A сводится к соответствующему исследованию операторов A_1 и A_2. Далее показывается, что в условиях теоремы соответствующие операторам A_1 и A_2 матрицы $G_t^{(1)}(\sigma_1 \pm i)$, $G_t^{(2)}(\sigma_1 \pm i)$, $t \in \Gamma$, имеют нулевые частные индексы,чем и завершается, согласно результатам [20],[21] доказательство нётеровости оператора A. Для получения формулы индекса операторы A_1 и A_2 представляются в виде композиции двух нётеровых операторов, для одного из которых индекс в $L^p_{\beta-2/p}(D)$, $1<p<\infty,\ 0<\beta<1$ вычислен в работе [53], а индекс другого равен нулю.

Замечание 1. Если выполнены условия теоремы и $c(z)\equiv -h(z)$, $d(z)\equiv -e(z)$, то индекс оператора A равен нулю, а если к тому же $D=\{z:|z|<1\}$, то нетрудно показать, что оператор А обратим в $L^p_{\beta-2/p}(D)$.

Далее будем предполагать,что $\lambda(0)=\overline{a(0)}c(0)-\overline{d(0)}b(0)=0$,

Лемма 6.2. *Если выполнено условие (6.2) и* $\lambda(0)=0$, *то оператор* A *из (6.1) представляется в виде*

$$A=T_1^{-1}\Delta_1(I-\lambda_1\frac{z}{|z|}S_1+h_1^*B_1K)(I+\beta_1\frac{\overline{z}}{|z|}\overline{S_1}K+e_1^*\overline{B_1})+V_1, \qquad (6.4)$$

а если выполнено (6.3) и $\lambda(0)=0$, *то*

$$A=T_2^{-1}h_2(I-\lambda_2\frac{z}{|z|}S_1+\delta_2^*B_1K)(\beta_2I+\frac{\overline{z}}{|z|}\overline{S_1}K+e_2^*\overline{B_2})+V_2, \qquad (6.5)$$

где V_1,V_2 *- вполне непрерывные в* $L^p_{\beta-2/p}(D)$ *операторы,* $h^*1(z)$, $e^*\jmath(z)$, $\jmath=1,2$, *- такие непрерывные в* $\overline{D}$ *функции, которые на* Γ *соответственно имеют значения:*

$$h_1^*(t)=\frac{h_1-\lambda_1\beta_1(\Delta_1+\overline{e_1})}{\Delta_1+\overline{e_1}-\overline{\lambda}_1\overline{\beta}_1h_1},\ e_1^*=\frac{e_1-\lambda_1\beta_1\overline{h_1}}{\Delta_1},$$

$$h_2^*(t)=\frac{h_2-\lambda_2\beta_2(\Delta_2+\overline{e_2})}{\Delta_2+\overline{e_2}-\overline{\lambda}_2\overline{\beta}_2h_2},\ e_2^*=\frac{e_2-\lambda_2\beta_2\overline{h_2}}{\Delta_2}.$$

Теперь с учётом известных фактов общей теории линейных операторов для получения условий нётеровости оператора A из (1) в $L^p_{\beta-2/p}(D)$ и формулы для его индекса достаточно применить к операторам $I+\beta_1\frac{\overline{z}}{|z|}\overline{S_1}K+e_1^*\overline{B_1}$ $\beta_2I+\frac{\overline{z}}{|z|}\overline{S_1}K+\nu_2^*\overline{B_1}$ результаты работы [53].

Пусть $\Lambda = |\frac{d(0)}{a(0)}|$, если $a(0) \neq 0$, равно $|\frac{c(0)}{b(0)}|$, если $b(0) \neq 0$, и $\Lambda =\propto$, если $a(0) = b(0) = 0$. Через $\varkappa_\beta(\Lambda)$ обозначим индекс нётерового оператора $I + \Lambda(\frac{z}{|z|})^n SK$ (т.е. при $\Lambda \neq 1$, который вычислен в работе [47] (см. также [53]).

Теорема 6.1. *Пусть в (6.1)* $\lambda(0) = 0$. *Если* $\Lambda \neq 1$ *и выполняется одно из двух исключающих друг друга условий (6.2) и (6.3), то оператор* A *из (6.1) нётеров в* $L^p_{\beta-2/p}(D)$, $1 < p < \infty,\ 0 < \beta < 1$, *причем, если выполнено условие (6.2), то индекс оператора* A

$$\varkappa = 2Ind_\Gamma\{\Delta_1(t) + \nu_1(t) - \lambda_1(t)\beta_1(t)\overline{\delta_1(t)}\} - \varkappa_\beta(\Lambda),$$

а если выполнено условие (6.3), то

$$\varkappa = 2Ind_\Gamma\{\nu_2(t) + \beta_2(t)(\Delta_2(t) - \lambda_2(t)\overline{{}_2(t)})\} - \varkappa_\beta(\Lambda).$$

Замечание 2. Указанные в теореме 6.1 условия нётеровости оператора A из (1) (кроме условия $\lambda(0) = 0$) в $L^p_{\beta-2/p}(D)$ являются необходимыми. Кроме того, изложенные выше результаты сохраняются, если вместо непрерывности $\nu(z), \delta(z)$ в D предположить лишь, что они являются измеримыми ограниченными функциями и имеют на Γ равномерно достигаемые предельные значения, образующие соответственно непрерывные функции $\nu(t), \delta(t)$.

Замечание 3. По указанной схеме изучается также оператор

$$A \equiv a(z)I + b(z)K + c(z)\frac{z}{|z|}S_1 + d(z)\frac{\overline{z}}{|z|}S_1K + e(z)B_1 + h(z)B_1K.$$

Заключение

Таким образом, в диссертационной работе найдены:

- эффективные необходимые и достаточные условия нётеровости и получена формула для подсчёта индекса для одного нового класса двумерных сингулярных интегральных операторов с нечётной характеристикой по ограниченной области в лебеговых пространствах с весом;

- получены необходимые и достаточные условия нётеровости, а также даны формулы для подсчета индекса оператора для некоторых шестикомпонентных классов двумерных сингулярных интегральных операторов с нечётной характеристикой по ограниченной области в лебеговых пространствах с весом;

- получены необходимые и достаточные условия нётеровости и формула для подсчёта индекса, для одного модельного двумерного сингулярного интегрального уравнения с нечётной характеристикой и с разрывным коэффициентом путем перехода к бесконечной системы интегральных уравнений с ядром Коши и с ядрами однородными степени -1;

- доказана теорема разрешимости одного класса двумерных сингулярных интегральных операторов с нечётной характеристикой и разрывным коэффициентом и получена формула для подсчёта индекса.

Эти результаты могут найти дальнейшие приложения при исследовании разрешимости краевых задач для эллиптических уравнений в частных производных в ограниченных областях.

Список литературы

[1] Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения /С.Г. Михлин// М.: Физматгиз. 1962. 254 с.

[2] Calderon A., Zigmund A.On the existense of certain singular integrals /A. Calderon, A. Zigmund// Acta math.-1952. -v.88. -№1. p. 85-139.

[3] Calderon A., Zigmund A. On singular integrals /A. Calderon, A. Zigmund// American j. math. -1956. -78.-p. 289-309.

[4] Zigmund A. On singular integrals /A. Zigmund// Rend. math. eapplic. -1957.-v. 5-16. -fass 3-4.-p. 468-505.

[5] Stein E.M. Note on singular integral /M.E. Stein// Proc. Amer. Math. Soc. -1957. -8, №2. p. 250-254.

[6] Векуа И.Н. Обобщённые аналитические функции /И.Н. Векуа// М.: Физматгиз, 1959, 672 с.

[7] Альфорс Л. Лекции по квазиконформным отображениям /Л. Альфорс// М.: Мир. 1969.

[8] Шиффер М. Экстремальные проблемы и вариационные методы в конфрмном отображении /М. Шиффер// В кн.: Международный математический конгресс в Эдинберге (обзорные доклады). М.: Физматгиз. -1962, с. 193-218.

[9] Боярский Б.В. Исследования по уравнениям эллиптического типа на плоскости и граничным задачам теории функций /Б.В.Боярский// Дисс. докт. физ.-мат. наук. М. 1960.

[10] Джураев А.Д. Об одном методе исследования сингулярных интегральных уравнений по ограниченной плоской области /А.Д.Джураев// ДАН СССР. 1971, т. 197, №6, -с.1251-1254.

[11] Джураев А.Д. Труды симпозиума по механике сплошной среды и родственным проблемам анализа /А.Д. Джураев // т. 2, - Тбилиси, 1972 -с.104-118.

[12] Джураев А.Д. Метод сингулярных интегральных уравнений /А.Д.Джураев// М.: Наука, 1997, 415 с.

[13] Монахов В.Н. Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений /В.Н. Монахов// Новосибирск: Наука. 1977, 424 с.

[14] Комяк И.И. Общее решение одного двумерного сингулярного интегрального уравнения /И.И.Комяк// Докл. АН БСССР.-1977, т. 21, №2, с. 1074-1077.

[15] Комяк И.И. Об условиях нётеровости и формуле индекса одного класса сингулярных интегральных уравнений /И.И.Комяк// Докл. АН БССР, 1978, т.22, №6, с. 488-491.

[16] Комяк И.И. Об одном двумерном сингулярном интегральном уравнении /И.И.Комяк// ДАН СССР.- 1980, т.250. №6, с. 1307-1310.

[17] Василевский Н.Л. Об алгебре, порожденной двумерными интегральными операторами с ядром Бергмана и кусочно-непрерывными коэффициентами /Н.Л. Василевский // ДАН СССР.-1983.-т.271, №5.-с. 1041-1044.

[18] Василевский Н.Л. Банаховы алгебры, порожденные двумерными интегральными операторами с ядром Бергмана и кусочно-

непрерывными коэффициентами I /Н.Л.Василевский// Изв. ВУЗов Матем.-1986, №2,-с. 12-21.

[19] Василевский Н.Л. Банаховы алгебры, порожденные двумерными интегральными операторами с ядром Бергмана и кусочно-непрерывными коэффициентами II./Н.Л.Василевский// Изв. ВУЗов Матем.-1986, №3,-с. 33-38.

[20] Duduchava R. On multidimensional singular integral operators. I: the half-spase case /R.Duduchava// J. of operator theory. 1984. v. 11, p. 41-76.

[21] Duduchava R. On multidimensional singular integral operators. II: the case of compact manifulds /R.Duduchava// J. of operator theory. 1984. v. 11, p. 199- 214.

[22] Джангибеков Г. О некоторых двумерных сингулярных интегральных операторах /Г. Джангибеков// Матем. заметки, 1989, т. 46, №46, с. 91-93.

[23] Джангибеков Г. О нётеровости и индексе некоторых двумерных сингулярных интегральных уравнений с разрывными коэффициентами /Г. Джангибеков// Изв. ВУЗов. матем. 1992, №9, с. 25-37.

[24] Джангибеков Г. Об одном классе двумерных сингулярных интегральных операторов и его приложениях к краевым задачам для эллиптических систем уравнений на плоскости /Г. Джангибеков// Док. РАН, 1993, т. 330, №4, с. 415-417.

[25] Бойматов К.Х., Джангибеков Г. Об одном сингулярном интегральном операторе /К.Х.Бойматов, Г.Джангибеков// Успехи математических наук, 1988, .т.43, вып.8, с. 171-172.

[26] Чоршанбиева М.Ч. - Некоторые двумерные сингулярные интегральные оператры с чётными характеристиками. /М.Ч.Чоршанбиева// Дисс. канд. физ.-мат. наук. М.: 2017.

[27] Зарифбеков М.Ш. - Некоторые классы двумерных интегральных операторов с подвижными и неподвижными особенностиями и их приложжения к краевым задачам для эллиптических систем с сингулярными коэффициентами. /М.Ш. Зарифбеков// Дисс. канд. физ.-мат. наук. М.:2004.

[28] Хучаназарова Г - Некоторые двумерные сингулярные интегральные уравнения и их прложения к дифференциалные уравнения. /Г. Худжаназарова// Дисс. канд. физ.-мат. наук. М.:2004.

[29] Одинабеков Д.М. - Некоторые классы двумерных интегральных операторов с несколькими фиксированными особенностями и их приложения к эллиптичиским системам дифференциалных уравнений. /Д.М. Одинабеков// Дисс. канд.физ.-мат. наук. М.:2007.

[30] Джангибеков Г. О некоторых двумерных сингулярных интегральных операторах по ограниченной области /Г.Джангибеков// Док. РАН, 2002, т. 383, №1, с. 7-9.

[31] Крейн С.Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве /С.Г.Крейн// М. 1971, 103 с.

[32] Гахов Ф.Д. Краевые задачи /Ф.Д. Гахов// М.: Физ.-мат. лит., 1958, -545 с.

[33] Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике /Н.И.Мусхелишвили// М.: Физ.-мат., 1968,-513 с.

[34] Векуа Н.П. Системы сингулярных интегральных уравнений /Н.П. Векуа// М.: Н, 1970, -379 с.

[35] Симоненко И.Б. Новый общий метод исследования линейных операторных уравнений типа сингулярных интегральных уравнений. I, II. /И.Б.Симоненко// Изв. АН СССР, сер. матем. 1965, т. 29, №3,4 с. 567-580, 757-782.

[36] Симоненко И.Б., Чин Нгок Минь. Локальный метод в теории одномерных сингулярных интегральных уравнений с кусочно-непрерывными коэффициентами. Нетеровость /И.Б.Симоненко// Изво Ростов. унив. 1986, 58 с.

[37] Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторах /И.Ц.Гохберг, М.Г.Крейн// Успехи матем. наук.-1957,т. 12, -№2, с. 44-118.

[38] Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений /И.С.Градштейн, И.М.Рыжик// М.: Физматгиз, 1963.-1108 с.

[39] Джангибеков Г. Об условиях нётеровости и индексе некоторых двумерных сингулярных интегральных операторов /Г.Джангибеков// ДАН СССР, 1991, т. 319, №4, с. 811-815.

[40] Джангибеков Г. О нетеровости и индексе некоторых двумерных сингулярных интегральных операторов по ограниченной области / Г.Джангибеков // ДАН России, - 2004. - т.394. - №6. - С. 811-815.

[41] Михайлов Л.Г. О некоторых двумерных интегральных уравнениях с однородными ядрами /Л.Г.Михайлов// ДАН СССР, -1970. т. 192,№2, -с. 272-275.

[42] Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения /Н.Н.Лебедев// - М.: Физматгиз, 1963, -359 с.

[43] Гобсон Е.В. Теория сферических и эллипсоидальных функций /Е.В.Гобсон// -М.: Иностр. литер., 1952, 476 с.

[44] Дудучава Р.В. Интегральные уравнения свертки с разрывными предсимволами, сингулярные интегральные уравнения с неподвижными особенностями и их приложения к задачам механики /Р.В.Дудучава// Тбилиси: Мецниереба, 1979, 133 с.

[45] Михайлов Л.Г. Интегральные уравнения с ядром, однородным степени -1 /Л.Г.Михайлов// Душанбе: Дониш, 1966, 47 с.

[46] Бильман Б.М., Джангибеков Г. Об условиях нётеровости и индексе некоторых двумерных сингулярных интегральных уравнений с разрывными коэффициентами по ограниченной односвязной области /Б.М. Бильман, Г. Джангибеков// ДАН СССР, 1986, т. 288, №4, с. 792-797.

[47] Джангибеков Г. /Г. Джангибеков// Докл. АН ТаджССР, 1977, т.20, №5, с. 3-7.

[48] Михайлов Л.Г. Об одном интегральном уравнений теории обобщенных аналитических функций в сингулярном случае /Л.Г. Михайлов// ДАН СССР, -1970. т. 190. №3, с. 531-534.

[49] Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного /Г.М.Голузин// М.: Наука, 1966.-626 с.

[50] Джангибеков Г. - Об одном классе двумерных сингулярных уравнений содержащих комплексное сопражение искомой функции /Г.Джангибеков// Докл. АН ТаджССР, 1981, т. 24, №2, с. 80-85.

Работы автора по теме диссертации

Статьи, опубликованные в рецензируемых журналах из перечня ВАК при Президенте РТ и ВАК РФ:

[51] Козиев Г. Об одном двумерном сингулярном интегральном операторе с нечётной характеристикой /Г.Джангибеков, Г.Козиев// ДАН РТ, 2015, т.58, №10, с. 886-893.

[52] Козиев Г. Об одном модельном сингулярном интегральном уравнении с нечётной характеристикой /Л.Г.Михайлов, Г.Джангибеков, Г. Козиев// ДАН РТ, 2015, т.58, №11, с. 963-969.

[53] Козиев Г. Об условиях нётеровости и индексе одного класса двумерных сингулярных интегральных уравнений с нечётной характеристикой и разрывными коэффициентами /Г.Джангибеков, Г. Козиев// ДАН РТ, 2017, т.60, №10, с. 482-489.

[54] Козиев Г. Об одном классе двумерных сингулярных интегралных уравнений с нечётной характеристикой /Г.Джангибеков, Г.Козиев// Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук 2017, №1-5, с. 212-216.

[55] Козиев Г. О нётеровости и индексе шестикомпонентного двумерного сингулярного интегрального оператора с нечётной характеристикой и разрывными коэффициентами /Г.Козиев// Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук 2019, №1, с. 18-21.

Работы в других изданиях:

[56] Козиев Г. О Нётеровости и индексе одного класса двумерных сингулярных интегральных опeратров /Г.Джангибеков, Г.М.Козиев// "Современные проблемы теории функций и дифференциальных уравнений". Межд.научной конф., посвященной 85-летию академика АН РТ Л.Г.Михайлова (Душанбе, 17-18 июня 2013 г.) с.41-42;

[57] Козиев Г.М. Об одном сингулярном интегральном уравнении с нечётной характеристикой /Г.Джангибеков, Г.М.Козиев// Межд.научной конф.,посвящённой 20-летию Конституции РТ. -Худжанд 2 (29) 2014, с.152-154.

[58] Козиев Г.М. Об одном двумерном сингулярном интегральном опeратре с нечётной характеристикой /Г.Джангибеков, Г.М.Козиев// Межд.научной конф., посвященной 80-летию члена-кореспондента АН РТ, д.ф.м.н, профессора В.Я.Стеценко (Душанбе, 27-28 апреля 2015 г.) с.92-94

[59] Козиев Г.М. Об одном модельном сингулярном интегральном уравнении с нечётной характеристикой /Л.Г.Михайлов, Г.Джангибеков, Г.М.Козиев// Межд.научной конф., ”Современные проблемы математики и ее приложения” (Душанбе, Филиал Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова,2016 г.) с.43-45;

[60] Козиев Г. Об условиях нётеровости и индексе одного класса двумерных сингулярных интегральных уравнений с нечётной характеристикой и разрывными коэффициентами /Г.Джангибеков, Г.М.Козиев// Межд.научной конф., посвященной 90-летию академика АН РТ, лауреата государственной премии имени Абуали ибн Сино Л.Г.Михайлова (Душанбе, 27-28 февраля 2018 г.) с.58-60;