ҶУМҲУРИИ ТОҶИКИСТОН
ДОНИШГОҲИ МИЛЛИИ ТОҶИКИСТОН

УДК-517.968.2

Бо ҳуқуқи дастхат

Файззода Кишвар Шохпулод

ҲАЛШАВАНДАГИИ МАСЪАЛАҲОИ КАНОРИИ ДИРИХЛЕ ВА НЕЙМАН БАРОИ СИСТЕМАИ МУОДИЛАҲОИ УМУМИИ ЭЛЛИПТИКИИ ТАРТИБИ ШАШ ДАР ҲАМВОРӢ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т И

диссертатсия барои дарёфти дараҷаи илмии
доктори фалсафа (PhD)–доктор аз рӯи ихтисоси
6D060100–МАТЕМАТИКА: 6D060102–Муодилаҳои
дифференсиалӣ, системаҳои динамикӣ
ва идоракунии оптималӣ

Д У Ш А Н Б Е – 2 0 2 5

Рисола дар кафедраи таҳлили функционалӣ ва муодилаҳои дифференсиалии Донишгоҳи миллии Тоҷикистон иҷро шудааст

Роҳбари илмӣ: **Ҷангибеков Гулхоҷа**
доктори илмҳои физикаю математика,
профессор

Муқаризони расмӣ: **Сафаров Ҷумабой**
доктори илмҳои физикаю математика,
профессори кафедраи таҳлили
математикӣ ва муодилаҳои
дифференсиалии Донишгоҳи
давлатии Бохтар ба номи Н.Хусрава

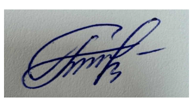
Саидов Бахтиёр Бобокалонович
номзади илмҳои физикаю математика,
дотсенти кафедраи математикаи олии
Донишгоҳи давлатии молия ва
иқтисоди Тоҷикистон

Муассисаи пешбар: Донишгоҳи байналмиллалии сайёҳӣ ва соҳибкории Тоҷикистон

Дифои диссертатсия *02 апрели с.2025 дар соати 14:00* дар ҷаласаи Шурои Диссертатсионии 6D КОА-011 дар назди Донишгоҳи миллии Тоҷикистон аз рӯи нишонаи: 734027, ш. Душанбе, кучаи Буни-Хисорак, факултети механикаю математика, бинои 17, утоқи 216, баргузор мегардад.

Бо диссертатсия дар китобхонаи маркази илмии Донишгоҳи миллии Тоҷикистон ва тавассути http://www.tnu.tj шинос шудан мумкин аст.

Автореферат санаи "___" ____________ соли 2025 аз рӯи феҳристи пешниҳодгардида ирсол карда шудааст.

Котиби илмии Шурои диссертатсионӣ,
номзади имҳои физикаю математика  **А. Ғаффоров**

ТАВСИФНОМАИ УМУМИИ ТАҲҚИҚОТ

Мубрамии мавзӯи таҳқиқот. Дар корҳои И.Н. Векуа[1,2,3] усули нави таҳқиқи масъалаҳои гуногуни сарҳадӣ барои системаи муодилаҳои дифференсиалии хаттӣ бо ҳосилаҳои хусусии тартиби $2m$ бо тағйирёбандаи новобастаи $z = x + iy$ ва функсияи номаълуми $\omega(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$

$$\sum_{n=-m}^{m} a_n(z) \frac{\partial^{2m}\omega}{\partial \overline{z}^{m+n} \partial z^{m-n}} + b_n(z) \frac{\partial^{2m}\overline{\omega}}{\partial \overline{z}^{m-n} \partial z^{n+m}} + T\omega = g(z), \tag{1}$$

пешниҳод гардида буд, ки дар он T – оператори дифференсиалии тартиби поёнӣ мебошад.

Усул аз он иборат аст, ки тавассути тасвири умумии ҳалҳои масъалаҳои таҳқиқшаванда аз масъалаи гузошташуда ба таври эквивалентӣ ба муодилаҳои интегралии сингулярӣ аз рӯи соҳаи маҳдуд гузариш намуда, баъдан ҳалшавандагии ин муодилаҳои интегралӣ таҳқиқ карда мешаванд.

Омӯзиши минбаъдаи назарияи масъалаҳои сарҳадии хаттӣ ва ғайрихаттии муодилаҳои эллиптикӣ дар корҳои илмии шогирдони бевоситаи И. Н Векуа: Б. В. Боярский[4,5,6], А. И. Волперт[7,8,9], В. С. Виноградов[10 ,11], П. С. Дибов[12,13], А. Ҷ. Ҷӯраев[14] давом ёфтанд.

---

[1] Векуа И.Н. Обобщённые аналитические функции. М.: Физматгиз, 1959, 672 с.

[2] Векуа И.Н. Новые методы решения эллиптических уравнений М.: – Гостехиздат. – 1948. – 296 с.

[3] Векуа И.Н. Задача приведения к каноническому виду дифференциальных форм эллиптического типа и обобщенная система Коши– Римана ДАН СССР. – 1955. – т.100. – №2. – с.197 – 200.

[4] Боярский Б.В. Исследования по уравнениям эллиптического типа на плоскости и граничным задачам теории функций Дисс. докт. физ.- мат. наук. М.: 1960

[5] Боярский Б.В. Общее представление решений эллиптической системы 2n уравнений на плоскости Докл. АН СССР – 1958. – т. 122. – No4. с. 543 – 546

[6] Боярский Б.В. Некоторые граничные задачи для системы уравнений эллиптического типа ДАН СССР– 1959. – т.124. – №1. с.1 – 4.

[7] А.И. Вольперт Об индексе задачи Дирихле Известия Высших учебных заведений. МАТЕМАТИКА. – 1960. – №5. – с.40–44.

[8] А.И. Вольперт Исследование по теории граничных задач для эллиптич. систем уравнений с двумя независимыми переменными Докторская диссертация. – М. – 1960

[9] А.И. Вольперт Об индексе и нормальной разрешимости гранич ных задач для эллиптич. систем дифференц. уравнений Тр. ММО. – 1961. – том 10.– с.41–87.

[10] В.С. Виноградов Об ограниченностирешений краевых задач для линейных эллиптических систем уравнений на плоскости ДАН – 1958 – т. 121. – №3.– с.399–402.

[11] В.С. Виноградов Об одной задаче для квазилинейных систем уравнений на плоскости ДАН. – 1958

[12] П.С. Дывов Разрешимость уравнения эллиптического типа 4-го порядка на плоскости в классе функций с ограничением на рост в бесконечности ДАН – 1971, т. 199, №4, с. 754–757.

[13] П. С. Дибов О разрешимости первой краевой задачи для дифференц. уравнения эллиптич. типа шестого порядка – 1972, т. 202, №6, с. 1251–1253.

[14] Джураев А.Д. Метод сингулярных интегральных уравнений. М.: Наука, 1997, 415

Зикр бояд намуд, ки дар ҳамаи корҳои муаллифони номбаршуда системаи (1) фақат дар мавриди қавӣ эллиптикӣ будани оператори дифференсиалӣ мавриди омӯзиш қарор гирифта буданд. Масъалан Б. В. Боярский[4] тавассути усули инъикосҳои фишурдашаванда фредголмовӣ будани масъалаҳои Дирихле ва Нейманро барои системаи (1) - и тартиби ду исбот намудааст. Айнан бо ҳамин шартҳо П. С. Дибов[12,13] барои системаҳои тартиби чор ва шаш ва А. Ҷ. Ҷӯраев[14] дар монография системаи тартиби $2m$ – ро мавриди омӯзиш қарор додаанд.

Бо назардошти гуфтаҳои болоӣ аён мегардад, ки таҳқиқи назарияи нётеровӣ будан ва ҳосил намудани формула барои ҳисоб намудани индекси масъалаҳои Дирихле ва Неймани системаи муодилаҳои эллиптикии (1) аз рӯи соҳаи маҳдуди ҳамворӣ масъалаи мубрам мебошад. Дар ин раванд А. И. Волперт кори аввалини А. И. Волперт[7] - ро ба иҷро расонидааст, ки дар мисоли системаи эллиптикии тартиби ду

$$\lambda z^n \frac{\partial^2 \omega}{\partial \overline{z} \partial z} + \frac{\partial^2 \overline{\omega}}{\partial \overline{z}^2} = 0,\ |\lambda| < 1,\ |z| \leq 1,\ n - \text{ададӣ бутун}, \qquad (2)$$

номбурда нишон додааст, ки индекси масъалаи Дирихле барои системаи эллиптикии (2) ғайринулӣ буда, бар замми он қимати ихтиёрии ҷуфт дорад ва ба $2n$ баробар мебошад.

Дараҷаи таҳқиқи мавзӯи илмӣ Дар солҳои охир Г. Ҷангибеков[16,17,18] шартҳои зарурӣ ва кифоягии эффективноки нётеровӣ будан ва формулаҳои ҳисоб намудани индекси як қатор синфҳои операторҳои интегралии сингулярии дученакаро аз рӯи соҳаи охирнок ҳосил намуд.

Истифода намудани ин натиҷаҳо аз он ҷумла имконият доданд, ки

[4] Боярский Б.В. Исследования по уравнениям эллиптического типа на плоскости и граничным задачам теории функций Дисс. докт. физ.- мат. наук. М.: 1960

[12] П.С. Дывов Разрешимость уравнения эллиптического типа 4-го порядка на плоскости в классе функций с ограничением на рост в бесконечности ДАН – 1971, т. 199, №4, с. 754–757.

[13] П.С. Дывов О разрешимости первой краевой задачи для дифференц. уравнения эллиптич. типа шестого порядка – 1972, т. 202, є6, с. 1251–1253.

[14] Джураев А.Д. Метод сингулярных интегральных уравнений. М.: Наука, 1997, 415

[7] А.И. Вольперт Об индексе задачи Дирихле Известия Высших учебных заведений. МАТЕМАТИКА. – 1960. – №5. – с.40–44.

[16] Джангибеков Г. О нетеровости и индексе одного класса двумерных сингулярных интегральных уравнений с разрывными коэффициентами ДАН СССР. – 1988. – т.300, №2, с.272 – 276.

[17] Джангибеков Г.О нетеровости и индексе некоторых двумерных сингулярных интегральных уравнений с разрывными коэффициентами Изв. ВУЗов. матем. 1992, №9, с. 25–37.

[18] Jangibekov G. On a class of two-dimensional singular integral operators and its applications to boundary value problems for elliptic systems of equations in the pline Prosidings of the second ISAAC Congress. – volum 2. – 2000. – p.1421 – 1430.

дар корҳои Г. Ҷангибеков[19,20,21,22] ва шогирдонаш: Х. Г. Хуҷаназарова,Ҷ. Одинабеков, М. Зарифбеков ва Э. Д. Бобоев назарияи ҳалшавандагии масъалаҳои Дирихле ва Нейман барои системаи муодилаҳои эллиптикии тартибҳои ду ва чори (1), ҳосил карда шуда, формулаҳои ҳисоб намудани индекси ин масъалаҳо ба воситаи коэффисиентҳои система ҳисоб карда шаванд. Оиди дигар натиҷаҳои ба мавзӯи рисола наздикро аз корҳои [50]–[81] дарёфт намудан мумкин аст.

Кори диссертатсионии мазкур ба таҳқиқи хосиятҳои нётеровӣ будани масъалаҳои Дирихле ва Неймани системаи муодилаҳои дифференсиалии умумии эллиптикии аз ду тағийрёбандаи тартиби шаш бо коэффисиентҳои бефосила ва дар як нуқта канишнок дар ҳамворӣ, тариқи гузаштан ба муодилаҳои интегралии сингулярӣ аз рӯи соҳаи маҳдуд бахшида шудааст.

Мақсади таҳқиқот. Мақсади асосии кори диссертатсионӣ аз таҳқиқи ҳалшавандагии масъалаҳои Дирихле ва Нейман барои системаи муодилаҳои дифференсиалии умумии эллиптикии аз ду тағийрёбанда вобастаи тартиби шаш бо коэффисиентҳои бефосила ва дар як нуқта канишнок дар ҳамворӣ иборат аст.

Навгонии илмии тадқикот. Дар кори диссертатсионӣ натиҷаҳои илмии зерин ба даст оварда шудаанд:

- шартҳои зарурӣ ва кифоягии нётеровӣ будани масъалаҳои Дирихле ва Нейман барои як системаи эллиптикии тартиби шаши вобаста аз ду тағйирёбанда бо коэффитсентҳои бефосила дар ҳамворӣ **исбот карда шуда** формулаи ҳисоб намудани индекси масъалаҳо ёфта шудааст;
- барои баъзе синфҳои системаи эллиптикии тартиби шаши вобаста аз ду тағйирёбанда бо коэффитсентҳои бефосила дар ҳамворӣ теоремаҳо оиди шартҳои зарурӣ ва кифоягии нетеровӣ будан ва формула барои ҳисоб намудани индекс **исбот карда шудааст**;
- шартҳои эффективноки зарурӣ ва кифоягии нётеровӣ будан ва формула барои ҳисоб намудани индекси системаи умумии эллиптикии тар-

[19] Джангибеков Г. Об одном классе двумерных сингулярных интегральных операторов и его приложениях к краевым задачам для эллиптических систем уравнений на плоскости Докл. РАН. – 1993. – т. 330. – №4. – с. 415 – 417.

[20] Джангибеков Г.,Худжаназарова Г. О нётеровости и индексе некоторых двумерных сингулярных интегральных операторов по ограниченной области ДАН России. –2004. – т. 396. – №4. – с. 449 – 454.

[21] Джангибеков Г., Одинабеков Д.М. К теории Нётера двумерных сингулярных операторов и её приложения к краевым задачам для эллиптических систем уравнений четвертого порядка Вестн. СамУ. Естеств. сер.,– 2020. т. 26. №1. с. 7–13.

[22] Джангибеков Г.,Бобоев Э.Д. Задача Дирихле ва Неймана для эллиптических систем дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентавми Учёные записки – 2021. –т. 56. №1. – с. 8–11.

тиби шаши аз ду функсияҳои номаълуми ду тағйирёбанданок бо коэффитсиентҳои бефосила **ёфта шудааст**;

- теоремаҳои ҳалшавандагии масъалаҳои Дирихле ва Нейман барои баъзе синфҳои системаҳои эллиптикии тартиби шаш бо коэффитсентҳои канишнок **исбот карда шуда** формулаҳо барои ҳисоб намудани индекси масъалаҳо ҳосил карда шудааст;

Аҳамияти назариявӣ ва илмию амалии таҳқиқот. Натиҷаҳои дар диссертатсия ба даст овардашуда, асосан, характери назариявӣ доранд. Онҳо метавонанд дар раванди таҳқиқотҳои илмии оянда дар назарияи ҳалшавандагии масъалаҳои сарҳадӣ барои муодилаҳои дифференсиалии эллиптикии тартиби олӣ истифода шаванд.

Аҳамияти амалии кор ба он алоқаманд аст, ки бисёр масъалаҳои амалии механика ва дигар бахшҳои физика бо ёрии масъалаҳои канорӣ барои муодилаҳои дифферентсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ ҳал карда мешаванд.

Методҳои таҳқиқот. Методҳое, ки дар диссертатсия истифода шудаанд аз методҳои назарияи операторҳои интегралии сингулярӣ аз рӯи соҳаи маҳдуд, методҳои назарияи функсияҳои тағйирёбандааш комплексӣ ва методи факторизатсияи матриса-функциҳо иборат мебошанд.

Натиҷаҳое, ки ба ҳимоя бароварда мешаванд:

- теоремаҳо оиди шартҳои зарурӣ ва кифоягии нётеровӣ будани масъалаҳои Дирихле ва Нейман барои як системаи муодилаҳои эллиптикии тартиби шаши вобаста аз ду тағйирёбанда бо коэффитсентҳои бефосила дар ҳамворӣ ва формулаи ҳисоб намудани индекси масъалаҳо;

- тасдиқотҳо оиди синфҳои гомотопии муодилаҳои эллиптикии тартиби шаши вобаста аз ду тағйирёбанда;

- теоремаҳо оиди шартҳои зарурӣ ва кифоягии нётеровӣ будан ва формула барои ҳисоб намудани индекс оиди баъзе синфҳои системаи эллиптикии тартиби шаши вобаста аз ду тағйирёбанда бо коэффитсентҳои бефосила дар ҳамворӣ;

- теоремаҳо оиди шартҳои эффективноки зарурӣ ва кифоягии нётеровӣ будан ва формула барои ҳисоб намудани индекси системаи умумии эллиптикии тартиби шаши аз ду функсияҳои номаълуми ду тағйирёбанданок бо коэффитсиентҳои бефосила;

- теоремаҳои ҳалшавандагии масъалаҳои Дирихле ва Нейман барои баъзе синфҳои системаҳои эллиптикии тартиби шаш бо коэффитсиентҳои канишнок ва формулаҳо барои ҳисоб намудани индекси масъалаҳо.

Дараҷаҳаи эътимоднокии натиҷаҳо. Эътимоднокии натиҷаҳои илмии кор бо исботҳои муфассал математикии ҳамаи тасдиқоти дар диссертатсия овардашуда асоснок карда мешаванд, ки бо тасдиқоти маълуми назарияи муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ, таҳлили функсионалӣ ва назарияи функсияҳои комплексӣ ҳамоҳанг мебошанд.

Мутобиқати диссертатсия ба шиносномаи ихтисоси илмӣ (ба формула ва соҳаи тадқиқот). Кори диссертатсионӣ аз рӯи ихтисоси 6D060100–МАТЕМАТИКА: 6D060102-муодилаҳои дифференсиалӣ, системаҳои динамикӣ ва идоракунии оптималӣ иҷро карда шудааст.

Саҳми шахсии довталаби дараҷаи илмӣ дар таҳқиқот. Масъалаҳои таҳқиқот аз тарафи роҳбари илмӣ пешниҳод гардида, методҳои ҳалли онҳо интихоб гардидаанд. Инчунин, дар рафти иҷрои кори диссертатсионӣ роҳбари илмӣ ба муаллиф ёрии машваратӣ расонидааст. Натиҷаҳои асосии кори диссертатсиониро, ки дар банди Навгонии илмӣ номбар шудааст шахсан муаллиф ҳосил кардааст.

Натиҷаҳои диссертатсия дар конференсияҳои зерин муҳокима гардидаанд:

Тасвиб ва амалисозии натиҷаҳои диссертатсия. Натиҷаҳои асаии кори диссертатсионӣ дар семинари илмии кафедраи таҳлили функсионалӣ ва муодилаҳои дифференциалии Донишгоҳи миллии Тоҷикистон муҳокима ва баррасӣ гардидаанд. национального университета.

Натиҷаҳои диссертатсия дар конференсияҳои зерин муҳокима гардидаанд:

- конференсияи байналхалқии илмии "Муаммоҳои актуалии математикаи муосир" бахшида ба 50-солагии Институти математикаи ба номи А. Ҷӯраеви АМИТ, ш. Душанбе, 30-31 маи 2023 г.;

- конференсияи байналхалқии илмии "Муаммоҳои актуалии математикаи муосир" бахшида ба 75-солагии ДМТ, 20-солагии рушди илмҳои дақиқ, табиатшиносӣ ва риёзӣ ва 85-солагии акдемики АМИТ Раҷабов Н. ш. Душанбе, 5-октябри соли 2023.;

- конференсияи байналхалқии илмӣ бахшида ба 20-солагии рушди илмҳои дақиқ, табиатшиносӣ ва риёзӣ. Данғара, 30 апрели соли 2024 г.

Интишорот аз рӯи мавзӯи диссертатсия. Натиҷаҳои асосии кори муаллиф аз рӯи диссертатсия дар 9 кори илмӣ, аз он ҷумла 5 мақола дар нашриёҳои тақризшаванда, ки дар рӯйхати амалкунандаи КОА-назди Президенти Ҷумҳурии Тоҷикистон оварда шудаанд. Дар корҳое, ки дар ҳаммуаллифӣ интишор ёфтаанд, ба роҳбари илмӣ гузориши масъала ва интихоби усули исботи натиҷаҳо ва ба диссертант исботи натиҷаҳои асосӣ таалуқ доранд.

Сохтор ва ҳаҷми диссертатсия. Диссертатсия аз муқаддима, тавсифи умумии кор, ду боб, муҳокимаи натиҷаи бадастомада, хулосаҳо, рӯйхати адабиёти истифодашуда иборат аз 89 номгӯй буда, хамагӣ 113 саҳифаи чопи мошиниро дар бар мегирад, ки дар LATEX ҳуруфчинӣ шудааст. Барои осонӣ дар диссертатсия рақамгузории якхелаи теоремаҳо, леммаҳо ва формулаҳо истифода мешавад. Онҳо рақамгузории сегона доранд, ки дар он рақами аввал рақами боб, рақами дуюм рақами параграф ва рақами сеюм ба шумораи тартибии теоремаҳо, леммаҳо ё формулаҳо дар ин параграф мебошад.

МАЗМУНИ МУХТАСАРИ ТАДҚИҚОТ

Дар муқаддима шарҳи мухтасари таърихии натиҷаҳои мавҷудбудаи таалуқи мавзӯъи диссертатсионӣ оварда шуда, зарурати давом додани тадқиқоти мавзӯъ асоснок карда шуда, мазмуни мухтасари натиҷаҳои ба даст овардашудаи диссертатсия дарҷ гардидааст.

Параграфи якуми боби як характери ёрирасонӣ дошта, дар он фазоҳои функсионалии истифодашуда, мафҳумҳо ва фактҳои асосии назарияи нётеровӣ будани операторҳо дар фазоҳои банахӣ оварда шудаанд.

Дар параграфи дуюми боби якум ҳалшавандагии масъалаҳои Дирихле ва Нейман барои системаҳои ду номаълумноки эллиптикии тартиби шаши намуди зерин

$$a(z)\frac{\partial^6\omega}{\partial\overline{z}^3\partial z^3}+b(z)\frac{\partial^6\overline{\omega}}{\partial\overline{z}^6}+\sum_{k+j=0}^{5}\left[a_{k,j}(z)\frac{\partial^{k+j}\omega}{\partial\overline{z}^k\partial z^j}+b_{k,j}(z)\frac{\partial^{k+j}\overline{\omega}}{\partial\overline{z}^k\partial z^j}\right]=g(z), \quad (3)$$

омӯхта мешавад, ки дар он $\omega(z)=u(x,y)+iv(x,y)$; коэффисиентҳои $a(z)$, $b(z)$, $a_{k,j}(z)$, $b_{k,j}(z)$ $(0\le k+j\le 5)$ дар соҳаи $\overline{D}$ бефосила, $g(z)\in L^p(D)$, $2<p<\infty$ ва

$$\frac{\partial}{\partial\overline{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

мебошанд.

Масъалаи Дирихле. *Функсияи $\omega(z)$ аз синфи $W_p^6(D)\cap C^2(\overline{D})$ ёфта шавад, ки дар дохили D муодилаи (3) ва дар сарҳади D бошад шартҳои*

$$\omega(z)\Big|_\Gamma = 0, \quad \frac{\partial\omega}{\partial n}\Big|_\Gamma = 0, \quad \frac{\partial^2\omega}{\partial n^2}\Big|_\Gamma = 0 \tag{4}$$

- ро қаноат кунад, ки дар ин ҷо $\frac{\partial\omega}{\partial n}$ - ҳосила аз рӯи равиши нормали беруна ба нуқтаҳои контури Γ- ро ифода мекунад.

Тавассути методи гузаштан ба муодилаи интегралии сингулярии дученака теоремаи зерин исбот карда шудааст:

Теоремаи 2.1. *Барои он, ки масъалаи (4) барои системаи эллиптикии (3) дар синфи $W_p^6(D)\cap C^2(\overline{D})$ $2<p<\infty$ нётеровӣ бошад, зарур ва кифоя аст, ки шартҳои зерин*

$$|a(z)| \neq |b(z)| \ \text{барои ҳамаи}\ z\in\overline{D}, \quad a(t)\neq 0 \quad \text{барои ҳамаи} \quad t\in\Gamma, \tag{5}$$

иҷро шаванд ва айни ҳол агар $|a(z)|>|b(z)|$ бошад, онгоҳ индекси масъала баробари нол аст ва агар шарти $|a(z)|<|b(z)|$ иҷро шавад, онгоҳ индекси масъала ба

$$\varkappa = -\frac{3}{\pi}\Big[\arg a(t)\Big]_\Gamma$$

баробар мешавад.

Айнан ҳамин гуна натиҷа барои масъалаи Неймани муодилаи (3) ҷой дорад.

Дар параграфи сеюми боби як ҳалшавандагии масъалаҳои Дирихле ва Нейман барои системаи ду муодилаи эллиптикии ҳашт компонентноки тартиби шаши намуди зерин омӯхта мешавад:

$$\begin{aligned} & a_0(z)\frac{\partial^6\omega}{\partial\overline{z}^3\partial z^3} + b_0(z)\frac{\partial^6\overline{\omega}}{\partial\overline{z}^3\partial z^3} + a_1(z)\frac{\partial^6\omega}{\partial\overline{z}^4\partial z^2} + b_1(z)\frac{\partial^6\overline{\omega}}{\partial z^4\partial\overline{z}^2} + \\ & + a_2(z)\frac{\partial^6\omega}{\partial\overline{z}^5\partial z} + b_2(z)\frac{\partial^6\overline{\omega}}{\partial z^5\partial\overline{z}} + a_3(z)\frac{\partial^6\omega}{\partial\overline{z}^6} + b_3(z)\frac{\partial^6\overline{\omega}}{\partial z^6} + \\ & + \sum_{k+j=0}^{5}\left[a_{k,j}(z)\frac{\partial^{k+j}\omega}{\partial\overline{z}^k\partial z^j} + b_{k,j}(z)\frac{\partial^{k+j}\overline{\omega}}{\partial\overline{z}^k\partial z^j}\right] = g(z), \end{aligned} \tag{6}$$

ки дар ин ҷо $\omega(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, коэффитсиентҳои $a_j(z)$, $b_j(z)$, $a_{k,j}$, $b_{k,j}(j,k=0,1,2)$ – функсияҳои додашудаи бефосила дар соҳаи сарбастаи $\overline{D}=D\cup\Gamma$ мебошанд ва $g(z)\in L^p(D)$, $2<p<\infty$.

Аз рӯи қисми асосии системаи (6) матритса-функсияи зеринро месозем

$$\mathcal{G}_z(\sigma) = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{3} a_n(z)\overline{\sigma}^{3+n}\sigma^{3-n} & \sum_{n=0}^{3} b_n(z)\sigma^{3+n}\overline{\sigma}^{3-n} \\ \sum_{n=0}^{3} \overline{b_n(z)}\overline{\sigma}^{3+n}\sigma^{3-n} & \sum_{n=0}^{3} \overline{a_n(z)}\sigma^{3+n}\overline{\sigma}^{3-n}, \end{pmatrix}$$

ки $z \in \overline{D}$, $\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2$ - дилхоҳ ададі комплексии ғайринулӣ мебошанд.

Эллиптикӣ будани системаи (6) маънои онро дорад, ки барои дилхоҳ нуқтаи $z \in \overline{D}$ ва ихтиёрӣ $t : |t| = 1$ нобаробарии зерин иҷро шавад $\det \mathcal{G}_z(t) \neq 0$:

$$|F(z,t)|^2| - |Q(z,t)||^2 \neq 0, \; z \in \overline{D}, \tag{7}$$

ки $F(z,t) = \sum_{n=0}^{3} a_n(z)t^n, \; Q(z,t) = \sum_{n=0}^{3} b_n(z)\overline{t}^n$ аст.

Қайд бояд намуд, ки дар корҳои П. С. Дибов[12,13] системаи умумии муодилаҳои эллиптикии тартиби шаш тариқи методи муодилаҳои интегралии сингуярӣ дида баромада шудааст, аммо нисбати системаи (6) натиҷаҳои ҳосилшуда фақат ҳолати ситемаҳои эллиптикии қавиро дар бар мегиранд, яъне ки барои муодилаҳои интегралии мувофиқи он принсипи операторҳои фушурдашаванда татбиқ мешаванд.

Маҷмӯи ҳамаи матритсаҳои полиномиалии намуди $\mathcal{G}_z(t)$, ки барои ҳамаи $z \in \overline{D}$, шарти $\det \mathcal{G}_z(t) > 0 \,(< 0)$ - ро қаноат мекунанд, бо $\mathcal{G}^+$ $(\mathcal{G}^-)$ ишора мекунем. Ду матрисаи $\mathcal{G}_z^1$, $\mathcal{G}_z^2$ аз синфи $\mathcal{G}^+$ - ро гомотопӣ меномем, агар маҷмӯи матрисаҳои полиномиалии $\mathcal{G}_z^+(\tau)$ аз $\mathcal{G}^+$ мавҷуд бошанд, ки онҳо аз параметри ҳақиқии $\tau : 0 \leq \tau \leq 1$ бефосила вобаста бошанд ва $\mathcal{G}^+(0) \equiv \mathcal{G}_z^1, \quad \mathcal{G}^+(1) \equiv \mathcal{G}_z^2$ шаванд.

Бигузор $q_1(z), \; q_2(z), \; q_3(z)$ – ҳалҳои комплексии муодилаи $F(z,t) = 0$ бошанд. Мувофиқи шарти (7) ин ҳалҳо дар сарҳади доираи воҳидӣ намехобанд, яъне модули ҳамаи онҳо нобаробари як аст. Вобаста аз миқдори нулҳои полиноми $F(z,t)$ дар дохили доираи $|t| = 1$ чор ҳолатҳои зерин имконпазир аст:

- ҳолати ν_0 - полиноми $F(z,t)$ дар дохили $|t| < 1$ ҳал надорад;
- ҳолати ν_k - полиноми $F(z,t)$ дар дохили $|t| < 1$ расо k $(k = 1,2,3)$- то ҳал дорад.

Ҳамин тавр муносибатҳои гомотопӣ $\mathcal{G}^+$- ро ба 4 синфи гомотопӣ - компонентҳои сарбастаи ν_k $(k = 0,1,2,3)$ ҷудо мекунад. Ин синфҳо системаи

[12] П.С. Дывов Разрешимость уравнения эллиптического типа 4-го порядка на плоскости в классе функций с ограничением на рост в бесконечности ДАН – 1971, т. 199, №4, с. 754–757.

[13] П.С. Дывов О разрешимости первой краевой задачи для дифференц. уравнения эллиптич. типа шестого порядка – 1972, т. 202, є6, с. 1251–1253.

пурраи маҷмӯи $\mathcal{G}^{\pm}$ - ро ташкил медиҳанд, яъне $\mathcal{G}_z^1$ ва $\mathcal{G}_z^2$ аз F^+ дохили яке аз синфҳои ν_j $(j = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$ мехобанд, фақат ва фақат дар он ҳолате, ки $\mathcal{G}_z^1 \sim \mathcal{G}_z^2$ бошанд.

Леммаи 3.2. *Бигузор матрисаи $\mathcal{G}_z(t) \in \mathcal{G}^+$ бошад. Онгоҳ $\mathcal{G}^+$ таалуқи синфи ν_j $(j = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$ мешавад, фақат ва фақат дар он ҳолате, ки нобаробарии*

$$\Delta_j(z) > M(z) + \Big(M^2(z) + \sum_{\substack{n=0 \\ n\neq j}}^{3} |\mu_{j,n}(z)|^2 - |\lambda_{j,n}(z)|^2\Big)^{1/2} \quad \forall z \in \overline{D}, \qquad (8)$$

иҷро шавад, ки дар ин ҷо

$$\lambda_{j,n} = \overline{a}_j a_n - b_j \overline{b}_n,\ \mu_{j,n} = \overline{a}_j b_n - b_j \overline{a}_n,\ \Delta_n(z) = |a_n(z)|^2 - |b_n(z)|^2,\ n = 0, 1, 2, 3;$$

$$M(z) = \max_{|t|=1} [(a_1\overline{a}_0 - b_1\overline{b}_0 + a_2\overline{a}_1 - b_2\overline{b}_1 + a_3\overline{a}_1 - b_3\overline{b}_1)t +$$
$$+ (a_2\overline{a}_0 - b_2\overline{b}_0 + a_3\overline{a}_1 - b_3\overline{b}_1)t^2 + (a_3\overline{a}_0 - b_3\overline{b}_0)t^3]$$

мебошанд.

Масъалаи Дирихле. *Функсияи $\omega(z)$ аз синфи $W_p^6(D) \cap C^2(\overline{D})$ ёфта шавад, ки дар дохили D муодилаи (6) ва дар сарҳади он Γ се шартҳои*

$$\omega(z)\Big|_{\Gamma} = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial n}\Big|_{\Gamma} = 0, \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial n^2}\Big|_{\Gamma} = 0, \qquad (9)$$

-ро қаноат кунад, ки $\frac{\partial \omega}{\partial n}$ - ҳосила аз рӯи нормали беруна дар нуқтаҳои контури Γ мебошад.

Натиҷаҳои асосии **§3 боби 1** инҳоянд:

Теоремаи 3.1. *Бигузор матрисаи $\mathcal{G}_z(t)$ аз $\mathcal{G}^+$ таалуқи синфи гомотопии ν_0 бошад. Барои он, ки масъалаи (9) барои системаи эллиптикии (6) аз синфи $W_p^6(D) \bigcap C^2(\overline{D})$ $(2 < p < \infty)$ фредголмовӣ бошад, зарур ва кифоя аст, ки шарти зерин иҷро шавад:*

$$\Delta_0(z) > M(z) + \Big(M^2(z) + \sum_{n=1}^{3} |\mu_{0,n}(z)|^2 - |\lambda_{0,n}(z)|^2\Big)^{1/2} \quad \forall z \in \overline{D}. \qquad (10)$$

Теоремаи 3.2. *Бигузор матритсаи $\mathcal{G}_z(t)$ аз $\mathcal{G}^+$ таалуқи синфи гомотопии ν_j $(j = 1, 2, 3)$ бошад. Барои он, ки масъалаи (9) барои системаи* *эллиптикии (6) аз синфи $W_p^6(D)\bigcap C^2(\overline{D})$ $(2<p<\infty)$ нётеровӣ бошад, зарур ва кифоя аст, ки шартҳои зерин*

$$\Delta_j(z) > M(z) + \Big(M^2(z) + \sum_{\substack{n=0\\ n\neq j}}^{3} |\mu_{j,n}(z)|^2 - |\lambda_{j,n}(z)|^2\Big)^{1/2} \tag{11}$$
$$\text{ва}\quad \mu_{j,n}(\tau)\neq 0 \quad \text{барои}\quad \forall z\in\overline{D},\quad \tau\in\Gamma,$$

иҷро шаванд, ки

$$\lambda_{j,n}(z) = \overline{a_j(z)}a_n(z) - b_j(z)\overline{b_n(z)},\ \mu_{j,n}(z) = \overline{a_j(z)}b_n(z) - b_j(z)\overline{a_n(z)}$$

мебошанд.

Айни замон, агар шарти (11) иҷро шавад, онгоҳ индекси масъала ба

$$\varkappa = -2jInd_\Gamma \mu_{j,0}(\tau),$$

баробар мешавад.

Айнан ҳамин гуна натиҷа барои масъалаи Неймани муодилаи (6) ҷой дорад.

Дар параграфи чоруми боби якуми диссертатсия масъалаҳои Дирихле ва Нейман барои системаи умумии эллиптикии ду муодилаҳои аз ду тағйирёбанда вобастаи тартиби шаш дар ҳамворӣ мавриди таҳқиқ қарор дода шудааст, ки навишти комплексии он намуди зерин дорад:

$$\begin{aligned}\sum_{n=-3}^{3} a_n(z)\frac{\partial^6\omega}{\partial\overline{z}^{3+n}\partial z^{3-n}} + b_n(z)\frac{\partial^6\overline{\omega}}{\partial\overline{z}^{3-n}\partial z^{n+3}} +\\ + \sum_{0\le l+j\le 5} a_{l,j}(z)\frac{\partial^{l+j}\omega}{\partial\overline{z}^{l}\partial z^{j}} + b_{l,j}(z)\frac{\partial^{l+j}\overline{\omega}}{\partial\overline{z}^{l}\partial z^{j}} = g(z),\end{aligned} \tag{12}$$

ки дар ин ҷо $z=x+iy,\ \omega(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ мебошанд. Дар назар дошта мешавад, ки коэффитсиентҳои муодилаи (12) дар $\overline{D}$ функсияҳои бефосила ва $g(z)\in L^p(D), 2<p<\infty$ мебошанд.

Дар ин параграф натиҷаҳои параграфҳои пешинаи диссертатсия густариш ёфтаанд. Вобаста аз синфҳои гомотопӣ барои системаи умумии эллиптикии ду муодилаҳои ду тағйирёбанданоки тартиби шаш дар ҳамворӣ шартҳои зарурӣ ва кифоягии нётеровӣ будани масъалаҳои Дирихле ва Нейман ёфта шуда формулаҳо барои ҳисоб намудани индекси масъалаҳо ҳосил карда шудааст.

Барои системаи (12) матритса-символи зеринро месозем

$$\mathscr{G}(z,t)=\begin{pmatrix}\frac{\mathscr{P}_6(z,t)}{\mathscr{Q}_6(z,t)} & \frac{\mathscr{Q}_6(z,t)}{\mathscr{P}_6(z,t)}\end{pmatrix}, \tag{13}$$

ки

$$\mathscr{P}_6(z,t)=\bar{t}^3\sum_{n=-3}^{m}a_n(z)t^{3+n},\ \mathscr{Q}_6(z,t)=\bar{t}^3\sum_{n=-3}^{3}(-1)^n b_n(z)t^{3-n},$$

аст.

Эллиптикӣ будани системаи (12) маънои онро дорад, ки

$$\det\mathscr{G}(z,t)\equiv|\mathscr{P}_6(z,t)|^2-|\mathscr{Q}_6(z,t)|^2\neq 0 \tag{14}$$

барои ҳамаи $z\in\overline{D},\ |t|=1$ иҷро шавад.

Аз (14) мебарояд, ки $P_6(z,t)\equiv t^3\mathscr{P}_6(z,t)=\sum_{n=-3}^{m}a_n(z)t^{3+n}$ – полиноми комплексии таназулнаёбандаи тартиби шаш мебошад. Бигузор $q_k(z)$ $(k=1,2,\ldots,6)$ ҳалҳои комплексии муодилаи $P_6(z,t)=0$ бошанд. Мувофиқи (14) ин ҳалҳо дар давраи $|t|=1$ намехобанд, яъне $|q_k(z)|\neq 1$ аст: $|q_k(z)|<1$ ё ин, ки $|q_k(z)|>1$ мебошанд. Ҳалҳои гуруҳи якумро бо $q_k^+(z),\ k=1,2,\ldots,l^+$ ва ҳалҳои гуруҳи дуюмро бо $q_k^-(z),\ k=1,2,\ldots,l^-,\ l^++l^-=6$ ишора мекунем. Вобаста аз миқдори нулҳои полиноми $P_6(z,t)$ дар дохили доираи воҳидии $|t|=1$, априорӣ 7 ҳолат имконпазир аст.

Синфи полиномҳои матритсавиро аз $\mathscr{F}_+^2$, ки барои онҳо яке аз ҳолатҳои имконпазир ҷой дорад, ба воситаи ν_k $(k=0,\pm1,\pm2,\pm3)$ ишора мекунем.

Таъриф. Мегӯянд, ки системаи эллиптикии (12) тааллуқи синфи ν_k ($-3\leq k\leq 3$) аст, агар барои дилхоҳ $z\in\overline{D},|t|=1$ нобаробарии (14) ҷой дорад ва

$$\nu_k=Ind_{|t|=1}\mathscr{P}_6(z,t)=l^+-3$$

аст.

Масъалаи Дирихле. *Функсияи $\omega(z)$ - ро аз синфи $W_p^6(D)\cap C^2(\overline{D})$ ёфтан даркор аст, ки дар дохили D муодилаи (12) ва дар сарҳади он Γ шартҳои*

$$\left.\frac{\partial^j\omega}{\partial n^j}\right|_\Gamma=0,\ j=0,\ 1,\ 2, \tag{15}$$

- ро қаноат мекунанд, ки дар ин ҷо $\frac{\partial\omega}{\partial n}$ - ҳосилаи функсияи $\omega(z)$ аз рӯи равиши нормали беруна дар нуқтаҳои Γ мебошад.

Натиҷаҳои асосии **§4 -и боби 1** зеринанд:

Теоремаи 4.1. *Бигузор матритсаи $\mathcal{G}_z(t)$ аз $\mathcal{G}^+$ таалуқи синфи гомотопикии ν_0 бошад. Барои он, ки масъалаи (15) барои системаи эллиптикии (12) дар синфи $W_p^6(D)\bigcap C^2(\overline{D})$ $(2 < p < \infty)$ фредголмовӣ бошад, зарур ва кифоя аст, ки шарти*

$$\Delta_0(z) > M(z) + \Big(M^2(z) + \sum_{\substack{n=-3\\ n\neq 0}}^{3} |\mu_{0,n}(z)|^2 - |\lambda_{0,n}(z)|^2\Big)^{1/2} \quad \forall z \in \overline{D} \tag{16}$$

иҷро шавад.

Теорема 4.2. *Бигузор матритсаи $\mathcal{G}_z(t)$ аз $\mathcal{G}^+$ таалуқи синфи гомотопикии ν_j $(j = \pm1, \pm2, \pm3)$ бошад. Барои он, ки масъалаи (15) барои системаи эллиптикии (12) аз синфи $W_p^6(D)\bigcap C^2(\overline{D})$ $(2 < p < \infty)$ нётеровӣ бошад, зарур ва кифоя аст, ки шартҳои*

$$\begin{gathered}\Delta_j(z) > M(z) + \Big(M^2(z) + \sum_{\substack{n=-3\\ n\neq j}}^{3} |\mu_{j,n}(z)|^2 - |\lambda_{j,n}(z)|^2\Big)^{1/2} \\ \text{ва}\quad \mu_{j,0}(\tau) \neq 0 \quad \text{барои}\quad \forall z \in \overline{D}, \quad \tau \in \Gamma\end{gathered} \tag{17}$$

иҷро шавад, ки

$$\lambda_{j,n}(z) = \overline{a_j(z)}a_n(z) - b_j(z)\overline{b_n(z)},\ \mu_{j,n}(z) = \overline{a_j(z)}b_n(z) - b_j(z)\overline{a_n(z)}$$

мебошад.

Айни ҳол, агар шартҳои (17) иҷро шаванд, онгоҳ индекси масъала баробари

$$\varkappa = -2jInd_\Gamma \mu_{j,0}(\tau)$$

мешавад.

Айнан ҳамин гуна натиҷаҳо барои масъалаи Неймани барои муодилаи (12) ҷой доранд.

Боби дуюми кори диссертатсионӣ ба тадқиқи масъалаҳои Дирихле ва Нейман барои баъзе синфҳои системаи муодилаҳои дифференсиалии эллиптикии тартиби шаш бо коэффитсиентҳои канишнок дар ҳамворӣ бахшида шудааст.

Дар параграфи 2.1 - и боби 2 системаи муодилаҳои дифференсиалии эллиптикии зерин

$$\begin{aligned}&a(z)\frac{\partial^6\omega}{\partial\overline{z}^3\partial z^3} + (\overline{z}/|z|)^n b(z)\frac{\partial^6\overline{\omega}}{\partial\overline{z}^6} + \\ &+ \sum_{k+j=0}^{5}\Big[a_{k,j}(z)\frac{\partial^{k+j}\omega}{\partial\overline{z}^k\partial z^j} + b_{k,j}(z)\frac{\partial^{k+j}\overline{\omega}}{\partial\overline{z}^k\partial z^j}\Big] = g(z),\end{aligned} \tag{18}$$

омӯхта мешавад.

Чуноне, ки аён аст, коэффитсиенти назди ҳосилаи $\overline{\omega}_{\overline{z}\overline{z}}$ муодилаи (18) дар нуқтаи $z = 0$ каниши бартарафнашаванда дорад. Дар ҳар як нури аз ибтидои координата баромада, функсияи $(\overline{z}/|z|)^n$ доимӣ буда, дар нуқтаи $z = 0$ аз рӯи ин нурҳо ҳудудҳои гуногун дорад. Дар поён нишон дода мешавад, ки бефосила набудани коэффитсиентҳо ба он оварда мерасонад, ки шартҳои дар §2 боби 1 ёфташуда барои нетеровӣ будан кифоягӣ намекунанд ва илова бар ин ҳалшавандагии масъалаи Дирихле аз нишондиҳандаи p - и фазои лебегии $L^p(D)$ вобаста мешавад.

Дар пункти 2.5.1 муодилаи дифференсиалии моделии

$$a(0)\frac{\partial^6\omega}{\partial\overline{z}^3\partial z^3} + (\overline{z}/|z|)^n b(0)\frac{\partial^6\overline{\omega}}{\partial\overline{z}^6} = q(z). \tag{19}$$

омӯхта мешавад.

Масъалаи Дирихлеи (4) барои муодилаи моделии (19) тавассути тасвири интегралии Векуа

$$\omega(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_D G_6(z,\zeta)f(\zeta)ds_\zeta, \tag{20}$$

ки

$$G_6(z,\zeta) = |\zeta-z|^4\ln\left|\frac{1-z\overline{\zeta}}{\zeta-z}\right|^2 - |\zeta-z|^2(1-|z|^2)(1-|\zeta|^2) + \frac{1}{2}(1-|z|^2)^2(1-|\zeta|^2)^2$$

аст, ба муодилаи дученакаи интегралии сингулярии

$$a(0)f(z) + (z/|z|)^n b(0)(S_3\overline{f})(z) + (Tf)(z) = g(z), \tag{21}$$

оварда мешавад, ки

$$(S_3\overline{f})(z) = -\frac{3}{\pi}\iint\limits_D \frac{(\overline{\zeta}-\overline{z})^2}{(\zeta-z)^4}\overline{f(\zeta)}ds_\zeta$$

оператори интегралии сингулярии дученака бо характеристикаи ҷуфти тартиби шаш буда, T – оператори пурра бефосила мебошад. Дар навбати худ тадқиқи муодилаи (21) ба тадқиқи системаи муодилаҳои якченака бо ядроҳои якҷинсаи тартиби (-1) нисбати коэффитсентҳои Фурйиеи функсияи номаълуми $\omega_k(r)$ оварда мешавад, ки онҳо дар мақолаҳои Ҷангибеков Г.[46],[47] омӯхта шудаанд.

Ишораҳои зеринро дохил мекунем:

$$R_\beta(k) = \sqrt{1 - \frac{12(1-\beta)}{(k-\beta)(k+4)}}, \tag{22}$$

ки $0 < \beta < 2,\ k$ аз маҷмӯъи ададҳои бутуни $k \geq -2$ қимат мегирад. Ба воситаи $\mu_\beta(\lambda)$ ададеро ишора мекунем, ки он барои $|\lambda| < 1$ баробари миқдори қиматҳои k, ки барои онҳо нобаробариҳои $R_\beta(k) < |\lambda|$ иҷро мешаванд; барои $|\lambda| > 1$ баробари қиматҳои k, ки барои онҳо нобаробарии $R_\beta(k) > |\lambda|$ иҷро мешавад.

Билохира барои муодилаи интегралии сингулярии дученакаи моделии (21) ва инчунин барои масъалаи Дирихлеи (4) - и муодилаи дифференсиалии моделии (19) (ҳангоми $n = 2$) дар синфи $W_p^6(D) \cap C^2(\overline{D}),\ p > 2$ натиҷаҳои зерин ҳосил карда шудааст:

Теоремаи 5.1. *Барои нормалӣ ҳалшавандагии муодилаи интегралии сингулярии моделии (18) дар фазоҳои* $L^p_{\beta-2/p}(|z| < 1)$ *зарур ва кифоя аст, ки* $|\lambda| \neq 1$ *ва* $|\lambda| \neq R_\beta(k)$ *бошанд, ки* $k \geq -2$ *ва* $k \neq 1$ *мебошанд. ҳангоми иҷро шудани ин шартҳо, индекс* $\varkappa_\beta(\lambda)$ *қиматҳои зеринро қабул мекунад:*

1) агар $0 < \beta \leq 1$ *бошад, онгоҳ* $\varkappa_\beta(\lambda) = -2\mu_\beta(\lambda)$ *ҳангоми* $|\lambda| < 1$ *ва баробари* $2(6 - \mu_\beta(\lambda))$ *ҳангоми* $|\lambda| > 1$ *ва* $\mu_\beta(\lambda) \neq 3$ *ва баробари 7 ҳангоми* $\mu_\beta(\lambda) = 3$ *будан;*

2) агар $1 < \beta < 2$ *бошад, онгоҳ* $\varkappa_\beta(\lambda)$ *баробари* $2\mu_\beta(\lambda)$ *ҳангоми* $|\lambda| < 1$ *ва баробари* $\mu_\beta(\lambda) \neq 3$ *ва баробари 5 ҳангоми* $|\lambda| < 1$ *ва* $\mu_\beta(\lambda) = 3$ *ва баробари* $2(6 + \mu_\beta(\lambda))$ *ҳангоми* $|\lambda| > 1$ *будан.*

Дар айни ҳол, агар $\varkappa_\beta(\lambda) > 0$ *бошад, онгоҳ муодилаи якҷинсаи (18) расо* $\varkappa_\beta(\lambda)$ *ҳалли хаттӣ новобвеста дорад ва ҳангоми* $\varkappa_\beta(\lambda) < 0$ *будан барои ҳалшавандагии муодилаи ғайриякҷинсаи (18) иҷро шудани* $-\varkappa_\beta(\lambda)$ *шарти ҳалшавандагӣ талаб карда мешавад, ки онҳо ба таври ошкор ифода меёбанд.*

Теоремаи 5.2. *Барои он, ки масъалаи Дирихлеи (4) барои муодилаи дифференсиалии моделии (2.3) (ҳангоми* $n = 2$*) дар синфи* $W_p^6(D) \cap C^2(\overline{D}),\ p > 2$ *нётеровӣ бошад, зарур ва кифоя аст, ки шартҳои*

$$|a(0)| \neq |b(0)|, |\lambda| \neq R_{2/p}(k), k \geq -2, \tag{23}$$

ичро шаванд ва индекси масъала баробари

$$\varkappa_{2/p}(\lambda)=\begin{cases}-2\mu_{2/p}(\lambda) & \text{ҳангоми } |\lambda|<1;\\ 2(6-2\mu_{2/p})(\lambda) & \text{ҳангоми } |\lambda|>1,\ \ \mu_\beta(\lambda)\neq 3\ ;\\ 7 & \text{ҳангоми } \mu_{2/p}(\lambda)=3.\end{cases}$$

аст.

Барои гузаштан аз ин натиҷаҳо ба натиҷаҳо барои масъалаи Дирихле (4) барои системаи муодилаҳои дифференсиалии аввалаи (18) дар пункти 2.5.3. леммаи (5.1) оиди факторизатсияи операторҳои дученакаи интегралии сингулярӣ бо коэффитсиентҳои канишнок исбот карда мешавад. Аз ин натиҷаҳо барои масъалаи Дирихле (4) теоремаи зерин хулоса мебарояд:

Теоремаи 5.3. *Барои он, ки масъалаи (4) барои муодилаи (18)(ҳангоми $n=2$) дар синфи $W_p^6(D)\cap C^2(\overline{D}),\ 2<p<\infty$ нётеровӣ бошад, зарур ва кифоя аст, ки шартҳои зерин ичро шаванд:*
1. $|a(z)|\neq|b(z)|$ *ҳангоми* $|z|\leq 1,\ a(t)\neq 0$ *ҳангоми* $|t|=1$,
2. $|\lambda|\neq R_{2/p}(k), k\geq -2$

ва индекси масъала баробар аст ба

$$\varkappa=-6\underset{|t|=1}{Ind}a(t)+\varkappa_{2/p}(\lambda),$$

ки $\varkappa_{2/p}(\lambda)$ *аз теоремаи 5.2. муайян мешавад.*

Дар параграфи 2.6. боби 2 натиҷаҳои теоремаҳои 5.1 ва 5.2 барои масъалаҳои Дирихле ва Нейман барои баъзе синфҳои системаҳои муодилаҳои дифференсиалии эллиптикӣ бо коэффитсиентҳои канишноки намуди

$$\begin{gathered}a(z)\frac{\partial^6\omega}{\partial\overline{z}^3\partial z^3}+b(z)\frac{\partial^6\overline{\omega}}{\partial\overline{z}^3\partial z^3}+(z/|z|)^n c(z)\frac{\partial^6\omega}{\partial\overline{z}^6}+(\overline{z}/|z|)^n d(z)\frac{\partial^6\overline{\omega}}{\partial z^6}+\\ +\sum_{k+j=0}^{5}\left[a_{k,j}(z)\frac{\partial^{k+j}\omega}{\partial\overline{z}^k\partial z^j}+b_{k,j}(z)\frac{\partial^{k+j}\overline{\omega}}{\partial\overline{z}^k\partial z^j}\right]=g(z)\end{gathered}\tag{24}$$

дошта умумӣ карда мешаванд.

Ишораҳои зеринро дохил мекунем:

$$R_p(k)=\sqrt{1-\frac{2n(1-2/p)}{(k+2/p)(k+2/q-n)}},\ \ k\geq n_0,,$$

$k\neq\dfrac{n}{2}(1+signn)-1,\ 1/p+1/q=1,\ n_0$ - қисми бутуни адади $(n-1)/2$;

$$\Lambda=\begin{cases}\frac{\Delta_1(0)}{\mu(0)}, & \text{агар (1.2) ичро шавад;}\\ \frac{\mu(0)}{\Delta_2(0)}, & \text{агар (1.3) ичро шавад.}\end{cases}$$

Ба воситаи $\mu_p(\Lambda)$ ададеро ишора мекунем, ки ҳангоми $|\Lambda| < 1$ будан баробари миқдори қиматҳои k, ки барои онҳо нобаробариҳои $R_p(k) < |\Lambda|$, иҷро шавнд ва барои $|\Lambda| > 1$ баробари миқдори қиматҳои k, ки барои онҳо нобаробариҳои $R_p(k) > |\Lambda|$ иҷро мешаванд.

Агар $n \geq 0$ бошад, онгоҳ ададӣ

$$\varkappa_p(\lambda) = \begin{cases} -2\mu_p(\Lambda) & \text{ҳангоми } |\Lambda| < 1, \\ 2n - 2\mu_p(\Lambda) & \text{ҳангоми } |\Lambda| > 1 \text{ ва } \mu_p(\Lambda) \neq n/2, \\ n+1 & \text{ҳангоми } |\Lambda| > 1 \text{ ва } \mu_p(\Lambda) = n/2, \end{cases}$$

-ро дохил мекунем, агар $n \leq -1$ бошад, онгоҳ

$$\varkappa_p(\Lambda) = \begin{cases} -2\mu_p(\Lambda) & \text{ҳангоми } |\Lambda| < 1 \text{ ва } \mu_p(\Lambda) \neq n/2, \\ 2n - 2\mu_p(\Lambda) & \text{ҳангоми } |\Lambda| > 1, \\ n+1 & \text{ҳангоми } |\Lambda| < 1 \text{ ва } \mu_p(\Lambda) = n/2. \end{cases}$$

Масъалаи Дирихле. *Функсияи $\omega(z)$ - ро аз синфи $W_p^6(D) \cap C^2(\overline{D})$ ёфтан даркор аст, ки дар дохили D муодилаи (24) ва дар сарҳади Γ се шартҳои*

$$\omega(z)\Big|_\Gamma = 0, \quad \frac{\partial\omega}{\partial n}\Big|_\Gamma = 0, \quad \frac{\partial^2\omega}{\partial n^2}\Big|_\Gamma = 0 \tag{25}$$

-ро қаноат кунад, ки $\frac{\partial\omega}{\partial n}$ - ҳосила аз рӯи равиши нормали беруна ба нуқтаҳои контури Γ мебошад. Тасдиқотҳои зерин исбот карда шудаад:

Теоремаи 6.1. *Бигузор дар муодилаи (24) $n = 0$ бошад. Онгоҳ барои он, ки масъалаи Дирихле (25) барои системаи эллиптикии (24) дар синфи $W_p^6(D) \cap C^2(\overline{D})$ нетеровӣ бошад зарур ва кифоя аст, ки яке аз шартҳои зерин иҷро шаванд:*

$$|\Delta_1(z)| > |\lambda(z)| + |\mu(z)| \quad \textit{барои ҳамаи} \quad z \in \overline{D}, \tag{26}$$

$$|\Delta_2(z)| > |\lambda(z)| + |\mu(z)| \ \textit{барои ҳамаи} \quad z \in \overline{D}; \ \mu(t) \neq 0 \ \textit{барои ҳамаи} \quad t \in \Gamma. \tag{27}$$

Ҳамзамон, агар шарти (26) иҷро шавад, онгоҳ масъала фредголмовӣ аст; агар шарти (27) иҷро шавад, онгоҳ индекси масъала ба

$$\varkappa = -2Ind_\Gamma\mu(t).$$

Теоремаи 6.2. *Бигузор дар (24) $n \neq 0$ ва $\lambda(0) = 0$ бошад. Онгоҳ агар $\Lambda \neq 1, \Lambda \neq R_n(k), k$ бутун, $k \geq 1/2n(1 + sign n)$ ва яке аз шартҳои (26),* *(27) иҷро шаванд, онгоҳ масъалаи Дирихле барои системаи эллиптикии (24) дар синфи* $W_p^6(D) \cap C^2(\overline{D})$ *нётеровӣ мешавад ва ҳамзамон агар шарти (26) иҷро шавад, онгоҳ индекси масъала ба* $\varkappa_p(\Lambda)$ *баробар мешавад, ва агар шарти (27) иҷро шавад онгоҳ*

$$\varkappa = 2Ind_\Gamma \mu(t) + \varkappa_p(\lambda)$$

баробар мешавад.

Айнан ҳамин тавр масъалаи Нейман низ омӯхта шудааст:

Масъалаи Нейман. *Дар соҳаи* $\overline{D}$ *ҳалли бефосилаи системаи (24) аз синфи* $W_p^6(D) \cap C^2(\overline{D})$ *ёфта шавад, ки дар сарҳади* Γ *шартҳои*

$$\frac{\partial \omega}{\partial^j \nu}\Big|_\Gamma^j = 0, \ \ j = 1, 2, 3 \tag{28}$$

-ро қаноат кунад.

Хулосаҳо

Натиҷаҳои асосии кори диссертатсионӣ аз инҳо иборат аст:

- шартҳои зарурӣ ва кифоягии нётеровӣ будани масъалаҳои Дирихле ва Нейман барои як системаи эллиптикии тартиби шаши вобаста аз ду тағйирёбанда бо коэффитсиентҳои бефосила дар ҳамвори¯ **исбот карда шуда** формулаи ҳисоб намудани индекси масъалаҳо ёфта шу-дааст[1-М];

- барои баъзе синфҳои системаи эллиптикии тартиби шаши вобаста аз ду тағйирёбанда бо коэффитсиентҳои бефосила дар ҳамвори¯ теоремаҳо оиди шартҳои зарур¯и ва кифоягии нётеров¯и будан ва формула барои ҳисоб намудани индекс **исбот карда шудааст[2-М,3-М]**;
- шартҳои эффективноки зарурӣ ва кифоягии нётеровӣ будан ва формула барои ҳисоб намудани индекси системаи умумии эллиптикии тартиби шаши аз ду функсияҳои номаълуми ду тағйирёбанданок бо ко-эффитсиентҳои бефосила **ёфта шудааст[-3М,4-М]**;

- теоремаҳои ҳалшавандагии масъалаҳои Дирихле ва Нейман барои баъзе синфҳои системаҳои эллиптикии тартиби шаш бо коэффитсиентҳои канишнок **исбот карда шуда** формулаҳо барои ҳисоб намудани индекси масъалаҳо ҳосил карда шудааст[2-М,5-М];

ИНТИШОРОТИ МУАЛЛИФ АЗ РӮИ МАВЗӮИ ДИССЕРТАТСИЯ 1. Дар маҷаллаҳои дар рӯйихати КОА-и назди Президенти Ҷумҳурии Тоҷикистон қайдшуда:

[1-М] ДЖАНГИБЕКОВ Г., ФАЙЗЗОДА К.Ш. Задача Дирихле для эллиптических систем двух уравнений шестого порядка на плоскости / Джангибеков Г., Файззода К.Ш. // Вестник филиала МГУ им.М.В. Ломоносова в г. Душанбе, сер. естетв. наук, 2022, т.1, №4, с. 20 – 24.

[2-М] ФАЙЗЗОДА К.Ш. О решении задачи Дирихле для одной эллиптической системы шестого порядка с разрывным коэффициентом / Файззода К.Ш., // Доклады НАН Таджикистана, 2023, т. 66, №4, с. 9 - 10, 530–539.

[3-М] ДЖАНГИБЕКОВ Г., ФАЙЗЗОДА К.Ш. Задача Дирихле для некоторых эллиптических систем дифференциальных уравнений шестого порядка на плоскости / Джангибеков Г., Файззода К.Ш. // Известия НАН Таджикистана, 2023, №3, с. 17–28.

[4-М] ДЖАНГИБЕКОВ Г., ФАЙЗЗОДА К.Ш. Задачи Дирихле и Неймана для общих эллиптических систем дифференциальных уравнений шестого порядка на плоскости / Джангибеков Г., Файззода К.Ш // , 2024, т. 67, №3-4, с. 165 – 177.

[5-М] ФАЙЗЗОДА К.Ш. Задачи Дирихле и Неймана для некоторых классов эллиптических систем дифференциальных уравнений шестого порядка с разрывными коэф фициентами на плоскости / Файззода К.Ш., // Доклады НАН Таджикистана, 2025, т. 68, №1.

2. Дар дигар нашрияҳо:

[6-М] ФАЙЗЗОДА К.Ш. Задачи Дирихле для некоторых эллиптических систем дифференциальных уравнений шестого порядка на плоскости./ ДЖАНГИБЕКОВ Г., ФАЙЗЗОДА К.Ш.//Материалы международной конференции, посвященной "Двадцатилетием изуч. и разв.эстесвн., точных и математич. наук."Дангара, 30 апреля 2024 г.

[7-М] ФАЙЗЗОДА К.Ш. Задачи Дирихле для некоторых эллиптических систем дифференциальных уравнений шестого порядка на плоскости./ //Материалы международной конференции, посвященной "Двадцатилетие изуч. и разв.эстесвн., точных и математич. наук."Дангара, 30 апреля 2024 г.

[9-М] ФАЙЗЗОДА К.Ш. Задачи Дирихле и Неймана для некоторых классов эллиптических систем дифференциальных уравнений шестого порядка с разрывными коэффициентами на плоскости / ДЖАНГИБЕКОВ Г., ФАЙЗЗОДА К.Ш.//Материалы международной конференции Современной проблемы математии и ее приложение, Душанбе, 30-31 мая 2024 г.

[9-М] ФАЙЗЗОДА К.Ш. О решении задачи Дирихле для одной эллиптической системы шестого порядка с разрывными коэф фициентами/ ФАЙЗЗОДА К.Ш.//Материалы международной конференции, посвященной "Двадцатилетие изуч. и разв.эстесвн., точных и математич. наук."Дангара, 30 апреля 2024 г.

РЕСПУБЛИКА ТАДЖИКИСТАН
ТАДЖИКСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи
УДК-517.968.2

Файззода Кишвар Шохпулод

РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ И НЕЙМАНА ДЛЯ ОБЩИХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ ШЕСТОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание учёной степени
доктора философии (PhD)–доктора по специальности
6D060100–МАТЕМАТИКА: 6D060102–Дифференциальные уравнения,
динамические системы, оптимальные управление

Д У Ш А Н Б Е – 2 0 2 5

Работа выполнена на кафедре функционального анализа и дифференциальных уравнений Таджикского национального университета

Научный руководитель: **Джангибеков Гулходжа**
доктор физико-математических наук,
профессор

Официальные оппоненты: **Сафаров Джумабой**
доктор физико-математических наук,
профессор кафедры математического анализа
и дифференцальных уравнений
Бохтарского государственного университета
имени Н.Хусрава

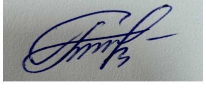
Саидов Бахтиёр Бобокалонович
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры высшей математики
Таджикский государственный финансово-
экономический университет

Оппонирующая организация: Международный университет сервиза
и туризма

Защита состоится *02 апреля 2025 г. в 14:00 часов* на заседании Диссертационного совета 6D КОА-011 на механико-математическом факультете Таджикского национального университета по адресу: 734027, г. Душанбе, улица Буни-Хисорак, корпус 17, аудитория 216.

С диссертацией можно ознакомиться в центральной научной библиотеке Таджикского национального университета и на сайте http://www.tnu.tj

Автореферат разослан ”____” ____________ 2025 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
кандидат физико-математических наук  **А. Гаффоров**

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. В работах И. Н. Векуа[1,2,3] был предложен новый метод исследования различных граничных задач для общих линейных эллиптических систем дифференциальных уравнений в частных производных $2m$ – го порядка с двумя независимыми переменными $z = x + iy$ и неизвестной функцией $\omega(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$

$$\sum_{n=-m}^{m} a_n(z)\frac{\partial^{2m}\omega}{\partial\overline{z}^{m+n}\partial z^{m-n}} + b_n(z)\frac{\partial^{2m}\overline{\omega}}{\partial\overline{z}^{m-n}\partial z^{n+m}} + T\omega = g(z), \tag{1}$$

где T – дифференциальный оператор низшего порядка. Метод состоит в том, что с помощью общего интегрального представления решений изучаемых задач от поставленной задачи совершается переход к эквивалентному сингулярному интегральному уравнению по ограниченной области, затем изучается разрешимость этого уравнения.

Дальнейшие развитии теории граничных задач линейных и квазилинейных эллиптических уравнений нашли отражении в работах учеников И. Н. Векуа: Б. В. Боярский[4,5,6], А. И. Вольперт[7,8,9], В. С. Виноградов[10,11], П. С. Дыбов[12,13], А. Д. Джураев[14]. Отметим, что во всех работах

---

[1] Векуа И.Н. Обобщённые аналитические функции. М.: Физматгиз, 1959, 672 с.

[2] Векуа И. Н. Новые методы решения эллиптических уравнений М.: – Гостехиздат. – 1948. – 296 с.

[3] Векуа И. Н. Задача приведения к каноническому виду дифференциальных форм эллиптического типа и обобщенная система Коши– Римана ДАН СССР. – 1955. – т.100. – №2. – с.197 – 200.

[4] Боярский Б.В. Исследования по уравнениям эллиптического типа на плоскости и граничным задачам теории функций Дисс. докт. физ.- мат. наук. М.: 1960

[5] Боярский Б.В. Общее представление решений эллиптической системы 2n уравнений на плоскости Докл. АН СССР – 1958. – т. 122. – No4. с. 543 – 546

[6] Боярский Б.В. Некоторые граничные задачи для системы уравнений эллиптического типа ДАН СССР– 1959. – т.124. – №1. с.1 – 4.

[7] А.И. Вольперт Об индексе задачи Дирихле Известия Высших учебных заведений. МАТЕМАТИКА. – 1960. – №5. – с.40–44.

[8] А.И. Вольперт Исследование по теории граничных задач для эллиптич. систем уравнений с двумя независимыми переменными Докторская диссертация. – М. – 1960

[9] А.И. Вольперт Об индексе и нормальной разрешимости гранич ных задач для эллиптич. систем дифференц. уравнений Тр. ММО. – 1961. – том 10.– с.41–87.

[10] В.С. Виноградов Об ограниченностирешений краевых задач для линейных эллиптических систем уравнений на плоскости ДАН – 1958 – т. 121. – №3.– с.399–402.

[11] В.С. Виноградов Об одной задаче для квазилинейных систем уравнений на плоскости ДАН. – 1958

[12] П.С. Дыбов Разрешимость уравнения эллиптического типа 4-го порядка на плоскости в классе функций с ограничением на рост в бесконечности ДАН – 1971, т. 199, №4, с. 754–757.

[13] П.С. Дыбов О разрешимости первой краевой задачи для дифференц. уравнения эллиптич. типа шестого порядка – 1972, т. 202, №6, с. 1251–1253.

[14] Джураев А.Д. Метод сингулярных интегральных уравнений. М.: Наука, 1997, 415

указанных авторов уравнение (1) изучались лишь в случае, когда дифференциальный оператор является сильно эллиптическим оператором. Так в работе Б. В. Боярского[4] с помощью принципа сжатых отображений показана фредгольмовость задачи Дирихле и Неймана системы второго порядка (1). При аналогичных условиях П. С. Дыбов[12,13] рассматривал системы (1) четвертого и шестого порядка, а в монографии А. Ҷ. Ҷӯраев[14] изучал систему $2m$ – го порядка.

В связи с вышесказанным весьма актуальной является разработка тории нётера и получение формулы для подсчета индекса задачи Дирихле и Неймана эллиптической системы дифференциальных уравнений (1) по ограниченной области на плоскости. Первой в этом направлении была выполнена работа А. И. Вольперта[7], который на примере эллиптической системы второго порядка

$$\lambda z^n \frac{\partial^2 \omega}{\partial \overline{z} \partial z} + \frac{\partial^2 \overline{\omega}}{\partial \overline{z}^2} = 0, \ |\lambda| < 1, \ n - \text{целое число} \tag{2}$$

допускающем явное решение, показал, что индекс задачи Дирихле для эллиптической системы (2) может быть отличен от нуля и, более того, может быть любым четным числом $2n$.

В последнее время Г. Джангибековым[16,17,18] были получены эффективные необходимые и достаточные условия нётеровости и формулы для подсчета индекса некоторых классов двумерных сингулярных операторов по ограниченной области. Использование этих результатов позволило, в частности, получить в работах Г. Джангибекова [19], Г.Джангибекова и Г. Х.

---

[4] Боярский Б.В. Исследования по уравнениям эллиптического типа на плоскости и граничным задачам теории функций Дисс. докт. физ.- мат. наук. М.: 1960

[12] П.С. Дыбов Разрешимость уравнения эллиптического типа 4-го порядка на плоскости в классе функций с ограничением на рост в бесконечности ДАН – 1971, т. 199, №4, с. 754–757.

[13] П.С. Дыбов О разрешимости первой краевой задачи для дифференц. уравнения эллиптич. типа шестого порядка – 1972, т. 202, є6, с. 1251–1253.

[14] Джураев А.Д. Метод сингулярных интегральных уравнений. М.: Наука, 1997, 415

[7] А.И. Вольперт Об индексе задачи Дирихле Известия Высших учебных заведений. МАТЕМАТИКА. – 1960. – №5. – с.40–44.

[16] Джангибеков Г. О нетеровости и индексе одного класса двумерных сингулярных интегральных уравнений с разрывными коэффициентами ДАН СССР. – 1988. – т.300, №2, с.272 – 276.

[17] Джангибеков Г.О нетеровости и индексе некоторых двумерных сингулярных интегральных уравнений с разрывными коэффициентами Изв. ВУЗов. матем. 1992, №9, с. 25–37.

[18] Jangibekov G. On a class of two-dimensional singular integral operators and its applications to boundary value problems for elliptic systems of equations in the pline Prosidings of the second ISAAC Congress. – volum 2. – 2000. – p.1421 – 1430.

[19] Джангибеков Г. Об одном классе двумерных сингулярных интегральных операторов и его приложениях к краевым задачам для эллиптических систем уравнений на плоскости Докл. РАН. – 1993. – т. 330. – №4. – с. 415 – 417.

Худжаназавровой [20], Г. Джангибекова и Д. М. Одинабекова [21], Джангибекова Г. и Бобоева Э.Д. [22] теорию разрешимости задач Дирихле и Неймана для эллиптических систем уравнений второго и четвертого порядка на плоскости, и вычислить индекс этих задач через коэффициенты системы (1).

Данная диссертационная работа посвящена исследованию нётеровых свойств задачи Дирихле и Неймана для эллиптических систем двух уравнений с двумя независимыми переменными шестого порядка (1) с непрерывными а также с разрывными в одной точке коэффициентами на плоскости, методом перехода к эквивалентному сингулярному интегральному уравнению по ограниченной области.

Цель работы. Целью настоящей диссертационной работы является изучение вопроса разрешимости основных граничных задач для эллиптических систем дифференциальных уравнений шестого порядка с непрерывными и разрывными коэффициентами на плоскости.

Научная новизна. Все результаты полученные в диссертации и выносимые на защиту, являются новыми и заключаются в следующем:

- **получены** эффективные необходимые и достаточные условия нетеровости и формулы для подсчета индекса задачи Дирихле и Неймана для одной эллиптической системы шестого порядка с двумя неизвестными функциями от двух независимых переменных с непрерывными коэффициентами на плоскости;

- для некоторых классов эллиптических систем шестого порядка с непрерывными коэффициентами на плоскости **получены** эффективные необходимые и достаточные условия нётеровости и формулы для подсчета индекса задачи Дирихле и Неймана;

- **найдены** эффективные необходимые и достаточные условия нетеровости и формулы для подсчета индекса задачи Дирихле и Неймана

[20] Джангибеков Г.,Худжаназарова Г. О нётеровости и индексе некоторых двумерных сингулярных интегральных операторов по ограниченной области ДАН России. –2004. – т. 396. – №4. – с. 449 – 454.

[21] Джангибеков Г., Одинабеков Д.М. К теории Нётера двумерных сингулярных операторов и её приложения к краевым задачам для эллиптических систем уравнений четвертого порядка Вестн. СамУ. Естеств. сер.,– 2020. т. 26. №1. с. 7–13

[22] Джангибеков Г.,Бобоев Э.Д. Задача Дирихле ва Неймана для эллиптических систем дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентавми Учёные записки – 2021. –т. 56. №1. – с. 8–11.

для общей эллиптической системы шестого порядка с двумя неизвестными функциями от двух независимых переменных с непрерывными коэффициентами на плоскости;

- **доказаны** теоремы разрешимости задачи Дирихле и Неймана для некоторых классов эллиптических систем шестого порядка с разрывными коэффициентами и получена формулы для подсчета индекса.

Теоретическая и практическая значимость работы. Результаты, полученные в диссертации, носят теоретический характер. Они могут послужить основой для дальнейших теоретических исследований в теории краевых задач для уравнений с частными производными.

Практическая ценность работы определяется прикладной значимостью сингулярных интегральных уравнений в решении прикладных задач механики и других разделов физики.

Методы исследования. Применяемый в диссертации метод основан на элементах функционального анализа и теории функций комплексных переменных, а также методе факторизации матриц-функций.

Апробации результатов. Основные результаты работы докладывались автором и обсуждались на семинарах кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений Таджикского национального университета. Результаты диссертации были представлены в ходе выступлений на следующих конференциях:

- международная научная конференция "Современные проблемы математики и ее приложения" посвященная 50-летию Института математики им. А. Джураевв НАНТ, г. Душанбе, 30-31 мая 2023 г.;

- международная научная конференция "Современные проблемы математики и ее приложения" посвященная 75-летию ТНУ, 20-летию развитии точных и естественных и математических наук и ва 85-летию акдемика НАНТ Раджабова Н. г. Душанбе, 5-октября 2023 г.;

- международная научная конференция бахшида ба 20-летию развитии точных и естественных и математических наук. Данғара, 30 апреля 2024 г.

Публикации и личный вклад автора. Основные результаты диссертации опубликованы в 10 работах. Из них 4 статьи статьи опубликованы в изданиях, входящих а действующий перечень ВАК при Президенте РТ и ВАК РФ, а 5 статьи в материалах международных конференции.

Работы [1] –[3] опубликованы в соавторстве с научным руководителем, которому принадлежит постановка задач и общее руководство, а диссертанту доказательство основных результатов.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения и трех глав, разбитых на пять параграфов, и составляет 82 с. машинописного текста. Список цитированной литературы состоит из 59 наименований. Работа набрана на LaTeX и в ней для удобства применена сквозная нумерация теорем, лемм и формул. Они имеют двойную нумерацию, в которой первая цифра совпадает с номером главы, вторая указывает на порядковый номер теорем, лемм или формулы в данном параграфе.

Краткое содержание работы

Во введении дан исторический обзор результатов, связанных с темой данной диссертационной работы. Затем приведено описание результатов диссертации.

Первая глава диссертации посвящена исследованию задачи Дирихле и Неймана для общих эллиптических систем дифференциальных уравнений шестого порядка с непрерывными коэффициентами на плоскости.

Вторая глава диссертации посвящена изученю разрешимости задачи Дирихле и Неймана для некоторых классов эллиптических систем дифференциальных уравнений шестого порядка с разрывными коэффициентами на плоскости.

Первый параграф главы 1 носит вспомогательный характер. В нём описаны используемые в работе пространства функций и приводятся основные понятия и факты теории нётеровых операторов в банаховых пространствах.

Во втором параграфе первой главы изучается вопрос разрешимости задачи Дирихле и Неймана для эллиптической системы двух уравнений шестого порядка вида

$$a(z)\frac{\partial^6\omega}{\partial\overline{z}^3\partial z^3}+b(z)\frac{\partial^6\overline{\omega}}{\partial\overline{z}^6}+\sum_{k+j=0}^{5}\left[a_{k,j}(z)\frac{\partial^{k+j}\omega}{\partial\overline{z}^k\partial z^j}+b_{k,j}(z)\frac{\partial^{k+j}\overline{\omega}}{\partial\overline{z}^k\partial z^j}\right]=g(z), \quad (3)$$

где $\omega(z)=u(x,y)+iv(x,y)$; коэффициенты $a(z)$, $b(z)$, $a_{k,j}(z)$, $b_{k,j}(z)$, $(0\leq$

$k+j \leq 5$) будем считать непрерывными в $\overline{D}$, $g(z) \in L^p(D)$, $2 < p < \infty$,

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Задача Дирихле. *Найти функцию $\omega(z)$ из класса $W_p^6(D) \cap C(\overline{D})$, удовлетворяющую внутри G уравнению (3), а на ее границе Γ трем краевым условиям*

$$\omega(z)\Big|_{\Gamma} = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial n}\bigg|_{\Gamma} = 0, \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial n^2}\bigg|_{\Gamma} = 0 \tag{4}$$

где $\frac{\partial \omega}{\partial n}$ - означает производную по направлению внешней нормали в точках контура Γ.

Методом эквивалентного перехода к двумерным сингулярным уравнениям доказана следующая

Теорема 2.1. *Для того, чтобы задача (4), для эллиптической системы (3) в классе $W_p^6(D)$, $2 < p < \infty$ была нетеровой, необходимо и достаточно выполнение условий*

$$|a(z)| \neq |b(z)| \text{ для всех } z \in \overline{D}, \quad a(t) \neq 0 \quad \text{для всех} \quad t \in \Gamma, \tag{5}$$

причем если $|a(z)| > |b(z)|$, то индекс задачи равен 0, а если $|a(z)| < |b(z)|$, то индекс задачи равен

$$\varkappa = -\frac{3}{\pi}\Big[\arg a(t)\Big]_{\Gamma}.$$

Аналогичный результат имеет место для задачи Неймана для уравнения (3).

В третьем параграфе первой главы изучается вопрос разрешимости задачи Дирихле и Неймана для восьми компонентной эллиптической системы двух уравнений шестого порядка вида

$$\begin{gathered} a_0(z)\frac{\partial^6 \omega}{\partial \overline{z}^3 \partial z^3} + b_0(z)\frac{\partial^6 \overline{\omega}}{\partial \overline{z}^3 \partial z^3} + a_1(z)\frac{\partial^6 \omega}{\partial \overline{z}^4 \partial z^2} + b_1(z)\frac{\partial^6 \overline{\omega}}{\partial z^4 \partial \overline{z}^2} + \\ + a_2(z)\frac{\partial^6 \omega}{\partial \overline{z}^5 \partial z} + b_2(z)\frac{\partial^6 \overline{\omega}}{\partial z^5 \partial \overline{z}} + a_3(z)\frac{\partial^6 \omega}{\partial \overline{z}^6} + b_3(z)\frac{\partial^6 \overline{\omega}}{\partial z^6} + \\ + \sum_{k+j=0}^{5}\left[a_{k,j}(z)\frac{\partial^{k+j}\omega}{\partial \overline{z}^k \partial z^j} + b_{k,j}(z)\frac{\partial^{k+j}\overline{\omega}}{\partial \overline{z}^k \partial z^j}\right] = g(z), \end{gathered} \tag{6}$$

где $\omega(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, коэффициенты уравнения $a_j(z)$, $b_j(z)$, $a_{k,j}$, $b_{k,j}(j,k = 0,1,2)$ – заданные функции, непрерывные в замкнутой области $\overline{D} = D \cup \Gamma$, $g(z) \in L^p(D)$, $2 < p < \infty$.

По главной части системы (6) построим следующую матрицу функцию

$$\mathcal{G}_z(t) = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{3} a_n(z)t^n & \sum_{n=0}^{3} b_n(z)\overline{t}^n \\ \sum_{n=0}^{3} \overline{b_n(z)t^n} & \sum_{n=0}^{3} \overline{a_n(z)\overline{t}^n} \end{pmatrix},$$

где $z \in \overline{D}$, $|t| = 1$. Эллиптичность системы (6) означает, что для $\forall$ точки $z \in \overline{D}$ и $\forall\ t : |t| = 1$ должно выполняться неравенство $\det \mathcal{G}_z(t) \neq 0$:

$$|F(z,t)|^2| - |Q(z,t)||^2 \neq 0,\ z \in \overline{D}, \qquad (7)$$

где $F(z,t) = \sum_{n=0}^{3} a_n(z)t^n$, $Q(z,t) = \sum_{n=0}^{3} b_n(z)\overline{t}^n$.

Отметим, что в работах Н.П. Дыбова [25]–[27] методом интегральных уравнений рассматривался эллиптическая система шестого порядка общего вида, однако применительно к (6) полученные результаты охватывают только случай сильно эллиптической системы, то есть когда к соответствующим интегральным уравнениям применим принцип сжатых отображений.

Множество всех полиномиальных матриц вида $\mathcal{G}_z(t)$, удовлетворяющих условию $\det \mathcal{G}_z(t) > 0\,(< 0)$ для всех $z \in \overline{D}$, обозначим через $\mathcal{G}^+\,(\mathcal{G}^-)$. Две матрицы $\mathcal{G}_z^1$, $\mathcal{G}_z^2$ из класса $\mathcal{G}^+$ назовем гомотопными, если существует семейство полиномиальных матриц $\mathcal{G}_z^+(\tau)$ из $\mathcal{G}^+$ непрерывно зависящих от действительного параметра $\tau : 0 \leq \tau \leq 1$, такое, что $\mathcal{G}^+(0) \equiv \mathcal{G}_z^1, \quad \mathcal{G}^+(1) \equiv \mathcal{G}_z^2$.

Пусть $q_1(z)$, $q_2(z)$, $q_3(z)$ – комплексные корни уравнения $F(z,t) = 0$. Согласно условию (7) эти корни не лежат на границе единичного круга, то есть все они по модулю отличны от единицы. В зависимости от количество нулей полинома $F(z,t)$ внутри единичного круга $|t| = 1$ возможно, априори 4 случаев:

- случай ν_0 - полином $F(z,t)$ внутри круга $|t| < 1$ корней не имеет;
- случай ν_k - полином $F(z,t)$ внутри круга $|t| < 1$ имеет ровно k $(k = 1,2,3)$ корней.

Таким образом, соотношение гомотопии разбивает $\mathcal{G}^+$ на 4 класса гомотопии - связанные открытые компоненты ν_k $(k = 0,1,2,3)$. Эти классы образуют полную систему множества $\mathcal{G}^{\pm}$, то есть $\mathcal{G}_z^1$ и $\mathcal{G}_z^2$ из F^+ принадлежат некоторому классу $\nu_j\,(j=0,\ 1,\ 2,\ 3)$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{G}z^1 \sim \mathcal{G}^1$.

Лемма 3.2. *Пусть матрица $\mathcal{G}_z(t)\in\mathcal{G}^+$. Тогда $\mathcal{G}^+$ принадлежит классу ν_j $(j=0,\ 1,\ 2,\ 3)$ тогда и только тогда, когда выполнено неравенство*

$$\Delta_j(z) > M(z) + \Big(M^2(z) + \sum_{\substack{n=0\\ n\neq j}}^{3} |\mu_{j,n}(z)|^2 - |\lambda_{j,n}(z)|^2\Big)^{1/2} \quad \forall z\in\overline{D}, \qquad (8)$$

где

$$\lambda_{j,n} = \overline{a}_j a_n - b_j\overline{b}_n,\ \mu_{j,n} = \overline{a}_j b_n - b_j\overline{a}_n,\ \Delta_n(z) = |a_n(z)|^2 - |b_n(z)|^2,\ n=0,1,2,3;$$

$$M(z) = \max_{|t|=1}[(a_1\overline{a}_0 - b_1\overline{b}_0 + a_2\overline{a}_1 - b_2\overline{b}_1 + a_3\overline{a}_1 - b_3\overline{b}_1)t +$$
$$+(a_2\overline{a}_0 - b_2\overline{b}_0 + a_3\overline{a}_1 - b_3\overline{b}_1)t^2 + (a_3\overline{a}_0 - b_3\overline{b}_0)t^3];$$

Задача Дирихле. *Найти функцию $\omega(z)$ из класса $W_p^6(D)\cap C^2(\overline{D})$, удовлетворяющую внутри D уравнению (6), а на ее границе Γ трем краевым условиям*

$$\omega(z)\big|_\Gamma = 0, \quad \frac{\partial\omega}{\partial n}\bigg|_\Gamma = 0, \quad \frac{\partial^2\omega}{\partial n^2}\bigg|_\Gamma = 0, \qquad (9)$$

где $\frac{\partial\omega}{\partial n}$ - означает производную по направлению внешней нормали в точках контура Γ.

Основными результатами **§3 главы 1** являются

Теорема 3.1. *Пусть матрица $\mathcal{G}_z(t)$ из $\mathcal{G}^+$ принадлежит гомотопическому классу ν_0. Для того чтобы задача (7) для эллиптической системы (6) в классе $W_p^6(D)\bigcap C^2(\overline{D})$ $(2<p<\infty)$ была фредгольмовой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\Delta_0(z) > M(z) + \Big(M^2(z) + \sum_{n=1}^{3} |\mu_{0,n}(z)|^2 - |\lambda_{0,n}(z)|^2\Big)^{1/2} \quad \forall z\in\overline{D}. \qquad (10)$$

Теорема 3.2. *Пусть матрица $\mathcal{G}_z(t)$ из $\mathcal{G}^+$ принадлежит гомотопическому классу ν_j $(j=1,2,3)$. Для того чтобы задача (7) для эллиптической* *системы (6) в классе* $W_p^6(D)\bigcap C^2(\overline{D})$ $(2<p<\infty)$ *была нетеровой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\Delta_j(z) > M(z) + \Big(M^2(z) + \sum_{\substack{n=0\\ n\neq j}}^{3} |\mu_{j,n}(z)|^2 - |\lambda_{j,n}(z)|^2\Big)^{1/2} \qquad (11)$$
$$\text{и} \quad \mu_{j,n}(\tau)\neq 0 \quad \text{для} \quad \forall z\in\overline{D}, \quad \tau\in\Gamma,$$

где

$$\lambda_{j,n}(z) = \overline{a_j(z)}a_n(z) - b_j(z)\overline{b_n(z)}, \ \ \mu_{j,n}(z) = \overline{a_j(z)}b_n(z) - b_j(z)\overline{a_n(z)}.$$

При этом, если выполнено условие (11), то индекс задачи равен

$$\varkappa = -2jInd_\Gamma \mu_{j,0}(\tau),$$

Аналогичный результат имеет место и для задачи Неймана для уравнения (6).

В четвертом параграфе первой главы диссертации исследуется задачи Дирихле и Неймана для общей эллиптической системы двух уравнений от двух независимых переменных порядка 6 на плоскости, комплексная запись которой имеет вид

$$\sum_{n=-3}^{3} a_n(z)\frac{\partial^6\omega}{\partial\overline{z}^{3+n}\partial z^{3-n}} + b_n(z)\frac{\partial^{2m}\overline{\omega}}{\partial\overline{z}^{3-n}\partial z^{n+3}} + \\ + \sum_{0\leq l+j\leq 5} a_{l,j}(z)\frac{\partial^{l+j}\omega}{\partial\overline{z}^l\partial z^j} + b_{l,j}(z)\frac{\partial^{l+j}\overline{\omega}}{\partial\overline{z}^l\partial z^j} = g(z), \qquad (12)$$

где $z = x+iy$, $\omega(z) = u(x,y)+iv(x,y)$. Предпологается, что коэффициенты уравнения (12) являются непрерывными в $\overline{D}$ функциями, а $g(z)\in L^p(D), 2<p<\infty$.

В данном параграфе дается дальнейшее развитие результатов предыдущих параграфов диссертации. В зависимости от гомотопического класса для общих эллиптических систем уравнений 6-го порядка на плоскости установлены необходимые и достаточные условия нётеровости задачи Дирихле и Неймана и получены явные формулы для подсчета индекса.

Для системы (12) построим матрицу символ

$$\mathscr{G}(z,t) = \begin{pmatrix} \mathscr{P}_6(z,t) & \mathscr{Q}_6(z,t) \\ \overline{Q_6(z,t)} & \overline{\mathscr{P}_6(z,t)} \end{pmatrix}, \qquad (13)$$

где

$$\mathscr{P}_6(z,t)=\bar{t}^3\sum_{n=-3}^{m}a_n(z)t^{3+n},\ \mathscr{Q}_6(z,t)=\bar{t}^3\sum_{n=-3}^{3}(-1)^n b_n(z)t^{3-n},$$

Эллиптичность системы (12) означает, что

$$\det\mathscr{G}(z,t)\equiv|\mathscr{P}_6(z,t)|^2-|\mathscr{Q}_6(z,t)|^2\neq 0 \tag{14}$$

для всех $z\in\overline{D}$, $|t|=1$. Из (14) следует, что $P_6(z,t)\equiv t^3\mathscr{P}_6(z,t)=\sum_{n=-3}^{m}a_n(z)t^{3+n}$ – есть комплексный невырождающийся полином степени 6. Пусть $q_k(z)$ $(k=1,2,\dots,6)$ комплексные корни уравнения $P_6(z,t)=0$. Согласно (14) эти корни не лежат на окружности $|t|=1$, т.е. $|q_k(z)|\neq 1$, либо $|q_k(z)|<1$, либо $|q_k(z)|>1$. Корни первой группы обозначим через $q_k^+(z)$, $k=1,2,\dots,l^+$, корни второй группы–через $q_k^-(z)$, $k=1,2,\dots,l^-$, $l^++l^-=6$. В зависимости от количество нулей полинома $P_6(z,t)$ внутри единичного круга $|t|=1$ возможно, априори 7 случаев. Класс матричных полиномов из $\mathscr{F}_+^2$, для которого имеет место один из возможных случаев, будем обозначать через ν_k $(k=0,\pm1,\pm2,\pm3)$.

Определение. Будем говорить, что эллиптическая система (12) принадлежит классу ν_k $(-3\leq k\leq 3)$, если для любых $z\in\overline{D},|t|=1$ выполнено неравенство (14) и

$$\nu_k=Ind_{|t|=1}\mathscr{P}_6(z,t)=l^+-3.$$

Задача Дирихле. *Найти функцию $\omega(z)$ из класса $W_p^6(D)\cap C^2(\overline{D})$, удовлетворяющую внутри D уравнению (12), а на её границе Γ – краевым условиям*

$$\left.\frac{\partial^j\omega}{\partial n^j}\right|_{\Gamma}=0,\ j=0,\ 1,\ 2, \tag{15}$$

где $\frac{\partial\omega}{\partial n}$ - означает производную функции $\omega(z)$ по направлению внешней нормали в точках контура Γ.

Основными результатами **§4 главы 1** являются

Теорема 4.1. *Пусть матрица $\mathcal{G}_z(t)$ из $\mathcal{G}^+$ принадлежит гомотопическому классу ν_0. Для того чтобы задача (15) для эллиптической системы (12) в классе $W_p^6(D)\bigcap C^2(\overline{D})$ $(2<p<\infty)$ была фредгольмовой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\Delta_0(z)>M(z)+\Big(M^2(z)+\sum_{\substack{n=-3\\ n\neq 0}}^{3}|\mu_{0,n}(z)|^2-|\lambda_{0,n}(z)|^2\Big)^{1/2}\quad\forall z\in\overline{D}, \tag{16}$$

Теорема 4.2. *Пусть матрица $\mathcal{G}_z(t)$ из $\mathcal{G}^+$ принадлежит гомотопическому классу ν_j $(j = \pm 1, \pm 2, \pm 3)$. Для того чтобы задача (15) для эллиптической системы (12) в классе $W_p^6(D) \bigcap C^2(\overline{D})$ $(2 < p < \infty)$ была нётеровой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\Delta_j(z) > M(z) + \Big(M^2(z) + \sum_{\substack{n=-3 \\ n \neq j}}^{3} |\mu_{j,n}(z)|^2 - |\lambda_{j,n}(z)|^2\Big)^{1/2} \tag{17}$$

$$\text{и} \quad \mu_{j,0}(\tau) \neq 0 \quad \text{для} \quad \forall z \in \overline{D}, \quad \tau \in \Gamma,$$

где

$$\lambda_{j,n}(z) = \overline{a_j(z)} a_n(z) - b_j(z)\overline{b_n(z)}, \ \mu_{j,n}(z) = \overline{a_j(z)} b_n(z) - b_j(z)\overline{a_n(z)}.$$

При этом, если выполнено условие (17), то индекс задачи равен

$$\varkappa = -2j Ind_\Gamma \mu_{j,0}(\tau),$$

Аналогичный результат имеет место и для задачи Неймана для уравнения (12).

Вторая глава диссертационной работы посвящена исследованию задачи Дирихле и Неймана для некоторых классов эллиптических систем дифференциальных уравнений шестого порядка с разрывными коэффициентами на плоскости.

В параграфе 2.1 главы 2 рассматривается следующая система уравнений

$$\begin{aligned} &a(z)\frac{\partial^6 \omega}{\partial \overline{z}^3 \partial z^3} + (\overline{z}/|z|)^n b(z) \frac{\partial^6 \overline{\omega}}{\partial \overline{z}^6} + \\ &+ \sum_{k+j=0}^{5} \left[a_{k,j}(z) \frac{\partial^{k+j} \omega}{\partial \overline{z}^k \partial z^j} + b_{k,j}(z) \frac{\partial^{k+j} \overline{\omega}}{\partial \overline{z}^k \partial z^j} \right] = g(z), \end{aligned} \tag{18}$$

В системе (18) во втором слагаемом при производной $\overline{\omega}_{\overline{z}\overline{z}}$ в точке $z = 0$ имеют существенный разрыв. На каждом луче, выходящим из начала координат, множитель $(z/|z|)^n$ постоянна и в точке $z = 0$ имеет различные пределы по разным лучам. Отказ от непрерывности коэффициентов приводит к тому, что найденные в §2 первой главы условия нётеровости не являются достаточными, и более того, разрешимость задачи Дирихле будет зависеть от показателя p пространства $L^p(D)$.

В пункте 2.5.1 изучается модельное дифференциальное уравнение

$$a(0)\frac{\partial^6\omega}{\partial\overline{z}^3\partial z^3}+(z/|z|)^n b(0)\frac{\partial^6\overline{\omega}}{\partial\overline{z}^6}=q(z). \tag{19}$$

Задача Дирихле (4) для модельного уравнения (19) с помощью интегрального представление Векуа

$$\omega(z)=-\frac{1}{\pi}\iint\limits_D G_6(z,\zeta)f(\zeta)ds_\zeta, \tag{20}$$

где

$$G_6(z,\zeta)=|\zeta-z|^4\ln\left|\frac{1-z\overline{\zeta}}{\zeta-z}\right|^2-|\zeta-z|^2(1-|z|^2)(1-|\zeta|^2)+\frac{1}{2}(1-|z|^2)^2(1-|\zeta|^2)^2.$$

приводятся к двумерным сингулярным интегральным уравнениям

$$a(0)f(z)+(z/|z|)^n b(0)(S_3\overline{f})(z)+(Tf)(z)=g(z), \tag{21}$$

где

$$(S_3\overline{f})(z)=-\frac{3}{\pi}\iint\limits_D\frac{(\overline{\zeta}-\overline{z})^2}{(\zeta-z)^4}\overline{f(\zeta)}ds_\zeta$$

сингулярный интегральный оператор с четной характеристикой порядка шесть, T – вполне непрерывный оператор. В свою очередь исследование уравнения (21) сводятся к одномерным системам интегральных уравнений с однородными ядрами порядка (-1) относительно коэффициентов Фурье искомой функции $\omega_k r$, изученных в работах Джангибекова [46],[47]. Положим

$$R_\beta(k)=\sqrt{1-\frac{12(1-\beta)}{(k-\beta)(k+4)}}, \tag{22}$$

где $0<\beta<2,$ k принимает значения из множества целых чисел: $k\geq-2$. Обозначим через $\mu_\beta(\lambda)$ число, равное для $|\lambda|<1$ количеству значений k, при которых $R_\beta(k)<|\lambda|$, а для $|\lambda|>1$ равное количеству значений k, при которых $R_\beta(k)>|\lambda|$.

Окончательно получены следующие результаты для модельного двумерного сингулярного интегрального уравнения (21), а также для задачи Дирихле (4) для модельного дифференциального уравнения (19) (при $n=2$)в классе $W_p^6(D)\cap C(\overline{D}),$ $p>2$:

Теорема 5.1. *Для нормальной разрешимости модельного сингулярного интегрального уравнения (18) в* $L^p_{\beta-2/p}(|z|<1)$ *необходимо и достаточно, чтобы* $|\lambda| \neq 1$ *и* $|\lambda| \neq R_\beta(k)$*, где* $k \geq -2$ *и* $k \neq 1$*. При выполнении этих условий индекс* $\varkappa_\beta(\lambda)$ *принимает следующие значения:*

если $0 < \beta \leq 1$*, то* $\varkappa_\beta(\lambda) = -2\mu_\beta(\lambda)$ *при* $|\lambda| < 1$ *и равно* $2(6-\mu_\beta(\lambda))$ *при* $|\lambda| > 1$ *и* $\mu_\beta(\lambda) \neq 3$ *и равно 7 при* $\mu_\beta(\lambda) = 3$*;*

если $1 < \beta < 2$*, то* $\varkappa_\beta(\lambda)$ *равно* $2\mu_\beta(\lambda)$ *при* $|\lambda| < 1$ *и* $\mu_\beta(\lambda) \neq 3$ *и равно 5 при* $|\lambda| < 1$ *и* $\mu_\beta(\lambda) = 3$ *и равно* $2(6+\mu_\beta(\lambda))$ *при* $|\lambda| > 1$*.*

При этом если $\varkappa_\beta(\lambda) > 0$*, то однородное уравнение (18) имеет ровно* $\varkappa_\beta(\lambda)$ *линейно независимых решений, а при* $\varkappa_\beta(\lambda) < 0$ *для разрешимости неоднородного уравнения (18) требуется* $-\varkappa_\beta(\lambda)$ *условия разрешимости, которые выписываются в явном виде.*

Теорема 5.2. *Для того, чтобы задача Дирихле (4) для модельного дифференциального уравнения (2.3) (при* $n = 2$*)в классе* $W^6_p(D) \cap C(\overline{D})$*,* $p > 2$ *была нетеровой, необходимо и достаточно выполнение условий*

$$|a(0)| \neq |b(0)|, |\lambda| \neq R_{2/p}(k), k \geq -2, \tag{23}$$

причем индекс задачи равен

$$\varkappa_{2/p}(\lambda) = \begin{cases} -2\mu_{2/p}(\lambda) & \text{при} \;\; |\lambda| < 1; \\ 2(6-2\mu_{2/p})(\lambda) & \text{при} \;\; |\lambda| > 1, \;\; \mu_\beta(\lambda) \neq 3 \; ; \\ 7 & \text{при} \;\; \mu_{2/p}(\lambda) = 3. \end{cases}$$

Для перехода от указанных результатов к результатам для задачи Дирихле (4) для исходного дифференциальной системы (18) в пункте 2.5.3. доказывается лемма (5.1) о факторизации двумерных сингулярных операторов с разрывными коэффициентами. Из этих результатов для задачи Дирихле (4) следует

Теорема 5.3. *Для разрешимости задачи (4) для уравнения (18)(при* $n = 2$*) в классе* $W^6_p(D) \cap C(\overline{D})$*,* $2 < p < \infty$ *была нетеровой, необходимо и достаточно выполнение условий*
1. $|a(z)| \neq |b(z)|$ *при* $|z| \leq 1$*,* $a(t) \neq 0$ *при* $|t| = 1$*,*
2. $|\lambda| \neq R_{2/p}(k), k \geq -2$*,*
причем индекс задачи равен

$$\varkappa = -6 \underset{|t|=1}{Ind} a(t) + \varkappa_{2/p}(\lambda),$$

где $\varkappa_{2/p}(\lambda)$ определяется из теоремы 5.2.

В параграфе 2.6. главы 2 результаты теорем 5.1 и 5.2. обобщены для задачи Дирихле и Неймана для некоторых классов эллиптических систем дифференциальных уравнений шестого порядка с разрывными коэффициентами вида

$$a(z)\frac{\partial^6\omega}{\partial\overline{z}^3\partial z^3}+b(z)\frac{\partial^6\overline{\omega}}{\partial\overline{z}^3\partial z^3}+(z/|z|)^n c(z)\frac{\partial^6\omega}{\partial\overline{z}^6}+(\overline{z}/|z|)^n d(z)\frac{\partial^6\overline{\omega}}{\partial z^6}+ \\ +\sum_{k+j=0}^{5}\left[a_{k,j}(z)\frac{\partial^{k+j}\omega}{\partial\overline{z}^k\partial z^j}+b_{k,j}(z)\frac{\partial^{k+j}\overline{\omega}}{\partial\overline{z}^k\partial z^j}\right]=g(z). \tag{24}$$

Ниже введем соответствующие обозначения:

$$R_p(k)=\sqrt{1-\frac{2n(1-2/p)}{(k+2/p)(k+2/q-n)}},\ \ k\geq n_0,,$$

$k\neq\dfrac{n}{2}(1+signn)-1$, $1/p+1/q=1$, n_0 - целая часть числа $(n-1)/2$;

$$\Lambda=\begin{cases}\frac{\Delta_1(0)}{\mu(0)}, & \text{если выполнено (1.2);}\\ \frac{\mu(0)}{\Delta_2(0)}, & \text{если выполнено (1.3).}\end{cases}$$

Через $\mu_p(\Lambda)$ обозначим число, равное для $|\Lambda|<1$ количеству значений k при которых $R_p(k)<|\Lambda|$, а для $|\Lambda|>1$ равное количеству значений k, при которых $R_p(k)>|\Lambda|$.

Если $n\geq 0$, то введем число

$$\varkappa_p(\lambda)=\begin{cases}-2\mu_p(\Lambda) & \text{при } |\Lambda|<1,\\ 2n-2\mu_p(\Lambda) & \text{при } |\Lambda|>1, \text{ и } \mu_p(\Lambda)\neq n/2,\\ n+1 & \text{при } |\Lambda|>1, \text{ и } \mu_p(\Lambda)=n/2,\end{cases}$$

если $n\leq -1$, то введем

$$\varkappa_p(\Lambda)=\begin{cases}-2\mu_p(\Lambda) & \text{при } |\Lambda|<1, \text{ и } \mu_p(\Lambda)\neq n/2,\\ 2n-2\mu_p(\Lambda) & \text{при } |\Lambda|>1,\\ n+1 & \text{при } |\Lambda|<1, \text{ и } \mu_p(\Lambda)=n/2.\end{cases}$$

Задача Дирихле. *Найти искомую функцию $\omega(z)$ из пространства $W_p^6(D)\cap C(\overline{D})$, удовлетворяющую внутри D уравнению (24), а на ее границе Γ трем условиям*

$$\omega(z)\big|_\Gamma=0,\quad \frac{\partial\omega}{\partial n}\bigg|_\Gamma=0,\quad \frac{\partial^2\omega}{\partial n^2}\bigg|_\Gamma=0 \tag{25}$$

где $\frac{\partial\omega}{\partial n}$ *- означает производную по направлению внешней нормали в точках контура* Γ.

Доказаны следующие утверждения

Теорема 6.1. *Пусть в (24)* $n = 0$. *Тогда для того чтобы задача Дирихле (25) для системы (24) в пространстве* $W_p^6(D)$, $2 < p < \infty$ *была нётеровой, необходимо и достаточно выполнение одного из следующих условий:*

$$|\Delta_1(z)| > |\lambda(z)| + |\mu(z)| \quad \text{для всех} \quad z \in \overline{D}, \tag{26}$$

$$|\Delta_2(z)| > |\lambda(z)| + |\mu(z)| \text{ для всех } \quad z \in \overline{D};\ \mu(t) \neq 0 \text{ для всех } \quad t \in \Gamma. \tag{27}$$

При этом если выполнено условие (26), то задача фредгольмова; если выполнено (27), то индекс задачи равен

$$\varkappa = -2Ind_\Gamma \mu(t).$$

Теорема 6.2. *Пусть в (24)* $n \neq 0$ *и* $\lambda(0) = 0$. *Если* $\Lambda \neq 1, \Lambda \neq R_n(k), k$ *целое,* $k \geq 1/2n(1 + signn)$ *и выполняется одно из условий (26), (27), тогда, задача Дирихле для системы (24) в классе* $W_p^6(D)$, $2 < p < \infty$ *нётерово, при этом если выполнено (26), то индекс задачи равен* $\varkappa_p(\Lambda)$, *а если выполнено (27), то*

$$\varkappa = 2Ind_\Gamma \mu(t) + \varkappa_p(\lambda).$$

Изучена также задача Неймана:

Задача Неймана. Найти непрерывные решения системы (24) в области $\overline{D}$ из класса $W_p^2(D), 2 < p < \infty$, удовлетворяющие на границе Γ условию

$$\frac{\partial\omega}{\partial\nu}\Big|_\Gamma = 0. \tag{28}$$

Выводы

Основные полученные результаты данной диссертационной работы заключаются в следующем:

- **получены** эффективные необходимые и достаточные условия нетеровости и формулы для подсчета индекса задачи Дирихле и Неймана для одной эллиптической системы шестого порядка с двумя неизвестными функциями от двух независимых переменных с непрерывными коэффициентами на плоскости;[1-А]

- для некоторых классов эллиптических систем шестого порядка с непрерывными коэффициентами на плоскости **получены** эффективные необходимые и достаточные условия нётеровости и формулы для подсчета индекса задачи Дирихле и Неймана[2-А,3-А];

- **найдены** эффективные необходимые и достаточные условия нетеровости и формулы для подсчета индекса задачи Дирихле и Неймана для общей эллиптической системы шестого порядка с двумя неизвестными функциями от двух независимых переменных с непрерывными коэффициентами на плоскости[3-А,4-А];

- **доказаны** теоремы разрешимости задачи Дирихле и Неймана для некоторых классов эллиптических систем шестого порядка с разрывными коэффициентами и получена формулы для подсчета индекса[2-А,5-А].

Рекомендации по практическому использованию результатов

Результаты полученные в данной диссертационной работы можно применить к изучению краевых задач Гильберта и Римана для эллиптических систем дифференциальных уравнений по ограниченной области

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. В журналах, входящих в перечень ВАК при Президенте Республики Таджикистан:

[1-М] ДЖАНГИБЕКОВ Г., ФАЙЗЗОДА К.Ш. Задача Дирихле для эллиптических систем двух уравнений шестого порядка на плоскости / Джангибеков Г., Файззода К.Ш. // Вестник филиала МГУ им.М.В. Ломоносова в г. Душанбе, сер. естетв. наук, 2022, т.1, №4, с. 20 – 24.

[2-М] ФАЙЗЗОДА К.Ш. О решении задачи Дирихле для одной эллиптической системы шестого порядка с разрывным коэффициентом / Файззода К.Ш., // Доклады НАН Таджикистана, 2023, т. 66, №4, с. 9 - 10, 530–539.

[3-М] ДЖАНГИБЕКОВ Г., ФАЙЗЗОДА К.Ш. Задача Дирихле для некоторых эллиптических систем дифференциальных уравнений шестого порядка на плоскости / Джангибеков Г., Файззода К.Ш. // Известия НАН Таджикистана, 2023, №3, с. 17–28.

[4-М] ДЖАНГИБЕКОВ Г., ФАЙЗЗОДА К.Ш. Задачи Дирихле и Неймана для общих эллиптических систем дифференциальных уравнений шестого порядка на плоскости / Джангибеков Г., Файззода К.Ш // , 2024, т. 67, №3-4, с. 165 – 177.

[5-М] ФАЙЗЗОДА К.Ш. Задачи Дирихле и Неймана для некоторых классов эллиптических систем дифференциальных уравнений шестого порядка с разрывными коэф фициентами на плоскости / Файззода К.Ш., // Доклады НАН Таджикистана, 2025, т. 68, №1.

2. В других изданиях:

[6-М] ФАЙЗЗОДА К.Ш. Задачи Дирихле для некоторых эллиптических систем дифференциальных уравнений шестого порядка на плоскости./ ДЖАНГИБЕКОВ Г., ФАЙЗЗОДА К.Ш.//Материалы международной конференции, посвященной "Двадцатилетием изуч. и разв.эстесвн., точных и математич. наук."Дангара, 30 апреля 2024 г.

[7-М] ФАЙЗЗОДА К.Ш. Задачи Дирихле для некоторых эллиптических систем дифференциальных уравнений шестого порядка на плоскости./ //Материалы международной конференции, посвященной "Двадцатилетие изуч. и разв.эстесвн., точных и математич. наук."Дангара, 30 апреля 2024 г.

[9-M] ФАЙЗЗОДА К.Ш. Задачи Дирихле и Неймана для некоторых классов эллиптических систем дифференциальных уравнений шестого порядка с разрывными коэффициентами на плоскости / ДЖАНГИБЕКОВ Г., ФАЙЗЗОДА К.Ш.//Материалы международной конференции Современной проблемы математии и ее приложение, Душанбе, 30-31 мая 2024 г.

[9-M] ФАЙЗЗОДА К.Ш. О решении задачи Дирихле для одной эллиптической системы шестого порядка с разрывными коэф фициентами/ ФАЙЗЗОДА К.Ш.//Материалы международной конференции, посвященной "Двадцатилетие изуч. и разв.эстесвн., точных и математич. наук."Дангара, 30 апреля 2024 г.

АННОТАТСИЯИ

диссератсияи Файззода Кишвар Шоҳпулод дар мавзӯи "Ҳалшавандагии масъалаҳои канории Дирихле ва Нейман барои системаи муодилаҳои умумии эллиптикии тартиби шаш дар ҳамворӣ" барои дарёфти дараҷаи илмии доктори фалсафа (PhD)–доктор аз рӯи ихтисоси 6D060100–МАТЕМАТИКА: 6D060102–Муодилаҳои дифференсиалӣ, системаҳои динамикӣ ва идоракунии оптималӣ пешниҳод шудааст

Вожаҳои калидӣ: муодилаҳои эллиптикӣ, масъалаи Дирихле ва Нейман, нётеровӣ будан, индекси масъала, муодилаҳои сингулярӣ.

Объекти тадқиқот. Объекти тадқиқот ин системаҳои муодилаҳои дифференсиалии эллиптикии тартиби шаш бо коэффитиентҳои бефосила ва дар як нуқта канишнок мебошад.

Мақсади тадқиқот. Мақсади асосии кори диссертатсионӣ омӯзиши ҳалшавандагии масъалаи Дирихле ва Нейман дар соҳаи маҳдуд аст.

Навгонии илмии тадқиқот. Натиҷаҳои асосии диссертатсия нав буда, чунинанд: шартҳои зарурӣ ва кифоягии нётеровӣ будани масъалаҳои Дирихле ва Нейман барои як системаи эллиптикии тартиби шаши вобаста аз ду тағйирёбанда бо коэффитсентҳои бефосила дар ҳамворӣ исбот карда шуда формулаи ҳисоб намудани индекси масъалаҳо ёфта шудааст; барои баъзе синфҳои системаи эллиптикии тартиби шаши вобаста аз ду тағйирёбанда бо коэффитсентҳои бефосила дар ҳамворӣ теоремаҳо оиди шартҳои зарурӣ ва кифоягии нетеровӣ будан ва формула барои ҳисоб намудани индекс исбот карда шудааст; шартҳои эффективноки зарурӣ ва кифоягии нётеровӣ будан ва формула барои ҳисоб намудани индекси системаи умумии эллиптикии тартиби шаши аз ду функсияҳои номаълуми ду тағйирёбанданок бо коэффитсиентҳои бефосила ёфта шудааст; теоремаҳои ҳалшавандагии масъалаҳои Дирихле ва Нейман барои баъзе синфҳои системаҳои эллиптикии тартиби шаш бо коэффитсентҳои канишнок исбот карда шуда формулаҳо барои ҳисоб намудани индекси масъалаҳо ҳосил карда шудааст.

Арзишҳои назариявӣ ва амалӣ. Натиҷаҳои дар диссертатсия ба даст овардашуда, асосан характери назариявӣ доранд ва ба назарияи муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ дар фазоҳои нормирондашудаи функсияҳои тағйирёбандаҳояш комплексӣ мансубанд. Онҳо метавонанд дар ҳалли масъалаҳои механика, динамикаи газӣ ва дигар қисмҳои физика истифода шаванд.

АННОТАТЦИЯ

диссератции Файззода Кишвар Шохпулод на тему "Разрешимость задачи Дирихле и Неймана для общих эллиптических систем дифференциальных уравнений шестого порядка на плоскости" на соискание учёной степени доктора философии (PhD)–доктора по специальности 6D060100–МАТЕМАТИКА: 6D060102–Дифференциальные уравнения, динамические системы, оптимальные управление

Ключевые слова: эллиптические уравнения, задача Дирихле и Неймана, нётеровость задачи, индекс задачи, сингулярные уравнения.

Объект исследования: объектом исследования является эллиптическая система дифференциальных уравнений шестого порядка с непрерывными и разрывными в одной точке.

Цель исследования: Основной целью работы заключается в изучении разрешимости задачи Дирихле и Неймана для общих эллиптических систем дифференциальных уравнений шестого порядка на плоскости.

Научная новизна: Основные результаты диссертации являются новыми и заключаются в следующем: получены эффективные необходимые и достаточные условия нётеровости и формулы для подсчета индекса задачи Дирихле и Неймана для одной эллиптической системы шестого порядка с двумя неизвестными функциями от двух независимых переменных с непрерывными коэффициентами на плоскости; для некоторых классов эллиптических систем шестого порядка с непрерывными коэффициентами на плоскости получены эффективные необходимые и достаточные условия нетеровости и формулы для подсчета индекса задачи Дирихле и Неймана; найдены эффективные необходимые и достаточные условия нётеровости и формулы для подсчета индекса задачи Дирихле и Неймана для общей эллиптической системы шестого порядка с двумя неизвестными функциями от двух независимых переменных с непрерывными коэффициентами на плоскости; теоремы разрешимости задачи Дирихле и Неймана для некоторых классов эллиптических систем шестого порядка с разрывными коэффициентами и получена формулы для подсчета индекса.

Теоретическая и практическая ценность: Результаты, полученные в диссертации, носят теоретический характер. Они могут послужить основой для дальнейших теоретических исследований в теории краевых задач для уравнений с частными производными. Практическая ценность работы определяется прикладной значимостью дифференциальных уравнений.

SUMMARY

of the dissertation Fayzzoda Kishvar SHohpulod of the "Of the Dirichlet for some elliptic systems of sixes-order differental equations the plane" submitted for the degree of Doctor of Philosphy (PhD) the degree of 6D060100 –Mathematics:

Sciences in the specialty 01.01.02 - Differential equations, Dynamical systems and Optimal control

Key words: *singular integral operators, symbol, index, Noethericity operators.*

The purpose of research.: The object of the study is an elliptic system of differential equations of the sixth order with continuous and discontinuous at one point.

Scientific novelty: The main results of the dissertation are new and are as follows: effective necessary and sufficient conditions and formulas for calculating the index of the Dirichlet and Neumann problem for one elliptic system of sixth order with two unknown functions of two independent variables with continuous coefficients on the plane are obtained; for some classes of elliptic systems of sixth order with continuous coefficients on the plane, effective necessary and sufficient conditions for Noetherian property and formulas for calculating the index of the Dirichlet and Neumann problem are obtained; effective necessary and sufficient conditions and formulas for calculating the index of the Dirichlet and Neumann problem are found for a general elliptic system of sixth order with two unknown functions of two independent variables with continuous coefficients on the plane; solvability theorems for the Dirichlet and Neumann problem for some classes of elliptic systems of sixth order with discontinuous coefficients and formulas for calculating the index are obtained.

Theoretical and practical value. The main objective of the work is to study the solvability of the Dirichlet and Neumann problem for general elliptic systems of sixth-order differential equations on the plane.