ҶУМҲУРИИ ТОҶИКИСТОН
ДОНИШГОҲИ ДАВЛАТИИ ОМӮЗГОРИИ ТОҶИКИСТОН
БА НОМИ САДРИДДИН АЙНӢ

УДК 517.5

Бо ҳуқуқи дастхат

Шамсиддинзода Саъдӣ Абдуқосим

ДОИМИҲОИ АНИҚ ДАР НОБАРОБАРИИ НАМУДИ ҶЕКСОН–СТЕЧКИН БАРОИ НАЗДИККУНИИ МУШТАРАКИ БЕҲТАРИНИ ФУНКСИЯҲО ВА ҲОСИЛАҲОИ ПАЙДАРПАЙИ ОНҲО ДАР ФАЗОИ L_2

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т И

диссертатсия барои дарёфти дараҷаи илмии
доктори фалсафа (PhD) – доктор аз рӯи ихтисоси 6D060100 – Математика
(6D060102 – Таҳлили ҳақиқӣ, комплексӣ ва функсионалӣ)

Душанбе — 2026

Диссертатсия дар кафедраи анализи математикии Донишгоҳи давлатии омӯзгории Тоҷикистон ба номи Садриддин Айнӣ иҷро шудааст

РОҲБАРИ ИЛМӢ: **Юсупов Гулзорхон Амиршоевич** – доктори илмҳои физикаю математика, дотсент, мудири кафедраи анализи математикии Донишгоҳи давлатии омӯзгории Тоҷикистон ба номи С. Айнӣ

МУҚАРРИЗОНИ РАСМӢ: **Исхоқов Сулаймон Абунасрович,** узви вобастаи Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон, доктори илмҳои физикаю математика, профессор, мудири шуъбаи назарияи функсияҳо ва таҳлили функсионалии Институти математикаи ба номи А.Ҷӯраев;

Палавонов Қурбоназар Қурбонбекович, номзади илмҳои физикаю математика, мудири кафедраи риёзиёт дар иқтисодиёти Донишгоҳи байналмилалии сайёҳӣ ва соҳибкории Тоҷикистон

МУАССИСАИ ПЕШБАР: Муассисаи давлатии таълимии Донишгоҳи давлатии Бохтар ба номи Носири Хусрав

Ҳимоя *29-уми апрели соли 2026 соати 14:00* дар ҷаласаи Шурои диссертатсионии 6D.КОА-011 дар назди Донишгоҳи миллии Тоҷикистон аз рӯи нишонии: 734027, ш.Душанбе, кӯчаи Буни-Ҳисорак, бинои 17, синфхонаи 203 баргузор мегардад.

E-mail: alisher_gaforov@mail.ru; рақами телефони котиби илмӣ: (+992) 900-76-66-03.

Бо диссертатсия дар китобхонаи маркази Донишгоҳи миллии Тоҷикистон ва тавассути сомонаи http://www.tnu.tj шинос шудан мумкин аст.

Автореферат «_____» «______________» соли 2026 аз рӯи феҳристи пешниҳодгардида ирсол карда шудааст.

Котиби илмии Шурои диссертатсионии 6D.КОА-011, номзади илмҳои физикаю математика **Ғафоров А.Б.**

ТАВСИФИ УМУМИИ КОР

Муҳиммияти мавзӯи тадқиқот. Назарияи наздиккунии функсияҳо яке аз соҳаҳои босуръат рушдёбандаи таҳлили математикӣ ба шумор рафта, дорои татбиқҳои муҳим дар соҳаҳои гуногуни математикаи амалӣ мебошад. Дар ин назария масъалаҳои экстремалии наздиккуни беҳтарини функсияҳои дифференсиронидашавандаи 2π-даврӣ ба воситаи бисёраъзогиҳои тригонометрӣ дар фазоҳои гуногуни банахӣ мавқеи махсусро ишғол мекунанд.

Дар замони ҳозира, воридшавии афкор ва усулҳои назарияи наздиккунии функсияҳо ба соҳаҳои гуногуни илми математика, махсусан дар самтҳои амалӣ, бисёр мушоҳида мешавад. Асоси назарияи наздиккунӣ, ки дар асарҳои машҳури классикии Чебишёв, Вейерштрасс, Ҷексон ва Бернштейн оид ба наздиккунии функсияҳо тавассути бисёраъзогиҳо гузошта шудааст, бознигарӣ гардида, дар заминаи васеътар ва мустаҳкамтар инкишоф меёбад. Маълум аст, ки масъалаҳои аппроксиматсионӣ, ки дар синфҳои функсияҳо гузошта мешаванд, дар бисёр ҳолатҳо масъалаҳои экстремалие мебошанд, ки дар онҳо ёфтани сарҳади аниқи болоии саҳви наздиккунӣ барои усули додашуда дар синфи функсияҳои қайдкардашуда талаб карда мешавад, ё ин ки барои ин синф методҳои беҳтарини наздиккунӣ нишон дода шавад.

Ҳалли масъалаҳои экстремалиро барои синфҳои функсияҳои муайян баррасӣ намуда, дар диссертатсияи мазкур бо ҳолати функсияҳои даврӣ маҳдуд мешавем, яъне дар рисолаи илмӣ як қатор масъалаҳои экстремалии назарияи наздиккунии функсияҳои даврӣ ба воситаи бисёраъзогиҳои тригонометрӣ дар фазои гилбертии L_2 таҳлил карда мешаванд. Натиҷаҳои ниҳоӣ оид ба сарҳади болоии тамоили бисёраъзогиҳои тригонометрӣ барои синфҳои гуногуни функсияҳои даврӣ баён карда мешаванд.

Дар боби аввал маводи таҳиявӣ ҷамъоварӣ гардида, масъалаҳои экстремалии ҳанӯз ҳалнашуда дар ҳар як ҳолати мушаххас ба таври муфассал таҳия ва таҳлил карда мешаванд. Аслан, ин масъалаҳо барои наздиккунии муштараки функсияҳо ва ҳосилаҳои мобайнии онҳо бахшида шудаанд. Сипас, масъалаҳои таҳияшуда дар бобҳои минбаъдаи диссертатсия барои синфҳои гуногуни функсияҳои даврӣ ҳал карда мешаванд. Натиҷаҳои бадастомада ниҳоӣ мебошанд ва дар асл ҳеҷ чизро ба онҳо илова ё аз онҳо кам кардан мумкин нест. Маҳз ҳамин омилҳо аҳамият ва мақсаднокии мавзуи интихобшудаи ин рисолаи илмиро муайян менамоянд.

Дараҷаи кор карда баромадани мавзӯи тадқиқот. Дар байни самтҳои муосири таҳлили математикӣ, назарияи аппроксиматсияи функсияҳо мавқеи хосро ишғол мекунад, зеро яке аз соҳаҳои босуръат инкишофёбандаи он ба шумор рафта, дар математикаи амалӣ татбиқҳои васеъ пайдо намудааст. Дар доираи ин назария масъалаҳои экстремалии наздиккунии муштараки беҳтарини функсияҳои 2π-даврӣ бо бисёраъзогиҳои тригонометрӣ дар фазоҳои гуногуни банахӣ аҳамияти назаррас доранд. Масъалаи наздиккунии муштараки беҳтарини функсияҳои дифференсиронидашавандаи даврӣ ба воситаи бисёраъзогиҳои тригонометрӣ дар метрикаи мунтазам бори аввал соли 1960 аз ҷониби А.Л. Гаркави [7] тадқиқ шудааст. Худи ҳамон сол А.Ф. Тиман [19] масъалаи гузошташударо барои ҳолати наздиккунии беҳтарини функсияҳои дар тамоми тири ададӣ додашуда тавассути функсияҳои бутуни экспоненсиалӣ мавриди омӯзиш қарор дода буд.

Масъалаи наздиккунии муштараки беҳтарини функсияҳо ва ҳосилаҳои онҳо, ки дар шакли умумитар ҳам барои бисёраъзогиҳои алгебравӣ ва ҳам барои бисёраъзогиҳои тригонометрӣ мавриди баррасӣ қарор гирифтааст, дар монографияи В.Н. Малозёмов [12] ба таври муфассал омӯхта шуда, дар он як қатор натиҷаҳои классикии назарияи наздиккунии функсияҳо барои ҳолати наздиккунии муштараки беҳтарини функсияҳо ва ҳосилаҳои онҳо умумӣ гардонида шудаанд. Барои баъзе функсияҳои даврии дифференсиронидашаванда дар фазои L_2 бо вазни миёнакардашудаи модули бефосилагии тартиби олӣ, ки аз боло бо мажорантаи додашуда маҳдуд мебошанд, масъалаи гузоштташуда дар корҳои С.Б. Вакарчук ва В.И. Забутная [4], М.Ш. Шабозов ва А.А. Шабозова [25] ва инчунин М.Ш. Шабозов [26] дида баромада шудааст.

Дар тадқиқоти мазкур, корҳои муаллифони дар боло зикршударо идома дода, масъалаи экстремалии умумитар мавриди баррасӣ қарор дода мешавад, яъне талаб карда мешавад, ки сарҳади аниқи болоии наздиккунии муштараки беҳтарини функсияҳо ва ҳосилаҳои пай дар пайи онҳо тавассути бисёраъзогиҳои мувофиқ ёфта шавад.

Дар рисолаи мазкур наздиккунии муштараки беҳтарини функсияҳо ба воситаи бисёраъзогиҳои тригонометрӣ пурра ҳал карда шудааст. Қимати аниқи сарҳади болоии наздиккунии муштараки беҳтарин барои баъзе синфи функсияҳо, ки ба фазои гилбертии $L_2[0, 2\pi]$ тааллуқ доранд, ҳисоб карда шудааст.

Робитаи кор бо барномаҳои (лоиҳаҳо) ва мавзӯҳои илмӣ. Кори диссертатсионӣ дар доираи татбиқи дурнамои нақшаи илмӣ-тадқиқотии кафедраи анализи математикии Донишгоҳи давлатии омӯзгории Тоҷикистон ба номи С. Айнӣ барои солҳои 2021-2025 аз рӯи мавзӯи «Назарияи наздиккунии функсияҳои дифференсиронидашавандаи даврӣ» бахшида ба «Нақшаи чорабиниҳо барои солҳои 2020-2025 оид ба амалигардонии «Бистсолаи омӯзиш ва рушди фанҳои табиатшиносӣ, дақиқ ва риёзӣ дар соҳаи илму маориф» эълон намудани солҳои 2020-2040» (Банди 38) иҷро карда шудааст.

ТАВСИФИ УМУМИИ ТАДҚИҚОТ

Мақсади тадқиқот. Ҳадафи асосии кори диссертатсионӣ дар ҳалли масъалаҳои экстремалӣ ифода меёбад, ки ба ёфтани қиматҳои аниқи сарҳадҳои болоии наздиккунии муштараки беҳтарини функсияҳои даврӣ ва ҳосилаҳои фосилавии онҳо тавассути бисёраъзогиҳои тригонометрӣ дар метрикаи фазои $L_2[0, 2\pi]$ вобаста мебошанд.

Масъалаҳои тадқиқот. Дар мувофиқат бо ҳадафи гузошташуда масъалаҳои зерин ҷудо карда мешаванд:

- ёфтани қимати аниқи сарҳадҳои болоии наздиккунии муштараки беҳтарин ва ҳосилаҳои пайдарпайи он тавассути бисёраъзогиҳо ва ҳосилаҳои мутаносиби онҳо барои баъзе синфи функсияҳои даврӣ, ки ба фазои $L_2[0, 2\pi]$ тааллуқ доранд;

- ёфтани нобаробариҳои нави аниқ байни бузургиҳои наздиккунии миёнаквадратии беҳтарини функсияҳои дифференсиронидашаванда ва интегралҳое, ки қимати модули бефосилагии миёнакардашудаи тартиби m-умро аз қимати сарҳадӣ дар фазои гилбертии $L_2[0, 2\pi]$ дар бар мегиранд;
- ёфтани қимати аниқи n-қутрҳои бернштейнӣ, колмогоровӣ, гелфандӣ, хаттӣ ва проексионии синфҳои функсияҳое, ки ба воситаи модули бефосилагии тартиби олӣ дода мешаванд.

Объекти тадқиқот. Объекти асосии тадқиқотро масъалаҳои гуногуни экстремалӣ ташкил медиҳанд, ки бо наздиккунии муштараки беҳтарини функсияҳо ва ҳосилаҳои онҳо тавассути бисёраъзогиҳои тригонометрӣ дар фазои $L_2[0, 2\pi]$ вобаста мебошанд.

Предмети тадқиқот. Мавзӯи тадқиқот аз муайянсозии нобаробариҳои аниқи намуди Ҷексон–Стечкин, ки наздиккунии муштараки беҳтарини функсияҳо ва ҳосилаҳои фосилавии онҳоро бо модулҳои бефосилагии умумикардашудаи тартиби олӣ $\Omega_m(f, t)$ – ро дар метрикаи фазои $L_2[0, 2\pi]$ алоқаманд менамоянд, иборат мебошад.

Навгониҳои илмии тадқиқот. Дар диссертатсия натиҷаҳои асосии зерин ба даст оварда шудаанд:

- қимати аниқи сарҳадҳои болоии наздиккунии муштараки беҳтарин ва ҳосилаҳои пайдарпайи он тавассути бисёраъзогиҳо ва ҳосилаҳои мутаносиби онҳо барои баъзе синфи функсияҳои даврӣ, ки ба фазои $L_2[0, 2\pi]$ тааллуқ доранд, ёфта шуданд;
- нобаробариҳои нави аниқ байни бузургиҳои наздиккунии миёнаквадратии беҳтарини функсияҳои дифференсиронидашаванда ва интегралҳое, ки қимати модули бефосилагии миёнакардашудаи тартиби m-умро аз қимати сарҳадӣ дар фазои гилбертии $L_2[0, 2\pi]$ дар бар мегиранд, ёфта шуданд;
- қимати аниқи n-қутрҳои бернштейнӣ, колмогоровӣ, гелфандӣ, хаттӣ ва проексионии синфҳои функсияҳое ёфта шуданд, ки ба воситаи модули

бефосилагии тартиби олӣ дода мешаванд.

Арзишҳои назариявӣ ва илмию амалӣ. Кори диссертатсионии мазкур хусусияти фундаменталии назариявӣ дорад. Натиҷаҳо ва усулҳое, ки дар диссертатсия пешниҳод шудаанд, метавонанд барои таҳлили масъалаҳои экстремалӣ дар назарияи наздиккунии функсияҳои якчандтағйирёбанда истифода шаванд, ки ҳам ба соҳаҳои маҳдуд ва ҳам ба тамоми ҳамвории дученака татбиқшаванда мебошанд.

Мӯҳтавои ҳимояшавандаи диссертатсия:

- теоремаҳое, ки қиматҳои аниқи сарҳадҳои болоии наздиккуниҳои муштараки беҳтарини миёнаквадратӣ бо бисёраъзогиҳо барои синфҳои муайяни функсияҳои дифференсиронидашавандаи даврӣ, ки тавассути модулҳои бефосилагии умумикардашуда тавсиф шудаанд, муайян мекунанд;
- теоремаҳо оид ба нобаробариҳои аниқи намуди Ҷексон–Стечкин, ки наздиккунии муштараки беҳтаринро тавассути $\Omega_m(f,t)$ — модули бефосилагии умумикардашуда тавсиф менамоянд;
- теоремаҳое, ки ба муайян кардани қиматҳои аниқи характеристикаҳои экстремалии наздиккунии муштараки беҳтарини функсияҳои даврӣ дар $L_2[0,2\pi]$ вобаста ба хосиятҳои дифференсиалии функсияи вазнӣ бахшида шудаанд;
- теоремаҳо оид ба қимати аниқи n-қутрҳои бернштейнӣ, колмогоровӣ, гелфандӣ, хаттӣ ва проексионии синфҳои $W^{(r)}_{m,p}(\Phi)$, $W^{(r)}(\Phi,h)$ ва $W^{(r)}_1(\Phi,h)$ дар фазои L_2.

Дараҷаи эътимоднокии натиҷаҳо. Эътимоднокии натиҷаҳои илмии кори диссертатсионӣ бо исботи дақиқи математикии ҳамаи теоремаҳои дар диссертатсия овардашуда таъмин карда мешавад ва ҳамзамон бо тадқиқотҳои муаллифони дигар тасдиқ карда мешавад.

Мутобиқатии рисола ба шиносномаи ихтисоси илмӣ (формула ва соҳаи тадқиқот). Кори диссертатсионӣ аз руйи ихтисоси 6D060102 –

Таҳлили ҳақиқӣ, комплексӣ ва функсионалӣ иҷро карда шудааст ва қисмате аз таҳлили математикӣ мебошад. Мавзуи тадқиқот ба соҳаи назарияи наздиккунии функсияҳо тааллуқ дошта, натиҷаҳои бадастомада ба самтҳои зерин мувофиқ мебошанд:

1) Назарияи фазоҳои функсионалӣ ва хусусиятҳои сохтории онҳо;
2) Назарияи наздиккунии функсияҳо ва усулҳои наздиккунии полиномиалӣ ва қаторӣ;
3) Тадқиқи хосиятҳои сохтории фазоҳои функсионалӣ, ки дар онҳо масъалаҳои наздиккунии функсияҳо баррасӣ мегарданд.

Самтҳои зикршуда ба бахши «Назарияи наздиккунии функсияҳо» тааллуқ доранд, ки дар банди III, параграфи 3-юми шиносномаи ихтисоси илмӣ зикр шудааст.

Саҳми шахсии довталаби дараҷаи илмӣ. Масъалаҳои тадқиқот ва интихоби усули ҳалли онҳо бо роҳнамоии роҳбари илмӣ муайян шудаанд. Ҳамзамон машваратҳои илмии зарурӣ низ пешниҳод гардидаанд. Натиҷаҳои асосие, ки дар қисмати «Навгониҳои илмии тадқиқот» оварда шудаанд, самараноки заҳмати шахсии муаллиф маҳсуб меёбанд.

Тасвиб ва амалисозии натиҷаҳои диссертатсия. Натиҷаҳои асосии кори диссертатсионӣ дар семинарҳо ва конференсияҳои зерин муҳокима ва баррасӣ гардиданд:

- семинарҳои кафедраи таҳлили функсионалӣ ва муодилаҳои дифференсиалии Донишгоҳи миллии Тоҷикистон таҳти роҳбарии академики АМИТ, профессор М.Ш. Шабозов (Душанбе, солҳои 2020–2026 гг.);
- семинарҳои кафедраи анализи математикии Донишгоҳи давлатии омӯзгории Тоҷикистон ба номи Садриддин Айнӣ таҳти роҳбарии доктори илмҳои физикаю математика, дотсент Г.А. Юсупов (Душанбе, солҳои 2022–2026 гг.);
- конференсияи байналмилалии «Масъалаҳои муосири таҳлили функсионалӣ ва муодилаҳои дифференсиалӣ», бахшида ба 70-солагии академики

Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон, доктори илмҳои физикаю математика, профессор К.Х. Бойматов (Душанбе, 25–26 декабри соли 2020);

- конференсияи байналмилалии «Масъалаҳои муосири назарияи ададҳо ва таҳлили математикӣ», бахшида ба 80-солагии доктори илмҳои физикаю математика, профессор Додоҷон Исмоилов (Душанбе, 29–30 апрели соли 2022);
- конференсияи байналмилалии «Масъалаҳои муосири таҳлили математикӣ ва назарияи функсияҳо», бахшида ба 70-солагии академики Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон, доктори илмҳои физикаю математика, профессор М.Ш. Шабозов (Душанбе, 24–25 июни соли 2022);
- конференсияи байналмилалии «Саҳми математика дар рушди фанҳои табиатшиносӣ, дақиқ ва риёзӣ», бахшида ба эълон гардидани «Бистсолаи омӯзиш ва рушди фанҳои табиатшиносӣ, дақиқ ва риёзӣ дар соҳаи маориф (солҳои 2020-2040)» (Душанбе, 30–31 майи соли 2023);
- конференсияи байналмилалии «Масъалаҳои муосири математика ва усули таълими онҳо», бахшида ба 35-солагии Истиқлолияти давлатии Ҷумҳурии Тоҷикистон» ва 70-солагии доктори илмҳои физикаю математика К. Тухлиев (Хуҷанд, 21–22 июни соли 2024);
- конференсияи байналмилалии «Масъалаҳои муосири математика ва татбиқи онҳо», бахшида ба 75-солагии доктори илмҳои физикаю математика, профессор К.Х. Бойматов ва 75-солагии мудири шуъбаи муодилаҳои дифференсиалии Институти математикаи ба номи А. Ҷӯраеви АМИТ, доктори илмҳои физикаю математика, профессор Г. Ҷангибеков (Душанбе, 30–31 майи соли 2025).

Интишорот аз руйи мавзуи рисола. Натиҷаҳои тадқиқотии муаллифи рисолаи илмӣ оид ба мавзуи кори диссертатсионӣ дар 8 мақолаҳои илмӣ ба табъ расидаанд, ки аз онҳо 2 мақола дар нашрияҳое, ки ба руйихати амалкунандаи Комиссияи олии аттестатсионии Ҷумҳурии Тоҷикистон дохиланд ва 6-тои дигар дар маҷмуаҳои конференсияҳои байналмилалӣ ва ҷумҳуриявӣ нашр гардидаанд.

Сохтор ва ҳаҷми диссертатсия. Диссертатсия аз муқаддима, се боб, феҳристи адабиёти истифодашудаи иборат аз 135 номгӯй ва ҳамагӣ 152 саҳифаи компютериро дар бар гирифта, дар барномаи замонавии LaTeX ҳуруфчинӣ шудааст. Барои осонӣ дар диссертатсия рақамгузории умумии теоремаҳо, леммаҳо, натиҷаҳо ва формулаҳо истифода шудааст. Онҳо рақамгузории секарата доранд, ки рақами якум бо рақами боб, рақами дуюм бо рақами параграф ва рақами сеюм бо рақами тартибии теоремаҳо, леммаҳо, натиҷаҳо ё формулаҳои ҳамин параграф мутобиқат мекунанд.

ҚИСМИ АСОСИИ ТАДҚИҚОТ

Мавод ва усулҳои тадқиқот. Тадқиқоти пешниҳодшуда ба омӯзиши масъалаҳои гуногуни экстремалӣ вобаста аст, ки дар доираи назарияи наздиккунии муштараки беҳтарини функсияҳои дифференсиронидашавандаи 2π-даврӣ ва ҳосилаҳои пайдарпайи онҳо тавассути бисёраъзогиҳои тригонометрӣ баррасӣ мегарданд. Дар рисолаи илмӣ равишҳо ва усулҳои муосири ҳалли масъалаҳои экстремалӣ дар фазоҳои банахӣ ба таври васеъ татбиқ шудаанд.

Натиҷаҳои тадқиқот. Мазмуни мухтасари кори диссертатсиониро баён мекунем.

Дар боби якуми диссертатсия баъзе натиҷаҳо оид ба наздиккунии миёнаквадратии беҳтарини синфи функсияҳои дифференсиронидашавандаи даврии $f(x)$ ба воситаи бисёраъзогиҳои тригонометрӣ дар фазои $L_2 = L_2[0, 2\pi]$ оварда мешаванд. Дар тули даҳсолаҳои зиёд ҳаллу фасли масъалаҳои экстремалӣ ва татбиқи онҳо таваҷҷуҳи математикони зиёдро ба худ ҷалб намудааст, зеро чунин масъалаҳо дар ҳалли масъалаҳои гуногуни математикаи амалӣ, ки мазмуни оптимизатсиониро доранд, васеъ истифода мешаванд. Дар масъалаҳои экстремалӣ, одатан, лозим меояд, ки сарҳади аниқи болоии саҳви наздикшавӣ бо усули додашуда дар синфи функсияҳои муайян ёфта шавад, ё ин ки барои ин синф воситаи беҳтарини наздикшавӣ нишон дода шавад.

Масъалаҳои наздиккунии беҳтарини функсияҳои даврӣ дар фазои L_2 дар корҳои Н.И. Черных [28, 29], Л.В. Тайков [16–18], С.Б. Вакарчук [2, 4–6], А.А. Лигун [10, 11], В.В. Шалаев [27], М.Ш. Шабозов [21–26] ва дигарон тадқиқ карда шудаанд.

Солҳои охир барои ҳалли масъалаҳои наздиккунии беҳтарини полиномиалии функсияҳо дар фазои L_2 намудҳои гуногуни модули бефосилагӣ истифода бурда мешаванд (масалан, нигаред ба корҳои [4–6, 13] ва адабиёти дар онҳо овардашуда).

Яке аз масъалаҳои марказии экстремалии назарияи аппроксиматсияи функсияҳо — ин масъалаи ёфтани доимиҳои аниқ дар нобаробарии намуди Ҷексон–Стечкин мебошад. Нобаробарии намуди Ҷексон–Стечкин дар ҳар гуна фазои нормиронидашудаи X нобаробарии намуди

$$E_{n-1}(f)_X \leq \chi\, n^{-r}\omega_m(f^{(r)}, \tau/n)_X, \quad r \in \mathbb{Z}_+,\ \tau > 0$$

– ро меноманд, ки дар он саҳви наздиккунии функсияи инфиродии f ба воситаи характеристикаи суфтагии додашудаи ω_m-и худи функсияи аппроксиматсияшаванда ё тавассути баъзе ҳосилаҳои он $f^{(r)} \in X$ баҳогузорӣ карда мешавад. Ошкор аст, ки доимии беҳтарин χ, ба таври умум, метавонад, ҳам аз фазои X ва ҳам аз параметрҳои m, n, r ва τ вобаста бошад.

Аввалин доимиҳои аниқ дар нобаробарии Ҷексон аз ҷониби Н.П. Корнейчук [8] барои фазои $C(0, 2\pi]$ соли 1962 ва аз ҷониби Н.И. Черных [28] барои фазои $L_2(0, 2\pi]$ соли 1967 ба даст оварда шудаанд. Баъд аз натиҷаҳои Н.П. Корнейчук ва Н.И. Черных таваҷҷӯҳ ба ёфтани доимиҳои аниқ дар нобаробарии намуди Ҷексон–Стечкин ва дар дигар фазоҳои банахӣ ба миён омад. Соли 1979 Н.И. Черных [1] қимати минималии аргументро дар модули бефосилагӣ муайян кард, ки барояш доимии аниқ дар нобаробарии Ҷексон–Стечкин дар фазои $L_p(-\pi, \pi]$ ба ҳадди глобалии минимум мерасад. Ёфтани чунин аргументҳо, ки онҳоро *аргументҳои оптималӣ* ё *нуқтаҳои Черных* меноманд, ба масъалаҳои муҳими экстремалӣ дар назарияи наздиккунии функсияҳо табдил ёфтанд.

Ба воситаи $\mathbb{N}$ – маҷмуи ададҳои натуралӣ; $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$; $\mathbb{R}_+$ – маҷмуи ададҳои ҳақиқии мусбат; $L_2 := L_2[0, 2\pi]$ – фазои функсияҳои ҳақиқии 2π-даврии бо квадрат дар маънои Лебег интегронидашавандаро бо нормаи маҳдуди

$$\|f\| := \|f\|_{L_2} = \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}$$

ишора мекунем. Маҷмуи ҳамаи бисёраъзогиҳои тригонометрии

$$T_{n-1}(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}(\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$$

тартиби $n-1$–ро ба воситаи $\mathcal{T}_{2n-1}$ ишора менамоем. Агар $S_{n-1}(f, x)$ – суммаи хусусии тартиби $n-1$–и қатори Фурйеи функсияи $f(x)$:

$$f(x) \sim \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx\Big)$$

бошад, он гоҳ аз хосияти суммаҳои хусусии қатори Фурйеи функсия бараъло маълум аст, ки дар он гуфта мешавад, ки наздиккунии беҳтарини функсияи $f(x)$ дар метрикаи фазои L_2 аз руи бисёраъзогиҳои тригонометрии тартиби $T_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}$ суммаи хусусии қатори Фурйе $S_{n-1}(f, x)$ фароҳам меоварад, яъне

$$E_{n-1}(f) := E_{n-1}(f, \mathcal{T}_{2n-1})_{L_2} = \inf\Big\{\|f - T_{n-1}\| : T_{n-1}(x) \in \mathcal{T}_{2n-1}\Big\} =$$

$$= \|f - S_{n-1}(f)\| = \left\{\sum_{k=n}^{\infty}(a_k^2(f) + b_k^2(f))\right\}^{1/2} = \left\{\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2(f)\right\}^{1/2},$$

ки дар ин ҷо барои мухтасарӣ $\rho_k^2(f) = a_k^2(f) + b_k^2(f),\ k \geq n$ гузошта шудааст ва $a_k(f)$, $b_k(f)$ – косинус- ва синус-коэффисиентҳои Фурйеи функсияи $f \in L_2$ мебошанд.

Бо $L_2^{(r)}$ $(r \in \mathbb{Z}_+,\ L_2^{(0)} = L_2)$ маҷмуи функсияҳои $f \in L_2$, ки барояшон ҳосилаи тартиби $(r-1)$-ум, яъне $f^{(r-1)}$ мутлақ бефосила буда, ҳосилаҳои тартиби r-ум, яъне $f^{(r)} \in L_2$ мебошанд, ишора мекунем.

Модули бефосилагии тартиби m-уми дилхоҳ функсияи 2π-даврии ченшаванда ва бо квадрат суммиронидашавандаи $f(x) \in L_2$ – ро бо баробарии

$$\omega_m(f,t) = \sup\Big\{ \big\|\Delta_h^m f(\cdot)\big\| :\ |t| \le h\Big\} \tag{1}$$

муайян мекунем, ки дар ин ҷо

$$\Delta_h^m f(x) = \sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k} f\Big(x + (m-k)h\Big)$$

– фарқияти тартиби m-уми функсияи f дар нуқтаи x бо қадами h мебошад.

Ҳангоми ҳалли баъзе масъалаҳои экстремалӣ дар назарияи наздиккунӣ ба ҷои модули бефосилагии классикии тартиби m-ум барои функсияи $f \in L_2$ баъзан қулайтар аст, характеристикаи суфтагии ба бузургии (1) эквиваленти намуди зерин

$$\Omega_m(f,t)_2 = \left\{ \frac{1}{t^m}\int\limits_0^t \cdots \int\limits_0^t \|\Delta_{\overline{h}}^m f(\cdot)\|^2 dh_1 \cdots dh_m \right\}^{1/2} \tag{2}$$

истифода бурда шавад, ки дар ин ҷо $t > 0$, $\overline{h} := (h_1, \cdots, h_m)$; $\Delta_{\overline{h}}^m = \Delta_{h_1}^1 \circ \cdots \circ \Delta_{h_m}^1$;

$$\Delta_{h_j}^1 f(x) := f(x + h_j) - f(x),\ j = \overline{1,m}.$$

Аз ҳамин сабаб, ҳисоб кардани доимии аниқ

$$\mathbb{K}_{m,n,r}(t) := \sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f \ne \mathrm{const}}} \frac{n^r E_{n-1}(f)}{\Omega_m\big(f^{(r)}, t/n\big)}, \quad 0 < t \le 2\pi$$

дар нобаробарии Ҷексон–Стечкини намуди

$$E_{n-1}(f) \le \mathbb{K}_{m,n,r}(t)\frac{1}{n^r}\,\Omega_m\big(f^{(r)}, t/n\big)$$

низ таваҷҷуҳи муайянро ба худ ҷалб мекунад.

Бояд қайд кард, ки ҳангоми омузиши масъалаҳои муҳими наздиккунӣ дар фазои метрикии L_p $(0 < p < 1)$ характеристикаи суфтагии миёнакардашуда функсияҳои намуди (2) аз ҷониби К.В. Руновский [14] ва Э.А. Стороженко, В.Г. Кротов, П. Освальд [15] мавриди баррасӣ қарор гирифта буд.

Бо мақсади умуми намудани натиҷаи овардашуда дар кори А.А. Лигун [10] М.Ш. Шабозов ва Г.А. Юсупов характеристикаи экстремалии зеринро тадқиқ карда буданд [22]:

$$\chi_{m,n,r,p,s}(\varphi,h) = \sup_{\substack{f\in L_2^{(r)} \\ f\neq\mathrm{const}}} \frac{E_{n-1}(f)_2}{\left(\int\limits_0^h \omega_m^p(f^{(r)},t)_2\,\varphi(t)dt\right)^s}, \tag{3}$$

ки дар ин ҷо $m,n\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, p, s – ададҳои мусбат, $0<h\leq\pi/n$ ва функсияи $\varphi(t)$ ҳамаи шартҳои дар нобаробарии дучандаи А.А. Лигун овардашударо қаноат мекунонад. Дар кори [22] дурустии ифодаи

$$\left\{\mathscr{A}_{n,h,p}^{r,m}(\varphi)\right\}^{-1} \leq \chi_{m,n,r,p,1/p}(\varphi,h) \leq \left\{\inf_{n\leq k<\infty}\mathscr{A}_{k,h,p}^{r,m}(\varphi)\right\}^{-1}$$

нишон дода шудааст, ки дар ин ҷо $0<p\leq 2$; $0<h\leq\pi/n$ ва

$$\mathscr{A}_{k,h,p}^{r,m}(\varphi) := 2^{m/2}\left(k^{rp}\int\limits_0^h(1-\cos kt)^{mp/2}\,\varphi(t)dt\right)^{1/p}.$$

Ба андешаи мо, дар мувофиқа бо ифодаи (3), омӯзиши характеристикаи экстремалии

$$\mathscr{K}_{m,n,r,p,s}(\varphi,h) := \sup_{\substack{f\in L_2^{(r)} \\ f\neq\mathrm{const}}} \frac{E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(f^{(r)},t)_2\,\varphi(t)dt\right)^s} \tag{4}$$

ба худ таваҷҷӯҳи зиёд ҷалб мекунад, ки дар ин ҷо ададҳои $m,n\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $p,s\in\mathbb{R}_+\setminus\{0\}$; $0<h\leq\pi/n$; $\varphi(t)$ — функсияи ғайриманфии ченшавандаи дар порчаи $[0,h]$ суммиронидашванда ва ба нул ғайриэквивалент мебошад.

Дар ҳамаи ҳолатҳои минбаъда ҳангоми ҳисоб кардани қимати сарҳади саҳеҳи болоӣ дар муносибатҳои умумӣ барои ҳамаи функсияҳои $f \in L_2^{(r)}$ фарз карда мешавад, ки $f \neq \mathrm{const}$ мебошад.

Ишораи зеринро дохил мекунем:

$$\operatorname{sinc} t := \begin{cases} \dfrac{\sin t}{t}, & \text{агар } t \neq 0, \\ 1, & \text{агар } t = 0. \end{cases}$$

Теоремаи зерин як навъ умумикардашудаи натиҷаи (3) бо характеристикаи экстремалии (4) ба шумор меравад.

Теоремаи 2.2.1. *Бигузор* $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < p \leq \infty$, $0 < h \leq \pi/n$, φ *— функсияи ғайриманфӣ, ченшаванда ва дар порчаи* $[0, h]$ *суммиронидашавандаи ба нул ғайриэквивалент бошад. Он гоҳ баробарии зерин ҷой дорад:*

$$\mathscr{K}_{m,n,r,p,1/p}(\varphi, h) =$$

$$= \sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(f^{(r)}, t)_2 \, \varphi(t) dt\right)^{1/p}} = \frac{1}{\inf\limits_{n \leq k < \infty} \mathscr{B}_{k,h,p}^{r,m}(\varphi)},$$

ки дар ин ҷо

$$\mathscr{B}_{k,h,p}^{r,m}(\varphi) := 2^{m/2} \left(k^{rp} \int\limits_0^h (1 - \operatorname{sinc} kt)^{mp/2} \, \varphi(t) dt\right)^{1/p}.$$

Аз теоремаи 2.2.1 як қатор натиҷаҳои муҳим ба даст оварда мешаванд, ки дар тадқиқи масъалаҳои экстремалӣ нақши калидӣ доранд.

Натиҷаи 2.3.1. *Бигузор* $0 < h \leq 3\pi/(4n)$ *ва шартҳои теоремаи* 2.2.1 *ҷой дошта бошанд. Он гоҳ баробарии зерин ҷой дорад:*

$$\mathscr{K}_{m,n,r,p,1/p}(\varphi, h) = \left\{\mathscr{B}_{n,h,p}^{r,m}(\varphi)\right\}^{-1}.$$

Натиҷаи 2.3.2. *Бигузор* $0 < \tau \le 3\pi/4$; $m, n \in \mathbb{N}$ *ва*

$$\beta(\tau) := \frac{Si(\tau) - \sin\tau}{\tau - \sin\tau}, \quad \eta(p) := \bigl(1 + mp/2\bigr)^{1/p}$$

бошанд. Агар ҳангоми қимати қайдкардашудаи $0 < p \le 2$ *барои ҳаргуна элементи* $f \in L_2^{(r)}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ *функсияи* $\Omega_m^p(f^{(r)})$ *дар порчаи* $[0, 3\pi/(4n)]$ *барҷаста ба боло бошад, он гоҳ бузургии наздиккунии беҳтарини полиномиалии функсияи* f *нобаробарии зеринро қаноат мекунонад:*

$$E_{n-1}(f) \le \frac{\eta(p)}{n^r}\bigl(2(1 - sinc\,\tau)\bigr)^{-m/2}\Omega_m\bigl(f^{(r)}, \tau\beta(\tau)/n\bigr).$$

Агар функсияи $\Omega_m^p(f^{(r)})$ *барои ҳар як қимати* p *аз порчаи* $[p_*, p^*] \subset (0, 2]$ *барҷаста ба боло дар сегменти* $[0, 3\pi/(4n)]$ *бошад, он гоҳ*

$$E_{n-1}(f) \le \frac{\eta(p^*)}{n^r}\bigl(2(1 - sinc\,\tau)\bigr)^{-m/2}\,\Omega_m\bigl(f^{(r)}, \tau\beta(\tau)/n\bigr)$$

мешавад.

Натиҷаи 2.3.3. *Бигузор* $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < p \le \infty$, $q(t)$ – *функсияи ғайриманфӣ, ченшаванда ва дар порчаи* $[0, a]$ $(0 < a \le \pi)$ *суммиронидашавандаи ба нол ғайриэквивалент бошад. Он гоҳ нобаробарии зерин ҷой дорад:*

$$\{\Phi_{m,r,p}(a, q, 1)\}^{-1/p} \le$$

$$\le \sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{2^{m/2}\, n^r E_{n-1}(f)}{\left\{\int\limits_0^a \Omega_m^p(f^{(r)}, t/n)\, q(t)dt\right\}^{1/p}} \le \left\{\inf_{x \ge 1}\, \Phi_{m,r,p}(a, q, x)\right\}^{-1/p},$$

ки дар ин ҷо

$$\Phi_{m,r,p}(a, q, x) = x^{rp}\int\limits_0^a \bigl(1 - \operatorname{sinc} xt\bigr)^{mp/2} q(t)dt.$$

Дар ин ҳолат, агар функсияи q *чунон бошад, ки барояш*

$$\inf_{x \ge 1}\, \Phi_{m,r,p}(a, q, x) = \Phi_{m,r,p}(a, q, 1)$$

шавад, он гоҳ баробарии

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{2^{m/2}\,n^rE_{n-1}(f)}{\left\{\int\limits_0^a\Omega_m^p(f^{(r)},t/n)\,q(t)dt\right\}^{1/p}}=\{\Phi_{m,r,p}(a,q,1)\}^{-1/p}$$

ҷой дорад.

Натиҷаи 2.3.4. *Бигузор* $m,n\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $0<p\leq\infty$ *ва* $q(t)=t^{rp-1}q_1(t)$ *функсияи дар порчаи* $[0,a]$ $(0<a\leq\pi)$ *ғайриманфӣ, ченшаванда ва суммиронидашаванда буда,* q_1 *— функсияи афзуннашаванда ва ба нол ғайриэквивалент бошад. Он гоҳ баробарии*

$$\inf_{x\geq1}\Phi_{m,r,p}(a,t^{rp-1}q_1(t),x)=\Phi_{m,r,p}(a,t^{rp-1}q_1(t),1)$$

ҷой дошта, формулаи зерин дуруст аст:

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{2^{m/2}\,n^rE_{n-1}(f)}{\left\{\int\limits_0^a\Omega_m^p(f^{(r)},t/n)\,t^{rp-1}q_1(t)dt\right\}^{1/p}}=\Big\{\Phi_{m,r,p}(a,t^{rp-1}q_1(t),1)\Big\}^{-1/p}.$$

Эзоҳ: Қайд кардан зарур аст, ки натиҷаи 2.3.4 ҳангоми $p=2$ дар кори А.А. Лигун [10] исбот шуда буд.

Натиҷаи 2.3.5. *Бигузор* $r\in\mathbb{N}$, $1/r\leq p\leq\infty$, $0\leq\gamma\leq rp-1$, $0<\beta\leq\pi$, $\varphi_*(t)=\sin^\gamma\big(\beta t/h\big)$ *ва* $0<t\leq h\leq\pi/n$ *бошанд. Он гоҳ барои ҳаргуна* $m,n\in\mathbb{N}$ *баробарии зерин ҷой дорад:*

$$\mathscr{K}_{m,n,r,p,1/p}(\varphi_*,h)=2^{-m/2}n^{-r}\left\{\int\limits_0^h\big(1-\operatorname{sinc}nt\big)^{mp/2}\sin^\gamma\big(\beta t/h\big)dt\right\}^{-1/p}.$$

Хуб маълум аст [9, с. 127], ки барои ихтиёри функсияи $f\in L_2^{(r)}$ ҳосилаҳои мобайнии он $f^{(s)}$ $(s=1,2,3,\ldots,r-1;\ r\geq2, r\in\mathbb{N}, f^{(0)}\equiv f)$ инчунин ба фазои L_2 тааллуқ доранд, аз ин рӯ омӯзиши рафтори бузургии наздиккунии беҳтарини $E_{n-1}(f^{(s)})$ дар худи синфи $L_2^{(r)}$ ва ё дар ягон зерсинфи он

$\mathfrak{M}^{(r)} \subset L_2^{(r)}$ бешубҳа шавқовар мебошад. Ин масъала дар кори [4] барои модулҳои бефосилагии навъи махсус пешниҳод ва ҳал карда шудааст. Дар ин ҷо мо ҳалли масъалаи гузошташударо дар ҳолате пешниҳод менамоем, ки характеристикаҳои структурии функсияи $f \in L_2^{(r)}$ тавассути қимати модули бефосилагии бо вазни $\varphi(t)$ миёнакардашудаи $\Omega_m(f^{(r)}, t)$ тавсиф карда мешаванд.

Ҳамин тариқ, масъалаи наздиккунии беҳтарини муштараки синфи функсияҳои $\mathfrak{M}^{(r)} \subset L_2^{(r)}$ дар шакли зерин ифода карда мешавад: талаб карда мешавад қимати аниқи бузургии зерин ёфта шавад:

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(s)}\big(\mathfrak{M}^{(r)}\big) := \sup\Big\{E_{n-1}(f^{(s)}):\ f \in \mathfrak{M}^{(r)}\Big\}, \tag{5}$$

ки дар ин ҷо $\mathfrak{M}$ ихтиёри маҷмуи синфи функсияҳо аз фазои $L_2^{(r)}$ мебошад.

Дар параграфи 2.4. аз нуқтаи назари мо ёфтани доимии аниқ

$$\widetilde{\mathscr{K}}_{n,m,r,s}(t) := \sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^{r-s}E_{n-1}\big(f^{(s)}\big)}{\Omega_m\big(f^{(r)}, t\big)}$$

дар нобаробарии намуди Ҷексон–Стечкин барои наздиккунии муштараки функсияҳои $f \in L_2^{(r)}$ аҳамияти калон дорад.

Тасдиқоти зерин ҷой дорад.

Теоремаи 2.4.1. *Бигузор $n, m \in \mathbb{N}$; $r, s \in \mathbb{Z}_+$; $r \geq s$. Он гоҳ барои ихтиёри ададҳои $t \in (0, \pi/2]$ баробарии зерин ҷой дорад:*

$$\widetilde{\mathscr{K}}_{n,m,r,s}(t) = \Big\{2\big(1 - \operatorname{sinc} t\big)\Big\}^{-m/2}.$$

Дар параграфи 2.5 ҳудуди болоии наздиккунии муштараки беҳтарини баъзе синфи функсияҳо ва ҳосилаҳои онҳоро аз руи бисёраъзогиҳои тригонометрӣ ва ҳосилаҳои мувофиқи онҳо муайян менамоем, яъне қимати аниқи бузургии (5) – ро барои модули бефосилагии классикии тартиби олӣ ҳисоб мекунем.

Барои ҳалли масъалаи (5) аввал теоремаи зеринро исбот мекунем.

Теоремаи 2.5.1. *Барои ҳаргуна қиматҳои $n, m \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$ ва $r \geq s$ баробарии зерин дуруст аст:*

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^{r-s}\, E_{n-1}(f^{(s)})}{\left(\dfrac{n}{2}\displaystyle\int_0^{\pi/n} \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t) \sin ntdt\right)^{m/2}} = \frac{1}{2^{m/2}}\,.$$

Аз теоремаи 2.5.1 натиҷаҳои зеринро гирифтан мумкин аст.

Натиҷаи 2.5.1. *Барои ҳаргуна $n, m \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$ ва функсияи ихтиёрии $f \in L_2^{(r)}$ нобаробарии зерин ҷой дорад:*

$$E_{n-1}(f^{(s)}) \leq 2^{-m/2} n^{-(r-s)} \omega_m(f^{(r)}, \pi/n). \tag{6}$$

Агар функсияи $\omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t)$ барои ҳаргуна қимати $t \in [0, \pi/(2n)]$ шарти

$$2\,\omega_m^{2/m}\big(f^{(r)}, \pi/(2n)\big) \geq \omega_m^{2/m}\big(f^{(r)}, t\big) + \omega_m^{2/m}\Big(f^{(r)}, \frac{\pi}{n} - t\Big) \tag{7}$$

қаноат кунонад, дар ҳолати хусусӣ, агар дар сегменти $[0, \pi/n]$ барҷаста бошад, он гоҳ нобаробарии (6) – ро аниқ кардан мумкин аст.

Натиҷаи 2.5.2. *Дар маҷмуи функсияҳои $f \in L_2^{(r)}$, ки барои онҳо функсияи $\omega_m(f^{(r)}, t)$ шарти (7) – ро қаноат мекунонад, нобаробарии*

$$E_{n-1}(f^{(s)}) \leq 2^{-m/2} n^{-(r-s)}\, \omega_m\big(f^{(r)}, \pi/(2n)\big)$$

иҷро мегардад, ки барои функсияи $f_0(x) = \cos nx \in L_2^{(r)}$ ба баробарӣ мубаддал мегардад.

Дар параграфи 2.6 нобаробариҳои аниқ байни наздиккунии беҳтарини полиномиалӣ ва қимати модули бефосилагии миёнакардашудаи функсияҳои $f \in L_2^{(r)}$ дар нормаи фазои L_2 ёфта шудаанд.

Теоремаи 2.6.1. *Бигузор $r \in \mathbb{Z}_+$, $n \in \mathbb{N}$ бошад. Он гоҳ муносибатҳои зерин ҷой доранд:*

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^r E_{n-1}(f)}{\left\{\dfrac{1}{h}\displaystyle\int_0^h \omega^2(f^{(r)}, t)dt\right\}^{1/2}} = \frac{nh}{2\big(nh - \sin nh\big)}, \quad 0 < nh \leq \pi/2;$$

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{\sqrt{2}\,n^r E_{n-1}(f)}{\left\{\dfrac{2}{h^2}\displaystyle\int\limits_0^h (h-t)\omega^2(f^{(r)},t)dt\right\}^{1/2}} = \left\{1-\left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-1/2}, \quad 0<nh\le\pi\,.$$

Дар боби сеюми диссертатсия ҳадафи асосии мо аз ҳисоб намудани қимати аниқи n-қутрҳо барои баъзе синфҳои функсияҳои дифференсиронидашаванда мебошад, ки тавассути модули бефосилагии умумикардашудаи тартиби олӣ дар фазои L_2 дода шудаанд. Дар асоси баъзе шартҳои маҳдудияте, ки барои баъзе синфи функсияҳои дидабаромадашаванда гузошта мешаванд, имконияти ёфтани қимати аниқи n-қутрҳо ба вуҷуд меояд.

Акнун мо таърифҳо ва нишонаҳои заруриеро, ки дар идомаи тадқиқот дар диссертатсия истифода хоҳанд шуд, меорем.

Бигузор X — ихтиёри фазои банахӣ бошад, $\mathfrak{M}\subset X$ — ягон синфи функсияҳо бошад ва бигузор $L_n\subset X$ — як зерфазои ченакаш n бошад. Бузургии

$$E_n(\mathfrak{M})_X := E(\mathfrak{M},L_n)_X = \sup\Big\{E(f;L_n)_X:\ f\in\mathfrak{M}\Big\} =$$

$$= \sup\Big\{\inf\Big\{\|f-g\|_X:\ g\in L_n\Big\}:\ f\in\mathfrak{M}\Big\} \tag{8}$$

– ро наздиккунии беҳтарини синфи $\mathfrak{M}$ аз руи зерфазоҳои L_n – и ченакаш додашудаи n меноманд. Бузургии (8) тамоили синфи $\mathfrak{M}$-ро аз зерфазои L_n дар метрикаи фазои X тавсиф мекунад.

Агар тавассути $\mathcal{L}(X,L_n)$ маҷмуи ҳамаи операторҳои бефосилаи $A: X\to L_n$, ки аз фазои X ба зерфазои дилхоҳи $L_n\subset X$ бо ченаки n амал мекунанд, ифода намоем, он гоҳ масъалаи зерин ба миён меояд: бузургии

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{M})_X := \mathcal{E}(\mathfrak{M},L_n)_X =$$

$$= \inf\Big\{\sup\Big\{\Big\|f-Af\Big\|_X:\ f\in\mathfrak{M}\Big\}: A\in\mathcal{L}(X,L_n)\Big\} \tag{9}$$

ёфта шуда, оператори $A_*\subset\mathcal{L}(X,L_n)$ нишон дода шавад, ки дорои сарҳади аниқи поёнӣ дар (9) бошад, яъне

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{M})_X = \sup\Big\{\Big\|f-A_*f\Big\|_X:\ f\in\mathfrak{M}\Big\}$$

бошад.

Масъаларо (9) метавон дар маънои маҳдудтар баррасӣ кард: сарҳади поёниро на аз тамоми маҷмуи операторҳои бефосилаи $\mathcal{L}(X, L_n)$, ки $A : X \to L_n$ мебошад, ҷустуҷӯ кардан лозим аст, балки танҳо дар як синфи муайяни чунин операторҳо, ки бо тарзи муайян мушаххас мешаванд. Дар ҳолати хусусӣ, метавон дар $\mathcal{L}(X, L_n)$ синфи операторҳои бефосилаи $A : X \to L_n$ ҷудо карда, бузургии зеринро тадқиқ намуд:

$$\mathcal{E}_n^{\mathcal{L}}(\mathfrak{M})_X := \mathcal{E}^{\mathcal{L}}(\mathfrak{M}, L_n)_X =$$

$$= \inf\Big\{\sup\Big\{\Big\|f - Af\Big\|_X : \ f \in \mathfrak{M}\Big\} : A \subset \mathcal{L}(X, L_n)\Big\}. \qquad (10)$$

Агар чунин оператори $A^* : X \to L_n$ мавҷуд бошад, ки дар он сарҳади саҳеҳи поёнӣ дар (10) доро мешавад, он гоҳ чунин оператор усули наздиккунии беҳтарини хаттиро дар масъалаи (10) муайян мекунад, яъне

$$\mathcal{E}_n^{\mathcal{L}}(\mathfrak{M})_X = \sup\Big\{\Big\|f - A^*f\Big\|_X : \ f \in \mathfrak{M}\Big\}.$$

Агар дар дохили $\mathcal{L}(X, L_n)$ синфи операторҳои $\mathcal{L}^{\perp}(X, L_n)$ ҷудо карда шавад — яъне он операторҳои хаттии проексионӣ ба зерфазои L_n, ки барои ҳар як $f \in L_n$ шарти $Af = f$ иҷро мешавад — одатан бузургии зерин тадқиқ карда мешавад:

$$\mathcal{E}_n^{\perp}(\mathfrak{M})_X := \mathcal{E}^{\perp}(\mathfrak{M}, L_n)_X =$$

$$= \inf\Big\{\sup\Big\{\Big\|f - Af\Big\|_X : \ f \in \mathfrak{M}\Big\} : A \subset \mathcal{L}^{\perp}(X, L_n)\Big\}. \qquad (11)$$

Бо бузургиҳои (8) – (11) масъалаи ёфтани қимати n-қутрҳо барои синфи функсияҳои гуногуни $\mathfrak{M}$ алоқаманд мебошад.

Акнун таърифҳои n-қутрҳоро ба ёд меорем, ки қиматҳои онҳо барои синфҳои муайяни $\mathfrak{M}$ дар ин боб ҳисоб карда мешаванд.

n-қутри ба маънои А.Н. Колмогорови [20] синфи функсияҳои $\mathfrak{M}$ дар фазои X бузургии

$$d_n(\mathfrak{M}, X) = \inf\Big\{E(\mathfrak{M}, L_n)_X : \ L_n \subset X\Big\}$$

номида мешавад, ки сарҳади поёнӣ аз руи ҳамаи зерфазоҳои ченакаш дода-шудаи n дар фазои X ҳисоб карда мешавад.

Агар ба наздиккунии беҳтарини хаттӣ $\mathcal{E}^{\mathcal{L}}(\mathfrak{M}, L_n)_X$ такя намоем, он гоҳ бузургии

$$\lambda_n(\mathfrak{M}, X) = \inf\Big\{\mathcal{E}^{\mathcal{L}}(\mathfrak{M}, L_n)_X : \ L_n \subset X\Big\}$$

n-қутри хаттии синфи $\mathfrak{M}$ дар фазои X номида мешавад.

Ба ҳамин монанд, агар бузургии (11) бар асос гирифта шавад, он гоҳ n-қутри проексионӣ мавриди баррасӣ қарор дода мешавад, яъне

$$\pi_n(\mathfrak{M}, X) = \inf\Big\{\mathcal{E}^{\perp}(\mathfrak{M}, L_n)_X : \ L_n \subset X\Big\}.$$

Инчунин ду бузургии дигар, ки дар назарияи наздиккунии функсияҳо бо номҳои „n-қутри гелфандӣ” ва „n-қутри бернштейнӣ” мавҷуданд.

Бигузор S – кураи воҳидӣ дар фазои X бошад, яъне

$$S = \big\{x \in X, \ \|x\|_X \le 1\big\}.$$

Бузургии

$$d^n(\mathfrak{M}, X) = \inf\Big\{\inf\Big\{\mathfrak{M} \cap L^n \subset \varepsilon S : \ \varepsilon > 0\Big\} : \ L^n \subset X\Big\},$$

ки дар ин ҷо инфимум аз руи ҳамаи зерфазоҳои L^n-и ҳамандозаи n гирифта мешавад, n-қутри гелфандӣ меноманд. Бузургии

$$b_n(\mathfrak{M}, X) = \sup\Big\{\sup\Big\{\varepsilon S \cap L_{n+1} \subset \mathfrak{M} : \ \varepsilon > 0\Big\} : \ L_{n+1} \subset X\Big\}$$

n-қутри бернштейнӣ номида мешавад.

Бигузор $\Phi(t), \ t \ge 0$ — ихтиёри функсияи афзуншаванда буда, барои $t > 0$, $\Phi(t) > 0$ ва $\lim\big\{\Phi(t) : \ t \to 0\big\} = \Phi(0) = 0$ бошад. Функсияи $\Phi(t)$ – ро мажоранта меноманд.

Зери $W^{(r)}(\Omega_m, \Phi)$ (дар ин ҷо $r \in \mathbb{Z}_+, \ m \in \mathbb{N}$) маҷмуи функсияҳои $f \in L_2^{(r)}$ фаҳмида мешавад, ки ҳосилаҳои дараҷаи r-уми онҳо $f^{(r)}$ ба маҳдудияти

$$\Omega_m\big(f^{(r)}, t\big) \le \Phi(t), \quad \forall t > 0$$

итоат мекунанд.

Талаб карда мешавад, ки бузургии наздиккунии муштараки синфи функсияҳои $W^{(r)}(\Omega_m,\Phi)$ ёфта шавад, аниқтараш, талаб карда мешавад, ки қимати бузургии

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(s)}\big(W^{(r)}(\Omega_m,\Phi)\big)=\sup\Big\{E_{n-1}\big(f^{(s)}\big):\ f\in W^{(r)}(\Omega_m,\Phi)\Big\}$$

ёфта шавад.

Дар ин ҷо теоремаи зерин исбот карда шудааст.

Теоремаи 3.1.1. *Бигузор барои қимати $n\in\mathbb{N}$ мажорантаи $\Phi(t)$ шарти зеринро қаноат кунонад:*

$$\frac{\Phi^2\big(\pi t/(2n)\big)}{\Phi^2\big(\pi/(2n)\big)}\geq\left(\frac{\pi}{\pi-2}\right)^m\cdot\begin{cases}\big(1-\operatorname{sinc}(\pi t/2)\big)^m, & \text{агар}\quad 0<t\leq 2,\\ 2^m\left(1-\dfrac{1}{t}\right)^m, & \text{агар}\quad 2\leq t<\infty.\end{cases}\tag{12}$$

Он гоҳ баробарии зерин ҷой дорад:

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(s)}\big(W^{(r)}(\Omega_m,\Phi)\big)=\left\{\frac{\pi}{2(\pi-2)}\right\}^{m/2}\cdot\frac{1}{n^{r-s}}\cdot\Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right).$$

Маҷмуи мажорантаҳои $\{\Phi\}$, ки шарти (12) – ро қаноат мекунонад, холӣ нест.

Барои пешниҳод намудани натиҷаи дигар аввал синфи функсияҳои зеринро дохил мекунем.

Бигузор барои ихтиёри қиматҳои $m\in\mathbb{N},\ r\in\mathbb{Z}_+$ ва $u\in[0,2\pi]$

$$W_m^{(r)}(\Phi):=\left\{f\in L_2^{(r)}:\ \frac{\pi}{2u}\int\limits_0^u\omega_m^{2/m}(f^{(r)},t)\sin\frac{\pi}{u}t\,dt\leq\Phi^2(u)\right\}$$

синфи функсияҳо дар $L_2^{(r)}$ бошад. Гузориши

$$\big(1-\cos nh\big)_*:=\begin{cases}1-\cos nh, & \text{агар}\quad 0<nh\leq\pi,\\ 2, & \text{агар}\quad nh>\pi\end{cases}$$

– ро дохил мекунем.

Теоремаи 3.1.2. *Бигузор функсияи* Φ *шартҳои*

$$\Phi^2\left(\frac{u}{\mu}\right)\int\limits_0^{\mu\pi}(1-\cos t)_*\sin\frac{t}{\mu}\,dt \le 2\mu\,\Phi^2(u) \tag{13}$$

– ро барои ҳаргуна $\mu > 0$ *ва ихтиёри* $u \in (0, 2\pi]$ *қаноат кунонад. Он гоҳ барои қиматҳои* $m, n \in \mathbb{N}$; $r, s \in \mathbb{Z}_+$; $r > s$ *баробарии зерин ҷой дорад:*

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(s)}\big(W_m^{(r)}(\Phi)\big) = 2^{-m/2}\, n^{-r+s}\, \Phi^m\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Бо осонӣ нишон додан мумкин аст, ки функсияи

$$\Phi(u) = u^{\alpha/2}, \quad \text{ҳангоми} \quad \alpha = \frac{\pi^2}{8} \quad \text{будан,}$$

шарти (13) – ро қаноат мекунонад.

Бо символи $W_{m,p}^{(r)}(\Phi)$ $(m, n \in \mathbb{N};\ 0 < p \le \infty)$ синфи функсияҳои $f \in L_2^{(r)}$ – ро ишора мекунем, ки барои ҳамаи қиматҳои $0 < t \le 2\pi$ шарти

$$\int\limits_0^t \Omega_m^p\big(f^{(r)}, \tau\big)\, d\tau \le \Phi^p(t)$$

– ро қаноат мекунонанд.

Бо назардошти корҳои илмии [3, 30], бо t_* бузургии аргументи $t \in (0, \infty)$ функсияи $\operatorname{sinc} t$ – ро ишора мекунем, ки дар он вай қимати минималиии худро доро мешавад. Ошкор аст, ки t_* қимати хурдтарин аз байни решаҳои муодилаи

$$t - \operatorname{tg} t = 0 \quad (4{,}49 < t_* < 4{,}51)$$

мебошад. Инчунини дигар гузориши зеринро дохил мекунем:

$$\big(1 - \operatorname{sinc} t\big)_* := \begin{cases} 1 - \operatorname{sinc} t, & \text{агар } \ 0 < t \le t_*; \\ 1 - \operatorname{sinc} t_* & \text{агар } \ t \ge t_*. \end{cases}$$

Дар ин ҷо теоремаи зерин исбот карда мешавад.

Теоремаи 3.2.1. *Бигузор* $m, n, r \in \mathbb{N}$, $1/r \le p \le 2$ *бошанд. Агар барои ҳамаи қиматҳои* $0 < t \le 2\pi$ *мажорантаи* Φ *шартҳои зеринро қаноат кунонад:*

$$\frac{\Phi^p(t)}{\Phi^p\big(\pi/n\big)} \ge \frac{\int\limits_0^t \big(1 - \operatorname{sinc} n\tau\big)_*^{mp/2}\, d\tau}{\int\limits_0^{\pi/n} \big(1 - \operatorname{sinc} n\tau\big)^{mp/2}\, d\tau}, \tag{14}$$

он гоҳ баробарии зерин ҷой дорад:

$$\delta_{2n}\big(W_{m,p}^{(r)}(\Phi), L_2\big) = \delta_{2n-1}\big(W_{m,p}^{(r)}(\Phi), L_2\big) = E_{n-1}\big(W_{m,p}^{(r)}(\Phi)\big) =$$

$$= 2^{-m/2}\, n^{-r} \left\{ \int\limits_0^{\pi/n} \big(1 - \operatorname{sinc} nt\big)^{mp/2}\, dt \right\}^{-1/p} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

ки дар ин ҷо $\delta_n(\cdot)$ *— яке аз* n*-қутрҳои дар боло овардашуда —* $b_n(\cdot)$, $d^n(\cdot)$, $d_n(\cdot)$, $\lambda_n(\cdot)$ *ва ё* $\pi_n(\cdot)$ *мебошад. Дар ин ҳолат, маҷмуи ҳамаи мажорантаҳое, ки шарти* (14) *– ро қаноат мекунонанд, холӣ намебошад.*

Бо осонӣ нишон додан мумкин аст, ки функсияи $\Phi_*(t) = t^{\alpha/p}$, ки дар ин ҷо

$$\alpha = \frac{\pi}{\int\limits_0^{\pi} \big(1 - \operatorname{sinc} n\tau\big)^{mp/2}\, d\tau}$$

мебошад, шарти (14) – ро барои ихтиёри $n \in \mathbb{N}$ қаноат мекунонад.

Акнун барои ихтиёри $r \in \mathbb{Z}_+$ ва $h > 0$ синфҳои функсияҳои зеринро дохил мекунем:

$$W^{(r)}\big(\Phi, h\big) = \left\{ f \in L_2^{(r)} :\ \left(\frac{1}{h} \int\limits_0^h \omega^2\big(f^{(r)}, t\big)\, dt \right)^{1/2} \le \Phi(h) \right\};$$

$$W_1^{(r)}\big(\Phi, h\big) = \left\{ f \in L_2^{(r)} : \ \left(\frac{2}{h^2} \int\limits_0^h (h-t)\omega^2\big(f^{(r)}, t\big)\, dt \right)^{1/2} \le \Phi(h) \right\}.$$

Барои синфҳои дохил шуда, теоремаҳои зерин исбот карда шудаанд.

Теоремаи 3.2.2. *Агар мажорантаи* $\Phi(h)$ *барои ҳамаи қиматҳои* $h \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ *шарти*

$$\frac{\Phi(h)}{\Phi\big(\pi/(2n)\big)} \ge \frac{\pi}{\pi-2} \cdot \begin{cases} \dfrac{nh - \sin nh}{nh}, & \text{агар} \quad 0 < nh \le \pi, \\ \dfrac{3nh - 2\pi}{nh}, & \text{агар} \quad nh > \pi \end{cases} \tag{15}$$

– ро қаноат кунонад, он гоҳ баробариҳои зерин ҷой доранд:

$$\delta_n\big(W^{(r)}(\Phi, h), L_2\big) = E_{n-1}\big(W^{(r)}(\Phi, h), L_2\big) = \left\{ \frac{\pi}{2\big(\pi-2\big)} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right\}^{1/2} \cdot \frac{1}{n^r},$$

ки дар ин ҷо $\delta_n(\cdot)$ *— яке аз* n*-қутрҳои дар боло овардашуда —* $b_n(\cdot)$, $d^n(\cdot)$, $d_n(\cdot)$, $\lambda_n(\cdot)$ *ва ё* $\pi_n(\cdot)$ *мебошад. Маҷмуи ҳамаи функсияҳои мажорантӣ, ки шарти* (15) *– ро қаноат мекунонанд, холӣ намебошад.*

Қайд мекунем, ки функсияи $\Phi(h) = h^\alpha$, дар ин ҷо $\alpha = \dfrac{2}{\pi-2}$, шарти (15)-и теоремаи 3.2.2 – ро қаноат мекунонад.

Теоремаи 3.2.3. *Бигузор мажорантаи* $\Phi(h)$ *барои ҳаргуна қиматҳои* $h \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}$ *ва* $r \in \mathbb{Z}_+$ *шарти*

$$\frac{\Phi(h)}{\Phi\big(\pi/n\big)} \ge \frac{\pi^2}{\pi^2-4} \cdot \begin{cases} 1 - \left(\dfrac{2}{nh}\sin\dfrac{nh}{2}\right)^2, & \text{агар} \quad 0 < nh \le \pi, \\ 1 - \dfrac{4}{\pi^2} + 2\left(1 - \dfrac{\pi}{nh}\right)^2, & \text{агар} \quad nh > \pi \end{cases} \tag{16}$$

– ро қаноат кунонад. Он гоҳ баробариҳои зерин ҷой доранд:

$$\delta_n\big(W_1^{(r)}(\Phi, h), L_2\big) = E_{n-1}\big(W_1^{(r)}(\Phi, h), L_2\big) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{\pi^2}{\pi^2-4} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right) \right\}^{1/2} \cdot \frac{1}{n^r},$$

ки дар ин ҷо $\delta_n(\cdot)$ *— ихтиёри аз* n*-қутрҳои дар боло овардашуда мебошад.*

Маҷмуи мажорантаҳое, ки шарти (16) – ро қаноат мекунонанд, холӣ намебошад.

Функсияи $\Phi(h) = h^{\alpha},\ \alpha = \dfrac{8}{\pi^2 - 4}$ шарти (16) – ро қаноат мекунонад.

ХУЛОСАҲО

Натиҷаҳои асосии кори диссертатсионӣ аз инҳо иборат аст:

- қимати аниқи сарҳадҳои болоии наздиккунии муштараки беҳтарин ва ҳосилаҳои пайдарпайи он тавассути бисёраъзогиҳо ва ҳосилаҳои мутаносиби онҳо барои баъзе синфи функсияҳои даврӣ, ки ба фазои $L_2[0, 2\pi]$ тааллуқ доранд, ёфта шуданд [1-М, 2-М, 5-М, 6-М, 7-М];
- нобаробариҳои нави аниқ байни бузургиҳои наздиккунии миёнаквадратии беҳтарини функсияҳои дифференсиронидашаванда ва интегралҳое, ки қимати модули бефосилагии миёнакардашудаи тартиби m-умро аз қимати сарҳадӣ дар фазои гилбертии $L_2[0, 2\pi]$ дар бар мегиранд, ёфта шуданд [1-М, 2-М, 3-М, 4-М];
- қимати аниқи n-қутрҳои бернштейнӣ, колмогоровӣ, гелфандӣ, хаттӣ ва проексионии синфҳои функсияҳое ёфта шуданд, ки ба воситаи модули бефосилагии тартиби олӣ дода мешаванд [1-М, 4-М, 8-М].

Тавсияҳо оид ба истифодаи амалии натиҷаҳо

Натиҷаҳои дар рисолаи диссертатсионӣ гирифташуда арзиши назариявӣ дошта, имкониятҳои васеъи истифодаи амалиро доранд. Натиҷаҳои илмӣ ва хулосаҳои таҳияшударо метавон барои рушди минбаъдаи назарияи аппроксиматсияи функсияҳо ва дигар масъалаҳои экстремалии назарияи наздиккунӣ татбиқ намуд. Хулосаҳои бадастомада ва формулаҳои исботкардашударо дар самтҳои зерини илмӣ татбиқ намудан мумкин аст:

1) Муайян намудани сарҳади аниқии болоии наздиккунии беҳтарини функсияҳои бисёртағйирёбанда;
2) Ҳар як боби диссертатсия метавонад ҳамчун маводи таълимӣ дар курсҳои махсус барои донишҷӯёни курсҳои болоӣ оид ба самтҳои риёзӣ ва татбиқӣ истифода шавад;

3) Тадқиқи фазоҳои функсионалӣ ва хосиятҳои сохтории онҳо, ки дар онҳо масъалаҳои наздиккунии функсияҳо баррасӣ мегарданд;
4) Муайян намудани суръати наздиккунии функсияҳо ва баҳодиҳии аниқи наздиккуниҳо дар фазоҳои функсионалӣ, ки барои татбиқи усулҳои апроксиматсионӣ аҳамияти назаррас доранд.

ИНТИШОРОТИ МУАЛЛИФ ОИД БА МАВЗӮИ ДИССЕРТАТСИЯ

Мақолаҳое, ки дар маҷаллаҳои тақризшавандаи КОА-и назди Президенти Ҷумҳурии Тоҷикистон нашр шудаанд:

[1-М] Шамсиддинов С.А. Наилучшее полиномиальное приближение и поперечники множеств в пространстве L_2 [Матн] / Н.М. Мамадаёзов, С.А. Шамсиддинов // Доклады НАН Таджикистана. – 2021. – Т.64. – №1-2. – С. 26–34.

[2-М] Шамсиддинов С.А. Точные константы в неравенствах типа Джексона–Стечкина для наилучших совместных приближений функции и их последовательных производных в L_2 [Матн] / М.Ш. Шабозов, С.А. Шамсиддинов // Доклады НАН Таджикистана. – 2022. – Т.65. – №5-6. – С. 286–293.

Дар дигар нашрияҳо:

[3-М] Шамсиддинов С.А. Об одной оптимизационной задаче [Матн] / М. Азизов, С.А. Шамсиддинов // Материалы международной конференции «Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений», посвящённой 70-летию со дня рождения академика Национальной академии наук Таджикистана, доктора физ.-мат. наук, профессора К.Х. Бойматова (Душанбе, 25-26 декабря 2020 г.). – С. 50–51.

[4-М] Шамсиддинов С.А. Точное неравенство Джексона-Стечкина в L_2 между наилучшим совместным приближением и обобщённым модулем непрерывности [Матн] / С.А. Шамсиддинов, Х.М. Шосафаров // Материалы международной конференции «Современные проблемы теории чисел и математического анализа», посвящённой 80-летию со дня рождения доктора физ.-мат. наук, профессора Дододжона Исмоилова (г.Душанбе, 29-30 апреля 2022 г.). – С. 253-256.

[5-М] Шамсиддинов С.А. О точных константах в неравенствах типа Джексона–Стечкина для наилучших совместных приближений функции в L_2 [Матн] / С.А. Шамсиддинов // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математического анализа и теории функций», посвящённой 70-летию академика НАН Таджикистана М.Ш.Шабозова (Душанбе, 24-25 июня 2022 г.). – С. 281–284.

[6-М] Шамсиддинов С.А. Неравенства типа Джексона–Стечкина для наилучших совместных приближений из L_2 [Матн] / С.А. Шамсиддинов // Материалы международной научно-теоретической конференции «Вклад математики в развитие естественных, точных и математических наук», двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических наук (2020 – 2040 годы). (Душанбе, 30-31 мая 2023 г.). – С. 332–335.

[7-М] Шамсиддинов С.А. Неравенства типа Джексона–Стечкина для наилучших совместных приближений функций и их производных в L_2 [Матн] / С.А. Шамсиддинов // Материалы международной научной-практической конференции «Современные проблемы математики и её преподавания», посвященной 35-летию государственной независимости Республики Таджикистан; 30-летию Конституции Республики Таджикистан; «Двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических наук в сфере науки и образования» и 70-летию доктора физ.-мат. наук К. Тухлиева (г.Худжанд, 21-22 июня 2024 г.). – С. 111-114.

[8-М] Шамсиддинов С.А. Наилучшее совместное приближение периодических функций, определяемых модулями непрерывности [Матн] / У.Н. Зеваршоев, С.А. Шамсиддинов // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математики и её приложения», посвящённой 75-летию со дня рождения академика НАНТ, доктора физ.-мат. наук, профессора К.Х. Бойматова и 75-летию доктора физ.-мат. наук, заведующего отделом дифференциальных уравнений Института математики им. А. Джураева НАНТ, профессора Г. Джангибекова (г.Душанбе, 30-31 мая 2025 г.). – С. 354–357.

РЕСПУБЛИКА ТАДЖИКИСТАН

ТАДЖИКСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. САДРИДДИНА АЙНИ

УДК 517.5

На правах рукописи

Шамсиддинзода Саъди Абдукосим

ТОЧНЫЕ КОНСТАНТЫ В НЕРАВЕНСТВЕ ТИПА ДЖЕКСОНА–СТЕЧКИНА ДЛЯ НАИЛУЧШЕГО СОВМЕСТНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ И ИХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ В ПРОСТРАНСТВЕ L_2

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени доктора философии (PhD) – доктор по специальности 6D060100 – Математика (6D060102 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ)

Душанбе — 2026

Работа выполнена на кафедре математического анализа Таджикского государственного педагогического университета им. Садриддина Айни

НАУЧНЫЙ РУКОВОДИТЕЛЬ: **Юсупов Гулзорхон Амиршоевич,** доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой математического анализа ТГПУ им. С.Айни;

ОФИЦИАЛЬНЫЕ ОППОНЕНТЫ: **Исхоков Сулаймон Абунасрович,** член корр. Национальной Академии наук, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий отделом теории функции и функционального анализа Института математики им. А. Джураева;

Палавонов Курбоназар Курбонбекович, кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой математики в экономике Международного университета туризма и предпринимательства Таджикистана

ВЕДУЩАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ: Государственное образовательное учреждение «Бохтарский государственный университет имени Носира Хусрава»

Защита состоится *29 апреля 2026 г. в 14:00* часов на заседании Диссертационного совета 6D.KOA-011 на механико-математическом факультете Таджикского национального университета, расположенного по адресу: 734027, г. Душанбе, ул. Буни-Хисорак, корпус 17, аудитория 203.

E-mail: alisher_gaforov@mail.ru; номер мобильного телефона учёного секретаря: (+992) 900-76-66-03.

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной научной библиотеке Таджикского национального университета или на сайте http://www.tnu.tj

Автореферат разослан «______» «______________» 2026 г.

Ученый секретарь Диссертационного совета 6D.KOA-011, кандидат физико-математических наук **Гафоров А.Б.**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. Теория приближения функций относится к числу наиболее быстро развивающихся областей математического анализа и обладает важными приложениями в различных разделах прикладной математики. В данной теории экстремальные задачи наилучшего приближения дифференцируемых 2π-периодических функций с помощью тригонометрических многочленов занимают особое место в различных банаховых пространствах.

В настоящее время всё более отчётливо наблюдается проникновение идей и методов теории приближения функций в различные области математической науки, особенно в прикладные направления. Основы теории приближения, заложенные в известных классических трудах Чебышёва, Вейерштрасса, Джексона и Бернштейна по приближению функций с помощью многочленов, были переосмыслены и продолжают развиваться на более широкой и прочной теоретической базе.

Известно, что аппроксимационные задачи, формулируемые в классах функций, во многих случаях являются экстремальными задачами, в которых требуется либо нахождение точной верхней границы погрешности приближения для заданного метода в рассматриваемом классе функций, либо указание наилучших методов приближения для данного класса.

Рассматривая решение экстремальных задач для определённых классов функций, в данной диссертации мы ограничиваемся случаем периодических функций. Иными словами, в работе анализируется ряд экстремальных задач теории приближения периодических функций с помощью тригонометрических многочленов в гильбертовом пространстве L_2. Формулируются окончательные результаты, касающиеся верхней границы поведения тригонометрических многочленов для различных классов периодических функций.

В первой главе собран подготовительный материал, и в каждом конкретном случае подробно формулируются и анализируются ещё не решённые экстремальные задачи. В основном эти задачи посвящены совместному приближению функций и их промежуточных производных. Затем сформулированные задачи решаются в последующих главах диссертации для различных классов периодических функций. Полученные результаты являются окончательными и по существу не допускают ни дополнений, ни сокращений. Именно совокупность этих факторов определяет актуальность и целесообразность выбранной темы данной научной работы.

Степень научной разработанности изучаемой проблемы. Среди современных направлений математического анализа теория приближения функций занимает особое место, так как она является одной из быстро развивающихся областей и нашла широкое применение в прикладной математике. В рамках этой теории экстремальные задачи наилучшего совместного приближения 2π-периодических функций с помощью тригонометрических многочленов в различных банаховых пространствах обладают значительной научной ценностью. Задача наилучшего совместного приближения дифференцируемых периодических функций с помощью тригонометрических многочленов в метрике равномерной сходимости была впервые изучена в 1960 году А.Л. Гаркави [7]. В том же году А.Ф. Тиман [19] рассматривал поставленную задачу для случая наилучшего приближения функций на всём заданном числовом отрезке с помощью целых экспоненциальных функций.

Задача наилучшего совместного приближения функций и их производных, рассматриваемая в более общей форме как для алгебраических, так и для тригонометрических многочленов, подробно изучена в монографии В.Н. Малозёмова [12]. В ней обобщены ряд классических результатов теории приближения функций на случай наилучшего совместного приближения функций и их производных. Для некоторых дифференцируемых периодических функций в пространстве L_2 с усреднённым весом модуля непрерывности высокого порядка, ограниченного сверху данным показателем, поставленная задача рассматривалась в работах С.Б. Вакарчука и В.И. Забутной [4], М.Ш. Шабозова и А.А. Шабозовой [25], а также М.Ш. Шабозова [26].

В настоящем исследовании, продолжая работы вышеупомянутых авторов, рассматривается более общая экстремальная задача, а именно ставится задача определения точной верхней границы наилучшего совместного приближения функций и их последовательных производных с помощью соответствующих многочленов. В данной диссертации полностью решена задача наилучшего совместного приближения функций с помощью тригонометрических многочленов. Вычислено точное значение верхней границы наилучшего совместного приближения для некоторых классов функций, принадлежащих гильбертову пространству $L_2[0, 2\pi]$.

Связь работы с научными программами (проектами), темами. Диссертационное исследование выполнено в рамках перспективного плана научных исследований кафедры математического анализа Таджикского государственного педагогического университета имени С. Айни на 2021–2025 годы по теме «Теория приближения дифференцируемых периодических функций» и соответствует Плану мероприятий на 2020–2025 годы, направленному на реализацию «Двадцатилетия изучения и развития естественно-научных, точных и математических дисциплин в сфере науки и образования» на 2020–2040 годы (пункт 38).

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ИССЛЕДОВАНИЯ

Цель исследования. Настоящее исследование посвящено изучению различных экстремальных задач, возникающих в рамках теории наилучшего совместного приближения дифференцируемых 2π-периодических функций и их последовательных производных с помощью тригонометрических многочленов. В работе применяются современные методы и подходы к решению экстремальных задач в банаховых пространствах, что позволяет получить новые результаты и расширить возможности практического применения теории приближения функций.

Задачи исследования. В соответствии с поставленной целью выделяются следующие задачи исследования:

- определение точного значения верхних границ наилучшего совместного приближения функций и их последовательных производных с помощью многочленов, а также соответствующих производных для некоторых классов периодических функций, принадлежащих гильбертову пространству $L_2[0, 2\pi]$;
- нахождение новых точных неравенств между величинами наилучшего среднеквадратичного приближения дифференцируемых функций и интегралами, включающими значение усреднённого модуля непрерывности m-го порядка и верхнюю границу в гильбертовом пространстве $L_2[0, 2\pi]$;
- вычисление точного значения бернштейновского, колмогоровского, гельфандовского, линейного и проекционного n-поперечников классов функций, задаваемых модулями непрерывности высшего порядка.

Объект исследования. Основным объектом исследования являются различные экстремальные задачи, связанные с наилучшим совместным приближением функций и их производных с помощью тригонометрических многочленов в пространстве $L_2[0, 2\pi]$.

Предмет исследования. Тема исследования состоит в установлении точных неравенств типа Джексон–Стечкин, которые связывают наилучшее совместное приближение функций и их промежуточных производных с обобщёнными модулями непрерывности высшего порядка $\Omega_m(f, t)$ в метрике пространства $L_2[0, 2\pi]$.

Научная новизна исследования. В диссертации получены следующие основные результаты:

- найдены точные значения верхних границ наилучшего совместного приближения и его последовательных производных с помощью многочленов и соответствующих им производных для некоторых классов периодических функций, принадлежащих пространству $L_2[0, 2\pi]$;

- найдены новые точные неравенства между величинами наилучшего среднеквадратичного приближения дифференцируемых функций и интегралами, содержащими усреднёнными значениями модулей непрерывности m-го порядка и значения верхних граней в гильбертовом пространстве $L_2[0, 2\pi]$;
- найдены точные значения бернштейновских, колмогоровских, гельфандовских, линейных и проекционных n-поперечников классов функций, задаваемых модулями непрерывности высшего порядка.

Теоретическая и научно-практическая значимость работы. Работа носит теоретический характер. Результаты и методы, представленные в диссертации, могут быть использованы для анализа экстремальных задач в теории приближения функций нескольких переменных, применимых как к областям с границами, так и ко всей двумерной поверхности.

Положения, выносимые на защиту:

- теоремы, которые устанавливают точные значения верхних граней наилучшего среднеквадратичного совместного приближения многочленами для определённых классов дифференцируемых периодических функций, задаваемых обобщёнными модулями непрерывности;
- теоремы о точных неравенствах типа Джексон–Стечкин, которые описывают наилучшее совместное приближение с помощью обобщённого модуля непрерывности $\Omega_m(f, t)$;
- теоремы, посвящённые определению точных значений экстремальных характеристик наилучшего совместного приближения периодических функций в $L_2[0, 2\pi]$ в зависимости от дифференциальных свойств весовой функции;
- теоремы о точных значениях бернштейновских, колмогоровских, гельфандовских, линейных и проекционных n-поперечников классов $W_{m,p}^{(r)}(\Phi)$, $W^{(r)}(\Phi, h)$ и $W_1^{(r)}(\Phi, h)$ функций в пространстве L_2.

Степень достоверности результатов. Достоверность научных результатов диссертационной работы обеспечивается строгими математическими доказательствами всех утверждений, приведённых в диссертации, а также подтверждается исследованиями других авторов.

Соответствия диссертации паспорту научной специальности (формуле и области исследования). Диссертационная работа выполнена по специальности 6D060102 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ и является разделом математического анализа. Тема исследования относится к области теории приближения функций, а полученные результаты соответствуют следующим направлениям:

1) Теория функциональных пространств и их структурные свойства;
2) Теория приближения функций и методы полиномиального и рядового приближения;
3) Исследование точности приближения и оценка скорости приближения в функциональных пространствах.

Указанные направления относятся к разделу «Теория приближения функций», предусмотренному в разделе III, пункте 3 паспорта научной специальности.

Личный вклад соискателя ученой степени. Проблемы исследования и выбор методов их решения определены под руководством научного руководителя. Одновременно были предоставлены необходимые научные консультации. Основные результаты, приведённые в разделе «Научная новизна исследования», считаются результатом личного труда автора.

Апробация результатов диссертации. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих семинаров и конференций:

- семинары кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений Таджикского национального университета под руководством академика НАНТ, профессора М.Ш. Шабозова (Душанбе, 2020–2026 гг.);

- семинары кафедры математического анализа Таджикского государственного педагогического университета им. Садриддина Айни под руководством доктора физико-математических наук, доцент Г.А. Юсупова (Душанбе, 2022–2026 гг.);
- международная конференция «Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений», посвящённая 70-летию со дня рождения академика Национальной академии наук Таджикистана, доктора физико-математических наук, профессора К.Х. Бойматова (Душанбе, 25–26 декабря 2020 года);
- международная конференция «Современные проблемы теории чисел и математического анализа», посвященной 80-летию со дня рождения доктора физико-математических наук, профессора Дододжона Исмоилова (Душанбе, 29–30 апреля 2022 г.);
- международная конференция «Современные проблемы математического анализа и теории функций», посвящённая 70-летию со дня рождения академика Национальной академии наук Таджикистана, доктора физико-математических наук, профессора М.Ш. Шабозова (Душанбе, 24–25 июня 2022 года);
- международная научно-теоретическая конференции на тему «Вклад математики в развитие естественных, точных и математических наук», посвящённой двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических наук (2020–2040 годы) (Душанбе, 30–31 мая 2023 г.);
- международная конференция «Современные проблемы математики и её преподавания», посвященная 35-летию государственной Независимости Республики Таджикистан и 70-летию доктора физико-математических наук Тухлиева К. (Худжанд, 21–22 июня 2024 г.);
- международная конференция «Современные проблемы математики и её приложения», посвящённая 75-летию со дня рождения академика НАНТ, доктора физико-математических наук, профессора К.Х. Бойматова и

75-летию доктора физико-математических наук, заведующего отделом дифференциальных уравнений Института математики им. А. Джураева НАНТ, профессора Джангибекова Г. (Душанбе, 30–31 мая 2025 г.).

Публикации по теме диссертации. Результаты исследований автора по теме диссертационной работы опубликованы в 8 научных работах, из них 2 статьи опубликованы в изданиях, входящих в действующий перечень ВАК Республики Таджикистан, ещё 6 в трудах международных и республиканских научных конференций.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, списка цитированной литературы из 135 наименований, занимает 152 страницу машинописного текста и набрана на LaTeX. Для удобства в диссертации применена сквозная нумерация теорем, лемм, следствий и формул. Они имеют тройную нумерацию, в которой первая цифра совпадает с номером главы, вторая указывает на номер параграфа, а третья на порядковый номер теорем, лемм, следствий или формул в данном параграфе.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ ИССЛЕДОВАНИЯ

Материал и методы исследования. Представленное исследование посвящено изучению различных экстремальных задач, рассматриваемых в рамках теории наилучшего совместного приближения дифференцируемых 2π-периодических функций и их последовательных производных с помощью тригонометрических многочленов. В диссертации современные подходы и методы решения экстремальных задач в банаховых пространствах применяются широко.

Результаты исследования. Излагаем краткое содержание диссертационной работы.

В первой главе диссертации приводятся некоторые результаты по наилучшему среднеквадратическому приближению класса дифференцируемых периодических функций $f(x)$ тригонометрическими многочленами в пространстве $L_2 = L_2[0, 2\pi]$. На протяжении многих десятилетий решение экстремальных задач и их приложения привлекают внимание многих математиков, поскольку такие задачи широко используются при решении различных задач прикладной математики, имеющих оптимизационный характер. В экстремальных задачах, как правило, требуется найти точную верхнюю грань погрешности приближения заданным методом в определённом классе функций либо указать для этого класса наилучшее средство приближения.

Задачи наилучшего приближения периодических функций в пространстве L_2 ранее исследованы в работах Н.И. Черных [28, 29], Л.В. Тайкова [16–18], С.Б. Вакарчука [2, 4–6], А.А. Лигуна [10, 11], В.В. Шалаева [27], М.Ш. Шабозова [21–26] и многих других.

В последние годы для решения задач наилучшего полиномиального приближения функций в пространстве L_2 используются различные виды модуля непрерывности (см., например, работы [4–6, 13] и приведённую в них литературу).

Одной из центральных экстремальных задач теории аппроксимации функций является задача нахождения точных констант в неравенствах типа Джексона–Стечкина. Неравенством типа Джексона–Стечкина в произвольном нормированном пространстве X называют неравенство вида

$$E_{n-1}(f)_X \le \chi\, n^{-r}\omega_m(f^{(r)}, \tau/n)_X, \quad r \in \mathbb{Z}_+,\ \tau > 0$$

в котором погрешность приближения индивидуальной функции f оценивается с помощью заданной характеристики гладкости ω_m самой аппроксимируемой функции или через некоторые её производные $f^{(r)} \in X$. Очевидно, что наилучшая константа χ в общем случае может зависеть как от пространства X так и от параметров m, n, r и τ.

Первые точные константы в неравенстве Джексона были получены Н.П. Корнейчуком [8] в пространстве $C(0, 2\pi]$ в 1962 году и Н.И. Черных [28] в пространстве $L_2(0, 2\pi]$ в 1967 году. После результатов Н.П. Корнейчука и

Н.И. Черных внимание сосредоточилось на поиске точных постоянных в неравенстве Чексона–Стечкина и в других банаховых пространствах. В 1979 году Н.И. Черных [1] определил минимальное значение аргумента в модуль непрерывности, для которого точная константа в неравенстве Чексона–Стечкина в пространстве $L_p(-\pi,\,\pi]$ достигает глобального минимума. Нахождение таких аргументов, которые называют *оптимальными аргументами* или *точками Черных*, превратилось в одну из важных экстремальных задач в теории приближения функций

Обозначим через $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел; $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}\cup\{0\}$; $\mathbb{R}_+$ — множество положительных вещественных чисел; $L_2 := L_2[0,2\pi]$ — пространство измеримых по Лебегу суммируемых с квадратом 2π-периодических функций с конечной нормой

$$\|f\| := \|f\|_{L_2} = \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}|f(x)|^2dx\right)^{1/2}.$$

Множество всех тригонометрических многочленов

$$T_{n-1}(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}(\alpha_k\cos kx + \beta_k\sin kx)$$

степени $n-1$ обозначим через $\mathcal{T}_{2n-1}$.

Если $S_{n-1}(f,x)$ частичная сумма порядка $n-1$ ряда Фурье функции $f(x)$:

$$f(x) \sim \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx\Big),$$

то из свойства частичных сумм рядов Фурье функции ясно, что наилучшее приближение функции $f(x)$ в метрике пространства L_2 тригонометрическими многочленами $T_{n-1}\in\mathcal{T}_{2n-1}$ достигается частичной суммой ряда Фурье $S_{n-1}(f,x)$, то есть

$$E_{n-1}(f) := E_{n-1}(f,\mathcal{T}_{2n-1})_{L_2} = \inf\Big\{\|f-T_{n-1}\| : T_{n-1}(x)\in\mathcal{T}_{2n-1}\Big\} =$$

$$= \|f - S_{n-1}(f)\| = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} (a_k^2(f) + b_k^2(f)) \right\}^{1/2} = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f) \right\}^{1/2},$$

где для краткости введено обозначение $\rho_k^2(f) = a_k^2(f) + b_k^2(f),\ k \geq n$ и $a_k(f),\ b_k(f)$ – косинус- и синус-коэффициенты Фурье функции $f \in L_2$.

Через $L_2^{(r)}$ $(r \in \mathbb{Z}_+,\ L_2^{(0)} = L_2)$ обозначим множество функций $f \in L_2$, для которых производные $(r-1)$–го порядка, то есть $f^{(r-1)}$ являются абсолютно непрерывными, а производные порядка r, то есть $f^{(r)} \in L_2$.

Модуль непрерывности порядка m любой измеримой 2π-периодической функции суммируемой с квадратом $f(x) \in L_2$ определим равенством

$$\omega_m(f, t) = \sup\Big\{ \left\|\Delta_h^m f(\cdot)\right\| : \ |t| \leq h \Big\}, \tag{1}$$

где

$$\Delta_h^m f(x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} f\Big(x + (m-k)h\Big)$$

— разность порядка m функции f в точке x с шагом h.

При решении некоторых экстремальных задач в теории приближения вместо классического модуля непрерывности порядка m для функции $f \in L_2$ иногда удобнее использовать характеристику гладкости, эквивалентную величине (1), следующего вида

$$\Omega_m(f, t)_2 = \left\{ \frac{1}{t^m} \int_0^t \cdots \int_0^t \|\Delta_{\overline{h}}^m f(\cdot)\|^2 dh_1 \cdots dh_m \right\}^{1/2} \tag{2}$$

где $t > 0,\ \overline{h} := (h_1, \cdots, h_m)$; $\Delta_{\overline{h}}^m = \Delta_{h_1}^1 \circ \cdots \circ \Delta_{h_m}^1$;

$$\Delta_{h_j}^1 f(x) := f(x + h_j) - f(x),\ j = \overline{1, m}.$$

По этой причине вычисление точной постоянной

$$\mathbb{K}_{m,n,r}(t) := \sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f \neq \mathrm{const}}} \frac{n^r E_{n-1}(f)}{\Omega_m\big(f^{(r)}, t/n\big)}, \quad 0 < t \leq 2\pi$$

в неравенстве Джексона–Стечкина вида

$$E_{n-1}(f) \le \mathbb{K}_{m,n,r}(t)\frac{1}{n^r}\,\Omega_m\big(f^{(r)}, t/n\big)$$

также привлекает определённый интерес.

Следует отметить, что при изучении важных задач приближения в метрическом пространстве L_p $(0 < p < 1)$ усреднённые характеристики гладкости по функциям вида (2), были рассмотрены К.В. Руновским [14], а также Э.А. Стороженко, В.Г. Кротовым и П. Освальдом [15].

С целью обобщения результата, приведённого в работе А.А. Лигуна [10], М.Ш. Шабозов и Г.А. Юсупов исследовали следующую экстремальную характеристику [22]:

$$\chi_{m,n,r,p,s}(\varphi,h) = \sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\neq\mathrm{const}}} \frac{E_{n-1}(f)_2}{\left(\int\limits_0^h \omega_m^p(f^{(r)},t)_2\,\varphi(t)dt\right)^s}, \tag{3}$$

где $m,n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, p, s – положительные числа, $0 < h \le \pi/n$ а функция $\varphi(t)$ удовлетворяет всем условиям, приведённым в двойном неравенстве А.А. Лигуна. В работе [22] доказана справедливость соотношения

$$\Big\{\mathscr{A}_{n,h,p}^{r,m}(\varphi)\Big\}^{-1} \le \chi_{m,n,r,p,1/p}(\varphi,h) \le \Big\{\inf_{n\le k<\infty}\mathscr{A}_{k,h,p}^{r,m}(\varphi)\Big\}^{-1}$$

где $0 < p \le 2;\ 0 < h \le \pi/n$ и

$$\mathscr{A}_{k,h,p}^{r,m}(\varphi) := 2^{m/2}\left(k^{rp}\int\limits_0^h (1-\cos kt)^{mp/2}\,\varphi(t)dt\right)^{1/p}.$$

По нашему мнению, в соответствии с выражением (3), изучение экстремальной характеристики

$$\mathscr{K}_{m,n,r,p,s}(\varphi,h) := \sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\neq\mathrm{const}}} \frac{E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(f^{(r)},t)_2\,\varphi(t)dt\right)^s} \tag{4}$$

представляет значительный интерес, где $m,n\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $p,s\in\mathbb{R}_+\setminus\{0\}$; $0<h\le\pi/n$; $\varphi(t)$ — неотрицательная измеримая функция, суммируемая на отрезке $[0,h]$ и не эквивалентная нулю.

Во всех последующих случаях при вычислении значения точной верхней грани в общих соотношениях для всех функций $f\in L_2^{(r)}$ предполагается, что $f\ne\mathrm{const}$.

Вводим следующее обозначение:

$$\operatorname{sinc} t := \begin{cases} \dfrac{\sin t}{t}, & \text{если } t\neq 0,\\[2ex] 1, & \text{если } t=0. \end{cases}$$

Следующая теорема является своего рода обобщением результата (3) с экстремальной характеристикой (4).

Теорема 2.2.1. *Пусть* $m,n\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $0<p\le\infty$, $0<h\le\pi/n$, φ — *неотрицательная, измеримая и суммируемая на отрезке* $[0,h]$, *не эквивалентная нулю функция. В этом случае имеет место следующее равенство*

$$\mathscr{K}_{m,n,r,p,1/p}(\varphi,h)=$$

$$=\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(f^{(r)},t)_2\,\varphi(t)dt\right)^{1/p}}=\frac{1}{\inf\limits_{n\le k<\infty}\mathscr{B}_{k,h,p}^{r,m}(\varphi)},$$

где

$$\mathscr{B}_{k,h,p}^{r,m}(\varphi):=2^{m/2}\left(k^{rp}\int\limits_0^h(1-\operatorname{sinc} kt)^{mp/2}\,\varphi(t)dt\right)^{1/p}.$$

Из теоремы 2.2.1 вытекает ряд важных результатов, которые играют ключевую роль при исследовании экстремальных задач.

Следствие 2.3.1. *Пусть $0 < h \le 3\pi/(4n)$ и выполняются условия все теоремы 2.2.1. В этом случае имеет место следующее равенство*

$$\mathscr{K}_{m,n,r,p,1/p}(\varphi,h)=\left\{\mathscr{B}^{r,m}_{n,h,p}(\varphi)\right\}^{-1}.$$

Следствие 2.3.2. *Пусть* $0<\tau\le 3\pi/4$; $m,n\in\mathbb{N}$ *и*

$$\beta(\tau):=\frac{Si(\tau)-\sin\tau}{\tau-\sin\tau},\quad \eta(p):=\big(1+mp/2\big)^{1/p}.$$

Если при указанном значении $0<p\le 2$ для любого элемента $f\in L_2^{(r)}$, $r\in\mathbb{Z}_+$ функция $\Omega_m^p(f^{(r)})$ на отрезке $[0,3\pi/(4n)]$ не убывает, то величина наилучшего полиномиального приближения функции f удовлетворяет следующему неравенству

$$E_{n-1}(f)\le\frac{\eta(p)}{n^r}\big(2(1-sinc\,\tau)\big)^{-m/2}\Omega_m\big(f^{(r)},\tau\beta(\tau)/n\big).$$

Если функция $\Omega_m^p(f^{(r)})$ для всех значений p из $[p_*,p^*]\subset(0,2]$ на сегменте $[0,3\pi/(4n)]$ является выпуклой вверх тогда имеем:

$$E_{n-1}(f)\le\frac{\eta(p^*)}{n^r}\big(2(1-\mathrm{sinc}\,\tau)\big)^{-m/2}\,\Omega_m\big(f^{(r)},\tau\beta(\tau)/n\big).$$

Следствие 2.3.3. *Пусть $m,n\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $0<p\le\infty$, $q(t)$ – неотрицательная, измеримая на отрезке $[0,a]$ $(0<a\le\pi)$ суммируемая не эквивалентная нулю функция. Тогда имеет место следующее неравенство:*

$$\{\Phi_{m,r,p}(a,q,1)\}^{-1/p}\le$$

$$\le\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{2^{m/2}\,n^rE_{n-1}(f)}{\left\{\int\limits_0^a\Omega_m^p(f^{(r)},t/n)\,q(t)dt\right\}^{1/p}}\le\left\{\inf_{x\ge1}\,\Phi_{m,r,p}(a,q,x)\right\}^{-1/p},$$

где

$$\Phi_{m,r,p}(a,q,x)=x^{rp}\int\limits_0^a\big(1-sinc\,xt\big)^{mp/2}q(t)dt.$$

В этом случае, если функция q такая, что

$$\inf_{x\geq 1} \Phi_{m,r,p}(a,q,x) = \Phi_{m,r,p}(a,q,1)$$

то имеет место равенство

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{2^{m/2}\, n^r E_{n-1}(f)}{\left\{\int\limits_0^a \Omega_m^p(f^{(r)},t/n)\, q(t)dt\right\}^{1/p}} = \Big\{\Phi_{m,r,p}(a,q,1)\Big\}^{-1/p}.$$

Следствие 2.3.4. *Пусть $m,n\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $0<p\leq\infty$ и $q(t)=t^{rp-1}q_1(t)$ неотрицательная на отрезке $[0,a]$ $(0<a\leq\pi)$ измеримая суммируемая функция и q_1 — невозрастающая функция и не эквивалентная нулю. В этом случае имеет место равенство*

$$\inf_{x\geq 1} \Phi_{m,r,p}(a,t^{rp-1}q_1(t),x) = \Phi_{m,r,p}(a,t^{rp-1}q_1(t),1)$$

и верна следующая формула:

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{2^{m/2}\, n^r E_{n-1}(f)}{\left\{\int\limits_0^a \Omega_m^p(f^{(r)},t/n)\, t^{rp-1}q_1(t)dt\right\}^{1/p}} = \big\{\Phi_{m,r,p}(a,t^{rp-1}q_1(t),1)\big\}^{-1/p}.$$

Примечание: Следует отметить, что результат следствие 2.3.4 при $p=2$ был доказан в работе А.А. Лигуна [10].

Следствие 2.3.5. *Пусть $r\in\mathbb{N}$, $1/r\leq p\leq 2$, $0\leq\gamma\leq rp-1$, $0<\beta\leq\pi$, $\varphi_*(t)=\sin^\gamma\big(\beta t/h\big)$ и $0<t\leq h\leq\pi/n$. В этом случае для любых $m,n\in\mathbb{N}$ имеет место следующее равенство:*

$$\mathscr{K}_{m,n,r,p,1/p}(\varphi_*,h) = 2^{-m/2}n^{-r}\left\{\int\limits_0^h \big(1-\operatorname{sinc} nt\big)^{mp/2}\,\sin^\gamma\big(\beta t/h\big)dt\right\}^{-1/p}.$$

Хорошо известно [9, с. 127], что для произвольной функции $f\in L_2^{(r)}$ её промежуточные производные $f^{(s)}$ $(s=1,2,3,\ldots,r-1;\ r\geq 2, r\in\mathbb{N}, f^{(0)}\equiv f)$

также принадлежат пространству L_2. Поэтому изучение поведения величины наилучшего приближения $E_{n-1}(f^{(s)})$ в самом классе $L_2^{(r)}$ или в каком-либо его подклассе $\mathfrak{M}^{(r)} \subset L_2^{(r)}$ является несомненно интересным. Эта задача была рассмотрена и решена в работе [4] для модулей непрерывности специального типа. Здесь мы предлагаем решение поставленной задачи в случае, когда структурные характеристики функции $f \in L_2^{(r)}$ описываются через взвешенный средний модуль непрерывности $\Omega_m(f^{(r)}, t)$ с весом $\varphi(t)$.

Таким образом, задача наилучшего совместного приближения класса функций $\mathfrak{M}^{(r)} \subset L_2^{(r)}$ выражается в следующей форме: необходимо найти точное значение величины

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(s)}\big(\mathfrak{M}^{(r)}\big) := \sup\Big\{E_{n-1}(f^{(s)}) :\ f \in \mathfrak{M}^{(r)}\Big\}, \tag{5}$$

где $\mathfrak{M}$ — произвольное множество функций из пространства $L_2^{(r)}$.

В параграфе 2.4 с нашей точки зрения нахождение точной постоянной

$$\widetilde{\mathscr{K}}_{n,m,r,s}(t) := \sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^{r-s} E_{n-1}\big(f^{(s)}\big)}{\Omega_m\big(f^{(r)}, t\big)}$$

в неравенстве вида Джексона–Стечкина для совместного приближения функций $f \in L_2^{(r)}$ имеет большое значение.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 2.4.1. *Пусть* $n, m \in \mathbb{N}$; $r, s \in \mathbb{Z}_+$; $r \geq s$. *Тогда для всех чисел* $t \in (0, \pi/2]$ *имеет место равенство*

$$\widetilde{\mathscr{K}}_{n,m,r,s}(t) = \Big\{2\big(1 - \operatorname{sinc} t\big)\Big\}^{-m/2}.$$

В параграфе 2.5 мы определяем значение верхней грани наилучшего совместного приближения некоторых классов функций и их производных с помощью тригонометрических многочленов и соответствующих производных, то есть вычисляем точное значение величины (5) для классического модуля непрерывности высшего порядка.

Для решения задачи (5) сначала докажем следующую теорему.

Теорема 2.5.1. *Для всех значений $n,m\in\mathbb{N}$, $r,s\in\mathbb{Z}_+$ и $r\geq s$ имеет место следующее равенство*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{n^{r-s}\,E_{n-1}(f^{(s)})}{\left(\dfrac{n}{2}\displaystyle\int_0^{\pi/n}\omega_m^{2/m}(f^{(r)},t)\sin nt dt\right)^{m/2}}=\frac{1}{2^{m/2}}\,.$$

Из теоремы 2.5.1 можно получить следующие результаты.

Следствие 2.5.1. *Для любых $n,m\in\mathbb{N}$, $r,s\in\mathbb{Z}_+$, $r\geq s$ и произвольной функции $f\in L_2^{(r)}$ имеет место следующее неравенство:*

$$E_{n-1}(f^{(s)})\leq 2^{-m/2}n^{-(r-s)}\omega_m(f^{(r)},\pi/n). \tag{6}$$

Если функция $\omega_m^{2/m}(f^{(r)},t)$ для любого значения $t\in[0,\pi/(2n)]$ удовлетворяет условию

$$2\,\omega_m^{2/m}\big(f^{(r)},\pi/(2n)\big)\geq\omega_m^{2/m}\big(f^{(r)},t\big)+\omega_m^{2/m}\Big(f^{(r)},\frac{\pi}{n}-t\Big), \tag{7}$$

то в частном случае, если она является выпуклой вверх функция на сегменте $[0,\pi/n]$, можно точнее определить неравенство (6).

Следствие 2.5.2. *Для совокупности функций $f\in L_2^{(r)}$, для которых функция $\omega_m(f^{(r)},t)$ удовлетворяет условию (7), выполняется неравенство*

$$E_{n-1}(f^{(s)})\leq 2^{-m/2}n^{-(r-s)}\,\omega_m\big(f^{(r)},\pi/(2n)\big)$$

которое для функции $f\in L_2^{(r)}$, обращается в равенство.

В параграфе 2.6 найдены точные неравенства между наилучшим полиномиальным приближением и усреднённым значением модуля непрерывности функций $f\in L_2^{(r)}$ в норме пространства L_2.

Теорема 2.6.1. *Пусть $r\in\mathbb{Z}_+$, $n\in\mathbb{N}$. Справедливы следующие соотношения:*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{n^rE_{n-1}(f)}{\left\{\dfrac{1}{h}\displaystyle\int_0^h\omega^2(f^{(r)},t)dt\right\}^{1/2}}=\frac{nh}{2\big(nh-\sin nh\big)},\quad 0<nh\leq\pi/2;$$

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{\sqrt{2}\, n^r E_{n-1}(f)}{\left\{\dfrac{2}{h^2}\displaystyle\int\limits_0^h (h-t)\omega^2(f^{(r)},t)dt\right\}^{1/2}} = \left\{1-\left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-1/2}, \quad 0<nh\le\pi\,.$$

В третьей главе диссертации нашей основной целью является вычисление точных значений n-поперечников для некоторых классов дифференцируемых функций, заданных с помощью обобщённого модуля непрерывности высшего порядка в пространстве L_2. На основе некоторых ограничительных условий, накладываемых на отдельные рассматриваемые классы функций, возникает возможность нахождения точных значений n-поперечников.

Теперь мы приведём определения и необходимые обозначения, которые будут использоваться в дальнейшем изложении диссертации.

Пусть X — произвольное банахово пространство, $\mathfrak{M}\subset X$ — некоторый класс функций, и пусть $L_n\subset X$ — подпространство размерности n. Величину

$$E_n(\mathfrak{M})_X := E(\mathfrak{M},L_n)_X = \sup\Big\{E(f;L_n)_X:\ f\in\mathfrak{M}\Big\} =$$
$$= \sup\Big\{\inf\Big\{\|f-g\|_X:\ g\in L_n\Big\}:\ f\in\mathfrak{M}\Big\} \tag{8}$$

называют наилучшим приближением класса $\mathfrak{M}$ подпространствами L_n – заданной размерности n. Величина (8) характеризует отклонение класса L_n из подпространства L_n в метрике пространства X.

Если через $\mathcal{L}(X,L_n)$ обозначить совокупность всех непрерывных операторов $A:X\to L_n$, действующих из пространства X в произвольное подпространство $L_n\subset X$ размерности n, то возникает следующая задача: требуется найти величину

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{M})_X := \mathcal{E}(\mathfrak{M},L_n)_X =$$
$$= \inf\Big\{\sup\Big\{\Big\|f-Af\Big\|_X:\ f\in\mathfrak{M}\Big\}: A\in\mathcal{L}(X,L_n)\Big\} \tag{9}$$

и указать оператор $A_*\subset\mathcal{L}(X,L_n)$, для которого достигается точная нижняя грань в (9), то есть

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{M})_X = \sup\Big\{\Big\|f - A_* f\Big\|_X : \ f \in \mathfrak{M}\Big\}.$$

Задачу (9) можно рассмотреть в более узком смысле: нижнюю грань искать не среди всей совокупности непрерывных операторов $\mathcal{L}(X, L_n)$, действующих $A : X \to L_n$, а только в некотором конкретном классе таких операторов, установленном определённым образом. В частном случае можно выделить в $\mathcal{L}(X, L_n)$ класс непрерывных операторов $A : X \to L_n$ и исследовать величину:

$$\mathcal{E}_n^{\mathcal{L}}(\mathfrak{M})_X := \mathcal{E}^{\mathcal{L}}(\mathfrak{M}, L_n)_X =$$

$$= \inf\Big\{\sup\Big\{\Big\|f - Af\Big\|_X : \ f \in \mathfrak{M}\Big\} : A \subset \mathcal{L}(X, L_n)\Big\}. \tag{10}$$

Если существует такой оператор $A^* : X \to L_n$, для которого достигается нижняя грань в (10), то этот оператор задаёт метод наилучшего линейного приближения в задаче (10), то есть

$$\mathcal{E}_n^{\mathcal{L}}(\mathfrak{M})_X = \sup\Big\{\Big\|f - A^* f\Big\|_X : \ f \in \mathfrak{M}\Big\}.$$

Если в $\mathcal{L}(X, L_n)$ выделить класс операторов $\mathcal{L}^{\perp}(X, L_n)$ — то есть линейные проекционные операторы на подпространство L_n, для которых выполняется условие $Af = f$ для каждого $f \in L_n$ обычно исследуется величина:

$$\mathcal{E}_n^{\perp}(\mathfrak{M})_X := \mathcal{E}^{\perp}(\mathfrak{M}, L_n)_X =$$

$$= \inf\Big\{\sup\Big\{\Big\|f - Af\Big\|_X : \ f \in \mathfrak{M}\Big\} : A \subset \mathcal{L}^{\perp}(X, L_n)\Big\}. \tag{11}$$

Величины (8)–(11) связаны с задачей нахождения значений n-поперечников для различных классов $\mathfrak{M}$ функций.

Теперь напомним определения n-поперечников, значения которых для некоторых классов $\mathfrak{M}$ вычисляются в данной главе.

n-поперечником в смысле А.Н. Колмогорова [20] класса функций $\mathfrak{M}$ в пространстве X называется величина

$$d_n(\mathfrak{M}, X) = \inf\Big\{E(\mathfrak{M}, L_n)_X : \ L_n \subset X\Big\},$$

где нижняя грань по всем n-мерным подпространствам L_n в пространстве X.

Если опираться на наилучшее линейное приближение $\mathcal{E}^{\mathcal{L}}(\mathfrak{M}, L_n)_X$, то величина

$$\lambda_n(\mathfrak{M}, X) = \inf\Big\{\mathcal{E}^{\mathcal{L}}(\mathfrak{M}, L_n)_X : \ L_n \subset X\Big\}$$

называется линейным n-поперечником класса $\mathfrak{M}$ в пространстве X.

Аналогично, если за основу берётся величина (11), то рассматривается проекционный n-поперечник, то есть

$$\pi_n(\mathfrak{M}, X) = \inf\Big\{\mathcal{E}^{\perp}(\mathfrak{M}, L_n)_X : \ L_n \subset X\Big\}.$$

Кроме того, в теории приближения функций существуют ещё две величины, известные под названиями «n-поперечник Гельфанда» и «n-поперечник Бернштейна».

Пусть S – единичный шар в пространстве X, то есть

$$S = \big\{x \in X, \ \|x\|_X \le 1\big\}.$$

Величина

$$d^n(\mathfrak{M}, X) = \inf\Big\{\inf\Big\{\mathfrak{M} \cap L^n \subset \varepsilon S : \ \varepsilon > 0\Big\} : \ L^n \subset X\Big\},$$

где инфимум берётся по всем подпространствам L^n коразмерности n, называется «n-поперечником по Гельфанду», а величина

$$b_n(\mathfrak{M}, X) = \sup\Big\{\sup\Big\{\varepsilon S \cap L_{n+1} \subset \mathfrak{M} : \ \varepsilon > 0\Big\} : \ L_{n+1} \subset X\Big\}$$

«n-поперечником по Бернштейну».

Пусть $\Phi(t), \ t \ge 0$ — произвольная возрастающая функция, такая что для $t > 0$, $\Phi(t) > 0$ и выполняется $\lim\big\{\Phi(t) : \ t \to 0\big\} = \Phi(0) = 0$. Функция $\Phi(t)$ называется мажорантой.

Под $W^{(r)}(\Omega_m, \Phi)$ (где $r \in \mathbb{Z}_+,\ m \in \mathbb{N}$) понимается множество функций $f \in L_2^{(r)}$, производные r-го порядка которых $f^{(r)}$ удовлетворяют ограничению

$$\Omega_m\big(f^{(r)}, t\big) \le \Phi(t), \quad \forall t > 0.$$

Требуется определить величину совместного приближения класса функций $W^{(r)}(\Omega_m, \Phi)$, а именно — найти значение величины

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(s)}\big(W^{(r)}(\Omega_m, \Phi)\big) = \sup\Big\{E_{n-1}\big(f^{(s)}\big) :\ f \in W^{(r)}(\Omega_m, \Phi)\Big\}.$$

В этом разделе доказывается следующая теорема.

Теорема 3.1.1. *Пусть для заданного $n \in \mathbb{N}$ мажоранта $\Phi(t)$ удовлетворяет следующему условию:*

$$\frac{\Phi^2\big(\pi t/(2n)\big)}{\Phi^2\big(\pi/(2n)\big)} \ge \left(\frac{\pi}{\pi-2}\right)^m \cdot \begin{cases} \big(1-\operatorname{sinc}(\pi t/2)\big)^m, & \text{если} \quad 0 < t \le 2, \\ 2^m\left(1-\dfrac{1}{t}\right)^m, & \text{если} \quad 2 \le t < \infty. \end{cases} \tag{12}$$

В этом случае имеет место следующее равенство:

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(s)}\big(W^{(r)}(\Omega_m, \Phi)\big) = \left\{\frac{\pi}{2(\pi-2)}\right\}^{m/2} \cdot \frac{1}{n^{r-s}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right).$$

Множество мажорант $\{\Phi\}$, удовлетворяющих условию (12), непусто.

Для представления другого результата сначала введём следующий класс функций.

Пусть для произвольных значений $m \in \mathbb{N},\ r \in \mathbb{Z}_+$ и $u \in [0, 2\pi]$

$$W_m^{(r)}(\Phi) := \left\{ f \in L_2^{(r)} :\ \frac{\pi}{2u}\int_0^u \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t)\sin\frac{\pi}{u}t\,dt \le \Phi^2(u) \right\}$$

— класс функций из $L_2^{(r)}$. Вводим обозначение

$$\big(1-\cos nh\big)_* := \begin{cases} 1-\cos nh, & \text{если} \quad 0 < nh \le \pi, \\ 2, & \text{если} \quad nh > \pi \end{cases}$$

Теорема 3.1.2. *Пусть функция* Φ *удовлетворяет условию*

$$\Phi^2\left(\frac{u}{\mu}\right)\int\limits_0^{\mu\pi}(1-\cos t)_*\sin\frac{t}{\mu}\,dt \le 2\mu\,\Phi^2(u) \tag{13}$$

для любого $\mu > 0$ *и произвольного* $u \in (0, 2\pi]$. *Тогда для значений* $m, n \in \mathbb{N}$; $r, s \in \mathbb{Z}_+$; $r > s$, *выполняется равенство:*

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(s)}\big(W_m^{(r)}(\Phi)\big) = 2^{-m/2}\,n^{-r+s}\,\Phi^m\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Легко показать, что функция

$$\Phi(u) = u^{\alpha/2}, \quad \text{при} \quad \alpha = \frac{\pi^2}{8}$$

удовлетворяет условию (13).

Символом $W_{m,p}^{(r)}(\Phi)$ $(m, n \in \mathbb{N};\ 0 < p \le \infty)$ обозначим класс функций $f \in L_2^{(r)}$, удовлетворяющих для всех значений $0 < t \le 2\pi$ условию

$$\int\limits_0^t \Omega_m^p\big(f^{(r)}, \tau\big)\,d\tau \le \Phi^p(t).$$

С учётом научных работ [3, 30], через t_* обозначим значение аргумента $t \in (0, \infty)$ функции $\operatorname{sinc} t$, в котором она достигает своего минимального значения. Очевидно, что t_* является наименьшим из корней уравнения

$$t - \operatorname{tg} t = 0 \quad (4{,}49 < t_* < 4{,}51).$$

Вводим также следующее обозначение:

$$\big(1-\operatorname{sinc} t\big)_* := \begin{cases} 1-\operatorname{sinc} t, & \text{если } \ 0 < t \le t_*; \\ 1-\operatorname{sinc} t_* & \text{если } \ t \ge t_*. \end{cases}$$

В этом разделе доказывается следующая теорема.

Теорема 3.2.1. *Пусть $m,n,r\in\mathbb{N}$, $1/r\le p\le 2$. Если для всех значений $0<t\le 2\pi$ мажоранта Φ удовлетворяет следующему условию:*

$$\frac{\Phi^p(t)}{\Phi^p\big(\pi/n\big)}\ge\frac{\displaystyle\int\limits_0^t\big(1-\operatorname{sinc} n\tau\big)_*^{mp/2}\,d\tau}{\displaystyle\int\limits_0^{\pi/n}\big(1-\operatorname{sinc} n\tau\big)^{mp/2}\,d\tau},\tag{14}$$

тогда имеет место следующее равенство:

$$\delta_{2n}\big(W_{m,p}^{(r)}(\Phi),L_2\big)=\delta_{2n-1}\big(W_{m,p}^{(r)}(\Phi),L_2\big)=E_{n-1}\big(W_{m,p}^{(r)}(\Phi)\big)=$$

$$=2^{-m/2}\,n^{-r}\left\{\int\limits_0^{\pi/n}\big(1-\operatorname{sinc} nt\big)^{mp/2}\,dt\right\}^{-1/p}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

где $\delta_n(\cdot)$ — одна из приведённых выше n-поперечников: $b_n(\cdot)$, $d^n(\cdot)$, $d_n(\cdot)$, $\lambda_n(\cdot)$ или $\pi_n(\cdot)$. В этом случае множество всех мажорант, удовлетворяющих условию (14), непусто.

Легко показать, что функция $\Phi_*(t)=t^{\alpha/p}$, где

$$\alpha=\frac{\pi}{\displaystyle\int\limits_0^{\pi}\big(1-\operatorname{sinc} n\tau\big)^{mp/2}\,d\tau}$$

удовлетворяет условию (14) для произвольного $n\in\mathbb{N}$.

Теперь введём для произвольных $r\in\mathbb{Z}_+$ и $h>0$ следующие классы функций:

$$W^{(r)}\big(\Phi,h\big)=\left\{f\in L_2^{(r)}:\ \left(\frac{1}{h}\int\limits_0^h\omega^2\big(f^{(r)},t\big)\,dt\right)^{1/2}\le\Phi(h)\right\};$$

$$W_1^{(r)}\big(\Phi,h\big)=\left\{f\in L_2^{(r)}:\ \left(\frac{2}{h^2}\int\limits_0^h(h-t)\omega^2\big(f^{(r)},t\big)\,dt\right)^{1/2}\le\Phi(h)\right\}.$$

Для введённых классов функций доказаны следующие теоремы.

Теорема 3.2.2. *Если мажоранта* $\Phi(h)$ *для всех значений* $h \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ *удовлетворяет условию*

$$\frac{\Phi(h)}{\Phi\big(\pi/(2n)\big)} \geq \frac{\pi}{\pi-2} \cdot \begin{cases} \dfrac{nh-\sin nh}{nh}, & \text{если} \quad 0 < nh \leq \pi, \\ \dfrac{3nh-2\pi}{nh}, & \text{если} \quad nh > \pi \end{cases} \tag{15}$$

то выполняются равенства:

$$\delta_n\big(W^{(r)}(\Phi,h),L_2\big) = E_{n-1}\big(W^{(r)}(\Phi,h),L_2\big) = \left\{\frac{\pi}{2\big(\pi-2\big)} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right\}^{1/2} \cdot \frac{1}{n^r},$$

где $\delta_n(\cdot)$ *— одна из приведённых выше* n*-поперечников:* $b_n(\cdot)$, $d^n(\cdot)$, $d_n(\cdot)$, $\lambda_n(\cdot)$ *или* $\pi_n(\cdot)$. *Множество всех функций-мажорант, удовлетворяющих условию* (15), *непусто.*

Отметим, что функция $\Phi(h) = h^\alpha$, где $\alpha = \dfrac{2}{\pi-2}$, удовлетворяет условию (15) теоремы 3.2.2.

Теорема 3.2.3. *Пусть мажоранта* $\Phi(h)$ *для всех значений* $h \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}$ *и* $r \in \mathbb{Z}_+$ *удовлетворяет условию*

$$\frac{\Phi(h)}{\Phi\big(\pi/n\big)} \geq \frac{\pi^2}{\pi^2-4} \cdot \begin{cases} 1-\left(\dfrac{2}{nh}\sin\dfrac{nh}{2}\right)^2, & \text{если} \quad 0 < nh \leq \pi, \\ 1-\dfrac{4}{\pi^2}+2\left(1-\dfrac{\pi}{nh}\right)^2, & \text{если} \quad nh > \pi \end{cases} \tag{16}$$

Тогда имеют место равенства:

$$\delta_n\big(W_1^{(r)}(\Phi,h),L_2\big) = E_{n-1}\big(W_1^{(r)}(\Phi,h),L_2\big) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\frac{\pi^2}{\pi^2-4} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)\right\}^{1/2} \cdot \frac{1}{n^r},$$

где $\delta_n(\cdot)$ *— любой из вышеперечисленных* n*-поперечников.*

Множество мажорант, удовлетворяющих условию (16), *непусто.*

Функция $\Phi(h) = h^\alpha$, $\alpha = \dfrac{8}{\pi^2-4}$ удовлетворяет условию (16).

ВЫВОДЫ

Основные научные результаты диссертационной работы заключаются в следующем:

- найдены точные значения верхних граней наилучшего совместного приближения и их промежуточные производные тригонометрическими полиномами, а также соответствующие производные для некоторых классов периодических функций, принадлежащих пространству $L_2[0, 2\pi]$ [1-A, 2-A, 5-A, 6-A, 7-A];
- найдены новые точные соотношения между величинами наилучшего среднеквадратического приближения дифференцируемых функций и интегралами, содержащими значения величины среднеквадратического модуля непрерывности порядка m от значений верхней границы в гильбертовом пространстве $L_2[0, 2\pi]$ [1-A, 2-A, 3-A, 4-A];
- получены точные значения бернштейновских, колмогоровских, гельфандовских, линейных и проекционных n-поперечников классов функций, которые задаются с помощью модуля непрерывности высшего порядка [1-A, 4-A, 8-A].

Рекомендации по практическому использованию результатов.

Результаты, полученные в диссертационной работе, имеют теоретическую значимость и широкие возможности для практического применения. Научные результаты и разработанные выводы могут быть использованы для дальнейшего развития теории аппроксимации функций и других экстремальных задач теории приближения. Полученные выводы и доказанные формулы могут быть применены в следующих научных направлениях:

1) Определение точной верхней границы наилучшего приближения многомерных функций;
2) Каждый раздел диссертации может быть использован в качестве учебного материала на специализированных курсах для студентов старших курсов по направлениям математических и прикладных дисциплин;
3) Исследование функциональных пространств и их структурных свойств, в которых рассматриваются задачи приближения функций;

4) Определение скорости сходимости функций и оценка точности приближений в функциональных пространствах, что имеет существенное значение для применения методов аппроксимации.

Список литературы

[1] Arestov V.V., Cernykh N.I. On the L_2-approximation of periodic function by trigonometric polynomials // Approximation and function spaces: Proc. Intern. Conf. (Gdansk, 1979). Amsterdam. – 1981. – PP. 25–43.

[2] Вакарчук С.Б. О наилучших полиномиальных приближениях в L_2 некоторых классов 2π-периодических функций и точных значениях их n-поперечников // Матем. заметки. – 2001. – Т.70. – №3. – С. 334–345.

[3] Vakarchuk S.B., Zabutna V.I. Widths of function classes from L_2 and exact constants in Jackson type inequalities // East Journal on Approximation. Bulgarian Academy of Sciences: Sofia. 2008. V.14, №4. P.411-421.

[4] Вакарчук С.Б., Забутная В.И. Неравенства типа Джексона–Стечкина для специальных модулей непрерывности и поперечники функциональных классов в пространстве L_2 // Матем. заметки. – 2012. – Т.92. – №4. – С. 497–514.

[5] Vakarchuk S.B., Shabozov M.Sh., Zabutnaya V.I. Structural characteristics of functions from L_2 and the exact values of widths of some functional classes // Journal of Mathematical Sciences. – 2015. – V.206. – №1. – PP. 97–114.

[6] Вакарчук С.Б., Забутная В.И. Неравенства между наилучшими полиномиальными приближениями и некоторыми характеристиками гладкости в пространстве L_2 и поперечники классов функций // Матем. заметки. – 2016. – Т.99. – №2. – С. 215–238.

[7] Гаркави А.Л. О совместном приближении периодической функции и ее производных тригонометрическими полиномами // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1960. – Т.24. – №1. – С. 103–128.

[8] Корнейчук Н.П. Точная константа в теореме Д.Джексона о наилучшем равномерном приближении непрерывных периодических функций // ДАН СССР. – 1962. – Т.145. – №3. – С. 514-516.

[9] Корнейчук Н.П. Точные константы в теории приближения. – М.: Наука. – 1978. – 424 с.

[10] Лигун А.А. Некоторые неравенства между наилучшими приближениями и модулями непрерывности в пространстве L_2 // Матем. заметки. – 1978. – Т.24. – №6. – С. 785–792.

[11] Лигун А.А. О поперечниках некоторых классов дифференцируемых периодических функций // Матем. заметки. – 1980. – Т.27. – №1. – С. 61–75.

[12] Малозёмов В.Н. Совместное приближение функции и её производных. – Л.: Изд-во ЛГУ. – 1973. – 112 с.

[13] Руновский К.В. Прямые и обратные теоремы теории приближений в пространствах $L_p,\ 0 < p < 1$ // Докл. РАН. – 1993. – Т.331. – №6. – С. 684–686.

[14] Руновский К.В. Прямая теорема теории приближений для общего модуля гладкости // Матем. заметки. – 2014. – Т.95. №6. – С. 899–910.

[15] Стороженко Э.А., Кротов В.Г., Освальд П. Прямые и обратные теоремы типа Джексона в пространствах $L_p,\ 0 < p < 1$ // Матем. сб. – 1975. – Т.98. – №3. – С. 395–415.

[16] Тайков Л.В. Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности функций из L_2 // Матем. заметки. – 1976. – Т.20. – №3. – С. 433–438.

[17] Тайков Л.В. Поперечники некоторых классов аналитических функций // Матем. заметки. – 1977. – Т.22. – №2. – С. 285–295.

[18] Тайков Л.В. Наилучшие приближения дифференцируемых функций в метрике пространства L_2 // Матем. заметки. – 1977. – Т.22. – №4. – С. 535–542.

[19] Тиман А.Ф. Теория приближения функций действительного переменного. — М.: Физматгиз. – 1960. – 624 с.

[20] Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений. – М.: МГУ. – 1976. – 325 с.

[21] Шабозов М.Ш. Поперечники некоторых классов периодических дифференцируемых функций в пространстве $L_2[0, 2\pi]$ // Матем. заметки. – 2010. – Т.87. – №4. – С. 616–623.

[22] Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 некоторых классов 2π-периодических функций и точные значения их поперечников // Матем. заметки. – 2011. – Т.90. – №5. – С. 764–775.

[23] Shabozov M.Sh., Yusupov G.A. Widths of Certain Classes of Periodic Functions in L_2 // Journ. of Approx. Theory. – 2012. – V.164. – Issue 1. – PP. 869-878.

[24] Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А., Палавонов К.К. Среднеквадратическое приближение периодических функций и значения поперечников классов функций из L_2 // Доклады НАН Таджикистана. – 2018. – Т.61. – №1. С. 12–18.

[25] Шабозов М.Ш., Шабозова А.А. Некоторые точные неравенства типа Джексона – Стечкина для периодических дифференцируемых в смысле Вейля функций в L_2 // Тр. ИММ УрО РАН. – 2019. – Т.25. – №4. – С. 255–264.

[26] Шабозов М.Ш. Неравенства между наилучшими полиномиальными приближениями и некоторыми характеристиками гладкости функций в L_2 // Матем. заметки. – 2021. – Т.110. – №3. – С. 450–458.

[27] Шалаев В.В. О поперечниках в L_2 классов дифференцируемых функций, определяемых модулями непрерывности высших порядков // Укр. матем. журнал. – 1991. – Т.43. – №1. – С. 125–129.

[28] Черных Н.И. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 // Матем. заметки. – 1967. – Т.2. – №5. – С. 513–522.

[29] Черных Н.И. Неравенство Джексона в $L_p(0, 2\pi)$ с точной константой // Тр. МИАН. – 1992. – Т.198. – С. 232–241.

[30] Yusupov G.A. Best polynomial approximations and widths of certain classes of functions in the space L_2 // Eurasian Math. J. – 2013. – V.4. – №3. – PP. 120–126.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

В журналах, зарегистрированных в реестре ВАК при Президенте Республики Таджикистан:

[1-А] Шамсиддинов С.А. Наилучшее полиномиальное приближение и поперечники множеств в пространстве L_2 [Текст] / Н.М. Мамадаёзов, С.А. Шамсиддинов // Доклады НАН Таджикистана. – 2021. – Т.64. – №1-2. – С. 26–34.

[2-А] Шамсиддинов С.А. Точные константы в неравенствах типа Джексона–Стечкина для наилучших совместных приближений функции и их последовательных производных в L_2 [Текст] / М.Ш. Шабозов, С.А. Шамсиддинов // Доклады НАН Таджикистана. – 2022. – Т.65. – №5-6. – С. 286–293.

В других изданиях:

[3-А] Шамсиддинов С.А. Об одной оптимизационной задаче [Текст] / М. Азизов, С.А. Шамсиддинов // Материалы международной конференции «Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений», посвящённой 70-летию со дня рождения академика Национальной академии наук Таджикистана, доктора физ.-мат. наук, профессора К.Х. Бойматова (Душанбе, 25-26 декабря 2020 г.). – С. 50–51.

[4-А] Шамсиддинов С.А. Точное неравенство Джексона-Стечкина в L_2 между наилучшим совместным приближением и обобщённым модулем непрерывности [Текст] / С.А. Шамсиддинов, Х.М. Шосафаров // Материалы международной конференции «Современные проблемы теории чисел и математического анализа», посвящённой 80-летию со дня рождения доктора физ.-мат. наук, профессора Дододжона Исмоилова (г.Душанбе, 29-30 апреля 2022 г.). – С. 253-256.

[5-А] Шамсиддинов С.А. О точных константах в неравенствах типа Джексона–Стечкина для наилучших совместных приближений функции в L_2 [Текст] / С.А. Шамсиддинов // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математического анализа и теории функций», посвящённой 70-летию академика НАН Таджикистана М.Ш.Шабозова (Душанбе, 24-25 июня 2022 г.). – С. 281–284.

[6-А] Шамсиддинов С.А. Неравенства типа Джексона–Стечкина для наилучших совместных приближений из L_2 [Текст] / С.А. Шамсиддинов // Материалы международной научно-теоретической конференции «Вклад математики в развитие естественных, точных и математических наук», двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических наук (2020 – 2040 годы). (Душанбе, 30-31 мая 2023 г.). – С. 332–335.

[7-А] Шамсиддинов С.А. Неравенства типа Джексона–Стечкина для наилучших совместных приближений функций и их производных в L_2 [Текст] / С.А. Шамсиддинов // Материалы международной научной-практической конференции «Современные проблемы математики и её преподавания», посвященной 35-летию государственной независимости Республики Таджикистан; 30-летию Конституции Республики Таджикистан; «Двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических наук в сфере науки и образования» и 70-летию доктора физ.-мат. наук К. Тухлиева (г.Худжанд, 21-22 июня 2024 г.). – С. 111-114.

[8-А] Шамсиддинов С.А. Наилучшее совместное приближение периодических функций, определяемых модулями непрерывности [Текст] / У.Н. Зеваршоев, С.А. Шамсиддинов // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математики и её приложения», посвящённой 75-летию со дня рождения академика НАНТ, доктора физ.-мат. наук, профессора К.Х. Бойматова и 75-летию доктора физ.-мат. наук, заведующего отделом дифференциальных уравнений Института математики им. А. Джураева НАНТ, профессора Г. Джангибекова (г.Душанбе, 30-31 мая 2025 г.). – С. 354–357.

АННОТАТСИЯИ
диссертатсияи Шамсиддинзода Саъдӣ Абдуқосим дар мавзӯи «Доимиҳои аниқ дар нобаробарии намуди Ҷексон–Стечкин барои наздиккунии муштараки беҳтарини функсияҳо ва ҳосилаҳои пайдарпайи онҳо дар фазои L_2» барои дарёфти дараҷаи илмии доктори фалсафа (PhD – доктор аз рӯи ихтисоси 6D060100 – Математика: 6D060102 – Таҳлили ҳақиқӣ, комплексӣ ва функсионалӣ)

Вожаҳои калидӣ: *нобаробарии Ҷексон – Стечкин, модули бефосилагии умумикардашуда, наздиккунии муштараки беҳтарин, бисёраъзогиҳои тригонометрӣ, n-қутрҳо.*

Мақсади кор. Ҳадафи асосии кори диссертатсионӣ дар ҳалли масъалаҳои экстремалӣ ифода меёбад, ки ба ёфтани қиматҳои аниқи сарҳадҳои болоии наздиккунии муштараки беҳтарини функсияҳои даврӣ ва ҳосилаҳои фосилавии онҳо тавассути бисёраъзогиҳои тригонометрӣ дар метрикаи фазои гилбертии $L_2[0, 2\pi]$ вобаста мебошанд.

Усулҳои тадқиқот. Тадқиқоти пешниҳодшуда ба омӯзиши масъалаҳои гуногуни экстремалӣ вобаста аст, ки дар доираи назарияи наздиккунии муштараки беҳтарини функсияҳои дифференсиронидашавандаи 2π-даврӣ ва ҳосилаҳои пайдарпайи онҳо тавассути бисёраъзогиҳои тригонометрӣ баррасӣ мегарданд. Дар рисолаи илмӣ равишҳо ва усулҳои муосири ҳалли масъалаҳои экстремалӣ дар фазоҳои банахӣ ба таври васеъ татбиқ шудаанд.

Навоварии илмии тадқиқот. Ҳамаи натиҷаҳои дар кори диссертатсионӣ овардашуда, нав мебошанд. Натиҷахои асосии гирифташуда чунинанд:

- қимати аниқи сарҳадҳои болоии наздиккунии муштараки беҳтарин ва ҳосилаҳои пайдарпайи он тавассути бисёраъзогиҳо ва ҳосилаҳои мутаносиби онҳо барои баъзе синфи функсияҳои даврӣ, ки ба фазои $L_2[0, 2\pi]$ тааллуқ доранд, ёфта шуданд;
- нобаробариҳои нави аниқ байни бузургиҳои наздиккунии миёнаквадратии беҳтарини функсияҳои дифференсиронидашаванда ва интегралҳое, ки қимати модули бефосилагии миёнакардашудаи тартиби m-умро аз қимати сарҳадӣ дар фазои гилбертии $L_2[0, 2\pi]$ дар бар мегиранд, ёфта шуданд;
- қимати аниқи n-қутрҳои бернштейнӣ, колмогоровӣ, гелфандӣ, хаттӣ ва проексионии синфҳои функсияҳое ёфта шуданд, ки ба воситаи модули бефосилагии тартиби олӣ дода мешаванд.

Арзишҳои назариявӣ ва амалӣ. Кори диссертатсионӣ хусусияти фундаменталии назариявӣ дорад. Натиҷаҳо ва усулҳое, ки дар диссертатсия пешниҳод шудаанд, метавонанд барои таҳлили масъалаҳои экстремалӣ дар назарияи наздиккунии функсияҳои якчандтағйирёбанда истифода шаванд, ки ҳам ба соҳаҳои маҳдуд ва ҳам ба тамоми ҳамвории дученака татбиқшаванда мебошанд.

АННОТАЦИЯ

диссертации Шамсиддинзода Саъди Абдукосим на тему «Точные константы в неравенстве типа Джексона–Стечкина для наилучшего совместного приближения функций и их последовательных производных в пространстве L_2», представленной на соискание учёной степени доктор философии (PhD) – доктор по специальности 6D060100 – Математика: 6D060102 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Ключевые слова: *неравенства Джексона – Стечкина, обобщённый модуль непрерывности, наилучшее совместное приближение, тригонометрический полином, n-поперечники.*

Цель работы. Настоящее исследование посвящено изучению экстремальных задач, возникающих в рамках теории наилучшего совместного приближения дифференцируемых 2π-периодических функций и их последовательных производных с помощью тригонометрических многочленов. В работе применяются современные методы и подходы к решению экстремальных задач в банаховых пространствах, что позволяет получить новые результаты и расширить возможности практического применения теории аппроксимации.

Методы исследования. Здесь рассматриваются различные экстремальные задачи, рассматриваемых в рамках теории наилучшего совместного приближения дифференцируемых 2π-периодических функций и их последовательных производных с помощью тригонометрических многочленов. В диссертации современные подходы и методы решения экстремальных задач в банаховых пространствах применяются широко.

Научная новизна. Все полученные в диссертационной работе результаты являются новыми. Получены следующие основные результаты:

- найдены точные значения верхних границ наилучшего совместного приближения и его последовательных производных с помощью многочленов и соответствующих им производных для некоторых классов периодических функций, принадлежащих пространству $L_2[0, 2\pi]$;
- найдены новые точные неравенства между величинами наилучшего среднеквадратичного приближения дифференцируемых функций и интегралами, содержащими усреднёнными значениями модулей непрерывности m-го порядка и значения верхних граней в гильбертовом пространстве $L_2[0, 2\pi]$;
- найдены точные значения бернштейновских, колмогоровских, гельфандовских, линейных и проекционных n-поперечников классов функций, задаваемых модулями непрерывности высшего порядка.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Результаты и методы, представленные в диссертации, могут быть использованы для анализа экстремальных задач в теории приближения функций нескольких переменных, применимых как к областям с границами, так и ко всей двумерной поверхности.

ABSTRACT

of the dissertation by Shamsiddinzoda Saadi Abduqosim entitled «Exact constants in Jackson–Stechkin type inequalities for the best simultaneous approximation of functions and their successive derivatives in the L_2 space» submitted for the degree of Doctor of Philosophy (PhD) in the specialty 6D060100 – Mathematics (6D060102 — Real, Complex and Functional Analysis)

Key words: *Jackson – Stechkin inequalities, generalized modulus of continuity, best simultaneous approximation, trigonometric polynomial, n-widths.*

The purpose of research. The present study is devoted to the investigation of extremal problems arising within the theory of best simultaneous approximation of differentiable 2π-periodic functions and their successive derivatives by means of trigonometric polynomials. Modern methods and approaches to solving extremal problems in Banach spaces are employed, which makes it possible to obtain new results and to extend the scope of practical applications of approximation theory.

Research methods. Various extremal problems arising within the theory of best simultaneous approximation of differentiable 2π-periodic functions and their successive derivatives by trigonometric polynomials are considered here. In the dissertation, modern approaches and methods for solving extremal problems in Banach spaces are widely applied.

Scientific novelty. All the results obtained in the thesis are new. The following results were obtained:

- Exact values of the upper bounds for the best simultaneous approximation and its successive derivatives by polynomials, as well as for the corresponding derivatives, have been obtained for certain classes of periodic functions belonging to the $L_2[0, 2\pi]$ spaces;
- new exact inequalities have been established between the quantities of the best mean-square approximation of differentiable functions and integrals involving the averaged values of m-th order moduli of continuity, as well as the values of the upper bounds in the Hilbert space $L_2[0, 2\pi]$;
- exact values of the Bernstein, Kolmogorov, Gelfand, linear, and projection n-widths of classes of functions defined by higher-order moduli of continuity have been obtained.

Theoretical and practical value. The work is of a theoretical nature. The results and methods presented in the dissertation can be applied to the analysis of extremal problems in the theory of approximation of multivariable functions, applicable both to domains with boundaries and to the entire two-dimensional surface.