ДОНИШГОҲИ МИЛЛИИ ТОҶИКИСТОН

ВБД 517.923; 517.926.4

Бо ҳуқуқи дастнавис

МИРЗОЗОДА ҶУНАЙДУЛЛОҲ АБДУЛЛО

ТАҲҚИҚИ БАЪЗЕ СИНФҲОИ МУОДИЛАҲОИ ДИФФЕРЕНСИАЛИИ ТАНАЗЗУЛЁБАНДАИ НАМУДИ ЭЙЛЕР ВА ТАТБИҚИ ОНҲО ДАР ҲАЛЛИ МУОДИЛАҲОИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНСИАЛИИ СИНГУЛЯРӢ

АВТОРЕФЕРАТИ

диссертатсия барои дарёфти дараҷаи илмии номзади илмҳои
физикаю математика аз рӯйи ихтисоси 1.1.3. Муодилаҳои
дифференсиалӣ, системаҳои динамикӣ ва идоракунии оптималӣ

Душанбе – 2026

Диссертатсия дар кафедраи таҳлили функсионалӣ ва муодилаҳои дифференсиалӣ ва кафедраи математикаи олии факултети механика ва математикаи Донишгоҳи миллии Тоҷикистон иҷро гардидааст.

Роҳбарони илмӣ: **Мустафоқулов Раҳмонқул** – доктори илмҳои физикаю математика, профессори кафедраи таҳлили функсионалӣ ва муодилаҳои дифференсиалии факултети механика ва математикаи Донишгоҳи миллии Тоҷикистон.

Зарифзода Сарвар Қаҳрамон – доктори илмҳои физикаю математика, дотсенти кафедраи математикаи олии факултети механика ва математикаи Донишгоҳи миллии Тоҷикистон.

Муқаризони расмӣ: **Шамсудинов Файзулло Мамадуллоевич** – доктори илмҳои физикаю математика, профессори кафедраи таҳлили математикӣ ва муодилаҳои дифференсиалии Донишгоҳи давлатии Бохтар ба номи Н. Хусрав.

Саидов Бахтиёр Бобокалонович – номзади илмҳои физикаю математика, дотсенти кафедраи математикаи олии Донишгоҳи давлатии молия ва иқтисоди Тоҷикистон.

Муассисаи пешбар: Институти математикаи ба номи академик А. Ҷӯраеви Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон.

Ҳимоя санаи «17» июли соли 2026 соати 9:00 дар ҷаласаи Шурои диссертатсионии 6D.КОА-011-и назди Донишгоҳи миллии Тоҷикистон баргузор мегардад. Нишонӣ: 734027, ш. Душанбе, кӯчаи Буни Ҳисорак, факултети механикаю математика, бинои 17, синфхонаи 203.

E-mail: alisher_gaforov@mail.ru; рақами телефони мобилии котиби илмӣ: +992900766603.

Бо диссертатсия дар Китобхонаи марказии илмии Донишгоҳи миллии Тоҷикистон ва ё дар сомонаи *http://www.tnu.tj* шинос шудан мумкин аст.

Автореферат «____» «_____________» соли 2026 аз рӯи феҳристи пешниҳодгардида ирсол карда шудааст.

Котиби илмии шурои диссертатсионӣ,
номзади илмҳои физикаю математика,
дотсент **Ғафоров А.Б.**

МУҚАДДИМА

Мубрамии мавзуи таҳқиқот. Дар нимаи дуюми асри XIX инкишофи босуръати назарияи муодилаҳои дифференсиалӣ ба назар мерасад. Дар он замон диққати асосӣ ба омӯзиши муодилаҳои дифференсиалӣ бо коэффисиентҳои махсус ё сингулярӣ равона гардида буд. Ин синфи муодилаҳо баъдтар ба номи олими бузурги немис И.Л. Фукс номи «муодилаҳои синфи Фукс»-ро гирифт.

Натиҷаҳои бунёдӣ дар ин самт дар корҳои Л. Эйлер, К.Ф. Гаусс, Б. Риман, А. Пуанкаре, И.Л. Фукс, Ф. Клейн, Ф.Г. Фробениус ва дигарон ба даст оварда шудааст.

Баъдтар диққати олимон ба таҳқиқи муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ, ки коэффисиентҳояшон дорои нуқтаҳои махсус буданд, равона гардидааст. Яке аз муодилаҳои маъмул дар ин самт ин муодилаи Эйлер-Пуассон-Дарбу мебошад, ки ба таҳқиқи он корҳои олимони зиёд ба мисли R.W. Carroll, J.B. Diaz, R.P. Gilbert, A.A. Kilbas, E.L. Shishkina, А.В. Глушак, Х.Ш. Ҷураев, Н. Раҷабов, М.С. Салоҳиддинов, С.А. Сатторов ва дигарон бахшида шудааст.

Натиҷаҳои илмии фундаменталӣ оид ба ҳалли муодилаҳои дифференсиалии намуди эллиптикӣ бо коэффисиентҳои таназзулёбанда дар корҳои олимон К.Х. Бойматов, Н.А. Вирченко, М.И. Вишик, О.А. Вихрева, В.Н. Врагов, Ҷураев А.Д., В.М. Ивакин, С.А. Исхоков, Н.Б. Келдиш, И.А. Киприянов, Л.Д. Кудрявсев, П.И. Лизоркин, Е.И.Моисеев, Л.Г. Михайлов, А.Мухсинов, С.М. Николский, Л.С. Пулкина, О.А. Репин, К.Б. Сабитов, М.М. Смирнов, А.К. Уринов, З.Д. Усмонов ба даст оварда шудааст.

Мубрамияти мавзуъ дар он аст, ки муодилаҳои дифференсиалии таназзулёбандаи намуди Эйлер бо нуқтаҳои махсуси иррегулярӣ (сингулярӣ) дар моделсозии математикии равандҳои муосири физикӣ ва механикӣ мавқеи калидиро ишғол менамоянд. Сарфи назар аз аҳаммияти амалии онҳо, масъалаи ёфтани ҳалли ин муодилаҳо дар шакли ошкор ва таҳияи алгоритмҳои табдилдиҳии онҳо ба муодилаҳои дорои коэффисиентҳои доимӣ то ҳол дар назарияи умумии муодилаҳои дифференсиалӣ ҳамчун масъалаи кушода ва пурра ҳалнашуда боқӣ мемонад.

Дараҷаи таҳқиқоти мавзуи илмӣ. Ба муодилаҳои дифференсиалии синфи Фукс чунин муодилаҳои дифференсиалие дохил мешаванд, ки ҳамаи коэффисиентҳояшон дорои нуқтаҳои махсуси регулярӣ мебошанд ва ин муодилаҳо дорои чунин ҳалҳое мебошанд, ки нуқтаҳои махсуси ин ҳалҳо низ нуқтаҳои махсуси регулярӣ мебошанд. Ин синфи муодилаҳо аввалин бор дар корҳои Л. Эйлер, К.Ф. Гаусс, Б. Риман пайдо шуда, баъдтар омӯзиши густардаи онҳо аз тарафи И.Л. Фукс [4] гузаронида мешавад ва ин сабабгори ба худ касб намудани номи *«муодилаҳои дифференсиалии синфи Фукс»* мегардад.

Соли 1865 дар корҳои И.Л. Фукс шартҳои зарурӣ ва кифоягии тааллуқ доштани муодилаи дифференсиалӣ ба синфи Фукс муайян карда шуда буд.

Агар муодилаи дифференсиалии хаттии тартиби дуюм дар намуди каноникии

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=0 \qquad (0.1)$$

дода шуда бошад ва нуқтаи $x=0$ нуқтаи махсуси регулярӣ барои коэффисиентҳои $p(x), q(x)$-и ин муодила бошад, ғайр аз ин $p(x)$ дорои нуқтаи қутбии дараҷааш аз 1 калон набуда, $q(x)$ дорои нуқтаи қутбии дараҷааш аз 2 калон набуда бошад, пас муодилаи намуди:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+xP(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y=0,$$

ё

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{P(x)}{x}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{Q(x)}{x^2}y=0$$

муодилаи дифференсиалии синфи Фукс номида мешавад.

Хотирнишон менамоем, ки нуқтаи махсуси муодилаи (0.1) *нуқтаи махсуси регулярӣ номида мешавад,* агар шарти зерин иҷро гардад:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to x_0}(x-x_0)p(x)-\text{маҳдуд},\\ \lim\limits_{x\to x_0}(x-x_0)^2q(x)-\text{маҳдуд}.\end{cases} \qquad (0.2)$$

Нуқтаи махсуси муодилаи (0.1) *нуқтаи махсуси сингулярӣ ё иррегулярӣ номида мешавад,* агар шартҳои

$$\lim_{x\to x_0}(x-x_0)p(x)-\text{номаҳдуд}$$

ва

$$\lim_{x\to x_0}(x-x_0)^2q(x)-\text{номаҳдуд}$$

иҷро гардад.

Дар адабиётҳо муодилаҳои синфи Фукс бо миқдори зиёди нуқтаҳои махсус ба таври муфассал омӯхта шудааст. Масалан, муодилаи намуди умумии

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{P(x)}{\prod_{k=1}^{n}(x-a_k)}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{Q(x)}{\prod_{k=1}^{n}(x-a_k)^2}y=0,$$
омӯхта шудааст, ки дар ин ҷо $P(x), Q(x)-$ ягон бисёраъзогиҳо буда, a_k- координатаҳои нуқтаҳои махсус мебошанд.

«Агар дар муодилаи синфи Фукс миқдори нуқтаҳои махсуси муодила ба 1 баробар бошад, пас ин гуна муодила бо ёрии гузориш ба муодилаи дифференсиалии одитарини тартиби дуюми намуди $y''=0$ оварда мешавад, ки ба он диққати махсус ҷудо намудан зарурат надорад»[1, 2]. Агар муодила дорои ду нуқтаҳои махсуси a_1 ва a_2 бошад, пас ин гуна муодила баъд аз табдилдиҳиҳои муайян ба муодилаи намуди Эйлер оварда мешавад, ки чунин намуд дорад:
$$y''+\frac{A_1}{x}\cdot y'+\frac{B_1}{(a_2-a_1)^2}\cdot\frac{y}{x^2}=0.$$

Агар миқдори нуқтаҳои махсуси муодила ба 3 баробар бошад, пас чунин муодила бо ёрии табдилдиҳиҳои мувофиқ ба намуди муодилаи гипергеометрии Гаусс оварда мешавад, ки дар квадратура ҳалшаванда намебошад. Барои ёфтани ҳалли ин гуна муодилаҳо дар аксар адабиётҳо ба мисли R.W. Carroll [3], L. Fuchs [4] аз қаторҳои гипергеометрӣ истифода бурда мешавад.

Зинаи навбатӣ аз рӯйи мушкилии таркибӣ ва аз рӯйи мушкилии методикаи таҳқиқоти муодилаҳои дифференсиалии синфи Фукс ин муодилаҳои дифференсиалӣ бо коэффисиентҳои махсуси иррегулярӣ ё сингулярӣ мебошад.

Ба ин синфи муодилаҳо муодилаи зерин дохил мебошад:
$$[\omega(x)]^2y''+a_1[\omega(x)]y'+a_2y=f(x), \tag{0.3}$$
ки дар ин ҷо a_1, a_2- коэффисиентҳои доимӣ, $f(x)-$ функсияи додашудаи бефосила дар интервали $\Gamma=\{x: 0<x<\infty\}$ буда, $\omega(x)-$ функсияе мебошад, ки дар ягон нуқтаи интервали Γ дорои сифри дараҷааш калон аз як мебошад.

«Агар дар ин муодила $\omega(x)=x$ гузорем, пас муодилаи ҳосилшуда, тавре ки ба мо маълум аст, муодилаи маълуми Эйлер мегардад» [1].

«Агар $\omega(x)=(x-a)^{\alpha}$ бошад, ки дар ин ҷо $\alpha>0$ аст, пас барои коэффисиентҳои муодилаи (0.3) шарти (0.2) иҷро намегардад ва бинобар ин муодилаи (0.3) муодилаи дифференсиалӣ бо нуқтаи махсуси иррегулярӣ дар нуқтаи $x=a$ мебошад» [2].

Маълум мегардад, ки барои омӯзиши васеи муодилаи (0.3), тартиб додан ва таҳқиқ намудани муодилаи моделии ба он мувофиқоянда, масъалаи муҳим мебошад.

Чунин тарзи таҳқиқи муодилаҳои дифференсиалӣ бо коэффисиентҳои махсус дар корҳои илмии Н. Раҷабов [6, 7] ва шогирдонаш Л.Н. Раджабова [8], Г.М. Кадиров [9], Ф.М. Шамсудинов [10], М.Я. Дадоджонова [13], А.Г. Олимов [14], В.В. Шевчук [15], С.К. Зарифзода [16, 17] васеъ истифода бурда мешавад.

Масалан, «дар кори Н. Раҷабов муодилаи намуди (0.3), ки бо ёрии оператори дифференсиалии $D_x^\alpha = (x-a)^\alpha \frac{d}{dx}$ сохта шудааст, таҳқиқ гардида буд»[6]. Инчунин, дар корҳои «Н. Раҷабов ва Г.М. Қодиров муодилаи моделии тартиби дуюм ва сеюми намуди (0.3), ки бо оператори дифференсиалии D_x^α сохта шудааст»[6-9], таҳқиқ гардида буд. Баъзе ҳолатҳои муодилаи тартиби n низ дар корҳои М.М. Маламуд [18], Н. Раҷабов [7] таҳқиқ гардидаанд.

Дар ин корҳо дар асоси омӯзиши хосиятҳои оператори дифференсиалии D_x^α , муодилаи таҳқиқшаванда бо ёрии методи вариатсияи доимиҳои ихтиёрӣ ҳал карда мешавад.

«Дар фарқият ба ин, дар диссертатсияи илмии мазкур муодилаи намуди (0.3) бо ёрии методи ба муодилаи дифференсиалии одӣ бо коэффисиентҳои доимӣ овардани он, таҳқиқ карда мешавад.

Инчунин, муодилаи тартиби олии ба (0.3) мувофиқоянда низ таҳқиқ карда шуда, ҳалли он бо ёрии функсияҳои элементарӣ ифода карда мешавад»[1-М]-[3-М].

Маълум мегардад, ки ҳангоми омӯзиши муодилаҳои намуди (0.3) масъалаи муҳим ин тартиб додан ва омӯхтани муодилаи моделии мувофиқоянда мебошад. Агар муодилаи моделӣ дуруст тартиб дода шавад, пас ёфтани ҳалҳои муодилаи таҳқиқшаванда дар намуди ошкор имконпазир мегардад. Ин яке аз воситаҳои асосӣ барои таҳқиқи муодилаҳои ғайримоделӣ мебошад.

«Чунин методи таҳқиқоти муодилаҳои дифференсиалӣ бо коэффисиентҳои сингулярӣ ва барзиёд сингулярӣ дар корҳои Н. Раҷабов ва шогирдонаш Г.М. Кадиров Л.Н. Раджабова S.K. Zarifzoda ба таври васеъ паҳн гардидааст» [6-9], [16, 17].

«Баъзе натиҷаҳо оид ба ёфтани ҳалли умумии муодилаҳои дифференсиалии тартиби дуюм бо ду нуқтаҳои махсус дар корҳои С.К. Зарифзода ба даст оварда шудааст»[16]. «Дар корҳои минбаъдаи ӯ як синфи васеи муодилаҳои интегро-дифференсиалӣ бо ядроҳои махсусияташон гуногун низ таҳқиқ карда шудааст» [17].

Дар корҳои Р. Мустафоқулов [11, 12] муодилаи намуди (0.3)-и тартибаш гуногун таҳқиқ гардида буд. Дар ин корҳо шартҳои зарурӣ ва кифоягии овардашаванда будани муодилаи (0.3) ба муодилаи дифференсиалӣ бо коэффисисентҳои доимӣ, муайян карда шудааст. Ин натиҷаҳо баъдтар дар кори Р. Мустафоқулов [12] барои муодилаҳои тартиби олӣ идома дода шудааст.

Дар корҳои муаллиф баъзе натиҷаҳо оид ба ҳалшавандагии як синфи муодилаҳои дифференсиалии таназзулёбандаи намуди Эйлер, ба даст оварда шудааст. Ин натиҷаҳо дар мақолаҳои [1-М], [2-М], [3-М], [4-М], [5-М], [6-М], [7-М], [8-М], [9-М], [10-М], [11-М], [12-М], [13-М], [14-М] ба чоп расонида шудаанд.

Аз таҳлили натиҷаҳои ба мавзуи диссертатсия наздик бармеояд, ки мавзуъ ва объекти интихобгардидаи кори таҳқиқотии мазкур муҳим ва саривақтӣ мебошад.

Робитаи таҳқиқот бо барномаҳо (лоиҳаҳо) ва мавзуъҳои илмӣ. Таҳқиқоти илмии мазкур дар чаҳорчӯбаи амалисозии нақшаи дурнамои корҳои илмӣ-таҳқиқотии кафедраҳои математикаи олӣ, таҳлили функсионалӣ ва муодилаҳои дифференсиалӣ ва инчунин кафедраи математикаи ҳисоббарорӣ ва механикаи факултети механика ва математикаи Донишгоҳи миллии Тоҷикистон барои солҳои 2015-2020 ва 2020-2025 дар мавзуъҳои «Таҳқиқоти аналитикӣ, таҳлили сифатӣ ва ҳалли ададии масъалаҳои математикаи амалӣ ва механика» ва «Муодилаҳо ва системаи муодилаҳои дифференсиалии таназзулёбанда» амалӣ карда шудааст.

ТАВСИФИ УМУМИИ ТАҲҚИҚОТ

Мақсади таҳқиқот. Мақсади кори мазкур ба даст овардани тасвири интегралии бисёршаклаи ҳал барои як синфи муодилаи дифференсиалии одии моделӣ ва ғайримоделӣ бо нуқтаи махсуси иррегулярӣ, бо истифода аз методи овардани ин муодилаҳо ба муодилаи дифференсиалии одӣ бо коэффисиентҳои доимӣ, иборат мебошад.

Вазифаҳои таҳқиқот. Мувофиқи мақсади гузошташуда масъалаҳои зеринро ҷудо менамоем:

➢ ба даст овардани тасвири интегралии бисёршаклаи ҳал барои муодилаи тартиби якум намуди Эйлер;

➢ ба даст овардани тасвири интегралии бисёршаклаи ҳал барои муодилаи тартиби дуюми намуди Эйлер;

➢ ба даст овардани тасвири интегралии бисёршаклаи ҳал барои муодилаи умумикардашудаи тартиби дуюми ғайримоделии намуди Эйлер;

- таҳқиқи муодилаи дифференсиалии одии таназзулёбанда бо коэффисиентҳои доимӣ;
- таҳқиқи муодилаи дифференсиалии одии таназзулёбанда бо коэффисиентҳои тағйирёбанда;
- сохтани функсияи Коши барои муодилаи дифференсиалии одии таназзулёбандаи ғайриякҷинса;
- ба даст овардани тасвири интегралии ҳал барои як синфи муодилаҳои интегро-дифференсиалии дученака бо ядрои барзиёд сингулярӣ.

Объекти таҳқиқоти диссертатсияи илмии мазкур инҳо мебошанд:

- муодилаи намуди Эйлер;
- муодилаи дифференсиалии таназзулёбандаи моделӣ бо коэффисиентҳои доимӣ;
- муодилаи дифференсиалии таназзулёбандаи ғайримоделӣ бо коэффисиентҳои тағйирёбанда;
- муодилаи интегро-дифференсиалии дученака бо ядрои барзиёд сингулярӣ.

Мавзуи таҳқиқот. Дар кор методҳои умумии назарияи муодилаҳои дифференсиалӣ ва интегро-дифференсиалӣ, методи ба даст овардани тасвири интегралии ҳал барои муодилаҳои дифференсиалии одӣ ва инчунин методи сохтани функсияи Коши барои муодилаҳои дифференсиалии одӣ, истифода бурда мешавад.

Навгонии илмии таҳқиқот. Натиҷаҳои диссертатсияи илмӣ нав буда, аз тарафи муаллиф мустақилона ба даст оварда шудааст ва аз инҳо иборат мебошад:

- Ҳалли ошкорои муодилаи дифференсиалии моделӣ ва ғайримоделии тартиби якуми намуди Эйлер ёфта шудааст;
- Интеграли умумии муодилаи умумикардашудаи намуди Эйлер сохта шудааст;
- Теорема оид ба овардашаванда будани муодилаи дифференсиалӣ бо коэффисиентҳои тағйирёбанда ба муодилаи дифференсиалӣ бо коэффисиентҳои доимӣ исбот карда шудааст;
- Ҳалли умумии муодилаи моделии намуди Эйлери тартиби олӣ ёфта шудааст;
- Ҳалли умумии муодилаи ғайримоделӣ бо ёрии резолвентаи муодилаи интегралии намуди Волтерра ба даст оварда шудааст;
- функсияи Коши барои муодилаи ғайриякҷинсаи моделии тартиби олӣ сохта шудааст;

- Ҳалли умумии муодилаи интегро-дифференсиалии дученака бо ядрои барзиёд сингулярӣ ёфта шудааст.

Аҳамияти назариявӣ ва илмию амалии таҳқиқот. Таҳқиқотҳои дар ин диссертатсияи илмӣ оид ба ҳалшавандагии баъзе синфҳои муодилаҳои дифференсиалии таназзулёбанда ва муодилаи интегро-дифференсиалии сингулярӣ гузаронидашуда, характери назариявӣ доранд. Натиҷаҳои илмии бадастовардашуда барои инкишофи минбаъдаи назарияи муодилаҳои дифференсиалии таназзулёбандаи ғайримоделӣ, барои муодилаҳои дифференсиалӣ бо миқдори зиёди нуқтаҳои махсус ва инчунин дар қисматҳои дигари илмҳои амалӣ ба мисли физика, механика ва ғайра истифода бурда мешаванд. Маводи диссертатсияи илмии мазкурро ҳангоми хондани курсҳои махсус барои донишҷӯёни курсҳои болоӣ, магистрон ва докторантони мактабҳои олӣ, ки аз рӯйи ихтисосҳои математика, математикаи амалӣ ва механика таҳсил менамоянд, истифода бурдан мумкин аст.

Нуктаҳои ба ҳимоя пешниҳодшаванда:

- Исботи теорема оид ба шартҳои зарурӣ ва кифоягии овардашаванда будани муодилаи дифференсиалӣ бо коэффисиентҳои тағйирёбанда ба муодилаи дифференсиалӣ бо коэффисисентҳои доимӣ гузаронида шудааст;
- Дар хусуси ба даст овардани ҳалҳои ошкорои муодилаи дифференсиалии ғайриякҷинсаи моделии намуди Эйлери тартиби олӣ теоремаҳо исбот карда шудааст;
- Ҳалли умумии муодилаи интегро-дифференсиалии дученака ба ядрои барзиёд сингулярӣ дар намуди ошкор ба даст оварда шудааст.

Дараҷаи эътимоднокии натиҷаҳои диссертатсия. Эътимоднокии натиҷаҳои илмии дар ин диссертатсия бадастовардашуда, бо ёрии ҳисобкуниҳои аниқи математикӣ ва исботҳои дақиқ, ки ба методҳои назарияи муодилаҳои дифференсиалӣ, таҳлили функсионалӣ ва назарияи муодилаҳои интегралӣ такя мекунанд, пурра асоснок карда шудаанд. Ин натиҷаҳо аҳамияти зиёд барои омӯзиши минбаъдаи ҳалшавандагии муодилаҳои дифференсиалӣ бо коэффисиентҳои сингулярӣ доранд ва метавонанд барои ҳалли масъалаҳои назариявӣ ва амалӣ дар соҳаҳои гуногуни илм ва техника муфид бошанд. Ҳамаи теоремаҳои асосӣ бо риояи қатъии шарти зарурӣ ва кифоягӣ исбот гардидаанд. Ҳалҳои ошкорои муодилаҳо тавассути истифодаи табдилдиҳиҳои мувофиқ, формулаҳои асимптотика ва резолвентаҳои муодилаҳои интегралии Волтерра ба даст оварда шудаанд.

Мутобиқати диссертатсия ба шиносномаи ихтисоси илмӣ. Диссертатсияи илмӣ аз рӯйи ихтисоси 1.1.3. Муодилаҳои дифференсиалӣ, системаҳои динамикӣ ва идоракунии оптималӣ таълиф гардидааст ва пурра ба формулаи он (муодилаҳои дифференсиалии одӣ) ва се қисми соҳаи таҳқиқот

1. Назарияи умумии муодилаҳои дифференсиалӣ ва системаи муодилаҳои дифференсиалӣ;

2. Масъалаҳои ибтидоию канорӣ ва спектрӣ барои муодилаҳои дифференсиалӣ ва системаи муодилаҳои дифференсиалӣ;

3. Назарияи муодилаҳои операторӣ-дифференсиалӣ

мувофиқат мекунад. Диссертатсияи мазкурро қисми таҳлили ҳақиқӣ, комплексӣ ва функсионалӣ (ихтисоси ҳамгиро 1.1.2. Таҳлили ҳақиқӣ, комплексӣ ва функсионалӣ) шуморидан мумкин аст.

Саҳми шахсии довталаби дараҷаи илмӣ дар он зоҳир мегардад, ки ҳамаи натиҷаҳои илмии ба ҳимоя пешниҳодшаванда, аз тарафи ӯ мустақилона ба даст оварда шудаанд. Муаллиф шахсан формулаҳои ивази тағйирёбандаро ёфта, теоремаҳои зарурӣ ва кифоягиро исбот кардааст, ҳалҳои ошкорои муодилаҳои моделию ғайримоделӣ, функсияи Коши ва ҳалҳои муодилаҳои интегро-дифференсиалиро сохтааст.

Дар корҳои якҷоя бо роҳбарон ва ҳамкорон ҳамаи ҳисобкуниҳои математикӣ, исботи теоремаҳо ва таҳлилҳои асимптотикӣ пурра ба довталаб тааллуқ доранд.

Дар корҳои илмии якҷоя бо роҳбари илмии якум таълифгардида, муодилаҳои дифференсиалии намуди Эйлер таҳқиқ гардидааст.

Дар корҳои илмии бо роҳбари дуюм таълифгардида, натиҷаҳои пештар ба даст овардашуда дар таҳқиқи як синфи муодилаҳои интегро-дифференсиалии сингулярӣ татбиқ шудааст.

Тасвиб ва амалисозии натиҷаҳои диссертатсия. Натиҷаҳои асосии диссертатсия борҳо дар конференсияҳои ҷумҳуриявӣ ва байналмилалии зерин маъруза гардидааст:

- конференсияи илмӣ-амалӣ дар мавзуи «7-умин хониши Ломоносовӣ» (ш. Душанбе, Тоҷикистон, 28-29 апрели соли 2017);
- конференсияи байналмилалии илмию амалӣ дар мавзуи «XXVIII-умин хониши Понтрягинӣ» (ш. Воронеж, Федератсияи Россия, 3-9 майи соли 2017);

- конференсияи илмӣ-амалии байналмилалӣ дар мавзуи «Масъалаҳои мубрами математикаи муосир» (ш. Душанбе, Тоҷикистон, 25-26 июни соли 2018);
- конференсияи илмӣ-амалии байналмиллалӣ дар мавзуи «Масъалаҳои мубрам ва татбиқи назарияи ададҳо ва таҳлили математикӣ» (ш. Душанбе, Тоҷикистон, соли 2019);
- конференсияи илмӣ-амалии байналмиллалӣ дар мавзуи «Масъалаҳои муосири таҳлили функсионалӣ ва муодилаҳои дифференсиалӣ» (ш. Душанбе, Тоҷикистон, соли 2020);
- конференсияи илмӣ-амалии байналмиллалӣ дар мавзуи «Масъалаҳои муосири математика ва татбиқи он» (ш. Душанбе, Тоҷикистон, 20-21 октябри соли 2020);
- конференсияи илмӣ-амалии байналмиллалӣ дар мавзуи «Масъалаҳои муосири математика ва татбиқи он» (ш. Душанбе, Тоҷикистон, соли 2022);
- конференсияи илмӣ-амалии ҷумҳуриявӣ дар мавзуи «Масъалаҳои мубрами тарақиёти илмҳои табии, дақиқ ва математикӣ дар шароити муосир» (ш. Душанбе, Тоҷикистон, соли 2022);
- конференсияи илмии байналмилалӣ дар мавзуи «Масъалаҳои муосири математика ва татбиқи он» (ш. Душанбе, Тоҷикистон, 2023 с.).

Интишорот аз рӯйи мавзуи диссертатсия. Натиҷаҳои асосии диссертатсияи илмӣ дар 14 корҳои илмии муаллиф ба чоп расонида шудааст, ки аз онҳо 5-тояш мақолаҳои илмии дар маҷаллаҳои тақризшавандаи Комиссияи олии аттестатсионии назди Президенти Ҷумҳурии Тоҷикистон ба нашр расида ва 9-тои боқимондаашро мақолаҳои дар маҷмуаи маводи конференсияҳои илмии сатҳашон гуногун нашршуда ташкил медиҳанд. Дар корҳои якҷоя бо муаллифи дуюм пешниҳодгардида, ҳамаи ҳисобкуниҳо ва исботи теоремаҳо пурра ба муаллифи диссертатсия тааллуқ дорад.

Сохтор ва ҳаҷми диссертатсия. Диссертатсия аз бахшҳои муқаддима, тавсифи умумии таҳқиқот, чор боб, бахши хулосаҳо бо натиҷаҳои асосии илмии диссертатсия ва тавсияҳо оид ба истифодаи амалии натиҷаҳо, рӯйхати адабиёт бо феҳристи сарчашмаҳои истифодашуда ва феҳристи интишороти илмии довталаби дарёфти дараҷаи илмӣ иборат аст.

Ҳаҷми умумии диссертатсия аз 152 саҳифаи матни компютерӣ, ки бо ёрии протсессори матнии Microsoft Word ҳуруфчинӣ гардидааст, иборат буда, рӯйхати адабиёти истифодашуда 137 номгӯйро ташкил медиҳад.

ҚИСМҲОИ АСОСИИ ТАҲҚИҚОТ

Дар муқаддима мубрамияти интихоби мавзуи таҳқиқоти диссертатсияи илмӣ асоснок карда шуда, мувофиқат намудани он ба самтҳои муҳими инкишофи илм ва техника муайян гардидааст. Таҳқиқотҳои илмии анҷомдодаи олимони хориҷӣ ва ватанӣ, ки ба мавзуи диссертатсия наздикӣ доранд, таҳлил гардида, навгонии илмӣ ва натиҷаҳои муҳими ба ҳимоя пешниҳодшаванда баён карда шудааст.

Дар боби **«Баррасии натиҷаҳо оид ба таҳқиқи муодилаҳои дифференсиалӣ бо коэффисиентҳои махсус»** таҳлили натиҷаҳои илмии олимони дигар, ки ба мавзуи диссертатсия наздик аст, гузаронида шудааст. Дар ин боб маълумоти умумӣ оид ба баъзе муодилаҳои дифференсиалии одӣ бо коэффисиентҳои махсус оварда шудааст. Инчунин, оид ба муодилаҳои дифференсиалии одии тартиби олӣ низ маълумотҳои зарурӣ пешниҳод карда шудааст.

Дар **боби дуюми** диссертатсия як синфи муодилаҳои дифференсиалии одии таназзулёбандаи

$$[\omega(x)]^n y^{(n)} + a_1[\omega(x)]^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\omega(x)y' + a_n y = f(x), \tag{1}$$

ки дар ин ҷо $a_i\ (i = \overline{1,n}) -$ ададҳои доимӣ, $f(x) -$ функсияи додашудаи бефосила дар Г, $\omega(x) -$ функсияе ки дар ягон нуқтаи интервали Г ба сифр табдил меёбад ва $y = y(x) -$ функсияи номаълум мебошад, мавриди таҳқиқот қарор гирифтааст.

Дар **зербобҳои 2.1-2.3 – и** ин боб маълумотҳои умумӣ оварда шуда, муодилаи умумикардашудаи тартиби якуми намуди Эйлер

$$\omega(x)y' + a_1 y = f(x)$$

дар ҳолатҳои $a_1 = const$ ва $a_1 = a_1(x)$ таҳқиқ карда шудааст ва ҳалли умумии он бо ёрии як доимии ихтиёрӣ ифода гардидааст [5]. Чунин формулаи ивази тағйирёбанда ёфта шудааст, ки ҳангоми амалӣ намудани он муодилаи таҳқиқшаванда ба муодилаи дифференсиалӣ бо коэффисиентҳои доимӣ оварда мешавад.

Дар **зербоби чоруми боби дуюм** муодилаи умумикардашудаи тартиби дуюми намуди Эйлер бо коэффисиенти доимии

$$[\omega(x)]^2 y'' + a_1\omega(x)y' + a_2 y = f(x) \tag{2}$$

ки дар ин ҷо $a_i\ (i = 1,2) -$ ададҳои додашуда, $f(x) -$ функсияи бефосила дар Г мебошад, таҳқиқ карда шуда, шарти зарурӣ ва кифоягии овардашаванда будани ин синфи муодилаҳо ба муодилаҳои дифференсиалӣ бо коэффисиентҳои доимӣ дар шакли теоремаи зерин исбот карда шудааст.

Теоремаи 1. ***(шарти зарурӣ ва кифоягӣ).*** *Барои он ки муодилаи (2) ба муодилаи дифференсиалӣ бо коэффисиентҳои доимӣ оварда шавад, зарур ва кифоя аст, ки функсияи* $\omega(x)$ *намуди хаттии*

$$\omega(x) = c_2x + c_3 \tag{3}$$

-ро дошта бошад ва формулаи ивази тағйирёбанда дар муодилаи (2) *бо ёрии формулаи*

$$t = \mu(x) = \int \frac{dx}{\omega(x)} \tag{4}$$

амалӣ карда шавад.

«Ин теорема тасдиқ менамояд, ки муодилаи (2)-ро танҳо ва танҳо дар он ҳолат ба муодилаи дифференсиалӣ бо коэффисиентҳои доимӣ овардан мумкин аст, агар ин муодила муодилаи Эйлер бошад» [1-М].

«Агар дар муодилаи (2) функсияи $\omega(x)$ намуди (3)-ро надошта бошад, пас ин муодиларо ба муодилаи дифференсиалӣ бо коэффисиентҳои доимӣ овардан мумкин нест ва бинобар ин савол дар бораи ҳалшавандагии он низ то ҳол кушода боқӣ мемонад» [12].

Баъдан дар ин параграф муодилаи умумикардашудаи тартиби дуюми намуди Эйлер

$$[\omega(x)]^2y'' + A_1(x)[\omega(x)]y' + A_2(x)y = f(x), \tag{5}$$

бо коэффисиентҳои тағйирёбанда дида баромада шуда, чунин намуди коэффисиентҳои он $A_1(x), A_2(x)$ муайян карда шудааст, ки барои ин гуна коэффисиентҳо муодилаи (5) ба муодилаи дифференсиалӣ бо коэффисиентҳои доимӣ оварда мешавад. Яъне, агар коэффисиентҳои муодилаи (5) намуди

$$\begin{cases} A_1(x) = a_1 + \omega'(x), \\ A_2(x) = a_2, \end{cases}$$

-ро дошта бошанд, пас бо ёрии гузориши (4) он ба муодилаи дифференсиалӣ бо коэффисиентҳои доимии

$$z''(t) + a_1z'(t) + a_2z(t) = F(t)$$

оварда мешавад.

Баъдан дар ин параграф вобаста аз решаҳои муодилаи характеристикии

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0 \tag{6}$$

дар се ҳолат ҳалли умумии муодилаи умумикардашудаи якҷинсаи намуди Эйлери ба (5) мувофиқоянда, ёфта шудааст.

Дар **зербоби 2.5** ҳалли умумии муодилаи умумикардашуда ғайриякҷинсаи намуди Эйлер (5) дар ҳолатҳои $\omega(x) \in C[a,b]$ ва $\omega(x)=(x-a)^{\alpha}, \alpha>1$ будан, ёфта шудааст. Масалан, ҳангоми $\omega(x)=(x-a)^{\alpha}, \alpha>1$ будан, оид ба ҳалшавандагии муодилаи

$$(x-a)^{2\alpha}y''+[a_1+\alpha(x-a)^{\alpha-1}](x-a)^{\alpha}y'+a_2y=f(x) \quad (7)$$

теоремаи зерин исбот карда шудааст.

Теоремаи 2. *Бигузор, дар муодилаи* (7) *коэффисиентҳои* a_1 *ва* a_2 *чунин бошанд, ки решаҳои муодилаи характеристикии* (6) *ҳақиқӣ ва гуногун буда,* $\lambda_1<\lambda_2$ *бошад. Функсияи* $\omega(x)$ *дар нуқтаи* a*-и порчаи* $[a,b]$ *дорои сифри дараҷааш* $\alpha>1$ *бошад, яъне* $\omega(x)=(x-a)^{\alpha}$*. Инчунин, функсияи* $f(x)\in \mathrm{C}(a,b]$ *ва дар ҳолати* $\lambda_2>0$ *будан, дар нуқтаи* $x=a$ *аз рӯйи формулаи ассимптотикии*

$$f(x)=\mathrm{o}\left[e^{\delta_1\mu(x)}\right],\ \ \delta_1>\lambda_2,\ \ \text{ҳангоми}\ \ x\to a$$

ба сифр майл намояд. Он гоҳ муодилаи (7) *дар синфи* $\mathrm{C}^2[a,b]$ *ҳалшаванда мебошад ва ҳалли умумии он бо ёрии формулаи*

$$y(x)=c_1^1e^{\lambda_1\mu(x)}+c_2^1e^{\lambda_2\mu(x)}-$$

$$-\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\int_a^x\left[e^{\lambda_1(\mu(x)-\mu(t))}-e^{\lambda_2(\mu(x)-\mu(t))}\right]f(t)d\big(\mu(t)\big)\equiv$$

$$\equiv E_1[c_1^1,c_2^1,f(x)],$$

дода мешавад.

Зербоби 2.6 ба таҳқиқи муодилаи ғайримоделии

$$[\omega(x)]^2y''+a_1[\omega(x)]y'+a_2y=f(x) \quad (8)$$

ҳангоми $\omega(x)=(x-a)^{\alpha}, \alpha>1$ будан, бахшида шудааст. Дар ин ҳолат ёфтани ҳалҳои ошкорои муодилаи (8) ғайриимкон мебошад. Бинобар ин ҳолатҳое ҷудо карда шудааст, ки ҳалли муодилаи дифференсиалӣ ба ҳалли муодилаи интегралии намуди Волтерра бо ядрои регулярӣ оварда мешавад. Дар ин гуна ҳолатҳо ҳалли муодилаи умумикардашудаи намуди Эйлер ба воситаи резолвентаи муодилаи интегралии намуди Волтерра ифода карда мешавад.

Дар **зербоби якуми боби сеюм** муодилаи таназзулёбандаи тартиби олии намуди Эйлер

$$[\omega(x)]^ny^{(n)}+a_1[\omega(x)]^{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}\omega(x)y'+a_ny=f(x), \quad (9)$$

ки дар ин ҷо $a_i\ (i=\overline{1,n})-$ададҳои доимӣ, $f(x)-$ функсияи додашуда ва $\omega(x)-$ функсияи додашуда дар Г мебошад, дида баромада шудааст. Дар ин параграф исбот карда шудааст, ки агар коэффисиентҳои $a_i\ (i=\overline{1,n})$ ададҳои доимӣ бошанд ва функсияи $\omega(x)$ аз функсияи хаттӣ фарқ намояд, пас муодилаи таназзулёбандаи

(9)-ро бо ин гуна функсияи $\omega(x)$ ба муодилаи дифференсиалӣ бо коэффисиентҳои доимӣ овардан мумкин нест.

Дар **зербоби 3.2**-и ин боб муодилаи дифференсиалии якҷинсаи намуди Эйлер бо коэффисиентҳои тағйирёбанда

$$[\omega(x)]^n y^{(n)} + A_1(x)[\omega(x)]^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + A_{n-1}(x)\omega(x)y' + A_n(x)y = f(x), \tag{10}$$

ки $f(x)$, $A_i(x)$ $(i = \overline{1,n}) -$ функсияҳои дар Г бефосила, $\omega(x) -$ метавонад дар ягон нуқтаи $x \in \Gamma$ ба сифр баробар бошад, дида баромада шудааст. Дар ин зербоб теоремаи зерин исбот карда шудааст.

Теоремаи 3. *Барои он ки муодилаи* (10) *бо ёрии формулаи ивази тағйирёбанда*

$$t = \mu(x) = \int \frac{dx}{\omega(x)} \tag{11}$$

ба муодилаи дифференсиалӣ бо коэффисиентҳои доимӣ оварда шавад, зарур ва кифоя аст, ки коэффисиентҳои $A_k(x)$ $(k = \overline{1,n})$ *намуди зеринро дошта бошанд:*

$$A_k(x) = a_k - \sum_{i=0}^{k-1} A_i(x)[\omega(x)]^{n-i} P_{n-i}^{n-k}(x) \ (k = 1,2,\cdots,n-1), \tag{12}$$

$$A_0(x) \equiv 1, A_n(x) \equiv a_n, a_k = const.$$

Баъдан дар ин зербоб ҳалли умумии муодилаи якҷинсаи ба (10) мувофиқоянда, вобаста аз решаҳои муодилаи характеристикии

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \tag{13}$$

дар панҷ ҳолат ёфта шудааст.

«Дар **зербоби 3.3** ҳалли муодилаи ғайриякҷинсаи (10), ки коэффисиентҳояш аз баробариҳои (12) муайян карда мешаванд, ба ҳалли муодилаи дифференсиалии одӣ бо коэффисиентҳои доимӣ оварда шуда, ҳалли муодилаи охирон бо истифода аз методи Коши ёфта мешавад. Баъдан, дар ҳалҳои ҳосилгардида гузориши $t = \mu(x)$-ро амалӣ намуда, ҳалли муодилаи ғайриякҷинсаи (10) дар намуди ошкор ёфта мешавад» [1].

Дар ин зербоб дар ҳолати хусусӣ ҳангоми $\omega(x) = x^\alpha$ будан, оид ба ҳалшавандагии муодилаи

$$[x^\alpha]^n y^{(n)} + A_1(x)[x^\alpha]^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + A_{n-1}(x)x^\alpha y' + A_n(x)y = = f(x) \tag{14}$$

теоремаи зерин исбот карда шудааст.

Теоремаи 4. *Бигузор, дар муодилаи* (14) *коэффисиентҳои* $A_i(x)$ $(i = \overline{1,n})$ *аз баробариҳои* (12) *муайян карда шаванд. Бигузор, ҳамаи решаҳои муодилаи характеристикии* (13) *ҳақиқӣ ва гуногун бошанд. Функсияи* $f(x) \in C(\overline{\Gamma})$ *ва дар ҳолати* $\max\limits_{1\le i\le n} \lambda_i = \lambda_n > 0$ *будан дар нуқтаи* $x = 0$ *аз рӯйи формулаи ассимптотикии*

$$f(x) = \mathrm{o}\left[e^{\delta_1\mu(x)}\right],\ \ \delta_1 > \lambda_n,\ \ \text{ҳангоми}\ \ x \to 0$$

ба сифр майл намояд. Он гоҳ ҳалли умумии муодилаи моделии ғайриякҷинсаи (14) *бо ёрии формулаи*

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i^1 e^{\lambda_i\mu(x)} + \sum_{i=1}^{n} \frac{W_{ni}(0)}{W(0)} \int\limits_0^x e^{\lambda_i(\mu(x)-\mu(t))} f(t)\frac{dt}{t^\alpha},$$

ифода мегардад, ки дар ин ҷо $\mu(x) = -\frac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}}$, $c_i^1 (i = \overline{1,n})$ *– ададҳои доимии ихтиёрӣ мебошанд.*

Теоремаи 5. *«Бигузор, дар муодилаи* (14) *коэффисиентҳои* $A_i(x)$ $(i = \overline{1,n})$ *аз баробариҳои* (12) *муайян карда шаванд. Бигузор, ҳамаи решаҳои муодилаи характеристикии* (13) *ҳақиқӣ ва яккела бошанд. Функсияи* $f(x) \in C(\overline{\Gamma})$ *ва дар ҳолати* $\lambda > 0$ *будан дар нуқтаи* $x = 0$ *аз рӯйи формулаи ассимптотикии*

$$f(x) = \mathrm{o}\left[e^{\delta_2\mu(x)}\right], \delta_2 > \lambda, \text{ҳангоми}\ x \to 0$$

ба сифр майл намояд. Он гоҳ ҳалли умумии муодилаи моделии ғайриякҷинсаи (14) *бо ёрии формулаи*

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 [\mu(x)]^{i-1} e^{\lambda\mu(x)} + \frac{1}{(n-1)!} \int\limits_0^x [\mu(x) - \mu(t)]^{n-1} e^{\lambda(\mu(x)-\mu(t))} f(t)\frac{dt}{t^\alpha}$$

ифода мегардад, ки дар ин ҷо $c_i^2 (i = \overline{1,n})$ *– ададҳои доимии ихтиёрӣ мебошанд»[9-М].*

Теоремаи 6. *Бигузор, дар муодилаи* (14) *коэффисиентҳои* $A_i(x)$ $(i = \overline{1,n})$ *аз баробариҳои* (12) *муайян карда шаванд. Бигузор,* λ_1 *решаи* $k-$ *каратаи муодилаи характеристикии* (13) *буда, решаҳои боқимонда* $\lambda_{k+1}, \lambda_{k+2}, \dots, \lambda_n$ *– ҳақиқӣ ва гуногун бошанд ва барояшон шарти* $\lambda_1 < \lambda_{k+1} < \lambda_{k+2} < \cdots < \lambda_n$ *иҷро гардад. Функсияи* $f(x) \in C(\overline{\Gamma})$ *ва дар ҳолати* $\lambda_n > 0$ *будан, дар нуқтаи* $x = 0$ *аз рӯйи формулаи ассимптотикии*

$$f(x) = \mathrm{o}\left[e^{\delta_3\mu(x)}\right], \delta_3 > \lambda_n, \text{ҳангоми}\ x \to 0$$

ба сифр мубаддал гардад. Он гоҳ ҳалли умумии муодилаи моделии ғайриякҷинсаи (14) *ба воситаи формулаи*

$$y(x) = \sum_{i=1}^{k} c_i^3 [\mu(x)]^{i-1} e^{\lambda_1 \mu(x)} + \sum_{j=k+1}^{n} c_j^3 e^{\lambda_j \mu(x)} +$$
$$+\sum_{i=1}^{k} \frac{W_{ni}(0)}{W(0)} \int_0^x \big(\mu(x) - \mu(t)\big)^{i-1} e^{\lambda_1(\mu(x)-\mu(t))} f(t) \frac{dt}{t^\alpha} +$$
$$+ \sum_{j=k+1}^{n} \frac{W_{nj}(0)}{W(0)} \int_0^x e^{\lambda_j(\mu(x)-\mu(t))} f(t) \frac{dt}{t^\alpha}$$

ифода мегардад, ки дар ин ҷо $c_i^3 (i = \overline{1,n})$ – *ададҳои доимии ихтиёрӣ мебошанд.*

Теоремаи 7. *Бигузор, дар муодилаи* (14) *коэффисиентҳои* $A_i(x)$ $(i = \overline{1,n})$ *аз баробариҳои* (12) *муайян карда шаванд. Ғайр аз ин, бигузор* $n = 2k$ *– адади ҷуфт бошад ва ҳамаи решаҳои муодилаи характеристики ададҳои комплексии ҳамроҳшуда буда, қисмҳои ҳақиқии онҳо нобаробарии* $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_k$*-ро қаноат намоянд. Функсияи* $f(x) \in C(\overline{\Gamma})$ *ва дар ҳолати* $\alpha_k > 0$ *будан, дар нуқтаи* $x = 0$ *аз рӯйи формулаи ассимптотикии*

$$f(x) = \mathrm{o}\left[e^{\delta_2 \mu(x)}\right], \delta_4 > \alpha_k, \text{ҳангоми } x \to 0$$

ба сифр мубаддал гардад. Он гоҳ ҳалли умумии муодилаи моделии ғайриякҷинсаи (14) *ба воситаи формулаи*

$$y(x) = \sum_{i=1}^{k} e^{\alpha_i \mu(x)} \left[c_{2i-1}^4 \cos\beta_i \mu(x) + c_{2i}^4 \sin\beta_i \mu(x)\right] +$$
$$+\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{W(0)} \cdot \int_0^x e^{\alpha_i(\mu(x)-\mu(t))} [W_{2i-1}(0) \cos\beta_i (\mu(x) - \mu(t)) +$$
$$+W_{2i}(0) \sin\beta_i \big(\mu(x) - \mu(t)\big)\big] f(t) \frac{dt}{t^\alpha}$$

дода мешавад, ки дар ин ҷо $c_i^4 (i = \overline{1,2k})$ – *ададҳои доимии ихтиёрӣ мебошанд.*

Дар **боби чорум**и диссертатсияи илмӣ баъзе татбиқҳои натиҷаҳои дар бобҳои пешин ҳосилкардашуда, оварда шудааст.

Дар **зербоби якуми ин боб** хосиятҳои ҳалҳои муодилаи дифференсиалии моделии тартиби дуюми таназзулёбандаи намуди

$$[\omega(x)]^2 y'' + [a_1 + \omega'(x)] \omega(x) y' + a_2 y = f(x), \qquad (15)$$

ки дар ин ҷо $f(x)$ − функсияи додашудаи бефосила дар Г, $\omega(x)=(x-a)^{\alpha}$ мебошад, таҳқиқ гардида, рафтори ин ҳалҳо дар атрофи нуқтаи махсуси муодила омӯхта шудааст.

Дар ҳақиқат, дар асоси натиҷаҳои зербобҳои 4 ва 5-и боби дуюм, вобаста аз решаҳои муодилаи характеристикии:

$$\lambda^2+a_1\lambda+a_2=0 \qquad (16)$$

ҳалҳои муодилаи (15) намудҳои зеринро мегирад.

1. Дар ҳолати решаҳои муодилаи характеристикии (15) ҳақиқӣ ва гуногун будан:

$$y_1(x)=c_1^1e^{\lambda_1\mu(x)}+c_2^1e^{\lambda_2\mu(x)}-\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\int_a^x\left[e^{\lambda_1(\mu(x)-\mu(t))}-\right.$$

$$\left.-e^{\lambda_2(\mu(x)-\mu(t))}\right]f(t)d\big(\mu(t)\big)\equiv E_1[c_1^1,c_2^1,f(x)], \qquad (17)$$

ки дар ин ҷо $\mu(x)=-\frac{1}{(\alpha-1)(x-a)^{\alpha-1}}$.

2. Дар ҳолати решаҳои муодилаи характеристикии (16) ҳақиқӣ ва якхела будан:

$$y_2(x)=c_1^2e^{\lambda\mu(x)}+c_2^2\mu(x)e^{\lambda\mu(x)}+$$

$$+\int_a^x e^{\lambda(\mu(x)-\mu(t))}\big(\mu(x)-\mu(t)\big)f(t)d(\mu(t))\equiv$$

$$\equiv E_2[c_1^2,c_2^2,f(x)]. \quad (18)$$

3. Дар ҳолати решаҳои муодилаи характеристикии (16) ададҳои комплексии ҳамроҳшуда будан:

$$y_3(x)=e^{\alpha_1\mu(x)}\cos[\beta_1\mu(x)]c_1^3+e^{\alpha_1\mu(x)}\sin[\beta_1\mu(x)]c_2^3+$$

$$+\frac{1}{\beta_1}\int_a^x e^{\alpha_1(\mu(x)-\mu(t))}\sin\big[\beta_1\big(\mu(x)-\mu(t)\big)\big]f(t)d\big(\mu(t)\big)\equiv$$

$$\equiv E_3[c_1^3,c_2^3,f(x)]. \ (19)$$

Хосияти ҳалҳои (17) − (19)-ро меомӯзем.

1^0. Бигузор, решаҳои муодилаи характеристикии (16) нобаробарии $\lambda_2>\lambda_1$-ро қаноат намоянд.

Қайди 1. «Ҳалли намуди (17) ҳангоми $\lambda_1>0$ будан дар нуқтаи $x=a$ ба сифр майл намуда, рафтораш аз рӯйи формулаи ассимптотикии зерин муайян карда мешавад:

$$y_1(x)=o\left[e^{\lambda_1\mu(x)}\right],\ \text{ҳангоми}\ x\to a. \qquad (20)$$

Дар ҳолати $\lambda_1<0$ будан, ҳалли намуди (17) дар нуқтаи $x=a$ ба беохирӣ майл намуда, рафтораш аз рӯйи формулаи ассимптотикии зерин муайян карда мешавад»[4-M]:

$$y_1(x) = O\left[e^{-|\lambda_1|\mu(x)}\right],\ \text{ҳангоми}\ x \to a. \qquad (21)$$

Ишораҳои зеринро дохил менамоем:

$$P_{\lambda_1}[y_1(x)] = e^{-\lambda_1\mu(x)}\, y_1(x),$$

$$P_{\lambda_1\lambda_2}[y'{}_1(x)] = e^{-(\lambda_2-\lambda_1)\mu(x)}(x-a)^{\alpha}\frac{d}{dx}\left[e^{-\lambda_1\mu(x)}y_1(x)\right]. \qquad (22)$$

Қайди 2. Ҳалли намуди (17) дорои хосиятҳои зерин мебошад:

$$\left[P_{\lambda_1}[y_1(x)]\right]\Big|_{x=a} = c_1^1,\ \left[P_{\lambda_1\lambda_2}[y_1'(x)]\right]\Big|_{x=a} = (\lambda_2-\lambda_1)\cdot c_2^1. \qquad (23)$$

2^0. Бигузор, решаҳои муодилаи характеристикии (16) ҳақиқӣ ва якхела бошанд, яъне $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$.

Қайди 3. «Ҳалли намуди (18) ҳангоми $\lambda > 0$ будан, дар нуқтаи $x = a$ ба сифр майл намуда, рафтораш аз рӯйи формулаи ассимптотикии зерин муайян карда мешавад»[4-М]:

$$y_2(x) = o\left[e^{\lambda\mu(x)}\cdot\mu(x)\right],\ \text{ҳангоми}\ x \to a. \qquad (24)$$

Дар ҳақиқат, азбаски ҳалли намуди (18)-ро дар намуди:

$$y_2(x) = e^{\lambda\mu(x)}\cdot\mu(x)\left[\frac{c_1^2}{\mu(x)} + c_2^2 + \int\limits_a^x e^{-\lambda\mu(t)}\left(1-\frac{\mu(t)}{\mu(x)}\right)f(t)d\big(\mu(t)\big)\right]$$

навиштан мумкин аст ва ҳудуди дохили қавси квадратӣ ҳангоми $x \to a$ ба адади доимӣ майл менамояд ва ҳудуди ифодаи беруни қавси квадратӣ ба сифр майл менамояд, бинобар ин дараҷаи калонтарини сифри ҳалли $y_2(x)$ аз рӯйи ифодаи беруни қавси квадратӣ дар намуди (24) муайян карда мешавад.

Қайди 4. «Ҳалли намуди (18) ҳангоми $\lambda < 0$ будан, дар нуқтаи $x = a$ ба беохирӣ майл намуда, рафтораш аз рӯйи формулаи ассимптотикии зерин муайян карда мешавад»[4-М]:

$$y_2(x) = O\left[e^{-|\lambda|\mu(x)}\cdot\mu(x)\right],\ \text{ҳангоми}\ x \to a. \qquad (25)$$

Ишораҳои зеринро дохил менамоем:

$$P_\lambda^1[y_2(x)] = e^{-\lambda\mu(x)}\cdot\mu^{-1}(x)y_2(x),$$

$$P_\lambda^2[y_2'(x)] = \mu^2(x)(x-a)^2\frac{d}{dx}\left[e^{-\lambda\mu(x)}\cdot\mu^{-1}(x)y_2(x)\right]. \qquad (26)$$

Қайди 5. Ҳалли намуди (18) дорои хосиятҳои зерин мебошад:

$$\left[P_\lambda^1[y_2(x)]\right]\Big|_{x=a} = c_1^2,\ \left[P_\lambda^2[y_2'(x)]\right]\Big|_{x=a} = -c_2^2. \qquad (27)$$

3^0. Бигузор, решаҳои муодилаи характеристикии (16)ададҳои комплексию ҳамроҳшуда бошад ва $\lambda_{1,2} = \alpha_1 \pm i\beta_1$. Фарз менамоем, ки қисми ҳақиқии ин решаҳо адади мусбат мебошад, яъне $\mathrm{Re}\big(\lambda_{1,2}\big) = \alpha_1 > 0$. Он гоҳ ҳалли намуди (19)-ро ба намуди:

$$y_3(x) = e^{\alpha_1\mu(x)}\left[cos\big(\beta_1\mu(x)\big)c_1^3 + sin\big(\beta_1\mu(x)\big)c_2^3\right] +$$

$$+\frac{1}{\beta_1}\int_a^x e^{-\alpha_1\mu(t)} sin\big[\beta_1\big(\mu(x)-\mu(t)\big)\big] f(t)d\big(\mu(t)\big) \equiv e^{\alpha_1\mu(x)}W(x) \quad (28)$$

оварда, мебинем, ки ҳудуди функсияи $W(x)$ ҳангоми $x \to a$ ба адади доимӣ майл менамояд. Аз ин ҷо, қайди зерин ҷой дорад:

Қайди 6. «Ҳалли намуди (19) ҳангоми $\alpha_1 > 0$ будан, дар нуқтаи $x = a$ ба сифр майл намуда, рафтораш аз рӯйи формулаи ассимптотикии зерин муайян карда мешавад»[4-М]:

$$y_3(x) = o\big[e^{\alpha_1\mu(x)}\big], \text{ ҳангоми } x \to a.$$

Қайди 7. «Ҳалли намуди (19) ҳангоми $\alpha_1 < 0$ дар нуқтаи $x = a$ ба беохирӣ майл намуда, рафтораш аз рӯйи формулаи ассимптотикии зерин муайян карда мешавад»[4-М]:

$$y_3(x) = O\big[e^{-|\alpha_1|\mu(x)} \cdot \mu(x)\big], \text{ ҳангоми } x \to a.$$

Бо D_x^a оператори дифференсиалии зеринро ишора мекунем:

$$D_x^a = (x-a)^\alpha \frac{d}{dx}.$$

Оператори D_x^a-ро ба функсияи (19) татбиқ намуда, ҳосил мекунем:

$$D_x^a y_3(x) = e^{\alpha_1\mu(x)}\big[(\alpha_1 c_1^3 + \beta_1 c_2^3)\cos\big(\beta_1\mu(x)\big) + (\alpha_1 c_2^3 - \beta_1 c_1^3)\sin\big(\beta_1\mu(x)\big)\big] +$$
$$+\frac{1}{\beta_1}\int_a^x e^{\alpha_1(\mu(x)-\mu(t))}\Big[\alpha_1\sin\big[\beta_1\big(\mu(x)-\mu(t)\big)\big] +$$
$$+\beta_1\cos\big[\beta_1\big(\mu(x)-\mu(t)\big)\big]\Big] f(t)d\big(\mu(t)\big). \quad (29)$$

Ишораҳои зеринро дохил мекунем:

$$P_{\alpha_1}^1[y_3(x)] = e^{-\alpha_1\mu(x)}y_3(x); \quad P_{\alpha_1}^2[y_3'(x)] = e^{-\alpha_1\mu(x)}D_x^a y_3(x). \quad (30)$$

Қайди зерин ҷой дорад.

Қайди 8. Ҳалли намуди (19) дорои хосиятҳои зерин мебошад:

$$\Big[P_{\alpha_1}^1[y_3(x)]\Big]\Big|_{x=a} = M_1c_1^3 + M_2c_2^3;$$
$$\Big[P_{\alpha_1}^2[y_3'(x)]\Big]\Big|_{x=a} = (M_1\alpha_1 - M_2\beta_1)c_1^3 + (M_1\beta_1 + M_2\alpha_1)c_2^3, \quad (31)$$

ки дар ин ҷо $M_1 = \cos[\beta_1\mu(a)], \quad M_2 = \sin[\beta_1\mu(a)]$.

Дар ҳақиқат, ду тарафи баробариҳои (19) ва (29) -ро ба $e^{-\alpha_1\mu(x)}$ зарб намуда, дар баробариҳои ҳосилшуда ҳангоми $x \to a$ ба ҳудуд мегузарем:

$$\lim_{x\to a} e^{-\alpha_1\mu(x)}\, y_3(x) = \lim_{x\to a}\big[\cos\big(\beta_1\mu(x)\big)c_1^3 + \sin\big(\beta_1\mu(x)\big)c_2^3\big] +$$

$$+\frac{1}{\beta_1}\lim_{x\to a}\int_a^x e^{-\alpha_1\mu(t)}\sin\left[\beta_1\left(\mu(x)-\mu(t)\right)\right]f(t)d(\mu(t)) = M_1c_1^3 + M_2c_2^3;$$

$$\lim_{x\to a} e^{-\alpha_1\mu(x)}D_x^\beta\, y_3(x) = \lim_{x\to a}\left[(\alpha_1c_1^3+\beta_1c_2^3)\cos\left(\beta_1\mu(x)\right)+\right.$$
$$\left.+(\alpha_1c_2^3-\beta_1c_1^3)\sin\left(\beta_1\mu(x)\right)\right]$$
$$+\frac{1}{\beta_1}\lim_{x\to a}\int_a^x e^{-\alpha_1\mu(t)}\left[\alpha_1\sin\left[\beta_1\left(\mu(x)-\mu(t)\right)\right]+\right.$$
$$\left.+\beta_1\cos\left[\beta_1\left(\mu(x)-\mu(t)\right)\right]\right]f(t)d\left(\mu(t)\right) = (\alpha_1c_1^3+\beta_1c_2^3)M_1+$$
$$+(\alpha_1c_2^3-\beta_1c_1^3)M_2 = (M_1\alpha_1-M_2\beta_1)c_1^3+(M_1\beta_1+M_2\alpha_1)c_2^3.$$

Тасдиқоти қайди 8 исбот гардид.

Дар **зербоби дуюми боби чорум** масъалаи навъи Коши барои муодилаи дифференсиалии таназзулёбандаи тартиби дуюми

$$[\omega(x)]^2y'' + [a_1+\omega'(x)]\omega(x)y' + a_2y = f(x), \qquad (32)$$

гузошта шуда, таҳқиқ гардидааст.

Масъалаи A_1. Бигузор, решаҳои муодилаи характеристикии

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0 \qquad (33)$$

ҳақиқӣ ва гуногун бошанд. Ёфтани чунин ҳалли муодилаи (32) аз синфи $C^2(\Gamma)$ талаб карда мешавад, ки шартҳои ибтидоии зеринро қаноат намояд:

$$\left[P_{\lambda_1}[y_1(x)]\right]\Big|_{x=a} = B_1^1, \left[P_{\lambda_1,\lambda_2}[y_1'(x)]\right]\Big|_{x=a} = B_2^1,$$

ки дар ин ҷо B_j^1 $(j = 1,2)$ – ададҳои доимии додашуда, $P_{\lambda_1}[y_1(x)]$, $P_{\lambda_1,\lambda_1}[y_1'(x)]$ – функсияҳое мебошанд, ки аз баробариҳои

$$P_{\lambda_1}[y_1(x)] = e^{-\lambda_1\mu(x)}\, y_1(x),$$
$$P_{\lambda_1,\lambda_2}[y'_1(x)] = e^{-(\lambda_2-\lambda_1)\mu(x)}(x-a)^\alpha\frac{d}{dx}\left[e^{-\lambda_1\mu(x)}y_1(x)\right]$$

муайян карда мешаванд.

Оид ба ҳалшавандагии ин масъала теоремаи зерин исбот гардидааст:

Теоремаи 8. *«Бигузор, дар муодилаи* (32) *коэффисиентҳои* a_1 *ва* a_2 *чунин бошанд, ки решаҳои муодилаи характеристикии* (33) *ҳақиқӣ ва гуногун буда,* $\lambda_1 < \lambda_2$ *бошад. Функсияи* $\omega(x)$ *дар нуқтаи* a*-и порчаи* $[a,b]$ *дорои сифри дараҷааш* $\alpha > 1$ *бошад, яъне* $\omega(x) = (x-a)^\alpha$. *Инчунин, функсияи* $f(x) \in C(a,b]$ *ва дар ҳолати* $\lambda_2 > 0$ *будан, дар нуқтаи* $x = a$ *аз рӯйи формулаи ассимптотикии*

$$f(x) = o\left[e^{\delta_1\mu(x)}\right], \delta_1 > \lambda_2, \text{ҳангоми } x \to a$$

ба сифр майл намояд. Он гоҳ масъалаи A_1 дорои ҳалли ягона мебошад ва ин ҳал ба воситаи формулаи

$$y_1(x) = E_1\left[B_1^1, \frac{B_2^1}{\lambda_2 - \lambda_1}, f(x)\right]$$

ифода карда мешавад»[4-М], [5-М].

Масъалаи A_2. Бигузор, решаҳои муодилаи характеристикии (33) ҳақиқӣ ва якхела бошанд. Ёфтани чунин ҳалли муодилаи (32) аз синфи $C^2(\Gamma)$ талаб карда мешавад, ки шартҳои ибтидоии зеринро қаноат намояд:

$$\left[P_\lambda^1[y_2(x)]\right]\Big|_{x=a} = B_1^2, \left[P_\lambda^2[y_2'(x)]\right]\Big|_{x=a} = B_2^2,$$

ки дар ин ҷо B_j^2 $(j = 1,2)$ – ададҳои доимии додашуда, $P_\lambda^1[y_2(x)]$, $P_\lambda^2[y_2'(x)]$ – функсияҳое мебошанд, ки аз баробариҳои (26) муайян карда мешаванд.

Таҳқиқи масъалаи A_2. «Тасвири интегралии ҳалли (18)-и муодилаи (32) ва хосиятҳои он (27)-ро истифода бурда, ададҳои доимии ихтиёрии c_1^2, c_2^2-ро нисбат ба доимиҳои додашудаи B_1^2, B_2^2 ифода менамоем:

$$c_1^2 = B_1^2; \quad -c_2^2 = B_2^2.$$

Аз ин ҷо

$$c_1^2 = B_1^2; \quad c_2^2 = -B_2^2.$$

Ин қиматҳои c_1^2, c_2^2-ро ба (18) гузошта ҳалли масъалаи A_2-ро дар намуди зерин ҳосил мекунем»[4-М]:

$$y_2(x) = E_2[B_1^2; -B_2^2; f(x)]. \tag{34}$$

Ҳамин тавр, исбот карда шуд.

Теоремаи 9. *Бигузор, решаҳои муодилаи характеристикии* (33) *ҳақиқӣ ва якхела бошанд. Функсия* $\omega(x)$ *намуди* $\omega(x) = (x-a)^\alpha, \alpha > 1$*-ро дошта бошад. Инчунин, функсияи* $f(x) \in C[a,b]$ *ва ҳангоми* $\lambda > 0$ *будан, дар нуқтаи* $x = a$ *аз рӯйи формулаи ассимптотикии*

$$f(x) = o\left[\frac{e^{\delta_2 \mu(x)}}{\mu(x)}\right], \delta_2 > \lambda, \text{ ҳангоми } x \to a$$

ба сифр майл намояд. Он гоҳ масъалаи A_2 *дорои ҳалли ягона мебошад ва ин ҳал ба воситаи формулаи* (34) *ифода карда мешавад*

Масъалаи A_3. Бигузор, решаҳои муодилаи характеристикии (33) ададҳои комплексии ҳамроҳшуда бошанд. Ёфтани чунин ҳалли муодилаи (32) аз синфи $C^2(\Gamma)$ талаб карда мешавад, ки шартҳои ибтидоии зеринро қаноат намояд:

$$\left[P_{\alpha_1}^1[y_3(x)]\right]\Big|_{x=a} = B_1^3, \left[P_{\alpha_1}^2[y_3'(x)]\right]\Big|_{x=a} = B_2^3,$$

ки дар ин ҷо B_j^3 $(j = 1{,}2)$ – ададҳои доимии додашуда, $P_{\alpha_1}^1[y_3(x)]$, $P_{\alpha_1}^2[y_3'(x)]$ – функсияҳое мебошанд, ки аз баробариҳои (30) муайян карда мешаванд.

Таҳқиқи масъалаи A_3. Тасвири интегралии ҳалли (28) -и муодилаи (32) ва хосиятҳои он (31)-ро истифода бурда, ададҳои доимии ихтиёрии c_1^3, c_2^3-ро нисбат ба доимиҳои додашудаи B_1^3, B_2^3 ба воситаи системаи муодилаҳои зерин ифода менамоем:

$$\begin{cases} M_1 c_1^3 + M_2 c_2^3 = B_1^3, \\ (M_1\alpha_1 - M_2\beta_1)c_1^3 + (M_1\beta_1 + M_2\alpha_1)c_2^3 = B_2^3. \end{cases} \tag{35}$$

Азбаски муайянкунандаи ин ситема

$$\Delta = \begin{vmatrix} M_1 & M_2 \\ M_1\alpha_1 - M_2\beta_1 & M_1\beta_1 + M_2\alpha_1 \end{vmatrix} = \beta_1 \neq 0$$

аст, пас c_1^3, c_2^3 аз системаи (35) якқимата дар намуди

$$c_1^3 = \frac{\Delta_{c_1^3}}{\beta_1}, \quad c_2^3 = \frac{\Delta_{c_2^3}}{\beta_1}$$

муайян карда мешавад. Ин қиматҳои c_1^3, c_2^3-ро ба (19) гузошта, ҳалли масъалаи A_3-ро дар намуди зерин меёбем:

$$y_3(x) = E_3\left[\frac{\Delta_{c_1^3}}{\beta_1}, \frac{\Delta_{c_2^3}}{\beta_1}, f(x)\right]. \tag{36}$$

Ҳамин тавр, исбот карда шуд.

Теоремаи 10. *Бигузор, решаҳои муодилаи характеристикии* (33) *ададҳои комплексии ҳамроҳшуда бошанд. Функсияи* $\omega(x)$ *дар порчаи* $[a, b]$ *дорои сифри дараҷааш* $\alpha > 1$ *бошад, яъне* $\omega(x) = (x-a)^\alpha$, $\alpha > 1$. *Инчунин, функсияи* $f(x) \in C[a, b]$ *ва дар ҳолати* $\alpha_1 > 0$ *будан дар нуқтаи* $x = a$ *аз рӯйи формулаи ассимптотикии*

$$f(x) = o\left[e^{-\delta_3\mu(x)}\right], \ \delta_3 > \alpha_1, \text{ ҳангоми } x \to a$$

ба сифр майл намояд. Он гоҳ масъалаи A_3 *дорои ҳалли ягона мебошад ва ин ҳал ба воситаи формулаи* 36 *ифода карда мешавад*

Дар **зербоби сеюми боби чор** натиҷаҳои дар параграфҳои пешина бадастовардашуда, дар ҳалли муодилаи интегро-дифференсиалии дученакаи тартиби дуюм бо ядроҳои барзиёд-сингулярии намуди

$$D_x^\alpha D_y^\beta U(x,y) + \int_a^x \frac{A}{(t-a)^\alpha} D_y^\beta U(t,y)dt + \int_b^y \frac{B}{(s-b)^\beta} D_x^\alpha U(x,s)ds +$$

$$+\int_a^x \frac{C}{(t-a)^\alpha}\int_b^y \frac{1}{(s-b)^\beta}U(t,s)dtds = f(x,y), \qquad (37)$$

татбиқ карда шудааст. Дар ин параграф нишон дода шудааст, ки ҳалли ин муодилаи интегро-дифференсиалии дученака бо ядрои барзиёд-сингулярӣ ба ҳалли системаи ду муодилаҳои интегро-дифференсиалии якченака бо ядрои регулярӣ, вале бо ҳудудҳои номаҳдуди намуди

$$\begin{cases} V_s'(t,s) + B\displaystyle\int_{-\infty}^{s} V(t,v)dv = W(t,s), \\ W_t'(t,s) + A\displaystyle\int_{-\infty}^{t} W(\tau,s)d\tau = F(t,s) \end{cases} \qquad (38)$$

оварда мешавад.

Оид ба ҳалшавандагии муодилаи интегро-дифференсиалии (37) тасдиқотҳои зерин исбот карда шудааст:

Теоремаи 11. *Бигузор, дар муодилаи (37)* $A < 0, B < 0$ *бошад. Функсияи* $f(t,s)$ *ҳангоми* $t \to a$ *ва* $s \to b$ *ба сифр майл намуда, рафтораш аз рӯйи формулаи ассимптотикии*

$$f(t,s) = o\left[e^{\delta_1\mu_\alpha(t)}e^{\delta_2\mu_\beta(s)}\right], \delta_1 > \nu_2, \delta_2 > \lambda_2 \text{ ҳангоми } t \to a, s \to b$$

муайян карда шавад ва функсияи ихтиёрии $c_4(s)$ *ҳангоми* $s \to b$ *аз рӯйи формулаи ассимптотикии*

$$c_4(s) = o\left[e^{\delta_2\mu_\beta(s)}\right], \delta_2 > \lambda_2 \text{ ҳангоми } s \to b$$

ба сифр майл намояд. Он гоҳ ҳалли умумии муодилаи интегро-дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусии таназзулёбанда бо ядрои барзиёд сингулярии (37) *аз синфи* $C^2(R)$ *ба воситаи формулаи*

$$u(x,y) = e^{\lambda_2\mu_\beta(y)}c_2(x) - e^{\nu_2\mu_\alpha(x)}\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\times$$

$$\times\int_b^y \left[\lambda_1 e^{\lambda_1(\mu_\beta(y)-\mu_\beta(s))} - \lambda_2 e^{\lambda_2(\mu_\beta(y)-\mu_\beta(s))}\right]c_4(s)\frac{ds}{(s-b)^\beta} +$$

$$+\frac{1}{(\lambda_2-\lambda_1)(\nu_2-\nu_1)}\int_b^y \left[\lambda_1 e^{\lambda_1(\mu_\beta(y)-\mu_\beta(s))} - \lambda_2 e^{\lambda_2(\mu_\beta(y)-\mu_\beta(s))}\right]\times$$

$$\times\int_a^x \left[\nu_1 e^{\nu_1(\mu_\alpha(x)-\mu_\alpha(t))} - \nu_2 e^{\nu_2(\mu_\alpha(x)-\mu_\alpha(t))}\right]f(t,s)\frac{dt}{(t-a)^\alpha}\frac{ds}{(s-b)^\beta}$$

ифода карда мешавад, ки дар ин ҷо $c_2(x), c_4(y)$ *– функсияҳои ихтиёрӣ мебошанд.*

Теоремаи 12. *Бигузор, дар муодилаи (37)* $A > 0, B > 0$ *ва функсияи* $f(t,s) \in C(R)$ *бошад. Он гоҳ ҳалли ягонаи муодилаи интегро-дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусии таназзулёбанда бо ядрои барзиёд сингулярии* (37) *аз синфи* $C^2(R)$ *ба воситаи формулаи*

$$u(x,y) = \int_b^y \cos\sqrt{B}\left(\mu_\beta(y) - \mu_\beta(s)\right) \int_a^x \cos\sqrt{A}\big(\mu_\alpha(x) - \mu_\alpha(t)\big) f(t,s) d\big(\mu_\alpha(t)\big) d\left(\mu_\beta(s)\right)$$

ифода карда мешавад.

Теоремаи 13. *Бигузор, дар муодилаи* (37) $A < 0, B > 0$ *бошад. Функсияи* $f(t,s)$ *ҳангоми* $t \to a$ *ба сифр майл намуда, рафтораш аз рӯйи формулаи ассимптотикии*

$$f(t,s) = o\left[e^{\delta_1 \mu_\alpha(t)} f_1(s)\right], \delta_1 > \nu_2, \text{ҳангоми } t \to a$$

муайян карда шавад. Он гоҳ ҳалли умумии муодилаи интегро-дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусии таназзулёбанда бо ядрои барзиёд сингулярии (37) *аз синфи* $C^2(R)$ *ба воситаи формулаи*

$$u(x,y) = -e^{\nu_2 \mu_\alpha(x)} \int_b^y \cos\sqrt{B}\left(\mu_\beta(y) - \mu_\beta(s)\right) c_4\big(\mu_\beta(s)\big) d\left(\mu_\beta(s)\right) +$$

$$+\frac{1}{\nu_2 - \nu_1} \int_b^y \cos\sqrt{B}\left(\mu_\beta(y) - \mu_\beta(s)\right) \times$$

$$\times \int_a^x \left[\nu_1 e^{\nu_1(\mu_\alpha(x) - \mu_\alpha(t))} - \nu_2 e^{\nu_2(\mu_\alpha(x) - \mu_\alpha(t))}\right] f(t,s) d\big(\mu_\alpha(t)\big) d\left(\mu_\beta(s)\right)$$

ифода карда мешавад.

Бигузор дар (37) $A > 0, B < 0$ бошад, он гоҳ

$$\lambda_1 = -\sqrt{-B} < 0, \ \lambda_2 = \sqrt{-B} > 0, \ \nu_1 = -\sqrt{A}i, \ \nu_2 = \sqrt{A}i$$

мешавад. Дар ин ҳолат ҳалли умумии системаи муодилаҳои интегро-дифференсиалии ғайриякҷинсаи (38) намуди:

$$V(t,s) = e^{\lambda_2 s} c_2(t) - \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \int_{-\infty}^s \left[\lambda_1 e^{\lambda_1(s-\upsilon)} - \lambda_2 e^{\lambda_2(s-\upsilon)}\right] W(t,\upsilon) d\upsilon, \tag{39}$$

$$W(t,s) = -\int_{-\infty}^{t} \cos\sqrt{B}(t-\tau)\,F(\tau,s)d\tau, \qquad (40)$$

-ро мегирад.

Аз (40) қимати $W(t,s)$-ро ба (39) гузошта, ҳалли муодилаи интегро-дифференсиалии дученакаи (37)-ро дар намуди зерин ҳосил мекунем:

$$V(t,s) = e^{\lambda_2 s}c_2(t) +$$
$$+\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\int_{-\infty}^{s}\left[\lambda_1 e^{\lambda_1(s-v)} - \lambda_2 e^{\lambda_2(s-v)}\right]\int_{-\infty}^{t}\cos\sqrt{B}(t-\tau)\,F(\tau,v)d\tau dv. \qquad (41)$$

Дар (41) ба тағйирёбандаҳои аввала бармегардем:

$$u(x,y) = e^{\lambda_2\mu_\beta(y)}c_2\big(\mu_\alpha(x)\big) +$$
$$+\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\int_{b}^{y}\left[\lambda_1 e^{\lambda_1\left(\mu_\beta(y)-\mu_\beta(s)\right)} - \lambda_2 e^{\lambda_2\left(\mu_\beta(y)-\mu_\beta(s)\right)}\right]\times$$
$$\times\int_{a}^{x}\cos\sqrt{B}\big(\mu_\alpha(x)-\mu_\alpha(t)\big)\,f(t,s)\frac{dt}{(t-a)^\alpha}\frac{ds}{(s-b)^\beta}$$

ё ин ки

$$u(x,y) = e^{\lambda_2\mu_\beta(y)}c_2\big(\mu_\alpha(x)\big) +$$
$$+\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\int_{b}^{y}\left[\lambda_1 e^{\lambda_1\left(\mu_\beta(y)-\mu_\beta(s)\right)} - \lambda_2 e^{\lambda_2\left(\mu_\beta(y)-\mu_\beta(s)\right)}\right]\times$$
$$\times\int_{a}^{x}\cos\sqrt{B}\big(\mu_\alpha(x)-\mu_\alpha(t)\big)\,f(t,s)d\big(\mu_\alpha(t)\big)d\left(\mu_\beta(s)\right). \qquad (42)$$

Азбаски, дар (42) $\lambda_2 > 0$ аст, пас аз функсияи $f(t,s)$ талаб менамоем, ки ҳангоми $s \to b$ ба сифр майл намуда, рафторашон аз рӯйи формулаҳои ассимптотикии зерин муайян карда шавад:

$$f(t,s) = o\left[e^{\delta_1\mu_\beta(s)}f_1(t)\right], \delta_1 > \lambda_2, \text{ ҳангоми } s \to b. \qquad (43)$$

Бо иҷро шудани шарти (43) интегралҳои тарафи рости баробарии (42) наздикшаванда мешавад ва ҳалли умумии муодилаи (37) ба воситаи формулаи (42) ифода карда мешавад.

Ҳамин тавр, теоремаи зерин ҷой дорад.

Теоремаи 14. «*Бигузор, дар муодилаи* (37) $A > 0, B < 0$ *бошад. Функсияи* $f(t,s)$ *ҳангоми* $s \to b$ *ба сифр майл намуда,* *рафтораш аз рӯйи формулаи ассимптотикии* (43) *муайян карда шавад. Он гоҳ ҳалли умумии муодилаи интегро-дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусии таназзулёбанда бо ядрои барзиёдсингулярии* (37) *аз синфи* $C^2(R)$ *ба воситаи формулаи* (42) *ифода карда мешавад»[4-М].*

ХУЛОСАҲО

Натиҷаҳои асосии илмии диссертатсия

Натиҷаҳои илмии бадастовардашуда нав буда, аз тарафи муаллиф мустақилона ба даст оварда шудааст ва аз инҳо иборат мебошанд:

- Ҳалли умумии муодилаи таназзулёбандаи тартиби якум дар ҳолати модели ва ғайримоделӣ ёфта шудааст.
- Ҳалли умумии муодилаи моделии таназзулёбандаи тартиби дуюм дар се ҳолати решаҳои муодилаи характеристикӣ ёфта шудааст.
- Ҳалли умумии муодилаи ғайримоделии таназзулёбандаи тартиби дуюм дар се ҳолати решаҳои муодилаи характеристикӣ ба воситаи резолвентаи муодилаи интегралии намуди Волтерраи мувофиқоянда ёфта шудааст [1-М], [2-М], [7-М];
- Ҳалли умумии муодилаи якҷинсаи таназзулёбандаи тартиби олӣ дар панҷ ҳолати решаҳои муодилаи характеристикӣ дар намуди ошкор ёфта шудааст [1-М], [4-М], [9-М];
- Барои муодилаи ғайриякҷинсаи таназзулёбандаи тартиби олӣ дар панҷ ҳолати решаҳои муодилаи характеристикӣ функсияи Коши сохта шудааст [8-М], [9-М], [10-М];
- Хосиятҳои ҳалҳои муодилаи дифференсиалии таназзулёбандаи тартиби дуюм омӯхта шуда, рафтори ҳал дар атрофи нуқтаи махсуси муодила муайян карда шудааст;
- Барои муодилаи дифференсиалии таназзулёбандаи тартиби дуюм масъалаи навъи Коши гузошта шуда, таҳқиқ карда шудааст; [4-М], [5-М]
- Муодилаи интегро-дифференсиалии дученакаи тартиби дуюм бо ядрои сингулярӣ бо роҳи ба муодилаи дифференсиали бо коэффисиентҳои доимӣ овардан таҳқиқ гардида, ҳалаш дар намуди ошкор навишта шудааст.

Тавсияҳо оид ба истифодаи амалии натиҷаҳо

Дар диссертатсия натиҷаҳои илмӣ бо хислати назариявӣ ба даст оварда шудаанд. Усули пешниҳоднамудаи муаллиф барои ҳалли муодилаҳои дифференсиалии таназзулёбанда имкон медиҳад, ки як қатор муодилаҳои дифференсиалии дорои хосиятҳои хоси таназзулёбанда мавриди омӯзиши амиқ қарор гиранд. Ҳамчунин, бо истифода аз ин усул имкон фароҳам меояд, ки синфҳои муайяни муодилаҳои интегралӣ таҳқиқ гардида ҳалашон дар намуди ошкор ба даст оварда шавад

Методҳои дар диссертатсия татбиқгардидаро, барои таҳқиқи муодилаҳои интегро-дифференсиалӣ бо коэффисиентҳои сингулярӣ ва барзиёд-сингулярӣ татбиқ намудан мумкини аст.

Натиҷаҳои илмии бадастовардашуда метавонад ҳамчун манбаи муҳими илмӣ-методӣ барои донишҷӯёни курсҳои болоӣ, магистрон ва докторантони ихтисосҳои математика, математикаи амалӣ ва механика ҳангоми омӯзиши курсҳои махсус истифода гардад.

Инчунин, барои муҳақиқони ҷавон ҳангоми иҷрои корҳои илмӣ-тадқиқотӣ ва навиштани диссертатсияҳои илмӣ натиҷаҳои дар диссертатсия ҳосилгардида метавонад истифода гардад.

ФЕҲРИСТИ ИНТИШОРОТИ МУАЛЛИФ ДОИР БА МАВЗУИ ДИССЕРТАТСИЯ

I. Мақолаҳое, ки дар нашрияҳои тақризшавандаи Комиссияи олии аттестатсионии назди Президенти Ҷумҳурии Тоҷикистон ба табъ расидаанд:

[1-М] **Мирзоев Дж.А.** Исследование одного линейного дифференциального уравнения третьего порядка [Текст] / Дж.А.Мирзоев // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. – Душанбе, 2018. - №3. – С. 39-46.

[2-М] **Мирзоев Дж.А.** Исследование модельного дифференциального уравнения четвертого порядка [Текст] / Р.Мустафокулов, Дж.А.Мирзоев // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. – Душанбе, 2019. - №1. – С. 5-13.

[3-М] **Мирзоев Дж.А.** Исследование немодельного уравнения типа Эйлера четвертого порядка [Текст] / Р.Мустафокулов, Дж.А.Мирзоев // Доклады академии наук республики Таджикистан. Том 63. – Душанбе, 2020. - №1-2. – С. 15-23.

[4-М] **Мирзоев Дж.А.** Об одном классе немодельных двумерных интегро-дифференциальных уравнений со сверхсингулярным ядром [Текст] / С.К.Зарифзода, Дж.А.Мирзоев // Вестник

филиала МГУ имени М.В.Ломоносова в г.Душанбе. Том 1. – Душанбе, 2024. - №4(43). – С. 5-13.

[5-М] **Мирзоев Дж.А.** Исследование одного класса двумерных интегро-дифференциальных уравнений со сверхсингулярным ядром[Текст] / С.К.Зарифзода, Дж.А.Мирзоев // Известия национальной академии наук республики Таджикистан. Душанбе, 2025. - №2 (199). – С. 19-29.

II. Мақолаҳое, ки дар дигар нашрияҳо ба табъ расидаанд:

[6-М] **Мирзоев Дж.А.** О разрешимости многообразия решений одного класса линейных дифференциальных уравнений типа Эйлера, когда характеристическое уранение имеет комплексно-сопряженные корни [Текст] / Р.Мустафокулов, Дж.А.Мирзоев //Материалы научно практической конференции «VII-е Ломоносовские чтения» филиала МГУ имени М.В.Ломоносова в г. Душанбе, 28-29 апреля 2017г. - С. 20-24.

[7-М] **Мирзоев Дж.А.** Об одном линейном дифференциальном уравнении типа Эйлера 4-го порядка [Текст] / Р.Мустафокулов, Дж.А.Мирзоев // Современные методы теории краевых задач. Материалы международной конференции Воронежской весенной математической школы «Понтрягинские чтения XXVIII», г. - Воронеж 3-9 мая 2017г. - С. 120-122.

[8-М] **Мирзоев Дж.А.** Линейное однородное уравнение типа Эйлера 4-го порядка [Текст] / Р.Мустафокулов, Дж.А.Мирзоев // Материалы Международной конференции посвящение 90-летию академика АН Республика Таджикистан, лауреата государственной премии имени Абуали Ибн Сина, Михайлова Леонида Григорьевича – Душанбе, - 2018. - С. 108-110.

[9-М] **Мирзоев Дж.А.** Интегральное представление решений линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами [Текст] / Р.Мустафокулов, Дж.А.Мирзоев // Материалы международной научно-теоритической конференции, посвященной 70-летию образования ТНУ и 80-летию академика АНРТ, д.ф.-м.н профессора Раджабова Нусрата – Душанбе, 2018. – С. 97-105.

[10-М] **Мирзоев Дж.А.** Об одном линейном однородном уравнении типа Эйлера третьего порядка [Текст] / Р.Мустафокулов, Дж.А.Мирзоев // Материалы республиканской научно-теоритической конференции, профессорско–преподавательского состава и сотрудников ТНУ, посвященно международному 10-ю действия «Вода для устойчивого развития, 2018-2028 годы» и 70-й годовщине со дня создания ТНУ. – Душанбе, 2018. - С. 22.

[11-М] **Мирзоев Дж.А.** Об одном линейном уравнении типа Эйлера 4-го порядка [Текст] / Р.Мустафокулов, Дж.А.Мирзоев // Современные проблемы и приложения алгебры теории чисел и математическокого анализа «Институт математики имени А.Джураева» - Академия наук республики Таджикистан - Душанбе 2019. - С. 157-160.

[12-М] **Мирзоев Дж.А.** Исследование обобщенного уравнения Эйлера [Текст] / С.К. Зарифзода, Дж.А Мирзоев // Материалы международной конференции «Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений» посвящённая 70-летию со дня рождения академика АН Республики Таджикистан, доктора физико-математических наук, профессора Бойматова Камолиддина Хамроевича. – Душанбе, 2020. – С. 130-132.

[13-М] **Мирзоев Дж.А.** Построение основ операционного метода для исследования особых операторно-дифференциальных уравнений [Текст] / С.К. Зарифзода, Дж.А Мирзоев // Материалы международной научно-практической конференции «Современные проблемы математики и её приложения» , 2020-2040 годы. Душанбе, 20-21 октября 2022. – С. 42-45.

[14-М] **Мирзоев Дж.А.** Исследование одного класса сопряжённого одномерного интегро-дифференциального уравнения типа сложной свёртки [Текст] / С.К. Зарифзода, Дж.А Мирзоев // Материалы республиканской научно-практической конференции «Актуальные проблемы развития естественных, точных и математических наук в современных условиях». – Душанбе, 2022.

ТАДЖИКСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УДК 517.923; 517.926.4 На правах рукописи

МИРЗОЗОДА ДЖУНАЙДУЛЛОХ АБДУЛЛО

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ЭЙЛЕРА И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ ПРИ РЕШЕНИИ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.3. Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Душанбе – 2026

Диссертация выполнена на кафедре функционального анализа и дифференциальных уравнений и кафедре высшей математики факультета механики и математики Таджикского национального университета.

Научные руководители::	**Мустафокулов Раҳмонқул** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений факультета механики и математики Таджикского национального университета. **Зарифзода Сарвар Қаҳрамон** – доктор физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики факультета механики математики Таджикского национального университета.
Официальные оппоненты::	**Шамсудинов Файзулло Мамадуллоевич** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений Бохтарского государственного университета имени Н. Хусрава. **Саидов Бахтиёр Бобокалонович** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Таджикский государственный университет коммерции.
Ведущая организация:	Институт математики имени академика А. Джураева Национальной академии наук Таджикистана

Зашита состоится 17 июля 2026 года в 9:00 ч. на заседании диссертационного совета 6D.КОА-011 при Таджикском национальном университете по адресу: 734027, г. Душанбе, ул. Буни Хисорак, факультет механики и математики, корпус 17, аудитория 203.

E-mail: alisher_gaforov@mail.ru; номер мобильного телефона учёного секретаря: (+992) 900-76-66-03.

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной научной библиотеке Таджикского национального университета или на сайте *http://www.tnu.tj.*

Автореферат разослан «____» «_____________» 2026 года.

Учёный секретарь
диссертационного совета, кандидат
физико-математических наук, дотсент **Гафоров А.Б.**

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. Во второй половине XIX века наблюдается активное развитие теории дифференциальных уравнений. В то время основное внимание уделялось изучению дифференциальных уравнений с особыми или сингулярными коэффициентами. Этот класс уравнений позже получил название «уравнения класса Фукса» в честь великого немецкого ученого И.Л. Фукса.

Фундаментальные результаты в этой области были достигнуты в работах Л. Эйлера, К.Ф. Гаусса, Б. Римана, А. Пуанкаре, И.Л. Фукса, Ф. Клейна, Ф.Г. Фробениуса и других.

Позже внимание ученых было сосредоточено на изучении дифференциальных уравнений в частных производных, коэффициенты которых имели особые точки. Одним из наиболее известных уравнений в этой области является уравнение Эйлера-Пуассона-Дарбу, исследованию которого посвящены работы многих ученых, таких как R.W. Carroll, J.B. Diaz, R.P. Gilbert, A.A. Kilbas, E.L. Shishkina, А.В. Глушак, Х.Ш. Джураев, Н. Раджабов, М.С. Салохиддинов, С.А. Саторов и других.

Фундаментальные научные результаты по решению дифференциальных уравнений эллиптического типа с вырождающимися коэффициентами были достигнуты в работах ученых К.Х. Бойматова, Н.А. Вирченко, М.И. Вишикас, О.А. Вихрево, В.Н. Врагова, А.Д. Джураева, В.М. Ивакина, С.А. Исхокова, Н.Б. Келдыша, И.А. Киприянова, Л.Д. Кудрявцева, П.И. Лизоркина, Е.И. Моисеева Л.Г. Михайлов, А. Мухсинова, С.М. Никольского, Л.С. Пулкиной, Н. Раджабова, О.А. Репина, К.Б. Сабитова, М.С. Салохиддинова, С.А. Саторова, М.М. Смирнова, А.К. Уринова, З.Д. Усмонова.

Степень разработанности темы исследуемой проблемы. К дифференциальным уравнениям класса Фукса относятся такие дифференциальные уравнения, у которых все коэффициенты обладают регулярными особенными точками, и эти уравнения имеют решения, чьи особенные точки также являются регулярными особенными точками. Этот класс уравнений впервые появился в работах Л. Эйлера, К.Ф. Гаусса, Б. Римана. В дальнейшем их углубленное изучение было проведено И.Л. Фуксом [4], что привело к присвоению этим уравнениям названия «дифференциальные уравнения класса Фукса».

В исследованиях И. Л. Фукса, выполненных в 1865 году, были получены условия, полностью характеризующие дифференциальные уравнения класса Фукса.

Пусть линейное дифференциальное уравнение второго порядка задано следующим образом:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=0 \qquad (0.1)$$

и точка $x=0$ является регулярной особой точкой для коэффициентов $p(x)$ и $q(x)$, причём $p(x)$ имеет полюс не выше первого порядка, а $q(x)$ — полюс не выше второго порядка, то уравнение вида:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+xP(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y=0,$$

или

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{P(x)}{x}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{Q(x)}{x^2}y=0$$

называется *дифференциальным уравнением класса Фукса*.

Напомним, что особенная точка уравнения (0.1) *называется регулярной особенной точкой,* если выполняется следующее условие:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to x_0}(x-x_0)p(x)-\text{ограниченный},\\ \lim\limits_{x\to x_0}(x-x_0)^2q(x)-\text{ограниченный}.\end{cases} \qquad (0.2)$$

Особенная точка уравнения (0.1) *называется сингулярной или иррегулярной*, если выполняются следующие условия:

$$\lim_{x\to x_0}(x-x_0)p(x)-\text{неограничено},$$

и

$$\lim_{x\to x_0}(x-x_0)^2q(x)-\text{неограничено},$$

как указано в источнике.

В литературе дифференциальные уравнения класса Фукса с множеством особенных точек были детально исследованы. Например, было рассмотрено уравнение:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{P(x)}{\prod_{k=1}^{n}(x-a_k)}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{Q(x)}{\prod_{k=1}^{n}(x-a_k)^2}y=0,$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ − многочлены.

«Если в уравнении класса Фукса количество особых точек равно 1, то такое уравнение с помощью преобразования сводится к дифференциальному уравнению второго порядка вида $y'' = 0$, которое не требует специального внимания»[1, 2].

Если уравнение имеет две особенные точки a_1 и a_2, то после определённых преобразований оно сводится к уравнению вида Эйлера:

$$y'' + \frac{A_1}{x} \cdot y' + \frac{B_1}{(a_2 - a_1)^2} \cdot \frac{y}{x^2} = 0.$$

Если количество особых точек уравнения равно 3, то такое уравнение с помощью соответствующих преобразований сводится к гипергеометрическому уравнению Гаусса, которое не разрешима в квадратура. Для нахождения решений таких уравнений в большинстве литературных источников, таких как R.W. Carroll [3], L. Fuchs [4] используются гипергеометрические ряды.

Следующий этап, как с точки зрения сложности составления, так и с точки зрения методики исследования дифференциальных уравнений класса Фукса, состоится в изучении уравнений с сингулярными или иррегулярными особыми коэффициентами.

В этот класс уравнений входит уравнение следующего вида:

$$[\omega(x)]^2 y'' + a_1[\omega(x)]y' + a_2 y = f(x), \qquad (0.3)$$

где $a_1, a_2 -$ постоянные коэффициенты, $f(x) -$ заданная непрерывная функция на интервале $\Gamma = \{x: 0 < x < \infty\}$, а $\omega(x) -$ функция, которая в какой ни будь точке интервала Г имеет ноль степени, превышающую один.

«Если в данном уравнении принять $\omega(x) = x$, то полученное уравнение, как известно, сводится к классическому уравнению Эйлера»[1].

«Если $\omega(x) = (x - a)^\alpha$, то условие (0.2) для коэффициентов уравнения (0.3) не выполняется. Следовательно, уравнение (0.3) является дифференциальным уравнением с иррегулярной особой точкой в точке $x = a$»[2].

Оказывается, для широкого исследования уравнения (0.3), постановка и исследование соответствующей модельной задачи являются важными. Такой подход к исследованию дифференциальных уравнений с особыми коэффициентами широко используется в научных работах Н. Раджабова [6, 7] и его учеников Л.Н. Раджабова [8], Г.М. Кадиров [9], Ф.М. Шамсудинов [10], М.Я. Дадоджонова [13], А.Г. Олимов [14], В.В. Шевчук [15], С.К. Зарифзода [16, 17].

Например, в работе «Н. Раджабова исследовалось уравнение вида (0.3), построенное с использованием дифференциального оператора $D_x^\alpha = (x-a)^\alpha \frac{d}{dx}$» [6]. В дальнейшем, в работах Н.Раджабова и Г.М.Кодирова изучались модельные уравнения второго и третьего порядка того же вида (0.3), также сформированные с помощью оператора D_x^α »[6-9]. Кроме того, отдельные случаи уравнений произвольного порядка n рассматривались в работах М.М. Маламуд [18] и Н. Раҷабова [7].

В этих исследованиях, на основе изучения свойств дифференциального оператора D_x^α , рассматриваемое уравнение решается с использованием метода вариации произвольных постоянных.

«В отличие от этого, в данной научной диссертации уравнение вида (0.3) исследуется с помощью метода преобразования его в обычное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами.

Кроме того, уравнение более высокого порядка, соответствующее (0.3), также изучается, и его решение выражается через элементарные функции» [1-А]-[3-А].

Известно, что при изучении уравнений вида (0.3) важной задачей является правильная постановка и изучение соответствующего модельного уравнения. Если модельное уравнение будет правильно сформулировано, то нахождение решений исследуемого уравнения в явном виде станет возможным. Это является одним из основных методов для изучения немодельных уравнений.

«Такой метод исследования дифференциальных уравнений с сингулярными и сверхсингулярными коэффициентами широко распространен в работах Н. Раджабова и его учеников Г.М. Кадиров Л.Н. Раджабова S.K. Zarifzoda» [6-9], [16, 17].

«Некоторые результаты о нахождении общего решения дифференциальных уравнений второго порядка с двумя особыми точками были получены в работах С.К. Зарифзода»[16]. «В последующих работах им также была исследована широкая класс интегро-дифференциальных уравнений с различными особыми ядрами» [17].

В работах Р. Мустафоқулова [11, 12] исследовались уравнения вида (0.3) различных порядков. В этих работах были определены необходимые и достаточные условия приводимости уравнения (0.3) к дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. Эти результаты позже были продолжены для уравнений более высокого порядка [12].

В работах автора были получены некоторые результаты по разрешимости одного класса дифференциального уравнения вида Эйлера. Эти результаты были опубликованы в статьях [1-А], [2-А], [3-А], [4-А], [5-А], [6-А], [7-А], [8-А], [9-А], [10-А], [11-А], [12-А], [13-А], [14-А].

Анализ результатов, близких к теме данной диссертации, показывает, что выбранная тема и объект исследования являются важными и актуальными.

Связь работы с программами (проектами) и научными темами. Данное научное исследование реализуется в рамках выполнения плана перспективных научно-исследовательских работ кафедр высшей математики, функционального анализа и дифференциальных уравнений, а также кафедры вычислительной математики и механики механико-математического факультета Таджикского национального университета на 2015-2020 и 2020-2025 годы по темам «Аналитические исследования, качественный анализ и численные методы решения задач прикладной математики и механики» и «Уравнения и системы дифференциальных уравнений с вырождающимися коэффициентами».

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ИССЛЕДОВАНИЯ

Цель исследования. Целью настоящей работы является разработка метода построения интегрального многообразия решений для одного класса модельных и немодельных обыкновенных дифференциальных уравнений с сингулярной особой точкой на основе приведения рассматриваемых уравнений к виду уравнения с постоянными коэффициентами.

Задачи исследования. В соответствии с поставленной целью в настоящей работе решаются следующие задачи:

- получение интегрального представления многозначного решения уравнения вида Эйлера первого порядка;
- получение интегрального представления многозначного решения уравнения вида Эйлера второго порядка;
- построение интегрального представления многозначного решения обобщённого немодельного уравнения второго порядка вида Эйлера;

- исследование вырождающегося обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами;
- исследование вырождающегося обыкновенного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами;
- построение функции Коши для вырожденного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения;
- получение интегрального представления решения одного класса двумерных интегро-дифференциальных уравнений со сверхсингулярным ядром.

Объекты исследования данной диссертационной работы:

- обобщенное уравнение вида Эйлера;
- вырождающееся модельное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами;
- вырождающееся немодельное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами;
- двумерное интегро-дифференциальное уравнение со сверхсингулярным ядром.

Тема исследования. В работе используются общие методы теории дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений, метод получения интегрального представления решения для обыкновенных дифференциальных уравнений, а также метод построения функции Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Научная новизна исследования. Настоящая диссертационная работа содержит новые результаты, полученные автором самостоятельно, которые могут быть сформулированы следующим образом:

- Получено явное решение модельного и немодельного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка типа Эйлера;
- Построено общее интегральное представление обобщённого уравнения типа Эйлера;
- Доказана теорема о приведении дифференциального уравнения с переменными коэффициентами к дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами;
- Найдено общее решение модельного уравнения типа Эйлера высшего порядка;
- Получено общее решение немодельного уравнения с использованием резольвенты интегрального уравнения типа Вольтерры;

- Построена функция Коши для неоднородного модельного уравнения высшего порядка;
- Определено общее решение двумерного интегро-дифференциального уравнения с сингулярным типом ядра.

Теоретическая и практическая ценность исследования. Исследования, проведенные в данной диссертационной работе по разрешимости некоторых классов дифференциальных уравнений с сингулярностями и интегро-дифференциальных уравнений, носят теоретический характер. Полученные научные результаты могут быть использованы для дальнейшего развития теории дифференциальных уравнений с сингулярными особенностями, для исследования дифференциальных уравнений с множеством особых точек, а также в других областях прикладных наук, таких как физика, механика и других. Материалы диссертационной работы могут быть полезны при преподавании специальных курсов для студентов старших курсов, магистрантов и докторантов вузов, обучающихся по направлениям математика, прикладная математика и механика.

Результаты, представляемые на защиту:

- Представлено доказательство теоремы, устанавливающей необходимые и достаточные условия приведения дифференциального уравнения с переменными коэффициентами к уравнению с постоянными коэффициентами;
- Приведены доказательства теорем, обеспечивающих получение явных решений неоднородного модельного уравнения типа Эйлера более высокого порядка;
- Общее решение двумерного интегро-дифференциального уравнения со сверхсингулярным ядром полученно в явном виде.

Степень достоверности результатов диссертации. Актуальность полученных в данной диссертации научных результатов обоснована с помощью точных математических вычислений и строгих доказательств, основанных на методах теории дифференциальных и интегральных уравнений. Эти результаты имеют значимость для дальнейшего изучения разрешимости дифференциальных уравнений с сингулярностями и могут быть полезны для решения теоретических и прикладных задач в различных областях науки и техники. Все основные теоремы доказаны с тщательным соблюдением необходимых и достаточных условий. Явные решения уравнений получены с помощью соответствующих преобразований, асимптотических формул и резольвент интегральных уравнений типа Вольтерра.

Соответствие диссертации с шифром специальности. Данная диссертационная работа выполнена по специальности 1.1.3. Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление и полностью соответствует ее формуле (обыкновенные дифференциальные уравнения) и трем частям области исследований:

1. Общая теория дифференциальных уравнений и системы дифференциальных уравнений;
2. Начальные и краевые задачи и спектральные проблемы для дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений;
3. Теория операционных дифференциальных уравнений.

Данную диссертацию также можно отнести к области теории действительных, комплексных и функциональных анализов (специальность 1.1.2. Теория действительных, комплексных и функциональных анализов).

Личный вклад соискателя ученой степени в исследования. Личный вклад соискателя ученой степени заключается в том, что все научные результаты, представленные на защиту, были получены им самостоятельно. Автором лично найдены формулы замены переменных, доказаны теоремы о приводимости уравнений, получены явные решения модельных и немодельных уравнений, построена функция Коши и решены интегро-дифференциальные уравнения со сверхсингулярным ядром.

В совместимых работах все математические вычисления, доказательства теорем и асимптотический анализ полностью принадлежат соискателю.

В научных работах, выполненных под руководством первого научного руководителя, проведён анализ дифференциальных уравнений типа Эйлера.

В научных работах, выполненных под руководством второго научного руководителя, ранее полученные результаты были применены при исследовании одного класса сингулярных интегро-дифференциальных уравнений.

Апробации и релизация результатов диссертации. Основные результаты диссертации были неоднократно представлены на республиканских и международных конференциях, в том числе:

- научно-практическая конференция «7-е Ломоносовские чтения» (г. Душанбе, Таджикистан, 28-29 апреля 2017 года);
- международная научно-практическая конференция «XXVIII Понтрягинские чтения» (г. Воронеж, Российская Федерация, 3-9 мая 2017 года);
- международная научно-практическая конференция «Актуальные проблемы современной математики» (Душанбе, Таджикистан, 25-26 июня 2018 года);
- международная научно-практическая конференция «Актуальные проблемы и применение теории чисел и математического анализа» (Душанбе, Таджикистан, 2019);
- международная научно-практическая конференция «Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений» (Душанбе, Таджикистан, 2020);
- международная научно-практическая конференция «Современные проблемы математики и её приложения» (Душанбе, Таджикистан, 20-21 октября 2020 года);
- международная научно-практическая конференция «Современные проблемы математики и её приложения» (Душанбе, Таджикистан, 2022);
- научно-практическая республиканская конференция на тему «Актуальные проблемы развития естественных, точных и математических наук в современных условиях» (Душанбе, Таджикистан, 2022 год);
- международная научная конференция «Современные проблемы математики и её применения» (Душанбе, Таджикистан, 2023).

Публикации по теме диссертации. Основные результаты диссертации опубликованы в 14 научных работах автора, из которых 5 статей опубликованы в рецензируемых журналах, утвержденных Высшей аттестационной комиссией при Президенте Республики Таджикистан, и 9 – в материалах конференций различного уровня. В работах, выполненных совместно со вторым автором, все вычисления и доказательства теорем полностью принадлежат автору диссертации.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, общей характеристики исследования, трех глав, заключения с основными научными результатами и рекомендациями по практическому применению результатов, списка литературы с перечнем использованных источников и списка научных публикаций соискателя ученой степени.

Общий объем диссертации составляет 152 страниц компьютерного текста, набранного с помощью текстового процессора Microsoft Word, при этом список использованной литературы включает 137 наименований.

ОСНОВНЫЕ РАЗДЕЛИ ИССЛЕДОВАНИЯ

В введении раскрыта актуальность исследуемой темы и продемонстрирована её соответствие современным научно-техническим тенденциям. Выполнен обзор литературы и научных трудов российских и иностранных авторов, посвящённых схожим вопросам. Сформулированы положения, определяющие научную новизну исследования, и обозначены ключевые результаты, подлежащие защите.

В главе **«Обзор результатов исследований дифференциальных уравнений с особыми коэффициентами»** выполнен детальный анализ научных работ других исследователей, непосредственно связанных с тематикой диссертационного исследования. В этой главе также представлены общие сведения о некоторых обыкновенных дифференциальных уравнениях с особыми коэффициентами. Кроме того, представлена необходимая информация о дифференциальных уравнениях высокого порядка.

Во второй главе диссертации рассматривается класс обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами следующего вида

$$[\omega(x)]^n y^{(n)} + a_1[\omega(x)]^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\omega(x)y' + a_n y = f(x), \tag{1}$$

где a_i $(i = \overline{1,n})$ $-$ постоянные числа, $f(x)$ $-$заданная на интервале Γ функция; $\omega(x)$ $-$ функция, обращающаяся в нуль в определённой точке этого интервала; $y = y(x)$ $-$ функция, являющаяся искомым решением уравнения.

В **разделах §2.1-§2.3** этой главы приведен метод исследования уравнение типа Эйлера простейшего вида:

$$\omega(x)y' + a_1 y = f(x)$$

в случаях $a_1 = const$ и $a_1 = a_1(x)$. Для этих случаев найдено общее решение, выраженное через произвольную постоянную [5]. Также была получена формула преобразования, которая при её применении позволяет привести рассматриваемое уравнение к дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами.

В четвёртом параграфе второй главы исследуется обобщённое уравнение типа Эйлера второго порядка с постоянными коэффициентами вида:

$$[\omega(x)]^2 y'' + a_1\omega(x)y' + a_2 y = f(x) \qquad (2)$$

где a_i $(i = 1,2)$ $-$ заданные числа, $f(x)$ $-$ непрерывная функция на Г. Доказываются необходимые и достаточные условия приводимости данного класса уравнений к дифференциальным уравнениям с постоянными коэффициентами. Указанные утверждения сформулированы и доказаны в виде теорем

Теорема 1. ***(необходимое и достаточное условие)*** *Для того чтобы дифференциальное уравнение (2) могло быть приведено к дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами, необходимо и достаточно, чтобы функция* $\omega(x)$ *имела линейный вид*

$$\omega(x) = c_2 x + c_3 \qquad (3)$$

и чтобы преобразование переменной в уравнении (2) было выполнено с помощью формулы

$$t = \mu(x) = \int \frac{dx}{\omega(x)}\,. \qquad (4)$$

«Данная теорема показывает, что уравнение (2) приводимо к дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами в том и только в том случае, если оно является уравнением Эйлера» [1-A].

«Если в уравнении (2) функция $\omega(x)$ не имеет вид (3), то данное уравнение не может быть приведено к дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами. В связи с этим вопрос о его разрешимости остаётся открытым» [12].

В дальнейшем в данном параграфе рассматривается обобщённая форма уравнения типа Эйлера с переменными коэффициентами:

$$[\omega(x)]^2 y'' + A_1(x)[\omega(x)]y' + A_2(x)y = f(x), \qquad (5)$$

и определяются такие формы коэффициентов $A_1(x)$ и $A_2(x)$ при которых уравнение (5) можно свести к дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами. В частности, если коэффициенты уравнения (5) имеют вид

$$\begin{cases} A_1(x) = a_1 + \omega'(x), \\ A_2(x) = a_2 \end{cases}$$

то с помощью замены переменной (4) уравнение (5) приводится к дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами.

$$z''(t) + a_1 z'(t) + a_2 z(t) = F(t).$$

Далее в этом параграфе, в зависимости от корней алгебраического уравнения

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0 \qquad (6)$$

получено общее решение однородного уравнения Эйлера, связанного с уравнением (5).

В параграфе 2.5 найдено общее решение обобщенного неоднородного уравнения Эйлера (5) в случаях $\omega(x) \in C[a,b]$ и $\omega(x) = (x-a)^\alpha, \alpha > 1$. Например, при $\omega(x) = (x-a)^\alpha, \alpha > 1$, доказана следующая теорема о разрешимости уравнения

$$(x-a)^{2\alpha}y'' + [a_1 + \alpha(x-a)^{\alpha-1}](x-a)^\alpha y' + a_2 y = f(x). \qquad (7)$$

Теорема 2. *Пусть в уравнении (7) коэффициенты* a_1 *и* a_2 *таковы, что корни уравнения (6) вещественно-различные, и* $\lambda_1 < \lambda_2$. *Пусть функция* $\omega(x)$ *имеет вид* $\omega(x) = (x-a)^\alpha$ *где* $\alpha > 1$. *Кроме того, пусть функция* $f(x) \in \mathrm{C}(a,b]$ *и в случае* $\lambda_2 > 0$ *стремится к нулю в точке* $x = a$ *согласно асимптотической формуле*

$$f(x) = \mathrm{o}\left[e^{\delta_1\mu(x)}\right], \delta_1 > \lambda_2, при\, x \to a.$$

Тогда уравнение (7) разрешимо в классе $\mathrm{C}^2[a,b]$, *и его общее решение задается формулой*

$$y(x) = c_1^1 e^{\lambda_1\mu(x)} + c_2^1 e^{\lambda_2\mu(x)} -$$

$$-\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\int_a^x \left[e^{\lambda_1(\mu(x)-\mu(t))} - e^{\lambda_2(\mu(x)-\mu(t))}\right] f(t)d\big(\mu(t)\big) \equiv$$

$$\equiv E_1[c_1^1, c_2^1, f(x)].$$

Параграф 2.6 посвящено исследованию немодельного уравнения

$$[\omega(x)]^2 y'' + a_1[\omega(x)]y' + a_2 y = f(x) \qquad (8)$$

в случае $\omega(x) = (x-a)^\alpha, \alpha > 1$. В этом случае нахождение явных решений уравнения (8) невозможно. Поэтому рассматриваются случаи, в которых решение дифференциального уравнения сводится к решению интегрального уравнения типа Вольтерры с регулярным ядром. В этих случаях решение обобщенного уравнения Эйлера выражается через резольвенту интегрального уравнения Вольтерры.

В первом параграфе третьей главы рассматривается вырождающееся уравнение Эйлера высшего порядка вида

$$[\omega(x)]^n y^{(n)} + a_1[\omega(x)]^{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\omega(x)y' + a_n y = f(x), \qquad (9)$$

где $a_i\ (i = \overline{1,n})$ – постоянные числа, $f(x)$ - заданная функция, а $\omega(x)$ - заданная функция в Г. В этом параграфе доказано, что если коэффициенты $a_i\ (i = \overline{1,n})$ являются постоянными числами, а функция $\omega(x)$ отличается от линейной функции, то вырождающееся уравнение (9) с такой функцией $\omega(x)$ нельзя привести к дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами.

В параграфе 3.2 данной главы рассматривается уравнение Эйлера вида:

$$[\omega(x)]^n y^{(n)} + A_1(x)[\omega(x)]^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + A_{n-1}(x)\omega(x)y' + A_n(x)y = f(x), \tag{10}$$

где $f(x),\ A_i(x)\ (i = \overline{1,n})$ – непрерывные функции в $\Gamma, \omega(x)$ может обращаться в ноль в некоторой точке $x \in \Gamma$. В этом параграфе доказана следующая теорема.

Теорема 3. *Для того чтобы уравнение (10) с помощью подстановки*

$$t = \mu(x) = \int \frac{dx}{\omega(x)} \tag{11}$$

было приведено к дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты $A_k(x)$ при $k = \overline{1,n}$ имели следующий вид:

$$A_k(x) = a_k - \sum_{i=0}^{k-1} A_i(x)[\omega(x)]^{n-i} P_{n-i}^{n-k}(x)\ (k = 1,2,\cdots,n-1), \tag{12}$$

$$A_0(x) \equiv 1, A_n(x) \equiv a_n, a_k = const.$$

Далее в разных случаях корней уравнения

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \tag{13}$$

находится общее решение уравнение (10).

«В **параграфе 3.3** решение неоднородного уравнения (10), коэффициенты которого определяются равенствами (12), приводится к решению обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, а его решение находится с использованием метода Коши. Далее, в полученных решениях осуществляется подстановка $t = \mu(x)$, в результате чего общее решение неоднородного уравнения (10) находится в явном виде»[1].

В этом параграфе, в частном случае при $\omega(x) = x^\alpha$, доказана следующая теорема о разрешимости уравнения

$$[x^\alpha]^n y^{(n)} + A_1(x)[x^\alpha]^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + A_{n-1}(x)x^\alpha y' + A_n(x)y = f(x). \tag{14}$$

Теорема 4. *Пусть в уравнении (14) коэффициенты $A_i(x)$ при $i = \overline{1,n}$ определяются равенствами (12). Пусть все корни* *характеристического уравнения (13) действительные и различны. Функция* $f(x) \in C(\bar{\Gamma})$ *и при* $\max\limits_{1\le i\le n}\lambda_i = \lambda_n > 0$ *в точке* $x = 0$ *стремится к нулю согласно асимптотической формуле*

$$f(x) = \text{o}\left[e^{\delta_1\mu(x)}\right], \delta_1 > \lambda_n, \qquad \text{при } x \to 0.$$

Тогда общее решение модельного неоднородного уравнения (14) выражается формулой

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i^1 e^{\lambda_i\mu(x)} + \sum_{i=1}^{n}\frac{W_{ni}(0)}{W(0)}\int\limits_0^x e^{\lambda_i(\mu(x)-\mu(t))} f(t)\frac{dt}{t^\alpha},$$

где $\mu(x) = -\frac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}}$, $c_i^1 (i = \overline{1,n})$ *−произвольные постоянные числа.*

Теорема 5. *«Пусть в уравнении (14) коэффициенты* $A_i(x)$ $(i = \overline{1,n})$ *определяются равенствами (12). Пусть все корни характеристического уравнения (13) действительные и совпадают. Пусть функция* $f(x) \in C(\bar{\Gamma})$ *и для* $\lambda > 0$ *при* $x \to 0$ *стремится к нулю согласно асимптотической формуле*

$$f(x) = o\left[e^{\delta_2\mu(x)}\right], \delta_2 > \lambda.$$

Тогда общее решение модельного неоднородного уравнения (14) выражается формулой

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 [\mu(x)]^{i-1} e^{\lambda\mu(x)} + \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_0^x [\mu(x)-\mu(t)]^{n-1} e^{\lambda(\mu(x)-\mu(t))} f(t)\frac{dt}{t^\alpha}$$

где $c_i^2 (i = \overline{1,n})$ *− произвольные постоянные числа»[9-А].*

Теорема 6. *Пусть в уравнении (14) коэффициенты* $A_i(x)$ $(i = \overline{1,n})$ *определяются из равенств (12). Пусть* λ_1 *является корнем характеристического уравнения (13) кратности* k, *а остальные корни* $\lambda_{k+1}, \lambda_{k+2}, \dots, \lambda_n$ *− действительные и различные, удовлетворяющие условию* $\lambda_1 < \lambda_{k+1} < \lambda_{k+2} < \dots < \lambda_n$. *Пусть функция* $f(x) \in C(\bar{\Gamma})$ *и при* $\lambda_n > 0$ *в точке* $x = 0$ *стремится к нулю согласно асимптотической формуле*

$$f(x) = \text{o}\left[e^{\delta_3\mu(x)}\right], \delta_3 > \lambda_n, \text{при } x \to 0.$$

Тогда общее решение модельного неоднородного уравнения (14) выражается формулой

$$y(x)=\sum_{i=1}^{k} c_i^3[\mu(x)]^{i-1}e^{\lambda_1\mu(x)}+\sum_{j=k+1}^{n} c_j^3 e^{\lambda_j\mu(x)}+$$

$$+\sum_{i=1}^{k}\frac{W_{ni}(0)}{W(0)}\int_0^x(\mu(x)-\mu(t))^{i-1}\,e^{\lambda_1(\mu(x)-\mu(t))}f(t)\frac{dt}{t^\alpha}$$

$$+\sum_{j=k+1}^{n}\frac{W_{nj}(0)}{W(0)}\int_0^x e^{\lambda_j(\mu(x)-\mu(t))}\,f(t)\frac{dt}{t^\alpha}$$

где $c_i^3\,(i=\overline{1,n})$ *– произвольные постоянные числа.*

Теорема 7. *Пусть коэффициенты уравнении (14) определяются с помощью равенствами (12). Кроме того, пусть* $n=2k$, *а числа* $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_k$ *удовлетворяют неравенству* $\alpha_1<\alpha_2<\dots<\alpha_k$ *. Пусть функция* $f(x)\in C(\bar{\Gamma})$ *и при* $\alpha_k>0$ *в точке* $x=0$ *стремится к нулю согласно асимптотической формуле*

$$f(x)=\mathrm{o}\left[e^{\delta_2\mu(x)}\right],\delta_4>\alpha_k,\text{при }x\to 0.$$

Тогда общее решение модельного неоднородного уравнения (14) выражается формулой

$$y(x)=\sum_{i=1}^{k} e^{\alpha_i\mu(x)}\,[c_{2i-1}^4 cos\beta_i\mu(x)+c_{2i}^4 sin\beta_i\mu(x)]+$$

$$+\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{W(0)}\cdot\int_0^x e^{\alpha_i(\mu(x)-\mu(t))}\,[W_{2i-1}(0)cos\beta_i(\mu(x)-\mu(t))+$$

$$+W_{2i}(0)sin\beta_i\big(\mu(x)-\mu(t)\big)]f(t)\frac{dt}{t^\alpha},$$

где $c_i^4\big(i=\overline{1{,}2k}\big)$ *– произвольные постоянные числа.*

В **четвёртой главе** диссертации представлены некоторые приложения результатов, полученных в предыдущих главах.

В первом параграфе данного раздела исследуются свойства решений модельного дифференциального уравнения второго порядка вырождающегося вида

$$[\omega(x)]^2y''+[a_1+\omega'(x)]\omega(x)y'+a_2y=f(x), \qquad (15)$$

где $f(x)$ – заданная непрерывная функция на Γ, а $\omega(x)=(x-a)^\alpha$. Также изучается поведение этих решений в окрестности особой точки уравнения.

Действительно, на основе результатов параграфов 4 и 5 главы 2, в зависимости от корней характеристического уравнения

$$\lambda^2+a_1\lambda+a_2=0 \qquad (16)$$

решения уравнения (15) принимают следующие виды:

1. В случае, когда корни характеристического уравнения (16) действительные и различные:

$$y_1(x) = c_1^1 e^{\lambda_1\mu(x)} + c_2^1 e^{\lambda_2\mu(x)} - \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\int\limits_a^x \left[e^{\lambda_1(\mu(x)-\mu(t))} - \right.$$

$$\left. -e^{\lambda_2(\mu(x)-\mu(t))}\right] f(t)d\big(\mu(t)\big) \equiv E_1[c_1^1, c_2^1, f(x)], \qquad (17)$$

где $\mu(x) = -\frac{1}{(\alpha-1)(x-a)^{\alpha-1}}$.

2. В случае, когда корни характеристического уравнения (16) действительные и совпадающие:

$$y_2(x) = c_1^2 e^{\lambda\mu(x)} + c_2^2 \mu(x) e^{\lambda\mu(x)}$$

$$+ \int\limits_a^x e^{\lambda(\mu(x)-\mu(t))}\big(\mu(x) - \mu(t)\big) f(t) d(\mu(t)) \equiv$$

$$\equiv E_2[c_1^2, c_2^2, f(x)]. \quad (18)$$

3. В случае, когда корни характеристического уравнения (16) являются сопряжёнными комплексными числами:

$$y_3(x) = e^{\alpha_1\mu(x)}\cos[\beta_1\mu(x)]c_1^3 + e^{\alpha_1\mu(x)}\sin[\beta_1\mu(x)]c_2^3 +$$

$$+\frac{1}{\beta_1}\int\limits_a^x e^{\alpha_1(\mu(x)-\mu(t))}\sin\big[\beta_1\big(\mu(x) - \mu(t)\big)\big] f(t) d\big(\mu(t)\big) \equiv$$

$$\equiv E_3[c_1^3, c_2^3, f(x)]. \ (19)$$

Рассматриваются свойства решений (17)–(19).

1$^{\mathbf{0}}$. Пусть корни характеристического уравнения (16) удовлетворяют неравенству $\lambda_2 > \lambda_1$

Замечание 1. «Решение вида (17) при $\lambda_1 > 0$ в точке $x = a$ стремится к нулю, и его поведение определяется асимптотической формулой:

$$y_1(x) = o\big[e^{\lambda_1\mu(x)}\big], \text{ при } x \to a. \qquad (20)$$

В случае $\lambda_1 < 0$ решение вида (17) в точке $x = a$ стремится к бесконечности, и его асимптотика имеет вид:» [4-М]:

$$y_1(x) = O\big[e^{-|\lambda_1|\mu(x)}\big], \text{ при } x \to a. \qquad (21)$$

Введём следующие обозначения:

$$P_{\lambda_1}[y_1(x)] = e^{-\lambda_1\mu(x)}\, y_1(x),$$

$$P_{\lambda_1\lambda_2}[y'_1(x)] = e^{-(\lambda_2-\lambda_1)\mu(x)}(x-a)^{\alpha}\frac{d}{dx}\big[e^{-\lambda_1\mu(x)} y_1(x)\big]. \quad (22)$$

Замечание 2. Решение вида (17) имеет следующее свойства:

$$\left[P_{\lambda_1}[y_1(x)]\right]\Big|_{x=a} = c_1^1,\ \left[P_{\lambda_1\lambda_2}[y_1'(x)]\right]\Big|_{x=a} = (\lambda_2-\lambda_1)\cdot c_2^1. \quad (23)$$

2^0. Пусть корни характеристического уравнения (16) являются вещественными и кратными, то есть $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$..

Замечание 3. «Решение вида (18) при $\lambda > 0$, в точке $x = a$ стремится к нулю, и его поведение определяется по следующей асимптотической формуле» [4-М]:

$$y_2(x) = o\left[e^{\lambda\mu(x)}\cdot\mu(x)\right], \qquad \text{при } x \to a. \quad (24)$$

Действительно, так как решение вида (18) можно записать в виде:

$$y_2(x) = e^{\lambda\mu(x)}\cdot\mu(x)\left[\frac{c_1^2}{\mu(x)} + c_2^2 + \int_a^x e^{-\lambda\mu(t)}\left(1-\frac{\mu(t)}{\mu(x)}\right)f(t)d(\mu(t))\right].$$

Поскольку при $x \to a$ квадратная скобка стремится к нулю, а выражение перед скобкой является бесконечно малым, то отсюда следует, что решение $y_2(x)$ представимо в виде асимптотической формулы (24).

Замечание 4. «Решение вида (18) при $\lambda < 0$ в точке $x = a$ неограниченно возрастает, а его поведение определяется следующей асимптотической формулой» [4-М]:

$$y_2(x) = O\left[e^{-|\lambda|\mu(x)}\cdot\mu(x)\right], \text{ при } x \to a. \quad (25)$$

Введём следующие обозначения:

$$P_\lambda^1[y_2(x)] = e^{-\lambda\mu(x)}\cdot\mu^{-1}(x)y_2(x),$$
$$P_\lambda^2[y_2'(x)] = \mu^2(x)(x-a)^2\frac{d}{dx}\left[e^{-\lambda\mu(x)}\cdot\mu^{-1}(x)y_2(x)\right]. \quad (26)$$

Замечание 5. Решение вида (18) обладает следующими свойствами:

$$\left[P_\lambda^1[y_2(x)]\right]\Big|_{x=a} = c_1^2,\ \left[P_\lambda^2[y_2'(x)]\right]\Big|_{x=a} = -c_2^2. \quad (27)$$

3^0. Пусть корни характеристического уравнения (16) являются комплексно-сопряжёнными числами и $\lambda_{1,2} = \alpha_1 \pm i\beta_1$. Предположим, что действительная часть этих корней положительна, то есть $\mathrm{Re}(\lambda_{1,2}) = \alpha_1 > 0$. Тогда решение вида (19) можно представить в виде

$$y_3(x) = e^{\alpha_1\mu(x)}\left[cos(\beta_1\mu(x))c_1^3 + sin(\beta_1\mu(x))c_2^3\right] +$$
$$+\frac{1}{\beta_1}\int_a^x e^{-\alpha_1\mu(t)}sin\left[\beta_1(\mu(x)-\mu(t))\right]f(t)d(\mu(t)) \equiv e^{\alpha_1\mu(x)}W(x). \quad (28)$$

Нетрудно видеть, что при $x \to a$ функция $W(x)$ стремится к некоторой постоянной. В связи с этим справедливо следующее замечание:

Замечание 6. «Решение вида (19) при $\alpha_1 > 0$ стремится к нулю в точке $x = a$, а его поведение определяется следующей асимптотической формулой» [4-М]:

$$y_3(x) = o\left[e^{\alpha_1 \mu(x)}\right], \text{ при } x \to a.$$

Замечание 7. «Решение вида (19) при $\alpha_1 < 0$ в точке $x = a$ стремится к бесконечности, а его поведение определяется следующей асимптотической формулой»[4-М]:

$$y_3(x) = O\left[e^{-|\alpha_1|\mu(x)} \cdot \mu(x)\right], \text{ при } x \to a.$$

Обозначим через D_x^a следующий дифференциальный оператор:

$$D_x^a = (x-a)^\alpha \frac{d}{dx}.$$

Применяя оператор D_x^a к функции (19), получаем:

$$\begin{aligned} D_x^a y_3(x) = e^{\alpha_1 \mu(x)}\big[(\alpha_1 c_1^3 + \beta_1 c_2^3)\cos\big(\beta_1 \mu(x)\big) \\ + (\alpha_1 c_2^3 - \beta_1 c_1^3)\sin\big(\beta_1 \mu(x)\big)\big] + \\ + \frac{1}{\beta_1}\int_a^x e^{\alpha_1(\mu(x)-\mu(t))}\big[\alpha_1 \sin\big[\beta_1\big(\mu(x)-\mu(t)\big)\big] + \\ + \beta_1 \cos\big[\beta_1\big(\mu(x)-\mu(t)\big)\big]\big] f(t) d\big(\mu(t)\big). \end{aligned} \qquad (29)$$

Введём следующие обозначения:

$$P_{\alpha_1}^1[y_3(x)] = e^{-\alpha_1 \mu(x)} y_3(x); \quad P_{\alpha_1}^2[y_3'(x)] = e^{-\alpha_1 \mu(x)} D_x^a y_3(x). \quad (30)$$

Имеет место следующее утверждение:

Замечание 8. Решение вида (19) обладает следующими свойствами:

$$\left[P_{\alpha_1}^1[y_3(x)]\right]\Big|_{x=a} = M_1 c_1^3 + M_2 c_2^3;$$

$$\left[P_{\alpha_1}^2[y_3'(x)]\right]\Big|_{x=a} = (M_1\alpha_1 - M_2\beta_1)c_1^3 + (M_1\beta_1 + M_2\alpha_1)c_2^3, \quad (31)$$

где

$$M_1 = \cos[\beta_1 \mu(a)], \quad M_2 = \sin[\beta_1 \mu(a)].$$

Действительно, умножая обе части равенств (19) и (29) на $e^{-\alpha_1 \mu(x)}$ и переходя в полученных равенствах к пределу при $x \to a$, получаем:

$$\lim_{x \to a} e^{-\alpha_1 \mu(x)} y_3(x) = \lim_{x \to a}\left[\cos\big(\beta_1 \mu(x)\big)c_1^3 + \sin\big(\beta_1 \mu(x)\big)c_2^3\right] +$$

$$+\frac{1}{\beta_1}\lim_{x \to a}\int_a^x e^{-\alpha_1 \mu(t)} \sin\big[\beta_1\big(\mu(x)-\mu(t)\big)\big] f(t) d(\mu(t)) = M_1 c_1^3 + M_2 c_2^3;$$

$$\lim_{x\to a} e^{-\alpha_1\mu(x)} D_x^{\beta}\, y_3(x) = \lim_{x\to a}\big[(\alpha_1 c_1^3 + \beta_1 c_2^3)\cos\big(\beta_1\mu(x)\big) +$$
$$+(\alpha_1 c_2^3 - \beta_1 c_1^3)\sin\big(\beta_1\mu(x)\big)\big]$$
$$+\frac{1}{\beta_1}\lim_{x\to a}\int\limits_a^x e^{-\alpha_1\mu(t)}\big[\alpha_1\sin\big[\beta_1\big(\mu(x)-\mu(t)\big)\big] +$$
$$+\beta_1\cos\big[\beta_1\big(\mu(x)-\mu(t)\big)\big]\big] f(t)d\big(\mu(t)\big) = (\alpha_1 c_1^3 + \beta_1 c_2^3)M_1 +$$
$$+(\alpha_1 c_2^3 - \beta_1 c_1^3)M_2 = (M_1\alpha_1 - M_2\beta_1)c_1^3 + (M_1\beta_1 + M_2\alpha_1)c_2^3.$$

Тем самым утверждение примечания 8 доказано.

Во втором параграфе четвёртой главы поставлена и исследована задача типа Коши для вырождающегося дифференциального уравнения второго порядка

$$[\omega(x)]^2 y'' + [a_1 + \omega'(x)]\omega(x)y' + a_2 y = f(x). \qquad (32)$$

Задача A_1. Пусть корни характеристического уравнения

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0 \qquad (33)$$

являются вещественными и различными. Требуется найти решение уравнения (32) из класса $C^2(\Gamma)$, удовлетворяющее следующим начальным условиям:

$$\Big[P_{\lambda_1}[y_1(x)]\Big]\Big|_{x=a} = B_1^1, \Big[P_{\lambda_1,\lambda_2}[y_1'(x)]\Big]\Big|_{x=a} = B_2^1,$$

где B_j^1 $(j = 1,2)$ – заданные постоянные, а функции $P_{\lambda_1}[y_1(x)]$, $P_{\lambda_1,\lambda_1}[y_1'(x)]$ – определяются равенствами

$$P_{\lambda_1}[y_1(x)] = e^{-\lambda_1\mu(x)}\, y_1(x),$$
$$P_{\lambda_1,\lambda_2}\big[y'_1(x)\big] = e^{-(\lambda_2-\lambda_1)\mu(x)}(x-a)^{\alpha}\frac{d}{dx}\big[e^{-\lambda_1\mu(x)}y_1(x)\big].$$

Теорема 8. *«Пусть в уравнении (32) коэффициенты* a_1 *и* a_2 *таковы, что корни характеристического уравнения (33) вещественны, различны и* $\lambda_1 < \lambda_2$. *Функция* $\omega(x)$ *в точке* a *отрезка* $[a,b]$ *имеет нуль порядка* $\alpha > 1$, *то есть* $\omega(x) = (x-a)^{\alpha}$. *Кроме того, функция* $f(x) \in C(a,b]$, *а в случае* $\lambda_2 > 0$ *в точке* $x = a$ *стремится к нулю с асимптотической формуле*

$$f(x) = o\big[e^{\delta_1\mu(x)}\big], \delta_1 > \lambda_2, \text{при}\, x \to a.$$

Тогда задача A_1 *имеет единственное решение, которое выражается формулой» [4-M], [5-M]*

$$y_1(x) = E_1\left[B_1^1, \frac{B_2^1}{\lambda_2-\lambda_1}, f(x)\right].$$

Задача A_2. Рассмотрим случай, когда корни характеристического уравнения (33) действительные и кратные (совпадающие). Требуется найти решение уравнения (32), принадлежащее классу $C^2(\Gamma)$, такое, которое удовлетворяет начальным условиям:

$$\left[P_\lambda^1[y_2(x)]\right]\Big|_{x=a} = B_1^2, \left[P_\lambda^2[y_2'(x)]\right]\Big|_{x=a} = B_2^2,$$

где B_j^2 $(j = 1{,}2) -$ заданные постоянные. Функции $P_\lambda^1[y_2(x)]$ и $P_\lambda^2[y_2'(x)]$ задаются формулами (26).

Исследование задачи A_2. «Используя интегральное представление решения (18) уравнения (32) и его свойства (27), устанавливаем связь между произвольными постоянными c_1^2, c_2^2 и заданными начальными данными B_1^2, B_2^2. В результате получаем»[4-М]:

$$c_1^2 = B_1^2; \quad c_2^2 = -B_2^2.$$

Подставляя найденные значения c_1^2, c_2^2 в выражение (18), получаем решение задачи A_2 в виде:

$$y_2(x) = E_2[B_1^2, -B_2^2, f(x)]. \tag{34}$$

Тем самым утверждение доказано.

Теорема 9. *Пусть корни характеристического уравнения (33) являются вещественными и кратными. Пусть функция $\omega(x)$ имеет вид*

$$\omega(x) = (x-a)^\alpha, \alpha > 1.$$

Кроме того, пусть $f(x) \in C[a,b]$ и при $\lambda > 0$ в точке $x = a$ стремится к нулю по асимптотической формуле

$$f(x) = o\left[\frac{e^{\delta_2 \mu(x)}}{\mu(x)}\right], \delta_2 > \lambda, \text{ при } x \to a.$$

Тогда задача A_2 имеет единственное решение, которое выражается формулой (34).

Задача A_3. Пусть корни характеристического уравнения (33) являются комплексно-сопряжёнными числами. Требуется найти решение уравнения (32) из класса $C^2(\Gamma)$, удовлетворяющее следующим начальным условиям:

$$\left[P_{\alpha_1}^1[y_3(x)]\right]\Big|_{x=a} = B_1^3, \left[P_{\alpha_1}^2[y_3'(x)]\right]\Big|_{x=a} = B_2^3,$$

где B_j^3 $(j = 1{,}2) -$ заданные постоянные, а функции

$$P_{\alpha_1}^1[y_3(x)], \ P_{\alpha_1}^2[y_3'(x)]$$

определяются равенствами (30).

Исследование задачи A_3. Используя интегральное представление решения (28) уравнения (32), а также его свойства (31), выразим произвольные постоянные c_1^3, c_2^3 через заданные постоянные B_1^3, B_2^3 посредством следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} M_1 c_1^3 + M_2 c_2^3 = B_1^3, \\ (M_1\alpha_1 - M_2\beta_1)c_1^3 + (M_1\beta_1 + M_2\alpha_1)c_2^3 = B_2^3. \end{cases} \tag{35}$$

Поскольку определитель данной системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} M_1 & M_2 \\ M_1\alpha_1 - M_2\beta_1 & M_1\beta_1 + M_2\alpha_1 \end{vmatrix} = \beta_1 \neq 0,$$

то постоянные c_1^3, c_2^3 однозначно определяются из системы (35) в виде

$$c_1^3 = \frac{\Delta_{c_1^3}}{\beta_1}, \quad c_2^3 = \frac{\Delta_{c_2^3}}{\beta_1}.$$

Подставляя найденные значения c_1^3, c_2^3 в формулу (19), получаем решение задачи А$_3$ в следующем виде:

$$y_3(x) = E_3\left[\frac{\Delta_{c_1^3}}{\beta_1}, \frac{\Delta_{c_2^3}}{\beta_1}, f(x)\right]. \tag{36}$$

Таким образом, доказано следующая теорема:

Теорема 10. *Пусть корни характеристического уравнения (33) являются комплексно-сопряжёнными числами. Функция* $\omega(x)$ *на отрезке* $[a,b]$ *имеет нуль порядка* $\alpha > 1$, *то есть* $\omega(x) = (x-a)^\alpha$, $\alpha > 1$. *Кроме того, пусть функция* $f(x) \in C[a,b]$ *и при* $\alpha_1 > 0$ *в точке* $x = a$ *стремится к нулю согласно асимптотической формуле*

$$f(x) = \mathrm{o}\left[e^{-\delta_3\mu(x)}\right], \ \delta_3 > \alpha_1, \ \text{при} \ x \to a.$$

Тогда задача A_3 *имеет единственное решение, которое выражается формулой (36).*

В третьем параграфе четвёртой главы результаты, полученные в предыдущих параграфах, используются при исследовании и решении двумерного интегро-дифференциального уравнения второго порядка со сверхсингулярными ядрами следующего вида:

$$D_x^\alpha D_y^\beta U(x,y) + \int_a^x \frac{A}{(t-a)^\alpha} D_y^\beta U(t,y)dt + \int_b^y \frac{B}{(s-b)^\beta} D_x^\alpha U(x,s)ds +$$

$$+ \int_a^x \frac{C}{(t-a)^\alpha} \int_b^y \frac{1}{(s-b)^\beta} U(t,s)dtds = f(x,y). \tag{37}$$

В данном параграфе показано, что решение этого двумерного интегро-дифференциального уравнения со сверхсингулярным ядром сводится к решению системы двух одномерных интегро-дифференциальных уравнений с регулярным ядром, но с неограниченными пределами вида

$$\begin{cases} V_s'(t,s) + B \int\limits_{-\infty}^{s} V(t,v)dv = W(t,s), \\ W_t'(t,s) + A \int\limits_{-\infty}^{t} W(\tau,s)d\tau = F(t,s) \end{cases} \tag{38}$$

Относительно разрешимости интегро-дифференциального уравнения (37) доказаны следующие утверждения:

Теорема 11. *Пусть в уравнении (37) выполняются условия* $A < 0, B < 0$. *Пусть функция* $f(t,s)$ *при* $t \to a$ *и* $s \to b$ *стремится к нулю, причём её поведение определяется асимптотической формулой*

$$f(t,s) = o\left[e^{\delta_1 \mu_\alpha(t)} e^{\delta_2 \mu_\beta(s)}\right], \delta_1 > \nu_2, \delta_2 > \lambda_2 \text{ при } t \to a, s \to b$$

а произвольная функция $c_4(s)$ *при* $s \to b$ *удовлетворяет асимптотическому соотношению*

$$c_4(s) = o\left[e^{\delta_2 \mu_\beta(s)}\right], \delta_2 > \lambda_2 \text{ при } s \to b.$$

Тогда общее решение интегро-дифференциального уравнения с вырождающимися частными производными и сверхсингулярным ядром (37) из класса $C^2(R)$ *представимо в виде*

$$u(x,y) = e^{\lambda_2 \mu_\beta(y)} c_2(x) - e^{\nu_2 \mu_\alpha(x)} \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \times$$
$$\times \int\limits_b^y \left[\lambda_1 e^{\lambda_1 \left(\mu_\beta(y) - \mu_\beta(s)\right)} - \lambda_2 e^{\lambda_2 \left(\mu_\beta(y) - \mu_\beta(s)\right)}\right] c_4(s) \frac{ds}{(s-b)^\beta} +$$
$$+ \frac{1}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\nu_2 - \nu_1)} \int\limits_b^y \left[\lambda_1 e^{\lambda_1 \left(\mu_\beta(y) - \mu_\beta(s)\right)} - \lambda_2 e^{\lambda_2 \left(\mu_\beta(y) - \mu_\beta(s)\right)}\right] \times$$
$$\times \int\limits_a^x \left[\nu_1 e^{\nu_1 \left(\mu_\alpha(x) - \mu_\alpha(t)\right)} - \nu_2 e^{\nu_2 \left(\mu_\alpha(x) - \mu_\alpha(t)\right)}\right] f(t,s) \frac{dt}{(t-a)^\alpha} \frac{ds}{(s-b)^\beta}$$

где $c_2(x), c_4(y)$ – произвольные функции.

Теорема 12. *Пусть в уравнении (37) выполняются условия* $A > 0, B > 0$, *а функция* $f(t,s) \in C(R)$. *Тогда единственное решение интегро-дифференциального уравнения с вырождающимися частными производными и сверхсингулярным ядром (37) из класса* $C^2(R)$ *представимо в виде*

$$u(x,y)=\int_b^y cos\sqrt{B}\left(\mu_\beta(y)-\mu_\beta(s)\right)\int_a^x cos\sqrt{A}\big(\mu_\alpha(x)$$
$$-\mu_\alpha(t)\big)f(t,s)d\big(\mu_\alpha(t)\big)d\left(\mu_\beta(s)\right).$$

Теорема 13. *Пусть в уравнении (37)* $A<0, B>0$ *а функция* $f(t,s)$ *при* $t\to a$ *стремится к нулю и её поведение определяется асимптотической формулой*

$$f(t,s)=o\left[e^{\delta_1\mu_\alpha(t)}f_1(s)\right], \delta_1>\nu_2, \text{при } t\to a.$$

Тогда общее решение интегро-дифференциального уравнения с вырождающимися частными производными и сверхсингулярным ядром (37) из класса $C^2(R)$ *имеет вид*

$$u(x,y)=-e^{\nu_2\mu_\alpha(x)}\int_b^y \cos\sqrt{B}\left(\mu_\beta(y)-\mu_\beta(s)\right)c_4\big(\mu_\beta(s)\big)d\left(\mu_\beta(s)\right)+$$
$$+\frac{1}{\nu_2-\nu_1}\int_b^y \cos\sqrt{B}\left(\mu_\beta(y)-\mu_\beta(s)\right)\times$$
$$\times\int_a^x\left[\nu_1e^{\nu_1(\mu_\alpha(x)-\mu_\alpha(t))}-\nu_2e^{\nu_2(\mu_\alpha(x)-\mu_\alpha(t))}\right]f(t,s)d\big(\mu_\alpha(t)\big)d\left(\mu_\beta(s)\right).$$

Пусть теперь в уравнении (37) $A>0, B<0$ тогда

$$\lambda_1=-\sqrt{-B}<0,\ \ \lambda_2=\sqrt{-B}>0,\ \ \nu_1=-\sqrt{A}i,\ \ \nu_2=\sqrt{A}i.$$

В этом случае общее решение системы неоднородных интегро-дифференциальных уравнений (38) принимает вид

$$V(t,s)=e^{\lambda_2 s}c_2(t)-\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\int_{-\infty}^{s}\left[\lambda_1e^{\lambda_1(s-v)}-\lambda_2e^{\lambda_2(s-v)}\right]W(t,v)dv, \tag{39}$$

$$W(t,s)=-\int_{-\infty}^{t}\cos\sqrt{B}(t-\tau)\,F(\tau,s)d\tau. \tag{40}$$

Подставляя значение $W(t,s)$ из (40) в формулу (39), получаем решение двумерного интегро-дифференциального уравнения (37) в виде:

$$V(t,s)=e^{\lambda_2 s}c_2(t)+$$
$$+\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\int_{-\infty}^{s}\left[\lambda_1e^{\lambda_1(s-v)}-\lambda_2e^{\lambda_2(s-v)}\right]\int_{-\infty}^{t}\cos\sqrt{B}(t-\tau)\,F(\tau,v)d\tau dv.$$

(41)

Переходя к исходным переменным (x, y), получаем выражение для решения задачи (37):

$$u(x,y) = e^{\lambda_2 \mu_\beta(y)} c_2\big(\mu_\alpha(x)\big) +$$

$$+\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \int_b^y \left[\lambda_1 e^{\lambda_1\left(\mu_\beta(y) - \mu_\beta(s)\right)} - \lambda_2 e^{\lambda_2\left(\mu_\beta(y) - \mu_\beta(s)\right)}\right] \times$$

$$\times \int_a^x \cos\sqrt{B}\big(\mu_\alpha(x) - \mu_\alpha(t)\big) f(t,s) d\big(\mu_\alpha(t)\big) d\left(\mu_\beta(s)\right). \qquad (42)$$

Поскольку в формуле (42) выполняется условие λ_2, дополнительно потребуем, чтобы функция $f(t,s)$ при $s \to b$ стремилась к нулю и её поведение определялось следующей асимптотической оценкой:

$$f(t,s) = o\left[e^{\delta_1 \mu_\beta(s)} f_1(t)\right], \delta_1 > \lambda_2, \text{ при } s \to b. \qquad (43)$$

При выполнении условия (43) интегралы в правой части равенства (42) становятся сходящимися, и общее решение уравнения (37) корректно выражается формулой (42).

Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 14. *«Пусть в уравнении (37) выполняется* $A > 0, B < 0$. *Пусть функция* $f(t,s)$ *при* $s \to b$ *удовлетворяет асимптотическому условию (43). Тогда общее решение интегро-дифференциального уравнения с вырождающимися частными производными и сверхсингулярным ядром (37) из класса* $C^2(R)$ *выражается формулой (42)» [4-М].*

ВЫВОДЫ

Основные научные результаты диссертации

Полученные научные результаты являются оригинальными, выполнены автором самостоятельно и сводятся к следующему:

- Для дифференциального уравнения первого порядка вида Эйлера в модельном случае найдено общее решение зависящих от одного произвольного постоянного;
- Для дифференциального уравнения второго порядка вида Эйлера в зависимости от корней характеристического уравнения в трёх случаях найдено общее решение зависящих от двух произвольных констант;
- Найдено общее решение немодельного дифференциального уравнения второго порядка с особым коэффициентом в

различных случаях корней характеристического уравнения с помощью резольвенты соответствующего интегрального уравнения типа Вольтерра [1-А], [2-А], [7-А];

- Найдено общее решение однородного дифференциального уравнения высшего порядка с особым коэффициентом в различных случаях корней характеристического уравнения в явном виде [1-А], [4-А], [9-А];
- Для неоднородного вырождающегося дифференциального уравнения высшего порядка в пяти случаях корней характеристического уравнения построена функция Коши [8-А], [9-А], [10-А];
- Свойства полученных решений для дифференциального уравнения второго порядка изучаются и поведение решения исследуются в окрестности особых точек;
- Для дифференциального уравнения второго порядка типа Эйлера ставится задача типа Коши в особой точки и находится единственное решение данной задачи; [4-А], [5-А]
- Двумерное интегро-дифференциальное уравнение с сингулярным ядром исследовано путём сведения к дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами, а его решение записано в явном виде.

Рекомендации по практическому использованию результатов

Результаты, полученные в диссертации, обладают значимой теоретической ценностью и могут служить основной для дальнейших исследований в области дифференциальных уравнений с особыми коэффициентами. Предложенный метод решения таких уравнений открывает возможности для анализа вырождающихся уравнений в частных производных, где традиционные подходы оказываются малоэффективными. Кроме того, разработанный метод может быть адаптирован для исследования отдельных классов интегральных и интегро-дифференциальных уравнений, содержащих особенности в коэффициентах или структуре ядре, что расширяет область его применимости в современной математикой физике и прикладных задачах.

Методы, примененные в диссертации, могут быть использованы для исследования интегро-дифференциальных уравнений с сингулярными и сверхсингулярными коэффициентами.

Полученные научные результаты могут быть использованы в качестве важного научно-методического источника для студентов старших курсов, магистрантов и докторантов математических специальностей, прикладной математики и механики при изучении специальных курсов.

Кроме того, результаты, полученные в диссертации могут быть использованы молодыми исследователями при выполнении научно-исследовательских работ и написании научных диссертаций.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. [Текст] / В.В. Степанов // 18-е издательство - М.: Физматгиз, 1959, 468с.
2. Голубев В.В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений [Текст] / В.В. Голубев // М., Л.: Гостехтеоретиздат. – 1950. – 436 с.
3. Carroll R.W. Transmutation and operator differential equations [Text] / R.W. Carroll. – Amsterdam-New York-Oxford: North. Holland. – 1979.
4. Fuchs L. Über eine Klasse von Functionen mehrerer Variabeln, welche durch Umkehrung der Integrale von Lösungen der linearen Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten entstehen [Text] / L. Fuchs // Journal für Mathematik. – 1880. – Vol. 89. – P. 151-169.
5. Искандари Дж. Исследование некоторых классов интегро-дифференциальных уравнений с правой сверх сингулярной точкой. [Текст] автореферат диссертации кандидата ф.-мат. наук: 01.01.02. — Душанбе, ТНУ, 2025. — 38 с.
6. Раджабов Н. Интегральные представления и граничные задачи для общего линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с сингулярной точкой [Текст] / Н.Раджабов // В межд. Сб. статей «Дифференциальные и интегральные уравнения». – Душанбе: Изд-во ТГУ. – Выпуск-3. – С. 43-55.
7. Раджабов Н. К теории одного класса вырождающегося обыкновенного дифференциального уравнения высших порядков [Текст] / Н.Раджабов, Г.М. Кадиров, А.С. Сатторов // Вестник Таджикского национального университета. – 2014. – №1/1(126). – С. 3-5.
8. Раджабова Л.Н. Об одном классе линейных дифференциальных уравнений третьего порядка со сверхсингулярной точкой [Текст] / Л.Н.Раджабова, Н.Раджабов // Материалы международная конференция «Дифференциальные и

интегральные уравнения. Математическая физика и специальные функции». – Самара, 1992. – С. 207-208.

9. Кадиров Г.М. Об одном обыкновенном дифференциальном уравнении четвёртого порядка, вырождающегося в левой граничной точке [Текст] / Г.М.Кадиров, Н.Раджабов // Современные проблемы математики и её преподавания. Специальный выпуск Учёные записки Худжанского госуниверситета им. академика Б. Гафурова. – 2014. – Ч. 1. – №2. – С. 172-175.

10. Шамсудинов Ф.М. Об одной переопределелённой системе дифференциальных уравнений второго порядка с сингулярной точкой [Текст] / Ф.М.Шамсудинов // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия №1, Мат.Физ. – 2014. – №5(24). – С. 46-54.

11. Мустафокулов Р. Интегральные представления решения одного линейного уравнения типа Эйлера в случае простых характеристик [Текст] / Р.Мустафокулов // Материалы междунар. конфер. «Современные методы теории краевых задач». Воронежская весеняя математическая школа «Понтрягинские чтения-XXX» (май, 2019г), г. Воронеж, – С. 211-212.

12. Мустафокулов Р. Решение немодельного уравнения типа Эйлера n – го порядка. [Текст] / Р.Мустафокулов // Материалы международной конференции «Воронежская весенняя математическая школа Понтрягинские чтения - XXXI», г. Воронеж, Россия, 3-9 мая 2020г. – С. 149-151.

13. Дадоджонова М.Я. Интегральные представления решений и задача Коши-Рикье для уравнения, полученного итерированием обыкновенного дифференциального оператора первого порядка с внутренней сингулярной точкой [Текст] / М.Я. Дадоджонова, А.Г Олимов. // Современные проблемы математики и её преподавания. Специальный выпуск Учёные записки Худжандского госуниверситета им. академика Б. Гафурова. – 2014. – Ч.1. – №2. – С. 147-150.

14. Олимов А.Г. Интегральное представление и задача типа Коши для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с граничной слабо-сингулярной точкой [Текст] / А.Г.Олимов, М.Я.Дадоджанова // Вестник Таджикского национального университета. – 2018. – № 1. – С. 11-16.

15. Шевчук В.В. Об одном способе представления решений линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с сингулярной точкой [Текст] / В.В.Шевчук // Материалы

республиканской научной конференции молодые учен. – Ленинабад, 1990. – С. 123-124.

16. Зарифзода С.К. Линейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с двумя граничными сингулярными точками [Текст] / С.К. Зарифзода, Н. Раджабов // Вестник Таджикского государственного национального университета. – 2008. – №1(42). – С. 37-46.

17. Зарифзода С.Қ. Тадқиқи як синфи муодилаҳои операторӣ-дифференсиалии тартиби дуюм [Текст] / С.Қ. Зарифзода, М.Т. Розиқов, М.М. Бобиев // Вестник ТНУ. Серия естественных наук – 2024. – №3. – С. 5-23.

18. Маламуд М.М. Об операторах преобразования для обыкновенных дифференциальных уравнений высших порядков [Текст] / М.М. Маламуд // В сборник: «Математический анализ и теория вероятностей». – Киев: Наукова думка, 1978. – С. 108-111.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

I. Статьи, опубликованные в рецензируемых журналах, рекомендованных ВАК при Президенте Республики Таджикистан:

[1-А] **Мирзоев Дж.А.** Исследование одного линейного дифференциального уравнения третьего порядка [Текст] / Дж.А.Мирзоев // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. – Душанбе, 2018. - №3. – С. 39-46.

[2-А] **Мирзоев Дж.А.** Исследование модельного дифференциального уравнения четвертого порядка [Текст] / Р.Мустафокулов, Дж.А.Мирзоев // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. – Душанбе, 2019. - №1. – С. 5-13.

[3-А] **Мирзоев Дж.А.** Исследование немодельного уравнения типа Эйлера четвертого порядка [Текст] / Р.Мустафокулов, Дж.А.Мирзоев // Доклады академии наук республики Таджикистан. Том 63. – Душанбе, 2020. - №1-2. – С. 15-23.

[4-А] **Мирзоев Дж.А.** Об одном классе немодельных двумерных интегро-дифференциальных уравнений со сверхсингулярным ядром [Текст] / С.К.Зарифзода, Дж.А.Мирзоев // Вестник филиала МГУ имени М.В.Ломоносова в г.Душанбе. Том 1. – Душанбе, 2024. - №4(43). – С. 5-13.

[5-A] **Мирзоев Дж.А.** Исследование одного класса двумерных интегро-дифференциальных уравнений со сверхсингулярным ядром[Текст] / С.К.Зарифзода, Дж.А.Мирзоев // Известия национальной академии наук республики Таджикистан. Душанбе, 2025. - №2 (199). – С. 19-29.

II. Статьи, опубликованные в других изданиях:

[6-A] **Мирзоев Дж.А.** О разрешимости многообразия решений одного класса линейных дифференциальных уравнений типа Эйлера, когда характеристическое уранение имеет комплексно-сопряженные корни [Текст] / Р.Мустафокулов, Дж.А.Мирзоев //Материалы научно практической конференции «VII-е Ломоносовские чтения» филиала МГУ имени М.В.Ломоносова в г. Душанбе, 28-29 апреля 2017г. - С. 20-24.

[7-A] **Мирзоев Дж.А.** Об одном линейном дифференциальном уравнении типа Эйлера 4-го порядка [Текст] / Р.Мустафокулов, Дж.А.Мирзоев // Современные методы теории краевых задач. Материалы международной конференции Воронежской весенной математической школы «Понтрягинские чтения XXVIII», г. - Воронеж 3-9 мая 2017г. - С. 120-122

[8-A] **Мирзоев Дж.А.** Линейное однородное уравнение типа Эйлера 4-го порядка [Текст] / Р.Мустафокулов, Дж.А.Мирзоев // Материалы Международной конференции посвящение 90-летию академика АН Республика Таджикистан, лауреата государственной премии имени Абуали Ибн Сина, Михайлова Леонида Григорьевича – Душанбе, - 2018. - С. 108-110.

[9-A] **Мирзоев Дж.А.** Интегральное представление решений линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами [Текст] / Р.Мустафокулов, Дж.А.Мирзоев // Материалы международной научно-теоритической конференции, посвященной 70-летию образования ТНУ и 80-летию академика АНРТ, д.ф.-м.н профессора Раджабова Нусрата – Душанбе, 2018. – С. 97-105.

[10-A] **Мирзоев Дж.А.** Об одном линейном однородном уравнении типа Эйлера третьего порядка [Текст] / Р.Мустафокулов, Дж.А.Мирзоев // Материалы республиканской научно-теоритической конференции, профессорско–преподавательского состава и сотрудников ТНУ, посвященно международному 10-ю действия «Вода для устойчивого развития, 2018-2028 годы» и 70-й годовщине со дня создания ТНУ. – Душанбе, 2018. - С. 22.

[11-А] **Мирзоев Дж.А.** Об одном линейном уравнении типа Эйлера 4-го порядка [Текст] / Р.Мустафокулов, Дж.А.Мирзоев // Современные проблемы и приложения алгебры теории чисел и математическокого анализа «Институт математики имени А.Джураева» - Академия наук республики Таджикистан - Душанбе 2019. - С. 157-160.

[12-А] **Мирзоев Дж.А.** Исследование обобщенного уравнения Эйлера [Текст] / С.К. Зарифзода, Дж.А Мирзоев // Материалы международной конференции «Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений» посвящённая 70-летию со дня рождения академика АН Республики Таджикистан, доктора физико-математических наук, профессора Бойматова Камолиддина Хамроевича. – Душанбе, 2020. – С. 130-132.

[13-А] **Мирзоев Дж.А.** Построение основ операционного метода для исследования особых операторно-дифференциальных уравнений [Текст] / С.К. Зарифзода, Дж.А Мирзоев // Материалы международной научно-практической конференции «Современные проблемы математики и её приложения» , 2020-2040 годы. Душанбе, 20-21 октября 2022. – С. 42-45.

[14-А] **Мирзоев Дж.А.** Исследование одного класса сопряжённого одномерного интегро-дифференциального уравнения типа сложной свёртки [Текст] / С.К. Зарифзода, Дж.А Мирзоев // Материалы республиканской научно-практической конференции «Актуальные проблемы развития естественных, точных и математических наук в современных условиях». – Душанбе, 2022.

АННОТАТСИЯ

ба автореферати диссертатсияи Мирзозода Ҷунайдуллоҳ Абдулло дар мавзӯи «Таҳқиқи баъзе синфҳои муодилаҳои дифференсиалии таназзулёбандаи намуди Эйлер ва татбиқи онҳо дар ҳалли муодилаҳои интегро-дифференсиалии сингулярӣ» барои дарёфти дараҷаи илмии номзади илмҳои физикаю математика аз рӯйи ихтисоси 1.1.3. Муодилаҳои дифференсиалӣ, системаҳои динамикӣ ва идоракунии оптималӣ

Калидвожаҳо: *муодилаи хаттии Эйлер, муодилаи моделӣ, функсияи Кошӣ, муодилаи интегралии навъи Волтерр, оператори дифференсиалӣ, нуқтаи махсус, функсияи хос, ҳалли умумӣ, муодилаи якҷинса, муодилаи интегро-дифференсиалии ғайриякҷинса, ядрои сингулярӣ, резолвентаи муодилаи интегралӣ.*

Мақсади кор. Коркарди методҳои ба даст овардани тасвири интегралии ҳалҳо барои муодилаҳои дифференсиалии дорои нуқтаи махсуси иррегулярӣ дар асоси овардани онҳо ба муодилаҳои коэффисиентҳояшон доимӣ.

Навгонии илмии таҳқиқот. Натиҷаҳои диссертатсияи илмӣ нав буда, аз тарафи муаллиф мустақилона ба даст оварда шудаанд ва дар онҳо бори аввал ҳалли ошкорои муодилаи дифференсиалии моделӣ ва ғайримоделии тартиби якуми намуди Эйлер ёфта шуда, теорема оид ба овардашаванда будани муодилаи дифференсиалӣ бо коэффисиентҳои тағйирёбанда ба муодилаи дифференсиалӣ бо коэффисиентҳои доимӣ исбот гардидааст. Дар баробари ин, ҳалли умумии муодилаи моделии намуди Эйлери тартиби олӣ ва ҳалли умумии муодилаи ғайримоделӣ бо ёрии резолвентаи муодилаи интегралии намуди Волтерра ба даст оварда шуда, функсияи Коши барои муодилаи ғайриякҷинсаи моделии тартиби олӣ сохта шудааст, ки дар маҷмӯъ имкон дод ҳалли умумии муодилаи интегро-дифференсиалии дученака бо ядрои барзиёд сингулярӣ дарёфт карда шавад.

Арзиши назариявӣ ва амалии таҳқиқот. Натиҷаҳои кор хусусияти назариявӣ дошта, барои инкишофи минбаъдаи назарияи муодилаҳои дифференсиалии таназзулёбанда ва интегро-дифференсиалӣ хидмат мекунанд. Онҳо метавонанд дар соҳаҳои физика, механика ва ҳангоми таълими курсҳои махсус барои донишҷӯёну магистрантони ихтисосҳои математика ва механика истифода шаванд.

АННОТАЦИЯ

диссертации Мирзозода Ҷунайдуллох Абдулло на тему **«Исследование некоторых классов вырождающихся дифференциальных уравнений типа Эйлера и их применение к решению сингулярных интегро-дифференциальных уравнений»** на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.3. Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Ключевые слова: линейное уравнение Эйлера, модельное уравнение, функция Коши, интегральное уравнение типа Вольтерра, дифференциальный оператор, особая точка, собственная функция, общее решение, однородное уравнение, неоднородное интегро-дифференциальное уравнение, сингулярное ядро, резольвента интегрального уравнения.

Цель работы. Разработка методов получения интегральных представлений решений для класса модельных и немодельных обыкновенных дифференциальных уравнений с иррегулярной особой точкой на основе их сведения к дифференциальным уравнениям с постоянными коэффициентами.

Научная новизна исследования. Результаты диссертации являются новыми, получены автором самостоятельно и заключаются в том, что впервые найдены явные решения модельных и немодельных дифференциальных уравнений первого порядка типа Эйлера, а также доказана теорема о сводимости дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами к уравнениям с постоянными коэффициентами. Наряду с этим, получены общие решения модельного уравнения типа Эйлера высокого порядка и немодельного уравнения с помощью резольвенты интегрального уравнения типа Вольтерра, построена функция Коши для неоднородного модельного уравнения высокого порядка, что в совокупности позволило найти общее решение двумерного интегро-дифференциального уравнения с сильно сингулярным ядром.

Теоретическая и практическая значимость исследования. Результаты работы носят теоретический характер и служат для дальнейшего развития теории вырождающихся дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений. Они могут быть использованы в областях физики, механики, а также при чтении спецкурсов для студентов и магистрантов специальностей математики и механики.

ANNOTATION

to the dissertation by Mirzozoda Junaydulloh Abdullo on the topic «**Investigation of certain classes of degenerate Euler-type differential equations and their application to the solution of singular integro-differential equations**» submitted for the degree of Candidate of Physical and Mathematical Sciences, specialty 1.1.3. Differential Equations, Dynamical Systems, and Optimal Control.

Keywords: linear Euler equation, model equation, Cauchy function, Volterra-type integral equation, differential operator, singular point, eigen function, general solution, homogeneous equation, nonhomogeneous integro-differential equation, singular kernel, resolvent of the integral equation.

Objective of the Research. To develop methods for obtaining integral representations of solutions for a class of model and non-model ordinary differential equations with in irregular singular point, based on their reduction to differential equations with constant coefficients/

Methods of Research. The dissertation employs general methods from the theory of differential and integro-differential equations, the method of obtaining integral representations of solutions for ordinary differential equations, as well as the method of constructing the Cauchy function for ordinary differential equations.

Scientific Novelty of the research. The results of the dissertation are new, obtained by the author independently, and consist of the following: for the first time, explicit solutions for first-order model and non-model Euler-type differential equations are found, and a theorem on the reducibility of differential equations with variable coefficients to equations with constant coefficients is proved. Along with this, general solutions for a high-order model Euler-type equation and a non–model equation are obtained using the resolvent of a Volterra-type integral equation; the Cauchy function for a non-homogeneous high-order model equation is constructed, which collectively enabled the finding of the general solution for a two-dimensional equation with a super-singular kernel.

Theoretical and practical value of the research. The results of the work are theoretical in nature and contribute to the further development of the theory of degenerate differential and integro-differential equations. They can be applied in the fields of physics and mechanics, as well as in teaching specialized courses for undergraduate and graduate students majoring in mathematics and mechanics.