ВАЗОРАТИ МАОРИФ ВА ИЛМИ ҶУМҲУРИИ ТОҶИКИСТОН
ДОНИШГОҲИ ДАВЛАТИИ ОМӮЗГОРИИ ТОҶИКИСТОН БА НОМИ САДРИДДИН АЙНӢ

Бо ҳуқуқи дастнавис

ТДУ-517.2 (575.3)

ТКБ-22.1 (2 тоҷик)

З- 91

ЗУЛФОНОВ ШАҲРИЁР МУЛОЗУЛФОНОВИЧ

ТАТБИҚИ ҲИСОБИ ОПЕРАТСИОНӢ ДАР ҲАЛЛИ БАЪЗЕ СИНФҲОИ МУОДИЛАҲОИ ДИФФЕРЕНСИАЛӢ ВА ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНСИАЛӢ БО ҲОСИЛАҲОИ ХУСУСӢ

АВТОРЕФЕРАТИ

диссертатсия барои дарёфти дараҷаи илмии доктори фалсафа (PhD), доктор аз рӯйи ихтисоси 6D060100 – Математика (6D060102 - Муодилаҳои дифференсиалӣ, системаҳои динамикӣ ва идоракунии оптималӣ)

ДУШАНБЕ-2025

Кори диссертатсионӣ дар кафедраи анализи математикии факултети математикаи Донишгоҳи давлатии омӯзгории Тоҷикистон ба номи Садриддин Айнӣ иҷро гардидааст.

Роҳбари илмӣ: **Илолов Мамадшо Илолович,** академики Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон, доктори илмҳои физикаю математика, профессор

Муқаризони расмӣ: **Муҳсинов Ёдгор Мирзоевич** - д.и.ф.м., профессори кафедраи фанҳои риёзӣ ва табиатшиносии муосири Донишгоҳи давлатии ҳуқуқ, бизнес ва сиёсати Тоҷикистон.

Қозиев Гулназар Мавлоназарович – н.и.ф.м., мудири кафедраи риёзиёт дар иқтисодиёти Донишгоҳи байналмиллалии сайёҳӣ ва соҳибкории Тоҷикистон

Муассисаи пешбар: Институти математика ба номи А.Ҷураеви АМИ Тоҷикистон.

Ҳимоя санаи «7» январи соли 2026 соати 15:30 дар ҷаласаи шурои диссертатсионии 6D.КАО-011 назди Донишгоҳи миллии Тоҷикистон, ки дар суроғаи: 734025, Шаҳри Душанбе, кӯчаи Буни-Ҳисорак, корпуси 17, аудиторияи 203 ҷойгир аст, баргузор мешавад.

E-mail: alisher_gaforov@mail.ru; рақами телефони котиби илмӣ +992900766603.

Бо диссертатсия ва автореферати он тавассути сомонаи http://www.tnu.tj. ва дар китобхонаи илмии Донишгоҳи миллии Тоҷикистон шинос шудан мумкин аст.

Автореферат фиристода шудааст «_____» «____» 2025с.

Котиби илмӣ шурои диссертатсионии 6D.КАО-011,
номзади илмҳои физика ва математика Ғафоров А.Б.

Муқаддима

Мубрамияти мавзуи таҳқиқот. Дар даҳсолаҳои охир назария ва амалияи муодилаҳои дифференсиалӣ ва интегро-дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ, ки шарҳи риёзии масъалаҳои мураккаб ва хеле муҳими рӯйдодҳои физика, химия, биология ва технологияи муосир мебошанд, рушду пешрафти назаррас дорад. Тарзҳои хеле мухталифи ҳалли масъалаҳои ибтидоӣ ва ибтидоӣ-канорӣ барои ин муодилаҳо коркард шудаанд. Дар байни онҳо методи табдилотҳои интегралӣ мақоми алоҳида дорад. Дар навбати худ муҳимтарини ин методҳо методи табдилоти интегралии Лаплас-Карсон барои муодилаҳои хаттӣ аз $n-$ тағирёбанда мебошад, ки солҳои охир дар таваҷҷуҳ ва диққати риёзидонҳо, физикҳо ва дигар тадқиқотчиён қарор дорад. Мақолаҳо ва монографияҳои илмии Ю. А. Бричков ва А. П. Прудников [3], Р. С. Даҳия [22, 23], А. Бабаханӣ [21], Р. С. Даҳия ва Ҷ. С. Дебнат [24] ва инчунин В. А. Диткин ва А. П. Прудников [5, 25] ба усулҳои нави ҳисобкунии табдилотҳои роста ва баръакси Лаплас-Карсон барои функсияҳои дутағирёбанда ва бисёртағирёбанда бахшида шудаанд.

Рисолаи диссертатсионӣ ба татбиқи як қатор синфҳои муодилаҳо (муодилаи дифференсиалии телеграф, муодилаи интегро-дифференсиалии телеграф, муодилаҳо бо ҳосилаҳои хусусии тартиби гуногун ва масъалаҳои ибтидоиву канорӣ барои онҳо) тавассути табдилоти Лаплас-Карсон бахшида шудааст. Барои пайдо кардани намуди ошкори ҳалли муодилаҳои номбурда зарурияти ҳисоббарории табдилотҳои роста ва баръакси интегралӣ аз функсияҳои бисёртағирёбанда ба миён меояд. Дар диссертатсия ҳисобкуниҳои операционӣ барои чунин функсияҳо пешниҳод шудаанд.

Дараҷаи коркарди илмии мавзуи таҳқиқот. Барои классҳои на он қадар васеи муодилаҳои дифференсиалӣ ва муодилаҳои интегро-дифференсиалӣ бо истифода аз ҳисобкуниҳои операционӣ дар корҳои илмии Й. Фучита [27,28], М. Ф. Абдулкаримов [1], В. А. Илин [11], Е. А. Козлова [29], А. А. Дубков [6], С. С. Орлов [17], Э. И. Семенов ва А. А. Косов [19] мавриди таҳқиқ қарор гирифтаанд. Масъалаҳои ибтидоӣ ва ибтидоӣ-канорӣ барои муодилаҳои дифференсиалӣ ва муодилаҳои интегро-дифференсиалии телеграф ва инчунин, барои муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусии тартиби ду дар мақолаҳои илмии М. И. Илолов, Ш. М. Зулфонов [10,12,13,14], Ш. М. Зулфонов $[2-\text{М}, 5-\text{М}]$ таҳқиқ карда шудаанд. Барои чунин масъалаҳо тавассути табдилоти интегралии Лаплас-Карсон тасвири ҳалли ошкор пешниҳод карда шудааст.

Алоқаи кори таҳқиқотӣ бо барномаҳо, лоиҳаҳо ва мавзӯҳои илмӣ. Кори диссертатсионӣ дар доираи баамалбарории нақшаи перспективии корҳои илмӣ-тадқиқотии кафедраи таҳлили математикии факултети математикаи Донишгоҳи давлатии омӯзгории Тоҷикистон ба номи Садриддин Айнӣ барои солҳои 2021-2025 аз рӯи мавзуи “Тадқиқот оид ба назарияи муодилаҳои дифференсиалӣ ва тадбиқи он ” иҷро гардидааст.

ТАВСИФИ УМУМИИ ТАҲҚИҚОТ

Мақсади таҳқиқот. Мақсади асосии рисолаи диссертатсионӣ муайянкунии тасвири баъзе функсияҳо ва тасвири баъзе интегралҳо мебошад, ки барои ёфтани ҳалли ошкори баъзе синфҳои муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусии тартиби як ва ду бо шартҳои ибтидоӣ ва канории додашуда истифодашаванда буда, инчунин барои ёфтани ҳалли ошкори муодилаи дифференсиалии телеграф бо шартҳои ибтидоӣ ва канории додашуда ва муодилаи интегро-дифференсиалии телеграф бо шартҳои ибтидоӣ ва канории додашуда мавриди васеи истифода қарор мегиранд. Тасвири функсияҳо ва интегралҳое, ки дар рисолаи диссертатсионӣ нишон додем на фақат барои ҳалли муодилаи дифференсиалии телеграф, муодилаи интегро-дифференсиалии телеграф ва муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусии тартиби як ва ду истифода карда мешаванд, балки барои ёфтани ҳалли муодилаи интегро-дифференсиалии ба муодилаи гармигузаронӣ ва мавҷ овардашаванда ва ғайра низ истифодашавандаанд.

Вазифаҳои таҳқиқот. Мувофиқи мақсади гузоштаашудаи таҳқиқот, масъалаҳои зерин мушаххас карда шудаанд:

1. Тасвири интегралҳои намуди

$$\int_{0}^{\min(x,t)} e^{-as} f(x-s,t-s) g(s) ds\,;$$

$$\int_{0}^{\min(x,t)} \int_{0}^{t-s} a(t-s-\tau)\, f(x-s;\tau) e^{-a_1 s}\, ds d\tau;$$

муайян карда шавад;

2. Ҳалли умумии муодилаи дифференсиалии телеграф, муодилаи интегро-дифференсиалии телеграф ва муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусии тартиби як ва ду муайян карда шавад;
3. Муодилаи интегро-дифференсиалии телеграф барои ядрои функсияи хаттӣ (графикаш хати рост) ва функсияи ғайрихаттӣ (графикаш хати каҷ) бо шартҳои ибтидоӣ ва канории додашуда ҳал карда шавад;
4. Усули ҳисоби оператсионӣ дар ҳалли муодилаҳои дифференсиалӣ ва интегро-дифференсиалӣ татбиқ карда шавад.

Объекти таҳқиқот. Муодилаи дифференсиалии телеграф бо шартҳои ибтидоӣ ва канории додашуда ва муодилаи интегро-дифференсиалии телеграф барои ядрои функсияи хаттӣ (графикаш хати рост) ва функсияи ғайрихаттӣ (графикаш хати каҷ) бо шартҳои ибтидоӣ ва канории додашуда мебошад.

Предмети таҳқиқот. Предмети таҳқиқот муайянкунии тасвири функсияҳо, интегралҳо ва ёфтани ҳалли ошкори . муодилаи дифференсиалии телеграф, муодилаи интегро-дифференсиалии телеграф ва муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусии тартиби як ва ду мебошад.

Навгонии илмии таҳқиқот. Дар рисолаи диссертатсионӣ натиҷаҳои асосии зерин ба даст оварда шудаанд:

1. ба воситаи табдилоти Лаплас-Карсон тасвири функсияҳо ва интегралҳое, ки татбиқи васеи амалӣ доранд муайян карда шудаанд;
2. ҳалли умумии муодилаи дифференсиалии телеграф бо шартҳои ибтидоӣ ва канории додашуда муайян карда шудааст;
3. ҳалли умумии муодилаи интегро-дифференсиалии телеграф барои ядрои функсияи хаттӣ (графикаш хати рост) ва функсияи ғайрихаттӣ (графикаш

хати каҷ) бо шартҳои ибтидоӣ ва канории додашуда муайян карда шудааст;

4. ҳалли умумии муодилаҳои дифференсиалии хаттӣ бо ҳосилаҳои хусусии тартиби як ва ду бо шартҳои ибтидоӣ ва канории додашуда ва ҳалли муодилаи интегро-дифференсиалии ба муодилаи мавҷ овардашаванда муайян карда шудааст.

Аҳамияти назариявӣ ва илмию амалии таҳқиқот. Таҳқиқоти мазкур аҳамияти назариявӣ ва амалӣ дошта, натиҷаҳои рисолаи диссертатсионӣ ва методҳои исботи онҳоро дар ҳолати ҷустуҷӯ намудани ҳалли масъалаҳои ибтидой-канорӣ барои муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ ва муодилаҳои интегро-дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ татбиқи худро ёфтаанд.

Нуктаҳои ба ҳимоя пешниҳодшаванда:

1. теорема дар бораи муайянкунии тасвири баъзе функсияҳо ба воситаи табдилоти Лаплас-Карсон;
2. теорема дар бораи муайянкунии тасвири баъзе интегралҳо ба воситаи табдилоти Лаплас-Карсон;
3. ҳалли ошкори муодилаҳои дифференсиалии хаттии тартиби як ва ду бо шартҳои ибтидоӣ ва канории додашуда;
4. ҳалли ошкори муодилаи дифференсиалии телеграф бо шартҳои ибтидоӣ ва канории додашуда;
5. ҳалли ошкори муодилаҳои интегро-дифференсиалии телеграф барои ядроҳои гуногун бо шартҳои ибтидоӣ ва канории додашуда;
6. ҳалли ошкори муодилаҳои интегро-дифференсиалии ба муодилаи мавҷ овардашаванда бо шартҳои ибтидоӣ ва канории додашуда.

Дараҷаи эътиборнокии натиҷаҳо. Эътиборнокии натиҷаҳои илмии рисолаи диссертатсионӣ тавассути исботҳои математикии дақиқи ҳамаи тасдиқоти дар диссертатсия овардашуда таъмин гардида, бо тадқиқоти дигар муаллифон тасдиқ карда мешавад.

Мутобиқати диссертатсия ба шиносномаи ихтисоси илмӣ Кори диссертатсионӣ аз рӯйи ихтисоси 6D060102 – Муодилаҳои дифференсиалӣ, системаҳои динамикӣ, идоракунии оптималӣ иҷро карда шуда, фасли муодилаҳои дифференсиалӣ дар банди III – и параграфи 3-и шиносномаи ихтисоси илмӣ маҳсуб мегардад.

Саҳми шахсии довталаби дарёфти дараҷаи илмӣ дар таҳқиқот. Масъалаи таҳқиқот ва интихоби методи исботҳо аз ҷониби роҳбари илмӣ пешниҳод карда шудааст ва ба ғайр аз ин роҳбари илмӣ ба муаллифи рисола кӯмаки консултатсионӣ расонидааст. Натиҷаҳои асосии кори диссертатсионӣ, ки дар банди «Навоварии илмӣ» оварда шудаанд, шахсан аз ҷониби муаллиф ба даст оварда шудаанд.

Тасвиб ва амалисозии натиҷаҳои диссертатсия. Натиҷаҳои асосии диссертатсия дар семинарҳо ва конференсияҳои зерин муҳокима гардидаанд:

I. Семинари Маркази рушди инноватситонии илм ва технологияҳои нави АМИТ “Таҳлили касрӣ ва татбиқи он” таҳти роҳбарии академики АМИТ, доктори илмҳои физикаю математика, профессор М. И. Илолов (Душанбе, солҳои 2020-2024);

II. Семинари кафедраи анализи математикии Донишгоҳи давлатии омӯзгории Тоҷикистон ба номи С. Айнӣ таҳти роҳбарии профессор Пиров Р. Н.;

III. Конференсияи илмии байналмиллалӣ доир ба масъалаи “Комплексный анализ и его приложения”, бахшида ба бистсолаи омӯзиш ва рушди фанҳои табиатшиносӣ, дақиқ ва риёзӣ дар соҳаи илму маориф ва 75 солагии доктори илмҳои физикаю математика, профессор Қурбонов И. К. ва 70 солагии доктори илмҳои физикаю математика, профессор Ҷумъабой Сафаров, (г.Бохтар, 19 ноябиря 2022 г.), 63-65 с.;

IV. Конференсияи илмии байналмиллалӣ бахшида ба 70 солагии академик АМИ Тоҷикистон, доктори илмҳои физикаю математика, профессор Шабозов М. Ш., (Таджикистан. Душанбе, 24-25 июня 2022 г.), 234-237 с;

V. Конференсияи илмии байналмиллалӣ бахшида ба 70 солагии академик АМИ Тоҷикистон, доктори илмҳои физика-математика, профессор Бойматов К. Ҳ., (Таджикистан. Душанбе, 25-26 декабря 2020 г.).;

VI. Конференсияи илмии байналмиллалӣ бахшида ба 80 солагии доктори илмҳои физика-математика, профессор Темур Собиров, (Таджикистан. Душанбе, 25-26 июня 2021 г.) ;

VII. Конференсияи илмии байналмиллалӣ бахшида ба 70 солагии доктори илмҳои физика-математика, профессор Г.Ҷангибеков, (Таджикистан. Душанбе, 30-31 января 2020 г.);

VIII. Конференсияи ҷумҳуриявӣ бахшида ба “Бистсолаи омӯзиш ва рушди фанҳои табиатшиносӣ, дақиқ ва риёзӣ дар соли 2020-2040”, Душанбе-2020;

IX. Конференсияи илмии байналмиллалӣ бахшида ба 70 солагии доктори илмҳои физика-математика, профессор Қ. Тухлиев, (Таджикистан. Худжанд, 21-22 июня 2024 г.) 49-51 с.;

Интишорот аз рӯи мавзуи диссертатсия. Натиҷаҳои кор аз рӯи мавзуи диссертатсия дар 10 кори илмӣ, аз он ҷумла 4 мақола дар нашрияҳои тақризшаванда, ки дар рӯйхати амалкунандаи КОА-и назди Президенти Ҷумҳурии Тоҷикистон оварда шудаанд, 6 мақола дар маводҳои конференсияҳои байналмилалӣ ва ҷумҳуриявӣ чоп шудаанд.

Сохтор ва ҳаҷми диссертатсия. Диссертатсия аз муқаддима, 3 боб, феҳристи адабиёти истифодашуда иборат аз 120 номгӯй, ҳамагӣ 139 саҳифаи компютериро дарбар гирифта, дар барномаи Microsoft Word ҳуруфчинӣ шудааст. Барои осонии кор дар диссертатсия рақамгузории секаратаи теоремаҳо, леммаҳо, натиҷаҳо ва формулаҳо қабул карда шудааст, рақами якум бо рақами боб, рақами дуюм бо рақами параграф ва рақами сеюм бо рақами тартибии теоремаҳо, леммаҳо, натиҷаҳо ва формулаҳои ҳамин параграф мутобиқат мекунанд.

ҚИСМИ АСОСИИ ТАҲҚИҚОТ

Мавод ва методҳои таҳқиқот Таҳқиқот аз ҳисобкунии табдилотҳои роста ва баръакси Лаплас-Карсон барои функсияҳои бисёртағирёбанда, интегралҳои такрорӣ ва инчунин татбиқи онҳо дар ҳалли баъзе синфҳои муодилаҳои дифференсиалӣ ва интегро-дифференсиалӣ ва таҳлили функсионалӣ истифода бурда шудааст.

Натиҷаҳои асосии таҳқиқот Маълумоти мухтасарро доир ба натиҷаҳои асосии рисола пешниҳод менамоем.

Боби якуми диссертатсия $(1.1, 1.2)$ ба маълумотҳои пешакӣ доир ба табдилоти Лаплас-Карсон барои функсияҳои бисёртағирёбанда ва ҳисоби мушахчаси табдилоти роста ва баръакс, барои синфҳои функсияҳо ва интегралҳо, ки баъдан бо мақсади пайдо намудани ҳалли ошкори муодилаҳои дифференсиалӣ ва интегро-дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ истифода бурда мешаванд, бахшида шудааст. Дар параграфи якуми боби якум 1.1. табдилоти Лаплас пешкаш карда шуда, таърифҳо, ишораҳо ва теоремаҳои асосӣ нишон дода шудаанд. Дар параграфи дуюми боби якум 1.2. формулаҳои умумии табдилоти Лаплас барои функсияҳои $n-$тағирёбанда дар намуди

$$F(p_1, p_2, \dots p_n) = \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty e^{-\sum_{k=1}^{n} p_k x_k} f(x_1, x_2, \dots x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

ворид шудааст, ки дар ин ҷо $F(p_1, p_2, \dots p_n) -$ функсияи тасвир (изображения) ва $f(x_1, x_2, \dots x_n) -$функсияи оригинал буда, $p_1, p_2, \dots p_n -$ададҳои комплексӣ мебошанд $[21, 25]$. Бори нахуст олими Амрико Ҷон Карсон табдилоти Лаплас-ро таҳқиқ намуда табдилотеро барои ёфтани тасвири функсияҳои яктағирбанда ва дутағирёбанда кашф намуд, ки ин табдилот ҳоло бо номи табдилоти Лаплас-Карсон машҳур аст [5, 7, 18]. Хосиятҳои асосии табдилоти Лаплас ва тасвири печидаи ду функсияи дутағирёбанда баррасӣ гардидааст.

Тавассути табдилоти Лаплас-Карсон тасвири баъзе функсияҳо ва интегралҳо ҳисоб карда шудааст. Барои мисол тасвири функсияи

$$e^{-cx} \varphi_t'(t - x) + \varphi(0) e^{-cx} \delta(t - x)$$

ки дар ин ҷо $c -$адади ҳақиқии ихтиёрӣ буда, $\delta(t - x) -$функсияи Дирак [2, 14] ва $\varphi(t) -$функсияи дифференсиронидашаванда мебошад ба функсияи дутағирёбандаи комплексии тағирёбандаҳояш p, q дар намуди

$$\frac{pq\Phi(q)}{p + q + c}$$

баробар аст, ки дар ин ҷо $\Phi(q\ )$ табдилоти Лапласи функсияи $\varphi(t)$ мебошад. Ба ҳамин монанд тасвири функсияҳои

$$e^{-bt}f(|x-t|) \text{ ва } e^{-bt-cx}f(x+t)$$

ҳисоб карда шудаанд.

Теоремаҳои 1.2.1, 1.2.2, 1.2.3, 1.2.4 мувофиқан ба ҳисобкунии тасвири баъзе интегралҳои намуди

$$\int_0^{\min(x,t)}\int_0^{t-s} a(t-s-\tau)\,f(x-s;\tau)e^{-a_1 s}\,dsd\tau$$

$$\int_0^{\min(x,t)} e^{-a_0(t-s)}\cdot e^{-a_1 s}\cdot f(x-s;t-s)ds$$

$$\int_0^{\min(x,t)} e^{-as}f(x-s,t-s)g(s)ds$$

бахшида шудаанд. Исботи теоремаҳо дар асоси методи ҳисоббарориҳои оператсионӣ ва интегралҳои ғайрихос гузаронида шуда, дар он аз таҳқиқотҳои классикии В. А. Диткин ва Г. Дёч истифода шудааст [5, 8].

Теорема: Бигзор функсияҳои $a(t), f(x,t)$ *шартҳои табдилоти Лаплас-ро қаноаткунанда бошанд, он гоҳ ҳангоми* $x>0, t>0$ *будан тасвири интеграли мазкур чунин мешавад:*

$$\int_0^{min(x,t)}\int_0^{t-s} a(t-s-\tau)\,f(x-s;\tau)e^{-a_1 s}\,dsd\tau \rightrightarrows \frac{A(q)F(p;q)}{q(p+q+a_1)}$$

Исбот: Бо истифода аз табдилоти Лаплас –Карсон тасвири интеграли мазкурро меёбем, ки то ҳол аз тарафи олимон муайян карда нашудааст

$$pq\int_0^{\propto}\int_0^{\infty} e^{-px-qt}\left(\int_0^{min(x,t)}\int_0^{t-s} a(t-s-\tau)\,f(x-s;\tau)e^{-a_1 s}\,dsd\tau\right)dxdt =$$

гузориши $x-s=u; t-s=v$ *–ро истифода карда ҳосил мекунем*

$$pq\int_0^{\propto}\int_0^{\infty} e^{-p(u+s)-q(v+s)}\left(\int_0^{\infty}\int_0^{v} a(v-\tau)\, f(u;\tau)e^{-a_1 s}\, dsd\tau\right)dudv =$$

$$pq\int_0^{\propto}\int_0^{\infty} e^{-pu-qv}\left(\int_0^{v} a(v-\tau)\, f(u;\tau)d\tau\right)dudv\int_0^{\infty} e^{-(p+q+a_1)s}\, ds =$$

чи тавре аз бар мо маълум аст

$$\int_0^{v} a(v-\tau)\, f(u;\tau)d\tau \rightrightarrows \frac{1}{q}A(q)F(p,q)$$

мебошад, бинобар ин бо истифода аз баробарии зерин ҳосил мекунем

$$\frac{1}{q}A(q)F(p,q)\cdot \lim_{R\to\infty}\left(-\frac{e^{-(p+q+a_1)s}}{p+q+a_1}\Bigg|\begin{matrix}R\\0\end{matrix}\right)=\frac{1}{q}A(q)F(p,q)\cdot\frac{1}{p+q+a_1}$$

Ҳамин тавр тасвири интеграли мазкур маълум шуд, ки он чунин аст:

$$\int_0^{min(x,t)}\int_0^{t-s} a(t-s-\tau)\, f(x-s;\tau)e^{-a_1 s}\, dsd\tau \rightrightarrows \frac{A(q)F(p;q)}{q(p+q+a_1)}$$

Зикр кардан бо маврид аст, ки баробарии мазкур дар ҳолати хусусӣ намуди зеринро мегирал:

$$\int_0^{\min(x,t)}\int_0^{t-s} a(t-s-\tau)\, f(x-s)g(\tau)e^{-a_1 s}dsd\tau \rightrightarrows \frac{F(p)G(q)A(q)}{q(p+q+a_1)}$$

Ба сифати натиҷа аз теоремаҳои дар боло қайдгардида боз барои як қатор функсияҳо тасвири онҳо ҳисоб карда шудааст, ки дар намуди Ҷадвал (Ҷадвали 1. 2. 1.) оварда мешаванд.

Ҷадвали 1.2.1. Тасвири баъзе функсияҳо

	$f(x,t) \qquad (x>0; t>0)$	F(p,q)
1	$e^{-lt}u_1(x-t)$	$\dfrac{qU_1(p)}{p+q+l}$
2	$e^{-mt}{u_0}'_x(x-t)+u_0(0)e^{-mt}\delta(x-t)$	$\dfrac{pqU_0(p)}{p+q+m}$
3	$e^{-bx}\varphi_2(t-x)$	$\dfrac{p\Phi_2(q)}{p+q+b}$
4	$e^{-cx}\varphi'_t(t-x)+\varphi(0)e^{-cx}\delta(t-x)$	$\dfrac{pq\Phi(q)}{p+q+c}$
5	$e^{-bt-cx}f(t+x)$	$\dfrac{pq}{p-q-b+c}\left(\dfrac{F(q+b)}{q+b}-\dfrac{F(p+c)}{p+c}\right)$
6	$e^{-bt}f(\lvert x-t\rvert)$	$\dfrac{q}{q+b}\cdot\dfrac{pF(q+b)+(q+b)F(p)}{p+q+b}$
7	$e^{-bt-cx}f(\lvert x-t\rvert)$	$\dfrac{pq}{p+q+b+c}\left(\dfrac{F(q+b)}{q+b}+\dfrac{F(p+c)}{(p+c)}\right)$
8	$e^{-bt-cx}f(x-t)$	$\dfrac{pqF(p+c)}{(p+c)(p+q+b+c)}$
9	$e^{-bt-cx}f(t-x)$	$\dfrac{pqF(q+b)}{(q+b)(p+q+b+c)}$

Пас аз он дар параграфҳои 1.2 тасвири баъзе интегралҳо ҳисоб карда шудааст, ки то ҳол дар ягон адабиёти марбута во намехуранд.

Ҷадвал 1.2.2. Тасвири баъзе интегралҳо

	$f(x,t) \qquad (x>0; \quad t>0)$	$F(p,q)$
1	$\displaystyle\int_0^{\min(x,t)} e^{-as}f(x-s,t-s)ds$	$\dfrac{F(p,q)}{p+q+a}$
2	$\displaystyle\frac{1}{c}\int_0^t (e^{-ls}-e^{-ct+(c-l)s})u_0(x-s)ds;\ c\neq 0$	$\dfrac{1}{(q+c)(p+q+l)}U_0(p)$
3	$\displaystyle\int_0^t e^{-(b_0t+a_0s)}u_0(x-s)ds$	$\dfrac{q}{(q+b_0)(p+q+a_0+b_0)}U_0(p)$

Идомаи чадвали 1.2.2.

4	$\int_0^{\min(x,t)}\int_0^{t-s} a(t-s-\tau)\, f(x-s;\tau)e^{-a_1 s}\, dsd\tau$	$\dfrac{A(q)F(p;q)}{q(p+q+a_1)}$
5	$\int_0^{t} \mathrm{e}^{-(\mathrm{bt+s})}\mathrm{u}_0(x-\mathrm{s})\mathrm{ds}$	$\dfrac{\mathrm{q}}{(\mathrm{q+b})(\mathrm{p+q+1+b})}\mathrm{U}_0(\mathrm{p})$
6	$\int_0^{t} a(t-\tau)u(x,\tau)d\,\tau$	$\dfrac{1}{q}A(q)U(p,q)$
7	$\int_0^{\min(x,t)}\int_0^{t-s} e^{-a_2(t-s-\tau)}\, f(x-s;\tau)e^{-a_1 s}\, dsd\tau$	$\dfrac{F(p;q)}{(q+a_2)(p+q+a_1)}$
8	$\int_0^{\min(x,t)} \big(\delta(t-s)+bh(t-s)\big)e^{-bs}\, f(x-s)ds$	$\dfrac{(q+b)F(p)}{p+q+b}$
9	$\int_0^{t}\big(\delta(t-s)+bh(t-s)\big)e^{-bs}\, f(x+s)ds$	$\dfrac{pF(q+b)-(q+b)F(p)}{p-(q+b)}$
10	$\int_0^{t}\big(\delta(t-s)+bh(t-s)\big)e^{-bs}\, f(\lvert x-s\rvert)ds$	$\dfrac{pF(q+b)+(q+b)F(p)}{p+q+b}$
11	$\int_0^{t}\big(\delta(t-s)+bh(t-s)\big)e^{-bs}\, f(s)ds$	$F(q+b)$
12	$\int_0^{t} a(t-\tau)\, e^{-b\tau}f(x+\tau)\partial\tau$	$\dfrac{A(q)}{q+b}\cdot\dfrac{pF(q+b)-(q+b)F(p)}{p-(q+b)}$
13	$\int_0^{t} a(t-\tau)\, e^{-b\tau}f(\lvert x-\tau\rvert)\partial\tau$	$\dfrac{A(q)}{q+b}\cdot\dfrac{pF(q+b)+(q+b)F(p)}{p+(q+b)}$
14	$\int_0^{t} a(t-\tau)\, e^{-b\tau}\big(f(x+\tau)+f(\lvert x-\tau\rvert)\big)\partial\tau$	$\dfrac{2A(q)}{q+b}\cdot\dfrac{p^2F(q+b)-(q+b)^2F(p)}{p^2-(q+b)^2}$
15	$\int_0^{\min(x,t)} e^{-a_0(t-s)}\cdot e^{-a_1 s}\cdot f(x-s;t-s)ds$	$\dfrac{qF(p;q+a_0)}{(p+q+a_1)(q+a_0)}$
16	$\int_0^{\mathrm{t}} e^{-a_0(t-s)}\cdot e^{-a_1 s}\cdot \delta(x-s)u_0(t-s)ds;\;\; x>t$	$\dfrac{q}{q+a_0}\cdot\dfrac{pU_0(q+a_0)}{p+q+a_1}$
17	$\int_0^{\min(x,t)} e^{-a_1 t}\cdot u_0(x+t-2s)ds$	$\dfrac{q}{q+a_1}\cdot\dfrac{pU_0(q+a_1)-(q+a_1)U_0(p)}{p^2-(q+a_1)^2}$

Идомаи ҷадвали 1.2.2.

18	$\int_0^{\min(x,t)}\int_0^{t-s} a(t-s-\tau)\cdot e^{-a_1 s}\cdot f_1(x-s)\, f_2(\tau)dsd\tau$	$\dfrac{F_1(p)F_2(q)A(q)}{q(p+q+a_1)}$
19	$\int_0^{t} e^{-b(t-s)}\varphi_2(s)ds -$ $-\int_0^{min(x;t)} e^{-bs}h(x-s)\varphi_2(t-s)ds$	$\dfrac{p\Phi_2(q)}{(q+b)(p+q+b)}$
20	$\int_0^{\min(x,t)} e^{-as}f(x-s,t-s)g(s)ds$	$\dfrac{G(p+q+a)F(p,q)}{p+q+a}$

Бояд қайд намуд, ки дар ин ҷо функсияи $F(p,q)$ −функсияи тағирёбандааш комплексӣ мебошад [8, 9, 20, 25].

Боби дуюми рисола таҳти унвони “Муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ” ба татбиқи табдилоти Лаплас-Карсон дар ҳалли муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусии тартиби як ва ду бахшида шудааст.

Дар параграфи 2.1. мафҳумҳо ва натиҷаҳои асосӣ оид ба муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусии тартиби як ва ду гирд оварда шудаанд.

Аз ҷумла, таснифи муодилаҳо бо ҳосилаҳои хусусии тартиби ду хотиррасон шудааст ва тарифи муодилаҳои намуди элиптикӣ, гиперболикӣ ва параболикӣ низ ёдрас гардидааст.

Дар параграфи 2.2. муодилаи нақлиёт бо манбаи хаттӣ ва бо шартҳои ибтидоӣ ва канории ғайриякҷинса мавриди таҳқиқ қарор гирифтааст. Масъалаи номбурда бо ёрии табдилоти интегралии Лаплас-Карсон ҳал карда шудааст.

Ғайр аз ин дар § 2.2. муодилаи намуди

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}+a\frac{\partial u}{\partial t}+bu=f(x,t) \qquad (1)$$

бо шартҳои ибтидоии

$$\begin{cases} u(x,0) = u_0(x) \\ u_t'(x,0) = u_1(x) \end{cases} \tag{2}$$

ва шартҳои канорӣ

$$\begin{cases} u(0,t) = \varphi_1(t) \\ u_x'(0,t) = \varphi_2(t) \end{cases} \tag{3}$$

омӯхта шудааст. Қайд мекунем, ки масъалаи (1)-(3) ҳангоми $a = 0, b = 1$,

$f(x,t) = \sqrt{x+t}$ ва бо шарти

$$u(x,0) = u_t'(x,0) = u_x'(0,t) = u(0,t) = 0$$

аз тарафи олими Амрико Р. С. Даҳия [25, 26] ва олими Эрон Ҷ.Собирӣ [25, 26] бо истифода аз табдилоти дутағирёбандаи Лаплас таҳқиқ карда шудааст. Дар § 2.2. –и рисола ҳалли умумии муодилаи (1) бо шартҳои ибтидоӣ ва канории (2)-(3) барои дилхоҳ адади мусбати a, b ва дилхоҳ функсияи бефосила ва дифференсиронидашавандаи $f(x,t)$, ки шартҳои табдилоти Лапласро қаноат мекунад бо истифода аз татбиқи табдилоти Лаплас-Карсон ҳал карда шудааст.

Ҳалли умумии муодилаи (1)-(2)-(3) чунин намуд дорад [13, 14]:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}} e^{-\left(\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\right)x} {\varphi_1}'_t(t-x) +$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}} \int_0^{\min(x,t)} \left(e^{-\left(\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\right)s} - e^{-\left(\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\right)s} \right) f(x-s, t-s)ds +$$

$$e^{-\left(\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\right)x} \varphi_1(t-x) +$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}} \varphi_1(0) e^{-\left(\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\right)x} \delta(t-x) +$$

$$\frac{\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}} * e^{-\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)x}\varphi_1(t-x)-$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}} e^{-\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)x}{\varphi_1}'_t(t-x)-$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}\varphi_1(0)e^{-\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)x}\delta(t-x)-$$

$$\frac{\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}} e^{-\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)x}\varphi_1(t-x)+$$

$$(a^2-4b)^{-\frac{1}{2}}\left(e^{-\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)x}-e^{-\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)x}\right)\varphi_2(t-x)$$

$$+e^{-\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)t}u_0(x-t)+$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}} e^{-\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)t}{u_0}'_x(x-t)+$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}u_0(0)e^{-\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)t}\delta(x-t)+$$

$$\frac{\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}} e^{-\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)t}u_0(x-t)-$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}} e^{-\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)t}{u_0}'_x(x-t)-$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}u_0(0)e^{-\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)t}\delta(x-t)-$$

$$\frac{\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}e^{-\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)t}u_0(x-t)+$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}\left(e^{-\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)t}-e^{-\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)t}\right)u_1(x-t)$$

Дар ин чо

$$u(x,0)=e^{-\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)\cdot 0}u_0(x-0)+\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}e^{-\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)\cdot 0}{u_0}'_x(x-0)$$

$$+\frac{\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}e^{-\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)\cdot 0}u_0(x-0)-$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}e^{-\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)\cdot 0}{u_0}'_x(x-0)-$$

$$\frac{\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}e^{-\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)\cdot 0}u_0(x-0)+$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}\left(e^{-\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)\cdot 0}-e^{-\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)\cdot 0}\right)u_1(x-0)+$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}\int_0^0\left(e^{-\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)s}-e^{-\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)s}\right)f(x-s,t-s)ds=$$

$$u_0(x)+\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}{u_0}'_x(x)+\frac{\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}u_0(x)-$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}{u_0}'_x(x)-\frac{\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}u_0(x)=u_0(x)$$

мешавад.

Дар параграфи 2.3. муодилаи дифференсиалии телегшраф мавриди таҳқиқ қарор гирифтааст. Муодила намуди зеринро дорад:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\alpha\frac{\partial u}{\partial t}+\beta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(t) \qquad (4)$$

Ҳалли умумии муодила бо иҷрошавии шартҳои ибтидоии

$$u(x,0)=u_0(x), u_t'(x,0)=u_1(x) \qquad (5)$$

ва шартҳои канории

$$u(0,t)=\varphi_1(t), u_x'(0,t)=\varphi_2(t) \qquad (6)$$

ёфта шавад.

Ҳангоми $\alpha=0, \beta=0$ будан масъалаи (4)-(6) аз ҷониби В. А. Диткин, А. П. Прудников [5] ва дар ҳолати $\alpha=0, \beta=-q(x,t)$ будан дар мақолаи Абдулкаримов М. Ф. [1] барасси шудааст. Дар рисола масъалаи (4)-(6) тавассути табдилоти интегралии Лаплас-Карсон пурра ҳал карда шудааст [10]. Аз функсияи $f(t)$ иҷрои шартҳои мавҷудияти табдилоти Лаплас-Карсон талаб карда мешавад.

Намуди умумии ҳалли масъалаи ибтидоӣ-канории (4)-(6) чунин аст:

$$u(x,t)=e^{-\frac{\alpha}{2}x}\varphi_1(t-x)+$$

$$\int_0^{min(x,t)} \int_0^{t-s} \delta'(t-s-\tau)\, u_0(x-s+\tau) e^{-\frac{\alpha}{2}(s+\tau)}\, dsd\tau +$$

$$\alpha \int_0^{min(x,t)} \int_0^{t-s} \delta(t-s-\tau)\, u_0(x-s+\tau) e^{-\frac{\alpha}{2}(s+\tau)}\, dsd\tau +$$

$$\int_0^{\min(x,t)} e^{-\frac{\alpha}{2}t} \cdot u_1(x+t-2s) ds +$$

$$+ \int_0^{\min(x,t)} \int_0^{t-s} e^{\frac{-\alpha}{2}(t-\tau)}\, h(x-s)\, f(\tau) dsd\tau$$

Боби сеюми рисола ба ҳалли муодилаҳои интегро-дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ бахшида шудааст.

Дар параграфи 3.1. мафҳумҳои асосӣ доир ба муодилаҳои интегро-дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ оварда шудаанд. Қайд карда шудааст, ки чунин муодилаҳо дар намуди муодилаи гармигузаронӣ бо дарназардошти ҳофизаи муҳит дар мақолаҳои М. Гуртин, В. Пипкин таҳлили худро ёфтаанд [15, 16]. Натиҷаи дар боби 3 овардашуда ҳолати умумии чунин муодилаҳоро дарбар мегиранд.

Дар параграфи 3.2. муодилаи интегро-дифференсиалии телеграф, ки то ҳол ҳалли он дар адабиётҳо во намехурад

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (2b+1)\frac{\partial u}{\partial t} + b^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \int_0^t a(t-\tau)\frac{\partial^2 u(x,\tau)}{\partial x^2} d\tau + f(t) \qquad (7)$$

бо шартҳои ибтидоӣ

$$\begin{cases} u(x,0) = u_0(x) \\ u_t'(x,0) = u_1(x) \end{cases} \qquad (8)$$

ва шартҳои канории

$$\begin{cases} u(0,t)=\varphi_1(t) \\ u'_x(0,t)=\varphi_2(t) \end{cases} \tag{9}$$

таҳқиқ карда шудааст.

Ҳалли умумии масъалаи (7)-(9) барои ядрои $a(t)=b^2t+2b+1$ чунин намуд дорад $[3-\mathrm{M}]$:

$$u(x;t)=\int_0^{\min(x,t)}\int_0^{t-s}(\delta'(t-s-\tau))u_0(x+\tau-s)dsd\tau-$$

$$b^2\int_0^{\min(x,t)}\int_0^{t-s}\left(\frac{b+\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}}{2\sqrt{b+0{,}25}}\right)e^{-\left(b+\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)}u_0(x+\tau-s)\,dsd\tau+$$

$$b^2\int_0^{\min(x,t)}\int_0^{t-s}\left(\frac{b+\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}}{2\sqrt{b+\frac{1}{4}}}\right)e^{-\left(b+\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)}u_0(x+\tau-s)\,dsd\tau+$$

$$\int_0^{\min(x,t)}\int_0^{t-s}\delta(t-s-\tau)\,u_1(x+\tau-s)dsd\tau+\varphi_1(t-x)+$$

$$\frac{\left(b+\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)^2}{2\sqrt{b+\frac{1}{4}}}\int_0^{\min(x,t)}\int_0^{t-s}e^{-\left(b+\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)}u_1(x+\tau-s)\,dsd\tau-$$

$$\frac{\left(b+\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)^2}{2\sqrt{b+\frac{1}{4}}}\int_0^{\min(x,t)}\int_0^{t-s}e^{-\left(b+\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)}u_1(x+\tau-s)\,dsd\tau-$$

$$\int_0^{\min(x,t)}\int_0^{t-s}\left(\frac{b+\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}}{2\sqrt{b+\frac{1}{4}}}\right)e^{-\left(b+\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)}h(x-s)\,f(\tau)dsd\tau+$$

$$\int_0^{\min(x,t)}\int_0^{t-s}\left(\frac{b+\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}}{2\sqrt{b+\frac{1}{4}}}\right)e^{-\left(b+\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)}h(x-s)f(\tau)\,dsd\tau$$

Ҳалли муодиларо ҳангоми $x > t$ будан менависем

$$u(x;t)=\int_0^{t}\int_0^{t-s}(\delta'(t-s-\tau))u_0(x+\tau-s)dsd\tau-$$

$$b^2\int_0^{t}\int_0^{t-s}\left(\frac{b+\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}}{2\sqrt{b+0{,}25}}\right)e^{-\left(b+\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)}u_0(x+\tau-s)\,dsd\tau+$$

$$b^2\int_0^{t}\int_0^{t-s}\left(\frac{b+\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}}{2\sqrt{b+0{,}25}}\right)e^{-\left(b+\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)}u_0(x+\tau-s)\,dsd\tau+$$

$$\int_0^{t}\int_0^{t-s}\delta(t-s-\tau)\,u_1(x+\tau-s)dsd\tau+$$

$$\frac{\left(b+\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)^2}{2\sqrt{b+\frac{1}{4}}}\int_0^{t}\int_0^{t-s}e^{-\left(b+\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)}u_1(x+\tau-s)\,dsd\tau-$$

$$\frac{\left(b+\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)^2}{2\sqrt{b+\frac{1}{4}}}\int_0^{t}\int_0^{t-s}e^{-\left(b+\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)}u_1(x+\tau-s)\,dsd\tau-$$

$$\frac{1}{2\sqrt{b+\frac{1}{4}}}\int_0^{t}\int_0^{t-s}\left(b+\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)e^{-\left(b+\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)}h(x-s)\,f(\tau)dsd\tau+$$

$$\frac{1}{2\sqrt{b+\frac{1}{4}}}\int_0^{t}\int_0^{t-s}\left(b+\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)e^{-\left(b+\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)}h(x-s)f(\tau)\,dsd\tau$$

Ҳалли муодиларо ҳангоми $x < t$ будан менависем

$$u(x;t) = \int_0^x \int_0^{t-s} (\delta'(t-s-\tau))u_0(x+\tau-s)dsd\tau -$$

$$b^2 \int_0^{x} \int_0^{t-s} \left(\frac{b+\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}}{2\sqrt{b+0{,}25}} \right) e^{-\left(b+\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)} u_0(x+\tau-s)\, dsd\tau +$$

$$b^2 \int_0^x \int_0^{t-s} \left(\frac{b+\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}}{2\sqrt{b+\frac{1}{4}}} \right) e^{-\left(b+\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)} u_0(x+\tau-s)\, dsd\tau +$$

$$\int_0^{x} \int_0^{t-s} \delta(t-s-\tau)\, u_1(x+\tau-s)dsd\tau + \varphi_1(t-x) +$$

$$\frac{\left(b+\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)^2}{2\sqrt{b+\frac{1}{4}}} \int_0^{\min(x,t)} \int_0^{t-s} e^{-\left(b+\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)} u_1(x+\tau-s)\, dsd\tau -$$

$$\frac{\left(b+\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)^2}{2\sqrt{b+\frac{1}{4}}} \int_0^{x} \int_0^{t-s} e^{-\left(b+\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)} u_1(x+\tau-s)\, dsd\tau -$$

$$\frac{1}{2\sqrt{b+\frac{1}{4}}} \int_0^{x} \int_0^{t-s} \left(b+\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}} \right) e^{-\left(b+\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)} h(x-s)\, f(\tau)dsd\tau +$$

$$\frac{1}{2\sqrt{b+\frac{1}{4}}} \int_0^{x} \int_0^{t-s} \left(b+\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}} \right) e^{-\left(b+\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)} h(x-s)f(\tau)\, dsd\tau$$

Ғайр аз ин масъалаи (7)-(9) барои ядрои намуди $a(t) = (1-bt)e^{-bt}$ низ ҳал карда шудааст, ки намуди зеринро дорад $[3-\text{M}]$:

$$u(x,t) = e^{-bx}\varphi_1(t-x) + \int_0^{min(x,t)} \int_0^{t-s} \delta(t-s-\tau)\, u_1(x-s+\tau) e^{-b(s+\tau)}\, dsd\tau$$

$$+ \int_0^{min(x,t)} \int_0^{t-s} (\delta'(t-s-\tau) + 2b\delta(t-s-\tau))\, u_0(x-s+\tau)\, e^{-b(s+\tau)} dsd\tau +$$

$$\frac{b^2}{2\sqrt{b+\frac{1}{4}}} \int_0^{min(x,t)} \int_0^{t-s} e^{-\left(\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)} \cdot e^{-bt} \cdot u_0(x-s+\tau)\, dsd\tau -$$

$$\frac{b^2}{2\sqrt{b+\frac{1}{4}}} \int_0^{min(x,t)} \int_0^{t-s} e^{-\left(\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)} \cdot e^{-bt}\, u_0(x-s+\tau)\, dsd\tau -$$

$$\int_0^{min(x,t)} \int_0^{t-s} \left(\frac{2b+1}{4\sqrt{b+\frac{1}{4}}} + \frac{1}{2}\right) e^{-\left(b+\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+b}\right)(t-s-\tau)}\, u_1(x-s+\tau) e^{-b(s+\tau)}\, dsd\tau +$$

$$\int_0^{min(x,t)} \int_0^{t-s} \left(\frac{2b+1}{4\sqrt{b+\frac{1}{4}}} - \frac{1}{2}\right) e^{-\left(b+\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}+b}\right)(t-s-\tau)}\, u_1(x-s+\tau) e^{-b(s+\tau)}\, dsd\tau +$$

$$\int_0^{min(x,t)} \int_0^{t-s} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4\sqrt{b+\frac{1}{4}}}\right) e^{-\left(b+\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)} \cdot e^{-bs} \cdot h(x-s)\, f(\tau) dsd\tau +$$

$$\frac{2\sqrt{b+\frac{1}{4}}+1}{4\sqrt{b+\frac{1}{4}}} \int_0^{min(x,t)} \int_0^{t-s} e^{-\left(b+\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)} \cdot e^{-bs}\, h(x-s) f(\tau) dsd\tau$$

Ҳалли умумии муодила ҳангоми $\boldsymbol{x > t}$ ***будан чунин аст:***

$$u(x,t) = \int_0^t \int_0^{t-s} \delta(t-s-\tau)\, u_1(x-s+\tau) e^{-b(s+\tau)}\, dsd\tau$$

$$+\int_0^t\int_0^{t-s}\left(\delta'(t-s-\tau)+2b\delta(t-s-\tau)\right)u_0(x-s+\tau)\,e^{-b(s+\tau)}dsd\tau+$$

$$\frac{b^2}{2\sqrt{b+\frac{1}{4}}}\int_0^t\int_0^{t-s} e^{-\left(\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)}\cdot e^{-bt}\cdot u_0(x-s+\tau)\,dsd\tau-$$

$$\frac{b^2}{2\sqrt{b+\frac{1}{4}}}\int_0^t\int_0^{t-s} e^{-\left(\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)}\cdot e^{-bt}\,u_0(x-s+\tau)\,dsd\tau-$$

$$\int_0^t\int_0^{t-s}\left(\frac{2b+1}{4\sqrt{b+\frac{1}{4}}}+\frac{1}{2}\right)e^{-\left(b+\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+b}\right)(t-s-\tau)}\,u_1(x-s+\tau)e^{-b(s+\tau)}\,dsd\tau+$$

$$\int_0^t\int_0^{t-s}\left(\frac{2b+1}{4\sqrt{b+\frac{1}{4}}}-\frac{1}{2}\right)e^{-\left(b+\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}+b}\right)(t-s-\tau)}\,u_1(x-s+\tau)e^{-b(s+\tau)}\,dsd\tau+$$

$$\int_0^t\int_0^{t-s}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4\sqrt{b+\frac{1}{4}}}\right)e^{-\left(b+\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)}\cdot e^{-bs}\cdot h(x-s)\,f(\tau)dsd\tau+$$

$$\frac{2\sqrt{b+\frac{1}{4}}+1}{4\sqrt{b+\frac{1}{4}}}\int_0^t\int_0^{t-s} e^{-\left(b+\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)}\cdot e^{-bs}\,h(x-s)f(\tau)dsd\tau$$

Дар параграфи сеюми боби 3 муодилаи интегро-дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ, ки ба муодилаи мавҷ овардашаванда мебошад, таҳқиқ карда шудааст.

Чунин гузориш бори аввал аз ҷониби риёзидони Ҷопон Й. Фучита барои муодилаи намуди

$$u(x,t)=f(x)+\int_0^t a(t-\tau)\frac{\partial^2 u(x,\tau)}{\partial x^2}\partial\tau \tag{10}$$

баррасӣ гардидааст. Ядро сингулярӣ буда, намуди умумии он чунин аст:

$$a(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} \tag{11}$$

дар ин ҷо $\Gamma(\alpha)$ −функсияи Эйлер ҷинси 2 ва $\alpha \in [1; 2]$ аст.

Гузориши масъаларо меоварем: Функсияи $u(x,t)$ ёфт шавад, ки муодилаи (10)-ро бо шарти ибтидоии

$$u(x,0) = f(x) \tag{12}$$

ва шартҳои канории

$$\begin{cases} u(0,t) = \varphi(t) \\ u'_x(0,t) = c(t) \end{cases} \tag{13}$$

қаноат мекунад.

Масъалаи (10)-(13) аз ҷониби Й. Фучита барои ядрои (11) ва аз ҷониби муаллифи рисола барои ядрои регулярии намуди

$$a(t) = te^{-bt}, \quad b > 0 \tag{14}$$

тадқиқ карда шудааст.

Ядрои (14) дар муқоиса бо ядрои (11) ду бартарии ҷиддӣ дорад. Аввалан барои чунин ядро татбиқи ҳисоби оператсионӣ (табдилоти Лаплас -Карсон) қулай мебошад. Сонияи доираи татбиқи ядрои регулярӣ назар ба ядрои сингулярӣ хеле васеъ аст.

Намуди умумии ҳалли масъалаи (10)-(13)-ро барои ядрои (14) меоварем

$$u(x,t) = \int_0^{min(x,t)} \int_0^{t-s} \delta'(t-s-\tau) f(x-s+\tau) e^{-b(s+\tau)}\, ds d\tau +$$

$$+2b \int_0^{min(x,t)} \int_0^{t-s} \delta(t-s-\tau) f(x-s+\tau) e^{-b(s+\tau)}\, ds d\tau +$$

$$+b^2 \int_0^{min(x,t)} \int_0^{t-s} h(t-s-\tau) f(x-s+\tau) e^{-b(s+\tau)}\, ds d\tau$$

$$+e^{-bx}\varphi(t-x);$$

Бо мақсади шарҳ додани қадамҳои асосии исботи формулаи ҳалли масъала як мисоли мушахас барои муодилаи

$$u(x,t) = bx + \int_0^t (t-\tau) e^{-b(t-\tau)} \frac{\partial^2 u(x,\tau)}{\partial x^2} \partial\tau$$

оварда шудааст.

Хулоса

1. Натиҷаҳои асосии илмии кори диссертатсионӣ

Дар рисолаи диссертатсионӣ натиҷаҳои асосии зерин ба даст оварда шудаанд:

1. Ба воситаи табдилоти Лаплас-Карсон тасвири функсияҳо ва интегралҳое, ки татбиқи васеи амали доранд муайян карда шудаанд [9-М], [10-М];
2. Ҳалли умумии муодилаи дифференсиалии телеграф бо шартҳои ибтидоӣ ва канории додашуда муайян карда шудааст[2-М], [5-М];
3. Ҳалли умумии муодилаи интегро-дифференсиалии телеграф барои ядрои функсияи хаттӣ (графикаш хати рост) ва функсияи ғайрихаттӣ (графикаш хати кач) бо шартҳои ибтидоӣ ва канории додашуда муайян карда шудааст [3-М], [6-М];
4. Ҳалли умумии муодилаҳои дифференсиалии хаттӣ бо ҳосилаҳои хусусии тартиби як ва ду бо шартҳои ибтидоӣ ва канории додашуда ва ҳалли муодилаи интегро-дифференсиалии ба муодилаи мавҷ овардашаванда муайян карда шудааст [1-М], [2-М], [4-М];
5. Ҷадвали 2 то ҷое огоҳ ҳастам дар таърихи риёзиёт то ҳол вуҷуд надорад ва барои ҳалли муодилаҳои дифференсиалӣ, муодилаҳои интегро-

дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ ва ғайра васеъ истифодашаванда мебошад [7-М], [8-М], [10-М];

2. Тавсияҳо оид ба истифодаи амалии натиҷаҳо

Таҳқиқоти мазкур аҳамияти назариявӣ ва амалӣ дошта, натиҷаҳои рисолаи диссертатсионӣ ва методҳои исботи онҳоро дар ҳолати ҷустуҷӯ намудани ҳали масъалаҳои ибтидоӣ-канорӣ барои муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ ва муодилаҳои интегро-дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ татбиқи худро ёфтаанд.

Рӯйхати адабиёт

[1]. Абдукаримов М. Ф. О разрешимости одной задачи граничного управления для телеграфного уравнения с переменным коэффициентом из класса L_2. Материалы международной научной конференции, посвященной 70-летию академика НАН Таджикистана Шабозова Мирганда Шабозовича, (Таджикистан. Душанбе, 24-25 июня 2022 г.), с 191-192.

[2]. Александров В. А. Обобщенные функции, Новосибирск-2005, 46 с.

[3]. Брычков Ю. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования обобщенных функций, Москва 1977, 288 с.

[4]. Губатенко В. П. Обобщенные функции с приложениями в теории электромагнитного поля, Саратов «Стило»-2001, 141 с.

[5]. Диткин В. А., Прудников А. П. Операционное исчисление по двум переменным и его приложения, Москва -1958, 176 с.

[6]. Дубков А. А., Агудов Н. В. Преобразования Лапласа, Нижний Новгород-2016, 36 с.

[7]. Диткин В. А., Прудников А. П. Справочник по операционному исчислению, Москва 1965, 175 с.

[8]. Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и z–преобразование. М.: Рипол Классик. 1971, с. 288.

[9]. Диткин В. А., К теории операционного исчисления, ДАН 123, (1958).

[10]. Зулфонов Ш. М. Решение начально-краевой задачи для телеграфного уравнения.// Доклады НАН Таджикистана, Том. 66, № 1-2, 28-32 с.

[11]. Ильин В. А. О граничном управлении на одном конце процессом, описываемым телеграфным уравнением (Текст)/ В.А. Ильин, Е.И. Моисеев // Доклады Академии наук. -2002 –Т. 387. -№5. –С. 600-603.

[12]. Илолов. М. И, Зулфонов Ш. М Решение интегро-дифференциального телеграфного уравнения методом преобразования Лапласа-Карсона //Известия НАН Таджикистана, №1 (190), 2023 г, с. 7-14.

[13]. Илолов.М. И, Зулфонов.Ш. М. Начально- Краевая задача для уравнения в частных производных 2-го порядка. .// Доклады НАНТ, Т. 66, № 3-4, 127-135 с.

[14]. Илолов.М.И, Зулфонов.Ш.М Начально- Краевая задача для уравнения в частных производных 2-го порядка. Материалы международной научной конференции, посвященной 70-летию профессора Джангибеков Гулходжа, (Таджикистан. Душанбе, 30-31 января 2020 г.)

[15]. Корн Г. А., Корн Т. М. Справочник по математике. М. : Наука, 1978, 720 с.

[16]. Никольский С. М. Курс математического анализа.–М.: Наука, 1983, Том 2, 448 с.

[17]. Орлов С. С. Обобщенные решения интегро-дифференциальных уравнений высоких порядков в банаховых пространствах (монография) Иркутск-2014, 150 с.

[18]. Плескунов М. А. Операционное исчисление. Екатеринбург- 2014, 146 с.

[19]. Семенов Э. И., Косов А. А. Функция Ламберта и точные решения нелинейных параболических уравнений, Известия вузов. Математика 2019, №8, с 13-20.

[20]. Хиршман И. И., Уиддер Д. В., Преобразования типа свертки, М., ИЛ., 1958, 312 с.

[21]. Ali Babakhani Theory of multidimensional Laplace transforms and boundary value problems. Iowa State University, 1989, 223.

[22]. Dahiya R. S. Calculation of Two-dimensional Laplace Transforms pairs-2, Simon Stevin, A Quarterly journal of pure and Applied Mathematics (Belgium) 57 (1983).

[23]. Dahiya R. S. Laplace Transform pairs of n-dimensions, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. Volume 8 (1985).

[24]. Dahiya R. S. and Debnath J. C., Theorems on Multidimensional Laplace Transform for Solution of Boundary Value Problems, Computers Math. Applications 18 (1989), no 12.

[25]. Ditkin V. A., Prudnikov A. P., Operational Calculus in Two Variables and its Applications, Pergamon Press, New York, 1962, 176.

[26]. Dahiya R. S.; Jafar Saberi -Nadjafi, THEOREMS ON n-DIMENSIONAL LAPLACE TRANSFORMS AND THEIR APPLICATIONS, 15th Annual conference of Applied Mathematics. Univ of central Oklahoma, Electronic journal of differential Equations; Conference 02, 1999, pp 61−74.

[27]. Fujita Y. Integro-differential equation which interpolates the heat equation and the wave equation. Osaka Journal of Mathematics. 27(2); 309-321; Issue date 1990-06.

[28]. Fujita Y. Integro-differential equation which interpolates the heat equation and the wave equation (11).- Osaka Journal of Mathematics. Volume 27, №4, (1990), pp. 797-804.

[29]. Kozlova E. A. The control problem for the system of telegraph equations, Samara 2011, pp. 162-166.

ИНТИШОРОТИ МУАЛЛИФ ОИД БА МАВЗӮИ ДИССЕРТАТСИЯ

А) Мақолаҳое, ки дар маҷаллаҳои тақризшавандаи КОА-и назди Президенти Ҷумҳурии Тоҷикистон нашр шудаанд:

[1-М]. Зулфонов Ш. М. Применение преобразования Лапласа-Карсона к решению начально-краевой задачи для интегро-дифференциальных уравнений [Текст] /Зулфонов Ш. // Доклады НАН Таджикистана, Том. 64, № 3-4, 135-141 с.

[2-М]. Зулфонов Ш. М. Решение начально-краевой задачи для телеграфного уравнения. [Текст] / Зулфонов Ш. // Доклады НАН Таджикистана, Том. 66, № 1-2, 28-32 с.

[3-М]. Зулфонов Ш. М Решение интегро-дифференциального телеграфного уравнения методом преобразования Лапласа-Карсона [Текст] / М. И. Илолов, Ш. Зулфонов //Известия НАН Таджикистана, №1 (190), 2023 г, с. 7-14

[4-М]. Зулфонов. Ш. М. Начально- Краевая задача для уравнения в частных производных 2-го порядка. [Текст] / М. И. Илолов, Ш. М. Зулфонов // Доклады НАН Таджикистана, Т. 66, № 3-4, 127-135 с.

Б) Дар дигар нашрияҳо

[5-М]. Зулфонов. Ш. М. Решение начально-краевой задачи для телеграфного уравнения. Материалы международной научной конференции, “Комплексный анализ и его приложения”, посвященной “Двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических наук в сфере науки и образования”, 75-летию Заслуженного работника Таджикистана, чл.корр. НАНТ, доктора физико-математических наук, профессора И.К.Курбонова и 70-летию доктора физико-математических наук, профессора Дж.С.Сафарова, (г.Бохтар, 19 ноябиря 2022 г.), 63-65 с.

[6-М]. Зулфонов Ш. М. Интегро-дифференциальное уравнение телеграфа. Материалы международной научной конференции, посвященной 70-летию академика НАНТ Шабозова Мирганда Шабозовича, (Таджикистан. Душанбе, 24-25 июня 2022 г.), 234-237 с

[7-М]. Зулфонов Ш. М. Применение преобразования Лапласа-Карсона к решению начально-краевой задачи для интегро-дифференциальных уравнений. Материалы международной научной конференции, посвященной 70-летию со дня рождения академика НАНТ, доктора физико-математических наук, профессора Бойматова Камолиддина Хамроевича., (Таджикистан. Душанбе, 25-26 декабря 2020 г.).

[8-М]. Илолов М. И. , Зулфонов Ш. М. Об одной начально-краевой задаче для неоднородного интегро-дифференциального уравнения в частных про-изводных. Материалы международной научной конференции, посвященной 80-летию со дня рождения доктора физико-математических наук, профессора Темура Собирова, (Таджикистан. Душанбе, 25-26 июня 2021 г.)

[9-М]. Илолов.М. И, Зулфонов.Ш. М. Начально- Краевая задача для уравнения в частных производных 2-го порядка. Материалы международной научной конференции, посвященной 70-летию профессора Джангибеков Гулходжа, (Таджикистан. Душанбе, 30-31 января 2020 г.).

[10-М]. Зулфонов.Ш. М., Илолов.М. И Двумерное преобразования Лапласа-Карсона и его риложение. Материалы международной научной конференции, посвященной 70-летию доктора физико-математических наук, профессора Тухлиева Камаридина, Худжанд-2024, с.249-251.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РЕСПУБЛИКИ ТАДЖИКИСТАН
ТАДЖИКСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА ИМЕНИ САДРИДДИНА АЙНИ

УДК-517.2 (575.3)
ББК-22.1 (2 таджик)
З - 91

На правах рукописи

ЗУЛФОНОВ ШАХРИЁР МУЛОЗУЛФОНОВИЧ

ПРИМЕНЕНИЕ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И ИНТЕГРО - ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени доктора философии (PhD) по специальности математики 6D060100 (6D060102 - Дифференциальные уравнения, динамические системы, оптимальное управление)

ДУШАНБЕ-2025

Работа выполнена на кафедре математического анализа математического факультета Таджикского государственного педагогического университета имени Садриддина Айни.

Научный руководитель: **Илолов Мамадшо Илолович,** академик Национальной академии наук Таджикистана, доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты: **Мухсинов Ёдгор Мирзоевич,** доктор физико- математических наук, профессор кафедры современные математические и естественные науки Таджикский государственный университет права, бизнеса и политики.

Козиев Гулназар Мавлонназарович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математика в экономике международный университет туризма и предпринимательства Таджикистана

Ведущая организация: Института математики им. А. Джураева Национальной академии наук Таджикистана

Защита состоится «7» января 2026 года в «15:30» ч. на заседании диссертационного совета при Таджикском национальном университете по адресу: 734027, г. Душанбе, улица Буни-Хисорак, корпус 17, аудитория №.203.

E-mail: alisher_gaforov@mail.ru; номер мобильного телефона ученого секретаря +992900766603.

С диссертацией и авторефератом можно ознакомиться на сайте www.tnu.tj и в библиотеке Таджикского национального университета.

Автореферат разослан «____» «_____» 2025 года.

Ученый секретарь диссертационного совета, кандидат физико-математических наук **Гафоров А.Б.**

Введение

Актуальность темы исследования. За последние десятилетия теория и практика дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений с частными производными, которые являются математическим объяснением сложных и весьма важных проблем физики, химии, биологии и современной техники, имеют значительное развитие и прогресс. Для этих уравнений разработаны довольно разные подходы к решению начальных и начально-краевых задач. Среди них особое место занимает метод интегральных преобразований. В свою очередь, наиболее важным из этих методов является метод интегрального преобразования Лапласа-Карсона для линейных уравнений с n переменными, который в последние годы находится в центре внимания математиков, физиков и других исследователей. Научные статьи и монографии учёных Ю. А. Бричков и А. П. Прудников [3], Р. С. Дахия [22, 23], А. Бабахани [21], Р. С. Дахия и Дж. С. Дебнат [24] а также В. А. Диткин и А. П. Прудников [5, 25] посвящены новым методам расчета прямых и обратных преобразований Лапласа-Карсона, которые предназначены для функций с двумя и многими переменными.

Диссертация посвящена применению ряда классов уравнений (телеграфного дифференциального уравнения, телеграфного интегро-дифференциального уравнения, уравнений с частными производными различных порядков и начальных и краевых задач для них) посредством преобразования Лапласа-Карсона. Для нахождения явного вида решения приведенных выше уравнений необходимо вычислить прямые и обратные интегральные преобразования многопеременных функций. В диссертации представлены оперативные расчеты таких функций.

Степень научной разработанности темы исследования. Задачи для не очень широких классов дифференциальных уравнений и интегро-дифференциальных уравнений с применением операционного исчисления исследованы в научных трудах Й. Фучита [27,28], М. Ф. Абдулкаримов [1], В. А. Илин [11], Е. А. Козлова [29], А. А. Дубков [6], С. С. Орлов [17], Э. И. Семенов и А. А. Косов [19] . Начальные и начально-граничные задачи для дифференциальных уравнений и телеграфных интегро-дифференциальных уравнений, а также для дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка исследованы в научных статьях М. И. Илолов, Ш. М. Зулфонов [10,12,13,14], Ш. М. Зулфонов $[2-\text{А}, 5-\text{А}]$. Для таких задач, посредством интегрального преобразования Лапласа-Карсона, представлено изображения явного решения.

Связь исследовательской работы с программами, проектами и научными темами. Диссертационная работа выполнена в рамках реализации перспективного плана научно-исследовательской работы кафедры математического анализа математического факультета Таджикского государственного педагогического университета имени Садриддина Айни на 2021-2025 годы по теме «Исследования по теории дифференциальных уравнений и ее приложениям».

ОБЩЕЕ ОПИСАНИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Цель исследования. Основной целью диссертации является определение изображений некоторых функций и некоторых интегралов, которые используются для нахождения явных решений некоторых классов дифференциальных уравнений с частными производными первого и второго порядка при заданных начальных и граничных условиях, а также широко используются для нахождения явных решений телеграфного дифференциального уравнения с заданными начальными и граничными условиями и телеграфного интегро-дифференциального уравнения с заданными начальными и граничными условиями. Приведенные в диссертации изображения функций и интегралов используются не только для решения телеграфного дифференциального уравнения, телеграфного интегро-дифференциального уравнения и дифференциальных уравнений с частными производными первого и второго порядка, но могут быть использованы также и для нахождения решений интегро-дифференциальных уравнений, которые приводят к тепловым, волновым и т. п. уравнениям.

Задачи исследования. В соответствии с поставленной целью исследования были определены следующие задачи:

1. Определить изображение интегралов вида:

$$\int_0^{\min(x,t)} e^{-as} f(x-s,t-s)g(s)ds\,; \quad \int_0^{\min(x,t)}\int_0^{t-s} a(t-s-\tau)\,f(x-s;\tau)e^{-a_1 s}\,dsd\tau;$$

2. Определить общее решение телеграфного дифференциального уравнения, телеграфного интегро-дифференциального уравнения и дифференциальных уравнений с частными производными первого и второго порядка;
3. Решить телеграфное интегро-дифференциальное уравнение относительно ядра линейной функции (график которой изображается прямой линией) и нелинейной функции (график которой изображается кривой) при заданных начальных и граничных условиях;
4. Применить метод операционного исчисления к решению дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений.

Объектом исследования являются телеграфное дифференциальное уравнение с заданными начальными и граничными условиями и телеграфное интегро-дифференциальное уравнение для ядра линейной функции и нелинейной функции с заданными начальными и граничными условиями.

Предмет исследования. Предметом исследования является определение изображений функций, интегралов и нахождение явных решений телеграфного дифференциального уравнения, телеграфного интегро-дифференциального уравнения и дифференциальных уравнений с частными производными первого и второго порядка.

Научная новизна исследования. В диссертации были достигнуты следующие основные целы:

1. Посредством преобразования Лапласа-Карсона определены изображения функций и интегралов, имеющих широкое практическое применение;

2. Определено общее решение телеграфного дифференциального уравнения с заданными начальными и граничными условиями;

3. Определено общее решение телеграфного интегро-дифференциального уравнения для ядра линейной функции и нелинейной функции с заданными начальными и граничными условиями;

4. Определены общее решение линейных дифференциальных уравнений с частными производными первого и второго порядка с заданными начальными и граничными условиями и решение интегро-дифференциального уравнения, которого можно привести к волновому уравнению.

Теоретическая и научно-практическая ценность исследования. Данное исследование имеет теоретическую и практическую ценность, а результаты диссертационной работы и методы их доказательства находят свое применение при поиске решений начально-граничных задач для дифференциальных уравнений с частными производными и интегро-дифференциальных уравнений с частными производными.

Положения выносимые на защиту:

1. Теорема об определении изображения некоторых функций посредством преобразования Лапласа-Карсона;

2. Теорема об определении изображения некоторых интегралов посредством преобразования Лапласа-Карсона;

3. Явные решения линейных дифференциальных уравнений первого и второго порядка с заданными начальными и граничными условиями;

4. Явное решение телеграфного дифференциального уравнения с начальными и граничными условиями;

5. Явное решение телеграфного интегро-дифференциального уравнения для разных ядер с заданными начальными и граничными условиями;

6. Явные решения интегро-дифференциальных уравнений, приводящихся к волновому уравнению с заданными начальными и граничными условиями.

Степень достоверности результатов. Достоверность научных результатов диссертация обеспечена точными математическими доказательствами всех утерждений, изложенных в диссертации, а также исследованиями других авторов.

Соответствие диссертации паспорту научной специальности. Диссертационная работа выполнена по специальности 6D060102 - Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление, а раздел по дифференциальным уравнениям включен в параграф 3, III го раздела паспорта научной специальности.

Личный вклад соискателя ученой степени в исследовании. Тема исследования и выбор метода доказательств были предложены со стороны научного руководителя, кроме того, научный руководитель оказал консультационную помощь автору диссертации. Основные результаты диссертационной работы, изложенные в разделе «Научная новизна», были получены лично автором.

Одобрение и внедрение результатов диссертационной работы

Основные результаты диссертации обсуждались в следующих семинарах и конференциях:

1. Семинар Центра инновационного развития науки и новых технологий НАНТ «Дробный анализ и его применение» под руководством

академика НАНТ, доктора физико–математических наук, профессора М. И. Илолова (Душанбе, 2020 – 2024 г.)

2. Семинар кафедры математического анализа Таджикского Государственного педагогического университета имени С. Айни под руководством доктора физико–математических наук, профессора Р. Н. Пирова

3. Международная научная конференция по теме «Комплексный анализ и его применение», посвященная двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических наук в сфере науки и образования, 75–летию доктора физико–математических наук, профессора И. К. Курбанова и 70-летию доктора физико–математических наук, профессора Джумабоя Сафарова, (г. Бахтар, 19 ноября 2022 г.);

4. Международная научная конференция, посвященная 70-летию академика НАНТ, доктора физико-математических наук, профессора М. Ш. Шабозова, (Таджикистан, Душанбе, 24-25 июня 2022 г.);

5. Международная научная конференция, посвященная 70-летию академика Академия наук Таджикистана, доктора физико-математических наук, профессора К. Х. Бойматова, (Таджикистан, Душанбе, 25-26 декабря 2020 г.);

6. Международная научная конференция, посвященная 80-летию доктора физико-математических наук, профессора Темура Собирова (Таджикистан, Душанбе, 25-26 июня 2021 г.);

7. Международная научная конференция, посвященная 70-летию доктора физико-математических наук, профессора Г. Джангибекова, (Таджикистан, Душанбе, 30-31 января 2020 г.);

8. Республиканская конференция, посвященная «Двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических наук в 2020-2040 годах», Душанбе-2020;

9. Международная научная конференция, посвященная 70-летию доктора физико-математических наук, профессора К. Тухлиева

(Таджикистан, Худжанд, 21-22 июня 2024 г.);

Публикации по теме диссертации. Результаты исследований по теме диссертационной работы опубликованы в 10-и научных статьях, в том числе в 4-х статьях в рецензируемых изданиях, входящих в действующий перечень ВАК при Президенте Республики Таджикистан, и в 6-и статьях в материалах международных и республиканских конференций.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 3 глав, библиографии, состоящей из 120 наименований, общим объёмом 139 компьютерных страниц, напечатанных в программе Microsoft Word. Для удобства работы в диссертации принята тройная нумерация теорем, лемм, и формул: первый номер соответствует номеру главы, второй номер соответствует номеру параграфа и третий номер соответствует порядковому номеру теорем, лемм, результатов и формул данного параграфа.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ ИССЛЕДОВАНИЯ

Материалы и методы исследования. В исследовании использованы расчеты прямых и обратные преобразования Лапласа-Карсона для многих переменных функций, повторных интегралов, а также их применение при решении некоторых классов дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений.

Основные результаты исследования. Приводим краткую информацию об основных результатах диссертационной работы.

Первая глава диссертации (1.1, 1.2) посвящена предварительным сведениям о преобразовании Лапласа-Карсона для многих переменных функций и конкретному вычислению прямых и обратных преобразований для классов функций и интегралов, которые затем будут использоваться для нахождения явных решений дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений с частными производными. В первом параграфе первой главы 1.1. показаны преобразовании Лапласа, а также основные определения, обозначения и теоремы. Во втором параграфе первой главы 1.2. вошли общие формулы преобразования Лапласа для функций n - переменных в виде

$$F(p_1, p_2 \dots p_n) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} e^{-\sum_{k=1}^{n} p_k x_k} f(x_1, x_2, \dots x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

где , $F(p_1, p_2 \dots p_n)$ – функция изображения и $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ - функция оригинала, а $p_1, p_2 \dots p_n$ - комплексные числа [21, 25]. Впервые американский ученый Джон Карсон исследовал и открыл преобразование Лапласа для нахождения изображения функций одной и двух переменных, которое сейчас известно как преобразование Лапласа-Карсона [5, 7, 18]. Рассматриваются основные функции преобразования Лапласа и изображение свёртки двух функций с двумя переменными.

Посредством преобразования Лапласа-Карсона рассчитаны некоторые функции и интегралы. Для примера, изображение функции

$$e^{-cx} \varphi_t'(t - x) + \varphi(0) e^{-cx} \delta(t - x)$$

где c – произвольное действительное число, $\delta(t - x)$ – функция Дирака, [2, 14] а $\varphi(t)$ – дифференцируемая функция, равняется комплексной функции с переменными $p,\ q$ вида:

$$\frac{pq\Phi(q)}{p + q + c}$$

где $\Phi(q)$ – преобразование Лапласа функции $\varphi(t)$. Аналогично рассчитаны изображения функций $e^{-bt} f(|x - t|)$ и $e^{-bt - cx} f(x + t)$

Теоремы 1.2.1, 1.2.2, 1.2.3, 1.2.4 посвящены соответственно вычислениям изображений некоторых интегралов вида

$$\int_0^{\min(x,t)} \int_0^{t-s} a(t - s - \tau) f(x - s; \tau) e^{-a_1 s} \, ds d\tau$$

$$\int_0^{\min(x,t)} e^{-a_0(t-s)} \cdot e^{-a_1 s} \cdot f(x-s;t-s)ds; \quad \int_0^{\min(x,t)} e^{-as} f(x-s,t-s)g(s)ds$$

Доказательство теорем проведено на основе метода операционного исчисления и несобственных интегралов и при этом были использованы классические исследования В. А. Диткина и Г. Дёча [5, 18].

Теорема : Пусть $a(t), f(x,t)$ непрерывные функции. Если

$a(t) \to A(q)$ и $f(x,t) \rightrightarrows F(p;q)$, *то*

$$\int_0^{min(x,t)} \int_0^{t-s} a(t-s-\tau) f(x-s;\tau) e^{-a_1 s} \, dsd\tau \rightrightarrows \frac{A(q)F(p;q)}{q(p+q+a_1)}$$

где $A(q)$ –изображения для $a(t)$, $F(p;q)-$ изображения для функции оригинала $f(x,t)$ и $x > 0, t > 0$.

Доказательство: Пользуемся преобразованием Лапласа-Карсона получим

$$pq \int_0^{\propto} \int_0^{\infty} e^{-px-qt} \left(\int_0^{min(x,t)} \int_0^{t-s} a(t-s-\tau) f(x-s;\tau) e^{-a_1 s} \, dsd\tau \right) dxdt =$$

Сделаем замену переменной интегрирования во внутреннем интеграле $x - s =, t - s = v$ и получим

$$pq \int_0^{\propto} \int_0^{\infty} e^{-pu-qv} \left(\int_0^{v} a(v-\tau) f(u;\tau) d\tau \right) dudv \int_0^{\infty} e^{-(p+q+a_1)s} \, ds.$$

Хорошо известно, что

$$\int_0^v a(v-\tau) f(u;\tau) d\tau \rightrightarrows \frac{1}{q} A(q) F(p,q).$$

Тогда мы получим

$$\frac{1}{q}A(q)F(p,q)\cdot\lim_{R\to\infty}\left(-\frac{e^{-(p+q+a_1)s}}{p+q+a_1}\Bigg|\begin{matrix}R\\0\end{matrix}\right)=\frac{1}{q}A(q)F(p,q)\cdot\frac{1}{p+q+a_1}.$$

Таким образом,

$$\int_0^{min(x,t)}\int_0^{t-s}a(t-s-\tau)\,f(x-s;\tau)e^{-a_1 s}\,dsd\tau \rightrightarrows \frac{A(q)F(p;q)}{q(p+q+a_1)}.$$

В частных случае равенства принимает вид:

$$\int_0^{\min(x,t)}\int_0^{t-s}a(t-s-\tau)\,f(x-s)g(\tau)e^{-a_1 s}dsd\tau \rightrightarrows \frac{F(p)G(q)A(q)}{q(p+q+a_1)}$$

Как результат применения отмеченных выше теорем были рассчитаны их изображения для ряда функций, которые приведены в виде Таблицы (Таблица 1.2.1.).

Таблица 1.2.1.Изображение некоторых функций

	f(x,t) $\quad(x>0;t>0)$	F(p,q)
1	$e^{-lt}u_1(x-t)$	$\frac{qU_1(p)}{p+q+l}$
2	$e^{-mt}{u_0}'_x(x-t)+u_0(0)e^{-mt}\delta(x-t)$	$\frac{pqU_0(p)}{p+q+m}$
3	$e^{-bx}\varphi_2(t-x)$	$\frac{p\Phi_2(q)}{p+q+b}$
4	$e^{-cx}\varphi'_t(t-x)+\varphi(0)e^{-cx}\delta(t-x)$	$\frac{pq\mathit{\Phi}(q)}{p+q+c}$
5	$e^{-bt-cx}f(t+x)$	$\frac{pq}{p-q-b+c}\left(\frac{F(q+b)}{q+b}-\frac{F(p+c)}{p+c}\right)$
6	$e^{-bt}f(\|x-t\|)$	$\frac{q}{q+b}\cdot\frac{pF(q+b)+(q+b)F(p)}{p+q+b}$

Продолжение таблицы 1.2.1.

7	$e^{-bt-cx}f(\lvert x-t\rvert)$	$\frac{pq}{p+q+b+c}\left(\frac{F(q+b)}{q+b}+\frac{F(p+c)}{(p+c)}\right)$
8	$e^{-bt-cx}f(x-t)$	$\frac{pqF(p+c)}{(p+c)(p+q+b+c)}$
9	$e^{-bt-cx}f(t-x)$	$\frac{pqF(q+b)}{(q+b)(p+q+b+c)}$

После этого в параграф 1.2 вычисляются изображения некоторых интегралов, которые до сих пор не встречаются в литературе.

Таблица 1.2.2.Описание некоторых интегралов

	$f(x,t) \qquad (x>0;\quad t>0)$	$F(p,q)$
1	$\int_0^{\min(x,t)} e^{-as}f(x-s,t-s)ds$	$\frac{F(p,q)}{p+q+a}$
2	$\frac{1}{c}\int_0^t (e^{-ls}-e^{-ct+(c-l)s})u_0(x-s)ds;\ c\neq 0$	$\frac{1}{(q+c)(p+q+l)}U_0(p)$
3	$\int_0^t e^{-(b_0t+a_0s)}u_0(x-s)ds$	$\frac{q}{(q+b_0)(p+q+a_0+b_0)}U_0(p)$
4	$\int_0^{\min(x,t)}\int_0^{t-s} a(t-s-\tau)\,f(x-s;\tau)e^{-a_1s}\,dsd\tau$	$\frac{A(q)F(p;q)}{q(p+q+a_1)}$
5	$\int_0^{\mathrm{t}} \mathrm{e}^{-(\mathrm{bt+s})}\mathrm{u}_0(x-\mathrm{s})\mathrm{ds}$	$\frac{\mathrm{q}}{(\mathrm{q+b})(\mathrm{p+q+1+b})}\mathrm{U}_0(\mathrm{p})$
6	$\int_0^t a(t-\tau)u(x,\tau)d\,\tau$	$\frac{1}{q}A(q)U(p,q)$
7	$\int_0^{\min(x,t)}\int_0^{t-s} e^{-a_2(t-s-\tau)}\,f(x-s;\tau)e^{-a_1s}\,dsd\tau$	$\frac{F(p;q)}{(q+a_2)(p+q+a_1)}$
8	$\int_0^{\min(x,t)} \big(\delta(t-s)+bh(t-s)\big)e^{-bs}\,f(x-s)ds$	$\frac{(q+b)F(p)}{p+q+b}$

Продолжение таблицы 1.2.2.

9	$\int_0^t \big(\delta(t-s)+bh(t-s)\big)e^{-bs} f(x+s)ds$	$\dfrac{pF(q+b)-(q+b)F(p)}{p-(q+b)}$
10	$\int_0^t \big(\delta(t-s)+bh(t-s)\big)e^{-bs} f(\lvert x-s\rvert)ds$	$\dfrac{pF(q+b)+(q+b)F(p)}{p+q+b}$
11	$\int_0^t \big(\delta(t-s)+bh(t-s)\big)e^{-bs} f(s)ds$	$F(q+b)$
12	$\int_0^t a(t-\tau)\, e^{-b\tau} f(x+\tau)\partial\tau$	$\dfrac{A(q)}{q+b}\cdot\dfrac{pF(q+b)-(q+b)F(p)}{p-(q+b)}$
13	$\int_0^t a(t-\tau)\, e^{-b\tau} f(\lvert x-\tau\rvert)\partial\tau$	$\dfrac{A(q)}{q+b}\cdot\dfrac{pF(q+b)+(q+b)F(p)}{p+(q+b)}$
14	$\int_0^t a(t-\tau)\, e^{-b\tau}\big(f(x+\tau)+f(\lvert x-\tau\rvert)\big)\partial\tau$	$\dfrac{2A(q)}{q+b}\cdot\dfrac{p^2F(q+b)-(q+b)^2F(p)}{p^2-(q+b)^2}$
15	$\int_0^{\min(x,t)} e^{-a_0(t-s)}\cdot e^{-a_1 s}\cdot f(x-s;t-s)ds$	$\dfrac{qF(p;q+a_0)}{(p+q+a_1)(q+a_0)}$
16	$\int_0^{\mathrm{t}} e^{-a_0(t-s)}\cdot e^{-a_1 s}\cdot \delta(x-s)u_0(t-s)ds;\ \ x>t$	$\dfrac{q}{q+a_0}\cdot\dfrac{pU_0(q+a_0)}{p+q+a_1}$
17	$\int_0^{\min(x,t)} e^{-a_1 t}\cdot u_0(x+t-2s)ds$	$\dfrac{q}{q+a_1}\cdot\dfrac{pU_0(q+a_1)-(q+a_1)U_0(p)}{p^2-(q+a_1)^2}$
18	$\int_0^{\min(x,t)}\int_0^{t-s} a(t-s-\tau)\cdot e^{-a_1 s}\cdot f_1(x-s)\, f_2(\tau)dsd\tau$	$\dfrac{F_1(p)F_2(q)A(q)}{q(p+q+a_1)}$
19	$\int_0^t e^{-b(t-s)}\varphi_2(s)ds -$ $-\int_0^{min(x;t)} e^{-bs}h(x-s)\varphi_2(t-s)ds$	$\dfrac{p\Phi_2(q)}{(q+b)(p+q+b)}$
20	$\int_0^{\min(x,t)} e^{-as} f(x-s,t-s)g(s)ds$	$\dfrac{G(p+q+a)F(p,q)}{p+q+a}$

Следует отметить, что здесь функция $F(p,q)$ функция с комплексными переменными [8, 9, 20, 25].

Вторая глава диссертации под названием «Дифференциальные уравнения с частными производными» посвящена применению преобразования Лапласа-Карсона при решении дифференциальных уравнений с частными производными первого и второго порядка.

В параграфе 2.1. собраны основные понятия и результаты по дифференциальным уравнениям с частными производными первого и второго порядка.

В том числе, напоминается классификация уравнений с частными производными второго порядка, а также напоминаются определения уравнений эллиптических, гиперболических и параболических типов.

В параграфе 2.2. исследовано уравнение переноса с линейным источником и неоднородными начальными и граничными условиями. Вышеуказанная задача решается с помощью интегрального преобразования Лапласа-Карсона.

Кроме этого, в § 2.2. изучено уравнение вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}+a\frac{\partial u}{\partial t}+bu=f(x,t) \qquad (1)$$

с начальными условиями

$$\begin{cases} u(x,0)=u_0(x) \\ u'_t(x,0)=u_1(x) \end{cases} \qquad (2)$$

и граничными условиями

$$\begin{cases} u(0,t)=\varphi_0(t) \\ u'_x(0,t)=\varphi_1(t) \end{cases} \qquad (3)$$

Отметим, что задачи (1) – (3) при $a = 0,\ b = 1,\ \ f(x,t) = \sqrt{x+t}$ и при условии

$$u(x,0) = u_t'(x,0) = u_x'(0,t) = u(0,t) = 0$$

была исследована американским ученым Р. С. Дахия $[25, 26]$ и иранским ученым Дж. Собири $[25, 26]$ с использованием преобразования Лапласа двух переменных. В параграф 2.2. диссертации приведено общее решение уравнения (1) с начальными и граничными условиями (2) – (3) для любого положительного целого числа a, b и любой непрерывной и дифференцируемой функции $f(x,t)$, которое удовлетворяет условия преобразовании Лапласа.

Общее решение уравнений (1) – (2) – (3) имеет следующий вид [13, 14]:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b\right)^{-0,5} \cdot e^{-\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)x} {\varphi_1}_t'(t-x) +$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}} \int_0^{\min(x,t)} \left(e^{-\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)s} - e^{-\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)s}\right) f(x-s,t-s)ds +$$

$$e^{-\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)x} \varphi_1(t-x) +$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}} \varphi_1(0) e^{-\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)x} \delta(t-x) +$$

$$\frac{\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}} * e^{-\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)x} \varphi_1(t-x) -$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}e^{-\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)x}\varphi_1{}'_t(t-x)-$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}\varphi_1(0)e^{-\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)x}\delta(t-x)-$$

$$\frac{\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}e^{-\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)x}\varphi_1(t-x)+$$

$$(a^2-4b)^{-\frac{1}{2}}\left(e^{-\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)x}-e^{-\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)x}\right)\varphi_2(t-x)$$

$$+e^{-\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)t}u_0(x-t)+$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}e^{-\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)t}u_0{}'_x(x-t)+$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}u_0(0)e^{-\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)t}\delta(x-t)+$$

$$\frac{\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}e^{-\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)t}u_0(x-t)-$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}e^{-\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)t}u_0{}'_x(x-t)-$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}u_0(0)e^{-\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)t}\delta(x-t)-$$

$$\frac{\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}e^{-\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)t}u_0(x-t)+$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}\left(e^{-\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)t}-e^{-\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)t}\right)u_1(x-t)$$

Как мы видим

$$u(x,0)=e^{-\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)\cdot 0}u_0(x-0)+\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}e^{-\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)\cdot 0}{u_0}'_x(x-0)$$

$$+\frac{\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}e^{-\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)\cdot 0}u_0(x-0)-$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}e^{-\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)\cdot 0}{u_0}'_x(x-0)-$$

$$\frac{\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}e^{-\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)\cdot 0}u_0(x-0)+$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}\left(e^{-\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)\cdot 0}-e^{-\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)\cdot 0}\right)u_1(x-0)+$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}\int_0^0\left(e^{-\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)s}-e^{-\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)s}\right)f(x-s,t-s)ds=$$

$$u_0(x)+\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}u_{0}{}'_x(x)+\frac{\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}u_0(x)-$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}u_{0}{}'_x(x)-\frac{\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}u_0(x)=u_0(x)$$

В параграфе 2.3. было проведено исследование телеграфного дифференциального уравнения. Уравнение имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\alpha\frac{\partial u}{\partial t}+\beta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(t) \qquad (4)$$

Найдено общее решение уравнения при выполнении начальных условий

$$u(x,0)=u_0(x), u_t'(x,0)=u_1(x) \qquad (5)$$

и граничных условий

$$u(0,t)=\varphi_1(t), u_x'(0,t)=\varphi_2(t). \qquad (6)$$

При $\alpha=0,\ \beta=0$ задача (4) – (6) была рассмотрена со стороны В. А. Диткина, А. П. Прудникова [5] и в случае $\alpha=0,\ \beta=-q(x,t)$ в статье М. Ф. Абдулкаримова [1]. В диссертации задача (4) – (6) полностью решены посредством интегрального преобразования Лапласа-Карсона [10]. Функция f(t) должна удовлетворять условиям существования преобразования Лапласа-Карсона.

Общий вид решения начально-краевой задачи (4) – (6) имеет следующий вида:

$$u(x,t) = e^{-\frac{\alpha}{2}x}\varphi_1(t-x) +$$

$$\int_0^{min(x,t)} \int_0^{t-s} \delta'(t-s-\tau)\, u_0(x-s+\tau) e^{-\frac{\alpha}{2}(s+\tau)}\, ds d\tau +$$

$$\alpha \int_0^{min(x,t)} \int_0^{t-s} \delta(t-s-\tau)\, u_0(x-s+\tau) e^{-\frac{\alpha}{2}(s+\tau)}\, ds d\tau +$$

$$+ \int_0^{\min(x,t)} e^{-\frac{\alpha}{2}t} \cdot u_1(x+t-2s) ds +$$

$$+ \int_0^{\min(x,t)} \int_0^{t-s} e^{\frac{-\alpha}{2}(t-\tau)}\, h(x-s)\, f(\tau) ds d\tau$$

Третья глава диссертации посвящена операционному решению интегро-дифференциальных уравнений с частными производными. В параграфе 3.1. изложены основные понятия интегро-дифференциальных уравнений с частными производными. Отмечено, что подобные уравнения в виде уравнений теплопроводности с учетом памяти среды нашли свой анализ в статьях М. Гуртина, В. Пипкина [15, 16]. Результат, приведенный в главе 3, охватывает общий случай таких уравнений.

В параграфе 3.2. исследовано телеграфное интегро-дифференциальное уравнение, решение которого в литературе пока не встречается

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (2b+1)\frac{\partial u}{\partial t} + b^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \int_0^t a(t-\tau)\frac{\partial^2 u(x,\tau)}{\partial x^2} d\tau + f(t) \qquad (7)$$

с начальными условиями

$$\begin{cases} u(x,0) = u_0(x) \\ u'_t(x,0) = u_1(x) \end{cases} \tag{8}$$

и граничными условиями

$$\begin{cases} u(0,t) = \varphi_1(t) \\ u'_x(0,t) = \varphi_2(t) \end{cases} \tag{9}$$

Общее решение задачи (7) – (9) для ядра $a(t) = b^2 t + 2b + 1$ имеет следующий вид $[3 - \text{A}]$:

$$u(x;t) = \int_0^{\min(x,t)} \int_0^{t-s} (\delta'(t-s-\tau))u_0(x+\tau-s)dsd\tau -$$

$$b^2 \int_0^{\min(x,t)} \int_0^{t-s} \left(\frac{b+\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}}{2\sqrt{b+0{,}25}} \right) e^{-\left(b+\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)} u_0(x+\tau-s)\,dsd\tau +$$

$$b^2 \int_0^{\min(x,t)} \int_0^{t-s} \left(\frac{b+\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}}{2\sqrt{b+\frac{1}{4}}} \right) e^{-\left(b+\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)} u_0(x+\tau-s)\,dsd\tau +$$

$$\int_0^{\min(x,t)} \int_0^{t-s} \delta(t-s-\tau)\, u_1(x+\tau-s)dsd\tau + \varphi_1(t-x) +$$

$$\frac{\left(b+\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)^2}{2\sqrt{b+\frac{1}{4}}} \int_0^{\min(x,t)} \int_0^{t-s} e^{-\left(b+\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)} u_1(x+\tau-s)\,dsd\tau -$$

$$\frac{\left(b+\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)^2}{2\sqrt{b+\frac{1}{4}}} \int_0^{\min(x,t)} \int_0^{t-s} e^{-\left(b+\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)} u_1(x+\tau-s)\,dsd\tau -$$

$$\int_0^{\min(x,t)}\int_0^{t-s}\left(\frac{b+\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}}{2\sqrt{b+\frac{1}{4}}}\right)e^{-\left(b+\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)}h(x-s)\,f(\tau)ds d\tau+$$

$$\int_0^{\min(x,t)}\int_0^{t-s}\left(\frac{b+\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}}{2\sqrt{b+\frac{1}{4}}}\right)e^{-\left(b+\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)}h(x-s)f(\tau)\,ds d\tau$$

Общее решение уравнения при $\boldsymbol{x > t}$ ***имеет вид***

$$u(x;t)=\int_0^{\mathrm{t}}\int_0^{t-s}(\delta'(t-s-\tau))u_0(x+\tau-s)ds d\tau-$$

$$b^2\int_0^{\mathrm{t}}\int_0^{t-s}\left(\frac{b+\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}}{2\sqrt{b+0{,}25}}\right)e^{-\left(b+\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)}u_0(x+\tau-s)\,ds d\tau+$$

$$b^2\int_0^{\mathrm{t}}\int_0^{t-s}\left(\frac{b+\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}}{2\sqrt{b+0{,}25}}\right)e^{-\left(b+\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)}u_0(x+\tau-s)\,ds d\tau+$$

$$\int_0^{\mathrm{t}}\int_0^{t-s}\delta(t-s-\tau)\,u_1(x+\tau-s)ds d\tau+$$

$$\frac{\left(b+\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)^2}{2\sqrt{b+\frac{1}{4}}}\int_0^{\mathrm{t}}\int_0^{t-s}e^{-\left(b+\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)}u_1(x+\tau-s)\,ds d\tau-$$

$$\frac{\left(b+\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)^2}{2\sqrt{b+\frac{1}{4}}}\int_0^{\mathrm{t}}\int_0^{t-s}e^{-\left(b+\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)}u_1(x+\tau-s)\,ds d\tau-$$

$$\frac{1}{2\sqrt{b+\frac{1}{4}}}\int_0^{\mathrm{t}}\int_0^{t-s}\left(b+\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)e^{-\left(b+\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)}h(x-s)\,f(\tau)dsd\tau+$$

$$\frac{1}{2\sqrt{b+\frac{1}{4}}}\int_0^{\mathrm{t}}\int_0^{t-s}\left(b+\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)e^{-\left(b+\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)}h(x-s)f(\tau)\,dsd\tau$$

Общее решение уравнения при $x<t$ имеет вид

$$u(x;t)=\int_0^{x}\int_0^{t-s}(\delta'(t-s-\tau))u_0(x+\tau-s)dsd\tau-$$

$$b^2\int_0^{\mathrm{x}}\int_0^{t-s}\left(\frac{b+\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}}{2\sqrt{b+0{,}25}}\right)e^{-\left(b+\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)}u_0(x+\tau-s)\,dsd\tau+$$

$$b^2\int_0^{x}\int_0^{t-s}\left(\frac{b+\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}}{2\sqrt{b+\frac{1}{4}}}\right)e^{-\left(b+\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)}u_0(x+\tau-s)\,dsd\tau+$$

$$\int_0^{\mathrm{x}}\int_0^{t-s}\delta(t-s-\tau)\,u_1(x+\tau-s)dsd\tau+\varphi_1(t-x)+$$

$$\frac{\left(b+\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)^2}{2\sqrt{b+\frac{1}{4}}}\int_0^{\min(x,t)}\int_0^{t-s}e^{-\left(b+\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)}u_1(x+\tau-s)\,dsd\tau-$$

$$\frac{\left(b+\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)^2}{2\sqrt{b+\frac{1}{4}}}\int_0^{\mathrm{x}}\int_0^{t-s}e^{-\left(b+\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)}u_1(x+\tau-s)\,dsd\tau-$$

$$\frac{1}{2\sqrt{b+\frac{1}{4}}}\int_0^{x}\int_0^{t-s}\left(b+\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)e^{-\left(b+\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)}h(x-s)\,f(\tau)ds d\tau+$$

$$\frac{1}{2\sqrt{b+\frac{1}{4}}}\int_0^{x}\int_0^{t-s}\left(b+\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)e^{-\left(b+\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)}h(x-s)f(\tau)\,ds d\tau$$

Кроме этого, задача (7) – (9) для ядра вида $a(t)=(1-bt)e^{-bt}$ также была решена, которая имеет следующий вид $[3-\text{A}]$:

$$u(x,t)=e^{-bx}\varphi_1(t-x)+\int_0^{min(x,t)}\int_0^{t-s}\delta(t-s-\tau)\,u_1(x-s+\tau)e^{-b(s+\tau)}\,ds d\tau$$

$$+\int_0^{min(x,t)}\int_0^{t-s}(\delta'(t-s-\tau)+2b\delta(t-s-\tau))\,u_0(x-s+\tau)\,e^{-b(s+\tau)}ds d\tau+$$

$$\frac{b^2}{2\sqrt{b+\frac{1}{4}}}\int_0^{min(x,t)}\int_0^{t-s}e^{-\left(\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)}\cdot e^{-bt}\cdot u_0(x-s+\tau)\,ds d\tau-$$

$$\frac{b^2}{2\sqrt{b+\frac{1}{4}}}\int_0^{min(x,t)}\int_0^{t-s}e^{-\left(\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)}\cdot e^{-bt}\,u_0(x-s+\tau)\,ds d\tau-$$

$$\int_0^{min(x,t)}\int_0^{t-s}\left(\frac{2b+1}{4\sqrt{b+\frac{1}{4}}}+\frac{1}{2}\right)e^{-\left(b+\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+b}\right)(t-s-\tau)}\,u_1(x-s+\tau)e^{-b(s+\tau)}\,ds d\tau+$$

$$\int_0^{min(x,t)}\int_0^{t-s}\left(\frac{2b+1}{4\sqrt{b+\frac{1}{4}}}-\frac{1}{2}\right)e^{-\left(b+\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}+b}\right)(t-s-\tau)}\,u_1(x-s+\tau)e^{-b(s+\tau)}\,ds d\tau+$$

$$\int_0^{min(x,t)}\int_0^{t-s}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4\sqrt{b+\frac{1}{4}}}\right)e^{-\left(b+\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)}\cdot e^{-bs}\cdot h(x-s)\,f(\tau)dsd\tau+$$

$$\frac{2\sqrt{b+\frac{1}{4}}+1}{4\sqrt{b+\frac{1}{4}}}\int_0^{min(x,t)}\int_0^{t-s} e^{-\left(b+\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)}\cdot e^{-bs}\,h(x-s)f(\tau)dsd\tau$$

Общее решение уравнения при $x > t$ имеет вид

$$u(x,t)=\int_0^t\int_0^{t-s}\delta(t-s-\tau)\,u_1(x-s+\tau)e^{-b(s+\tau)}\,dsd\tau$$

$$+\int_0^t\int_0^{t-s}(\delta'(t-s-\tau)+2b\delta(t-s-\tau))\,u_0(x-s+\tau)\,e^{-b(s+\tau)}dsd\tau+$$

$$\frac{b^2}{2\sqrt{b+\frac{1}{4}}}\int_0^t\int_0^{t-s} e^{-\left(\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)}\cdot e^{-bt}\cdot u_0(x-s+\tau)\,dsd\tau-$$

$$\frac{b^2}{2\sqrt{b+\frac{1}{4}}}\int_0^t\int_0^{t-s} e^{-\left(\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)}\cdot e^{-bt}\,u_0(x-s+\tau)\,dsd\tau-$$

$$\int_0^t\int_0^{t-s}\left(\frac{2b+1}{4\sqrt{b+\frac{1}{4}}}+\frac{1}{2}\right)e^{-\left(b+\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+b}\right)(t-s-\tau)}\,u_1(x-s+\tau)e^{-b(s+\tau)}\,dsd\tau+$$

$$\int_0^t\int_0^{t-s}\left(\frac{2b+1}{4\sqrt{b+\frac{1}{4}}}-\frac{1}{2}\right)e^{-\left(b+\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}+b}\right)(t-s-\tau)}\,u_1(x-s+\tau)e^{-b(s+\tau)}\,dsd\tau+$$

$$\int_0^t\int_0^{t-s}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4\sqrt{b+\frac{1}{4}}}\right)e^{-\left(b+\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)}\cdot e^{-bs}\cdot h(x-s)\,f(\tau)ds d\tau+$$

$$\frac{2\sqrt{b+\frac{1}{4}}+1}{4\sqrt{b+\frac{1}{4}}}\int_0^t\int_0^{t-s} e^{-\left(b+\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)}\cdot e^{-bs}\,h(x-s)f(\tau)ds d\tau$$

В параграфе 3.3., главы 3 исследовано интегро-дифференциальное уравнение с частными производными, которые можно свести к волновому уравнению.

Подобное научное сообщение впервые рассмотрено японским математиком Й. Фучита для уравнения вида

$$u(x,t)=f(x)+\int_0^t a(t-\tau)\frac{\partial^2 u(x,\tau)}{\partial x^2}\partial\tau \qquad (10)$$

Ядро является сингулярным, и его общая форма выглядит следующим образом:

$$a(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1} \qquad (11)$$

где , $\Gamma(\alpha)$ – это функция Эйлера 2 рода и $\alpha\in[1;2]$.

Приведем постановку задачи: найти функцию $u\,(x,t)$, удовлетворяющую уравнению (10) с начальным условием

$$u(x,0)=f(x) \qquad (12)$$

и граничными условиями

$$\begin{cases}u(0,t)=\varphi\,(t)\\ u_x'(0,t)=c(t)\end{cases} \qquad (13)$$

Задача (10)-(13) была исследована Й. Фучита для ядра (11) и автором диссертации для регулярного ядра вида

$$a(t) = te^{-bx}, b > 0 \tag{14}$$

Ядро (14) имеет два существенных преимущества перед ядром (11). Во-первых, для такого ядра удобно реализовать операционное исчисление (преобразование Лапласа-Карсона). Во вторых, область применения регулярного ядра гораздо шире, чем у сингулярного ядра.

Приведем общий вид решения задачи (10)-(13) для ядра (14)

$$u(x,t) = \int_0^{min(x,t)} \int_0^{t-s} \delta'(t-s-\tau)\, f(x-s+\tau)e^{-b(s+\tau)}\, dsd\tau +$$

$$+2b \int_0^{min(x,t)} \int_0^{t-s} \delta(t-s-\tau)\, f(x-s+\tau)e^{-b(s+\tau)}\, dsd\tau +$$

$$+b^2 \int_0^{min(x,t)} \int_0^{t-s} h(t-s-\tau)\, f(x-s+\tau)e^{-b(s+\tau)}\, dsd\tau$$

$$+e^{-bx}\varphi(t-x);$$

Для пояснения основных шагов доказательства формулы решения задачи приведен конкретный пример для уравнения:

$$u(x,t) = bx + \int_0^t (t-\tau)\, e^{-b(t-\tau)}\, \frac{\partial^2 u(x,\tau)}{\partial x^2} \partial\tau$$

Заключение

1. Основные научные результаты диссертационной работы

В диссертационной работе были получены следующие основные результаты:

1. С помощью преобразования Лапласа-Карсона определены изображения функций и интегралов, имеющие широкое практическое применение [9-А], [10-А];

2. Определено общее решение телеграфного дифференциального уравнения с начальными и граничными условиями [2-А], [5-А];

3. Определено общее решение телеграфного интегро-дифференциального уравнения для ядра линейной функции (график - прямая линия) и нелинейной функции (график - кривая линия) с заданными начальными и граничными условиями [3-А], [6-А];

4. Определено общее решение линейных дифференциальных уравнений с частными производными первого и второго порядка и заданными начальными и граничными условиями и решение интегро-дифференциального уравнения, который может быть приведен к волновому уравнению [1-А], [2-А], [4-А];

5. Таблица 2, насколько мне известна, встречается впервые и может быть широко использован для решения дифференциальных уравнений, интегро-дифференциальных уравнений с частными производными и т. д. [7-А], [8-А], [10-А];

2. Рекомендации по практическому использованию результатов

Данное исследование имеет теоретическую и практическую ценность, а результаты диссертационной работы и методы их доказательства нашли свое применение при поиске решений начально-граничных задач для дифференциальных уравнений с частными производными и интегро-дифференциальных уравнений с частными производными.

Список литературы

[1]. Абдулкаримов М. Ф. О разрешимости одной задачи граничного управления для телеграфного уравнения с переменным коэффициентом из класса L_2. Материалы международной научной конференции, посвященной 70-летию академика НАН Таджикистана Шабозова Мирганда Шабозовича, (Таджикистан. Душанбе, 24-25 июня 2022 г.), с 191-192.

[2]. Александров В. А. Обобщенные функции, Новосибирск-2005, 46 с.

[3]. Брычков Ю. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования обобщенных функций, Москва 1977, 288 с.

[4]. Губатенко В. П. Обобщенные функции с приложениями в теории электромагнитного поля, Саратов «Стило»-2001, 141 с.

[5]. Диткин В. А., Прудников А. П. Операционное исчисление по двум переменным и его приложения, Москва -1958, 176 с.

[6]. Дубков А. А., Агудов Н. В. Преобразования Лапласа, Нижний Новгород-2016, 36 с.

[7]. Диткин В. А., Прудников А. П. Справочник по операционному исчислению, Москва 1965, 175 с.

[8]. Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и z–преобразование. М.: Рипол Классик. 1971, с. 288.

[9]. Диткин В. А., К теории операционного исчисления, ДАН 123, (1958).

[10]. Зулфонов Ш. М. Решение начально-краевой задачи для телеграфного уравнения.// Доклады НАН Таджикистана, Том. 66, № 1-2, 28-32 с.

[11]. Ильин В. А. О граничном управлении на одном конце процессом, описываемым телеграфным уравнением (Текст)/ В.А. Ильин, Е.И. Моисеев // Доклады Академии наук. -2002 –Т. 387. -№5. –С. 600-603.

[12]. Илолов. М. И, Зулфонов Ш. М Решение интегро-дифференциального телеграфного уравнения методом преобразования Лапласа-Карсона //Известия НАН Таджикистана, №1 (190), 2023 г, с. 7-14.

[13]. Илолов.М. И, Зулфонов.Ш. М. Начально- Краевая задача для уравнения в частных производных 2-го порядка. .// Доклады НАНТ, Т. 66, № 3-4, 127-135 с.

[14]. Илолов.М.И, Зулфонов.Ш.М Начально- Краевая задача для уравнения в частных производных 2-го порядка. Материалы международной научной конференции, посвященной 70-летию профессора Джангибеков Гулходжа, (Таджикистан. Душанбе, 30-31 января 2020 г.)

[15]. Корн Г. А., Корн Т. М. Справочник по математике. М. : Наука, 1978, 720 с.

[16]. Никольский С. М. Курс математического анализа.–М.: Наука, 1983, Том 2, 448 с.

[17]. Орлов С. С. Обобщенные решения интегро-дифференциальных уравнений высоких порядков в банаховых пространствах (монография) Иркутск-2014, 150 с.

[18]. Плескунов М. А. Операционное исчисление. Екатеринбург- 2014, 146 с.

[19]. Семенов Э. И., Косов А. А. Функция Ламберта и точные решения нелинейных параболических уравнений, Известия вузов. Математика 2019, №8, с 13-20.

[20]. Хиршман И. И., Уиддер Д. В., Преобразования типа свертки, М., ИЛ., 1958, 312 с.

[21]. Ali Babakhani Theory of multidimensional Laplace transforms and boundary value problems. Iowa State University, 1989, 223.

[22]. Dahiya R. S. Calculation of Two-dimensional Laplace Transforms pairs-2, Simon Stevin, A Quarterly journal of pure and Applied Mathematics (Belgium) 57 (1983).

[23]. Dahiya R. S. Laplace Transform pairs of n-dimensions, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. Volume 8 (1985).

[24]. Dahiya R. S. and Debnath J. C., Theorems on Multidimensional Laplace Transform for Solution of Boundary Value Problems, Computers Math. Applications 18 (1989), no 12.

[25]. Ditkin V. A., Prudnikov A. P., Operational Calculus in Two Variables and its Applications, Pergamon Press, New York, 1962, 176.

[26]. Dahiya R. S.; Jafar Saberi -Nadjafi, THEOREMS ON n-DIMENSIONAL LAPLACE TRANSFORMS AND THEIR APPLICATIONS, 15th Annual conference of Applied Mathematics. Univ of central Oklahoma, Electronic journal of differential Equations; Conference 02, 1999, pp 61−74.

[27]. Fujita Y. Integro-differential equation which interpolates the heat equation and the wave equation. Osaka Journal of Mathematics. 27(2); 309-321; Issue date 1990-06.

[28]. Fujita Y. Integro-differential equation which interpolates the heat equation and the wave equation (11).- Osaka Journal of Mathematics. Volume 27, №4, (1990), pp. 797-804.

[29]. Kozlova E. A. The control problem for the system of telegraph equations, Samara 2011, pp. 162-166.

СПИСОК РАБОТ, ОПУБЛИКОВАННЫХ АВТОРОМ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

А) В журналах, зарегистрированных в реестре ВАК при Президенте Республики Таджикистан и РИНЦ:

[1-А]. Зулфонов Ш. М. Применение преобразования Лапласа-Карсона к решению начально-краевой задачи для интегро-дифференциальных уравнений [Текст] /Зулфонов Ш. // Доклады НАН Таджикистана, Том. 64, № 3-4, 135-141 с.

[2-А]. Зулфонов Ш. М. Решение начально-краевой задачи для телеграфного уравнения. [Текст] / Зулфонов Ш. // Доклады НАН Таджикистана, Том. 66, № 1-2, 28-32 с.

[3-А]. Зулфонов Ш. М. Решение интегро-дифференциального телеграфного уравнения методом преобразования Лапласа-Карсона [Текст] / М. И. Илолов, Ш. Зулфонов //Известия НАН Таджикистана, №1 (190), 2023 г, с. 7-14

[4-А]. Зулфонов Ш. М. Начально- Краевая задача для уравнения в частных производных 2-го порядка. [Текст] / М. И. Илолов, Ш. М. Зулфонов // Доклады НАНТ, Т. 66, № 3-4, 127-135 с.

Б) В других изданиях

[5-А]. Зулфонов. Ш. М. Решение начально-краевой задачи для телеграфного уравнения. Материалы международной научной конференции, “Комплексный анализ и его приложения”, посвященной “Двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических наук в сфере науки и образования”, 75-летию Заслуженного работника Таджикистана, чл.корр. НАНТ, доктора физико-математических наук, профессора И.К.Курбонова и 70-летию доктора физико-математических наук, профессора Дж.С.Сафарова, (г.Бохтар, 19 ноябиря 2022 г.), 63-65 с.

[6-А]. Зулфонов Ш. М. Интегро-дифференциальное уравнение телеграфа. Материалы международной научной конференции, посвященной 70-летию академика НАНТ Шабозова Мирганда Шабозовича, (Таджикистан. Душанбе, 24-25 июня 2022 г.), 234-237 с

[7-А]. Зулфонов Ш. М. Применение преобразования Лапласа-Карсона к решению начально-краевой задачи для интегро-дифференциальных уравнений. Материалы международной научной конференции, посвященной 70-летию со дня рождения академика НАНТ, доктора физико-математических наук, профессора Бойматова Камолиддина Хамроевича., (Таджикистан. Душанбе, 25-26 декабря 2020 г.).

[8-А]. Илолов М. И. , Зулфонов Ш. М. Об одной начально-краевой задаче для неоднородного интегро-дифференциального уравнения в частных производных. Материалы международной научной конференции, посвященной 80-летию со дня рождения доктора физико-математических наук, профессора Темура Собирова, (Таджикистан. Душанбе, 25-26 июня 2021 г.)

[9-А]. Илолов.М. И, Зулфонов Ш. М. Начально- Краевая задача для уравнения в частных производных 2-го порядка. Материалы международной научной конференции, посвященной 70-летию профессора Джангибеков Гулходжа, (Таджикистан. Душанбе, 30-31 января 2020 г.)

[10-А]. Зулфонов.Ш. М., Илолов.М. И. Двумерное преобразования Лапласа-Карсона и его риложение. Материалы международной научной конференции, посвященной 70-летию доктора физико-математических наук, профессора Тухлиева Камаридина, Худжанд-2024, с.249-251.

Аннотатсия

диссертатсияи Зулфонов Шаҳриёр Мулозулфонович дар мавзӯи “Татбиқи ҳисоби оператсионӣ дар ҳалли баъзе синфҳои муодилаҳои дифференсиалӣ ва интегро-дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ” барои дарёфти дараҷаи илмии доктори фалсафа (PhD), доктор аз рӯи ихтисоси 6D060100-МАТЕМАТИКА: 6D060102-Муодилаҳои дифференсиалӣ, системаҳои динамикӣ ва идоракунии оптималӣ

Калидвожаҳо: Муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ, муоди-лаҳои интегро-дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ, табдилоти интегралии Лаплас-Карсон, муодилаи телеграф, муодилаи Фучита.

Мақсади кор. Мақсади кори мазкур ба даст даровардани тасвири ошкори ҳалли баъзе синфҳои муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ ва муодилаҳои интегро-дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ ба воситаи табдилоти интегралии Лаплас-Карсон мебошад. Дарёфт намудани тасвири функсияҳо ва интегралҳое, ки дар рисола барои ёфтани ҳалли масъалаҳои ибтидоӣ ва канорӣ истифода бурда шудаанд, мақсади дигари кор маҳсуб мешаванд.

Усулҳои тадқиқот. Дар кори диссертатсионӣ аз методҳои муосири таҳлили функсионалӣ, назарияи муодилаҳои интегро-дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ ва ҳисобкуниҳои оператсионӣ барои функсияҳои бисёртағирёбанда истифода бурда шудааст.

Навгонии илмии таҳқиқот. Масъалаҳои зерин бо усулҳои нав ҳал карда шудаанд:

1. Ба воситаи табдилоти Лаплас-Карсон тасвири функсияҳо ва интегралҳое, ки дар рисола татбиқи васеъ доранд, ёфта шудааст.
2. Ҳалли умумии муодилаи дифференсиалии телеграф бо шартҳои ибтидоӣ ва канории додашуда муайян карда шудааст.
3. Ҳалли умумии муодилаи интегро-дифференсиалии телеграф барои ядрои хаттӣ ва ғайрихаттӣ дар алоҳиддаги ҳисоб карда шудааст.
4. Муодилаи интегро-дифференсиалии Фучита тадқиқ карда шудааст, ки ба сифати ҳолатҳои хусусӣ муодилаҳои гармигузаронӣ ва мавҷро дарбар мегирад.

Арзиши назариявӣ ва амалии таҳқиқот. Таҳқиқоти пешниҳодшуда характери назариявӣ дорад. Натиҷаҳои илмии бадастовардашуда барои инкишофи минбаъдаи табдилотҳои интегралӣ ва муодилаҳои дифференсиалӣ ва интегро-дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ заминаи хеле боэътимод мебошанд. Маводи диссертатсияи мазкурро ҳангоми хондани курсҳои махсус барои донишҷӯёни курсҳои болоӣ, магистрҳо ва докторантҳои мактабҳои олӣ, ки аз рӯи ихтисоси математика, математикаи амалӣ ва механика таҳсил менамоянд, истифода бурдан мумкин аст.

Аннотация

диссертации Зулфонова Шахриёра Мулозулфоновича на тему «Применение операционного исчисления для решения некоторых классов дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений с частными производными», представленной на соискание ученой степени доктора) философии (PhD по специальности 6D060100-МАТЕМАТИКА: 6D060102-Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Ключевые слова: дифференциальные уравнения с частными производными, интегро-дифференциальные уравнения с частными производными, интегральное преобразование Лапласа-Карсона, уравнение телеграфа, уравнение Фучита.

Цель работы. Целью работы является получение явного представления решений некоторых классов дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений с частными производными с помощью интегрального преобразования Лапласа-Карсона.

Вычисления изображения для функции и интегралов, которые используются в диссертации для нахождения решений начально-краевых задач, является другой целью работы.

Методы исследования. В работе используются современные методы функционального анализа, теории интегро-дифференциальных уравнений с частными производными, операционного исчисления для функций многих переменных.

Научная новизна работы: Следующие новые задачи решены с помощью новых методов:

1. С помощью преобразования Лапласа–Карсона найдены изображения функций и интегралов, имеющих в работе широкое применение.
2. Найдено общее решение дифференциального уравнения телеграфа с начальными и краевыми условиями.
3. Найдено общее решение интегро-дифференциального уравнения телеграфа отдельно для линейного и нелинейного ядра.
4. Исследовано интегро-дифференциальное уравнение Фучита, которое содержит в себя, в качестве частных случаев уравнения теплопроводности и волнового уравнения.

Теоретическая и практическая ценность работы. Исследования, содержащиеся в диссертации, носят теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы для дальнейшего развития теории дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений с частными производными и применения операционного исчисления для таких уравнений.

Материалы данной диссертации могут быть использованы для чтения специальных курсов для студентов, магистров и докторантов высших учебных заведений, обучающихся по специальности «математика», «прикладная математика» и «механика».

Abstract

of Zulfonov Shakhriyor Mulozulfonovich's thesis on the topic "Application of operational calculus for solving some classes of differential and integro-differential equations with partial derivatives", submitted for the degree of Doctor of Philosophy (PhD) in the specialty 6D060100-MATHEMATICS: 6D060102-Differential equations, dynamic systems and optimal governance

Key words: differential equations with partial derivations, integro-differential equations with partial derivations, Laplace-Carson integral transformation, telegraph equation, Fuchita equation.

The aim of the work. The aim of the work is to obtain an explicit representation of solutions of some classes of differential and integro-differential equations with partial derivatives using the Laplace-Carson integral transformation.

Calculation of the image for the function and integrals that are used in the dissertation to find solutions to initial-boundary value tasks is another goal of the work.

Research methods. The work is used modern methods of functional analysis, the theory of integro-differential equations with partial derivatives, operational calculus for functions of several variables.

Scientific novelty of the work: The following new problems are solved using new methods:

1. Using the Laplace-Carson transform, images of functions and integrals have been found, that are widely used in the work.
2. A general solution to the telegraph differential equation with initial and boundary conditions is found.
3. A general solution to the telegraph integro-differential equation is found separately for the linear and nonlinear nucleus.
4. The Fuchita integro-differential equation has been investigated, which contains the heat equation and the wave equation as special cases.

Theoretical and practical value of the work. The research contained in the thesis is of a theoretical nature. The results obtained can be used for further development of the theory of differential and integro-differential equations with partial derivatives and the application of operational calculus for such equations.

The materials of this dissertation can be used for giving special courses for students, masters and doctoral students of higher educational institutions studying in the specialty of "mathematics", "applied mathematics" and “mechanics”.