

ҶУМҲУРИИ ТОҶИКИСТОН
ДОНИШГОҲИ ДАВЛАТИИ ОМУЗГОРИИ ТОҶИКИСТОН
БА НОМИ САДРИДДИН АЙНӢ

УДК 517.5

Бо ҳуқуқи дастхат



Шамсиддинзода Саъди Абдуқосим

ДОИМИҲОИ АНИҚ ДАР НОБАРОВАРИИ НАМУДИ
ЧЕКСОН-СТЕЧКИН БАРОИ НАЗДИККУНИИ МУШТАРАКИ
БЕҲТАРИНИ ФУНКСИЯҲО ВА ҲОСИЛАҲОИ ПАЙДАРПАӢИ
ОНҲО ДАР ФАЗОИ L_2

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т И

диссертатсия барои дарёфти дараҷаи илмии
доктори фалсафа (PhD) – доктор аз рӯи ихтисоси 6D060100 – Математика
(6D060102 – Таҳлили ҳақиқӣ, комплексӣ ва функционалӣ)

Душанбе — 2026

Диссертатсия дар кафедраи анализи математикии Донишгоҳи давлатии омӯзгории Тоҷикистон ба номи Садриддин Айни иҷро шудааст

РОҲБАРИ ИЛМӢ:

Юсупов Гулзорхон Амиршоевич — доктори илмҳои физикаю математика, дотсент, мудирӣ кафедраи анализи математикии Донишгоҳи давлатии омӯзгории Тоҷикистон ба номи С. Айни

МУҚАРРИЗОНИ РАСМӢ:

Исҳоқов Сулаймон Абунасровиҷ, узви вобастаи Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон, доктори илмҳои физикаю математика, профессор, мудирӣ шуъбаи назарияи функсияҳо ва таҳлили функционалии Институти математикаи ба номи А. Ҷӯраев;

Палавонов Қурбоназар Қурбонбековиҷ, номзади илмҳои физикаю математика, мудирӣ кафедраи риёзиёт дар иқтисодиёти Донишгоҳи байналмилалӣ сайёҳӣ ва саҳибкорӣ Тоҷикистон

МУАССИСАИ ПЕШБАР:

Муассисаи давлатии таълимии Донишгоҳи давлатии Бохтар ба номи Носири Хусрав

Ҳимоя 29-уми апрели соли 2026 соати 14:00 дар ҷаласаи Шурои диссертатсионии 6D.КOA-011 дар назди Донишгоҳи миллии Тоҷикистон аз рӯи нишонии: 734027, ш. Душанбе, кӯчаи Буни-Ҳисорак, бинои 17, синфхонаи 203 баргузор мегардад.

E-mail: alisher_gaforov@mail.ru; рақами телефони котиби илмӣ: (+992) 900-76-66-03.

Бо диссертатсия дар китобхонаи марказии Донишгоҳи миллии Тоҷикистон ва тавассути сомонаи <http://www.tnu.tj> шинос шудан мумкин аст.

Автореферат «_____» «_____» соли 2026 аз рӯи фехристи пешниҳодгардида ирсол карда шудааст.

Котиби илмӣ Шурои диссертатсионии 6D.КOA-011, номзади илмҳои физикаю математика



Ғафоров А.Б.

ТАВСИФИ УМУМИИ КОР

Муҳиммияти мавзуи тадқиқот. Назарияи наздиккунии функцияҳо яке аз соҳаҳои босуръат рушдбандаи таҳлили математики ба шумор рафта, дорои татбиқҳои муҳим дар соҳаҳои гуногуни математикаи амалӣ мебошад. Дар ин назария масъалаҳои экстремалии наздиккуни беҳтарини функцияҳои дифференсиронидашавандаи 2π -даврий ба воситаи бисёраъзогиҳои тригонометрӣ дар фазоҳои гуногуни банаҳӣ мавқеи махсусро ишғол мекунанд.

Дар замони ҳозира, воридшавии афкор ва усулҳои назарияи наздиккунии функцияҳо ба соҳаҳои гуногуни илми математика, махсусан дар самтҳои амалӣ, бисёр мушоҳида мешавад. Асоси назарияи наздиккуни, ки дар асарҳои машҳури классикии Чебишёв, Вейерштрасс, Цексон ва Бернштейн оид ба наздиккунии функцияҳо тавассути бисёраъзогиҳо гузошта шудааст, бознигарӣ гардида, дар заминаи васеътар ва мустаҳкамтар инкишоф меёбад. Маълум аст, ки масъалаҳои аппроксиматсионӣ, ки дар синфҳои функцияҳо гузошта мешаванд, дар бисёр ҳолатҳо масъалаҳои экстремалие мебошанд, ки дар онҳо ёфтани сарҳади аниқи болоии саҳви наздиккуни барои усули додасишуда дар синфи функцияҳои қайдкардасишуда талаб карда мешавад, ё ин ки барои ин синф методҳои беҳтарини наздиккуни нишон дода шавад.

Ҳалли масъалаҳои экстремалиро барои синфҳои функцияҳои муайян баррасӣ намуда, дар диссертатсияи мазкур бо ҳолати функцияҳои даврий маҳдуд мешавем, яъне дар рисолаи илмӣ як қатор масъалаҳои экстремалии назарияи наздиккунии функцияҳои даврий ба воситаи бисёраъзогиҳои тригонометрӣ дар фазои гилбертии L_2 таҳлил карда мешаванд. Натиҷаҳои ниҳойӣ оид ба сарҳади болоии тамоили бисёраъзогиҳои тригонометрӣ барои синфҳои гуногуни функцияҳои даврий баён карда мешаванд.

Дар боби аввал маводи таҳиявӣ чамъоварӣ гардида, масъалаҳои экстремалии ҳанӯз ҳалнашуда дар ҳар як ҳолати мушаххас ба таври муфассал таҳия ва таҳлил карда мешаванд. Аслан, ин масъалаҳо барои наздиккунии муштаракӣ функцияҳо ва ҳосилаҳои мобайнии онҳо бахшида шудаанд. Сипас,

масъалаҳои таҳияшуда дар бобҳои минбаъдаи диссертатсия барои синфҳои гуногуни функсияҳои даврӣ ҳал карда мешаванд. Натиҷаҳои бадастомада ниҳой мебошанд ва дар асл ҳеҷ чизро ба онҳо илова ё аз онҳо кам кардан мумкин нест. Маҳз ҳамин омилҳо аҳамият ва мақсаднокии мавзуи интихобшудаи ин рисолаи илмиро муайян менамоянд.

Дараҷаи кор карда баромадани мавзуи тадқиқот. Дар байни самтҳои муосири таҳлили математикӣ, назарияи аппроксиматсияи функсияҳо мавқеи хосро ишғол мекунад, зеро яке аз соҳаҳои босуръат инкишофёбандаи он ба шумор рафта, дар математикаи амалӣ татбиқҳои васеъ пайдо намудааст. Дар доираи ин назария масъалаҳои экстремалии наздиккунии муштаракӣ беҳтарини функсияҳои 2π -даврӣ бо бисёраъзогиҳои тригонометрӣ дар фазоҳои гуногуни банаҳӣ аҳамияти назаррас доранд. Масъалаи наздиккунии муштаракӣ беҳтарини функсияҳои дифференсиронидашавандаи даврӣ ба воситаи бисёраъзогиҳои тригонометрӣ дар метрикаи мунтазам бори аввал соли 1960 аз ҷониби А.Л. Гаркави [7] тадқиқ шудааст. Худи ҳамон сол А.Ф. Тиман [19] масъалаи гузошташударо барои ҳолати наздиккунии беҳтарини функсияҳои дар тамоми тири ададӣ додашуда тавассути функсияҳои бутуни экспоненсиалӣ мавриди омӯзиш қарор дода буд.

Масъалаи наздиккунии муштаракӣ беҳтарини функсияҳо ва ҳосилаҳои онҳо, ки дар шакли умумитар ҳам барои бисёраъзогиҳои алгебравӣ ва ҳам барои бисёраъзогиҳои тригонометрӣ мавриди баррасӣ қарор гирифтааст, дар монографияи В.Н. Малозёмов [12] ба таври муфассал омӯхта шуда, дар он як қатор натиҷаҳои классикии назарияи наздиккунии функсияҳо барои ҳолати наздиккунии муштаракӣ беҳтарини функсияҳо ва ҳосилаҳои онҳо умумӣ гардонида шудаанд. Барои баъзе функсияҳои даврии дифференсиронидашаванда дар фазои L_2 бо вазни миёнакардашудаи модули бифосилагии тартиби оӣ, ки аз боло бо мажорантаи додашуда маҳдуд мебошанд, масъалаи гузошташуда дар корҳои С.Б. Вакарчук ва В.И. Забутная [4], М.Ш. Шабозов ва А.А. Шабозова [25] ва инчунин М.Ш. Шабозов [26] дида баромада шудааст.

Дар тадқиқоти мазкур, корҳои муаллифони дар боло зикршударо идома

дода, масъалаи экстремалии умумитар мавриди баррасӣ қарор дода мешавад, яъне талаб карда мешавад, ки сарҳади аниқи болоии наздиккунии муштараки беҳтарини функцияҳо ва ҳосилаҳои пай дар пайи онҳо тавассути бисёраъзогиҳои мувофиқ ёфта шавад.

Дар рисолаи мазкур наздиккунии муштараки беҳтарини функцияҳо ба воҳити бисёраъзогиҳои тригонометрӣ пурра ҳал карда шудааст. Қимати аниқи сарҳади болоии наздиккунии муштараки беҳтарин барои баъзе синфи функцияҳо, ки ба фазои гилбертии $L_2[0, 2\pi]$ тааллуқ доранд, ҳисоб карда шудааст.

Робитаи кор бо барномаҳо (лоихаҳо) ва мавзуҳои илмӣ. Кори диссертатсионӣ дар доираи татбиқи дурнамои нақшаи илмӣ-тадқиқотии кафедраи анализи математикии Донишгоҳи давлатии омӯзгории Тоҷикистон ба номи С. Айни барои солҳои 2021-2025 аз рӯи мавзуи «Назарияи наздиккунии функцияҳои дифференсиронидашавандаи даврӣ» бахшида ба «Нақшаи чорабиниҳо барои солҳои 2020-2025 оид ба амалигардони «Бистсолаи омӯзиш ва рушди фанҳои табиатшиносӣ, дақиқ ва риёзӣ дар соҳаи илму маориф» эълон намудани солҳои 2020-2040» (Банди 38) иҷро карда шудааст.

ТАВСИФИ УМУМИИ ТАДҚИҚОТ

Мақсади тадқиқот. Ҳадафи асосии кори диссертатсионӣ дар ҳалли масъалаҳои экстремалии ифода меёбад, ки ба ёфтани қиматҳои аниқи сарҳадҳои болоии наздиккунии муштараки беҳтарини функцияҳои даврӣ ва ҳосилаҳои фосилавии онҳо тавассути бисёраъзогиҳои тригонометрӣ дар метрикаи фазои $L_2[0, 2\pi]$ вобаста мебошанд.

Масъалаҳои тадқиқот. Дар мувофиқат бо ҳадафи гузошташуда масъалаҳои зерин ҷудо карда мешаванд:

- ёфтани қимати аниқи сарҳадҳои болоии наздиккунии муштараки беҳтарин ва ҳосилаҳои пайдарпайи он тавассути бисёраъзогиҳо ва ҳосилаҳои мутаносиби онҳо барои баъзе синфи функцияҳои даврӣ, ки ба фазои $L_2[0, 2\pi]$ тааллуқ доранд;

- ёфтани нобаробариҳои нави аниқ байни бузургиҳои наздиккунии миёна-квадратии беҳтарини функсияҳои дифференсиронидашаванда ва интегралҳое, ки қимати модули бефосилагии миёнакардашудаи тартиби m -умро аз қимати сарҳадӣ дар фазои гилбертии $L_2[0, 2\pi]$ дар бар мегиранд;
- ёфтани қимати аниқи n -қутрҳои бернштейнӣ, колмогоровӣ, гелфандӣ, хаттӣ ва проексионии синфҳои функсияҳое, ки ба воситаи модули бефосилагии тартиби олий дода мешаванд.

Объекти тадқиқот. Объекти асосии тадқиқотро масъалаҳои гуногуни экстремалӣ ташкил медиҳанд, ки бо наздиккунии муштаракӣ беҳтарини функсияҳо ва ҳосилаҳои онҳо тавассути бисёраъзогиҳои тригонометрӣ дар фазои $L_2[0, 2\pi]$ вобаста мебошанд.

Предмети тадқиқот. Мавзӯи тадқиқот аз муайянсозии нобаробариҳои аниқи намуди Чексон–Стечкин, ки наздиккунии муштаракӣ беҳтарини функсияҳо ва ҳосилаҳои фосилавии онҳоро бо модулҳои бефосилагии умумикардашудаи тартиби олий $\Omega_m(f, t)$ – ро дар метрикаи фазои $L_2[0, 2\pi]$ алоқаманд менамоянд, иборат мебошад.

Навгониҳои илмӣ тадқиқот. Дар диссертатсия натиҷаҳои асосии зерин ба даст оварда шудаанд:

- қимати аниқи сарҳадҳои болоии наздиккунии муштаракӣ беҳтарин ва ҳосилаҳои пайдарпайи он тавассути бисёраъзогиҳо ва ҳосилаҳои мутаносиби онҳо барои баъзе синфи функсияҳои даврӣ, ки ба фазои $L_2[0, 2\pi]$ тааллуқ доранд, ёфта шуданд;
- нобаробариҳои нави аниқ байни бузургиҳои наздиккунии миёнаквадратии беҳтарини функсияҳои дифференсиронидашаванда ва интегралҳое, ки қимати модули бефосилагии миёнакардашудаи тартиби m -умро аз қимати сарҳадӣ дар фазои гилбертии $L_2[0, 2\pi]$ дар бар мегиранд, ёфта шуданд;
- қимати аниқи n -қутрҳои бернштейнӣ, колмогоровӣ, гелфандӣ, хаттӣ ва проексионии синфҳои функсияҳое ёфта шуданд, ки ба воситаи модули

бефосилагии тартиби олий дода мешаванд.

Арзишҳои назариявӣ ва илмию амалӣ. Кори диссертатсионии мазкур хусусияти фундаменталии назариявӣ дорад. Натиҷаҳо ва усулҳои, ки дар диссертатсия пешниҳод шудаанд, метавонанд барои таҳлили масъалаҳои экстремалӣ дар назарияи наздиккунии функсияҳои якчандтағйирёбанда истифода шаванд, ки ҳам ба соҳаҳои маҳдуд ва ҳам ба тамоми ҳамвории дученака татбиқшаванда мебошанд.

Нуктаҳои ба ҳимоя пешниҳодшаванда:

- теоремаҳо оид ба қиматҳои аниқи сарҳадҳои болоии наздиккунии муштараки беҳтарини миёнаквадратӣ бо бисёраъзогиҳо барои синфҳои муайяни функсияҳои дифференсиронидашавандаи даврӣ, ки тавассути модули бефосилагии умумикардасуда дода шудаанд;
- исботи теоремаҳо оид ба нобаробариҳои аниқи намуди Чексон–Стечкин, ки наздиккунии муштараки беҳтаринро тавассути $\Omega_m(f, t)$ — модули бефосилагии умумикардасуда тавсиф менамоянд;
- теоремаҳо оид ба қимати аниқи n -қутрҳои бернштейнӣ, колмогоровӣ, гелфандӣ, хаттӣ ва проексионии синфҳои функционалӣ дар метрикаи фазои L_2 .

Дараҷаи эътимоднокии натиҷаҳо. Эътимоднокии натиҷаҳои илмии кори диссертатсионӣ бо исботи дақиқи математикии ҳамаи теоремаҳои дар диссертатсия овардашуда таъмин карда мешавад ва ҳамзамон бо тадқиқотҳои муаллифони дигар тасдиқ карда мешавад.

Мутобиқати рисола ба шиносномаи ихтисоси илмӣ (формула ва соҳаи тадқиқот). Кори диссертатсионӣ аз рӯи ихтисоси 6D060102 – Таҳлили ҳақиқӣ, комплексӣ ва функционалӣ иҷро карда шудааст ва қисмате аз таҳлили математикӣ мебошад. Мавзӯи тадқиқот ба соҳаи назарияи наздиккунии функсияҳо тааллуқ дошта, натиҷаҳои бадастомада ба самтҳои зерин мувофиқ мебошанд:

- 1) Назарияи фазоҳои функционалӣ ва хусусиятҳои сохтори онҳо;

- 2) Назарияи наздиккунии функсияҳо ва усулҳои наздиккунии полиноми-
али ва қаторӣ;
- 3) Тадқиқи хосиятҳои сохтори фазоҳои функционалӣ, ки дар онҳо масъа-
лаҳои наздиккунии функсияҳо баррасӣ мегарданд.

Самтҳои зикршуда ба бахши «Назарияи наздиккунии функсияҳо» таал-
луқ доранд, ки дар банди III, параграфи 3-юми шиносномаи ихтисоси илмӣ
зикр шудааст.

Саҳми шахсии доктараби дараҷаи илмӣ. Масъалаҳои тадқиқот ва
интихоби усули ҳалли онҳо бо роҳнамоии роҳбари илмӣ муайян шудаанд.
Ҳамзамон машваратҳои илмии зарурӣ низ пешниҳод гардидаанд. Натиҷаҳои
асосие, ки дар қисмати «Навгониҳои илмии тадқиқот» оварда шудаанд, са-
мараноки заҳмати шахсии муаллиф маҳсуб меёбанд.

Тасвиб ва амалисозии натиҷаҳои диссертатсия. Натиҷаҳои асосии
кори диссертатсионӣ дар семинарҳо ва конференсияҳои зерин муҳокима ва
баррасӣ гардиданд:

- семинарҳои кафедраи таҳлили функционалӣ ва муодилаҳои диффе-
ренсиалии Донишгоҳи миллии Тоҷикистон таҳти роҳбарии академики
АМИТ, профессор М.Ш. Шабозов (Душанбе, солҳои 2020–2026 гг.);
- семинарҳои кафедраи анализи математикии Донишгоҳи давлатии омӯз-
гории Тоҷикистон ба номи Садриддин Айнӣ таҳти роҳбарии доктори
илмҳои физикаю математика, дотсент Г.А. Юсупов (Душанбе, солҳои
2022–2026 гг.);
- конференсияи байналмилалии «Масъалаҳои муосири таҳлили функси-
оналӣ ва муодилаҳои дифференсиалӣ», бахшида ба 70-солагии академики
Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон, доктори илмҳои физикаю мате-
матика, профессор К.Х. Бойматов (Душанбе, 25–26 декабри соли 2020);
- конференсияи байналмилалии «Масъалаҳои муосири назарияи ададҳо
ва таҳлили математикӣ», бахшида ба 80-солагии доктори илмҳои физи-
каю математика, профессор Додочон Исмоилов (Душанбе, 29–30 апрели
соли 2022);

- конференсияи байналмилалӣ «Масъалаҳои муосири таҳлили математикӣ ва назарияи функцияҳо», бахшида ба 70-солагии академики Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон, доктори илмҳои физикаю математика, профессор М.Ш. Шабозов (Душанбе, 24–25 июни соли 2022);
- конференсияи байналмилалӣ «Саҳми математика дар рушди фанҳои табиатшиносӣ, дақиқ ва риёзӣ», бахшида ба эълонгардидани «Бистсолаи омӯзиш ва рушди фанҳои табиатшиносӣ, дақиқ ва риёзӣ дар соҳаи маориф (солҳои 2020-2040)» (Душанбе, 30–31 майи соли 2023);
- конференсияи байналмилалӣ «Масъалаҳои муосири математика ва усули таълими онҳо», бахшида ба 35-солагии Истиқлолияти давлатии Ҷумҳурии Тоҷикистон» ва 70-солагии доктори илмҳои физикаю математика К. Тухлиев (Хучанд, 21–22 июни соли 2024);
- конференсияи байналмилалӣ «Масъалаҳои муосири математика ва табиқи онҳо», бахшида ба 75-солагии доктори илмҳои физикаю математика, профессор К.Х. Бойматов ва 75-солагии мудирӣ шӯбаи муодилаҳои дифференсиалии Институти математикаи ба номи А. Ҷӯраеви АМИТ, доктори илмҳои физикаю математика, профессор Г. Ҷангибеков (Душанбе, 30–31 майи соли 2025).

Интишорот аз рӯи мавзӯи рисола. Натиҷаҳои тадқиқоти муаллифи рисолаи илмӣ оид ба мавзӯи кори диссертатсионӣ дар 8 мақолаҳои илмӣ ба таърифи расидаанд, ки аз онҳо 2 мақола дар нашрияҳои, ки ба рӯйхати амалкунандаи Комиссияи олии аттестатсионии Ҷумҳурии Тоҷикистон дохиланд ва 6-тои дигар дар маҷмуаҳои конференсияҳои байналмилалӣ ва ҷумҳуриявӣ нашр гардидаанд.

Соҳтор ва ҳаҷми диссертатсия. Диссертатсия аз муқаддима, се боб, феҳристи адабиёти истифодашудаи иборат аз 135 номгӯй ва ҳамагӣ 152 саҳифаи компютериеро дар бар гирифта, дар барномаи замонавии L^AT_EX хуруфчинӣ шудааст. Барои осонӣ дар диссертатсия рақамгузори умумии теоремаҳо, леммаҳо, натиҷаҳо ва формулаҳо истифода шудааст. Онҳо рақамгузо-

рии секарата доранд, ки рақами якум бо рақами боб, рақами дуюм бо рақами параграф ва рақами сеюм бо рақами тартибии теоремаҳо, леммаҳо, натиҷаҳо ё формулаҳои ҳамин параграф мутобиқат мекунанд.

ҚИСМИ АСОСИИ ТАДҚИҚОТ

Мавод ва усулҳои тадқиқот. Тадқиқоти пешниҳодшуда ба омӯзиши масъалаҳои гуногуни экстремалии вобаста аст, ки дар доираи назарияи наздиккунии муштараки беҳтарини функцияҳои дифференсиронидашавандаи 2π -даврии ва ҳосилаҳои пайдарпайи онҳо тавассути бисёраъзогиҳои тригонометрии баррасӣ мегарданд. Дар рисолаи илмӣ равишҳо ва усулҳои муосири ҳалли масъалаҳои экстремалии дар фазоҳои банаҳӣ ба таври васеъ татбиқ шудаанд.

Натиҷаҳои тадқиқот. Мазмуни мухтасари кори диссертатсиониро баён мекунем.

Дар боби якуми диссертатсия баъзе натиҷаҳо оид ба наздиккунии миёнакватрагии беҳтарини синфи функцияҳои дифференсиронидашавандаи даврии $f(x)$ ба воситаи бисёраъзогиҳои тригонометрии дар фазои $L_2 = L_2[0, 2\pi]$ оварда мешаванд. Дар тули даҳсолаҳои зиёд ҳаллу фасли масъалаҳои экстремалии ва татбиқи онҳо таваҷҷуҳи математикони зиёдро ба худ ҷалб намудааст, зеро чунин масъалаҳо дар ҳалли масъалаҳои гуногуни математикаи амалии, ки мазмуни оптимизатсиониро доранд, васеъ истифода мешаванд. Дар масъалаҳои экстремалии, одатан, лозим меояд, ки сарҳади аниқи болоии саҳви наздикшавӣ бо усули додашуда дар синфи функцияҳои муайян ёфта шавад, ё ин ки барои ин синф воситаи беҳтарини наздикшавӣ нишон дода шавад.

Масъалаҳои наздиккунии беҳтарини функцияҳои даврии дар фазои L_2 дар корҳои Н.И. Черных [28, 29], Л.В. Тайков [16–18], С.Б. Вакарчук [2, 4–6], А.А. Лигун [10, 11], В.В. Шалаев [27], М.Ш. Шабозов [21–26] ва дигарон тадқиқ карда шудаанд.

Солҳои охир барои ҳалли масъалаҳои наздиккунии беҳтарини полиномиалии функцияҳо дар фазои L_2 намудҳои гуногуни модули бефосилагӣ исти-

фода бурда мешаванд (масалан, нигаред ба корҳои [4–6, 13] ва адабиёти дар онҳо овардашуда).

Яке аз масъалаҳои марказии экстремалии назарияи аппроксиматсияи функцияҳо — ин масъалаи ёфтани доимиҳои аниқ дар нобаробарии намуди Чексон–Стечкин мебошад. Нобаробарии намуди Чексон–Стечкин дар ҳар гуна фазои нормиронидашудаи X нобаробарии намуди

$$E_{n-1}(f)_X \leq \chi n^{-r} \omega_m(f^{(r)}, \tau/n)_X, \quad r \in \mathbb{Z}_+, \tau > 0$$

– ро меноманд, ки дар он саҳви наздиккунии функцияи инфиродии f ба воситаи характеристикаи суфтагии додашудаи ω_m -и худи функцияи аппроксиматсияшаванда ё тавассути баъзе ҳосилаҳои он $f^{(r)} \in X$ баҳогузори карда мешавад. Ошкор аст, ки доимии беҳтарин χ , ба таври умум, метавонад, ҳам аз фазои X ва ҳам аз параметрҳои m, n, r ва τ вобаста бошад.

Аввалин доимиҳои аниқ дар нобаробарии Чексон аз ҷониби Н.П. Корнейчук [8] барои фазои $C(0, 2\pi]$ соли 1962 ва аз ҷониби Н.И. Черных [28] барои фазои $L_2(0, 2\pi]$ соли 1967 ба даст оварда шудаанд. Баъд аз натиҷаҳои Н.П. Корнейчук ва Н.И. Черных таваҷҷӯҳ ба ёфтани доимиҳои аниқ дар нобаробарии намуди Чексон–Стечкин ва дар дигар фазоҳои банаҳӣ ба миён омад. Соли 1979 Н.И. Черных [1] қимати минималии аргументро дар модули бефосилагӣ муайян кард, ки барояш доимии аниқ дар нобаробарии Чексон–Стечкин дар фазои $L_p(-\pi, \pi]$ ба ҳадди глобалии минимум мерасад. Ёфтани чунин аргументҳо, ки онҳоро *аргументҳои оптималӣ* ё *нуқтаҳои Черных* меноманд, ба масъалаҳои муҳими экстремалӣ дар назарияи наздиккунии функцияҳо табдил ёфтанд.

Ба воситаи \mathbb{N} – маҷмуи ададҳои натуралӣ; $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$; \mathbb{R}_+ – маҷмуи ададҳои ҳақиқии мусбат; $L_2 := L_2[0, 2\pi]$ – фазои функцияҳои ҳақиқии 2π -даврии бо квадрат дар маънои Лебег интегронидашавандаро бо нормаи маҳдуди

$$\|f\| := \|f\|_{L_2} = \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

ишора мекунем. Маҷмуи ҳамаи бисёраъзогиҳои тригонометрии

$$T_{n-1}(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$$

тартиби $n - 1$ -ро ба воситаи \mathcal{T}_{2n-1} ишора менамоем. Агар $S_{n-1}(f, x)$ – суммаи хусусии тартиби $n - 1$ -и қатори Фурйеи функцияи $f(x)$:

$$f(x) \sim \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx)$$

бошад, он гоҳ аз хосияти суммаҳои хусусии қатори Фурйеи функция бараъло маълум аст, ки дар он гуфта мешавад, ки наздиккунии беҳтарини функцияи $f(x)$ дар метрикаи фазои L_2 аз руи бисёраъзогиҳои тригонометрии тартиби $T_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}$ суммаи хусусии қатори Фурйе $S_{n-1}(f, x)$ фароҳам меоварад, яъне

$$\begin{aligned} E_{n-1}(f) &:= E_{n-1}(f, \mathcal{T}_{2n-1})_{L_2} = \inf \left\{ \|f - T_{n-1}\| : T_{n-1}(x) \in \mathcal{T}_{2n-1} \right\} = \\ &= \|f - S_{n-1}(f)\| = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} (a_k^2(f) + b_k^2(f)) \right\}^{1/2} = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f) \right\}^{1/2}, \end{aligned}$$

ки дар ин ҷо барои мухтасарӣ $\rho_k^2(f) = a_k^2(f) + b_k^2(f)$, $k \geq n$ гузошта шудааст ва $a_k(f)$, $b_k(f)$ – косинус- ва синус-коэффисиентҳои Фурйеи функцияи $f \in L_2$ мебошанд.

Бо $L_2^{(r)}$ ($r \in \mathbb{Z}_+$, $L_2^{(0)} = L_2$) маҷмуи функцияҳои $f \in L_2$, ки барояшон ҳосилаи тартиби $(r - 1)$ -ум, яъне $f^{(r-1)}$ мутлақ бефосила буда, ҳосилаҳои тартиби r -ум, яъне $f^{(r)} \in L_2$ мебошанд, ишора мекунем.

Модули бефосилагии тартиби m -уми дилхоҳ функцияи 2π -даврии ченшаванда ва бо квадрат суммиронидашавандаи $f(x) \in L_2$ – ро бо баробарии

$$\omega_m(f, t) = \sup \left\{ \|\Delta_h^m f(\cdot)\| : |t| \leq h \right\} \quad (1)$$

муайян мекунем, ки дар ин ҷо

$$\Delta_h^m f(x) = \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \binom{m}{k} f(x + (m-k)h)$$

– фарқияти тартиби m -уми функсияи f дар нуқтаи x бо қадами h мебошад.

Ҳангоми ҳалли баъзе масъалаҳои экстремали дар назарияи наздиккунӣ ба ҷои модули бифосилагии классикии тартиби m -ум барои функсияи $f \in L_2$ баъзан қулайтар аст, характеристикаи суфтагии ба бузургии (1) эквиваленти намуди зерин

$$\Omega_m(f, t)_2 = \left\{ \frac{1}{t^m} \int_0^t \cdots \int_0^t \|\Delta_{\bar{h}}^m f(\cdot)\|^2 dh_1 \cdots dh_m \right\}^{1/2} \quad (2)$$

истифода бурда шавад, ки дар ин ҷо $t > 0$, $\bar{h} := (h_1, \dots, h_m)$; $\Delta_{\bar{h}}^m = \Delta_{h_1}^1 \circ \cdots \circ \Delta_{h_m}^1$;

$$\Delta_{h_j}^1 f(x) := f(x + h_j) - f(x), \quad j = \overline{1, m}.$$

Аз ҳамин сабаб, ҳисоб кардани доимии аниқ

$$\mathbb{K}_{m,n,r}(t) := \sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f \neq \text{const}}} \frac{n^r E_{n-1}(f)}{\Omega_m(f^{(r)}, t/n)}, \quad 0 < t \leq 2\pi$$

дар нобаробарии Чексон–Стечкини намуди

$$E_{n-1}(f) \leq \mathbb{K}_{m,n,r}(t) \frac{1}{n^r} \Omega_m(f^{(r)}, t/n)$$

низ таваҷҷуҳи муайянро ба худ ҷалб мекунад.

Бояд қайд кард, ки ҳангоми омузиши масъалаҳои муҳими наздиккунӣ дар фазои метрикии L_p ($0 < p < 1$) характеристикаи суфтагии миёнакардашуда функсияҳои намуди (2) аз ҷониби К.В. Руновский [14] ва Э.А. Стороженко, В.Г. Кротов, П. Освальд [15] мавриди баррасӣ қарор гирифта буд.

Бо мақсади умуми намудани натиҷаи овардашуда дар кори А.А. Лигун [10] М.Ш. Шабозов ва Г.А. Юсупов характеристикаи экстремалии зеринро

тадқиқ карда буданд [22]:

$$\chi_{m,n,r,p,s}(\varphi, h) = \sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f \neq \text{const}}} \frac{E_{n-1}(f)_2}{\left(\int_0^h \omega_m^p(f^{(r)}, t)_2 \varphi(t) dt \right)^s}, \quad (3)$$

ки дар ин ҷо $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, p, s – ададҳои мусбат, $0 < h \leq \pi/n$ ва функсияи $\varphi(t)$ ҳамаи шартҳои дар нобаробарии дучандаи А.А. Лигун овардашударо қаноат мекунонад. Дар кори [22] дурустии ифодаи

$$\left\{ \mathcal{A}_{n,h,p}^{r,m}(\varphi) \right\}^{-1} \leq \chi_{m,n,r,p,1/p}(\varphi, h) \leq \left\{ \inf_{n \leq k < \infty} \mathcal{A}_{k,h,p}^{r,m}(\varphi) \right\}^{-1}$$

нишон дода шудааст, ки дар ин ҷо $0 < p \leq 2$; $0 < h \leq \pi/n$ ва

$$\mathcal{A}_{k,h,p}^{r,m}(\varphi) := 2^{m/2} \left(k^{rp} \int_0^h (1 - \cos kt)^{mp/2} \varphi(t) dt \right)^{1/p}.$$

Ба андешаи мо, дар мувофиқа бо ифодаи (3), омӯзиши характеристикаи экстремалии

$$\mathcal{K}_{m,n,r,p,s}(\varphi, h) := \sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f \neq \text{const}}} \frac{E_{n-1}(f)}{\left(\int_0^h \Omega_m^p(f^{(r)}, t)_2 \varphi(t) dt \right)^s} \quad (4)$$

ба худ таваҷҷӯҳи зиёд ҷалб мекунад, ки дар ин ҷо ададҳои $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $p, s \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$; $0 < h \leq \pi/n$; $\varphi(t)$ — функсияи ғайриманфии ченшавандаи дар порчаи $[0, h]$ суммиронидашванда ва ба нул ғайриэквивалент мебошад.

Дар ҳамаи ҳолатҳои минбаъда ҳангоми ҳисоб кардани қимати сарҳади саҳеҳи болоӣ дар муносибатҳои умумӣ барои ҳамаи функсияҳои $f \in L_2^{(r)}$ фарз карда мешавад, ки $f \neq \text{const}$ мебошад.

Ишораи зеринро дохил мекунем:

$$\text{sinc } t := \begin{cases} \frac{\sin t}{t}, & \text{агар } t \neq 0, \\ 1, & \text{агар } t = 0. \end{cases}$$

Теоремаи зерин як навъ умумикардасудай натиҷаи (3) бо характеристикаи экстремалии (4) ба шумор меравад.

Теоремаи 2.2.1. *Бигузор $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < p \leq \infty$, $0 < h \leq \pi/n$, φ — функцияи гайриманфӣ, ченшаванда ва дар порчаи $[0, h]$ суммиронидашавандаи ба нул гайриэквивалент бошад. Он гоҳ баробарии зерин ҷой дорад:*

$$\begin{aligned} & \mathcal{K}_{m,n,r,p,1/p}(\varphi, h) = \\ &= \sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{E_{n-1}(f)}{\left(\int_0^h \Omega_m^p(f^{(r)}, t)_2 \varphi(t) dt \right)^{1/p}} = \frac{1}{\inf_{n \leq k < \infty} \mathcal{B}_{k,h,p}^{r,m}(\varphi)}, \end{aligned}$$

ки дар ин ҷо

$$\mathcal{B}_{k,h,p}^{r,m}(\varphi) := 2^{m/2} \left(k^{rp} \int_0^h (1 - \text{sinc } kt)^{mp/2} \varphi(t) dt \right)^{1/p}.$$

Аз теоремаи 2.2.1 як қатор натиҷаҳои муҳим ба даст оварда мешаванд, ки дар тадқиқи масъалаҳои экстремалии нақши калидӣ доранд.

Натиҷаи 2.3.1. *Бигузор $0 < h \leq 3\pi/(4n)$ ва шартҳои теоремаи 2.2.1 ҷой дошта бошанд. Он гоҳ баробарии зерин ҷой дорад:*

$$\mathcal{K}_{m,n,r,p,1/p}(\varphi, h) = \left\{ \mathcal{B}_{n,h,p}^{r,m}(\varphi) \right\}^{-1}.$$

Натиҷаи 2.3.2. *Бигузор $0 < \tau \leq 3\pi/4$; $m, n \in \mathbb{N}$ ва*

$$\beta(\tau) := \frac{Si(\tau) - \sin \tau}{\tau - \sin \tau}, \quad \eta(p) := (1 + mp/2)^{1/p}$$

бошанд. Агар ҳангоми қимати қайдкардасудай $0 < p \leq 2$ барои ҳаргуна элементи $f \in L_2^{(r)}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ функцияи $\Omega_m^p(f^{(r)})$ дар порчаи $[0, 3\pi/(4n)]$ барҷаста ба боло бошад, он гоҳ бузургии наздиккунии беҳтарини полиномиалии функцияи f нобаробарии зеринро қаноат мекунонад:

$$E_{n-1}(f) \leq \frac{\eta(p)}{n^r} (2(1 - \text{sinc } \tau))^{-m/2} \Omega_m(f^{(r)}, \tau\beta(\tau)/n).$$

Агар функцияи $\Omega_m^p(f^{(r)})$ барои ҳар як қимати p аз порчаи $[p_*, p^*] \subset (0, 2]$ барҷаста ба боло дар сегменти $[0, 3\pi/(4n)]$ бошад, он гоҳ

$$E_{n-1}(f) \leq \frac{\eta(p^*)}{n^r} (2(1 - \operatorname{sinc}\tau))^{-m/2} \Omega_m(f^{(r)}, \tau\beta(\tau)/n)$$

мешавад.

Натиҷаи 2.3.3. Бигузур $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < p \leq \infty$, $q(t)$ – функцияи гайриманфӣ, ченшаванда ва дар порчаи $[0, a]$ ($0 < a \leq \pi$) суммиронидашаванда ба нол гайриэквивалент бошад. Он гоҳ нобаробарии зерин ҷой дорад:

$$\begin{aligned} & \{\Phi_{m,r,p}(a, q, 1)\}^{-1/p} \leq \\ & \leq \sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{2^{m/2} n^r E_{n-1}(f)}{\left\{ \int_0^a \Omega_m^p(f^{(r)}, t/n) q(t) dt \right\}^{1/p}} \leq \left\{ \inf_{x \geq 1} \Phi_{m,r,p}(a, q, x) \right\}^{-1/p}, \end{aligned}$$

ки дар ин ҷо

$$\Phi_{m,r,p}(a, q, x) = x^{rp} \int_0^a (1 - \operatorname{sinc} xt)^{mp/2} q(t) dt.$$

Дар ин ҳолат, агар функцияи q чунон бошад, ки барояш

$$\inf_{x \geq 1} \Phi_{m,r,p}(a, q, x) = \Phi_{m,r,p}(a, q, 1)$$

шавад, он гоҳ баробарии

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{2^{m/2} n^r E_{n-1}(f)}{\left\{ \int_0^a \Omega_m^p(f^{(r)}, t/n) q(t) dt \right\}^{1/p}} = \{\Phi_{m,r,p}(a, q, 1)\}^{-1/p}$$

ҷой дорад.

Натиҷаи 2.3.4. Бигузур $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < p \leq \infty$ ва $q(t) = t^{rp-1} q_1(t)$ функцияи дар порчаи $[0, a]$ ($0 < a \leq \pi$) гайриманфӣ, ченшаванда ва суммиронидашаванда буда, q_1 – функцияи афзуннашаванда ва ба нол гайриэквивалент бошад. Он гоҳ баробарии

$$\inf_{x \geq 1} \Phi_{m,r,p}(a, t^{rp-1} q_1(t), x) = \Phi_{m,r,p}(a, t^{rp-1} q_1(t), 1)$$

ҷой дошта, формулаи зерин дуруст аст:

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{2^{m/2} n^r E_{n-1}(f)}{\left\{ \int_0^a \Omega_m^p(f^{(r)}, t/n) t^{rp-1} q_1(t) dt \right\}^{1/p}} = \left\{ \Phi_{m,r,p}(a, t^{rp-1} q_1(t), 1) \right\}^{-1/p}.$$

Эзоҳ: Қайд кардан зарур аст, ки натиҷаи 2.3.4 ҳангоми $p = 2$ дар кори А.А. Лигун [10] исбот шуда буд.

Натиҷаи 2.3.5. Бигзор $r \in \mathbb{N}$, $1/r \leq p \leq \infty$, $0 \leq \gamma \leq rp - 1$, $0 < \beta \leq \pi$, $\varphi_*(t) = \sin^\gamma(\beta t/h)$ ва $0 < t \leq h \leq \pi/n$ бошанд. Он гоҳ барои ҳаргуна $m, n \in \mathbb{N}$ баробарии зерин ҷой дорад:

$$\mathcal{H}_{m,n,r,p,1/p}(\varphi_*, h) = 2^{-m/2} n^{-r} \left\{ \int_0^h (1 - \operatorname{sinc} nt)^{mp/2} \sin^\gamma(\beta t/h) dt \right\}^{-1/p}.$$

Хуб маълум аст [9, с. 127], ки барои ихтиёри функсияи $f \in L_2^{(r)}$ ҳосилаҳои мобайнии он $f^{(s)}$ ($s = 1, 2, 3, \dots, r-1$; $r \geq 2$, $r \in \mathbb{N}$, $f^{(0)} \equiv f$) инчунин ба фазои L_2 тааллуқ доранд, аз ин рӯ омӯзиши рафтори бузургии наздиккунии беҳтарини $E_{n-1}(f^{(s)})$ дар худӣ синфи $L_2^{(r)}$ ва ё дар ягон зерсинфи он $\mathfrak{M}^{(r)} \subset L_2^{(r)}$ бешубҳа шавқовар мебошад. Ин масъала дар кори [4] барои модуҳои бефосилагии навъи махсус пешниҳод ва ҳал карда шудааст. Дар ин ҷо мо ҳалли масъалаи гузошташударо дар ҳолате пешниҳод менамоем, ки характеристикаҳои структурии функсияи $f \in L_2^{(r)}$ тавассути қимати модули бефосилагии бо вазни $\varphi(t)$ миёнакардашудаи $\Omega_m(f^{(r)}, t)$ тавсиф карда мешаванд.

Ҳамин тариқ, масъалаи наздиккунии беҳтарини муштараки синфи функсияҳои $\mathfrak{M}^{(r)} \subset L_2^{(r)}$ дар шакли зерин ифода карда мешавад: талаб карда мешавад қимати аниқи бузургии зерин ёфта шавад:

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}(\mathfrak{M}^{(r)}) := \sup \left\{ E_{n-1}(f^{(s)}) : f \in \mathfrak{M}^{(r)} \right\}, \quad (5)$$

ки дар ин ҷо \mathfrak{M} ихтиёри маҷмуи синфи функсияҳо аз фазои $L_2^{(r)}$ мебошад.

Дар параграфи 2.4. аз нуқтаи назари мо ёфтани доимии аниқ

$$\widetilde{\mathcal{K}}_{n,m,r,s}(t) := \sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^{r-s} E_{n-1}(f^{(s)})}{\Omega_m(f^{(r)}, t)}$$

дар нобаробарии намуди Чексон–Стечкин барои наздиккунии муштараки функцияҳои $f \in L_2^{(r)}$ аҳамияти калон дорад.

Тасдиқоти зерин ҷой дорад.

Теоремаи 2.4.1. *Бигузур $n, m \in \mathbb{N}$; $r, s \in \mathbb{Z}_+$; $r \geq s$. Он гоҳ барои ихтиёри ададҳои $t \in (0, \pi/2]$ баробарии зерин ҷой дорад:*

$$\widetilde{\mathcal{K}}_{n,m,r,s}(t) = \left\{ 2(1 - \operatorname{sinc} t) \right\}^{-m/2}.$$

Дар параграфи 2.5 ҳудуди болоии наздиккунии муштараки беҳтарини баъзе синфи функцияҳо ва ҳосилаҳои онҳоро аз руи бисёраъзогиҳои тригонометрӣ ва ҳосилаҳои мувофиқи онҳо муайян менамоем, яъне қимати аниқи бузургии (5) – ро барои модули бефосилагии классикии тартиби олий ҳисоб мекунем.

Барои ҳалли масъалаи (5) аввал теоремаи зеринро исбот мекунем.

Теоремаи 2.5.1. *Барои ҳаргуна қиматҳои $n, m \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$ ва $r \geq s$ баробарии зерин дуруст аст:*

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^{r-s} E_{n-1}(f^{(s)})}{\left(\frac{n}{2} \int_0^{\pi/n} \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t) \sin ntdt \right)^{m/2}} = \frac{1}{2^{m/2}}.$$

Аз теоремаи 2.5.1 натиҷаҳои зеринро гирифтани мумкин аст.

Натиҷаи 2.5.1. *Барои ҳаргуна $n, m \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$ ва функцияи ихтиёрии $f \in L_2^{(r)}$ нобаробарии зерин ҷой дорад:*

$$E_{n-1}(f^{(s)}) \leq 2^{-m/2} n^{-(r-s)} \omega_m(f^{(r)}, \pi/n). \quad (6)$$

Агар функцияи $\omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t)$ барои ҳаргуна қимати $t \in [0, \pi/(2n)]$ шarti

$$2\omega_m^{2/m}(f^{(r)}, \pi/(2n)) \geq \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t) + \omega_m^{2/m}\left(f^{(r)}, \frac{\pi}{n} - t\right) \quad (7)$$

қаноат кунонад, дар ҳолати хусусӣ, агар дар сегменти $[0, \pi/n]$ барҷаста бошад, он гоҳ нобаробарии (6) – ро аниқ кардан мумкин аст.

Натиҷаи 2.5.2. Дар маҷмуи функсияҳои $f \in L_2^{(r)}$, ки барои онҳо функсияи $\omega_m(f^{(r)}, t)$ шарти (7) – ро қаноат мекунонад, нобаробарии

$$E_{n-1}(f^{(s)}) \leq 2^{-m/2} n^{-(r-s)} \omega_m(f^{(r)}, \pi/(2n))$$

ичро мегардад, ки барои функсияи $f_0(x) = \cos nx \in L_2^{(r)}$ ба баробарӣ мубаддал мегардад.

Дар параграфи 2.6 нобаробариҳои аниқ байни наздиккунии беҳтарини полиномиали ва қимати модули бефосилагии миёнакардашудаи функсияҳои $f \in L_2^{(r)}$ дар нормаи фазои L_2 ёфта шудаанд.

Теоремаи 2.6.1. Бигузор $r \in \mathbb{Z}_+$, $n \in \mathbb{N}$ бошад. Он гоҳ муносибатҳои зерин ҷой доранд:

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^r E_{n-1}(f)}{\left\{ \frac{1}{h} \int_0^h \omega^2(f^{(r)}, t) dt \right\}^{1/2}} = \frac{nh}{2(nh - \sin nh)}, \quad 0 < nh \leq \pi/2;$$

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{\sqrt{2} n^r E_{n-1}(f)}{\left\{ \frac{2}{h^2} \int_0^h (h-t) \omega^2(f^{(r)}, t) dt \right\}^{1/2}} = \left\{ 1 - \left(\frac{2}{nh} \sin \frac{nh}{2} \right)^2 \right\}^{-1/2}, \quad 0 < nh \leq \pi.$$

Дар боби сеюми диссертатсия ҳадафи асосии мо аз ҳисоб намудани қимати аниқи n -қутрҳо барои баъзе синфҳои функсияҳои дифференсиронидашаванда мебошад, ки тавассути модули бефосилагии умумикардашудаи тартиби олии дар фазои L_2 дода шудаанд. Дар асоси баъзе шартҳои маҳдудияте, ки барои баъзе синфи функсияҳои дидабаромадашаванда гузошта мешаванд, имконияти ёфтани қимати аниқи n -қутрҳо ба вуҷуд меояд.

Акнун мо таърифҳо ва нишонаҳои заруриро, ки дар идомаи тадқиқот дар диссертатсия истифода хоҳанд шуд, меорем.

Бигузор X — ихтиёри фазои банахӣ бошад, $\mathfrak{M} \subset X$ — ягон синфи функсияҳо бошад ва бигузор $L_n \subset X$ — як зерфазои ченакаш n бошад. Бузургии

$$\begin{aligned} E_n(\mathfrak{M})_X &:= E(\mathfrak{M}, L_n)_X = \sup \left\{ E(f; L_n)_X : f \in \mathfrak{M} \right\} = \\ &= \sup \left\{ \inf \left\{ \|f - g\|_X : g \in L_n \right\} : f \in \mathfrak{M} \right\} \end{aligned} \quad (8)$$

— ро наздиққунии беҳтарини синфи \mathfrak{M} аз руи зерфазоҳои L_n — и ченакаш додашудаи n меноманд. Бузургии (8) тамоили синфи \mathfrak{M} -ро аз зерфазои L_n дар метрикаи фазои X тавсиф мекунад.

Агар тавассути $\mathcal{L}(X, L_n)$ маҷмуи ҳамаи операторҳои бифосилаи $A : X \rightarrow L_n$, ки аз фазои X ба зерфазои дилхоҳи $L_n \subset X$ бо ченаки n амал мекунад, ифода намоем, он гоҳ масъалаи зерин ба миён меояд: бузургии

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_n(\mathfrak{M})_X &:= \mathcal{E}(\mathfrak{M}, L_n)_X = \\ &= \inf \left\{ \sup \left\{ \|f - Af\|_X : f \in \mathfrak{M} \right\} : A \in \mathcal{L}(X, L_n) \right\} \end{aligned} \quad (9)$$

ёфта шуда, оператори $A_* \in \mathcal{L}(X, L_n)$ нишон дода шавад, ки дорои сарҳади аниқи поёни дар (9) бошад, яъне

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{M})_X = \sup \left\{ \|f - A_*f\|_X : f \in \mathfrak{M} \right\}$$

бошад.

Масъаларо (9) метавон дар маънои маҳдудтар баррасӣ кард: сарҳади поёниро на аз тамоми маҷмуи операторҳои бифосилаи $\mathcal{L}(X, L_n)$, ки $A : X \rightarrow L_n$ мебошад, ҷустуҷӯ кардан лозим аст, балки танҳо дар як синфи муайяни чунин операторҳо, ки бо тарзи муайян мушаххас мешаванд. Дар ҳолати хусусӣ, метавон дар $\mathcal{L}(X, L_n)$ синфи операторҳои бифосилаи $A : X \rightarrow L_n$ ҷудо карда, бузургии зеринро тадқиқ намуд:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_n^{\mathcal{L}}(\mathfrak{M})_X &:= \mathcal{E}^{\mathcal{L}}(\mathfrak{M}, L_n)_X = \\ &= \inf \left\{ \sup \left\{ \|f - Af\|_X : f \in \mathfrak{M} \right\} : A \in \mathcal{L}(X, L_n) \right\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Агар чунин оператори $A^* : X \rightarrow L_n$ мавҷуд бошад, ки дар он сарҳади саҳеҳи поёнӣ дар (10) доро мешавад, он гоҳ чунин оператор усули наздиккунии беҳтарини хаттиро дар масъалаи (10) муайян мекунад, яъне

$$\mathcal{E}_n^{\mathcal{L}}(\mathfrak{M})_X = \sup \left\{ \left\| f - A^* f \right\|_X : f \in \mathfrak{M} \right\}.$$

Агар дар дохили $\mathcal{L}(X, L_n)$ синфи операторҳои $\mathcal{L}^\perp(X, L_n)$ ҷудо карда шавад — яъне он операторҳои хаттии проексионӣ ба зерфазои L_n , ки барои ҳар як $f \in L_n$ шарти $Af = f$ иҷро мешавад — одатан бузургии зерин тадқиқ карда мешавад:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_n^\perp(\mathfrak{M})_X &:= \mathcal{E}^\perp(\mathfrak{M}, L_n)_X = \\ &= \inf \left\{ \sup \left\{ \left\| f - Af \right\|_X : f \in \mathfrak{M} \right\} : A \in \mathcal{L}^\perp(X, L_n) \right\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Бо бузургиҳои (8) – (11) масъалаи ёфтани қимати n -қутрҳо барои синфи функцияҳои гуногуни \mathfrak{M} алоқаманд мебошад.

Акнун таърифҳои n -қутрҳоро ба ёд меорем, ки қиматҳои онҳо барои синфҳои муайяни \mathfrak{M} дар ин боб ҳисоб карда мешаванд.

n -қутри ба маънои А.Н. Колмогорови [20] синфи функцияҳои \mathfrak{M} дар фазои X бузургии

$$d_n(\mathfrak{M}, X) = \inf \left\{ E(\mathfrak{M}, L_n)_X : L_n \subset X \right\}$$

номида мешавад, ки сарҳади поёнӣ аз руи ҳамаи зерфазоҳои ченакаш додашудаи n дар фазои X ҳисоб карда мешавад.

Агар ба наздиккунии беҳтарини хаттӣ $\mathcal{E}^{\mathcal{L}}(\mathfrak{M}, L_n)_X$ такя намоем, он гоҳ бузургии

$$\lambda_n(\mathfrak{M}, X) = \inf \left\{ \mathcal{E}^{\mathcal{L}}(\mathfrak{M}, L_n)_X : L_n \subset X \right\}$$

n -қутри хаттии синфи \mathfrak{M} дар фазои X номида мешавад.

Ба ҳамин монанд, агар бузургии (11) бар асос гирифта шавад, он гоҳ n -қутри проексионӣ мавриди баррасӣ қарор дода мешавад, яъне

$$\pi_n(\mathfrak{M}, X) = \inf \left\{ \mathcal{E}^\perp(\mathfrak{M}, L_n)_X : L_n \subset X \right\}.$$

Инчунин ду бузургии дигар, ки дар назарияи наздиккунии функсияҳо бо номҳои „ n -қутри гелфандӣ” ва „ n -қутри бернштейнӣ” мавҷуданд.

Бигузур S – кураи воҳидӣ дар фазои X бошад, яъне

$$S = \{x \in X, \|x\|_X \leq 1\}.$$

Бузургии

$$d^n(\mathfrak{M}, X) = \inf \left\{ \inf \left\{ \mathfrak{M} \cap L^n \subset \varepsilon S : \varepsilon > 0 \right\} : L^n \subset X \right\},$$

ки дар ин ҷо инфимум аз руи ҳамаи зерфазоҳои L^n -и ҳамандозаи n гирифта мешавад, n -қутри гелфандӣ меноманд. Бузургии

$$b_n(\mathfrak{M}, X) = \sup \left\{ \sup \left\{ \varepsilon S \cap L_{n+1} \subset \mathfrak{M} : \varepsilon > 0 \right\} : L_{n+1} \subset X \right\}$$

n -қутри бернштейнӣ номида мешавад.

Бигузур $\Phi(t)$, $t \geq 0$ – ихтиёри функсияи афзуншаванда буда, барои $t > 0$, $\Phi(t) > 0$ ва $\lim\{\Phi(t) : t \rightarrow 0\} = \Phi(0) = 0$ бошад. Функсияи $\Phi(t)$ – ро мажоранта меноманд.

Зери $W^{(r)}(\Omega_m, \Phi)$ (дар ин ҷо $r \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{N}$) маҷмуи функсияҳои $f \in L_2^{(r)}$ фаҳмида мешавад, ки ҳосилаҳои дараҷаи r -уми онҳо $f^{(r)}$ ба маҳдудияти

$$\Omega_m(f^{(r)}, t) \leq \Phi(t), \quad \forall t > 0$$

итоат мекунанд.

Талаб карда мешавад, ки бузургии наздиккунии муштараки синфи функсияҳои $W^{(r)}(\Omega_m, \Phi)$ ёфта шавад, аниқтараш, талаб карда мешавад, ки қимати бузургии

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}(W^{(r)}(\Omega_m, \Phi)) = \sup \left\{ E_{n-1}(f^{(s)}) : f \in W^{(r)}(\Omega_m, \Phi) \right\}$$

ёфта шавад.

Дар ин ҷо теоремаи зерин исбот карда шудааст.

Теоремаи 3.1.1. Бигузур барои қимати $n \in \mathbb{N}$ мажсортани $\Phi(t)$ шарти зеринро қаноат кунонад:

$$\frac{\Phi^2(\pi t/(2n))}{\Phi^2(\pi/(2n))} \geq \left(\frac{\pi}{\pi-2}\right)^m \cdot \begin{cases} (1 - \operatorname{sinc}(\pi t/2))^m, & \text{агар } 0 < t \leq 2, \\ 2^m \left(1 - \frac{1}{t}\right)^m, & \text{агар } 2 \leq t < \infty. \end{cases} \quad (12)$$

Он гоҳ баробарии зерин ҷой дорад:

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}(W^{(r)}(\Omega_m, \Phi)) = \left\{\frac{\pi}{2(\pi-2)}\right\}^{m/2} \cdot \frac{1}{n^{r-s}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right).$$

Маҷмуи мажсортаноҳои $\{\Phi\}$, ки шарти (12) – ро қаноат мекунонад, холи нест.

Барои пешниҳод намудани натиҷаи дигар аввал синфи функсияҳои зеринро дохил мекунем.

Бигузур барои ихтиёри қиматҳои $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ ва $u \in [0, 2\pi]$

$$W_m^{(r)}(\Phi) := \left\{ f \in L_2^{(r)} : \frac{\pi}{2u} \int_0^u \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t) \sin \frac{\pi}{u} t dt \leq \Phi^2(u) \right\}$$

синфи функсияҳо дар $L_2^{(r)}$ бошад. Гузориши

$$(1 - \cos nh)_* := \begin{cases} 1 - \cos nh, & \text{агар } 0 < nh \leq \pi, \\ 2, & \text{агар } nh > \pi \end{cases}$$

– ро дохил мекунем.

Теоремаи 3.1.2. Бигузур функсияи Φ шартҳои

$$\Phi^2\left(\frac{u}{\mu}\right) \int_0^{\mu\pi} (1 - \cos t)_* \sin \frac{t}{\mu} dt \leq 2\mu \Phi^2(u) \quad (13)$$

– ро барои ҳаргуна $\mu > 0$ ва ихтиёри $u \in (0, 2\pi]$ қаноат кунонад. Он гоҳ барои қиматҳои $m, n \in \mathbb{N}$; $r, s \in \mathbb{Z}_+$; $r > s$ баробарии зерин ҷой дорад:

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}(W_m^{(r)}(\Phi)) = 2^{-m/2} n^{-r+s} \Phi^m\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Бо осони $\bar{\omega}$ нишон додан мумкин аст, ки функсияи

$$\Phi(u) = u^{\alpha/2}, \quad \text{ҳангоми } \alpha = \frac{\pi^2}{8} \text{ будан,}$$

шарти (13) – ро қаноат мекунонад.

Бо симболи $W_{m,p}^{(r)}(\Phi)$ ($m, n \in \mathbb{N}$; $0 < p \leq \infty$) синфи функсияҳои $f \in L_2^{(r)}$ – ро ишора мекунем, ки барои ҳамаи қиматҳои $0 < t \leq 2\pi$ шарти

$$\int_0^t \Omega_m^p(f^{(r)}, \tau) d\tau \leq \Phi^p(t)$$

– ро қаноат мекунонад.

Бо назардошти корҳои илмии [3, 30], бо t_* бузургии аргументи $t \in (0, \infty)$ функсияи $\text{sinc } t$ – ро ишора мекунем, ки дар он вай қимати минималии худро доро мешавад. Ошкор аст, ки t_* қимати хурдтарин аз байни решаҳои муодилаи

$$t - \text{tg } t = 0 \quad (4,49 < t_* < 4,51)$$

мебошад. Инчунини дигар гузориши зеринро дохил мекунем:

$$(1 - \text{sinc } t)_* := \begin{cases} 1 - \text{sinc } t, & \text{агар } 0 < t \leq t_*; \\ 1 - \text{sinc } t_*, & \text{агар } t \geq t_*. \end{cases}$$

Дар ин ҷо теоремаи зерин исбот карда мешавад.

Теоремаи 3.2.1. *Бигузор $m, n, r \in \mathbb{N}$, $1/r \leq p \leq 2$ бошанд. Агар барои ҳамаи қиматҳои $0 < t \leq 2\pi$ мажорантаи Φ шартҳои зеринро қаноат кунонад:*

$$\frac{\Phi^p(t)}{\Phi^p(\pi/n)} \geq \frac{\int_0^t (1 - \text{sinc } n\tau)_*^{mp/2} d\tau}{\int_0^{\pi/n} (1 - \text{sinc } n\tau)^{mp/2} d\tau}, \quad (14)$$

он гоҳ баробарии зерин ҷой дорад:

$$\begin{aligned} \delta_{2n}(W_{m,p}^{(r)}(\Phi), L_2) &= \delta_{2n-1}(W_{m,p}^{(r)}(\Phi), L_2) = E_{n-1}(W_{m,p}^{(r)}(\Phi)) = \\ &= 2^{-m/2} n^{-r} \left\{ \int_0^{\pi/n} (1 - \operatorname{sinc} nt)^{mp/2} dt \right\}^{-1/p} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right), \end{aligned}$$

ки дар ин ҷо $\delta_n(\cdot)$ — яке аз n -қутрҳои дар боло овардашуда — $b_n(\cdot)$, $d^n(\cdot)$, $d_n(\cdot)$, $\lambda_n(\cdot)$ ва ё $\pi_n(\cdot)$ мебошад. Дар ин ҳолат, маҷмуи ҳамаи мажорантаҳое, ки шарти (14) — ро қаноат мекунонад, ҳолӣ намебошад.

Бо осонӣ нишон додан мумкин аст, ки функсияи $\Phi_*(t) = t^{\alpha/p}$, ки дар ин ҷо

$$\alpha = \frac{\pi}{\int_0^{\pi} (1 - \operatorname{sinc} n\tau)^{mp/2} d\tau}$$

мебошад, шарти (14) — ро барои ихтиёри $n \in \mathbb{N}$ қаноат мекунонад.

Акнун барои ихтиёри $r \in \mathbb{Z}_+$ ва $h > 0$ синфҳои функсияҳои зеринро дохил мекунем:

$$W^{(r)}(\Phi, h) = \left\{ f \in L_2^{(r)} : \left(\frac{1}{h} \int_0^h \omega^2(f^{(r)}, t) dt \right)^{1/2} \leq \Phi(h) \right\};$$

$$W_1^{(r)}(\Phi, h) = \left\{ f \in L_2^{(r)} : \left(\frac{2}{h^2} \int_0^h (h-t)\omega^2(f^{(r)}, t) dt \right)^{1/2} \leq \Phi(h) \right\}.$$

Барои синфҳои дохил шуда, теоремаҳои зерин исбот карда шудаанд.

Теоремаи 3.2.2. Агар мажорантаи $\Phi(h)$ барои ҳамаи қиматҳои $h \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ шарти

$$\frac{\Phi(h)}{\Phi(\pi/(2n))} \geq \frac{\pi}{\pi - 2} \cdot \begin{cases} \frac{nh - \sin nh}{nh}, & \text{агар } 0 < nh \leq \pi, \\ \frac{3nh - 2\pi}{nh}, & \text{агар } nh > \pi \end{cases} \quad (15)$$

– ро қаноат кунонад, он гоҳ баробариҳои зерин ҷой доранд:

$$\delta_n(W^{(r)}(\Phi, h), L_2) = E_{n-1}(W^{(r)}(\Phi, h), L_2) = \left\{ \frac{\pi}{2(\pi-2)} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right\}^{1/2} \cdot \frac{1}{n^r},$$

ки дар ин ҷо $\delta_n(\cdot)$ – яке аз n -қутрҳои дар боло овардашуда – $b_n(\cdot)$, $d^n(\cdot)$, $d_n(\cdot)$, $\lambda_n(\cdot)$ ва ё $\pi_n(\cdot)$ мебошад. Маҷмуи ҳамаи функцияҳои мажоранти, ки шарти (15) – ро қаноат мекунонад, ҳолӣ намебошад.

Қайд мекунем, ки функцияи $\Phi(h) = h^\alpha$, дар ин ҷо $\alpha = \frac{2}{\pi-2}$, шарти (15)-и теоремаи 3.2.2 – ро қаноат мекунонад.

Теоремаи 3.2.3. Бигузур мажорантии $\Phi(h)$ барои ҳаргуна қиматҳои $h \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}$ ва $r \in \mathbb{Z}_+$ шарти

$$\frac{\Phi(h)}{\Phi(\pi/n)} \geq \frac{\pi^2}{\pi^2-4} \cdot \begin{cases} 1 - \left(\frac{2}{nh} \sin \frac{nh}{2}\right)^2, & \text{агар } 0 < nh \leq \pi, \\ 1 - \frac{4}{\pi^2} + 2\left(1 - \frac{\pi}{nh}\right)^2, & \text{агар } nh > \pi \end{cases} \quad (16)$$

– ро қаноат кунонад. Он гоҳ баробариҳои зерин ҷой доранд:

$$\begin{aligned} \delta_n(W_1^{(r)}(\Phi, h), L_2) &= E_{n-1}(W_1^{(r)}(\Phi, h), L_2) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{\pi^2}{\pi^2-4} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right) \right\}^{1/2} \cdot \frac{1}{n^r}, \end{aligned}$$

ки дар ин ҷо $\delta_n(\cdot)$ – иштиёри аз n -қутрҳои дар боло овардашуда мебошад.

Маҷмуи мажорантаҳое, ки шарти (16) – ро қаноат мекунонад, ҳолӣ намебошад.

Функцияи $\Phi(h) = h^\alpha$, $\alpha = \frac{8}{\pi^2-4}$ шарти (16) – ро қаноат мекунонад.

ХУЛОСАҲО

Натиҷаҳои асосии кори диссертатсионӣ аз инҳо иборат аст:

- қимати аниқи сарҳадҳои болоии наздиккунии муштараки беҳтарин ва ҳосилаҳои пайдарпайи он тавассути бисёраъзогиҳо ва ҳосилаҳои мутаносиби онҳо барои баъзе синфи функцияҳои даврӣ, ки ба фазои $L_2[0, 2\pi]$ тааллуқ доранд, ёфта шуданд [1-М, 2-М, 5-М, 6-М, 7-М];

- нобаробариҳои нави аниқ байни бузургиҳои наздиккунии миёнаквадрати беҳтарини функсияҳои дифференсиронидашаванда ва интегралҳои, ки қимати модули бефосилагии миёнакардашудаи тартиби m -умро аз қимати сарҳади дар фазои гилбертии $L_2[0, 2\pi]$ дар бар мегиранд, ёфта шуданд [1-М, 2-М, 3-М, 4-М];
- қимати аниқи n -қутрҳои бернштейнӣ, колмогоровӣ, гелфандӣ, хаттӣ ва проексионии синфҳои функсияҳои ёфта шуданд, ки ба воситаи модули бефосилагии тартиби олии дода мешаванд [1-М, 4-М, 8-М].

Тавсияҳо оид ба истифодаи амалии натиҷаҳо

Натиҷаҳои дар рисолаи диссертатсионӣ гирифташуда арзиши назариявӣ дошта, имкониятҳои васеи истифодаи амалиро доранд. Натиҷаҳои илмӣ ва хулосаҳои таҳияшударо метавон барои рушди минбаъдаи назарияи аппроксиматсияи функсияҳо ва дигар масъалаҳои экстремалии назарияи наздиккунии татбиқ намуд. Хулосаҳои бадастомада ва формулаҳои исботкардашударо дар самтҳои зерини илмӣ татбиқ намудан мумкин аст:

- 1) Муайян намудани сарҳади аниқии болоии наздиккунии беҳтарини функсияҳои бисёртағйирёбанда;
- 2) Ҳар як боби диссертатсия метавонад ҳамчун маводи таълимӣ дар курсҳои махсус барои донишҷӯёни курсҳои болоӣ оид ба самтҳои риёзӣ ва татбиқӣ истифода шавад;
- 3) Тадқиқи фазоҳои функционалӣ ва хосиятҳои сохтори онҳо, ки дар онҳо масъалаҳои наздиккунии функсияҳо баррасӣ мегарданд;
- 4) Муайян намудани суръати наздиккунии функсияҳо ва баҳодиҳии аниқи наздиккуниҳо дар фазоҳои функционалӣ, ки барои татбиқи усулҳои аппроксиматсионӣ аҳамияти назаррас доранд.

ИНТИШОРОТИ МУАЛЛИФ ОИД БА МАВЗУИ ДИССЕРТАТСИЯ

Мақолаҳои, ки дар маҷаллаҳои тақризшавандаи КОА-и назди Президенти Ҷумҳурии Тоҷикистон нашр шудаанд:

- [1-М] Шамсиддинов С.А. Наилучшее полиномиальное приближение и попере- речники множеств в пространстве L_2 [Матн] / Н.М. Мамадаёзов, С.А. Шамсиддинов // Доклады НАН Таджикистана. – 2021. – Т.64. – №1-2. – С. 26–34.
- [2-М] Шамсиддинов С.А. Точные константы в неравенствах типа Джексона–Стечкина для наилучших совместных приближений функции и их последовательных производных в L_2 [Матн] / М.Ш. Шабозов, С.А. Шамсиддинов // Доклады НАН Таджикистана. – 2022. – Т.65. – №5-6. – С. 286–293.

Дар дигар нашрияҳо:

- [3-М] Шамсиддинов С.А. Об одной оптимизационной задаче [Матн] / М. Азизов, С.А. Шамсиддинов // Материалы международной конферен- ции «Современные проблемы функционального анализа и дифференци- альных уравнений», посвящённой 70-летию со дня рождения академи- ка Национальной академии наук Таджикистана, доктора физ.-мат. наук, профессора К.Х. Бойматова (Душанбе, 25-26 декабря 2020 г.). – С. 50–51.
- [4-М] Шамсиддинов С.А. Точное неравенство Джексона–Стечкина в L_2 меж- ду наилучшим совместным приближением и обобщённым модулем непре- рывности [Матн] / С.А. Шамсиддинов, Х.М. Шосафаров // Материалы международной конференции «Современные проблемы теории чисел и математического анализа», посвящённой 80-летию со дня рождения док- тора физ.-мат. наук, профессора Дододжона Исмоилова (г.Душанбе, 29-30 апреля 2022 г.). – С. 253-256.
- [5-М] Шамсиддинов С.А. О точных константах в неравенствах типа Джексона–Стечкина для наилучших совместных приближений функции в L_2 [Матн] / С.А. Шамсиддинов // Материалы международной науч- ной конференции «Современные проблемы математического анализа и теории функций», посвящённой 70-летию академика НАН Таджикиста- на М.Ш.Шабозова (Душанбе, 24-25 июня 2022 г.). – С. 281–284.
- [6-М] Шамсиддинов С.А. Неравенства типа Джексона–Стечкина для наи- лучших совместных приближений из L_2 [Матн] / С.А. Шамсиддинов // Материалы международной научно-теоретической конференции «Вклад математики в развитие естественных, точных и математических наук»,

- двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических наук (2020 – 2040 годы). (Душанбе, 30-31 мая 2023 г.). – С. 332–335.
- [7-М] Шамсиддинов С.А. Неравенства типа Джексона–Стечкина для наилучших совместных приближений функций и их производных в L_2 [Матн] / С.А. Шамсиддинов // Материалы международной научно-практической конференции «Современные проблемы математики и её преподавания», посвященной 35-летию государственной независимости Республики Таджикистан; 30-летию Конституции Республики Таджикистан; «Двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических наук в сфере науки и образования» и 70-летию доктора физ.-мат. наук К. Тухлиева (г.Худжанд, 21-22 июня 2024 г.). – С. 111-114.
- [8-М] Шамсиддинов С.А. Наилучшее совместное приближение периодических функций, определяемых модулями непрерывности [Матн] / У.Н. Зеваршоев, С.А. Шамсиддинов // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математики и её приложения», посвящённой 75-летию со дня рождения академика НАНТ, доктора физ.-мат. наук, профессора К.Х. Бойматова и 75-летию доктора физ.-мат. наук, заведующего отделом дифференциальных уравнений Института математики им. А. Джуроева НАНТ, профессора Г. Джангибекова (г.Душанбе, 30-31 мая 2025 г.). – С. 354–357.

РЕСПУБЛИКА ТАДЖИКИСТАН
ТАДЖИКСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМ. САДРИДДИНА АЙНИ

УДК 517.5

На правах рукописи



Шамсиддинзода Саъди Абдукосим

ТОЧНЫЕ КОНСТАНТЫ В НЕРАВЕНСТВЕ ТИПА
ДЖЕКСОНА–СТЕЧКИНА ДЛЯ НАИЛУЧШЕГО
СОВМЕСТНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ
И ИХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ
В ПРОСТРАНСТВЕ L_2

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени доктора
философии (PhD) – доктор по специальности 6D060100 –
Математика (6D060102 – Вещественный, комплексный и
функциональный анализ)

Душанбе — 2026

Работа выполнена на кафедре математического анализа Таджикского государственного педагогического университета им. Садриддина Айни

- НАУЧНЫЙ РУКОВОДИТЕЛЬ:** **Юсупов Гулзорхон Амиршоевич**,
доктор физико-математических наук,
доцент, заведующий кафедрой математи-
ческого анализа ТГПУ им. С.Айни;
- ОФИЦИАЛЬНЫЕ ОППОНЕНТЫ:** **Исхоков Сулаймон Абунасрович**,
член корр. Национальной Академии наук,
доктор физико-математических наук,
профессор, заведующий отделом теории
функции и функционального анализа
Института математики им. А. Джураева;
- Палавонов Курбоназар Курбонбекович**,
кандидат физико-математических наук,
заведующий кафедрой математики в эконо-
мике Международного университета туриз-
ма и предпринимательства Таджикистана
- ВЕДУЩАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ:** Государственное образовательное учрежде-
ние «Бохтарский государственный универси-
тет имени Носира Хусрава»

Защита состоится *29 апреля 2026 г. в 14:00* часов на заседании Диссер-
тационного совета 6D.КОА-011 на механико-математическом факультете Та-
джикского национального университета, расположенного по адресу: 734027,
г. Душанбе, ул. Буни-Хисорак, корпус 17, аудитория 203.

E-mail: alisher_gaforov@mail.ru; номер мобильного телефона учёного сек-
ретаря: (+992) 900-76-66-03.

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной научной библиотеке
Таджикского национального университета или на сайте <http://www.tnu.tj>

Автореферат разослан «_____» «_____» 2026 г.

**Ученый секретарь Диссертационного
совета 6D.КОА-011, кандидат
физико-математических наук**



Гафоров А.Б.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. Теория приближения функций относится к числу наиболее быстро развивающихся областей математического анализа и обладает важными приложениями в различных разделах прикладной математики. В данной теории экстремальные задачи наилучшего приближения дифференцируемых 2π -периодических функций с помощью тригонометрических многочленов занимают особое место в различных банаховых пространствах.

В настоящее время всё более отчётливо наблюдается проникновение идей и методов теории приближения функций в различные области математической науки, особенно в прикладные направления. Основы теории приближения, заложенные в известных классических трудах Чебышёва, Вейерштрасса, Джексона и Бернштейна по приближению функций с помощью многочленов, были переосмыслены и продолжают развиваться на более широкой и прочной теоретической базе.

Известно, что аппроксимационные задачи, формулируемые в классах функций, во многих случаях являются экстремальными задачами, в которых требуется либо нахождение точной верхней границы погрешности приближения для заданного метода в рассматриваемом классе функций, либо указание наилучших методов приближения для данного класса.

Рассматривая решение экстремальных задач для определённых классов функций, в данной диссертации мы ограничиваемся случаем периодических функций. Иными словами, в работе анализируется ряд экстремальных задач теории приближения периодических функций с помощью тригонометрических многочленов в гильбертовом пространстве L_2 . Формулируются окончательные результаты, касающиеся верхней границы поведения тригонометрических многочленов для различных классов периодических функций.

В первой главе собран подготовительный материал, и в каждом конкретном случае подробно формулируются и анализируются ещё не решённые экс-

тремальные задачи. В основном эти задачи посвящены совместному приближению функций и их промежуточных производных. Затем сформулированные задачи решаются в последующих главах диссертации для различных классов периодических функций. Полученные результаты являются окончательными и по существу не допускают ни дополнений, ни сокращений. Именно совокупность этих факторов определяет актуальность и целесообразность выбранной темы данной научной работы.

Степень научной разработанности изучаемой проблемы. Среди современных направлений математического анализа теория приближения функций занимает особое место, так как она является одной из быстро развивающихся областей и нашла широкое применение в прикладной математике. В рамках этой теории экстремальные задачи наилучшего совместного приближения 2π -периодических функций с помощью тригонометрических многочленов в различных банаховых пространствах обладают значительной научной ценностью. Задача наилучшего совместного приближения дифференцируемых периодических функций с помощью тригонометрических многочленов в метрике равномерной сходимости была впервые изучена в 1960 году А.Л. Гаркави [7]. В том же году А.Ф. Тиман [19] рассматривал поставленную задачу для случая наилучшего приближения функций на всём заданном числовом отрезке с помощью целых экспоненциальных функций.

Задача наилучшего совместного приближения функций и их производных, рассматриваемая в более общей форме как для алгебраических, так и для тригонометрических многочленов, подробно изучена в монографии В.Н. Малозёмова [12]. В ней обобщены ряд классических результатов теории приближения функций на случай наилучшего совместного приближения функций и их производных. Для некоторых дифференцируемых периодических функций в пространстве L_2 с усреднённым весом модуля непрерывности высокого порядка, ограниченного сверху данным показателем, поставленная задача рассматривалась в работах С.Б. Вакарчука и В.И. Забутной [4],

М.Ш. Шабозова и А.А. Шабозовой [25], а также М.Ш. Шабозова [26].

В настоящем исследовании, продолжая работы вышеупомянутых авторов, рассматривается более общая экстремальная задача, а именно ставится задача определения точной верхней границы наилучшего совместного приближения функций и их последовательных производных с помощью соответствующих многочленов. В данной диссертации полностью решена задача наилучшего совместного приближения функций с помощью тригонометрических многочленов. Вычислено точное значение верхней границы наилучшего совместного приближения для некоторых классов функций, принадлежащих гильбертову пространству $L_2[0, 2\pi]$.

Связь работы с научными программами (проектами), темами. Диссертационное исследование выполнено в рамках перспективного плана научных исследований кафедры математического анализа Таджикского государственного педагогического университета имени С. Айни на 2021–2025 годы по теме «Теория приближения дифференцируемых периодических функций» и соответствует Плану мероприятий на 2020–2025 годы, направленному на реализацию «Двадцатилетия изучения и развития естественно-научных, точных и математических дисциплин в сфере науки и образования» на 2020–2040 годы (пункт 38).

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ИССЛЕДОВАНИЯ

Цель исследования. Настоящее исследование посвящено изучению различных экстремальных задач, возникающих в рамках теории наилучшего совместного приближения дифференцируемых 2π -периодических функций и их последовательных производных с помощью тригонометрических многочленов. В работе применяются современные методы и подходы к решению экстремальных задач в банаховых пространствах, что позволяет получить новые результаты и расширить возможности практического применения теории приближения функций.

Задачи исследования. В соответствии с поставленной целью выделяются следующие задачи исследования:

- определение точного значения верхних границ наилучшего совместного приближения функций и их последовательных производных с помощью многочленов, а также соответствующих производных для некоторых классов периодических функций, принадлежащих гильбертову пространству $L_2[0, 2\pi]$;
- нахождение новых точных неравенств между величинами наилучшего среднеквадратичного приближения дифференцируемых функций и интегралами, включающими значение усреднённого модуля непрерывности m -го порядка и верхнюю границу в гильбертовом пространстве $L_2[0, 2\pi]$;
- вычисление точного значения бернштейновского, колмогоровского, гельфандовского, линейного и проекционного n -поперечников классов функций, задаваемых модулями непрерывности высшего порядка.

Объект исследования. Основным объектом исследования являются различные экстремальные задачи, связанные с наилучшим совместным приближением функций и их производных с помощью тригонометрических многочленов в пространстве $L_2[0, 2\pi]$.

Предмет исследования. Тема исследования состоит в установлении точных неравенств типа Джексона–Стечкин, которые связывают наилучшее совместное приближение функций и их промежуточных производных с обобщёнными модулями непрерывности высшего порядка $\Omega_m(f, t)$ в метрике пространства $L_2[0, 2\pi]$.

Научная новизна исследования. В диссертации получены следующие основные результаты:

- найдены точные значения верхних границ наилучшего совместного приближения и его последовательных производных с помощью многочленов и соответствующих им производных для некоторых классов периодических функций, принадлежащих пространству $L_2[0, 2\pi]$;

- найдены новые точные неравенства между величинами наилучшего среднеквадратичного приближения дифференцируемых функций и интегралами, содержащими усреднёнными значениями модулей непрерывности m -го порядка и значения верхних граней в гильбертовом пространстве $L_2[0, 2\pi]$;
- найдены точные значения бернштейновских, колмогоровских, гельфандовских, линейных и проекционных n -поперечников классов функций, задаваемых модулями непрерывности высшего порядка.

Теоретическая и научно-практическая значимость работы. Работа носит теоретический характер. Результаты и методы, представленные в диссертации, могут быть использованы для анализа экстремальных задач в теории приближения функций нескольких переменных, применимых как к областям с границами, так и ко всей двумерной поверхности.

Положения, выносимые на защиту:

- теоремы о точных значениях верхних граней наилучшего среднеквадратичного совместного приближения многочленами для определённых классов дифференцируемых периодических функций, задаваемых обобщёнными модулями непрерывности;
- доказательство теорем о точных неравенствах типа Джексона–Стечкин, которые описывают наилучшее совместное приближение с помощью обобщённого модуля непрерывности $\Omega_m(f, t)$;
- теоремы о точных значениях бернштейновских, колмогоровских, гельфандовских, линейных и проекционных n -поперечников функциональных классов в метрике пространства L_2 .

Степень достоверности результатов. Достоверность научных результатов диссертационной работы обеспечивается строгими математическими доказательствами всех утверждений, приведённых в диссертации, а также подтверждается исследованиями других авторов.

Соответствия диссертации паспорту научной специальности (формуле и области исследования). Диссертационная работа выполнена по специальности 6D060102 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ и является разделом математического анализа. Тема исследования относится к области теории приближения функций, а полученные результаты соответствуют следующим направлениям:

- 1) Теория функциональных пространств и их структурные свойства;
- 2) Теория приближения функций и методы полиномиального и рядового приближения;
- 3) Исследование точности приближения и оценка скорости приближения в функциональных пространствах.

Указанные направления относятся к разделу «Теория приближения функций», предусмотренному в разделе III, пункте 3 паспорта научной специальности.

Личный вклад соискателя ученой степени. Проблемы исследования и выбор методов их решения определены под руководством научного руководителя. Одновременно были предоставлены необходимые научные консультации. Основные результаты, приведённые в разделе «Научная новизна исследования», считаются результатом личного труда автора.

Апробация результатов диссертации. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих семинарах и конференциях:

- семинары кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений Таджикского национального университета под руководством академика НАНТ, профессора М.Ш. Шабозова (Душанбе, 2020–2026 гг.);
- семинары кафедры математического анализа Таджикского государственного педагогического университета им. Садриддина Айни под руководством доктора физико-математических наук, доцент Г.А. Юсупова (Душанбе, 2022–2026 гг.);

- международная конференция «Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений», посвящённая 70-летию со дня рождения академика Национальной академии наук Таджикистана, доктора физико-математических наук, профессора К.Х. Бойматова (Душанбе, 25–26 декабря 2020 года);
- международная конференция «Современные проблемы теории чисел и математического анализа», посвящённой 80-летию со дня рождения доктора физико-математических наук, профессора Дододжона Исмоилова (Душанбе, 29–30 апреля 2022 г.);
- международная конференция «Современные проблемы математического анализа и теории функций», посвящённая 70-летию со дня рождения академика Национальной академии наук Таджикистана, доктора физико-математических наук, профессора М.Ш. Шабозова (Душанбе, 24–25 июня 2022 года);
- международная научно-теоретическая конференции на тему «Вклад математики в развитие естественных, точных и математических наук», посвящённой двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических наук (2020–2040 годы) (Душанбе, 30–31 мая 2023 г.);
- международная конференция «Современные проблемы математики и её преподавания», посвящённая 35-летию государственной Независимости Республики Таджикистан и 70-летию доктора физико-математических наук Тухлиева К. (Худжанд, 21–22 июня 2024 г.);
- международная конференция «Современные проблемы математики и её приложения», посвящённая 75-летию со дня рождения академика НАНТ, доктора физико-математических наук, профессора К.Х. Бойматова и 75-летию доктора физико-математических наук, заведующего отделом дифференциальных уравнений Института математики им. А. Джураева НАНТ, профессора Джангибекова Г. (Душанбе, 30–31 мая 2025 г.).

Публикации по теме диссертации. Результаты исследований автора по теме диссертационной работы опубликованы в 8 научных работах, из них 2 статьи опубликованы в изданиях, входящих в действующий перечень ВАК Республики Таджикистан, ещё 6 в трудах международных и республиканских научных конференций.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, списка цитированной литературы из 135 наименований, занимает 152 страницу машинописного текста и набрана на \LaTeX . Для удобства в диссертации применена сквозная нумерация теорем, лемм, следствий и формул. Они имеют тройную нумерацию, в которой первая цифра совпадает с номером главы, вторая указывает на номер параграфа, а третья на порядковый номер теорем, лемм, следствий или формул в данном параграфе.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ ИССЛЕДОВАНИЯ

Материал и методы исследования. Представленное исследование посвящено изучению различных экстремальных задач, рассматриваемых в рамках теории наилучшего совместного приближения дифференцируемых 2π -периодических функций и их последовательных производных с помощью тригонометрических многочленов. В диссертации современные подходы и методы решения экстремальных задач в банаховых пространствах применяются широко.

Результаты исследования. Излагаем краткое содержание диссертационной работы.

В первой главе диссертации приводятся некоторые результаты по наилучшему среднеквадратическому приближению класса дифференцируемых периодических функций $f(x)$ тригонометрическими многочленами в пространстве $L_2 = L_2[0, 2\pi]$. На протяжении многих десятилетий решение экстремальных задач и их приложения привлекают внимание многих математиков, поскольку такие задачи широко используются при решении различных

задач прикладной математики, имеющих оптимизационный характер. В экстремальных задачах, как правило, требуется найти точную верхнюю грань погрешности приближения заданным методом в определённом классе функций либо указать для этого класса наилучшее средство приближения.

Задачи наилучшего приближения периодических функций в пространстве L_2 ранее исследованы в работах Н.И. Черных [28, 29], Л.В. Тайкова [16–18], С.Б. Вакарчука [2, 4–6], А.А. Лигуна [10, 11], В.В. Шалаева [27], М.Ш. Шабозова [21–26] и многих других.

В последние годы для решения задач наилучшего полиномиального приближения функций в пространстве L_2 используются различные виды модуля непрерывности (см., например, работы [4–6, 13] и приведённую в них литературу).

Одной из центральных экстремальных задач теории аппроксимации функций является задача нахождения точных констант в неравенствах типа Джексона–Стечкина. Неравенством типа Джексона–Стечкина в произвольном нормированном пространстве X называют неравенство вида

$$E_{n-1}(f)_X \leq \chi n^{-r} \omega_m(f^{(r)}, \tau/n)_X, \quad r \in \mathbb{Z}_+, \tau > 0$$

в котором погрешность приближения индивидуальной функции f оценивается с помощью заданной характеристики гладкости ω_m самой аппроксимируемой функции или через некоторые её производные $f^{(r)} \in X$. Очевидно, что наилучшая константа χ в общем случае может зависеть как от пространства X так и от параметров m, n, r и τ .

Первые точные константы в неравенстве Джексона были получены Н.П. Корнейчуком [8] в пространстве $C(0, 2\pi]$ в 1962 году и Н.И. Черных [28] в пространстве $L_2(0, 2\pi]$ в 1967 году. После результатов Н.П. Корнейчука и Н.И. Черных внимание сосредоточилось на поиске точных постоянных в неравенстве Джексона–Стечкина и в других банаховых пространствах. В 1979 году Н.И. Черных [1] определил минимальное значение аргумента в модуль непре-

рывности, для которого точная константа в неравенстве Чебсона–Стечкина в пространстве $L_p(-\pi, \pi]$ достигает глобального минимума. Нахождение таких аргументов, которые называют *оптимальными аргументами* или *точками Черных*, превратилось в одну из важных экстремальных задач в теории приближения функций

Обозначим через \mathbb{N} — множество натуральных чисел; $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$; \mathbb{R}_+ — множество положительных вещественных чисел; $L_2 := L_2[0, 2\pi]$ — пространство измеримых по Лебегу суммируемых с квадратом 2π -периодических функций с конечной нормой

$$\|f\| := \|f\|_{L_2} = \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Множество всех тригонометрических многочленов

$$T_{n-1}(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$$

степени $n - 1$ обозначим через \mathcal{T}_{2n-1} .

Если $S_{n-1}(f, x)$ частичная сумма порядка $n - 1$ ряда Фурье функции $f(x)$:

$$f(x) \sim \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx),$$

то из свойства частичных сумм рядов Фурье функции ясно, что наилучшее приближение функции $f(x)$ в метрике пространства L_2 тригонометрическими многочленами $T_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}$ достигается частичной суммой ряда Фурье $S_{n-1}(f, x)$, то есть

$$\begin{aligned} E_{n-1}(f) &:= E_{n-1}(f, \mathcal{T}_{2n-1})_{L_2} = \inf \left\{ \|f - T_{n-1}\| : T_{n-1}(x) \in \mathcal{T}_{2n-1} \right\} = \\ &= \|f - S_{n-1}(f)\| = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} (a_k^2(f) + b_k^2(f)) \right\}^{1/2} = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f) \right\}^{1/2}, \end{aligned}$$

где для краткости введено обозначение $\rho_k^2(f) = a_k^2(f) + b_k^2(f)$, $k \geq n$ и $a_k(f)$, $b_k(f)$ — косинус- и синус-коэффициенты Фурье функции $f \in L_2$.

Через $L_2^{(r)}$ ($r \in \mathbb{Z}_+$, $L_2^{(0)} = L_2$) обозначим множество функций $f \in L_2$, для которых производные $(r-1)$ -го порядка, то есть $f^{(r-1)}$ являются абсолютно непрерывными, а производные порядка r , то есть $f^{(r)} \in L_2$.

Модуль непрерывности порядка m любой измеримой 2π -периодической функции суммируемой с квадратом $f(x) \in L_2$ определим равенством

$$\omega_m(f, t) = \sup \left\{ \|\Delta_h^m f(\cdot)\| : |t| \leq h \right\}, \quad (1)$$

где

$$\Delta_h^m f(x) = \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \binom{m}{k} f(x + (m-k)h)$$

— разность порядка m функции f в точке x с шагом h .

При решении некоторых экстремальных задач в теории приближения вместо классического модуля непрерывности порядка m для функции $f \in L_2$ иногда удобнее использовать характеристику гладкости, эквивалентную величине (1), следующего вида

$$\Omega_m(f, t)_2 = \left\{ \frac{1}{t^m} \int_0^t \cdots \int_0^t \|\Delta_{\bar{h}}^m f(\cdot)\|^2 dh_1 \cdots dh_m \right\}^{1/2} \quad (2)$$

где $t > 0$, $\bar{h} := (h_1, \dots, h_m)$; $\Delta_{\bar{h}}^m = \Delta_{h_1}^1 \circ \cdots \circ \Delta_{h_m}^1$;

$$\Delta_{h_j}^1 f(x) := f(x + h_j) - f(x), \quad j = \overline{1, m}.$$

По этой причине вычисление точной постоянной

$$\mathbb{K}_{m,n,r}(t) := \sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f \neq \text{const}}} \frac{n^r E_{n-1}(f)}{\Omega_m(f^{(r)}, t/n)}, \quad 0 < t \leq 2\pi$$

в неравенстве Джексона–Стечкина вида

$$E_{n-1}(f) \leq \mathbb{K}_{m,n,r}(t) \frac{1}{n^r} \Omega_m(f^{(r)}, t/n)$$

также привлекает определённый интерес.

Следует отметить, что при изучении важных задач приближения в метрическом пространстве L_p ($0 < p < 1$) усреднённые характеристики гладкости по функциям вида (2), были рассмотрены К.В. Руновским [14], а также Э.А. Стороженко, В.Г. Кротовым и П. Освальдом [15].

С целью обобщения результата, приведённого в работе А.А. Лигуна [10], М.Ш. Шабозов и Г.А. Юсупов исследовали следующую экстремальную характеристику [22]:

$$\chi_{m,n,r,p,s}(\varphi, h) = \sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f \neq \text{const}}} \frac{E_{n-1}(f)_2}{\left(\int_0^h \omega_m^p(f^{(r)}, t)_2 \varphi(t) dt \right)^s}, \quad (3)$$

где $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, p, s – положительные числа, $0 < h \leq \pi/n$ а функция $\varphi(t)$ удовлетворяет всем условиям, приведённым в двойном неравенстве А.А. Лигуна. В работе [22] доказана справедливость соотношения

$$\left\{ \mathcal{A}_{n,h,p}^{r,m}(\varphi) \right\}^{-1} \leq \chi_{m,n,r,p,1/p}(\varphi, h) \leq \left\{ \inf_{n \leq k < \infty} \mathcal{A}_{k,h,p}^{r,m}(\varphi) \right\}^{-1}$$

где $0 < p \leq 2$; $0 < h \leq \pi/n$ и

$$\mathcal{A}_{k,h,p}^{r,m}(\varphi) := 2^{m/2} \left(k^{rp} \int_0^h (1 - \cos kt)^{mp/2} \varphi(t) dt \right)^{1/p}.$$

По нашему мнению, в соответствии с выражением (3), изучение экстремальной характеристики

$$\mathcal{K}_{m,n,r,p,s}(\varphi, h) := \sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f \neq \text{const}}} \frac{E_{n-1}(f)}{\left(\int_0^h \Omega_m^p(f^{(r)}, t)_2 \varphi(t) dt \right)^s} \quad (4)$$

представляет значительный интерес, где $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $p, s \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$; $0 < h \leq \pi/n$; $\varphi(t)$ – неотрицательная измеримая функция, суммируемая на отрезке $[0, h]$ и не эквивалентная нулю.

Во всех последующих случаях при вычислении значения точной верхней грани в общих соотношениях для всех функций $f \in L_2^{(r)}$ предполагается, что $f \neq \text{const}$.

Вводим следующее обозначение:

$$\text{sinc } t := \begin{cases} \frac{\sin t}{t}, & \text{если } t \neq 0, \\ 1, & \text{если } t = 0. \end{cases}$$

Следующая теорема является своего рода обобщением результата (3) с экстремальной характеристикой (4).

Теорема 2.2.1. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < p \leq \infty$, $0 < h \leq \pi/n$, φ — неотрицательная, измеримая и суммируемая на отрезке $[0, h]$, не эквивалентная нулю функция. В этом случае имеет место следующее равенство

$$\begin{aligned} & \mathcal{K}_{m,n,r,p,1/p}(\varphi, h) = \\ & = \sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{E_{n-1}(f)}{\left(\int_0^h \Omega_m^p(f^{(r)}, t)_2 \varphi(t) dt \right)^{1/p}} = \frac{1}{\inf_{n \leq k < \infty} \mathcal{B}_{k,h,p}^{r,m}(\varphi)}, \end{aligned}$$

где

$$\mathcal{B}_{k,h,p}^{r,m}(\varphi) := 2^{m/2} \left(k^{rp} \int_0^h (1 - \text{sinc } kt)^{mp/2} \varphi(t) dt \right)^{1/p}.$$

Из теоремы 2.2.1 вытекает ряд важных результатов, которые играют ключевую роль при исследовании экстремальных задач.

Следствие 2.3.1. Пусть $0 < h \leq 3\pi/(4n)$ и выполняются условия все теоремы 2.2.1. В этом случае имеет место следующее равенство

$$\mathcal{K}_{m,n,r,p,1/p}(\varphi, h) = \left\{ \mathcal{B}_{n,h,p}^{r,m}(\varphi) \right\}^{-1}.$$

Следствие 2.3.2. Пусть $0 < \tau \leq 3\pi/4$; $m, n \in \mathbb{N}$ и

$$\beta(\tau) := \frac{Si(\tau) - \sin \tau}{\tau - \sin \tau}, \quad \eta(p) := (1 + mp/2)^{1/p}.$$

Если при указанном значении $0 < p \leq 2$ для любого элемента $f \in L_2^{(r)}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ функция $\Omega_m^p(f^{(r)})$ на отрезке $[0, 3\pi/(4n)]$ не убывает, то величина наилучшего полиномиального приближения функции f удовлетворяет следующему неравенству

$$E_{n-1}(f) \leq \frac{\eta(p)}{n^r} (2(1 - \text{sinc } \tau))^{-m/2} \Omega_m(f^{(r)}, \tau\beta(\tau)/n).$$

Если функция $\Omega_m^p(f^{(r)})$ для всех значений p из $[p_*, p^*] \subset (0, 2]$ на сегменте $[0, 3\pi/(4n)]$ является выпуклой вверх тогда имеем:

$$E_{n-1}(f) \leq \frac{\eta(p^*)}{n^r} (2(1 - \text{sinc } \tau))^{-m/2} \Omega_m(f^{(r)}, \tau\beta(\tau)/n).$$

Следствие 2.3.3. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < p \leq \infty$, $q(t)$ – неотрицательная, измеримая на отрезке $[0, a]$ ($0 < a \leq \pi$) суммируемая не эквивалентная нулю функция. Тогда имеет место следующее неравенство:

$$\begin{aligned} & \{\Phi_{m,r,p}(a, q, 1)\}^{-1/p} \leq \\ & \leq \sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{2^{m/2} n^r E_{n-1}(f)}{\left\{ \int_0^a \Omega_m^p(f^{(r)}, t/n) q(t) dt \right\}^{1/p}} \leq \left\{ \inf_{x \geq 1} \Phi_{m,r,p}(a, q, x) \right\}^{-1/p}, \end{aligned}$$

где

$$\Phi_{m,r,p}(a, q, x) = x^{rp} \int_0^a (1 - \text{sinc } xt)^{mp/2} q(t) dt.$$

В этом случае, если функция q такая, что

$$\inf_{x \geq 1} \Phi_{m,r,p}(a, q, x) = \Phi_{m,r,p}(a, q, 1)$$

то имеет место равенство

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{2^{m/2} n^r E_{n-1}(f)}{\left\{ \int_0^a \Omega_m^p(f^{(r)}, t/n) q(t) dt \right\}^{1/p}} = \left\{ \Phi_{m,r,p}(a, q, 1) \right\}^{-1/p}.$$

Следствие 2.3.4. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < p \leq \infty$ и $q(t) = t^{rp-1} q_1(t)$ неотрицательная на отрезке $[0, a]$ ($0 < a \leq \pi$) измеримая суммируемая функция и q_1 — невозрастающая функция и не эквивалентная нулю. В этом случае имеет место равенство

$$\inf_{x \geq 1} \Phi_{m,r,p}(a, t^{rp-1} q_1(t), x) = \Phi_{m,r,p}(a, t^{rp-1} q_1(t), 1)$$

и верна следующая формула:

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{2^{m/2} n^r E_{n-1}(f)}{\left\{ \int_0^a \Omega_m^p(f^{(r)}, t/n) t^{rp-1} q_1(t) dt \right\}^{1/p}} = \left\{ \Phi_{m,r,p}(a, t^{rp-1} q_1(t), 1) \right\}^{-1/p}.$$

Примечание: Следует отметить, что результат следствия 2.3.4 при $p = 2$ был доказан в работе А.А. Лигуна [10].

Следствие 2.3.5. Пусть $r \in \mathbb{N}$, $1/r \leq p \leq 2$, $0 \leq \gamma \leq rp - 1$, $0 < \beta \leq \pi$, $\varphi_*(t) = \sin^\gamma(\beta t/h)$ и $0 < t \leq h \leq \pi/n$. В этом случае для любых $m, n \in \mathbb{N}$ имеет место следующее равенство:

$$\mathcal{H}_{m,n,r,p,1/p}(\varphi_*, h) = 2^{-m/2} n^{-r} \left\{ \int_0^h (1 - \operatorname{sinc} nt)^{mp/2} \sin^\gamma(\beta t/h) dt \right\}^{-1/p}.$$

Хорошо известно [9, с. 127], что для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ её промежуточные производные $f^{(s)}$ ($s = 1, 2, 3, \dots, r-1$; $r \geq 2$, $r \in \mathbb{N}$, $f^{(0)} \equiv f$) также принадлежат пространству L_2 . Поэтому изучение поведения величины наилучшего приближения $E_{n-1}(f^{(s)})$ в самом классе $L_2^{(r)}$ или в каком-либо его подклассе $\mathfrak{M}^{(r)} \subset L_2^{(r)}$ является несомненно интересным. Эта задача была

рассмотрена и решена в работе [4] для модулей непрерывности специального типа. Здесь мы предлагаем решение поставленной задачи в случае, когда структурные характеристики функции $f \in L_2^{(r)}$ описываются через взвешенный средний модуль непрерывности $\Omega_m(f^{(r)}, t)$ с весом $\varphi(t)$.

Таким образом, задача наилучшего совместного приближения класса функций $\mathfrak{M}^{(r)} \subset L_2^{(r)}$ выражается в следующей форме: необходимо найти точное значение величины

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}(\mathfrak{M}^{(r)}) := \sup \left\{ E_{n-1}(f^{(s)}) : f \in \mathfrak{M}^{(r)} \right\}, \quad (5)$$

где \mathfrak{M} — произвольное множество функций из пространства $L_2^{(r)}$.

В параграфе 2.4 с нашей точки зрения нахождение точной постоянной

$$\widetilde{\mathcal{K}}_{n,m,r,s}(t) := \sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^{r-s} E_{n-1}(f^{(s)})}{\Omega_m(f^{(r)}, t)}$$

в неравенстве вида Джексона–Стечкина для совместного приближения функций $f \in L_2^{(r)}$ имеет большое значение.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 2.4.1. *Пусть $n, m \in \mathbb{N}$; $r, s \in \mathbb{Z}_+$; $r \geq s$. Тогда для всех чисел $t \in (0, \pi/2]$ имеет место равенство*

$$\widetilde{\mathcal{K}}_{n,m,r,s}(t) = \left\{ 2(1 - \operatorname{sinc} t) \right\}^{-m/2}.$$

В параграфе 2.5 мы определяем значение верхней грани наилучшего совместного приближения некоторых классов функций и их производных с помощью тригонометрических многочленов и соответствующих производных, то есть вычисляем точное значение величины (5) для классического модуля непрерывности высшего порядка.

Для решения задачи (5) сначала докажем следующую теорему.

Теорема 2.5.1. *Для всех значений $n, m \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$ и $r \geq s$ имеет*

место следующее равенство

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^{r-s} E_{n-1}(f^{(s)})}{\left(\frac{n}{2} \int_0^{\pi/n} \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t) \sin ntdt \right)^{m/2}} = \frac{1}{2^{m/2}}.$$

Из теоремы 2.5.1 можно получить следующие результаты.

Следствие 2.5.1. Для любых $n, m \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$ и произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ имеет место следующее неравенство:

$$E_{n-1}(f^{(s)}) \leq 2^{-m/2} n^{-(r-s)} \omega_m(f^{(r)}, \pi/n). \quad (6)$$

Если функция $\omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t)$ для любого значения $t \in [0, \pi/(2n)]$ удовлетворяет условию

$$2 \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, \pi/(2n)) \geq \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t) + \omega_m^{2/m}\left(f^{(r)}, \frac{\pi}{n} - t\right), \quad (7)$$

то в частном случае, если она является выпуклой вверх функция на сегменте $[0, \pi/n]$, можно точнее определить неравенство (6).

Следствие 2.5.2. Для совокупности функций $f \in L_2^{(r)}$, для которых функция $\omega_m(f^{(r)}, t)$ удовлетворяет условию (7), выполняется неравенство

$$E_{n-1}(f^{(s)}) \leq 2^{-m/2} n^{-(r-s)} \omega_m(f^{(r)}, \pi/(2n))$$

которое для функции $f \in L_2^{(r)}$, обращается в равенство.

В параграфе 2.6 найдены точные неравенства между наилучшим полиномиальным приближением и усреднённым значением модуля непрерывности функций $f \in L_2^{(r)}$ в норме пространства L_2 .

Теорема 2.6.1. Пусть $r \in \mathbb{Z}_+$, $n \in \mathbb{N}$. Справедливы следующие соотношения:

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^r E_{n-1}(f)}{\left\{ \frac{1}{h} \int_0^h \omega^2(f^{(r)}, t) dt \right\}^{1/2}} = \frac{nh}{2(nh - \sin nh)}, \quad 0 < nh \leq \pi/2;$$

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{\sqrt{2} n^r E_{n-1}(f)}{\left\{ \frac{2}{h^2} \int_0^h (h-t) \omega^2(f^{(r)}, t) dt \right\}^{1/2}} = \left\{ 1 - \left(\frac{2}{nh} \sin \frac{nh}{2} \right)^2 \right\}^{-1/2}, \quad 0 < nh \leq \pi.$$

В третьей главе диссертации нашей основной целью является вычисление точных значений n -поперечников для некоторых классов дифференцируемых функций, заданных с помощью обобщённого модуля непрерывности высшего порядка в пространстве L_2 . На основе некоторых ограничительных условий, накладываемых на отдельные рассматриваемые классы функций, возникает возможность нахождения точных значений n -поперечников.

Теперь мы приведём определения и необходимые обозначения, которые будут использоваться в дальнейшем изложении диссертации.

Пусть X — произвольное банахово пространство, $\mathfrak{M} \subset X$ — некоторый класс функций, и пусть $L_n \subset X$ — подпространство размерности n . Величину

$$\begin{aligned} E_n(\mathfrak{M})_X &:= E(\mathfrak{M}, L_n)_X = \sup \left\{ E(f; L_n)_X : f \in \mathfrak{M} \right\} = \\ &= \sup \left\{ \inf \left\{ \|f - g\|_X : g \in L_n \right\} : f \in \mathfrak{M} \right\} \end{aligned} \quad (8)$$

называют наилучшим приближением класса \mathfrak{M} подпространствами L_n — заданной размерности n . Величина (8) характеризует отклонение класса L_n из подпространства L_n в метрике пространства X .

Если через $\mathcal{L}(X, L_n)$ обозначить совокупность всех непрерывных операторов $A : X \rightarrow L_n$, действующих из пространства X в произвольное подпространство $L_n \subset X$ размерности n , то возникает следующая задача: требуется найти величину

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_n(\mathfrak{M})_X &:= \mathcal{E}(\mathfrak{M}, L_n)_X = \\ &= \inf \left\{ \sup \left\{ \left\| f - Af \right\|_X : f \in \mathfrak{M} \right\} : A \in \mathcal{L}(X, L_n) \right\} \end{aligned} \quad (9)$$

и указать оператор $A_* \in \mathcal{L}(X, L_n)$, для которого достигается точная нижняя

грань в (9), то есть

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{M})_X = \sup \left\{ \left\| f - A_* f \right\|_X : f \in \mathfrak{M} \right\}.$$

Задачу (9) можно рассмотреть в более узком смысле: нижнюю грань искать не среди всей совокупности непрерывных операторов $\mathcal{L}(X, L_n)$, действующих $A : X \rightarrow L_n$, а только в некотором конкретном классе таких операторов, установленном определённым образом. В частном случае можно выделить в $\mathcal{L}(X, L_n)$ класс непрерывных операторов $A : X \rightarrow L_n$ и исследовать величину:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_n^{\mathcal{L}}(\mathfrak{M})_X &:= \mathcal{E}^{\mathcal{L}}(\mathfrak{M}, L_n)_X = \\ &= \inf \left\{ \sup \left\{ \left\| f - Af \right\|_X : f \in \mathfrak{M} \right\} : A \in \mathcal{L}(X, L_n) \right\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Если существует такой оператор $A^* : X \rightarrow L_n$, для которого достигается нижняя грань в (10), то этот оператор задаёт метод наилучшего линейного приближения в задаче (10), то есть

$$\mathcal{E}_n^{\mathcal{L}}(\mathfrak{M})_X = \sup \left\{ \left\| f - A^* f \right\|_X : f \in \mathfrak{M} \right\}.$$

Если в $\mathcal{L}(X, L_n)$ выделить класс операторов $\mathcal{L}^\perp(X, L_n)$ — то есть линейные проекционные операторы на подпространство L_n , для которых выполняется условие $Af = f$ для каждого $f \in L_n$ обычно исследуется величина:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_n^\perp(\mathfrak{M})_X &:= \mathcal{E}^\perp(\mathfrak{M}, L_n)_X = \\ &= \inf \left\{ \sup \left\{ \left\| f - Af \right\|_X : f \in \mathfrak{M} \right\} : A \in \mathcal{L}^\perp(X, L_n) \right\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Величины (8)–(11) связаны с задачей нахождения значений n -поперечников для различных классов \mathfrak{M} функций.

Теперь напомним определения n -поперечников, значения которых для некоторых классов \mathfrak{M} вычисляются в данной главе.

n -поперечником в смысле А.Н. Колмогорова [20] класса функций \mathfrak{M} в пространстве X называется величина

$$d_n(\mathfrak{M}, X) = \inf \left\{ E(\mathfrak{M}, L_n)_X : L_n \subset X \right\},$$

где нижняя грань по всем n -мерным подпространствам L_n в пространстве X .

Если опираться на наилучшее линейное приближение $\mathcal{E}^{\mathcal{L}}(\mathfrak{M}, L_n)_X$, то величина

$$\lambda_n(\mathfrak{M}, X) = \inf \left\{ \mathcal{E}^{\mathcal{L}}(\mathfrak{M}, L_n)_X : L_n \subset X \right\}$$

называется линейным n -поперечником класса \mathfrak{M} в пространстве X .

Аналогично, если за основу берётся величина (11), то рассматривается проекционный n -поперечник, то есть

$$\pi_n(\mathfrak{M}, X) = \inf \left\{ \mathcal{E}^{\perp}(\mathfrak{M}, L_n)_X : L_n \subset X \right\}.$$

Кроме того, в теории приближения функций существуют ещё две величины, известные под названиями « n -поперечник Гельфанда» и « n -поперечник Бернштейна».

Пусть S – единичный шар в пространстве X , то есть

$$S = \{x \in X, \|x\|_X \leq 1\}.$$

Величина

$$d^n(\mathfrak{M}, X) = \inf \left\{ \inf \left\{ \mathfrak{M} \cap L^n \subset \varepsilon S : \varepsilon > 0 \right\} : L^n \subset X \right\},$$

где инфимум берётся по всем подпространствам L^n коразмерности n , называется « n -поперечником по Гельфанду», а величина

$$b_n(\mathfrak{M}, X) = \sup \left\{ \sup \left\{ \varepsilon S \cap L_{n+1} \subset \mathfrak{M} : \varepsilon > 0 \right\} : L_{n+1} \subset X \right\}$$

« n -поперечником по Бернштейну».

Пусть $\Phi(t)$, $t \geq 0$ – произвольная возрастающая функция, такая что для $t > 0$, $\Phi(t) > 0$ и выполняется $\lim \{ \Phi(t) : t \rightarrow 0 \} = \Phi(0) = 0$. Функция $\Phi(t)$ называется мажорантой.

Под $W^{(r)}(\Omega_m, \Phi)$ (где $r \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{N}$) понимается множество функций $f \in L_2^{(r)}$, производные r -го порядка которых $f^{(r)}$ удовлетворяют ограничению

$$\Omega_m(f^{(r)}, t) \leq \Phi(t), \quad \forall t > 0.$$

Требуется определить величину совместного приближения класса функций $W^{(r)}(\Omega_m, \Phi)$, а именно — найти значение величины

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}(W^{(r)}(\Omega_m, \Phi)) = \sup \left\{ E_{n-1}(f^{(s)}) : f \in W^{(r)}(\Omega_m, \Phi) \right\}.$$

В этом разделе доказывается следующая теорема.

Теорема 3.1.1. Пусть для заданного $n \in \mathbb{N}$ мажоранта $\Phi(t)$ удовлетворяет следующему условию:

$$\frac{\Phi^2(\pi t/(2n))}{\Phi^2(\pi/(2n))} \geq \left(\frac{\pi}{\pi - 2} \right)^m \cdot \begin{cases} (1 - \operatorname{sinc}(\pi t/2))^m, & \text{если } 0 < t \leq 2, \\ 2^m \left(1 - \frac{1}{t}\right)^m, & \text{если } 2 \leq t < \infty. \end{cases} \quad (12)$$

В этом случае имеет место следующее равенство:

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}(W^{(r)}(\Omega_m, \Phi)) = \left\{ \frac{\pi}{2(\pi - 2)} \right\}^{m/2} \cdot \frac{1}{n^{r-s}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right).$$

Множество мажорант $\{\Phi\}$, удовлетворяющих условию (12), непусто.

Для представления другого результата сначала введём следующий класс функций.

Пусть для произвольных значений $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ и $u \in [0, 2\pi]$

$$W_m^{(r)}(\Phi) := \left\{ f \in L_2^{(r)} : \frac{\pi}{2u} \int_0^u \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t) \sin \frac{\pi}{u} t dt \leq \Phi^2(u) \right\}$$

— класс функций из $L_2^{(r)}$. Вводим обозначение

$$(1 - \cos nh)_* := \begin{cases} 1 - \cos nh, & \text{если } 0 < nh \leq \pi, \\ 2, & \text{если } nh > \pi \end{cases}$$

Теорема 3.1.2. Пусть функция Φ удовлетворяет условию

$$\Phi^2\left(\frac{u}{\mu}\right) \int_0^{\mu\pi} (1 - \cos t)_* \sin \frac{t}{\mu} dt \leq 2\mu \Phi^2(u) \quad (13)$$

для любого $\mu > 0$ и произвольного $u \in (0, 2\pi]$. Тогда для значений $m, n \in \mathbb{N}$; $r, s \in \mathbb{Z}_+$; $r > s$, выполняется равенство:

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}(W_m^{(r)}(\Phi)) = 2^{-m/2} n^{-r+s} \Phi^m\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Легко показать, что функция

$$\Phi(u) = u^{\alpha/2}, \quad \text{при } \alpha = \frac{\pi^2}{8}$$

удовлетворяет условию (13).

Символом $W_{m,p}^{(r)}(\Phi)$ ($m, n \in \mathbb{N}$; $0 < p \leq \infty$) обозначим класс функций $f \in L_2^{(r)}$, удовлетворяющих для всех значений $0 < t \leq 2\pi$ условию

$$\int_0^t \Omega_m^p(f^{(r)}, \tau) d\tau \leq \Phi^p(t).$$

С учётом научных работ [3, 30], через t_* обозначим значение аргумента $t \in (0, \infty)$ функции $\text{sinc } t$, в котором она достигает своего минимального значения. Очевидно, что t_* является наименьшим из корней уравнения

$$t - \text{tg } t = 0 \quad (4,49 < t_* < 4,51).$$

Вводим также следующее обозначение:

$$(1 - \text{sinc } t)_* := \begin{cases} 1 - \text{sinc } t, & \text{если } 0 < t \leq t_*; \\ 1 - \text{sinc } t_*, & \text{если } t \geq t_*. \end{cases}$$

В этом разделе доказывается следующая теорема.

Теорема 3.2.1. Пусть $m, n, r \in \mathbb{N}$, $1/r \leq p \leq 2$. Если для всех значений $0 < t \leq 2\pi$ мажоранта Φ удовлетворяет следующему условию:

$$\frac{\Phi^p(t)}{\Phi^p(\pi/n)} \geq \frac{\int_0^t (1 - \operatorname{sinc} n\tau)_*^{mp/2} d\tau}{\int_0^{\pi/n} (1 - \operatorname{sinc} n\tau)^{mp/2} d\tau}, \quad (14)$$

тогда имеет место следующее равенство:

$$\begin{aligned} \delta_{2n}(W_{m,p}^{(r)}(\Phi), L_2) &= \delta_{2n-1}(W_{m,p}^{(r)}(\Phi), L_2) = E_{n-1}(W_{m,p}^{(r)}(\Phi)) = \\ &= 2^{-m/2} n^{-r} \left\{ \int_0^{\pi/n} (1 - \operatorname{sinc} nt)^{mp/2} dt \right\}^{-1/p} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right), \end{aligned}$$

где $\delta_n(\cdot)$ — одна из приведённых выше n -поперечников: $b_n(\cdot)$, $d^n(\cdot)$, $d_n(\cdot)$, $\lambda_n(\cdot)$ или $\pi_n(\cdot)$. В этом случае множество всех мажорант, удовлетворяющих условию (14), непусто.

Легко показать, что функция $\Phi_*(t) = t^{\alpha/p}$, где

$$\alpha = \frac{\pi}{\int_0^{\pi/n} (1 - \operatorname{sinc} n\tau)^{mp/2} d\tau}$$

удовлетворяет условию (14) для произвольного $n \in \mathbb{N}$.

Теперь введём для произвольных $r \in \mathbb{Z}_+$ и $h > 0$ следующие классы функций:

$$W^{(r)}(\Phi, h) = \left\{ f \in L_2^{(r)} : \left(\frac{1}{h} \int_0^h \omega^2(f^{(r)}, t) dt \right)^{1/2} \leq \Phi(h) \right\};$$

$$W_1^{(r)}(\Phi, h) = \left\{ f \in L_2^{(r)} : \left(\frac{2}{h^2} \int_0^h (h-t)\omega^2(f^{(r)}, t) dt \right)^{1/2} \leq \Phi(h) \right\}.$$

Для введённых классов функций доказаны следующие теоремы.

Теорема 3.2.2. Если мажоранта $\Phi(h)$ для всех значений $h \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ удовлетворяет условию

$$\frac{\Phi(h)}{\Phi(\pi/(2n))} \geq \frac{\pi}{\pi - 2} \cdot \begin{cases} \frac{nh - \sin nh}{nh}, & \text{если } 0 < nh \leq \pi, \\ \frac{3nh - 2\pi}{nh}, & \text{если } nh > \pi \end{cases} \quad (15)$$

то выполняются равенства:

$$\delta_n(W^{(r)}(\Phi, h), L_2) = E_{n-1}(W^{(r)}(\Phi, h), L_2) = \left\{ \frac{\pi}{2(\pi - 2)} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right\}^{1/2} \cdot \frac{1}{n^r},$$

где $\delta_n(\cdot)$ — одна из приведённых выше n -поперечников: $b_n(\cdot)$, $d^n(\cdot)$, $d_n(\cdot)$, $\lambda_n(\cdot)$ или $\pi_n(\cdot)$. Множество всех функций-мажорант, удовлетворяющих условию (15), непусто.

Отметим, что функция $\Phi(h) = h^\alpha$, где $\alpha = \frac{2}{\pi - 2}$, удовлетворяет условию (15) теоремы 3.2.2.

Теорема 3.2.3. Пусть мажоранта $\Phi(h)$ для всех значений $h \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}$ и $r \in \mathbb{Z}_+$ удовлетворяет условию

$$\frac{\Phi(h)}{\Phi(\pi/n)} \geq \frac{\pi^2}{\pi^2 - 4} \cdot \begin{cases} 1 - \left(\frac{2}{nh} \sin \frac{nh}{2} \right)^2, & \text{если } 0 < nh \leq \pi, \\ 1 - \frac{4}{\pi^2} + 2 \left(1 - \frac{\pi}{nh} \right)^2, & \text{если } nh > \pi \end{cases} \quad (16)$$

Тогда имеют место равенства:

$$\begin{aligned} \delta_n(W_1^{(r)}(\Phi, h), L_2) &= E_{n-1}(W_1^{(r)}(\Phi, h), L_2) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{\pi^2}{\pi^2 - 4} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right) \right\}^{1/2} \cdot \frac{1}{n^r}, \end{aligned}$$

где $\delta_n(\cdot)$ — любой из вышеперечисленных n -поперечников.

Множество мажорант, удовлетворяющих условию (16), непусто.

Функция $\Phi(h) = h^\alpha$, $\alpha = \frac{8}{\pi^2 - 4}$ удовлетворяет условию (16).

ВЫВОДЫ

Основные научные результаты диссертационной работы заключаются в следующем:

- найдены точные значения верхних граней наилучшего совместного приближения и их промежуточные производные тригонометрическими полиномами, а также соответствующие производные для некоторых классов периодических функций, принадлежащих пространству $L_2[0, 2\pi]$ [1-А, 2-А, 5-А, 6-А, 7-А];
- найдены новые точные соотношения между величинами наилучшего среднеквадратического приближения дифференцируемых функций и интегралами, содержащими значения величины среднеквадратического модуля непрерывности порядка m от значений верхней границы в гильбертовом пространстве $L_2[0, 2\pi]$ [1-А, 2-А, 3-А, 4-А];
- получены точные значения бернштейновских, колмогоровских, гельфандовских, линейных и проекционных n -поперечников классов функций, которые задаются с помощью модуля непрерывности высшего порядка [1-А, 4-А, 8-А].

Рекомендации по практическому использованию результатов.

Результаты, полученные в диссертационной работе, имеют теоретическую значимость и широкие возможности для практического применения. Научные результаты и разработанные выводы могут быть использованы для дальнейшего развития теории аппроксимации функций и других экстремальных задач теории приближения. Полученные выводы и доказанные формулы могут быть применены в следующих научных направлениях:

- 1) Определение точной верхней границы наилучшего приближения многомерных функций;
- 2) Каждый раздел диссертации может быть использован в качестве учебного материала на специализированных курсах для студентов старших курсов по направлениям математических и прикладных дисциплин;
- 3) Исследование функциональных пространств и их структурных свойств, в которых рассматриваются задачи приближения функций;

- 4) Определение скорости сходимости функций и оценка точности приближений в функциональных пространствах, что имеет существенное значение для применения методов аппроксимации.

Список литературы

- [1] Arestov V.V., Cernykh N.I. On the L_2 -approximation of periodic function by trigonometric polynomials // Approximation and function spaces: Proc. Intern. Conf. (Gdansk, 1979). Amsterdam. – 1981. – PP. 25–43.
- [2] Вакарчук С.Б. О наилучших полиномиальных приближениях в L_2 некоторых классов 2π -периодических функций и точных значениях их n -поперечников // Матем. заметки. – 2001. – Т.70. – №3. – С. 334–345.
- [3] Vakarchuk S.B., Zabutna V.I. Widths of function classes from L_2 and exact constants in Jackson type inequalities // East Journal on Approximation. Bulgarian Academy of Sciences: Sofia. 2008. V.14, №4. P.411-421.
- [4] Вакарчук С.Б., Забутная В.И. Неравенства типа Джексона–Стечкина для специальных модулей непрерывности и поперечники функциональных классов в пространстве L_2 // Матем. заметки. – 2012. – Т.92. – №4. – С. 497–514.
- [5] Vakarchuk S.B., Shabozov M.Sh., Zabutnaya V.I. Structural characteristics of functions from L_2 and the exact values of widths of some functional classes // Journal of Mathematical Sciences. – 2015. – V.206. – №1. – PP. 97–114.
- [6] Вакарчук С.Б., Забутная В.И. Неравенства между наилучшими полиномиальными приближениями и некоторыми характеристиками гладкости в пространстве L_2 и поперечники классов функций // Матем. заметки. – 2016. – Т.99. – №2. – С. 215–238.
- [7] Гаркави А.Л. О совместном приближении периодической функции и ее производных тригонометрическими полиномами // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1960. – Т.24. – №1. – С. 103–128.
- [8] Корнейчук Н.П. Точная константа в теореме Д.Джексона о наилучшем равномерном приближении непрерывных периодических функций // ДАН СССР. – 1962. – Т.145. – №3. – С. 514-516.

- [9] Корнейчук Н.П. Точные константы в теории приближения. – М.: Наука. – 1978. – 424 с.
- [10] Лигун А.А. Некоторые неравенства между наилучшими приближениями и модулями непрерывности в пространстве L_2 // Матем. заметки. – 1978. – Т.24. – №6. – С. 785–792.
- [11] Лигун А.А. О поперечниках некоторых классов дифференцируемых периодических функций // Матем. заметки. – 1980. – Т.27. – №1. – С. 61–75.
- [12] Малозёмов В.Н. Совместное приближение функции и её производных. – Л.: Изд-во ЛГУ. – 1973. – 112 с.
- [13] Руновский К.В. Прямые и обратные теоремы теории приближений в пространствах L_p , $0 < p < 1$ // Докл. РАН. – 1993. – Т.331. – №6. – С. 684–686.
- [14] Руновский К.В. Прямая теорема теории приближений для общего модуля гладкости // Матем. заметки. – 2014. – Т.95. №6. – С. 899–910.
- [15] Стороженко Э.А., Кротов В.Г., Освальд П. Прямые и обратные теоремы типа Джексона в пространствах L_p , $0 < p < 1$ // Матем. сб. – 1975. – Т.98. – №3. – С. 395–415.
- [16] Тайков Л.В. Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности функций из L_2 // Матем. заметки. – 1976. – Т.20. – №3. – С. 433–438.
- [17] Тайков Л.В. Поперечники некоторых классов аналитических функций // Матем. заметки. – 1977. – Т.22. – №2. – С. 285–295.
- [18] Тайков Л.В. Наилучшие приближения дифференцируемых функций в метрике пространства L_2 // Матем. заметки. – 1977. – Т.22. – №4. – С. 535–542.
- [19] Тиман А.Ф. Теория приближения функций действительного переменного. – М.: Физматгиз. – 1960. – 624 с.
- [20] Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений. – М.: МГУ. – 1976. – 325 с.
- [21] Шабозов М.Ш. Поперечники некоторых классов периодических дифференцируемых функций в пространстве $L_2[0, 2\pi]$ // Матем. заметки. – 2010. – Т.87. – №4. – С. 616–623.

- [22] Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 некоторых классов 2π -периодических функций и точные значения их поперечников // Матем. заметки. – 2011. – Т.90. – №5. – С. 764–775.
- [23] Shabozov M.Sh., Yusupov G.A. Widths of Certain Classes of Periodic Functions in L_2 // Journ. of Approx. Theory. – 2012. – V.164. – Issue 1. – PP. 869-878.
- [24] Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А., Палавонов К.К. Среднеквадратическое приближение периодических функций и значения поперечников классов функций из L_2 // Доклады НАН Таджикистана. – 2018. – Т.61. – №1. С. 12–18.
- [25] Шабозов М.Ш., Шабозова А.А. Некоторые точные неравенства типа Джексона–Стечкина для периодических дифференцируемых в смысле Вейля функций в L_2 // Тр. ИММ УрО РАН. – 2019. – Т.25. – №4. – С. 255–264.
- [26] Шабозов М.Ш. Неравенства между наилучшими полиномиальными приближениями и некоторыми характеристиками гладкости функций в L_2 // Матем. заметки. – 2021. – Т.110. – №3. – С. 450–458.
- [27] Шалаев В.В. О поперечниках в L_2 классов дифференцируемых функций, определяемых модулями непрерывности высших порядков // Укр. матем. журнал. – 1991. – Т.43. – №1. – С. 125–129.
- [28] Черных Н.И. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 // Матем. заметки. – 1967. – Т.2. – №5. – С. 513–522.
- [29] Черных Н.И. Неравенство Джексона в $L_p(0, 2\pi)$ с точной константой // Тр. МИАН. – 1992. – Т.198. – С. 232–241.
- [30] Yusupov G.A. Best polynomial approximations and widths of certain classes of functions in the space L_2 // Eurasian Math. J. – 2013. – V.4. – №3. – PP. 120–126.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

В журналах, зарегистрированных в реестре ВАК при Президенте Республики Таджикистан:

- [1-А] Шамсиддинов С.А. Наилучшее полиномиальное приближение и перечники множеств в пространстве L_2 [Текст] / Н.М. Мамадаёзов, С.А. Шамсиддинов // Доклады НАН Таджикистана. – 2021. – Т.64. – №1-2. – С. 26–34.
- [2-А] Шамсиддинов С.А. Точные константы в неравенствах типа Джексона–Стечкина для наилучших совместных приближений функции и их последовательных производных в L_2 [Текст] / М.Ш. Шабозов, С.А. Шамсиддинов // Доклады НАН Таджикистана. – 2022. – Т.65. – №5-6. – С. 286–293.

В других изданиях:

- [3-А] Шамсиддинов С.А. Об одной оптимизационной задаче [Текст] / М. Азизов, С.А. Шамсиддинов // Материалы международной конференции «Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений», посвящённой 70-летию со дня рождения академика Национальной академии наук Таджикистана, доктора физ.-мат. наук, профессора К.Х. Бойматова (Душанбе, 25-26 декабря 2020 г.). – С. 50–51.
- [4-А] Шамсиддинов С.А. Точное неравенство Джексона–Стечкина в L_2 между наилучшим совместным приближением и обобщённым модулем непрерывности [Текст] / С.А. Шамсиддинов, Х.М. Шосафаров // Материалы международной конференции «Современные проблемы теории чисел и математического анализа», посвящённой 80-летию со дня рождения доктора физ.-мат. наук, профессора Дододжона Исмоилова (г. Душанбе, 29-30 апреля 2022 г.). – С. 253-256.
- [5-А] Шамсиддинов С.А. О точных константах в неравенствах типа Джексона–Стечкина для наилучших совместных приближений функции в L_2 [Текст] / С.А. Шамсиддинов // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математического анализа и

теории функций», посвящённой 70-летию академика НАН Таджикистана М.Ш.Шабозова (Душанбе, 24-25 июня 2022 г.). – С. 281–284.

- [6-А] Шамсиддинов С.А. Неравенства типа Джексона–Стечкина для наилучших совместных приближений из L_2 [Текст] / С.А. Шамсиддинов // Материалы международной научно-теоретической конференции «Вклад математики в развитие естественных, точных и математических наук», двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических наук (2020 – 2040 годы). (Душанбе, 30-31 мая 2023 г.). – С. 332–335.
- [7-А] Шамсиддинов С.А. Неравенства типа Джексона–Стечкина для наилучших совместных приближений функций и их производных в L_2 [Текст] / С.А. Шамсиддинов // Материалы международной научно-практической конференции «Современные проблемы математики и её преподавания», посвящённой 35-летию государственной независимости Республики Таджикистан; 30-летию Конституции Республики Таджикистан; «Двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических наук в сфере науки и образования» и 70-летию доктора физ.-мат. наук К. Тухлиева (г.Худжанд, 21-22 июня 2024 г.). – С. 111-114.
- [8-А] Шамсиддинов С.А. Наилучшее совместное приближение периодических функций, определяемых модулями непрерывности [Текст] / У.Н. Зеваршоев, С.А. Шамсиддинов // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математики и её приложения», посвящённой 75-летию со дня рождения академика НАНТ, доктора физ.-мат. наук, профессора К.Х. Бойматова и 75-летию доктора физ.-мат. наук, заведующего отделом дифференциальных уравнений Института математики им. А. Джураева НАНТ, профессора Г. Джангибекова (г.Душанбе, 30-31 мая 2025 г.). – С. 354–357.

АННОТАТСИЯИ

диссертатсияи Шамсиддинзода Саъдӣ Абдуқосим дар мавзуи «Доимӣҳои аниқ дар нобаробарии намуди Чексон–Стечкин барои наздиккунии муштараки бехтарини функцияҳо ва ҳосилаҳои пайдарпайи онҳо дар фазои L_2 » барои дарёфти дараҷаи илмии доктори фалсафа (PhD) – доктор аз рӯи ихтисоси 6D060100 – Математика (6D060102 – Таҳлили ҳақиқӣ, комплексӣ ва функционалӣ)

Вожаҳои калидӣ: нобаробарии Чексон – Стечкин, модули бифосилагии умумикардашуда, наздиккунии муштараки бехтарин, бисёрраъзогиҳои тригонометрӣ, n -қутрҳо.

Мақсади кор. Ҳадафи асосии кори диссертатсионӣ дар ҳалли масъалаҳои экстремалӣ ифода меёбад, ки ба ёфтани қиматҳои аниқ сарҳадҳои болоии наздиккунии муштараки бехтарини функцияҳои даврӣ ва ҳосилаҳои фосилавии онҳо тавассути бисёрраъзогиҳои тригонометрӣ дар метрикаи фазои гилбертии $L_2[0, 2\pi]$ вобаста мебошанд.

Усулҳои тадқиқот. Тадқиқоти пешниҳодшуда ба омӯзиши масъалаҳои гуногуни экстремалӣ вобаста аст, ки дар доираи назарияи наздиккунии муштараки бехтарини функцияҳои дифференсиронидашавандаи 2π -даврӣ ва ҳосилаҳои пайдарпайи онҳо тавассути бисёрраъзогиҳои тригонометрӣ баррасӣ мегарданд. Дар рисолаи илмӣ равишҳо ва усулҳои муосири ҳалли масъалаҳои экстремалӣ дар фазоҳои банаҳӣ ба таври васеъ татбиқ шудаанд.

Навоварии илмӣ тадқиқот. Ҳамаи натиҷаҳои дар кори диссертатсионӣ овардашуда, нав мебошанд. Натиҷаҳои асосии гирифташуда чунинанд:

- қимати аниқ сарҳадҳои болоии наздиккунии муштараки бехтарин ва ҳосилаҳои пайдарпайи он тавассути бисёрраъзогиҳо ва ҳосилаҳои мутаносиби онҳо барои баъзе синфи функцияҳои даврӣ, ки ба фазои $L_2[0, 2\pi]$ тааллуқ доранд, ёфта шуданд;
- нобаробариҳои нави аниқ байни бузургиҳои наздиккунии миёнаквадратии бехтарини функцияҳои дифференсиронидашаванда ва интегралҳо, ки қимати модули бифосилагии миёнакардашудаи тартиби m -умро аз қимати сарҳади дар фазои гилбертии $L_2[0, 2\pi]$ дар бар мегиранд, ёфта шуданд;
- қимати аниқ n -қутрҳои бернштейнӣ, колмогоровӣ, гелфандӣ, хаттӣ ва проексионии синфҳои функцияҳои ёфта шуданд, ки ба воситаи модули бифосилагии тартиби олии дода мешаванд.

Арзишҳои назариявӣ ва амалӣ. Кори диссертатсионӣ хусусияти фундаменталии назариявӣ дорад. Натиҷаҳо ва усулҳо, ки дар диссертатсия пешниҳод шудаанд, метавонанд барои таҳлили масъалаҳои экстремалӣ дар назарияи наздиккунии функцияҳои якчандтағйирёбанда истифода шаванд, ки ҳам ба соҳаҳои маҳдуд ва ҳам ба тамоми ҳамвории дученака татбиқшаванда мебошанд.

АННОТАЦИЯ

диссертации Шамсиддинзода Саъди Абдукосим на тему «Точные константы в неравенстве типа Джексона–Стечкина для наилучшего совместного приближения функций и их последовательных производных в пространстве L_2 », представленной на соискание учёной степени доктор философии (PhD) – доктор по специальности 6D060100 – Математика (6D060102 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ)

Ключевые слова: *неравенства Джексона – Стечкина, обобщённый модуль непрерывности, наилучшее совместное приближение, тригонометрический полином, n -поперечники.*

Цель работы. Настоящее исследование посвящено изучению экстремальных задач, возникающих в рамках теории наилучшего совместного приближения дифференцируемых 2π -периодических функций и их последовательных производных с помощью тригонометрических многочленов. В работе применяются современные методы и подходы к решению экстремальных задач в банаховых пространствах, что позволяет получить новые результаты и расширить возможности практического применения теории аппроксимации.

Методы исследования. Здесь рассматриваются различные экстремальные задачи, рассматриваемых в рамках теории наилучшего совместного приближения дифференцируемых 2π -периодических функций и их последовательных производных с помощью тригонометрических многочленов. В диссертации современные подходы и методы решения экстремальных задач в банаховых пространствах применяются широко.

Научная новизна. Все полученные в диссертационной работе результаты являются новыми. Получены следующие основные результаты:

- найдены точные значения верхних границ наилучшего совместного приближения и его последовательных производных с помощью многочленов и соответствующих им производных для некоторых классов периодических функций, принадлежащих пространству $L_2[0, 2\pi]$;
- найдены новые точные неравенства между величинами наилучшего среднеквадратичного приближения дифференцируемых функций и интегралами, содержащими усреднёнными значениями модулей непрерывности m -го порядка и значения верхних граней в гильбертовом пространстве $L_2[0, 2\pi]$;
- найдены точные значения бернштейновских, колмогоровских, гельфандовских, линейных и проекционных n -поперечников классов функций, задаваемых модулями непрерывности высшего порядка.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Результаты и методы, представленные в диссертации, могут быть использованы для анализа экстремальных задач в теории приближения функций нескольких переменных, применимых как к областям с границами, так и ко всей двумерной поверхности.

ABSTRACT

of the dissertation by Shamsiddinzoda Saadi Abduqosim entitled «Exact constants in Jackson–Stechkin type inequalities for the best simultaneous approximation of functions and their successive derivatives in the L_2 space» submitted for the degree of Doctor of Philosophy (PhD) in the specialty 6D060100 – Mathematics (6D060102 — Real, Complex and Functional Analysis)

Key words: *Jackson – Stechkin inequalities, generalized modulus of continuity, best simultaneous approximation, trigonometric polynomial, n -widths.*

The purpose of research. The present study is devoted to the investigation of extremal problems arising within the theory of best simultaneous approximation of differentiable 2π -periodic functions and their successive derivatives by means of trigonometric polynomials. Modern methods and approaches to solving extremal problems in Banach spaces are employed, which makes it possible to obtain new results and to extend the scope of practical applications of approximation theory.

Research methods. Various extremal problems arising within the theory of best simultaneous approximation of differentiable 2π -periodic functions and their successive derivatives by trigonometric polynomials are considered here. In the dissertation, modern approaches and methods for solving extremal problems in Banach spaces are widely applied.

Scientific novelty. All the results obtained in the thesis are new. The following results were obtained:

- Exact values of the upper bounds for the best simultaneous approximation and its successive derivatives by polynomials, as well as for the corresponding derivatives, have been obtained for certain classes of periodic functions belonging to the $L_2[0, 2\pi]$ spaces;
- new exact inequalities have been established between the quantities of the best mean-square approximation of differentiable functions and integrals involving the averaged values of m -th order moduli of continuity, as well as the values of the upper bounds in the Hilbert space $L_2[0, 2\pi]$;
- exact values of the Bernstein, Kolmogorov, Gelfand, linear, and projection n -widths of classes of functions defined by higher-order moduli of continuity have been obtained.

Theoretical and practical value. The work is of a theoretical nature. The results and methods presented in the dissertation can be applied to the analysis of extremal problems in the theory of approximation of multivariable functions, applicable both to domains with boundaries and to the entire two-dimensional surface.