ВАЗОРАТИ МАОРИФ ВА ИЛМИ ҶУМҲУРИИ ТОҶИКИСТОН
ДОНИШГОҲИ МИЛЛИИ ТОҶИКИСТОН

Бо ҳуқуқи дастнавис

ВБД 517.968.7; 517.983

ИСКАНДАРИ ҶУМЪАХОН

ТАҲҚИҚИ БАЪЗЕ СИНФҲОИ МУОДИЛАҲОИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНСИАЛӢ БО НУҚТАИ РОСТИ БАРЗИЁД СИНГУЛЯРӢ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т И
диссертатсия барои дарёфти дараҷаи илмии номзади илмҳои физикаю математика аз рӯйи ихтисоси 01.01.02 – Муодилаҳои дифференсиалӣ, системаҳои динамикӣ ва идоракунии оптималӣ

Душанбе – 2024

Диссертатсия дар кафедраи математикаи олии факултети механика ва математикаи Донишгоҳи миллии Тоҷикистон иҷро гардидааст.

Роҳбари илмӣ:	**Зарифзода Сарвар Қаҳрамон**, доктори илмҳои физика ва математика, дотсенти кафедраи математикаи ҳисоббарорӣ ва механикаи факултети механика ва математикаи Донишгоҳи миллии Тоҷикистон.
Муқаризони расмӣ:	**Шамсуддинов Файзулло Маҳмадуллоевич**, доктори илмҳои физикаю математика, профессори кафедраи таҳлили математикӣ ва муодилаҳои дифференсиалии Донишгоҳи давлатии Бохтар ба номи Н.Хусрав
	Садриддинов Маҳмади Маҳмудович, номзади илмҳои физикаю математика, мудири кафедраи математикаи олии Донишгоҳи техникии Тоҷикистон ба номи академик М. С. Осимӣ
Муассисаи пешбар:	Донишгоҳи давлатии молия ва иқтисоди Тоҷикистон

Ҳимоя санаи 15 январи соли 2025, соати 14:00 дар ҷаласаи Шурои диссертатсионии 6D.КОА-011-и назди Донишгоҳи миллии Тоҷикистон баргузор мегардад. Нишонӣ: 734027, ш. Душанбе, кӯчаи Буни Ҳисорак, факултети механикаю математика, бинои 17, синфхонаи 203.

Бо диссертатсия дар Китобхонаи марказии илмии Донишгоҳи миллии Тоҷикистон ва ё дар сомонаи *http://www.tnu.tj* шинос шудан мумкин аст.

Автореферат «____» «_____________» соли 2024 ирсол гардидааст.

Котиби илмии
Шурои диссертатсионии 6D. КОА-011,
номзади илмҳои физикаю математика  **Ғафоров А.Б.**

МУҚАДДИМА

Мубрамияти таҳқиқот аз рӯйи мавзуи диссертатсияи илмӣ. Дар ин диссертатсияи илмӣ як синфи муодилаҳои интегро-дифференсиалии тартиби якум бо ядрои барзиёд сингулярӣ мавриди таҳқиқ қарор гирифтааст. Диққати асосӣ ба ҳалли муодилаҳои интегро-дифференсиалии тартиби олӣ ва ҳалли масъалаи Коши барои ин синфи муодилаҳо равона карда шудааст.

Муодилаҳои интегро-дифференсиалӣ дар амалия дар шохаҳои гуногуни илми физика ва механика татбиқ мегарданд. Масалан, ин гуна муодилаҳо ҳангоми омӯзиши равандҳое, ки дорои хотираи муайян мебошанд, васеъ татбиқ ёфтаанд. Ҳангоми ҳаракати тайёра дар осмон масъалаи муқовимати ҳаво ва газҳо ба қанотҳои тайёра низ бо ёрии муодилаҳои интегро-дифференсиалӣ тавсиф дода мешавад. Муодилаҳое, ки бо ёрии онҳо масъалаҳои ба аэродинамика алоқаманд омӯхта мешаванд, инҳо муодилаҳои интегро-дифференсиалӣ бо ядроҳои сингулярӣ мебошанд.

Ба омӯзиши муодилаҳои интегралӣ ва интегро-дифференсиалӣ бо ядроҳои регулярӣ ва сингулярӣ корҳои олимони зиёд ба мисли Я.В. Быков [47], М.В. Булатов [46], Ю.Н. Валитский [48], В.В. Василев [49], М.М. Вейнберг [51], И.Н. Векуа [50], Н.П. Векуа [53], В. Волтерра [55], А.Д. Ҷураев [62], [63], Л.Г. Михайлов [86], [87], Н. Раҷабов [93]- [124], Г. Ҷангибеков [60], [61], .Н. Раҷабова [125]- [137], А.И. Некрасов [89], В.Н. Николаенко [90], Н.А. Сидоров [141], С.Л. Соболев [143], М.В. Фалалеев [145], Г.А. Шишкин [147] ва дигарон бахшида шудааст.

Ҷалб гардидани диққати ин гуна олимони зиёд ба омӯзиши муодилаҳои интегро-дифференсиалии сингулярӣ ин худ нишондиҳандаи муҳиммияти омӯзиши ин синфи муодилаҳо мебошад. Маълум мегардад, ки муодилаҳои интегро-дифференсиалии сингулярӣ яке аз шохаҳои зудинкишофёбандаи синфи муодилаҳои дифференсиалӣ ва интегралӣ буда, диққати олимони зиёд ба омӯзиши онҳо ҷалб гардидааст.

Дар аксарият аз корҳои дар боло номбаршуда мафҳуми сингулярнокии ядрои муодилаи омӯхташаванда дар маънои Коши фаҳмида мешавад. Муодилаҳои интегралӣ ва интегро-дифференсиалие, ки ядрояшон дорои нуқтаҳои махсуси намуди Коши мебошанд, дар корҳои [57], [82], [85], [88] ба таври васеъ ҳаллу фасл гардидаанд.

Дар фарқият ба ин дар амалия муодилаҳое вомехӯранд, ки мафҳуми сингулярнокии ядрои ин гуна муодилаҳо дар маънои одии Риман фаҳмида мешавад.

Ба омӯзиши муодилаҳои интегро-дифференсиалӣ бо ядроҳои сингулярии намуди Риман то замони муосир диққати камтар зоҳир карда шудааст. Аз ин рӯ, омӯзиши густардаи ин синфи муодилаҳо айни замон саривақтӣ ва хеле муҳим ҳисобида мешавад.

Дараҷаи таҳқиқи мавзуи илмӣ. Омӯзиши васеи муодилаҳои дифференсиалии одӣ ва муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ дар интиҳои асри XIX ва ибтидои асри XX дар корҳои олимони бузурги он замон ба мисли Ф. Гаусс, Б. Риман, К. Вейерштрасс, Ф. Клейн, Д. Гилберт ва ғайраҳо ба мушоҳида мерасад. Баъдтар омӯзиши муодилаҳои дифференсиалии таназзулёбанда ба худ муҳиммияти махсусро касб менамоянд. Таҳқиқи ин синфи муодилаҳо аз корҳои классикони гузашта, ба мисли Л. Эйлер, С. Пуассон, Ж. Дарбу сарчашма гирифта, баъдтар дар корҳои олимон А.В. Битсадзе, И.Н. Векуа, В.Ф. Волкодавов, В.Н. Врагов, Ю.В. Егоров, М.В. Келдиш, А.А. Килбас, Л.Д. Кудрявсев, П.И. Лизоркин, О.И. Маричев, Л.Г. Михайлов, С.Г. Михлин, Е.И. Моисеев, А.М. Нахушев, С.М. Николский, И.Г. Петровский, Л.С. Пулькин, Н. Раҷабов, Л.Н. Раҷабова, О.А. Репин, К.Б. Сабитов, М.С.

Салоҳитдинов, А.С. Сатторов, А.П. Солдатов, З.Д. Усманов, С.А. Исхоқов, Ф.М. Шамсуддинов, А.И. Янушаускас ба авҷи аълои инкишофи худ расидааст.

Назарияҳои умумӣ барои муодилаҳои дифференсиалӣ бо коэффисиентҳои сингулярӣ ё таназзулёбанда дар корҳои олимони ватанӣ, чун Л.Г. Михайлов [86], [87], А.Д. Ҷураев [62], [63], Н. Раҷабов [93]- [124], Л.Н. Раҷабова [125]- [137], А.С. Сатторов [112], З.Д. Усманов, М. Исмати, С.А. Исҳоқов, Ф.М. Шамсуддинов [146] сохта шудааст.

Муодилаҳои диффаренсиалии таназзулёбанда дар назарияи потенсиалҳо, дар назарияи акустика ва динамикаи газ, ҳангоми омӯзиши муодилаи Максвел-Эйнштейн, дар назарияи муқовимат ва чандирнокӣ татбиқи васеъ ёфтаанд.

Солҳои охир дар ҷумҳурӣ назарияи як синфи муодилаҳои интегралӣ бо ядроҳои сингулярии намуди Риман дар корҳои илмии академик Н. Раҷабов сохта шудааст. Методи дар корҳои Н. Раҷабов сохташуда, баъдан дар корҳои шогирдонаш ба мисли Л.Н. Раҷабова, Ф. Шамсуддинов, С.Қ. Зарифзода, С. Саидов, С. Зарипов ва дигарон ба таври васеъ татбиқ гардидааст.

Дар монографияи илмии Н. Раҷабов муодилаҳои интегралии намуди Волтерра бо ядроҳои сингулярии намуди

$$\varphi(x)+\int_a^x \frac{K(x,t)}{t-a}\varphi(t)dt=f(x)$$

ва

$$\varphi(x)+\int_a^x \frac{K(x,t)}{(t-a)^\alpha}\varphi(t)dt=f(x),$$

таҳқиқ карда шудааст. Тавре аз ин ҷо дида мешавад, ядрои муодилаи якум дар нуқтаи $t=a$ дорои махсусияти тартиби якум буда, муодилаи дуюм дар ин нуқта дорои махсусияти тартибаш калон аз як мебошад. Инчунин ин муодилаҳо дар ҳолатҳое, ки ядрояшон дорои махсусияти логарифмӣ ва дараҷагӣ мебошанд, дар корҳои Н. Раҷабов ва шогирдонаш таҳқиқ гардидаанд.

Дар корҳои илмии Л.Н. Раҷабова ва шогирдонаш назарияи муодилаҳои интегралии дученакаи намуди Волтерра бо ядроҳои сингулярӣ ва барзиёд сингулярии намуди

$$u(x,y)+\lambda\int_a^x \frac{u(t,y)}{(t-a)^\alpha}dt+\mu\int_b^y \frac{u(x,s)}{(b-s)^\beta}ds+\delta\int_a^x \frac{dt}{(t-a)^\alpha}\int_y^b \frac{u(t,s)}{(b-s)^\beta}ds=f(x,y)$$

сохта шудааст.

Усули дар ин корҳо истифодашуда дар диссертатсияи докторӣ С.Қ. Зарифзода барои муодилаҳои интегро-дифференсиалӣ бо ядроҳои махсусияташон гуногун гузаронида шудааст. Инчунин, дар корҳои С.Қ. Зарифзода усули оператсионии ҳалли ин синфи муодилаҳо кор карда бароварда шудааст.

Натиҷаҳои муайян ҳангоми таҳқиқи муодилаҳои интегро-дифференсиалӣ бо ядрои барзиёд сингулярӣ дар корҳои муаллиф ба даст оварда шудааст, ки ин натиҷаҳо дар мақолаҳои илмии [1-М], [2-М], [3-М], [4-М], [5-М], [6-М], [7-М], [8-М], [9-М], [10-М], [11-М], [12-М], [13-М] ба чоп расонида шудаанд.

Аз таҳлили чунин натиҷаҳо бармеояд, ки мавзуъ ва объекти таҳқиқоти диссертатсияи илмии мазкур муҳим мебошад.

Робитаи кор бо барномаҳо (лоиҳаҳо) ва мавзуъҳои илмӣ. Таҳқиқоти илмии мазкур дар чаҳорчӯбаи амалисозии нақшаи дурнамои корҳои илмӣ-таҳқиқотии кафедраи математикаи олӣ, кафедраи математикаи ҳисоббарорӣ ва механикаи факултети механика ва математикаи Донишгоҳи миллии Тоҷикистон барои солҳои 2020-2025 дар мавзуъҳои «Таҳқиқоти аналитикӣ, таҳлили сифатӣ ва ҳалли ададии масъалаҳои математикаи амалӣ ва механика» ва «Муодилаҳо ва системаи муодилаҳои дифференсиалии таназзулёбанда» амалӣ карда шудааст.

ТАВСИФИ УМУМИИ ТАҲҚИҚОТ

Мақсади таҳқиқот. Мақсади кори мазкур ба даст овардани ҳалли умумӣ ва таҳқиқ намудани масъалаи Коши барои як синфи муодилаҳои интегро-дифференсиалии тартиби якум бо ядрои барзиёд сингулярӣ мебошад. Дарёфт намудани роҳҳои ҳалли муодилаҳои интегро-дифференсиалии тартиби олӣ бо ядрои барзиёд сингулярӣ низ яке аз мақсадҳои асосии кор ба шумор меравад.

Масъалаҳои таҳқиқот. Мувофиқи мақсади гузошташуда масъалаҳои зеринро ҷудо менамоем:

- ба даст овардани тасвири интегралии ҳал барои муодилаи интегро-дифференсиалии моделӣ бо ядрои барзиёд сингулярии тартиби якум;
- ба даст овардани тасвири интегралии ҳал барои муодилаи интегро-дифференсиалии ғайримоделӣ бо ядрои барзиёд сингулярии тартиби якум;
- омӯзиши хосиятҳои ҳалҳои бадастовардашуда;
- таҳқиқи масъалаи Коши барои муодилаи интегро-дифференсиалии моделӣ;
- таҳқиқи масъалаи навъи Коши барои муодилаи интегро-дифференсиалии моделӣ;
- ба даст овардани тасвири интегралии ҳал барои муодилаи интегро-дифференсиалии тартиби олӣ бо ядрои барзиёд сингулярӣ.

Объекти таҳқиқоти диссертатсияи илмии мазкур инҳо мебошанд:

- муодилаи интегро-дифференсиалии тартиби якуми моделӣ бо ядрои барзиёд сингулярӣ;
- муодилаи операторӣ-дифференсиалии тартиби дуюм, ки бо ёрии оператори дифференсиалии D_x^α сохта шудааст;
- муодилаи интегро-дифференсиалии тартиби якуми ғайримоделӣ бо ядрои барзиёд сингулярӣ;
- муодилаи интегро-дифференсиалии тартиби олӣ бо ядрои барзиёд сингулярӣ.

Усулҳои таҳқиқот. Дар кор усулҳои умумии назарияи муодилаҳои дифференсиалӣ, усули ҳосил намудани тасвири интегралӣ, усули табдилотҳои интегралӣ, усулҳои оператсионии таҳқиқот, усули ёфтани ҳалли муодилаҳои интегро-дифференсиалӣ ва инчунин ба таври васеъ усулҳое, ки дар корҳои Н. Раҷабов коркард шудаанд, истифода бурда шудааст.

Навгонии илмии таҳқиқот. Натиҷаҳои диссертатсияи илмӣ нав буда, аз тарафи муаллиф мустақилона ба даст оварда шудааст ва аз инҳо иборат мебошанд:

- тасвири интегралии ҳал барои муодилаи интегро-дифференсиалии моделии тартиби якум бо ядрои барзиёд сингулярӣ ба даст оварда шудааст;
- тасвири интегралии ҳал барои муодилаи интегро-дифференсиалии ғайримоделии тартиби якум бо ядрои барзиёд сингулярӣ ба даст оварда шудааст;

- хосиятҳои ҳалҳои бадастовардашуда омӯхта шудааст;
- масъалаи Коши барои муодилаи интегро-дифференсиалии моделӣ таҳқиқ гардидааст;
- масъалаи навъи Коши барои муодилаи интегро-дифференсиалии моделӣ таҳқиқ гардидааст;
- тасвири интегралии ҳал барои муодилаи интегро-дифференсиалии тартиби олӣ бо ядрои барзиёд сингулярӣ ба даст оварда шудааст.

Натиҷаҳои ба ҳимоя пешниҳодшаванда:

- исботи теоремаҳо оид ба сохти ҳалли умумии муодилаи интегро-диференсиалии моделӣ бо ядрои барзиёд сингулярӣ;
- исботи теоремаҳо оид ба сохти ҳалли умумии муодилаи интегро-диференсиалии ғайримоделӣ бо ядрои барзиёд сингулярӣ;
- исботи теоремаҳо оид ба ҳалли масъалаи Коши барои муодилаи интегро-диференсиалии моделӣ бо ядрои барзиёд сингулярӣ;
- исботи теоремаҳо оид ба ҳалли масъалаи навъи Коши барои муодилаи интегро-диференсиалии моделӣ бо ядрои барзиёд сингулярӣ;
- исботи теоремаҳо оид ба сохти ҳалли умумии муодилаи интегро-диференсиалии тартиби олӣ бо ядрои барзиёд сингулярӣ.

Арзиши назариявӣ ва амалии таҳқиқот. Таҳқиқотҳои дар ин диссертатсияи илмӣ гузаронидашуда характери назариявӣ доранд. Натиҷаҳои илмии бадастовардашуда барои инкишофи минбаъдаи назарияи муодилаҳои интегро-дифференсиалӣ бо ядроҳои сингулярӣ ва барзиёд сингулярӣ, барои муодилаҳои интегро-дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ ва бо ядроҳои сингулярӣ ва барзиёд сингулярӣ ва инчунин дар қисматҳои дигари илмҳои амалӣ ба мисли физика, механика ва ғайра истифода мешаванд. Маводи диссертатсияи илмии мазкурро ҳангоми хондани курсҳои махсус барои донишҷӯёни курсҳои болоӣ, магистрон ва докторантони мактабҳои олӣ, ки аз рӯйи ихтисосҳои математика, математикаи амалӣ ва механика таҳсил менамоянд, истифода бурдан мумкин аст.

Эътибрнокии таҳқиқот. Эътибрнокии натиҷаҳои илмии дар ин диссертатсия бадастовардашуда, бо ёрии ҳисобкуниҳо ва исботҳои дақиқи математикӣ, ки ба усулҳои назарияи муодилаҳои дифференсиалӣ ва интегралӣ такя мекунанд, асоснок карда шудаанд.

Мутобиқати диссертатсия ба шиносномаи ихтисос. Диссертатсияи илмӣ аз рӯйи ихтисоси 01.01.02 – Муодилаҳои дифференсиалӣ, системаҳои динамикӣ ва идоракунии оптималӣ таълиф гардидааст ва пурра ба формулаи он (муодилаҳои дифференсиалии одӣ) ва се қисми соҳаи таҳқиқот (1. Назарияи умумии муодилаҳои дифференсиалӣ ва системаи муодилаҳои дифференсиалӣ; 2. Масъалаҳои ибтидоию канорӣ ва спектрӣ барои муодилаҳои дифференсиалӣ ва системаи муодилаҳои дифференсиалӣ; 3. Назарияи муодилаҳои операторӣ-дифференсиалӣ) мувофиқат мекунад. Диссертатсияи мазкурро қисми таҳлили ҳақиқӣ, комплексӣ ва функсионалӣ (ихтисоси ҳамгиро 01.01.01 – Таҳлили ҳақиқӣ, комплексӣ ва функсионалӣ) шуморидан мумкин аст.

Тасвиби натиҷаҳо. Натиҷаҳои асосии диссертатсия борҳо дар конференсиаҳои ҷумҳуриявӣ ва байналмилалии зерин маъруза гардидааст:

- конференсияи байналмилалӣ дар мавзуи «Масъалаҳои муосири таҳлили функсионалӣ ва муодилаҳои дифференсиалӣ» (ш. Душанбе, Тоҷикистон, 25-26 декабри соли 2020);

- конференсияи байналмилалии илмию амалӣ дар мавзуи «Оиди тадбиқи муодилаҳои дифференсиалӣ дар ҳалли масъалаҳои амалӣ» (ш. Душанбе, Тоҷикистон, 4 ноябри соли 2021);
- конференсияи илмӣ-амалии байналмилалӣ дар мавзуи «Масъалаҳои мубрами математикаи муосир» (ш. Душанбе, Тоҷикистон, 25-26 июни соли 2021);
- конференсияи илмӣ-амалии ҷумҳуриявӣ дар мавзуи «Масъалаҳои мубрами математикаи муосир» (ш. Душанбе, Тоҷикистон, 14 октябри соли 2022);
- конференсияи илмӣ-амалии байналмилалӣ дар мавзуи «Масъалаҳои муосири математика ва татбиқи он» (ш. Душанбе, Тоҷикистон, 20-21 октябри соли 2022);
- конференсияи илмӣ-амалии байналмилалӣ дар мавзуи «Таҳлили комплексӣ ва татбиқҳои он» (ш. Бохтар, Тоҷикистон, 19 ноябри соли 2022);
- конференсияи илмии байналмилалӣ дар мавзуи «Масъалаҳои муосири математика ва татбиқи он» (ш. Душанбе, Тоҷикистон, 2023 с.).

Саҳми шахсии довталаби дараҷаи илмӣ дар он зоҳир мегардад, ки натиҷаҳои илмии ба ҳимоя пешниҳодшаванда, аз тарафи ӯ мустақилона ба даст оварда шуда, интишороти асосиро омода кардааст ва дар тасвиби натиҷаҳои бадастовардашуда шахсан иштирок намудааст.

Интишорот аз рӯйи мавзуи диссертатсия. Натиҷаҳои асосии диссертатсияи илмӣ дар 13 корҳои илмии муаллиф ба чоп расонида шудааст, ки аз онҳо 6-тояш мақолаҳои илмии дар маҷаллаҳои тақризшавандаи Комиссияи олии аттестатсионии назди Президенти Ҷумҳурии Тоҷикистон ба нашр расида ва 7-тои боқимондаашро мақолаҳои дар маҷмуаи маводи конференсияҳои илмии сатҳашон гуногун нашршуда ташкил медиҳанд. Дар корҳои якҷоя бо муаллифи дуюм пешниҳодгардида, ҳамаи ҳисобкуниҳо ва исботи теоремаҳо пурра ба муаллифи диссертатсия тааллуқ дорад.

Сохтор ва ҳаҷми диссертатсия. Диссертатсия аз муқаддима, тавсифи умумии таҳқиқот, се боб, хулосаҳо бо натиҷаҳои асосии илмии диссертатсия ва тавсияҳо оид ба истифодаи амалии натиҷаҳо, рӯйхати адабиёт бо феҳристи сарчашмаҳои истифодашуда ва феҳристи интишороти илмии довталаби дарёфти дараҷаи илмӣ иборат аст.

Ҳаҷми умумии диссертатсия аз 169 саҳифаи матни компютерӣ иборат буда, рӯйхати адабиёти истифодашуда 150 номгӯйро ташкил медиҳад.

ҚИСМҲОИ АСОСИИ ТАҲҚИҚОТ

Дар муқаддима мубрамияти баргузории таҳқиқот аз рӯйи мавзуи диссертатсияи илмӣ асоснок карда шуда, мувофиқати таҳқиқот ба самтҳои афзалиятноки инкишофи илм ва техника муайян карда шудааст. Таҳлили таҳқиқотҳои илмии олимони хориҷӣ ва ватанӣ аз рӯйи мавзуи диссертатсия оварда шуда, навгонии илмӣ ва натиҷаҳои ба ҳимоя пешниҳодшаванда баён карда шудааст.

Дар боби **«Баррасии натиҷаҳо оид ба назарияи муодилаҳои интегро-дифференсиалӣ бо ядроҳои махсус»** таҳлили васеъ оид ба натиҷаҳои илмии ба мавзуи диссертатсия наздик, ки аз тарафи олимону муҳақиқони дигар ба даст оварда шудааст, гузаронида шудааст.

Дар **зербоби 2.1-и боби дуюм** оператори дифференсиалии дорои як нуқтаи махсуси:

$$D_x^{\beta} = (b-x)^{\beta}\frac{d}{dx}$$

ки дар ин ҷо $\beta > 1$ аст, дохил карда шуда, бо ёрии ин оператори дифференсиалӣ муодилаи интегро-дифференсиалӣ бо ядрои барзиёд сингулярии намуди:

$$D_x^{\beta}y + A(x)y - \int_x^b \frac{B(x,t)}{(b-t)^{\beta}}y(t)dt = f(x) \qquad (1)$$

тартиб дода шуда, таҳқиқ карда мешавад, ки дар ин ҷо $A(x)$, $f(x)$ – функсияҳои додашудаи бефосила дар $\Gamma = \{x: a \le x \le b\}$, $B(x,t)$ – функсияи додашудаи бефосила дар росткунҷаи $R = \{(x,y): a \le x \le b,\ \ a \le t \le b\}$, $y(x)$ – функсияи номаълум мебошад.

Бо $C_{\beta-1}[a,b]$ синфи чунин функсияҳое ишорат карда шудааст, ки дар нуқтаи $x = b$ ба сифр мубаддал гашта, рафторашон аз рӯйи формулаи ассимптотикии зерин муайян карда мешаванд:

$$y(x) = o\left[(b-x)^{\delta}\right], \delta > \beta - 1, \text{хангоми } x \to b.$$

Инчунин, бо рамзи $C_{\beta-1}^{(n)}[a,b]$ синфи чунин функсияҳои $y(x) \in C_{\beta-1}[a,b]$ ишорат карда шудааст, ки дорои D_x^{β}-ҳосилаҳои бефосилаи то тартиби n-ум мебошанд.

Ҳалли муодилаи (1) дар синфи $C_{\beta-1}^{(1)}[a,b]$ ҷустуҷӯ карда мешавад.

Муодилаи (1) пеш аз ҳама, дар ҳолати моделӣ, яъне дар ҳолати $A(x) = A = const$, $B(x,t) = B = const$ таҳқиқ карда шудааст. Дар ин маврид муодилаи (1) чунин намуд мегирад:

$$D_x^{\beta}y + Ay - \int_x^b \frac{B}{(b-t)^{\beta}}y(t)dt = f(x). \qquad (2)$$

Барои ёфтани ҳалли муодилаи (2) пеш аз ҳама эквивалентнокии яктарафаи он ба муодилаи операторӣ-дифференсиалии:

$$\left(D_x^{\beta}\right)^2 y + AD_x^{\beta}y + By = F(x), \qquad (3)$$

ки дар ин ҷо $F(x) = D_x^{\beta}f(x)$ аст, нишон дода шудааст.

Оид ба ҳалшавандагии муодилаи (3) теоремаи зерин исбот карда шудааст.

Теоремаи 1. *Бигузор, дар муодилаи* (3) *коэффисиентҳои он A ва B ададҳои доимӣ буда, чунон бошанд, ки решаҳои муодилаи характеристики:*

$$\lambda^2 + A\lambda + B = 0 \qquad (4)$$

ҳақиқӣ ва гуногун бошанд. Инчунин, ҳангоми $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ *ва* $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ *функсияи* $f(x)$ *дар нуқтаи* $x = b$ *ба сифр мубаддал гашта, рафтораш аз рӯйи формулаи ассимптотикии:*

$$f(t) = o\left[e^{-\delta\omega_{\beta}(t)}\right], \delta > |\lambda_1|, \quad \text{ҳангоми} \quad t \to b, \qquad (5)$$

муайян карда шавад ва ҳангоми $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ *будан,* $f(x)$ *функсияи бафосила ва маҳдуд бошад. Он гоҳ муодилаи* (3) *дар синфи* $C_{\beta-1}^{(2)}[a,b]$ *ҳалшаванда мебошад ва ҳалли умумии он бо ёрии формулаи:*

$$y = c_1 e^{\lambda_1\omega_{\beta}(x)} + c_2 e^{\lambda_2\omega_{\beta}(x)} -$$

$$-\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\int_x^b \left[\lambda_1 e^{\lambda_1\left(\omega_{\beta}(x)-\omega_{\beta}(t)\right)} - \lambda_2 e^{\lambda_2\left(\omega_{\beta}(x)-\omega_{\beta}(t)\right)}\right]\frac{f(t)}{(b-t)^{\beta}}dt \qquad (6)$$

ифода карда мешавад.

Пас аз ёфтани ҳалли муодилаи оператори-дифференсиалии (3) ба ёфтани ҳалли муодилаи интегро-дифференсиалии (2) баргашта, оид ба ҳалшавандагии он теоремаи зерин исбот карда шудааст.

Теоремаи 2. *Бигузор, дар муодилаи интегро-дифференнсиали ғайриякҷинсаи моделии* (2) *коэффисиентҳои он A ва B чунон бошанд, ки муодилаи характеристикии* (4) *дорои решаҳои ҳақиқии гуногуни* λ_1 *ва* λ_2 *бошад. Инчунин, ҳангоми* $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ *ва* $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ *будан, функсияи* $f(x)$ *шарти (5)-ро қаноат намояд ва ҳангоми* $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ *будан* $f(x)$ *функсияи бефосила ва маҳдуд бошад. Он гоҳ дар се ҳолат, вобаста аз иҷрошавии шартҳои* $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ *ва* $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ *ҳалли умумии муодилаи интегро-дифференсиалии* (2) *мувофиқан бо ёрии формулаҳои:*

$$y = c_1 e^{\lambda_1 \omega_\beta(x)} + c_2 e^{\lambda_2 \omega_\beta(x)} -$$

$$-\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \int_x^b \left[\lambda_1 e^{\lambda_1 \left(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(t)\right)} - \lambda_2 e^{\lambda_2 \left(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(t)\right)}\right] \frac{f(t)}{(b-t)^\beta} dt,$$

$$y = c_1 e^{\lambda_1 \omega_\beta(x)} -$$

$$-\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \int_x^b \left[\lambda_1 e^{\lambda_1 \left(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(t)\right)} - \lambda_2 e^{\lambda_2 \left(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(t)\right)}\right] \frac{f(t)}{(b-t)^\beta} dt$$

ва

$$y = -\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \int_x^b \left[\lambda_1 e^{\lambda_1 \left(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(t)\right)} - \lambda_2 e^{\lambda_2 \left(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(t)\right)}\right] \frac{f(t)dt}{(b-t)^\beta}$$

дода мешавад.

Дар **зербобҳои 2.3 ва 2.4-и боби дуюм** натиҷаҳои ба тасдиқотҳои теоремаи 2 монанд дар ҳолати решаҳои муодилаи характеристикии (4) ҳақиқӣ ва якхела ва комплексию ҳамроҳшуда будан, ҳосил карда шудааст.

Масалан, дар ҳолати решаҳои муодилаи характеристикии (4) комплексӣ ва ҳамроҳшуда будан, теоремаи зерин исбот карда шудааст.

Теоремаи 3. *Бигузор, дар муодилаи* (2) *коэффисиентҳои A ва B чунон бошанд, ки решаҳои муодилаи характеристикии* (4) *комплексӣ ва ҳамроҳшуда бошанд, яъне* $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\gamma$. *Инчунин, ҳангоми* $\alpha < 0$ *будан, функсияи* $f(x)$ *шарти:*

$$f(x) = o\left[(b-x)^{-\delta \omega_\beta(x)}\right], \delta > |\alpha|, \text{ҳангоми } x \to b \quad (7)$$

-ро қаноат намояд ва ҳангоми $\alpha > 0$ *будан* $f(x) \in C[a,b]$ *бошад. Он гоҳ дар ҳолати инҷрошавии шартҳои* $\alpha < 0$ *ва* $\alpha > 0$ *ҳалли умумии муодилаи интегро-дифференсиалии ғайриякҷинсаи* (2) *мувофиқан бо ёрии формулаҳои:*

$$y = e^{\alpha \omega_\beta(x)} \left[c_1 \cos\left[\gamma \omega_\beta(x)\right] + c_2 \sin\left[\gamma \omega_\beta(x)\right]\right] -$$

$$-\frac{1}{\gamma} \int_x^b e^{\alpha\left(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(t)\right)} \left[\alpha \sin\left[\gamma\left(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(t)\right)\right] + \gamma \cos\left[\gamma\left(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(t)\right)\right]\right] \frac{f(t)dt}{(b-t)^\beta}$$

ва

$$y = -\frac{1}{\gamma} \int_x^b e^{\alpha\left(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(t)\right)} \left[\alpha \sin\left[\gamma\left(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(t)\right)\right] + \gamma \cos\left[\gamma\left(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(t)\right)\right]\right] \frac{f(t)}{(b-t)^\beta} dt$$

ифода карда мешавад.

Дар **зербоби 2.5** масъалаи Коши барои муодилаи (2) таҳқиқ карда шудааст.

Гузориши масъалаи Коши. *Дар ҳолати иҷрошавии шарти* $Re\lambda < 0$ *аз маҷмуи ҳалҳои муодилаи* (2) *чунин ҳалли* $y = y(x)$ *ҷудо карда шавад, ки он дар нуқтаи* $x = x_0 \in \Gamma \backslash \{b\}$ *шарти:*

$$y|_{x=x_0} = y_0,\ \ D_x^{\beta} y|_{x=x_0} = y_0' \tag{8}$$

-ро қаноат намояд.

Оид ба ягонагии ҳалли масъалаи Коши теоремаҳои зерин исбот карда шудааст.

Теоремаи 4. *Бигузор, дар муодилаи интегро-дифференнсиали ғайриякҷинсаи маделии* (2) *коэффисиентҳои он A ва B чунон бошанд, ки муодилаи характеристикии* (4) *дорои решаҳои ҳақиқӣ ва гуногуни* λ_1 *ва* λ_2 *буда, онҳо нобаробарии* $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$*-ро қаноат намоянд. Инчунин, функсияи* $f(x)$ *шарти (5)-ро қаноат намояд. Он гоҳ масъалаи Коши* $(2) - (8)$ *яккимата ҳалшаванда аст ва ҳалли ягонаи ин масъала бо ёрии формулаи:*

$$y(x) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\left[\lambda_2\big(y_0 + R_1(x_0)\big) - y_0' - R_1'(x_0)\right]e^{\lambda_1\left(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(x_0)\right)} +$$
$$+\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\left[y_0' + R_1'(x_0) - \lambda_1\big(y_0 + R_1(x_0)\big)\right]e^{\lambda_2\left(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(x_0)\right)} -$$
$$-\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\int_x^b\left[\lambda_1 e^{\lambda_1\left(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(t)\right)} - \lambda_2 e^{\lambda_2\left(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(t)\right)}\right]\frac{f(t)dt}{(b-t)^\beta}$$

ифода карда мешавад.

Теоремаи 5. *Бигузор, дар муодилаи интегро-дифференнсиали ғайриякҷинсаи маделии* (2) *коэффисиентҳои он A ва B чунон бошанд, ки муодилаи характеристикии* (4) *дорои решаҳои ҳақиқӣ ва яккела бошад, яъне* $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ *ва шарти* $\lambda < 0$ *иҷро шавад. Инчунин, функсияи* $f(x)$ *шарти*

$$f(x) = o\left[e^{-\delta\omega_\beta(x)}\right], \delta > |\lambda|\ ,\ \text{ҳангоми}\ x \to b, \tag{9}$$

-ро қаноат намояд. Он гоҳ масъалаи Коши $(2) - (8)$ *яккимата ҳалшаванда аст ва ҳалли ягонаи ин масъала бо ёрии формулаи:*

$$y(x) = \left[\big(y_0 + R_2(x_0)\big)\big(\lambda\omega_\beta(x_0) + 1\big) - \big(y_0' + R_2'(x_0)\big)\omega_\beta(x_0)\right]e^{\lambda\left(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(x_0)\right)} -$$
$$-\left[y_0' + R_2'(x_0) - \lambda\big(y_0 + R_2(x_0)\big)\right]\omega_\beta(x)e^{\lambda\left(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(x_0)\right)} -$$
$$-\int_x^b e^{\lambda\left(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(t)\right)}\left[\lambda\left(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(t)\right) + 1\right]\frac{f(t)dt}{(b-t)^\beta}$$

ифода карда мешавад.

Дар **зербоби 2.6-и боби дуюм** масъалаи нумуди Коши барои муодилаи интегро-дифференсиалӣ бо ядрои барзиёд сингулярии (2) гузошта ва таҳқиқ карда шудааст. Нишон дода шудааст, ки дар фарқият ба масъалаи Коши масъалаи навъи Коши дар нуқтаи махсуси муодила гузошта мешавад. Барои масъалаи навъи Коширо тадқиқ намудан, пеш аз ҳама хосиятҳои ҳалҳои бадастовардашуда омӯхта шуда, операторҳои дифференсиалии махсус дохил карда мешавад. Баъдан, дар асоси хосиятҳои омӯхташуда ба таври ягона ҳалшавандагии масъалаи навъи Коши дар чор теорема исбот карда шудааст.

Гузориши масъалаи навъи Коши барои муодилаи $\mathbf{(2)}$ **ҳангоми иҷро шудани шарти** $\boldsymbol{\lambda_1 < \lambda_2 < 0}$. *Чунин ҳалли* $y = y(x)$*-и муодилаи* (2) *ёфта шавад, ки он дар нуқтаи* $x = b$ *шартҳои ибтидоии вазндори:*

$$\begin{cases} P[\lambda_2, y(x)]|_{x=b} = k_2, \\ P_1\left[\lambda_1, \lambda_2, D_x^\beta y(x)\right]_{x=b} = k_1, \end{cases} \tag{10}$$

-ро қаноат намояд, ки дар ин ҷо

$$P[\lambda_2, y(x)] = \frac{1}{e^{\lambda_2 \omega_\beta(x)}} y(x),$$

$$P_1\left[\lambda_1, \lambda_2, D_x^\beta y(x)\right] = \frac{1}{e^{(\lambda_1-\lambda_2)\omega_\beta(x)}} D_x^\beta\, P[\lambda_1, y(x)]$$

мебошад.

Оид ба ҳалли масъалаи навъи Коши барои муодилаи (2) теоремаи зерин исбот карда шудааст.

Теоремаи 6. *Бигузор, дар муодилаи интегро-дифференнсиали ғайриякҷинсаи маделии* (2) *коэффисиентҳои он A ва B чунон бошанд, ки муодилаи характеристикии* (4) *дорои решаҳои ҳақиқӣ ва гуногуни* λ_1 *ва* λ_2 *бошад. Инчунин, ҳангоми* $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ *функсияи* $f(x)$ *шарти (5)-ро қаноат намояд. Он гоҳ масъалаи навъи Коши* $(2)-(10)$ *яккимата ҳалшаванда аст ва ҳалли ягонаи он бо ёрии формулаи:*

$$y(x) = \frac{k_1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 \omega_\beta(x)} + k_2 e^{\lambda_2 \omega_\beta(x)} -$$

$$-\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\int_x^b \left[\lambda_1 e^{\lambda_1\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)} - \lambda_2 e^{\lambda_2\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\right] \frac{f(t)}{(b-t)^\beta} dt \equiv F_1^+\left[\frac{k_1}{\lambda_1-\lambda_2}, k_2, f(x)\right]$$

ифода мегардад.

Зербоби 2.7 ба таҳқиқи муодилаи интегро-дифференсиалии ғайримоделии (1) бахшида шудааст. Ҳалли муодилаи ғайримоделӣ вобаста аз решаҳои муодилаи характеристикии мувофиқоянда, дар се ҳолат, дар намуди ноошкор, ба воситаи резолвентаи муодилаи интегралии намуди Волтерра бо ядрои регулярӣ, ёфта шудааст.

Масалан, дар ҳолати решаҳои муодилаи характеристикии

$$\lambda^2 + A(b)\lambda + B(b,b) = 0 \tag{11}$$

комплексӣ ва ҳамроҳшуда будан, теоремаи зерин исбот карда шудааст.

Теоремаи 7. *Бигузор, дар муодилаи* (1) *функсияҳои* $A(x)$ *ва* $B(x,t)$ *чунин бошанд, ки решаҳои муодилаи характеристикии* (11) *компелксӣ ва ҳамроҳшуда бошанд ва шарти* $Re\lambda_{1,2} = \alpha < 0$ *иҷро шавад. Инчунин, функсияҳои* $A_1(t)$, $B_1(x,t)$ *ва* $f(t)$ *ҳангоми* $t \to b$ *ба сифр майл намуда, рафторашон аз рӯйи формулаҳои ассимптотикии:*

$$A_1(x) = o\left[e^{-\delta\omega_\beta(t)}\right], \quad \delta > |\alpha|,$$

$$B_1(\tau, t) = o\left[e^{-\delta\omega_\beta(t)}\right], \ \ \delta > |\alpha|$$

ва

$$f(x) = o\left[e^{-\delta\omega_\beta(t)}\right], \quad \delta > |\alpha|$$

муайян карда шавад.

Он гоҳ муодилаи интегро-дифференсиалии ғайриякҷинсаи (1) *дар синфи* $C_{\beta-1}^{(1)}[a,b]$ *ҳалшаванда мебошад ва ҳалли он бо ёрии резолвентаи муодилаи интегралии:*

$$y(x) + \frac{1}{\gamma}\int_x^b K_3^+(x,t) y(t) dt = E_3^+[c_1, c_2, f(x)] \tag{12}$$

дар намуди:

$$y(x) = E_3^+[c_1, c_2, f(x)] - \frac{1}{\gamma}\int_x^b \Gamma_3^+(x,t)E_3^+[c_1, c_2, f(t)]dt$$

ифода карда мешавад, ки дар ин ҷо $\Gamma_3^+(x,t)$ *– резолвентаи муодилаи* (12) *мебошад.*

Боби сеюми диссертатсия ба таҳқиқи муодилаи интегро-дифференсиалии тартиби n-ум бо ядрои барзиёд сингулярии:

$$P_M^n\left(D_x^\beta\right)y - \int_x^b \frac{B(x,t)}{(b-t)^\beta} P_N^m\left(D_x^\beta\right)y(t)dt = f(x), \tag{13}$$

бахшида шудааст, ки дар ин ҷо $\beta > 1, n > m$, $B(b,b) \neq 0$ ва $P_M^n\left(D_x^\beta\right)$, $P_N^m\left(D_x^\beta\right)$ – операторҳои дифференсиалии тартибашон мувофиқан n ва m буда, чунин муайян карда мешаванд:

$$P_M^n\left(D_x^\beta\right) \equiv \left(D_x^\beta\right)^n + M_1\left(D_x^\beta\right)^{n-1} + M_2\left(D_x^\beta\right)^{n-2} + \cdots + M_{n-1}D_x^\beta + M_n,$$
$$P_N^m\left(D_x^\beta\right) \equiv \left(D_x^\beta\right)^m + N_1\left(D_x^\beta\right)^{m-1} + N_2\left(D_x^\beta\right)^{m-2} + \cdots + N_{m-1}D_x^\beta + N_m.$$

Ҳалли муодилаи (13) дар синфи чунин функсияҳое ҷустуҷӯ карда мешавад, ки дорои D_x^β-ҳосилаҳои бефосилаи то тартиби n-ум буда, ҳосилаи то тартиби m-и онҳо ба синфи $C_{\beta-1}[a,b]$ тааллуқ дорад. Синфи чунин функсияҳо бо рамзи $C_{\beta-1}^{(n,m)}[a,b]$ ишорат карда шудааст.

Муодилаи (13) пеш аз ҳама, дар ҳолати моделӣ, яъне ҳангоми $B(x,t) = B = const$ будан, мавриди таҳқиқот қарор дода шудааст. Дар ин маврид муодилаи моделии ба муодилаи (13) мувофиқоянда чунин намуд мегирад:

$$P_M^n\left(D_x^\beta\right)y - \int_x^b \frac{B}{(b-t)^\beta} P_N^m\left(D_t^\beta\right)y(t)dt = f(x). \tag{14}$$

Ба муодилаи (14) муодилаи оператори-дифференсиалии тартиби n+1-ум бо коэффисиентҳои доимии:

$$\left(D_x^\beta\right)^{n+1}y + K_1\left(D_x^\beta\right)^n y + \cdots + K_n D_x^\beta y + K_{n+1}y = D_x^\beta f(x)$$

ва муодилаи характеристикии:

$$\lambda^n + K_1\lambda^{n-1} + K_2\lambda^{n-2} + \cdots + K_n\lambda + K_{n+1} = 0 \tag{15}$$

мувофиқ меояд.

Оид ба ҳалшавандагии муодилаи интегро-дифференсиалии (14) теоремаи зерин исбот карда шудааст.

Теоремаи 8. *Бигузор, дар муодилаи интегро-дифференсиалии (14) коэффисиентҳои операторҳои дифференсиалии* $P_M^n\left(D_x^\beta\right)$ ва $P_N^m\left(D_x^\beta\right)$ *чунон бошанд, ки решаҳои муодилаи характеристикии (15) ҳақиқӣ ва гуногун бошанд ва шарти:*

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_{n+1} < 0 \tag{16}$$

-ро қаноат намоянд. Инчунин, тарафи рости муодилаи (14) функсияи $f(x)$ *дар нуқтаи* $x = b$ *ба сифр мубаддал гашта, рафтораш аз рӯйи формулаи ассимптотикии:*

$$f(t) = o\left[e^{-\delta\omega_\beta(t)}\right], \delta > |\lambda_1| \tag{17}$$

муайян карда шавад. Он гоҳ муодилаи интегро-дифференсиалии ғайриякҷинсаи (14) дар синфи $C_{\beta-1}^{(n,m)}[a,b]$ *ҳалшаванда мебошад ва ҳалли умумии он дар намуди ошкор бо ёрии формулаи:*

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 \omega_\beta(x) - \omega_\beta(t)} + c_2 e^{\lambda_2 \omega_\beta(x)} + \cdots + c_{n+1} e^{\lambda_{n+1} \omega_\beta(x)} +$$
$$+ \frac{1}{\Delta_0} \int_x^b \left[\Delta_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 \left(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(t) \right)} + \Delta_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 \left(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(t) \right)} + \cdots \right.$$
$$\left. + \Delta_{n+1} \lambda_{n+1} e^{\lambda_{n+1} \left(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(t) \right)} \right] \frac{f(t)}{(b-t)^\beta} dt$$

ифода карда мешавад мешавад.

Теоремаи 9. *Бигузор ҳамаи шартҳои теоремаи 8 ғайр аз шарти* (16) *иҷро шавад. Ба ҷои шарти* (16) *бигузор решаҳои муодилаи характеристикии* (15) *шарти:*

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_k < 0 < \lambda_{k+1} < \lambda_{k+2} < \cdots < \lambda_{n+1}$$

-ро қаноат намоянд. Он гоҳ муодилаи интегро-дифференсиалии ғайриякҷинсаи (14) *дар синфи* $C_{\beta-1}^{(n,m)}[a,b]$ *ҳалшаванда мебошад ва ҳалли умумии он* $k -$ *доимиҳои ихтиёриро дар бар гирифта, намуди:*

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 \omega_\beta(x)} + c_2 e^{\lambda_2 \omega_\beta(x)} + \cdots + c_k e^{\lambda_k \omega_\beta(x)} +$$
$$+ \frac{1}{\Delta_0} \int_x^b \left[\Delta_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 \left(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(t) \right)} + \Delta_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 \left(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(t) \right)} + \cdots \right.$$
$$\left. + \Delta_{n+1} \lambda_{n+1} e^{\lambda_{n+1} \left(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(t) \right)} \right] \frac{f(t)}{(b-t)^\beta} dt$$

-ро дорад.

Теоремаи 10. *Бигузор, дар теморемаи 8 ба ҷойи шарти* (16) *шарти*

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_{n+1}$$

иҷро шавад ва дар муодилаи (14) *функсияи* $f(x) \epsilon C[a,b]$ *бошад. Он гоҳ муодилаи интегро-дифференсиалии ғайриякҷинсаи* (14) *дар синфи* $C_{\beta-1}^{(n,m)}[a,b]$ *якқимата ҳалшаванда мебошад ва ҳалли ягонаи он бо ёрии формулаи:*

$$y(x) = \frac{1}{\Delta_0} \int_x^b \left[\Delta_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 \left(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(t) \right)} + \Delta_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 \left(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(t) \right)} + \cdots \right.$$
$$\left. + \Delta_{n+1} \lambda_{n+1} e^{\lambda_{n+1} \left(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(t) \right)} \right] \frac{f(t)}{(b-t)^\beta} dt$$

ифода карда мешавад.

Дар **зербобҳои 3.3 ва 3.4** теоремаҳо ба теоремаҳои 8-10 монанд, дар ҳолати решаҳои муодилаи характеристикии (15) ҳақиқӣ ва якхела ва комплексию ҳамроҳшуда будан, исбот карда шудааст.

Масалан, дар ҳолати ҳамаи решаҳои муодилаи характеристикии (15) комплексӣ ва ҳамроҳшуда будан, теоремаи зерин исбот карда шудааст.

Теремаи 11. *Бигузор, коэффисиентҳои муодилаи интегро-дифференсиалии* (14) *чунон бошад, ки решаҳои муодилаи характеристикии* (15) *комплексӣ ва ҳамроҳшуда бошанд ва қисмҳои ҳақиқии ин решаҳо шарти*

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_k < 0$$

-ро қаноат намоянд. Инчунин, функсияи $f(x)$ *дар нуқтаи* $x = b$ *ба сифр мубаддал гашта, рафтораш аз рӯйи формулаи ассимптотикии:*

$$f(x) = o\left[e^{-\delta \omega_\beta(x)}\right], \delta > |\alpha_1| \text{ ҳангоми } x \to b$$

муайян карда шавад. Он гоҳ муодилаи (14) *дар синфи* $C_{\beta-1}^{(n,m)}[a,b]$ *ҳалшаванда мебошад ва ҳалли умумии он бо ёрии формулаи:*

$$y(x)=e^{\alpha_1\omega_\beta(x)}\left[c_1\cos\left[\gamma_1\omega_\beta(x)\right]+c_2\sin\left[\gamma_1\omega_\beta(x)\right]\right]+\cdots+$$
$$+e^{\alpha_k\omega_\beta(x)}\left[c_{2k-1}\cos\left[\gamma_k\omega_\beta(x)\right]+c_{2k}\sin\left[\gamma_k\omega_\beta(x)\right]\right]-$$
$$-\int_x^b\left\{e^{\alpha_1\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\left[\Lambda_{\alpha_1\gamma_1}^{-,1}\{N_2,N_1\}\cos\left[\gamma_1\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)\right]+\right.\right.$$
$$\left.+\Lambda_{\alpha_1\gamma_1}^{+,1}\{N_2,N_1\}\sin\left[\gamma_1\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)\right]\right]+\cdots+$$
$$+e^{\alpha_k\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\left[\Lambda_{\alpha_k\gamma_k}^{-,1}\{N_{2k},N_{2k-1}\}\cos\left[\gamma_k\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)\right]\right]$$
$$\left.\left.+\Lambda_{\alpha_k\gamma_k}^{+,1}\{N_{2k},N_{2k-1}\}\sin\left[\gamma_k\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)\right]\right]\right\}\frac{f(t)dt}{(b-t)^\beta}$$

дода мешавад, ки дар ин ҷо c_i $\left(i=\overline{1,2k}\right)$ *– ададҳои доимии ихтиёрӣ буда,* $\Lambda_{\alpha_i\gamma_i}^{\pm,1}\{N_{j+1},N_j\}$ *аз баробариҳои зерин муайян карда мешаванд:*

$$\begin{cases}\Lambda_{\alpha_i\gamma_i}^{+,1}\{N_{j+1},N_j\}=\alpha_iN_{j+1}-\gamma_iN_j,\\ \Lambda_{\alpha_i\gamma_i}^{-,1}\{N_{j+1},N_j\}=\alpha_iN_j-\gamma_iN_{j+1}.\end{cases}$$

Дар **зербоби 3.5-и боби сеюм** муодилаи интегро-дифференсиалии ғайримоделии (13) таҳқиқ карда шуда, дар як ҳолат, яъне ҳолати решаҳои муодилаи характеристикии мувофиқоянда ҳақиқӣ ва гуногун будан, методи таҳқиқи муодила пешниҳод карда шудааст. Нишон дода шудааст, ки дар ин ҳолат ҳалли муодилаи ғайримоделӣ дар намуди ноошкор ба воситаи ҳалли муодилаи интегро-дифференсиалии намуди Волтерра бо ядрои регулярӣ ифода карда мешавад.

Дар **зербоби 3.6-и боби сеюм** барои муодилаи интегро-дифференсиалии (14) масъалаи навъи Коши гузошта шуда, таҳқиқ карда шудааст.

Гузориши масъалаи навъи Коши барои муодилаи (14) ҳангоми иҷро шудани шарти $\boldsymbol{\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_{n+1}<0}$. *Чунин ҳалли* $y=y(x)$*-и муодилаи* (14) *ёфта шавад, ки он дар нуқтаи* $x=b$ *шартҳои ибтидоии вазндори:*

$$\begin{cases}P[\lambda_{n+1},y(x)]|_{x=b}=k_{n+1},\\ P_1\left[\lambda_n,\lambda_{n+1},D_x^\beta y(x)\right]\Big|_{x=b}=k_n,\\ P_2\left[\lambda_{n-1},\lambda_n,\lambda_{n+1},D_x^\beta y(x)\right]\Big|_{x=b}=k_{n-1},\\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ P_n\left[\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{n+1},D_x^\beta y(x)\right]\Big|_{x=b}=k_1,\end{cases}\qquad(18)$$

-ро қаноат намояд, ки дар ин ҷо:

$$P[\lambda_{n+1},y(x)]=\frac{1}{e^{\lambda_{n+1}\omega_\beta(x)}}y(x),$$
$$P_1\left[\lambda_n,\lambda_{n+1},D_x^\beta y(x)\right]=\frac{1}{e^{(\lambda_n-\lambda_{n+1})\omega_\beta(x)}}D_x^\beta\ P[\lambda_{n+1},y(x)],$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$P_n\left[\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{n+1},D_x^\beta y(x)\right]=\frac{1}{e^{(\lambda_1-\lambda_2)\omega_\beta(x)}}D_x^\beta P_{n-1}\left[\lambda_2,\lambda_3,\cdots,\lambda_{n+1},D_x^\beta y(x)\right].$$

Оид ба ҳалшавандагии ин масъала теоремаи зерин исбот карда шудааст.

Теоремаи 12. *Бигузор, дар муодилаи интегро-дифференнсиали ғайриякҷинсаи тартиби* n*-уми* (14) *коэффисиентҳои операторҳои дифференсиалии* $P_M^n\left(D_x^\beta\right)$ *ва* $P_N^m\left(D_x^\beta\right)$ *ва инчунин адади B чунин бошанд, ки решаҳои муодилаи характеристикии* (5) *ҳақиқӣ ва гуногун буда, барояшон шарти* $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_{n+1} < 0$ *иҷро шавад. Инчунин, функсияи* $f(t)$ *ҳангоми* $t \to b$ *аз рӯйи формулаҳои ассимптотикии* (17) *ба сифр майл намоянд. Он гоҳ масъалаи навъи Коши* $(14) - (18)$ *яккимата ҳалшаванда аст ва ҳалли ягонаи он бо ёрии формулаи:*

$$y(x) = \frac{k_1}{(\lambda_1 - \lambda_{n+1})(\lambda_1 - \lambda_n)\dots(\lambda_1 - \lambda_2)} e^{\lambda_1 \omega_\beta(x)} + \cdots + k_{n+1} e^{\lambda_{n+1}\omega_\beta(x)} +$$
$$+ \frac{1}{\Delta_0}\int_x^b \left[\Delta_1 \lambda_1 e^{\lambda_1\left(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(t)\right)} + \Delta_2 \lambda_2 e^{\lambda_2\left(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(t)\right)} + \cdots\right.$$
$$\left. + \Delta_{n+1}\lambda_{n+1} e^{\lambda_{n+1}\left(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(t)\right)}\right] \frac{f(t)}{(b-t)^\beta}\, dt$$

ифода мегардад.

ХУЛОСАҲО
1. НАТИҶАҲОИ АСОСИИ ИЛМИИ ДИССЕРТАТСИЯ

Натиҷаҳои илмии бадастовардашуда нав буда, аз тарафи муаллиф мустақилона ба даст оварда шудааст ва аз инҳо иборат мебошанд:

- ҳалли умумии муодилаи интегро-дифференсиалии моделии тартиби якум бо ядрои барзиёд сингулярӣ вобаста аз решаҳои муодилаи характеристикӣ дар се ҳолат ёфта шудааст [1-М], [2-М], [7-М];
- методи интегралии содакардашудаи ёфтани ҳалли муодилаи операторӣ-дифференсиалии ғайриякҷинса коркард шудааст [1-М], [2-М], [6-М];
- барои муодилаи таҳқиқшаванда масъалаи Коши дар нуқтаҳои ғайримахсуси муодила гузошта шуда, яккимата ҳалшавандагии он таҳқиқ кард шудааст [1- М], [10- М], [12-М];
- барои муодилаи таҳқиқшаванда масъалаи навъи Коши дар нуқтаи махсуси муодила гузошта шуда, яккимата ҳалшавандагии он таҳқиқ кард шудааст [1-М], [2-М];
- ҳалли умумии муодилаи интегро-дифференсиалии ғайримоделии тартиби якум бо ядрои барзиёд сингулярӣ вобаста аз решаҳои муодилаи характеристикӣ дар се ҳолат, ба воситаи резолвентаи муодилаи интегралии намуди Волтерра ифода карда шудааст [3-М], [8-М], [9- М];
- муодилаи интегро-дифференсиалии тартиби n-ум бо ядрои барзиёд сингулярӣ таҳқиқ карда шуда, ҳалли умумии он вобаста аз решаҳои муодилаи характеристикӣ дар се ҳолат, дар намуди ошкор ёфта шудааст [6-М], [11-М], [12-М].

2. ТАВСИЯҲО ОИД БА ИСТИФОДАИ АМАЛИИ НАТИҶАҲО

Таҳқиқоти гузаронидашуда характери назариявӣ дорад. Натиҷаҳои бадастовардашуда барои инкишоф додани назарияи муодилаҳои интегралӣ ва интегро-дифференсиалие, ки ду ва зиёда аз он нуқтаҳои махсус доранд ва муодилаҳое, ки дараҷаи махсусияти ядрои онҳо аз як калон мебошад, истифода бурда мешавад. Инчунин, назарияи дар ин диссертатсияи илмӣ коркардшударо истифода бурда, муодилаҳои интегро-дифференсиалии бо ҳосилаҳои хусусӣ ва бо ядроҳои сингулярӣ ва барзиёд сингуляриро таҳқиқ намудан имконпазир мегардад.

Маводи диссертатсияи илмии мазкурро ҳангоми хондани курсҳои махсус барои донишҷӯён, магистрон ва докторантони донишгоҳҳои олӣ, ки аз рӯйи ихтисосҳои математика, математикаи амалӣ ва механика таҳсил менамоянд, истифода бурдан мумкин аст.

ФЕҲРИСТИ ИНТИШОРОТИ МУАЛЛИФ ДОИР БА МАВЗУИ ДИССЕРТАТСИЯ

а) Мақолаҳое, ки дар нашриёҳои тақризшавандаи Комиссияи олии аттестатсионии назди Президенти Ҷумҳурии Тоҷикистон ба табъ расидаанд:

[1-М] **Djumakhon I.** Volterra-Type Integro-Differential Equations with Two-Point Singular Differential Operator [Text] / S.K. Zarifzoda, T.K. Yuldashev, I. Djumakhon // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2021. – Vol. 42. – No. 15. – P. 3784-3792.

[2-М] **Искандари Дж.** Исследование одного класса интегро-дифференциального уравнения с правой сверх-сингулярной точкой / С.К. Зарифзода, Дж. Искандари // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. – 2021. – № 1. – С. 5-18.

[3-М] **Искандари Дж.** Исследование одного класса немодельного интегро-дифференциального уравнения первого порядка с правой сверхсингулярной точкой [Текст] / С.К. Зарифзода, Дж. Искандари // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. – 2021. – № 3. – С. 62-76.

[4-М] **Искандари Дж.** Таҳқиқи як синфи муодилаҳои интегро-дифференсиалии моделии тартиби дуюм бо нуқтаи рости барзиёд сингулярӣ [Текст] / Дж. Искандари // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. – 2021. – № 4. – С. 5-16.

[5-М] **Искандари Дж.** Исследование одного класса модельного интегро-дифференциального уравнения второго порядка в случае комплексно-сопряженных корней характеристического уравнения [Текст] / С.К. Зарифзода, Дж. Искандари // Вестник педагогического университета. Естественные науки. – 2022. – № 1(13). – С. 73-81.

[6-М] **Искандари Дж.** Исследование одного класса интегро-дифференциальных уравнений n-го порядка с особым ядром [Текст] / Дж. Искандари // Вестник филиала Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова в городе Душанбе. Серия естественных наук. – 2023. – Том1. – № 2(31). – С. 71-80.

б) Мақолаҳое, ки дар дигар нашриёҳо ба табъ расидаанд:

[7-М] **Искандари Дж.** Исследования одного класса интегро-дифференциальных уравнений с правой сверх-сингулярной точкой в ядре [Текст] / С.К. Зарифзода, Дж. Искандари // Материалы международной конференции «Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений», посвящённой 70-летию со дня рождения академика АН Республики Таджикистан, доктора физико-математических наук, профессора Бойматова Камолиддина Хамроевича. – Душанбе, 2020. – С. 126-128.

[8-М] **Искандари Дж.** Исследование одного класса немодельных интегро-дифференциальных уравнений первого порядка с правой сверх-сингулярной точкой в ядре [Текст] / С.К. Зарифзода, Дж. Искандари // Материалы международной конференции «Актуальные проблемы современной математики», посвященной 80-летию со дня рождения доктора физико-математических наук, профессора Темура Собирова. – Душанбе, 2021. – С. 109-111.

[9-М] **Искандари Дж.** Исследование одного класса немодельных интегро-дифференциальных уравнений первого порядка с правой сверх-сингулярной точкой в ядре [Текст] / С.К. Зарифзода, Дж. Искандари // Материалы международной научно-практической конференции «О применении дифференциальных уравнений при решении прикладных задач». – Душанбе, 2021. – С. 59-61.

[10-М] **Искандари Дж.** Исследование сопряжённого одномерного интегро-дифференциального уравнения первого порядка с логарифмической особенностью в ядре [Текст] / С.К. Зарифзода, Дж. Искандари // Материалы международной научно-практической конференции «Современные проблемы математики и её приложения» (20-21 октября 2022 г.). – Душанбе, 2022. – С. 39-42.

[11-М] **Искандари Дж.** Исследование одного класса модельных интегро-дифференциальных уравнений n-го порядка в случае вещественно-разных корней характеристического уравнения [Текст] / С.К. Зарифзода, Дж. Искандари // Материалы международной научно-практической конференции «Комплексный анализ и его приложения». – Бохтар, 2022. – С. 60-62.

[12-М] **Искандари Дж.** Исследование одного класса интегро-дифференциальных уравнений n-го порядка с сингулярным ядром [Текст] / Дж. Искандари // Материалы республиканской научно-практической конференции «Актуальные проблемы развития естественных, точных и математических наук в современных условиях» (29 ноября 2022 г.). – Душанбе, 2022. – С. 287-288.

[13-М] **Искандари Дж.** Исследование одного класса сверх сингулярных интегро-дифференциальных уравнений 3-го порядка [Текст] / Дж. Искандари, С.К. Зарифзода // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математики и её приложения». – Душанбе, 2023. – С. 65.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РЕСПУБЛИКИ ТАДЖИКИСТАН
ТАДЖИКСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

УДК 517.968.7; 517.983

ИСКАНДАРИ ДЖУМАХОН

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПРАВОЙ СВЕРХ СИНГУЛЯРНОЙ ТОЧКОЙ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Душанбе – 2024

Диссертация выполнена на кафедре высщей математики механико-математического факультета Таджикского национального университета.

Научный руководитель: **Зарифзода Сарвар Кахрамон**, доктор физико-математических наук, доцент кафедры вычислительной математики и механики механико-математического факультета Таджикского национального университета.

Официальные оппоненты: **Шамсуддинов Файзулло Маҳмадуллоевич**, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений Бохтарского государственного университета имени Н.Хусрав.

Садриддинов Махмади Махмудович, кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой высщей математики Таджикско технического университета имени М.С Осими.

Ведущая организация: Таджикский государственный финансово – экономический университет.

Защита состоится 15 января 2025 года в 14:00 часов на заседании Диссертационного совета 6D.КОА-011 при Таджикском национальном университете по адресу: 734027, г. Душанбе, ул. Буни Хисорак, механико-математический факультет, корпус 17, аудитория 203.

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной научной библиотеке Таджикского национального университета или на сайте *http://www.tnu.tj*

Автореферат разослан «____» «___________» 2024 года

Учёный секретарь
Диссертационного совета 6D. КОА-011,
кандидат физико-математических наук **А.Б. Гафоров**

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность и востребованность темы диссертации. В данной диссертационной работе исследуется один класс интегро-дифференциальных уравнений первого порядка со сверхсингулярным ядром. Основное внимание уделено решению интегро-дифференциальных уравнений высшего порядка и решению задача Коши для этих классов уравнений.

Интегро-дифференциальные уравнения в практике применяются в различных областях физики и механики. Например, такие уравнения широко применяются при изучении явлений, обладаюших некоторой памятью. Во время полёта самолёта в небе задачи о сопротивлении воздуха и их давления на крылья самолёта тоже описываются интегро-дифференциальными уравнениями. Уравнения с помощью которых изучаются задачи, связанные с аэродинамикой, являются интегро-дифференциальными уравнениями с сингулярными ядрами.

Исследованию интегральных и интегро-дифференциальных уравнений с регулярными и сингулярными ядрами посвящено множеств работ учёных, таких как: Я.В. Быков [47], М.В. Булатов [46], Ю.Н. Валитский [48], В.В. Василев [49], М.М. Вейнберг [51], И.Н. Векуа [50], Н.П. Векуа [53], В. Волтерра [55], А.Д. Джураев [62], [63], Л.Г. Михайлов [86], [87], Н. Раджабов [93]- [124], Г. Джангибеков [60], [61], .Н. Раджабова [125]- [137], А.И. Некрасов [89], В.Н. Николаенко [90], Н.А. Сидоров [141], С.Л. Соболев [143], М.В. Фалалеев [145], Г.А. Шишкин [147] и др.

Внимание таких учёных к изучению сингулярных интегро-дифференциальных уравнений является показателем важности изучения данных классов уравнений. Оказывается, что сингулярные интегро-дифференциальные уравнения являются одной из быстроразвивающихся ветвей класса дифференциальных и интегральных уравнений, к изучению которых обращено внимание множества учёных.

Во множестве из вышеупомянутых работ понятие сингулярности ядра изучаемого уравнения понимается в смысле Коши. Интегральные и интегро-дифференциальные уравнения, ядро которых имеет особые точки типа Коши обширно исследованы в работах [57], [82], [85], [88].

В отличие от этого в практике встречаются уравнения, в которых понятие сингулярности ядра таких уравнений понимаются в обычном смысле Римана.

Изучении интегро-дифференциальных уравнений с сингулярными ядрами типа Римана до настоящей времени уделено малое внимание. Поэтому общирное изучение таких классов уравнений в настоящее время считается очень важным.

Степень разработанности темы исследования. Обширное изучение обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений с частными производными в конце XIX-го и начале XX-го столетия наблюдается в работах великих учёных того времени, таких как Ф. Гаусс, Б. Риман, К. Вейерштрасс, Ф. Клейн, Д. Гилберт и др. В далнейшем изучение вырождающихся дифференциальных уравнений получает особую важность. Исследование данных классов уравнений берёт своё начало из работ предыдущих классиков, таких как Л. Эйлер, С. Пуассон, Ж. Дарбу и далее развивается в работах А.В. Бицадзе, И.Н. Векуа, В.Ф. Волкодавова, В.Н. Врагова, Ю.В. Егорова, М.В. Келдиша, А.А. Килбаса, Л.Д. Кудрявцева, П.И. Лизоркина, О.И. Маричева, Л.Г. Михайлова, С.Г. Михлина, Е.И. Моисеева, А.М. Нахушева, С.М. Николского, И.Г. Петровского, Л.С. Пулькина, Н. Раҷабова, Л.Н.

Раҷабовой, О.А. Репина, К.Б. Сабитова, М.С. Салоҳитдинова, А.С. Сатторова, А.П. Солдатова, З.Д. Усманова, С.А. Исхоқова, Ф.М. Шамсуддинова, А.И. Янушаускаса и др.

Общие теории для вырождающихся дифференциальных уравнений или дифференциальных уравнений с сингулярными коэффициентами построены в работах отечественных учёных, таких как Л.Г. Михайлов [86], [87], А.Д. Ҷураев [62], [63], Н. Раҷабов [93]- [124], Л.Н. Раҷабова [125]- [137], А.С. Сатторов [112], З.Д. Усманов, М. Исмати, С.А. Исхоқов, Ф.М. Шамсуддинов [146] и др.

Вырождающиеся дифференциальные уравнения широко применяются в теории потенциалов, в теории акустики и газодинамики, при изучении уравнения Максвела-Эйнштейна, в теории упругости и эластичности и тд.

В последние годы в нашей республике теория для одного класса интегральных уравнений с сингулярным ядром типа Римана построена в научных работах академика Н.Раджабова. Разработанная в работах Н. Раджабова методика в далнейшем применяется в работах его учеников, таких как Л.Н. Раджабова, Ф. Шамсуддинов, С.Қ. Зарифзода, С. Саидов, С. Зарипов.

В научной монографии Н. Раджабова исследованы интегральные уравнения типа Вольтерра с сингулярным ядром вида

$$\varphi(x)+\int_a^x \frac{K(x,t)}{t-a}\varphi(t)dt=f(x)$$

и

$$\varphi(x)+\int_a^x \frac{K(x,t)}{(t-a)^{\alpha}}\varphi(t)dt=f(x).$$

Отсюда видно, что ядро первого уравнения в точке $t=a$ имеет особенность первого порядка, а второе уравнение в этой точке имеет особенности выше чем первого порядка. Эти уравнения также в случаях, когда их ядро имеет особенности логарифмического и степенного характера изучены в работах Н. Раджабова и его учеников.

В работах Л.Н. Раджабовой и её учеников построена теория для двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с сингулярным и сверхсингулярным ядром вида:

$$u(x,y)+\lambda\int_a^x \frac{u(t,y)}{(t-a)^{\alpha}}dt+\mu\int_b^y \frac{u(x,s)}{(b-s)^{\beta}}ds+\delta\int_a^x \frac{dt}{(t-a)^{\alpha}}\int_y^b \frac{u(t,s)}{(b-s)^{\beta}}ds=f(x,y).$$

Использованная в докторской диссертации С.К. Зарифзода методика применяется для исследования интегро-дифференциальных уравнений с ядрами, имеющими различные виды особенностей. Также в работах С.К. Зарифзода разработаны операционные методы исследования данных классов уравнений.

Определённые результаты при исследовании интегро-дифференциальных уравнений со сверхсингулярными ядрами получены в работах автора диссертации и эти результаты опубликованы в виде научных статей [1-А], [2-А], [3-А], [4-А], [5-А], [6-А], [7-А], [8-А], [9-А], [10-А], [11-А], [12-А], [13-А].

Из анализа данных результатов выходит, что тема и объект исследования диссертационной работы являются важными.

Связь работы с научными программами(проектами), темами. Данное диссертационное исследование выполнено в рамках реализации перспективного плана научно-исследовательской работы кафедры высшей математики, а также кафедры вычислительной математики и механики факультета математики и механики Таджикского национального университета на 2020-2025 по темам “Уравнения и системы вырождающихся дифференциальных уравнений” и “Аналитическое исследование, качественный анализ и численные решения задачи прикладной математики и механики”.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ИССЛЕДОВАНИЯ

Цель работы. Целью настоящей работы является получение общего решения и исследование задачи Каши для одного класса интегро-дифференциальных уравнений первого порядка со сверхсингулярным ядром. Нахождение способов решения интегро-дифференциальных уравнений высшего порядка со сверхсингулярным ядром также является одной из основных целей данной работы.

Задачи исследования. В соответствии с целью выделим следующие задачи:

- получение интегрального представления решений для модельного интегро-дифференциального уравнения первого порядка со сверхсингулярным ядром;
- получение интегрального представления решений для немодельного интегро-дифференциального уравнения первого порядка со сверхсингулярным ядром;
- изучение свойства полученных решений;
- исследование задачи Коши для модельного интегро-дифференциального уравнения;
- исследование задачи типа Коши для интегро-дифференциального уравнения в модельном случае;
- получение общего решения для сверхсингулярного интегро-дифференциального уравнения порядка n.

Объектом исследования диссертационной работы являются:

- модельное интегро-дифференциальное уравнение первого порядка со сверхсингулярным ядром;
- операторно-дифференциальное уравнение второго порядка, которое построена с помощью дифференциального оператора D_x^α;
- немодельное интегро-дифференциальное уравнение первого порядка со сверхсингулярным ядром;
- интегро-дифференциальное уравнение высшего порядка со сверхсингулярным ядром.

Методы исследования. В работе используются общие методы теории дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений, методы получения интегральных представлений, методы решения интегральных уравнений типа Вольтерра, метод исследования задачи Коши, а также широко используются методы, разработанные в работах Н. Раджабова.

Научная новизна работы. Результаты диссертационной работы являются новыми, получены автором самостоятельно и состоят в следующем:

- получено общего решения для модельного сверхсингулярного интегро-дифференциального уравнения первого порядка;
- получено общего решения для немодельного сверхсингулярного интегро-дифференциального уравнения первого порядка;
- изучены свойства общих решений исследуемых уравнений;

- исследована задача Коши для сверхсингулярного интегро-дифференциального уравнения в модельном случае;
- исследована задача типа Коши для сверхсингулярного интегро-дифференциального уравнения в модельном случае;
- получено общего решения для сверхсингулярного интегро-дифференциального уравнения порядка n.

Положения, выносимые на защиту:

- доказательство утверждений о структуре общих решений сверхсингулярного интегро-дифференциального уравнения в модельном случае;
- доказательство утверждений о структуре общих решений немодельного интегро-дифференциального уравнения со сверхсингулярным ядром;
- доказательство теоремы о решении задачи Коши для сверхсингулярного интегро-дифференциального уравнения в модельном случае;
- доказательство утверждений о решении задачи типа Коши для сверхсингулярного интегро-дифференциального уравнения в модельном случае;
- доказательство утверждений о структуре решений сверхсингулярного интегро-дифференциального уравнения порядка n.

Теоретическая и практическая ценность работы. Исследования, содержащиеся в диссертации, носят теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы для дальнейшего развития теории интегро-дифференциальных уравнений с сингулярными и сверх-сингулярными ядрами, для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных с сингулярными и сверх-сингулярными ядрами, а также в других разделах прикладной математики, механики и физики. Материалы данной диссертационной работы могут быть использованы для чтения специальных курсов для студентов, магистрантов и докторантов высших учебных заведений, обучающихся по специальности «математика», «прикладная математика» и «механика».

Достоверность работы. Достоверность результатов, полученных в диссертационной работе определяется обоснованными теоретическими выкладками и строгими доказательствами, опирающимися на методы теории дифференциальных и интегральных уравнений.

Соответствие диссертации паспорту научной специальности. Диссертационная работа выполнена по специальности 01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление и полностью соответствует её формуле (обыкновенные дифференциальные уравнения) и трем пунктам области исследования (1. Общая теория дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений; 2. Начально-краевые и спектральные задачи для дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений; 3. Теория дифференциально-операторных уравнений). Диссертацию можно считать разделом вещественного, комплексного и функционального анализа (смежная специальность 01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ).

Апробация работы. Основные результаты диссертации неоднократно докладывались и обсуждались на следующих международных и республиканских конференциях:

- международной научно-практической конференции «Современные задачи функционального анализа и дифференциальных уравнений» (г. Душанбе, Таджикистан, 25-26 декабря 2022 г.);
- международной научно-практической конференции «О применении дифференциальных уравнений в решении прикладных задач» (г. Душанбе, Таджикистан, 4 ноября 2021 г.);

- международной научно-практической конференции «Актуальные задачи современной математики» (г. Душанбе, Таджикистан, 25-26 июня 2021 г.);
- республиканской научно-практической конференции «Актуальные задачи современной математики» (г. Душанбе, Таджикистан, 14 октября 2022 г.);
- международной научно-практической конференции «Современные задачи математики и ее применения» (г. Душанбе, Таджикистан, 20-21 октября 2022 г.);
- международной научно-практической конференции «Комплексный анализ и его приложения» (г. Бохтар, Таджикистан, 19 ноября 2022 г.);
- международной научной конференции «Современные задачи математики и ее применения» (г. Душанбе, Таджикистан, 2023 г.).

Личный вклад автора состоит в непосредственном получении научных результатов, выносимых на защиту, подготовке основных публикаций по выполненной работе и личном участии в апробации результатов исследования.

Публикации по теме диссертации. Основные результаты диссертации опубликованы в 13 работах автора, 6 из них опубликованы в рецензируемых журналах, рекомендованных ВАК при Президенте Республики Таджикистан и 7 из них опубликованы в материалах конференции различной степени. В совместных работах все вычисления и доказательства теорем принадлежат автору диссертации.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, общей характеристики работы, трёх глав и списка цитированной литературы, состоящего из 150 наименований.

Общий объем диссертации составляет 169 страниц компьютерного текста, набранного в текстовом редакторе Microsoft Word.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Актуальность темы диссертационной работы обосновывается во введении. Также определяется соответствие темы исследования диссертации приоритетным направлениям развития науки в республике Таджикистан. Даётся обзор существующих исследований по темам, близким к теме диссертационной работы.

В **первой главе** приводится подробный аназил результатов по теории сингулярных интегро-дифференциальных уравнений.

В **параграфе 2.1 второй главы** введён дифференциальный оператор с одной особой точки

$$D_x^\beta = (b-x)^\beta \frac{d}{dx},$$

где $\beta > 1$ и с помощью этого дифференциального оператора построено и исследовано сингулярное интегро-дифференциальное уравнение вида:

$$D_x^\beta y + A(x)y - \int_x^b \frac{B(x,t)}{(b-t)^\beta} y(t)dt = f(x), \tag{1}$$

где $A(x)$, $f(x)$ – заданные функции на интервале $\Gamma = \{x: a \le x \le b\}$, $B(x,t)$ – функция, заданная на прямоугольнике $R = \{(x,y): a \le x \le b,\ a \le t \le b\}$, $y(x)$ – неизвестная функция.

Класс функций, обращающихся в точке $x = b$ в нуль с ассимптотическим поведением

$$y(x) = o\left[(b-x)^\delta\right], \delta > \beta - 1, \text{при } x \to b,$$

будем обозначать через $C_{\beta-1}[a,b]$. Если функция $y(x)\in C_{\beta-1}[a,b]$ имеют непрерывную D_x^β-производную до порядка n включительно, то клас таких функций обозначим через $C_{\beta-1}^{(n)}[a,b]$.

В классе $C_{\beta-1}^{(1)}[a,b]$ бедем искать решение уравнения (1).

Уравнение (1) вначале исследуется в модельном случае, т.е в случае, когда $A(x)=A=const,\ B(x,t)=B=const$. В этом случае уравнение (1) примет такой вид:

$$D_x^\beta y+Ay-\int_x^b\frac{B}{(b-t)^\beta}y(t)dt=f(x). \qquad (2)$$

Для нахождения решения уравнения (2) вначале показана его односторонняя эквивалентность к операторно-дифференциальному уравнению:

$$\left(D_x^\beta\right)^2 y+AD_x^\beta y+By=F(x), \qquad (3)$$

где $F(x)=D_x^\beta f(x)$.

Доказана следующая теорема о разрешимости уравнения (3).

Теорема 1. *Пусть корни характеристического уравнения*

$$\lambda^2+A\lambda+B=0 \qquad (4)$$

являются вещественными и разными. Также функция $f(x)$ в случаях $\lambda_1<\lambda_2<0$ и $\lambda_1<0<\lambda_2$ обращается в нуль в точке $x=b$ с ассимтотическим поведением

$$f(t)=o\left[e^{-\delta\omega_\beta(t)}\right],\delta>|\lambda_1|,\quad \text{при}\quad t\to b, \qquad (5)$$

а в случае $0<\lambda_1<\lambda_2$, $f(x)$ является непрерывно и ограниченная функция. Тогда общее решение уравнения (3) из класса $C_{\beta-1}^{(2)}[a,b]$ даётся по формуле:

$$y=c_1e^{\lambda_1\omega_\beta(x)}+c_2e^{\lambda_2\omega_\beta(x)}-$$
$$-\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\int_x^b\left[\lambda_1e^{\lambda_1\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}-\lambda_2e^{\lambda_2\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\right]\frac{f(t)}{(b-t)^\beta}dt. \qquad (6)$$

После нахождения решения операторно-дифференциального уравнения (2), нужно возвращаться к исследованио интегро-дифференциального уравнения (2). О структуре общего решено уравнения (2) доказана:

Теорема 2. *Пусть в уравнении (4) $D>0$ и λ_1, λ_2 являются вещественно-разными корнями. Пусть в случаях $\lambda_1<\lambda_2<0$ и $\lambda_1<0<\lambda_2$ функция $f(x)$ удовлетворяет условию (5), а в случае $0<\lambda_1<\lambda_2$, $f(x)$ является непрервной и ограниченной функцией. Тогда в трёх случаях, в зависимости от выпольнения условия $\lambda_1<\lambda_2<0$, $\lambda_1<0<\lambda_2$ и $0<\lambda_1<\lambda_2$ решение уравнения (2) даётся по формулам:*

$$y=c_1e^{\lambda_1\omega_\beta(x)}+c_2e^{\lambda_2\omega_\beta(x)}-$$
$$-\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\int_x^b\left[\lambda_1e^{\lambda_1\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}-\lambda_2e^{\lambda_2\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\right]\frac{f(t)}{(b-t)^\beta}dt$$

$$y=c_1e^{\lambda_1\omega_\beta(x)}-$$
$$-\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\int_x^b\left[\lambda_1e^{\lambda_1\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}-\lambda_2e^{\lambda_2\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\right]\frac{f(t)}{(b-t)^\beta}dt$$

и

$$y=-\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\int_x^b\left[\lambda_1 e^{\lambda_1\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}-\lambda_2 e^{\lambda_2\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\right]\frac{f(t)dt}{(b-t)^\beta}.$$

В **параграфах 2.3 и 2.4 второй главы** получены результаты, подобные утверждению теоремы 2 в случае, когда корни характеристического уравнения (4) являются вещественными и различными и комплексными.

Например, когда для характеристического уравнения (4) $D<0$, доказана теорема.

Теорема 3. *Пусть корни характеристического уравнения (4) являются комплексными, т.е.* $\lambda_{1,2}=\alpha\pm i\gamma$. *Также пусть в случае* $\alpha<0$ *функция* $f(x)$ *удовлетворяет условию*

$$f(x)=o\left[(b-x)^{-\delta\omega_\beta(x)}\right],\delta>|\alpha|,\text{при } x\to b, \tag{7}$$

а при $\alpha>0$, $f(x)\in C[a,b]$. *Тогда в зависимости от выполнения условия* $\alpha<0$ *или* $\alpha>0$ *общее решение уравнения (2) даётся соответственно по формулам:*

$$y=e^{\alpha\omega_\beta(x)}\left[c_1\cos[\gamma\omega_\beta(x)]+c_2\sin[\gamma\omega_\beta(x)]\right]-$$

$$-\frac{1}{\gamma}\int_x^b e^{\alpha\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\left[\alpha\sin\left[\gamma\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)\right]+\gamma\cos\left[\gamma\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)\right]\right]\frac{f(t)dt}{(b-t)^\beta}$$

или

$$y=-\frac{1}{\gamma}\int_x^b e^{\alpha\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\left[\alpha\sin\left[\gamma\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)\right]+\gamma\cos\left[\gamma\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)\right]\right]\frac{f(t)}{(b-t)^\beta}dt.$$

В **параграфе 2.5** исследована задачи Коши для уравнения (2).

Постановка задачи Коши. *В случае выполнения условия* $Re\lambda_{1,2}<0$ *из множества решений уравнения (2) нужно выделить такое решение* $y=y(x)$, *которое в точке* $x=x_0\in\Gamma\backslash\{b\}$ *удовлетворяет условию*

$$y|_{x=x_0}=y_0,\ \ D_x^\beta y|_{x=x_0}=y_0'. \tag{8}$$

Об однозначной разрешимости задачи Коши доказана следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть корни характеристического уравнения (4)* λ_1 *и* λ_2 *являются вещественно-разными и выполняется условие* $\lambda_1<\lambda_2<0$. *При* $x\to b$ *функция* $f(x)$ *удовлетворяет условию (5). Тогда единственное решение задачи Коши* $(2)-(8)$ *даётся по формуле:*

$$y(x)=\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\left[\lambda_2\left(y_0+R_1(x_0)\right)-y_0'-R_1'(x_0)\right]e^{\lambda_1\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(x_0)\right)}+$$

$$+\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\left[y_0'+R_1'(x_0)-\lambda_1\left(y_0+R_1(x_0)\right)\right]e^{\lambda_2\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(x_0)\right)}-$$

$$-\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\int_x^b\left[\lambda_1 e^{\lambda_1\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}-\lambda_2 e^{\lambda_2\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\right]\frac{f(t)dt}{(b-t)^\beta}.$$

Теорема 5. *Пусть* λ_1 *и* λ_2 *вещественно-равные корни характеристического уравнения (4), т.е.* $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$ *и* $\lambda<0$. *Также функция* $f(x)$ *удовлетворяет условию*

$$f(x)=o\left[e^{-\delta\omega_\beta(x)}\right],\delta>|\lambda|,\ \textit{при}\ x\to b. \tag{9}$$

Тогда единственное решение задачи Коши $(2)-(8)$ *даётся по формуле*

$$y(x)=\left[\left(y_0+R_2(x_0)\right)\left(\lambda\omega_\beta(x_0)+1\right)-\left(y_0'+R_2'(x_0)\right)\omega_\beta(x_0)\right]e^{\lambda\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(x_0)\right)}-$$

$$-\left[y_0'+R_2'(x_0)-\lambda\left(y_0+R_2(x_0)\right)\right]\omega_\beta(x)e^{\lambda\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(x_0)\right)}-$$

$$-\int_x^b e^{\lambda\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\left[\lambda\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)+1\right]\frac{f(t)dt}{(b-t)^\beta}.$$

В **параграфе 2.6 второй главы** для интегро-дифференциального уравнения (2) исследована задача типа Коши. Оказывается, что задача типа Коши в отличие от задачи Коши ставится в особой точке уравнения. Для исследования задачи типа Коши вначале изучаются свойства полученных решений и вводятся особые дифференциальные операторы. Потом на основе изученных свойств в четырёх теоремах доказывается однозначная разрешимость задачи типа Коши.

Постановка задачи типа Коши для уравнения (2). *В случае* $\lambda_1<\lambda_2<0$ *найти решение* $y=y(x)$ *уравнения* (2), *такое, что в точке* $x=b$ *удовлетворяет условиям*

$$\begin{cases} P[\lambda_2,y(x)]|_{x=b}=k_2, \\ P_1\left[\lambda_1,\lambda_2,D_x^\beta y(x)\right]_{x=b}=k_1, \end{cases} \tag{10}$$

где

$$P[\lambda_2,y(x)]=\frac{1}{e^{\lambda_2\omega_\beta(x)}}y(x),$$
$$P_1\left[\lambda_1,\lambda_2,D_x^\beta y(x)\right]=\frac{1}{e^{(\lambda_1-\lambda_2)\omega_\beta(x)}}D_x^\beta\, P[\lambda_1,y(x)].$$

Доказана следующая теорема о решении задачи типа Коши для уравнения (2):

Теорема 6. *Пусть* λ_1 *и* λ_2 *являются вещественно-разные корни характеристического уравнения (4). Также* $f(x)$ *в случае* $\lambda_1<\lambda_2<0$ *удовлетворяет условию (5). Тогда единственное решение задачи типа Коши* $(2)-(10)$ *даётся по формуле:*

$$y(x)=\frac{k_1}{\lambda_1-\lambda_2}e^{\lambda_1\omega_\beta(x)}+k_2e^{\lambda_2\omega_\beta(x)}-$$
$$-\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\int_x^b\left[\lambda_1e^{\lambda_1\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}-\lambda_2e^{\lambda_2\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\right]\frac{f(t)}{(b-t)^\beta}dt\equiv F_1^+\left[\frac{k_1}{\lambda_1-\lambda_2},k_2,f(x)\right].$$

Параграф 2.7 диссертации посвящен исследованию немодельного интегро-дифференциального уравнения (1). Решение уравнения (1) в трёх случаях зависисмости от корней характеристического уравнения найдено в неявной форме через решение уравнения Волтерра с регулярным ядром.

Например, когда корни уравнения

$$\lambda^2+A(b)\lambda+B(b,b)=0 \tag{11}$$

являются комплексными имеет место следующая теорема:

Теорема 7. *Пусть корни уравнения (11) являются комплексными и* $Re\lambda_{1,2}=\alpha<0$. *Пусть также поведение функции* $A_1(t)$, $B_1(x,t)$ *и* $f(t)$ *в окрестности точки* $t=b$ *определяются по формулам:*

$$A_1(x)=o\left[e^{-\delta\omega_\beta(t)}\right],\quad \delta>|\alpha|,$$
$$B_1(\tau,t)=o\left[e^{-\delta\omega_\beta(t)}\right],\ \ \delta>|\alpha|$$

и

$$f(x)=o\left[e^{-\delta\omega_\beta(t)}\right],\quad \delta>|\alpha|.$$

Тогда неоднородное интегро-дифференциальное уравнение (1) в классе $C_{\beta-1}^{(1)}[a,b]$ *разрешимо и его решение с помощью резольвенты интегрального уравнения*

$$y(x)+\frac{1}{\gamma}\int_x^b K_3^+(x,t)y(t)dt=E_3^+[c_1,c_2,f(x)] \tag{12}$$

выражается в виде

$$y(x)+E_3^+[c_1,c_2,f(x)]-\frac{1}{\gamma}\int_x^b \Gamma_3^+(x,t)E_3^+[c_1,c_2,f(x)]dt.$$

где $\Gamma_3^+(x,t)$ *является резольвентой интегрального уравнения (12).*

В т**ретьей главе** диссертационной работы исследовано интегро-дифференциальное уравнение n-го порядка со сверхсингулярным ядром

$$P_M^n\left(D_x^\beta\right)y-\int_x^b \frac{B(x,t)}{(b-t)^\beta}P_N^m\left(D_x^\beta\right)y(t)dt=f(x), \tag{13}$$

где $\beta>1, n>m$, $B(b,b)\neq 0$ и $P_M^n\left(D_x^\beta\right)$, $P_N^m\left(D_x^\beta\right)$ – следующие дифференциальные оператори:

$$P_M^n\left(D_x^\beta\right)\equiv\left(D_x^\beta\right)^n+M_1\left(D_x^\beta\right)^{n-1}+M_2\left(D_x^\beta\right)^{n-2}+\cdots+M_{n-1}D_x^\beta+M_n,$$

$$P_N^m\left(D_x^\beta\right)\equiv\left(D_x^\beta\right)^m+N_1\left(D_x^\beta\right)^{m-1}+N_2\left(D_x^\beta\right)^{m-2}+\cdots+N_{m-1}D_x^\beta+N_m.$$

Решение уравнения (13) ищется в классе $n-$ раз D_x^β – дифференцируемых функций, производные каторых до порядка m принадлежат классу $C_{\beta-1}[a,b]$. Класс таких функций обозначен через $C_{\beta-1}^{(n,m)}[a,b]$.

Уравнение (13) вначале исследовано в модельном случае, т.е. когда $B(x,t)=B=const$. В этом случае модельное уравнение, соответствующее уравнению (13), примет вид:

$$P_M^n\left(D_x^\beta\right)y-\int_x^b \frac{B}{(b-t)^\beta}P_N^m\left(D_t^\beta\right)y(t)dt=f(x). \tag{14}$$

Уравнению (14) соответствует операторно-дифференциальное уравнение n+1-го порядка с постоянными коэффициентами:

$$\left(D_x^\beta\right)^{n+1}y+K_1\left(D_x^\beta\right)^n y+\cdots+K_nD_x^\beta y+K_{n+1}y=D_x^\beta f(x)$$

и характеристическое уравнение:

$$\lambda^n+K_1\lambda^{n-1}+K_2\lambda^{n-2}+\cdots+K_n\lambda+K_{n+1}=0. \tag{15}$$

Доказана теорема.

Теорема 8. *Пусть коэффициенты уравнения (14) такие, что характеристическое уравнение (15) имеет только вещественно-разные корни и эти корни удовлетворяют условию*

$$\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_{n+1}<0. \tag{16}$$

Кроме того поведение функции $f(x)$ *в окрестности точки* $x=b$ *определяется из формулы*

$$f(t)=o\left[e^{-\delta\omega_\beta(t)}\right],\delta>|\lambda_1|. \tag{17}$$

Тогда решение неоднородного интегро-дифференциального уравнения (14) из класса $C_{\beta-1}^{(n,m)}[a,b]$ *даётся по формуле:*

$$y(x)=c_1e^{\lambda_1\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)}+c_2e^{\lambda_2\omega_\beta(x)}+\cdots+c_{n+1}e^{\lambda_{n+1}\omega_\beta(x)}+$$

$$+\frac{1}{\Delta_0}\int_x^b \Big[\Delta_1\lambda_1 e^{\lambda_1\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}+\Delta_2\lambda_2 e^{\lambda_2\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}+\cdots$$

$$+\Delta_{n+1}\lambda_{n+1}e^{\lambda_{n+1}\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\Big]\frac{f(t)}{(b-t)^\beta}dt,$$

где c_i $(i=\overline{1,n+1})$ *– являются апоизвольными константами.*

Теорема 9. *Пусть все условия теоремы 8, кроме условия (16), выполняются. Пусть вместо условия (16) корни характеристического уравнения (15) удовлетворяют условию*

$$\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_k<0<\lambda_{k+1}<\lambda_{k+2}<\cdots<\lambda_{n+1}.$$

Тогда уравнение (14) в классе $C_{\beta-1}^{(n,m)}[a,b]$ *разрешимо и его решение, имеет вид:*

$$y(x)=c_1e^{\lambda_1\omega_\beta(x)}+c_2e^{\lambda_2\omega_\beta(x)}+\cdots+c_ke^{\lambda_k\omega_\beta(x)}+$$

$$+\frac{1}{\Delta_0}\int_x^b \Big[\Delta_1\lambda_1 e^{\lambda_1\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}+\Delta_2\lambda_2 e^{\lambda_2\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}+\cdots$$

$$+\Delta_{n+1}\lambda_{n+1}e^{\lambda_{n+1}\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\Big]\frac{f(t)}{(b-t)^\beta}dt.$$

Теорема 10. *Пусть в теореме 8 вместо условия (16) выполняется условие*

$$0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_{n+1}.$$

Также функция $f(x)\epsilon C[a,b]$. *Тогда единственное решение уравнения (14) из класса* $C_{\beta-1}^{(n,m)}[a,b]$ *даётся по формуле:*

$$y(x)=\frac{1}{\Delta_0}\int_x^b \Big[\Delta_1\lambda_1 e^{\lambda_1\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}+\Delta_2\lambda_2 e^{\lambda_2\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}+\cdots$$

$$+\Delta_{n+1}\lambda_{n+1}e^{\lambda_{n+1}\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\Big]\frac{f(t)}{(b-t)^\beta}dt.$$

В **параграфах 3.3 и 3.4** в случае, когда в уравнении (15) все корни комплексные и все корни вещественные и равные доказаны утверждения, подобные теоремам 8-10.

Например, когда все корни комплексные доказаны теорема.

Теорема 11. *Пусть корни характеристического уравнения (15) являются комплексными и условие:*

$$\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_k<0$$

выполняется. Также поведение функции $f(x)$ *в окрестности точки* $x=b$ *определяется по формуле*

$$f(x)=o\left[e^{-\delta\omega_\beta(x)}\right],\ \delta>|\alpha_1|\ \text{при}\ x\to b.$$

Тогда решение уравнения (14) из $C_{\beta-1}^{(n,m)}[a,b]$ *даётся по формуле:*

$$y(x)=e^{\alpha_1\omega_\beta(x)}\left[c_1\cos\left[\gamma_1\omega_\beta(x)\right]+c_2\sin\left[\gamma_1\omega_\beta(x)\right]\right]+\cdots+$$

$$+e^{\alpha_k\omega_\beta(x)}\left[c_{2k-1}\cos\left[\gamma_k\omega_\beta(x)\right]+c_{2k}\sin\left[\gamma_k\omega_\beta(x)\right]\right]-$$

$$-\int_x^b\Big\{e^{\alpha_1\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\Big[\Lambda_{\alpha_1\gamma_1}^{-,1}\{N_2,N_1\}\cos\Big[\gamma_1\Big(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\Big)\Big]+$$

$$+\Lambda_{\alpha_1\gamma_1}^{+,1}\{N_2,N_1\}\sin\Big[\gamma_1\Big(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\Big)\Big]\Big]+\cdots+$$

$$+e^{\alpha_k\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\Big[\Lambda_{\alpha_k\gamma_k}^{-,1}\{N_{2k},N_{2k-1}\}\cos\Big[\gamma_k\Big(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\Big)\Big]\Big]$$

$$+\Lambda^{+,1}_{\alpha_k\gamma_k}\{N_{2k},N_{2k-1}\}\sin\left[\gamma_k\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)\right]\Big]\Big\}\frac{f(t)dt}{(b-t)^\beta}$$

где c_i $\left(i=\overline{1,2k}\right)$ *– являются произвольными константами и* $\Lambda^{\pm,1}_{\alpha_i\gamma_i}\{N_{j+1},N_j\}$ *определяются из равенств:*

$$\begin{cases}\Lambda^{+,1}_{\alpha_i\gamma_i}\{N_{j+1},N_j\}=\alpha_i N_{j+1}-\gamma_i N_j,\\ \Lambda^{-,1}_{\alpha_i\gamma_i}\{N_{j+1},N_j\}=\alpha_i N_j-\gamma_i N_{j+1}.\end{cases}$$

В **параграфе 3.6 третьей главы** поставлена и исследована задача типа Коши для уравнения (14).

Постановка задачи типа Коши. *В случае* $\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_{n+1}<0$ *найти решение* $y=y(x)$ *уравнения (14), такое, что в точке* $x=b$ *удовлетворяет весовым условиям:*

$$\begin{cases}P[\lambda_{n+1},y(x)]|_{x=b}=k_{n+1},\\ P_1\left[\lambda_n,\lambda_{n+1},D_x^\beta y(x)\right]\Big|_{x=b}=k_n,\\ P_2\left[\lambda_{n-1},\lambda_n,\lambda_{n+1},D_x^\beta y(x)\right]\Big|_{x=b}=k_{n-1},\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ P_n\left[\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{n+1},D_x^\beta y(x)\right]\Big|_{x=b}=k_1,\end{cases} \tag{18}$$

где

$$P[\lambda_{n+1},y(x)]=\frac{1}{e^{\lambda_{n+1}\omega_\beta(x)}}y(x),$$

$$P_1\left[\lambda_n,\lambda_{n+1},D_x^\beta y(x)\right]=\frac{1}{e^{(\lambda_n-\lambda_{n+1})\omega_\beta(x)}}D_x^\beta\ P[\lambda_{n+1},y(x)],$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$P_n\left[\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{n+1},D_x^\beta y(x)\right]=\frac{1}{e^{(\lambda_1-\lambda_2)\omega_\beta(x)}}D_x^\beta P_{n-1}\left[\lambda_2,\lambda_3,\cdots,\lambda_{n+1},D_x^\beta y(x)\right].$$

О разрешимости поставленной задачи доказана теорема.

Теорема 12. *Пусть в уравнении n-го порядка (14) коэффициенты такие, что характеристическое уравнение (5) имеет только вещественно-разные корни и условие* $\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_{n+1}<0$ *выполняется. Кроме того, поведение функции* $f(t)$ *в окрестности точки* $t=b$ *определяется из ассимптотической формулы* (17). *Тогда единственное решение задача типа Коши* $(14)-(18)$ *даётся по формуле:*

$$y(x)=\frac{k_1}{(\lambda_1-\lambda_{n+1})(\lambda_1-\lambda_n)\ldots(\lambda_1-\lambda_2)}e^{\lambda_1\omega_\beta(x)}+\cdots+k_{n+1}e^{\lambda_{n+1}\omega_\beta(x)}+$$

$$+\frac{1}{\Delta_0}\int_x^b\left[\Delta_1\lambda_1e^{\lambda_1\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}+\Delta_2\lambda_2e^{\lambda_2\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}+\cdots\right.$$

$$\left.+\Delta_{n+1}\lambda_{n+1}e^{\lambda_{n+1}\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\right]\frac{f(t)}{(b-t)^\beta}dt.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ
1. ОСНОВНЫЕ НАУЧНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

Результаты диссертационной работы являются новыми и состоят в следующем:

- в трёх случаях корней харктеристического уравнения найдено общее решение сверхсингулярного модельного интегро-дифференциального уравнения [1-М], [2-М], [7-М];
- разработан интегральный метод для нахождения общего решения неоднородного интегро-дифференциального уравнения [1-М], [2-М], [6-М];
- для исследуемого уравнения поставлена задача Коши в неособых точках уравнения и доказана однозначная разрешимость поставленной задачи [1- М], [10- М], [12- М];
- для исследуемого уравнения поставлена задача типа Коши в особой точке уравнения и доказана однозначная разрешимость поставленной задачи [1-М], [2-М];
- общее решение немодельного сверхсингулярного интегро-дифференциального уравнения в трёх случаях корней характеристического уравнения, находится через резольвенты интегрального уравнения Вольтерра с регулярным ядром [3-М], [8-М], [9- М];
- исследовано сверхсингулярное интегро-дифференциальное уравнение порядка n и его общее решение в трёх случаях корней характеристического уравнения найдено в явном виде [6-М], [11-М], [12-М].

2. РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПРАКТИЧЕСКОМУ ИСПОЛЬЗОВАНИЮ РЕЗУЛЬТАТОВ

Исследования, содержащиеся в диссертации, носят теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы для развития теории интегро-дифференциальных уравнений с двумя и n особых точек, а также для уравнения, содержащие частных производных по одним или двумя переменными. Также разработанная теория в данной диссертационной работе, можеть быть использована для исследовании интегро-дифференциальных уравнений с дробными производными и с ядрами содержащее точки и линии сингулярности.

Материалы данной диссертационной работы могут быть использованы для чтения специальных курсов для студентов, магистрантов и докторантов высших учебных заведений, обучающихся по специальностям “Математика”, “Прикладная математика” и “Механика”

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

а) Статьи, опубликованные в рецензируемых журналах, рекомендованных ВАК при Президенте Республики Таджикистан:

[1-М] **Djumakhon I.** Volterra-Type Integro-Differential Equations with Two-Point Singular Differential Operator [Text] / S.K. Zarifzoda, T.K. Yuldashev, I. Djumakhon // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2021. – Vol. 42. – No. 15. – P. 3784-3792.

[2-М] **Искандари Дж.** Исследование одного класса интегро-дифференциального уравнения с правой сверх-сингулярной точкой / С.К. Зарифзода, Дж. Искандари // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. – 2021. – № 1. – С. 5-18.

[3-М] **Искандари Дж.** Исследование одного класса немодельного интегро-дифференциального уравнения первого порядка с правой сверхсингулярной точкой [Текст] / С.К. Зарифзода, Дж. Искандари // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. – 2021. – № 3. – С. 62-76.

[4-М] **Искандари Дж.** Таҳқиқи як синфи муодилаҳои интегро-дифференсиалии моделии тартиби дуюм бо нуқтаи рости барзиёд сингулярӣ [Текст] / Дж. Искандари // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. – 2021. – № 4. – С. 5-16.

[5-М] **Искандари Дж.** Исследование одного класса модельного интегро-дифференциального уравнения второго порядка в случае комплексно-сопряженных корней характеристического уравнения [Текст] / С.К. Зарифзода, Дж. Искандари // Вестник педагогического университета. Естественные науки. – 2022. – № 1(13). – С. 73-81.

[6-М] **Искандари Дж.** Исследование одного класса интегро-дифференциальных уравнений n-го порядка с особым ядром [Текст] / Дж. Искандари // Вестник филиала Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова в городе Душанбе. Серия естественных наук. – 2023. – Том1. – № 2(31). – С. 71-80.

б) Статьи, опубликованные в других изданиях:

[7-М] **Искандари Дж.** Исследования одного класса интегро-дифференциальных уравнений с правой сверх-сингулярной точкой в ядре [Текст] / С.К. Зарифзода, Дж. Искандари // Материалы международной конференции «Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений», посвящённой 70-летию со дня рождения академика АН Республики Таджикистан, доктора физико-математических наук, профессора Бойматова Камолиддина Хамроевича. – Душанбе, 2020. – С. 126-128.

[8-М] **Искандари Дж.** Исследование одного класса немодельных интегро-дифференциальных уравнений первого порядка с правой сверх-сингулярной точкой в ядре [Текст] / С.К. Зарифзода, Дж. Искандари // Материалы международной конференции «Актуальные проблемы современной математики», посвященной 80-летию со дня рождения доктора физико-математических наук, профессора Темура Собирова. – Душанбе, 2021. – С. 109-111.

[9-М] **Искандари Дж.** Исследование одного класса немодельных интегро-дифференциальных уравнений первого порядка с правой сверх-сингулярной точкой в ядре [Текст] / С.К. Зарифзода, Дж. Искандари // Материалы международной научно-практической конференции «О применении дифференциальных уравнений при решении прикладных задач». – Душанбе, 2021. – С. 59-61.
[10-М] **Искандари Дж.** Исследование сопряжённого одномерного интегро-дифференциального уравнения первого порядка с логарифмической особенностью в ядре [Текст] / С.К. Зарифзода, Дж. Искандари // Материалы международной научно-практической конференции «Современные проблемы математики и её приложения» (20-21 октября 2022 г.). – Душанбе, 2022. – С. 39-42.
[11-М] **Искандари Дж.** Исследование одного класса модельных интегро-дифференциальных уравнений n-го порядка в случае вещественно-разных корней характеристического уравнения [Текст] / С.К. Зарифзода, Дж. Искандари // Материалы международной научно-практической конференции «Комплексный анализ и его приложения». – Бохтар, 2022. – С. 60-62.
[12-М] **Искандари Дж.** Исследование одного класса интегро-дифференциальных уравнений n-го порядка с сингулярным ядром [Текст] / Дж. Искандари // Материалы республиканской научно-практической конференции «Актуальные проблемы развития естественных, точных и математических наук в современных условиях» (29 ноября 2022 г.). – Душанбе, 2022. – С. 287-288.
[13-М] **Искандари Дж.** Исследование одного класса сверх сингулярных интегро-дифференциальных уравнений 3-го порядка [Текст] / Дж. Искандари, С.К. Зарифзода // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математики и её приложения». – Душанбе, 2023. – С. 65

АННОТАТСИЯИ

диссертатсияи Искандари Ҷумахон дар мавзӯи «Таҳқиқи баъзе синфҳои муодилаҳои интегро-дифференсиалӣ бо нуқтаи рости барзиёд сингулярӣ» барои дарёфти дараҷаи илмии номзади илмҳои физикаю математика аз рӯйи ихтисоси 01.01.02 – Муодилаҳои дифференсиалӣ, системаҳои динамикӣ ва идоракунии оптималӣ

Калидвожаҳо: муодилаи интегро-дифференсиалӣ, муодилаи интегралӣ, муодилаи операторӣ-дифференсиалӣ, муодилаи характеристикӣ, ҳалли умумӣ, масбӣалаи Коши, масбӣалаи навбӣи Коши, ядрои сингулярӣ, оператори дифференсиалӣ, муодилаи якҷинса, муодилаи ғайриякҷинса.

Мақсади кор. Мақсади кори мазкур ба даст овардани ҳалли умумӣ ва таҳқиқ намудани масъалаи Коши барои як синфи муодилаҳои интегро-дифференсиалии тартиби якум бо ядрои барзиёд сингулярӣ мебошад. Дарёфт намудани роҳҳои ҳалли муодилаҳои интегро-дифференсиалии тартиби олӣ бо ядрои барзиёд сингулярӣ низ яке аз мақсадҳои асосии кор ба шумор меравад.

Усулҳои таҳқиқот. Дар кор методҳои умумии назарияи муодилаҳои дифференсиалӣ, методи ҳосил намудани тасвири интегралӣ, методи табдилотҳои интегралӣ, методҳои оператсионии таҳқиқот, методи ёфтани ҳалли муодилаҳои интегро-дифференсиалӣ ва инчунин ба таври васеъ методҳое, ки дар корҳои Н.Раҷабов коркард шудаанд, истифода бурда шудааст.

Навгонии илмии таҳқиқот. Натиҷаҳои диссертатсияи илмӣ нав буда, аз тарафи муаллиф мустақилона ба даст оварда шудааст ва аз инҳо иборат мебошад:

- тасвири интегралии ҳал барои муодилаи интегро-дифференсиалии моделии тартиби якум бо ядрои барзиёд сингулярӣ ба даст оварда шудааст;
- тасвири интегралии ҳал барои муодилаи интегро-дифференсиалии ғайримоделии тартиби якум бо ядрои барзиёд сингулярӣ ба даст оварда шудааст;
- хосиятҳои ҳалҳои бадастовардашуда омӯхта шудааст;
- масъалаи Коши барои муодилаи интегро-дифференсиалии моделӣ таҳқиқ гардидааст;
- масъалаи типи Коши барои муодилаи интегро-дифференсиалии моделӣ таҳқиқ гардидааст;
- тасвири интегралии ҳал барои муодилаи интегро-дифференсиалии тартиби олӣ бо ядрои барзиёд сингулярӣ ба даст оварда шудааст.

Арзиши назариявӣ ва амалии таҳқиқот. Таҳқиқотҳои дар ин диссертатсияи илмӣ гузаронидашуда характери назариявӣ доранд. Натиҷаҳои илмии бадастовардашуда барои инкишофи минбаъдаи назарияи муодилаҳои интегро-дифференсиалӣ бо ядроҳои сингулярӣ ва барзиёд сингулярӣ, барои муодилаҳои интегро-дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ ва бо ядроҳои сингулярӣ ва барзиёд сингулярӣ ва инчунин дар қисматҳои дигари илмҳои амалӣ ба мисли физика, механика ва ғайра истифода мешаванд. Маводи диссертатсияи илмии мазкурро ҳангоми хондани курсҳои махсус барои донишҷӯёни курсҳои болоӣ, магистрон ва докторантони мактабҳои олӣ, ки аз рӯйи ихтисосҳои математика, математикаи амалӣ ва механика таҳсил менамоянд, истифода бурдан мумкин аст.

АННОТАЦИЯ

диссертации Искандари Джумахона на тему «Исследование некоторых классов интегро-дифференциальных уравнений с правой сверхсингулярной точкой», представленной на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение, интегральное уравнение, операторно-дифференциальное уравнение, характеристическое уравнение, общее решение, задача Коши, задача типа Коши, сингулярное ядро, дифференциальный оператор, однородное уравнение, неоднородное уравнение.

Цель работы. Целью настоящей работы является получение общего решения и исследование задачи Каши для одного класса интегро-дифференциальных уравнений первого порядка со сверхсингулярным ядром. Нахождение способов решения интегро-дифференциальных уравнений высщего порядка со сверхсингулярным ядром также является одной из основных целей данной работы.

Методы исследования. В работе используются общие методы теории дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений, методы получения интегральных представлений, методы решения интегральных уравнений типа Вольтерра, метод исследования задачи Коши, а также широко используются методы, разработанные в работах Н. Раджабова.

Научная новизна работы. Результаты диссертационной работы являются новыми, получены автором самостоятельно и состоят в следующем:

- получено интегральное представление решения для модельного интегро-дифференциального уравнения первого порядка со сверхсингулярным ядром;
- получено интегральное представление решения для немодельного интегро-дифференциального уравнения первого порядка со сверхсингулярным ядром;
- изучены свойства полученных решений;
- исследована задача Коши для модельного интегро-дифференциального уравнения;
- исследована задача типа Коши для модельного интегро-дифференциального уравнения;
- получено интегральное представление решения для интегро-дифференциального уравнения высшего порядка со сверхсингулярным ядром.

Теоретическая и практическая ценность работы. Исследования, содержащиеся в диссертации, носят теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы для дальнейшего развития теории интегро-дифференциальных уравнений с сингулярными и сверх-сингулярными ядрами, для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных с сингулярными и сверх-сингулярными ядрами, а также в других разделах прикладной математики, механики и физики. Материалы данной диссертационной работы могут быть использованы для чтения специальных курсов для студентов, магистрантов и докторантов высших учебных заведений, обучающихся по специальности «математика», «прикладная математика» и «механика».

SUMMARY

of the thesis of Iskandari Jumakhon on the topic "Investigation of some classes of integro-differential equations with right supper singular point", represented for the degree of Candidate of Physical and Mathematical Sciences in the specialty 01.01.02 - Differential equations, Dynamical systems and Optimal control

Keywords: integro-differential equation, integral equation, operator-differential equation, characteristic equation, general solution, Cauchy problem, Cauchy type problem, singular kernel, differential operator, homogeneous equation, nonhomogeneous equation.

Purpose of research. The purpose of this work is to obtain a general solution and study the Cauchy problem for one class of first-order integro-differential equations with a supersingular kernel. Finding ways of solving integro-differential equations of higher orders with a supersingular kernel is also one of the main goals of this work.

Research methods. In the paper there used the general methods of the theory of differential and integro-differential equations, the method of obtaining integral representations, the methods of solving Volterra-type integral equations, the method of research of Cauchy problem, and also widely uses the methods developed in the works of N. Radjabov.

Scientific novelty. All results of the dissertation are new, obtained by the author independently and they are consist of:

- an integral representation of the solution for a model first-order integro-differential equation with a supersingular kernel was obtained;
- an integral representation of the solution for a non-model first-order integro-differential equation with a supersingular kernel was obtained;
- properties of the obtained solutions were studied;
- the Cauchy problem for the model integro-differential equation was studied;
- a Cauchy type problem for a model integro-differential equation was studied;
- an integral representation of the solution for a higher order integro-differential equation with a supersingular kernel was obtained.

Theoretical and practical value. The research contained in the dissertation has theoretical characteristic. The results obtained can be used for further development of the theory of integro-differential equations with singular and super-singular kernels, for partial integro-differential equations with singular and super-singular kernels, as well as in other areas of applied mathematics, mechanics and physics. The materials of this dissertation work can be used to teach special courses for students, undergraduates and doctoral students of higher educational institutions studying in the specialty "mathematics", "applied mathematics" and "mechanics".