ҶУМҲУРИИ ТОҶИКИСТОН
ДОНИШГОҲИ МИЛЛИИ ТОҶИКИСТОН

ТДУ 517.956.32: 517.977.56

Бо ҳуқуқи дастнавис

Раҳматуллоҳзода Файзуллоҳ Раҳматулло

ТАҲҚИҚИ МАСЪАЛАҲОИ ИДОРАКУНИИ САРҲАДИИ ТАРКИБӢ БАРОИ РАВАНДҲОЕ, КИ БО МУОДИЛАИ ТЕЛЕГРАФӢ БО КОЭФФИТСИЕНТИ ТАҒЙИРЁБАНДА ТАВСИФ МЕЁБАНД

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т И

диссертатсия барои дарёфти дараҷаи илмии доктори фалсафа (PhD), доктор
аз рӯйи ихтисоси 6D060100 – Математика (6D060103 – Муодилаҳои дифференсиалӣ, системаҳои динамикӣ ва идоракунии оптималӣ)

Душанбе – 2026

Диссертатсия дар кафедраи математикаи ҳисоббарорӣ ва механикаи факултети механикаю математикаи Донишгоҳи миллии Тоҷикистон иҷро шудааст.

Роҳбари илмӣ: Абдукаримов Маҳмадсалим Файзуллоевич, доктори илмҳои физикаю математика, дотсент, мудири кафедраи математикаи ҳисоббарорӣ ва механикаи Донишгоҳи миллии Тоҷикистон

Муқарризони расмӣ: Шамсудинов Файзулло Мамадуллоевич, доктори илмҳои физикаю математика, и.в. профессори кафедраи таҳлили математикӣ ва муодилаҳои дифференсиалии донишгоҳи давлатии Бохтар ба номи Н.Хусрав

Саидов Бахтиёр Бобокалонович, номзади илмҳои физикаю математика, дотсенти кафедраи математикаи олии Донишгоҳи давлатии молия ва иқтисоди Тоҷикистон

Муассисаи пешбар: Донишгоҳи байналмилалии сайёҳӣ ва соҳибкории Тоҷикистон

Ҳимоя санаи «16» сентябри соли 2026, соати 14:00 дар ҷаласаи Шурои диссертатсионии 6D.КОА-011-и назди Донишгоҳи миллии Тоҷикистон баргузор мегардад. Нишонӣ: 734027, ш. Душанбе, кӯчаи Буни Ҳисорак, факултети механикаю математика, бинои 17, синфхонаи 203.

E-mail: alisher_gaforov@mail.ru; рақами телефони мобилии котиби илмӣ: +992900766603.

Бо диссертатсия дар Китобхонаи марказии илмии Донишгоҳи миллии Тоҷикистон ва ё дар сомонаи *http://www.tnu.tj* шинос шудан мумкин аст.

Автореферат «____» «_____________» соли 2026 аз рӯйи феҳристи пешниҳодгардида ирсол карда шудааст.

Котиби илмии Шурои диссертатсионӣ,
номзади илмҳои физикаю математика **Ғафоров А.Б.**

МУҚАДДИМА

Мубрамии мавзуи таҳқиқот. «Ин рисолаи диссертатсионӣ ба таҳқиқи масъалаҳои идоракунии сарҳадии таркибӣ барои равандҳое, ки бо муодилаи якченакаи телеграфӣ бо коэффитсиенти тағйирёбанда аз синфи L_2 тавсиф меёбанд, бахшида шудааст. Таваҷҷуҳи асосӣ ба мавҷудият ва ягонагии ҳалли масъалаҳои баррасишавандаи идоракунии сарҳадӣ дар фосилаи вақти хурдтарин равона гардидааст» [5].

Чунин муодилаҳо ва гузоришҳои масъалаҳои идоракунӣ ҳангоми тавсифи математикии як қатор равандҳои муҳими физикӣ ба миён меоянд, аз ҷумла ҳангоми омӯзиши паҳншавии мавҷҳои электромагнитӣ дар хатҳои дароз, таҳлили динамикаи ҳаракати нафт ё газ дар қубурҳо, инчунин ҳангоми тадқиқи паҳншавии мавҷҳо дар муҳитҳои геологӣ.

Гузориши математикии масъалаи идоракунии сарҳадӣ ба воситаи масъалаҳои ибтидоӣ – сарҳадӣ барои муодилае, ки раванди баррасишавандаро тавсиф мекунад, ифода меёбад.

Ин самти мубрам ва бо суръат рушдёбандаи назарияи идоракунӣ ва назарияи масъалаҳои сарҳадӣ барои муодилаҳои дифференсиалӣ буда, таваҷҷуҳи як қатор мутахассисони маъруфро дар ин соҳаҳо ҷалб намудааст.

Дараҷаи коркардшудаи мавзуи таҳқиқот. Соли 1988 Ж.Л. Лионс масъалаи идоракунии сарҳадии лапишҳоро дар шакли масъалаҳои омехта барои муодилаи мавҷӣ мавриди омӯзиш қарор дод. Дар мақолаи ӯ [2] масъалаи оромсозӣ (яъне овардани системаи лапиш ба ҳолати сифрии додаҳои Коши) бо шартҳои сарҳадии Дирихле таҳқиқ шудааст. Дар ҳамин кор бо истифода аз назарияи фазоҳои гилбертӣ ягона набудани ҳалли масъалаи ҳосилшуда ҳангоми $T > 2l$, ки дар он l - дарозии тор ва T-лаҳзаи вақт мебошад, бо маънои ҳалли умумишуда аз синфи L_2 исбот гардидааст.

Дар корҳои Е. Зуазуа [3] ва [4] ғояи Лионс барои ҳолати муодилаи квазихаттии мавҷӣ бо асимптотикаи хаттии ғайрихаттӣ умумӣ гардонида шудааст.

Дар корҳои А.Г. Бутковский ва А.Я. Лернер [7] ва [8] усулҳои ҳалли масъалаҳои идоракунии оптималии системаҳои хаттӣ бо параметрҳои тақсимшуда бо истифода аз L-проблемаи моментҳо баён шудаанд.

Дар монографияи А.Г. Бутковский [9] масъалаи идоракунии сарҳадӣ бо ёрии методи Фурйе ва методи моментҳо таҳқиқ гардидааст. Бар замми ин, идоракунии сарҳадии ҷустуҷӯшаванда дар шакли қаторҳои Фурйе сохта шудааст.

Дар кори А.Е. Егоров [12] барои ҳалли конструктивии (самараноки) масъалаи идоракунии сарҳадӣ усули мавҷҳои афтанда ва инъикосёбанда истифода шудааст. Дар монографияи ӯ [13] самтҳои асосии назарияи муосири математикии идоракунӣ баррасӣ мешаванд, аз ҷумла: амсиласозии математикии системаҳои идорашаванда; асосҳои назарияи устувории системаҳои ғайрихаттӣ ва идорашаванда; лапишҳои даврии системаҳои ғайрихаттӣ; асосҳои назарияи идорашавандагӣ; мушоҳидашавӣ ва идентификатсия; усулҳои назарияи идоракунии оптималӣ; инчунин унсурҳои назарияи системаҳои стохастикии (эҳтимолии) идорашаванда. Дар ин кор системаҳо ҳам бо параметрҳои мутамарказ ва ҳам бо параметрҳои тақсимшуда баррасӣ мегарданд. Кори муштараки ӯ бо Л.Н. Знаменская [14] низ ба ҳамин мавзуъ бахшида шуда, масъалаҳои гуногуни идоракунӣ, мушоҳидакунӣ ва идоракунии оптималиро дар бар мегиранд.

Дар мақолаи Ф.П. Васильев [10] тафсири назарияи дугона дар масъалаҳои хаттии идоракунӣ ва мушоҳидакунӣ пешниҳод шудааст. Ҳалли масъалаҳои идоракунии сарҳадии равандҳои мавҷӣ бо усулҳои функсионалӣ, инчунин дар корҳои муштараки ӯ бо М.М. Потапов, А.В. Разгулин ва М.А. Куржанский мавриди таҳқиқ қарор гирифтааст, ки дар онҳо алгоритмҳои самараноки ададӣ барои ёфтани идоракунии сарҳадии ҷустуҷӯшаванда сохта шудаанд [11]. Ба усулҳои тақрибии ҳалли масъалаҳои идоракунии сарҳадӣ барои муодилаи мавҷӣ, инчунин корҳои М.М. Потапов ва шогирди ӯ Д.А. Иванов низ бахшида шудаанд [25], [26] ва [15].

Дар кори В.А. Илйин [16] бори аввал барои ҳар як T аз фосилаи $0 < T < l$ шартҳои зарурӣ ва кифоягии мавҷудияти ҳал муқаррар карда шуда, инчунин шакли ошкори идоракуниҳои сарҳадӣ тавассути ҷойивазкунӣ дар ду канор нишон дода шудааст. Барои ҳолати $T > l$ (дақиқтараш, барои ҳолати $l < T \leq 2l$) шакли умумии идоракуниҳои сарҳадӣ оварда шудааст, ки ду доимии ихтиёрӣ ва чор функсияи ихтиёриро аз синфи W_2^2 дар порча аз рӯйи тағйирёбандаи t бо дарозии $T - l$ дар бар мегирад. Ин идоракуниҳо гузариши раванди мавҷиро, ки бо муодилаи мавҷии якҷинса тавсиф меёбад:

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0, \qquad 0 < x < l, \; 0 < t < T, \qquad (*)$$

аз ҳолати ибтидоии ихтиёрӣ $\{u(x,0) = \varphi(x), u(x,0) = \varphi(x)\}$ ба ҳолати ниҳоии пешакӣ додашудаи $\{u(x,T) = \varphi_1(x), u_t(x,T) = \psi_1(x)\}$ таъмин менамоянд. Дар ин кор ҳангоми омӯзиши масъала нақши муҳимро синфи $\widehat{W}_2^2[(0 \leq x \leq l) \times \times (0 \leq t \leq T)]$ мебозад, ки бори аввал маҳз дар ҳамин кор аз ҷониби В.А.Илйин ворид гардидааст. Муайян карда шудааст, ки ҳолати $T = l$ барои масъалаи идоракунии сарҳадӣ тавассути ҷойивазкунӣ дар ду канор ҳолати критикӣ мебошад, яъне фосилаи вақти $0 \leq t \leq l$ минималӣ буда, идорашавандагии пурраи раванди баррасишавандаро ҳангоми маҳдудиятҳои минималӣ ба шартҳои ибтидоӣ ва ниҳоӣ таъмин менамояд. Натиҷаи монанд аз ҷониби

В.А.Илйин ҳамчунин барои ҳолате ба даст оварда шудааст, ки идоракунӣ танҳо дар як сарҳади тор амал карда, сарҳади дуюм мустаҳкам карда шудааст [17]. Нишон дода шудааст, ки дар ин маврид лаҳзаи критикии вақт $T = 2l$ мебошад.

Дар корҳои [18] ва [19] В.А. Илйин масъалаҳои идоракунии сарҳадиро бо маънои ҳалли умумишудаи муодилаи (*) аз синфе таҳқиқ намудааст, ки мавҷудияти энергияи ниҳоиро ба назар мегирад. Дар ин тадқиқот ҳамаи масъалаҳое, ки қаблан аз ҷониби ӯ бо маънои ҳалли классикии муодилаи (*) баррасӣ шуда буданд, дар тафсири умумишуда мавриди омӯзиш қарор гирифтаанд.

Азбаски дар ҳолати лаҳзаи вақти T, ки аз қимати критикӣ зиёд аст, масъалаи идоракунии сарҳадӣ дорои шумораи беохири ҳалхо мебошад, табиӣ аст, ки масъалаи ёфтани идоракунии оптималии сарҳадӣ ба миён меояд. Масалан, масъалаи ёфтани он идоракунӣ аз байни ҳамаи идоракуниҳои имконпазир, ки қимати минималӣ қабул кардани интеграли энергияи сарҳадиро таъмин менамояд. Маҳз ба ҳамин масъала корҳои муштараки В.А. Илйин ва Е.И. Моисеев бахшида шудаанд [22] ва [23].

Оид ба мавзуи идоракунии сарҳадии равандҳое, ки бо муодилаи мавҷии (*) тавсиф мешаванд, барои масъалаҳои омехтаи локалӣ ва ҳам ғайрилокалӣ, В.А.Илйин, Е.И. Моисеев ва шогирдони онҳо: А.В. Беликов, Л.Н. Знаменская, А.А. Кулешов, П.В. Луференко, А.А. Никитин, П.А. Рево, А.М. Рогожников, В.В. Тихомиров, А.А. Фролов, А.А. Холомеева, Г.Д. Чабакаури як силсила корҳои назаррас нашр намудаанд.

Дар кори муштараки В.А. Илйин ва Е.И. Моисеев [20] масъалаи идоракунии сарҳадӣ тавассути ҷойивазкунӣ дар сарҳади якум бо сарҳади дуюми мустаҳкамшуда барои раванде, ки бо муодилаи телеграфӣ тавсиф мешавад, дар лаҳзаи вақти критикӣ: $T = 2l$ баррасӣ шудааст:

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) + c^2 u(x,t) = 0, \quad 0 < x < l,\ \ 0 < t < T, c = const. \qquad (**)$$

Дар [21] ҳамин масъала барои ҳолате баррасӣ шудааст, ки идоракуниҳо дар ҳар ду сарҳад амал мекунанд.

Дар корҳои И.Н. Смирнов [27]-[29] масъалаи идоракунии сарҳадӣ тавассути ҷойивазкунӣ дар ду сарҳад барои муодилаи (**) таҳқиқ шудааст, дар ҳолате ки порчаи $[0, l]$ аз ду қисми алоҳида иборат буда, раванд дар онҳо дорои параметрҳои физикии гуногун мебошад. Дар ҳамин корҳои ӯ барои муодилаи (**), инчунин баъзе масъалаҳои омехтаи идоракунӣ барраси шудаанд.

Дар корҳои [20], [21] ва [27]-[29] барои идоракунии сарҳадии ҷустуҷӯшаванда шакли анлитикии ошкор, ки аз функсияҳои Бессел истифода мекунад, ёфта шудааст.

Баъзе проблемаҳои назарияи масъалаҳои омехта, инчунин масъалаҳои идоракунии сарҳадӣ ва оптималӣ дар корҳои В.И. Агошков, Л.Д. Акуленко, А.А. Андреев, А.Х. Аттаев, В. Р. Барсегян, А.В. Боровских, А.А. Воронов, М.Исмати, А.З. Ишмухаметов, Е. А. Козлова, Е.К. Костоусова, С.В. Лексина, Ф.Е. Ломовсев, А. Манч, М.И. Мустафаев, А.И. Прилепко, А.В. Фурсиков, О.Ю. Эмануилов, М.К. Юнуси ва дигарон низ баррасӣ шудаанд.

Дар ин диссертатсия масъалаҳои идоракунии сарҳадии таркибӣ барои муодилаи (**) бо коэффитсиенти тағйирёбандаи $q(x,t)$ ва тарафи рости $f(x,t)$ омӯхта мешаванд, яъне:

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) - q(x,t)u(x,t) = f(x,t). \qquad (***)$$

Ҳамаи масъалаҳо дар тафсири умумишуда баррасӣ мегарданд ва функсияҳои $q(x,t)$ ва $f(x,t)$ танҳо ба синфи L_2 тааллуқ доранд. Бояд қайд кард, ки масъалаҳои наздик, аввал барои коэффитсиенти ченшаванда ва маҳдуд, сипас барои коэффитсиенти замшаванда бо кварат дар корҳои [5], [6] ва [24] мавриди омӯзиш қарор гирифтаанд. Дар кори В.А.Коморник [1] масъалаҳои идоракунӣ дар фосилаҳои вақти аз критикӣ калон барои муодилаи (**) ҳангоми бефосила ва ғайриманфӣ будани коэффитсиенти $q(x,t) \equiv q(x)$ таҳқиқ шудаанд.

Таҳлили адабиёт нишон медиҳад, ки масъалаҳои идоракунии сарҳадӣ барои муодилаи (***) амалан кам омӯзиш ёфтаанд. Таҳлили нисбатан муфассали адабиёт дар боби 1-и ҳамин диссертатсия анҷом дода мешавад.

Робитаи таҳқиқот бо барномаҳо (лоиҳаҳо) ва мавзуъҳои илмӣ. Ин таҳқиқоти диссертатсионӣ дар доираи иҷрои барномаи дурнамои кори илмӣ-таҳқиқотии кафедраи математикаи ҳисоббарорӣ ва механикаи факултети механикаю математикии Донишгоҳи Миллии Тоҷикистон барои солҳои 2021–2025 оид ба мавзуи: «Таҳқиқоти аналитикӣ, таҳлили сифатӣ ва ҳалли ададии масъалаҳои математикаи амалӣ ва механика» амалӣ карда шудааст (Роҳбари илмӣ: д.и.ф.-м., дотсент Абдукаримов М.Ф.).

ТАВСИФИ УМУМИИ ТАҲҚИҚОТ

Ҳадафи таҳқиқот. Ҳадафи асосии таҳқиқоти диссертатсионӣ таҳқиқи масъалаҳои идоракунии сарҳадии таркибӣ мебошад, ки тавассути ҷойивазкунӣ дар як сарҳад ва қувваи чандирӣ дар сарҳади дигар, ё баръакс қувваи чандирӣ дар як сарҳад ва ҷойивазкунӣ дар сарҳади дигар, барои муодилаи (***) амалӣ мешаванд.

Вазифаҳои таҳқиқот. Вазифаҳои асосии таҳқиқот иборатанд аз:

- таҳия ва исботи теоремаҳо оид ба ягонагӣ ва мавҷудияти ҳалли масъалаҳои омехтаи таркибӣ барои муодилаи телеграфии якченака бо коэффитсиенти тағйирёбанда аз синфи L_2;
- таҳия ва исботи теоремаҳо оид ба ягонагии ҳалли масъалаи идоракунии сарҳадии таркибӣ барои муодилаи баррасишаванда;

- ёфтан ва асосноккунии шартҳои зарурӣ ва кифоягӣ барои мавҷудияти ҳалли масъалаҳои идоракунии сарҳадии таркибӣ барои муодилаи баррасишаванда;
- таҳқиқи назариявӣ ва асоснок кардани устувории ҳалли ҳамаи масъалаҳои таҳқиқшаванда;
- таҳлил ва ҳалли масъалаи оптималии идоракунии сарҳадии таркибӣ барои муодилаи лапишҳои маҷбурии тор дар фосилаи вақти калон.

Объекти таҳқиқот. Муодилаи лапишҳои маҷбурии тор ва муодилаи телеграфии якченака бо коэффитсиенти тағйирёбанда.

Мавзуи таҳқиқот. Масъалаҳои омехта ва масъалаҳои идоракунии сарҳадии таркибӣ барои муодилаҳои баррасишаванда.

Усулҳои таҳқиқот. Дар кори мазкур аз усулҳои физикаи математикӣ, таҳлили функсионалӣ, назарияи муодилаҳои интегралии хаттии ҷинси дуюми намуди Волтера ва назарияи масъалаи идоракунии сарҳадӣ истифода шудаанд.

Навовариҳои илмии таҳқиқот. Ҳамаи натиҷаҳои диссертатсия нав мебошанд. Натиҷаҳои асосиро ба таври мухтасар номбар мекунем.

1. Теоремаҳо оид ба ҳалшавандагии масъалаҳои омехтаи таркибии мувофиқ барои муодилаи телеграфии якченака бо коэффитсиенти тағйирёбанда аз синфи L_2 исбот карда шудаанд;
2. Теоремаҳо оид ба ягонагии ҳалли масъалаҳои идоракунии сарҳадии таркибӣ барои муодилаи баррасишаванда дар вақти хурд ё баробари критикӣ исбот карда шудаанд;
3. Теоремаҳо оид ба мавҷудияти ҳалли масъалаҳои идоракунии сарҳадии таркибӣ барои муодилаи баррасишаванда дар вақти критикӣ исбот карда шудаанд;
4. Устувории ҳалли ҳамаи масъалаҳои омехта ва идоракунии сарҳадии баррасишаванда нисбат ба ошӯби аддитивии $q(x,t)u(x,t)$ ва инчунин нисбат ба функсияҳои дар гузоришӣ масъала истифодашаванда асоснок карда шудааст;
5. Идоракуниҳои сарҳадии оптималии таркибӣ барои равандҳое, ки бо муодилаи лапишҳои маҷбурии тор тавсиф мешаванд, дар фосилаҳои вақти калон, ки қимати хурдтарин қабул кардани интеграли энергияи сарҳадиро таъмин менамоянд, ба даст оварда шудаанд.

Арзишҳои назариявӣ ва амалии таҳқиқот. Кор характери назариявӣ дорад. Натиҷаҳои он метавонанд ҳангоми омӯзиши курсҳои махсус барои донишҷӯёни курсҳои болоӣ, магистрантҳо ва докторантҳои PhD барои ихтисосҳои математика ва физика истифода шаванд. Ҳамчунин, натиҷаҳои бадастомада метавонанд барои амсиласозии равандҳои гуногун, ки бо муодилаҳои баррасишаванда тавсиф мешаванд, истифода шаванд.

Нуктаҳое, ки ба ҳимоя пешниҳод мешаванд:

1. Теоремаҳо оид ба яккимата ҳалшавандагии масъалаҳои омехтаи таркибӣ барои муодилаи телеграфии якченака бо коэффитсиенти тағйирёбанда аз синфи функсияҳои бо квадрат замшаванда;
2. Теоремаҳо оид ба яккимата ҳалшавандагии масъалаҳои идоракунии сарҳадӣ барои муодилаи баррасишаванда, ки тавассути ҷойивазкунӣ (қувваи чандирӣ) дар як сарҳад ва қувваи чандирӣ (ҷойивазкунӣ) дар сарҳади дигар амалӣ мешаванд;
3. Теоремаҳо оид ба идоракуниҳои сарҳадии оптималии таркибӣ барои равандҳое, ки бо муодилаи лаппишҳои маҷбурии тор тавсиф мешаванд, дар фосилаҳои вақти калон, ки қимати хурдтарин қабул кардани интеграли энергияи сарҳадиро таъмин менамоянд.

Дараҷаи эътимоднокии натиҷаҳои таҳқиқот. Эътимоднокии натиҷаҳои рисолаи диссертатсионӣ тавассути исботҳои қатъии математикӣ барои ҳамаи тасдиқот таъмин карда шудааст ва бо таҳқиқоти дигар муаллифони ҳамин соҳа тасдиқ мешаванд.

Мутобиқати диссертатсия бо шиносномаи ихтисоси илмӣ. Диссертатсия аз рӯйи ихтисоси 6D060100 - Математика: 6D060103 - Муодилаҳои дифференсиалӣ, системаҳои динамикӣ ва идоракунии оптималӣ иҷро шудааст ва пурра бо формулаи он (муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ), инчунин ба се самти асосии соҳаи таҳқиқот мутобиқат мекунад: 1) назарияи умумии муодилаҳои дифференсиалӣ ва системаи муодилаҳои дифференсиалӣ; 2) масъалаҳои ибтидоию сарҳадӣ ва спектралӣ барои муодилаҳои дифференсиалӣ ва системаи муодилаҳои дифференсиалӣ; 3) таҳлили сифатии муодилаҳои дифференсиалӣ ва системаи муодилаҳои дифференсиалӣ. Самтҳои мазкур ба бахши «Муодилаҳои дифференсиалӣ» тааллуқ доранд, ки дар банди 3-юми банди III-и шиносномаи ихтисоси илмӣ пешбинӣ шудааст.

Саҳми шахсии довталаби дараҷаи илмӣ. Мундариҷаи диссертатсия ва нуктаҳои асосӣ барои ҳимоя саҳми шахсии муаллиф мебошанд. Ҳамаи натиҷаҳои пешниҳодшуда шахсан аз ҷониби муаллиф ба таври мустақилона гирифта шудаанд. Дар корҳои муштараки [1-А]-[3-А], [6-А]-[11-А] ҳаммуаллиф дар муҳокимаи натиҷаҳои бадастомада иштирок кардааст.

Тасвиб ва амалисозии натиҷаҳои диссертатсия. Натиҷаҳои диссертатсия дар семинар ва конференсияҳои зерин пешниҳод ва муҳокима шудаанд:

- семинари илмии кафедраи математикаи ҳисоббарорӣ ва механикаи факултети механикаю математикаи Донишгоҳи миллии Тоҷикистон бо роҳбарии профессор Абдукаримов М.Ф. (2023–2025);

- конференсияи байналмилалии илмӣ-амалӣ зери унвони «XIII-умин Хонишҳои Ломоносовӣ» бахшида ба 115-солагии академик Бобоҷон Ғафуров (Душанбе, 28-29-уми апрели соли 2023);
- конференсияи байналмилалии илмӣ бахшида ба 75-солагии Донишгоҳи миллии Тоҷикистон, 20-солагии рушди фанҳои дақиқ, табиӣ ва риёзӣ, 85-солагии академики АМИТ Раҷабов Н. (Душанбе, 5-уми октябри соли 2023);
- IV-умин конференсияи байналмилалии илмӣ-амалӣ зери унвони «Масъалаҳои муосири математика ва татбиқҳои он» (Душанбе, 1-уми июни соли 2024);
- конференсияи байналмилалии илмӣ-амалӣ зери унвони «XIV-умин Хонишҳои Ломоносовӣ: Нақши филиали ДДМ ба номи М.В. Ломоносов дар шаҳри Душанбе дар рушди илм ва маориф» (Душанбе, 22-23-уми ноябри соли 2024);
- конференсияи байналмилалии илмӣ-амалӣ зери унвони «Масъалаҳои муосири математикаи амалӣ, механика ва информатика» бахшида ба «20-солагии омӯзиш ва рушди фанҳои дақиқ, табиӣ ва риёзӣ» ва 80-солагии профессор Боймурод Алиев (Душанбе, 2-юми апрели соли 2025);
- конференсияи байналмилалӣ зери унвони «Математика дар ҷаҳони муосир» бахшида ба 85-солагии математики барҷастаи тоҷик, доктори илмҳои физикаю математика, профессор Собиров Т.С. (Душанбе, 28-29 -уми ноябри соли 2025).

Интишорот аз рӯйи мавзуи диссертатсия. Мундариҷаи асосии диссертатсия дар 11 кори муаллиф нашр шудааст, аз ҷумла 5 кор дар нашрияҳое, ки аз ҷониби КОА-и назди Президенти Ҷумҳурии Тоҷикистон тавсия шудаанд. Феҳристи корҳои нашршуда дар охири диссертатсия ва автореферат оварда шудааст.

Сохтор ва ҳаҷми диссертатсия. Диссертатсия аз муқаддима, тавсифи умумии таҳқиқот, се боб, муҳокимаи натиҷаҳои бадастомада, хулоса ва феҳристи адабиёт иборат аст, ки дар он 150 номгӯй оварда шудааст. Дар диссертатсия рақамгузории дурақама истифода шудааст, ки рақами аввал бо рақами боб ва рақами дуюм бо рақами таърифҳо, тасдиқот, леммаҳо, теоремаҳо, эзоҳҳо ва формулаҳо мувофиқат мекунад. Матни диссертатсия дар барномаи Microsoft Word навишта шудааст ва аз 193 саҳифа иборат аст.

МУНДАРИҶАИ МУХТАСАРИ ДИССЕРТАТСИЯ

«Дар **муқаддимаи** кори диссертатсионӣ мубрамияти мавзуи интихобшуда ва аҳамияти он барои рушди назарияи идоракунии сарҳадӣ ва моделсозии математикии равандҳои динамикӣ ба таври муфассал асоснок карда мешавад, инчунин арзиши илмӣ ва амалии он таъкид мегардад. Шарҳи системаноки натиҷаҳо ва равишҳои мавҷуда, ки бевосита ба масъалаи баррасишаванда марбутанд, пешниҳод мегардад, ки ин имкон медиҳад самтҳои кунунии таҳқиқот муайян карда шуда, масъалаҳои ҳалнашуда ошкор карда шаванд. Ҳамчунин, муқаддима фарогири баёни дақиқи ҳадаф ва объекти таҳқиқот, ҷудо намудани вазифаҳои асосии кор ва тавсифи усулҳои истифодашаванда барои ҳалли онҳо мебошад. Дар анҷом, сохтори диссертатсия ва муҳтавои бахшҳои алоҳидаи он ба таври мухтасар шарҳ дода мешавад, ки пайдарпайӣ ва муттасилии мантиқӣ ва консептуалии тамоми таҳқиқотро таъмин менамояд» [6].

«Дар **боби якум «Шарҳи натиҷаҳо оид ба назарияи масъалаҳои идоракунии сарҳадӣ»** таҳлили муфассалтари натиҷаҳо вобаста ба масъалаи идоракунӣ дар гузоришҳои гуногун пешниҳод шудааст» [5].

Дар **боби дуюм** дар росткунҷаи $Q_T = [0 \le x \le l] \times [0 \le t \le T]$ бо маънои ҳалли умумишудаи муодилаи якченакаи телеграфӣ бо коэффитсиенти тағйирёбандаи намуди

$$Lu \equiv u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) - q(x,t)u(x,t) = f(x,t) \tag{1}$$

масъалаи идоракунии сарҳадии равандҳое, ки бо ин муодила ифода мешаванд, тавассути ҷойивазкунӣ дар сарҳади чап $x = 0$ ва қувваи чандирӣ дар сарҳади рост $x = l$:

$$u(0,t) = \mu(t), \quad u_x(l,t) = \nu(t) \quad \text{при} \quad 0 \le t \le T \tag{2}$$

омӯхта мешавад. Боб аз чор банд иборат аст. Дар **банди аввал** баёни масъала ва таърифҳои зарурӣ оварда шудаанд. Бигзор, ҳангоми t=0 будан шартҳои ибтидоии

$$u(x,0) = \varphi(x), \ u_t(x,0) = \psi(x) \quad \text{барои} \quad 0 \le x \le l \tag{3}$$

ва ҳангоми t=T будан шартҳои ниҳоии

$$u(x,T) = \varphi_1(x), \ u_t(x,T) = \psi_1(x) \ \text{барои} \quad 0 \le x \le l \tag{4}$$

дода шудаанд. Фарз карда мешавад, ки $\mu(t) \in W_2^1[0,T]$, $\nu(t) \in L_2[0,T]$, $\varphi(x)$, $\varphi_1(x) \in W_2^1[0,l]$, $\psi(x), \psi_1(x) \in L_2[0,l]$, $f(x,t), q(x,t) \in L_2(Q_T)$ ва шартҳои мувофиқати зерин иҷро мешаванд: $\mu(0) = \varphi(0)$; $\mu(T) = \varphi_1(0)$.

«Ҳалли масъалаи идоракунии сарҳадии ҳосилшудаи (1) - (4) бо маънои умумишуда фаҳмида шуда, дар синфи $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ ҷустуҷӯ мегардад, ки бори аввал аз ҷониби В.А. Илйин соли 2000-ум пешниҳод шудааст» [18].

«**Таърифи 1.** Ҳалли умумишудаи масъалаи омехтаи (1) - (3) аз синфи $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ гуфта, чунин функсияи $u(x,t)$-ро меномем, ки айнияти интегралии

$$\int_0^l\int_0^T u(x,t)L\Phi(x,t)dxdt+\int_0^l \varphi(x)\Phi_t(x,0)dx-\int_0^T \psi(x)\Phi(x,0)dx-$$

$$-\int_0^T \mu(t)\Phi_x(0,t)dt-\int_0^T \nu(t)\Phi(l,t)dt=\int_0^l\int_0^T f(x,t)\Phi(x,t)dxdt \qquad (5)$$

-ро барои ҳар гуна функсияи озмоишии $\Phi(x,t)\in\widehat{W}_2^2(Q_T)$ (таърифи ин синф низ дар» [18] оварда шудааст), ки ба шартҳои $\Phi(0,t)=\Phi_x(l,t)\equiv 0$ ҳангоми $0\le t\le T$ ва $\Phi(x,T)=\Phi_t(x,T)\equiv 0$ ҳангоми $0\le x\le l$ итоат мекунад, қонеъ мегардонад ва инчунин шарти дуюми сарҳадии (2) ва шарти дуюми ибтидоии (3)-ро қариб дар ҳама ҷойи $[0,l]$ қонеъ месозад, дар ҳоле ки шарти якуми сарҳадии (2) ва шарти якуми ибтидоии (3) барои ҳамаи $x\in[0,l]$ иҷро мегарданд.

Барои ба даст овардани баробарии (5) ҳар ду қисми муодилаи (1) ба функсияи озмоишии $\Phi(x,t)$ зарб карда мешавад. Сипас бо истифода аз усули интегралгирӣ аз рӯйи ҳиссаҳо ҳосилаҳое, ки дар функсияи $u(x,t)$ мавҷуданд, ба функсияи $\Phi(x,t)$ гузаронида мешаванд. Айнияти (5) ҳалли сусти умумишударо ифода мекунад. Азбаски чунин шакли навишт барои исботи теоремаҳои ягонагӣ муносиб аст, мо онро дар ҳамин намуд нигоҳ медорем, сарфи назар аз он ки ҳалли қавии умумишударо ҷустуҷӯ мекунем.

Таърифи 2. Ҳалли умумишудаи масъалаи идоракунии сарҳадии (1)-(4) аз синфи $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ гуфта, ҳалли масъалаи омехтаи (1)-(3) - ро бо чунин функсияи $\mu(t)\in W_2^1[0,T]$, ки тобеи шартҳои мувофиқати $\mu(0)=\varphi(0)$; $\mu(T)=\varphi_1(0)$ мебошад ва функсияи $\nu(t)\in L_2[0,T]$ меномем, ки барояш шарти якуми ниҳоии (4) барои ҳамаи $x\in[0,l]$ ва шарти дуюми ниҳоии (4) қариб дар ҳама ҷойи $[0,l]$ иҷро мешаванд.

Дар **банди дуюм** масъалаи мавҷудият ва ягонагии ҳалли масъалаи омехтаи (1) - (3) дар синфи функсионалии мувофиқ омӯхта шудааст.

Бо рамзҳои $\underline{\mu}(t)$ ва $\underline{\nu}(t)$ функсияҳоеро ишора мекунем, ки мутаносибан бо $\mu(t)$ ва $\nu(t)$ ҳангоми $0\le t\le T$ мувофиқат мекунанд ва ҳангоми $t<0$ бо сифр идома дода шудаанд. Аён аст, ки дар айни ҳол $\underline{\mu}(t)\in W_2^1[-\varepsilon,T]$ $\forall\varepsilon>0$ ва $\underline{\nu}(t)\in L_2[-\delta,T]$ $\forall\delta>0$.

Леммаи 1. *Бигзор,* $T\le l$ *ва* $q(x,t)$, $f(x,t)\in L_2(Q_T)$ *бошанд. Он гоҳ ҳалли умумишудаи масъалаи омехтаи (1)-(3) аз синфи* $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ *ҳар гуна функсияи дар* Q_T *маҳдуди* $u(x,t)$ *мебошад, ки баробарии зеринро қонеъ менамояд:*

$$u(x,t)=\underline{\mu}(t-x)+\int_{0}^{t+x-l}\underline{\nu}(\tau)d\tau+\frac{1}{2}\int_{0}^{t}d\tau\int_{|x-t+\tau|}^{l-|x+t-l-\tau|}[q(\xi,\tau)u(\xi,\tau)+f(\xi,\tau)]\,d\xi+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{0}^{x+t-l}d\tau\int_{2l-x-t+\tau}^{l}[q(\xi,\tau)u(\xi,\tau)+f(\xi,\tau)]d\xi. \qquad (6)$$

Эзоҳи 1. Агар $\underline{\mu}(t)\in W_2^2(-\varepsilon_1,T]\ \ \forall\,\varepsilon_1>0,\ \underline{\nu}(t)\in W_2^1(-\varepsilon_2,T]\ \ \forall\,\varepsilon_2>0$, коэффитсиенти $q(x,t)$ ҳамроҳ бо ҳосилааш $q_x(x,t)$ дар Q_T маҳдуд бошанд ва функсияи $f(x,t)$ ба синфи $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ тааллуқ дошта бошад, он гоҳ ҳалли масъалаи омехтаи (1) - (3), ки дар леммаи 1 баррасӣ шудааст, ба синфи $\widehat{W}_2^2(Q_T)$ мансуб хоҳад буд.

Теоремаи 1. *Фарз мекунем, ки $T\le l$ ва $q(x,t),\ f(x,t)\in L_2(Q_T)$ бошанд. Он гоҳ муодилаи интегралии (6) ҳалли ягонаи маҳдуд дорад. Ғайр аз ин, агар шарти $f(x,t)\equiv 0$ иҷро гардад, пас дар соҳаи $\left\{(x,t){:}\,0\le t\le\frac{l}{2},t\le x\le l-t\right\}\cap Q_T$, $u(x,t)\equiv 0$ мешавад.*

Барои исботи теоремаи мавҷудият мо соҳаи росткунҷашаклро бо диагоналҳои он ба чор секунҷа ҷудо мекунем. Сипас дар ҳар яке аз зерсоҳаҳои ҳосилшуда муодилаи интегралии мувофиқ тартиб дода, ҳалшавандагии онро исбот менамоем. Дар анҷом нишон медиҳем, ки ҳар чаҳор ҳалли сохташуда ҳангоми гузаштан аз сарҳади як соҳа ба соҳаи дигар бефосилагии худро нигоҳ медоранд.

Натиҷаи 1. *Бигзор, шартҳои теоремаи 1 иҷро шаванд. Он гоҳ ҳалли масъалаи омехтаи (1) - (3) ба баҳои зерин тобеъ аст:*

$$\operatorname*{Sup}_{(x,t)\in Q_T}|u(x,t)|\le C\left(\operatorname*{Sup}_{t\in[0,T]}|\mu(t)|+\|\nu\|_{L_2[0,T]}+\|f\|_{L_2(Q_T)}\right),$$

ки он нисбат ба q(x,t): $\|q\|_{L_2(Q_T)}\le\gamma$ мунтазам мебошад (илова бар ин, $C=C(\gamma)>0$).

Қайд мекунем, ки аз баҳои овардашуда устувории ҳалли бадастомада нисбат ба шартҳои сарҳадӣ ва қисми рости муодила бармеояд.

Теоремаи 2. *Фарз мекунем, ки дар муодилаи (1) коэффитсиенти тағйирёбандаи q(x,t) танҳо ба синфи $L_2(Q_T)$ тааллуқ дорад. Он гоҳ барои ҳар гуна $T\in(0;l]$ масъалаи омехтаи (1) - (3) аз синфи $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ аз як ҳал зиёд дошта наметавонад.*

Барои исботи теоремаи ягонагӣ дар ҳолате, ки $q(x,t)\equiv 0$ аст, мавҷудияти ду ҳалли масъала фарз карда мешавад ва сипас фарқи онҳо баррасӣ мегардад. Минбаъд бо истифода аз методи спектралии В.А. Илйин нишон дода мешавад, ки ду ҳалли фарзкардашуда бо ҳам мувофиқат мекунанд. Дар ҳолате ки

$q(x,t) \in L_2(Q_T)$ аст, муодилаҳои интегралии мувофиқ тартиб дода мешаванд ва баъдан исбот карда мешавад, ки фарқи тартибдодашудаи ду ҳал ба сифр баробар аст. Дақиқтараш, нишон дода мешавад, ки муодилаҳои интегралии сохташуда якҷинса мебошанд.

Дар **банди сеюм** теоремаҳо оид ба мавҷудияти ҳал ҳангоми $T = l$ ва ягонагии он ҳангоми $T \leq l$ барои масъалаи идоракунии сарҳадии (1) - (4) таҳия ва исбот шудаанд. Дар аввал ҳолати хусусии масъалаи идоракунии сарҳадии баррасишаванда муоина шудааст. Ин имкон медиҳад, ки хусусиятҳои асосии усули исбот муайян карда шуда, замина барои гузариш ба ҳолати умумии масъала омода гардад.

Тасдиқи 1. *Фарз мекунем, ки* $T \leq l$ *ва* $q(x,t)$ *унсури сифрии синфи* $L_2(Q_T)$ *мебошад. Он гоҳ, масъалаи идоракунии сарҳадии III аз синфи* $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ *аз як ҳал зиёд дошта наметавонад.*

Акнун тасдиқ дар бораи мавҷудияти ҳалли масъалаи идоракунии сарҳадии (1) - (4) барои ҳолати хусусии баррасишаванда оварда мешавад.

Тасдиқи 2. *Бигзор, q(x,t) унсури сифрии синфи* $L_2(Q_T)$ *ва* $T = l$ *бошад. Он гоҳ талаби зерин шарти зарурӣ ва кифоягӣ барои мавҷудияти ҳалли ягонаи масъалаи идоракунии сарҳадии (1)-(4) аз синфи* $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ *мебошад:*

$$\varphi(0) + \varphi(l) - \varphi_1(0) - \varphi_1(l) + \int_0^l \psi(x)dx + \int_0^l \psi_1(x)dx + \int_0^l d\tau \int_\tau^{l-\tau} f(\eta,\tau)d\eta = 0.$$

Ҳангоми иҷрои ин шарт ҳалли масъалаи мазкур бо формулаи зерин дода мешавад:

$$u(x,t) = \begin{cases} u_1(x,t) \text{ дар } \Delta_1, \\ u_2(x,t) \text{ дар } \Delta_2, \\ u_3(x,t) \text{ дар } \Delta_3, \\ u_4(x,t) \text{ дар } \Delta_4, \end{cases}$$

ки дар ин ҷо

$$u_1(x,t) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x+t) + \varphi(x-t) + \int_{x-t}^{x+t} \psi(\xi)d\xi + \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi,\tau)d\xi d\tau\right];$$

$$u_2(x,t) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x+t) + \varphi_1(x-t+l) + \varphi_1(0) - \varphi(l) + \int_l^{x+t} \psi(\xi)d\xi - \right.$$

$$\left. - \int_0^{x-t+l} \psi(\xi)d\xi + \iint_{\Omega_{21}} f(\xi,\tau)d\xi d\tau - \iint_{\Omega_{22}} f(\xi,\tau)d\xi d\tau - \iint_{\Omega_{24}} f(\xi,\tau)d\xi d\tau\right];$$

$$\Omega_{21} \equiv \Omega_{21}(x,t) = \left\{(\xi,\tau): 0 \le \tau \le \frac{x+t}{2},\ \ \tau \le \xi \le x+t-\tau\right\};$$

$$\Omega_{24} \equiv \Omega_{24}(x,t) = \left\{(\xi,\tau): \frac{l}{2} \le \tau \le l,\ \ \ \frac{x-t+l}{2} + \left|\tau - \frac{t-x+l}{2}\right| \le \xi \le \tau\right\};$$

$$\Omega_{22} \equiv \Omega_{22}(x,t) = \left\{(\xi,\tau): \frac{x+t}{2} \le \tau \le \frac{l-x+t}{2},\ \ x+|\tau-t| \le \xi \le \frac{l}{2} - \left|\tau - \frac{l}{2}\right|\right\};$$

$$u_3(x,t) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x-t) - \varphi(0) + \varphi_1(l) + \varphi_1(x+t-l) - \int_0^{x-t} \psi(\xi)d\xi + \right.$$

$$\left. + \iint_{\Omega_{31}} f(\xi,\tau)d\xi d\tau - \iint_{\Omega_{33}} f(\xi,\tau)d\xi d\tau - \iint_{\Omega_{34}} f(\xi,\tau)d\xi d\tau\right];$$

$$\Omega_{31} \equiv \Omega_{31}(x,t) = \left\{(\xi,\tau): 0 \le \tau \le \frac{l-x+t}{2},\ \ x-t+\tau \le \xi \le l-\tau\right\};$$

$$\Omega_{34} \equiv \Omega_{34}(x,t) = \left\{(\xi,\tau): \frac{l}{2} \le \tau \le l,\ \ l-\tau \le \xi \le \frac{x+t}{2} - \left|\tau - \frac{x+t}{2}\right|\right\};$$

$$\Omega_{33} \equiv \Omega_{33}(x,t) = \left\{(\xi,\tau): \frac{l-x+t}{2} \le \tau \le \frac{x+t}{2},\ \ \frac{l}{2} + \left|\tau - \frac{l}{2}\right| \le \xi \le x - |\tau-t|\right\};$$

$$u_4(x,t) = \frac{1}{2}\left[\varphi_1(x+t-l) + \varphi_1(x-t+l) + \int_{x-t+l}^{x+t-l} \psi_1(\xi)d\xi + \int_t^l \int_{x+t-\tau}^{x-t+\tau} f(\xi,\tau)d\xi d\tau\right],$$

Δ_1 —секунҷаест, ки бо хатҳои $x-t=0,\ x+t-l=0,\ t=0$ маҳдуд шудааст;

Δ_2 —секунҷаест, ки бо хатҳои $x-t=0,\ x+t-l=0,\ x=0$ маҳдуд шудааст;

Δ_3 —секунҷаест, ки бо хатҳои $x-t=0,\ x+t-l=0,\ x=l$ маҳдуд шудааст;

Δ_4 —секунҷаест, ки бо хатҳои $x-t=0,\ x+t-l=0,\ t=l$ маҳдуд шудааст.

Дар айни ҳол идоракуниҳои сарҳадии ҷустуҷӯшаванда бо ёрии формулаҳои аналитикии зерин ҳисоб карда мешаванд:

$$\mu(t) = \frac{1}{2}\left[\varphi(t) + \varphi(0) + \int_0^t \psi(x)dx + \varphi_1(l-t) - \varphi_1(l) + \int_{l-t}^{l} \psi_1(x)dx - \int_0^l d\tau \int_{\tau-t}^{\tau} f(\xi,\tau)d\xi\right],$$

$$\nu(t) = \frac{1}{2}\left[\varphi'(l-t) - \psi(l-t) + \varphi_1'(t) + \psi_1(t) - \int_0^l f(l+t-\tau,\tau)d\tau\right].$$

Акнун ҳолати умумии масъалаи баррасишавандаи идоракунии сарҳадии (1) - (4)-ро дида мебароем. Бе махдуд кардани умумият, дар оянда барои содагӣ ва осон намудани ҳисоббарориҳо чунин мешуморем, ки функсияи $f(x,t)$ унсури сифрии синфи $L_2(Q_T)$ мебошад.

Теоремаи 3. *Бигзор, коэффитсиенти $q(x,t)$ дар муодилаи (1) ба синфи $L_2(Q_T)$ тааллуқ дошта бошад. Он гоҳ барои ҳар як $T\in(0,l]$ масъалаи идоракунии сарҳадии (1)-(4) танҳо як ҳал аз синфи $\widehat{W}_2{}^1(Q_T)$ дошта метавонад.*

Ишораҳои зеринро дохил мекунем:

$$\varphi(0)+\varphi(l)+\int_0^l \psi(\xi)d\xi \equiv A_0; \quad \varphi_1(0)+\varphi_1(l)-\int_0^l \psi_1(\xi)d\xi \equiv B_0.$$

Теоремаи 4. *Бигзор, $T=l$ ва $q(x,t)\in L_2(Q_T)$ бошад. Он гоҳ, барои мавҷудияти ҳалли масъалаи идоракунии сарҳадии (1)-(4) аз синфи $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ зарур аст, ки шарти зерин иҷро шавад:*

$$A_0+\int_0^{\frac{l}{2}} d\tau \int_\tau^{l-\tau} q(\xi,\tau)u_1(\xi,\tau)d\xi = B_0+\int_{\frac{l}{2}}^{l} d\tau \int_{l-\tau}^{\tau} q(\xi,\tau)u_4(\xi,\tau)d\xi,$$

ки дар он $u_1(x,t)$ ва $u_4(x,t)$ мувофиқи формулаҳои зерин ҳисоб карда мешаванд:

$$u_1(x,t)=\hat{u}_1(x,t)+\sum_{k=1}^{\infty}\left[G_1^k\hat{u}_1\right](x,t),$$

$$\hat{u}_1(x,t)=\frac{1}{2}\left[\varphi(x+t)+\varphi(x-t)+\int_{x-t}^{x+t}\psi(\xi)d\xi\right],$$

$$[G_1\hat{u}_1](x,t)=\frac{1}{2}\int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} q(\xi,\tau)\hat{u}_1(\xi,\tau)d\xi\,;$$

$$u_4(x,t)=\hat{u}_4(x,t)+\sum_{k=1}^{\infty}\left[G_4^k\hat{u}_4\right](x,t),$$

$$\hat{u}_4(x,t)=\frac{1}{2}\left[\varphi_1(x+t-l)+\varphi_1(x-t+l)-\int_{x+t-l}^{x-t+l}\psi_1(\xi)d\xi\right],$$

$$[G_4\hat{u}_4](x,t)=\frac{1}{2}\int_t^l d\tau \int_{x+t-\tau}^{x-t+\tau} q(\xi,\tau)\hat{u}_4(\xi,\tau)d\xi\,.$$

Теоремаи 5. *Бигзор, $T=l$ ва $q(x,t)\in L_2(Q_T)$ бошад. Он гоҳ, муносибати дар теоремаи 4 овардашуда шарти кифоягӣ низ барои мавҷудияти ҳалли ягонаи масъалаи идоракунии сарҳадии (1) - (4) аз синфи $\widehat{W}_2^1(Q_l)$ мебошад.*

Эзоҳи 2. Барои ҳалли масъалаи идоракунии сарҳадии (1)-(4) баҳои априории зерин ҷой дорад:

$$\|u(x,t)\|_{\widehat{W}_2^1(Q_l)} \le L\left(\|\varphi\|_{W_2^1[0,l]} + \|\varphi_1\|_{W_2^1[0,l]} + \|\psi\|_{L_2[0,l]} + \|\psi_1\|_{L_2[0,l]}\right),$$

ки дар он доимии L ба нормаи функсияҳои ба масъала дохилшуда вобаста нест. Ин баҳо нишон медиҳад, ки ҳалли бадастомада нисбат ба шартҳои ибтидоӣ ва ниҳоӣ устувор аст.

Ғайр аз ин, агар $\|q\|_2 \to 0$, он гоҳ $\|\mu - \widehat{\mu}\|_{W_2^1[0,T]} \to 0$ ва $\|\nu - \hat{\nu}\|_{L_2[0,T]} \to 0$, ки дар онҳо $\widehat{\mu}(t) = \hat{u}(0,t),\ \hat{\nu}(t) = \hat{u}_x(l,t)$.

Ин аз регулярӣ будани ҳалли масъалаи идоракунии сарҳадии (1)-(4) нисбат ба ошӯби аддитивии $q(x,t)u(x,t)$ дар (1) бо коэффитсиенти бо квадрат замшавандаи $q(x,t)$ шаҳодат медиҳад.

Ҳангоми $T>l$ будан масъалаи идоракунии сарҳадӣ дорои шумораи беохири ҳалҳо мебошад. Аз ин рӯ, дар ин маврид масъалаи оптимизатсияи идоракунии сарҳадӣ ба миён меояд. Он дар ёфтани чунин функсияҳои $\mu(t) \in W_2^1[0,T], \nu(t) \in L_2[0,T]$ ифода меёбад, ки бо назардошти шартҳои алоқа, ки аз иҷрои шартҳои ибтидоӣ ва ниҳоӣ бармеоянд, ба интеграли энергияи сарҳадӣ қимати хурдтарин медиҳанд.

Банди чоруми боби дуюм ба ҳалли масъалаи таҳияшуда бахшида шудааст. Натиҷаи асосии ин банд теоремаи 6 мебошад.

Теоремаи 6. *Бигзор, дар масъалаи идоракунии сарҳадии (1)-(4)* $T = 2ln + \Delta$, *ки дар он* $n \in N$, $\Delta \in [0; 2l]$ *ва* $q(x,t) \equiv 0$ *бошад. Он гоҳ идоракуниҳои сарҳадии ягонаи* $u(0,t) = \mu(t) \in W_2^1[0,T], u_x(l,t) = \nu(t) \in L_2[0,T]$ *вуҷуд доранд, ки системаи лаппишро аз ҳолати ибтидоии (3) ба ҳолати ниҳоии (4) мееоранд ва ҳамзамон ба интеграли энергияи сарҳадии зерин қимати хурдтарин медиҳанд:*

$$\int_0^T \{[\mu'(t)]^2 + [\nu(t)]^2\} dt.$$

Ин идоракуниҳои сарҳадӣ барои ҳамаи $0 \le t \le \Delta$ *ва* $m = \overline{0,n}$ *ва барои ҳамаи* $\Delta \le t \le 2l$ ва $m = \overline{0,n-1}$ *бо формулаҳои зерин муайян карда мешаванд:*

ҳангоми $0 \le \Delta \le l$:

$$\mu(2lm + t) = \varphi(0) + m\int_0^{2l} F_1(\eta)d\eta + \int_0^t F_1(\eta)d\eta,$$

$$\nu(2lm + t) = F_2(t),$$

ки дар ин ҷо

$$F_1(t)=\begin{cases}(-1)^{m+1}\cdot\dfrac{A_2(t)}{2n+1}+(-1)^{m+1}\cdot\dfrac{\sum_{m=0}^{n}(-1)^m C}{2n+1}+C, & t\in[0;\Delta];\\ (-1)^{m+1}\cdot\dfrac{A_3(t)}{2n}+(-1)^{m+1}\cdot\dfrac{\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m C}{2n}+C, & t\in[\Delta;l];\\ (-1)^{m+1}\cdot\dfrac{A_1(t-l)}{2n+1}+(-1)^{m+1}\cdot\dfrac{\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m C}{2n+1}+C, & t\in[l;l+\Delta];\\ (-1)^{m+1}\cdot\dfrac{A_4(t-l)}{2n}+(-1)^{m+1}\cdot\dfrac{\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m C}{2n}+C, & t\in[l+\Delta;2l];\end{cases}$$

$$F_2(t)=\begin{cases}(-1)^{m}\cdot\dfrac{A_1(t)}{2n+1}+(-1)^{m}\cdot\dfrac{\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m C}{2n+1}+C, & t\in[0;\Delta];\\ (-1)^{m}\cdot\dfrac{A_4(t)}{2n}+(-1)^{m}\cdot\dfrac{\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m C}{2n}, & t\in[\Delta;l];\\ (-1)^{m}\cdot\dfrac{A_2(t-l)}{2n+1}+(-1)^{m}\cdot\dfrac{\sum_{m=0}^{n}(-1)^m C}{2n+1}, & t\in[l;l+\Delta];\\ (-1)^{m}\cdot\dfrac{A_3(t-l)}{2n}+(-1)^{m}\cdot\dfrac{\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m C}{2n}, & t\in[l+\Delta;2l];\end{cases}$$

$$A_1(t)=\frac{1}{2}\Bigg[\varphi_1'(t-\Delta+l)+\varphi'(l-t)+\psi_1(t-\Delta+l)-\psi(l-t)-\\ -\int_l^{2ln+\Delta} f(x+2ln+l-\tau,\tau)d\tau-\int_0^l f(l-t+\tau,\tau)d\tau\Bigg];$$

$$A_2(t)=\frac{1}{2}\Bigg[\varphi_1'(\Delta-t)-\varphi'(t)-\psi_1(\Delta-t)-\psi(t)+\\ +\int_l^{2ln+\Delta} f(\tau-t-2ln,\tau)d\tau-\int_0^l f(t-\tau,\tau)d\tau\Bigg];$$

$$A_3(t)=\frac{1}{2}\Bigg[\varphi_1'(t-\Delta)-\varphi'(t)+\psi_1(t-\Delta)-\psi(t)-\\ -\int_l^{2ln+\Delta} f(t+2ln-\tau,\tau)d\tau-\int_0^l f(t-\tau,\tau)d\tau\Bigg];$$

$$A_4(t)=\frac{1}{2}\Bigg[\varphi_1'(\Delta-t+l)+\varphi'(l-t)-\psi_1(\Delta-t+l)-\psi(l-t)+\\ +\int_l^{2ln+\Delta} f(t-2ln-t+\tau,\tau)d\tau-\int_0^l f(l-t+\tau,\tau)d\tau\Bigg];$$

$$C=\begin{cases}\dfrac{(4s-2)[\varphi_1(0)-\varphi(0)]+\int_{\Delta}^{l}A_3(t)dt}{8s^2l-8sl+4s\Delta+l-\Delta} & \text{ҳангоми } n=2s-1,\\[2ex] \dfrac{(4s+1)[\varphi_1(0)-\varphi(0)]+\int_{0}^{\Delta}A_2(t)dt}{4s\Delta+8s^2l+2sl} & \text{ҳангоми } n=2s;\end{cases}$$

ҳангоми $l \le \Delta \le 2l$:

$$\mu(2lm+t)=\varphi(0)+m\int_0^{2l}F_3(\eta)d\eta+\int_0^{t}F_3(\eta)d\eta,\quad \nu(2lm+t)=F_4(t),$$

ки дар ин ҷо

$$F_3(t)=\begin{cases}(-1)^{m+1}\cdot\dfrac{B_1(t)}{2n+2}+(-1)^{m+1}\cdot\dfrac{\sum_{m=0}^{n}(-1)^mC_1}{2n+2}+C_1, t\in[0;\Delta-l];\\ (-1)^{m+1}\cdot\dfrac{B_4(t)}{2n+1}+(-1)^{m+1}\cdot\dfrac{\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^mC_1}{2n+1}+C_1, t\in[\Delta-l;l];\\ (-1)^{m+1}\cdot\dfrac{B_2(t-l)}{2n+2}+(-1)^{m+1}\cdot\dfrac{\sum_{m=0}^{n}(-1)^mC_1}{2n+2}+C_1, t\in[l;\Delta];\\ (-1)^{m+1}\cdot\dfrac{B_3(t-l)}{2n+1}+(-1)^{m+1}\cdot\dfrac{\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^mC_1}{2n+1}+C_1, t\in[\Delta;2l];\end{cases}$$

$$F_4(t)=\begin{cases}(-1)^{m}\cdot\dfrac{B_2(t)}{2n+2}+(-1)^{m}\cdot\dfrac{\sum_{m=0}^{n}(-1)^mC_1}{2n+2}, & t\in[0;\Delta-l];\\ (-1)^{m}\cdot\dfrac{B_3(t)}{2n+1}+(-1)^{m}\cdot\dfrac{\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^mC_1}{2n+1}, & t\in[\Delta-l;l];\\ (-1)^{m}\cdot\dfrac{B_1(t-l)}{2n+2}+(-1)^{m}\cdot\dfrac{\sum_{m=0}^{n}(-1)^mC_1}{2n+2}, & t\in[l;\Delta];\\ (-1)^{m}\cdot\dfrac{B_4(t-l)}{2n+1}+(-1)^{m}\cdot\dfrac{\sum_{m=0}^{n}(-1)^mC_1}{2n+1}, & t\in[\Delta;2l];\end{cases}$$

$$B_1(t)=\frac{1}{2}\Bigg[\varphi_1'(t-\Delta+2l)-\varphi'(t)+\psi_1(t-\Delta+2l)-\psi(t)-$$
$$-\int_l^{2ln+\Delta}f(t+2ln+2l-\tau,\tau)d\tau-\int_0^{l}f(t-\tau,\tau)d\tau\Bigg];$$

$$B_2(t)=\frac{1}{2}\Bigg[\varphi_1'(\Delta-l-t)+\varphi'(l-t)-\psi_1(\Delta-l-t)-\psi(l-t)+$$
$$+\int_l^{2ln+\Delta}f(\tau-l-2ln-t,\tau)d\tau-\int_0^{l}f(l-t+\tau,\tau)d\tau\Bigg];$$

$$B_3(t) = \frac{1}{2}\left[\varphi_1'(t-\Delta+l) + \varphi'(l-t) + \psi_1(t-\Delta+l) - \psi(l-t) - \right.$$
$$\left. - \int_l^{2ln+\Delta} f(t+2ln+l-\tau,\tau)d\tau - \int_0^l f(l-t+\tau,\tau)d\tau\right];$$

$$B_4(t) = \frac{1}{2}\left[\varphi_1'(\Delta-t) - \varphi'(t) - \psi_1(\Delta-t) - \psi(t) + \right.$$
$$\left. + \int_l^{2ln+\Delta} f(\tau-2ln-t,\tau)d\tau - \int_0^l f(t-\tau,\tau)d\tau\right];$$

$$C_1 = \begin{cases} \dfrac{4s[\varphi_1(0)-\varphi(0)] + \int_0^{\Delta-l} B_1(t)dt}{8s^2l + 4s\Delta - 4sl} & \text{барои } n = 2s-1, \\ \dfrac{(4s+1)[\varphi_1(0)-\varphi(0)] + \int_{\Delta-l}^{l} B_4(t)dt}{8s^2l + 4s\Delta + 2sl + \Delta} & \text{барои } n = 2s. \end{cases}$$

Барои исботи теоремаи 6 дар оғоз ду тасдиқи ёрирасон исбот карда мешавад, ки барои ба даст овардани шартҳои алоқа мусоидат менамоянд. Сипас барои ёфтани идоракуниҳои оптималӣ леммаи Илйин - Моисеев ва усули Лагранҷ истифода бурда мешаванд.

Аз нуқтаи назари татбиқот, махсусан барои истисно намудани имконияти ворид шудани раванди идоракунии сарҳадӣ ба резонанс, муҳим аст, ки қимати хурдтарини интеграли энергияи сарҳадӣ, ки ба идоракуниҳои сарҳадии оптималӣ мувофиқ аст, ҳангоми калон шудани фосилаи вақти идоракунӣ ба сифр майл намояд.

Агар $suppf(x,t) \in Q_{T_*}, T_* = const$ (яъне таъсири берунаи $f(x,t)$ ҳангоми $T > T_*$ айниятан ба сифр баробар бошад), пас қимати хурдтарини интеграли энергияи сарҳадӣ тартиби $O\left(\frac{1}{T}\right)$ дорад. Доимие, ки дар баҳои ҳосилшуда иштирок мекунад, ба нормаи функсияҳои $\varphi(x), \varphi_1(x) \in W_2^1[0,l]$; $\psi(x), \psi_1(x) \in L_2[0,l]$; $f(x,t) \in L_2(Q_T)$ ва лаҳзаи вақти T вобаста мебошад. Ин ҳолат аз он шаҳодат медиҳад, ки қимати хурдтарини интеграли энергияи сарҳадӣ ҳангоми $T \to \infty$ ба сифр майл мекунад ва имкон медиҳад, ки аз ворид шудани раванди лаппиши тор ба резонанс пешгирӣ карда шавад.

Дар **боби сеюм** барои муодилаи (1) масъалаи идоракунии сарҳадии равандҳое, ки бо ин муодила тавсиф мешаванд, тавассути қувваи чандирӣ дар сарҳади чапи $x = 0$ ва ҷойивазкунӣ дар сарҳади рости $x = l$ таҳқиқ карда мешавад:

$$u_x(0,t) = \mu(t), \ \ u(l,t) = \nu(t) \quad \text{ҳангоми} \quad 0 \le t \le T. \tag{7}$$

Боби сеюм низ аз чор банд иборат аст. Ба мисли боби 2, дар банди якум гузориши масъалаҳо ва таърифҳои зарурӣ оварда мешаванд.

Дар масъалаи идоракунии сарҳадии (1), (3), (4) ва (7) фарз карда мешавад, ки коэффитсиенти $q(x,t)$ танҳо ба синфи $L_2(Q_T)$ тааллуқ дорад, $\varphi(x),\ \varphi_1(x) \in \in W_2^1[0,l], \psi(x),\ \psi_1(x) \in L_2[0,l], f(x,t) \in L_2(Q_T)$ ва шартҳои мувофиқати $\nu(0) = \varphi(l), \nu(T) = \varphi_1(l)$ иҷро мешаванд.

Ҳалли масъалаи ҳосилшударо дар синфи $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ ҷустуҷӯ мекунем. Барои муайян намудани ҳалли умумишудаи масъалаи идоракунии сарҳадии баррасишаванда бо маънои айнияти интегралӣ, инчунин аз синфи $\widehat{W}_2^2(Q_T)$ истифода мебарем. Таърифҳои ҳалли масъалаҳои баррасишаванда бо қиёс ба таърифҳое, ки дар боби дуюм оварда шудаанд, дар асоси айнияти интегралии мувофиқ баён карда мешаванд.

Дар **банди дуюми боби 3** ҳалшавандагии масъалаи омехтаи (1), (3) ва (7) омӯхта мешавад. Дар ин ҷо шартҳое баррасӣ мешаванд, ки дар онҳо масъала бо маънои айнияти интегралӣ ҳалли ягонаи умумишуда дорад, инчунин хосияти ҳал ва хусусияти вобастагии он аз функсияҳои сарҳадӣ таҳқиқ карда мешаванд.Тасдиқи зерин ҳангоми сифрӣ будани шартҳои аввала исбот карда шудааст.

Леммаи 2. *Бигзор, $T \leq l$ ва $q(x,t), f(x,t) \in L_2(Q_T)$ бошанд. Он гоҳ ҳалли умумишудаи масъалаи омехтаи (1), (3) ва (7) аз синфи $\widehat{W}_2{}^1(Q_T)$ ҳар гуна функсияи $u(x,t)$ мебошад, ки дар Q_T маҳдуд аст ва муносибати зеринро қонеъ мегардонад:*

$$u(x,t) = -\int_0^{t-x} \underline{\mu}(\tau)d\tau + \underline{\nu}(t+x-l) + \frac{1}{2}\int_0^{t-x} d\tau \int_0^{t-x-\tau} [q(\xi,\tau)u(\xi,\tau) + f(\xi,\tau)]d\xi +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{t} d\tau \int_{\frac{\tau-t+x}{2}+\left|\frac{\tau-t+x}{2}\right|}^{l-|\tau-t-x-l|} [q(\xi,\tau)u(\xi,\tau) + f(\xi,\tau)]d\xi. \quad (8)$$

Эзоҳи 3. Агар $\underline{\mu}(t) \in W_2^1(-\varepsilon_1, T]\ \ \forall\, \varepsilon_1 > 0,\ \underline{\nu}(t) \in W_2^2(-\varepsilon_2, T]\ \ \forall\, \varepsilon_2 > 0,$ коэффитсиенти $q(x,t)$ ҳамроҳ бо ҳосилаи худ $q_x(x,t)$ дар росткунҷаи Q_T маҳдуд бошанд, инчунин функсияи $f(x,t)$ ба синфи $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ тааллуқ дошта бошад, он гоҳ ҳалли омехтаи масъалаи (1), (3) ва (7), ки дар леммаи 2 баррасӣ шудааст, ба синфи $\widehat{W}_2^2(Q_T)$ тааллуқ хоҳад дошт.

Натиҷаҳои асосии ин банд теоремаҳои (7) ва (8) мебошанд.

Теоремаи 7. *Бигзор, $T \leq l$ бошад ва функсияҳои $q(x,t)$ ва $f(x,t)$ ба синфи $L_2(Q_T)$ тааллуқ дошта бошанд. Он гоҳ муодилаи интегралии (8) ҳалли ягонаи* *маҳдуд дорад. Ғайр аз ин, агар шарти* $f(x,t) \equiv 0$ *иҷро шавад, пас дар соҳаи* $\left\{(x,t): 0 \le t \le \frac{l}{2}, t \le x \le l-t\right\} \cap Q_T$, $u(x,t) \equiv 0$ *мешавад.*

Натиҷаи 2. *Бигзор, шартҳои теоремаи 7 иҷро шаванд. Он гоҳ ҳалли масъалаи омехтаи (1), (3) ва (7) ба баҳои зерин тобеъ мебошад:*

$$\operatorname*{Sup}_{(x,t)\in Q_T} |u(x,t)| \le C\left(\|\mu(t)\|_{L_2[0,T]} + \operatorname*{Sup}_{t\in[0,T]} |\nu(t)| + \|f\|_{L_2(Q_T)}\right). \qquad (9)$$

Ин баҳо нисбат ба $q(x,t)$*:* $\|q\|_{L_2(Q_T)} \le \gamma$, $C = C(\gamma) > 0$ *мунтазам аст.*

Аз баҳои (9) устувории ҳалли масъалаи баррасишаванда нисбат ба шартҳои сарҳадӣ ва қисми рости муодила бармеояд.

Теоремаи 8. *Фарз мекунем, ки дар муодилаи (1) коэффитсиенти тағйирёбандаи* $q(x,t)$ *танҳо ба синфи* $L_2(Q_T)$ *таaллуқ дорад. Он гоҳ барои ҳар гуна* $T \in (0,l]$ *масъалаи омехтаи (1), (3) ва (7) аз синфи* $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ *аз як ҳал зиёд дошта наметавонад.*

Дар **банди сеюм** мавҷудияти ҳалли масъалаи идоракунии сарҳадии (1), (3), (4) ва (7) ҳангоми $T = l$ ва ягонагии он ҳангоми $T \le l$ омӯхта шудааст.

Дар аввал теорема дар бораи ягонагиро меорем.

Теоремаи 9. *Бигзор,* $q(x,t)$ *дар муодилаи (1) ба синфи* $L_2(Q_T)$ *таaллуқ дошта бошад. Он гоҳ барои дилхоҳ* $T \in (0,l]$ *масъалаи идоракунии сарҳадии (1), (3), (4) ва (7) аз синфи* $\widehat{W}_2{}^1(Q_T)$ *танҳо як ҳал дошта метавлнад.*

Дар оянда барои содагардонии ҳисобҳо $f(x,t) \equiv 0$ мегузорем.

Теоремаи 10. *Бигзор,* $T = l$ *ва* $q(x,t) \in L_2(Q_T)$ *бошад. Он гоҳ, барои мавҷуд будани ҳалли масъалаи идоракунии сарҳадии (1), (3), (4) ва (7) аз синфи* $\widehat{W}_2^1(Q_T)$*, зарур аст, ки функсияҳои ибтидоӣ ва ниҳоӣ муносибати зеринро қонеъ намоянд:*

$$A_0 + \int_0^{\frac{l}{2}} \int_{\tau}^{l-\tau} q(\xi,\tau)u_1(\xi,\tau)d\xi d\tau = B_0 + \int_{\frac{l}{2}}^{l} \int_{l-\tau}^{\tau} q(\xi,\tau)u_4(\xi,\tau)d\xi d\tau,$$

ки дар он A_0, B_0 *– доимиҳои дар боло овардашуда мебошанд. Бузургиҳои* $u_1(x,t)$ *ва* $u_4(x,t)$ *аз рӯйи формулаҳои зерин ҳисоб карда мешаванд:*

$$u_1(x,t) = \hat{u}_1(x,t) + \sum_{k=1}^{\infty} [T_1^k \hat{u}_1](x,t), \quad \hat{u}_1(x,t) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x+t) + \varphi(x-t) + \int_{x-t}^{x+t} \psi(\xi)d\xi\right],$$

$$[T_1\hat{u}_1](x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} q(\xi,\tau)\hat{u}_1(\xi,\tau)d\xi\,; \quad u_4(x,t) = \hat{u}_4(x,t) + \sum_{k=1}^{\infty} [T_4^k \hat{u}_4](x,t),$$

$$\hat{u}_4(x,t) = \frac{1}{2}\left[\varphi_1(x+t-l) + \varphi_1(x-t+l) - \int\limits_{x+t-l}^{x-t+l} \psi_1(\xi)d\xi\right],$$

$$[T_4\hat{u}_4](x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_t^l d\tau \int\limits_{x+t-\tau}^{x-t+\tau} q(\xi,\tau)\hat{u}_4(\xi,\tau)d\xi\,.$$

Теоремаи 11. *Бигзор, $T = l$ ва $q(x,t) \in L_2(Q_T)$ бошад. Он гоҳ муносибати дар теоремаи 10 овардашуда шарти кифоягӣ низ барои мавҷудияти ҳалли ягонаи масъалаи идоракунии сарҳадии (1), (3), (4) ва (7) аз синфи $\widehat{W}_2^1(Q_l)$ мебошад.*

Эзоҳи 4. Барои ҳалли масъалаи идоракунии сарҳадии (1), (3), (4) ва (7) баҳои априории зерин иҷро мешавад:

$$\|u(x,t)\|_{\widehat{W}_2^1(Q_l)} \le L\big(\|\varphi\|_{W_2^1[0,l]} + \|\varphi_1\|_{W_2^1[0,l]} + \|\psi\|_{L_2[0,l]} + \|\psi_1\|_{L_2[0,l]}\big),$$

ки дар он доимии L ба норми функсияҳое, ки ба масъала дохил мешаванд, вобаста нест. Ин баҳо далели устувории ҳалли бадастомада нисбат ба шартҳои ибтидоӣ ва ниҳоӣ мебошад.

Илова бар ин, агар $\|q\|_2 \to 0$, он гоҳ $\|\mu - \hat{\mu}\|_{L_2[0,T]} \to 0$ ва $\|\nu - \hat{\nu}\|_{W_2^1[0,T]} \to 0$, ки дар онҳо $\hat{\mu}(t) = \hat{u}_x(0,t), \hat{\nu}(t) = \hat{u}(l,t)$. Ин аз он шаҳодат медиҳад, ки ҳалли масъалаи идоракунии сарҳадии (1), (3), (4) ва (7) нисбат ба ошӯби аддитивии $q(x,t)u(x,t)$ регулярӣ аст.

Эзоҳи 5. Таҳлили натиҷаҳои бобҳои 2 ва 3 нишон медиҳад, ки дар ҳолати $T = l$ шакли умумии ҳалли $u(x,t)$-и масъалаи идоракунии сарҳадӣ барои муодилаи телеграфӣ бо коэффитсиенти тағйирёбанда, ки раванди баррасишавандаро аз ҳолати ибтидоии ихтиёрии $\{u(x,0) = \varphi(x),\, u_t(x,0) = = \psi(x)\}$ ба ҳолати ниҳоии ихтиёрии $\{u(x,l) = \varphi_1(x),\, u_t(x,l) = \psi_1(x)\}$ мегузаронад, инчунин шартҳои зарурӣ ва кифоягии мавҷудияти чунин идоракунӣ, ба намуди идоракунии сарҳадӣ вобаста нестанд. Яъне, муҳим нест, ки идоракунӣ: бо ҷойивазкунӣ дар сарҳади чап ва қувваи чандирӣ дар сарҳади рост дода шавад: $\{u(0,t) = \mu(t),\, u_x(l,t) = \nu(t)\}$, ё бо қувваи чандирӣ дар сарҳади чап ва ҷойивазкунӣ дар сарҳади рост: $\{u_x(0,t) = \mu(t),\, u(l,t) = \nu(t)\}$. Бо вуҷуди ин, қиматҳои худи идоракуниҳои сарҳадӣ аз якдигар фарқ мекунанд. Онҳо тавассути ҳалли муодилаҳои интегралии дученакаи навъи Вольтерра ифода карда мешаванд. Ин воқеият яке аз натиҷаҳои асосии кори диссертатсионӣ ба шумор меравад.

Дар банди 4-и боби 2 қайд шуда буд, ки ҳангоми $T > l$ масъалаи идоракунии сарҳадӣ дорои шумораи беохири ҳалҳо мебошад. Аз ин рӯ, дар ин маврид масъалаи оптимизатсияи идоракунии сарҳадӣ ба миён меояд. Он дар ёфтани чунин функсияҳои $\mu(t) \in L_2[0,T]$, $\nu(t) \in W_2^1[0,T]$ ифода меёбад, ки бо назардошти шартҳои алоқа, ки аз иҷрои шартҳои ибтидоӣ ва ниҳоӣ бармеоянд, ба интеграли энергияи сарҳадӣ қимати хурдтарин медиҳанд.

Банди 4 -и боби 3 маҳз ба ҳалли ҳамин масъала бахшида шудааст. Натиҷаи асосии ин банд теоремаи 12 мебошад.

Теоремаи 12. *Бигзор, дар масъалаи идоракунии сарҳадии (1), (3), (4) ва (7)* $T = 2ln + \Delta$, *ки дар он* $n \in N$, $\Delta \in [0; 2l]$ *ва* $q(x,t) \equiv 0$ *бошад. Он гоҳ идоракуниҳои сарҳадии ягонаи* $u_x(0,t) = \mu(t) \in L_2[0,T]$, $u(l,t) = \nu(t) \in W_2^1[0,T]$ *мавҷуданд, ки системаи лаппиширо аз ҳолати ибтидоии (3) ба ҳолати ниҳоии (4) меоранд ва ҳамзамон ба интеграли энергияи сарҳадии зерин қимати хурдтарин медиҳанд:*

$$\int_0^T \{[\mu(t)]^2 + [\nu'(t)]^2\} dt.$$

Ин идоракуниҳои сарҳадӣ барои ҳамаи $0 \le t \le \Delta$ *ва* $m = \overline{0,n}$ *ва барои ҳамаи* $\Delta \le t \le 2l$ ва $m = \overline{0,n-1}$ *бо формулаҳои зерин муайян карда мешаванд:*

барои $0 \le \Delta \le l$:

$$\mu(2lm + t) = F_1(t), \quad \nu(2lm + t) = \varphi(l) + m \int_0^{2l} F_2(\eta) d\eta + \int_0^t F_2(\eta) d\eta,$$

ки дар ин ҷо

$$F_1(t) = \begin{cases} (-1)^{m+1} \cdot \dfrac{A_2(t)}{2n+1} + (-1)^m \cdot \dfrac{\sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m C}{2n+1}, & t \in [0; \Delta]; \\ (-1)^m \cdot \dfrac{A_3(t)}{2n} + (-1)^{m+1} \cdot \dfrac{\sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m C}{2n}, & t \in [\Delta; l]; \\ (-1)^{m+1} \cdot \dfrac{A_1(t-l)}{2n+1} + (-1)^m \cdot \dfrac{\sum_{m=0}^{n} (-1)^m C}{2n+1}, & t \in [l; l+\Delta]; \\ (-1)^{m+1} \cdot \dfrac{A_4(t-l)}{2n} + (-1)^m \cdot \dfrac{\sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m C}{2n}, & t \in [l+\Delta; 2l]; \end{cases}$$

$$F_2(t) = \begin{cases} (-1)^m \cdot \dfrac{A_1(t)}{2n+1} + (-1)^{m+1} \cdot \dfrac{\sum_{m=0}^{n} (-1)^m C}{2n+1} + C, & t \in [0; \Delta]; \\ (-1)^m \cdot \dfrac{A_4(t)}{2n} + (-1)^{m+1} \cdot \dfrac{\sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m C}{2n} + C, & t \in [\Delta; l]; \\ (-1)^m \cdot \dfrac{A_2(t-l)}{2n+1} + (-1)^m \cdot \dfrac{\sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m C}{2n+1} + C, & t \in [l; l+\Delta]; \\ (-1)^m \cdot \dfrac{A_3(t-l)}{2n} + (-1)^{m+1} \cdot \dfrac{\sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m C}{2n} + C, & t \in [l+\Delta; 2l]; \end{cases}$$

$$A_1(t)=\frac{1}{2}[\varphi_1'(t-\Delta+l)-\varphi'(l-t)+\psi_1(t-\Delta+l)+\psi(l-t)-$$

$$\left.-\int\limits_{l}^{2ln+\Delta} f(t+2ln+l-\tau,\tau)d\tau+\int\limits_{0}^{l} f(l-t+\tau,\tau)d\tau\right];$$

$$A_2(t)=\frac{1}{2}[\varphi_1'(\Delta-t)+\varphi'(t)-\psi_1(\Delta-t)+\psi(t)+$$

$$\left.+\int\limits_{l}^{2ln+t} f(\tau-t-2ln,\tau)d\tau+\int\limits_{0}^{l} f(l-t+\tau,\tau)d\tau\right];$$

$$A_3(t)=\frac{1}{2}[\varphi_1'(t-\Delta)+\varphi'(t)+\psi_1(t-\Delta)+\psi(t)-$$

$$\left.-\int\limits_{l}^{2ln+\Delta} f(t+2ln-\tau,\tau)d\tau+\int\limits_{0}^{l} f(t-\tau,\tau)d\tau\right];$$

$$A_4(t)=\frac{1}{2}[\varphi_1'(t+\Delta-t)-\varphi'(l-t)-\psi_1(l+\Delta-t)+\psi(l-t)+$$

$$\left.+\int\limits_{l}^{2ln+\Delta} f(l-2ln-t+\tau,\tau)d\tau+\int\limits_{0}^{l} f(l-t+\tau,\tau)d\tau\right];$$

$$C=\begin{cases}\dfrac{(4s-2)[\varphi_1(l)-\varphi(l)]-\int_\Delta^l A_4(t)dt}{8s^2l-8sl+4s\Delta-\Delta+l} & \text{ҳангоми } n=2s-1,\\[2ex] \dfrac{(4s+1)[\varphi_1(l)-\varphi(l)]-\int_0^\Delta A_1(t)dt}{8s^2\Delta+4s\Delta+2sl} & \text{ҳангоми } n=2s;\end{cases}$$

барои $l\le\Delta\le 2l$:

$$\mu(2lm+t)=F_3(t),\qquad \nu(2lm+t)=\varphi(l)+m\int\limits_0^{2l}F_4(\eta)d\eta+\int\limits_0^{t}F_4(\eta)d\eta,$$

где

$$F_3(t)=\begin{cases}(-1)^{m+1}\cdot\dfrac{B_1(t)}{2n+2}+(-1)^m\cdot\dfrac{\sum_{m=0}^{n}(-1)^m C_1}{2n+2}, t\in[0;\Delta-l];\\ (-1)^{m+1}\cdot\dfrac{B_4(t)}{2n+1}+(-1)^m\cdot\dfrac{\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m C_1}{2n+1}, t\in[\Delta-l;l];\\ (-1)^{m+1}\cdot\dfrac{B_2(t-l)}{2n+2}+(-1)^m\cdot\dfrac{\sum_{m=0}^{n}(-1)^m C_1}{2n+2}, t\in[l;\Delta];\\ (-1)^{m}\cdot\dfrac{B_3(t-l)}{2n+1}+(-1)^m\cdot\dfrac{\sum_{m=0}^{n}(-1)^m C_1}{2n+1}, t\in[\Delta;2l];\end{cases}$$

$$F_4(t)=\begin{cases}(-1)^{m}\cdot\dfrac{B_2(t)}{2n+2}+(-1)^{m+1}\cdot\dfrac{\sum_{m=0}^{n}(-1)^m C_1}{2n+2}+C_1, \quad t\in[0;\Delta-l];\\ (-1)^{m+1}\cdot\dfrac{B_3(t)}{2n+1}+(-1)^{m+1}\cdot\dfrac{\sum_{m=0}^{n}(-1)^m C_1}{2n+1}+C_1, t\in[\Delta-l;l];\\ (-1)^{m}\cdot\dfrac{B_1(t-l)}{2n+2}+(-1)^{m+1}\cdot\dfrac{\sum_{m=0}^{n}(-1)^m C_1}{2n+2}+C_1, t\in[l;\Delta];\\ (-1)^{m}\cdot\dfrac{B_4(t-l)}{2n+1}+(-1)^{m+1}\cdot\dfrac{\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m C_1}{2n+1}+C_1, t\in[\Delta;2l];\end{cases}$$

$$B_1(t)=\frac{1}{2}\Bigg[\varphi_1'(t-\Delta+2l)+\varphi'(t)+\psi_1(t-\Delta+2l)+\psi(t)-$$

$$-\int_{l}^{2ln+\Delta} f(t+2ln+2l-\tau,\tau)d\tau+\int_0^l f(t-\tau,\tau)d\tau\Bigg],$$

$$B_2(t)=\frac{1}{2}\Bigg[\varphi_1'(\Delta-l-t)+\varphi'(l-t)-\psi_1(\Delta-l-t)-\psi(l-t)+$$

$$+\int_{l}^{2ln+\Delta} f(\tau-l-2ln-t,\tau)d\tau-\int_0^l f(l-t+\tau,\tau)d\tau\Bigg];$$

$$B_3(t)=\frac{1}{2}\Bigg[\varphi_1'(t-\Delta+l)+\varphi'(l-t)+\psi_1(t-\Delta+l)-\psi(l-t)-$$

$$-\int_{l}^{2ln+\Delta} f(t+2ln+l-\tau,\tau)d\tau-\int_0^l f(l-t+\tau,\tau)d\tau\Bigg];$$

$$B_4(t) = \frac{1}{2}\Bigg[\varphi_1'(\Delta - t) + \varphi'(t) - \psi_1(\Delta - t) + \psi(t) + \\ + \int\limits_{l}^{2ln+\Delta} f(\tau - t - 2ln, \tau)d\tau + \int\limits_{0}^{l} f(t-\tau,\tau)d\tau\Bigg],$$

$$C_1 = \begin{cases} \dfrac{4s[\varphi_1(l) - \varphi(l)] - \int_0^{\Delta-l} B_2(t)dt}{8s^2l + 4s\Delta - 4sl} & \text{ҳангоми } n = 2s-1, \\ \dfrac{(4s+1)[\varphi_1(l) - \varphi(l)] - \int_{\Delta-l}^{l} B_3(t)dt}{8s^2l + 4s\Delta + 2sl + 2\Delta - 2l} & \text{ҳангоми } n = 2s. \end{cases}$$

Агар $suppf(x,t) \in Q_{T_*}, T_* = const$ (яъне таъсири берунии $f(x,t)$ ҳангоми $T > T_*$ айниян ба сифр баробар бошад), пас қимати минималии интеграли энергияи сарҳадӣ тартиби $O\left(\frac{1}{T}\right)$ - ро дорад. Доимие, ки дар баҳои ҳосилшуда иштирок мекунад, ба нормаи функсияҳои $\varphi(x), \varphi_1(x) \in W_2^1[0,l]$; $\psi(x), \psi_1(x) \in L_2[0,l]$; $f(x,t) \in L_2(Q_T)$ ва лаҳзаи вақти T вобаста мебошад. Ин ҳолат аз он шаҳодат медиҳад, ки қимати минималии интеграли энергияи сарҳадӣ ҳангоми $T \to \infty$ ба сифр майл мекунад ва имкон медиҳад, ки аз ворид шудани раванди лапиши тор ба резонанс пешгирӣ карда шавад.

Дар бахши «**Муҳокимаи натиҷаҳои ҳосилшуда**» ба таври мухтасар таҳлили натиҷаҳое, ки дар кори диссертатсионӣ ба даст оварда шудаанд, анҷом дода мешавад ва онҳо бо натиҷаҳои муаллифони дигар муқоиса мегарданд.

ХУЛОСАҲО

Натиҷаҳои асосии илмии диссертатсия

Ҳамин тавр, мо ҳамаи масъалаҳои гузошташударо ба таври муфассал таҳқиқ намудем. Дар поён натиҷаҳои бадастомада ба таври мухтасар оварда мешаванд.

Барои муодилаи телеграфии якченака бо коэффитсиенти тағйирёбандаи намуди

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) - q(x,t)u(x,t) = f(x,t), \ \ 0 < x < l, \ \ 0 < t < T$$

бо маънои умумишуда:

1. Масъалаи идоракунии сарҳадӣ, ки тавассути ҷойивазкунӣ дар сарҳади чап ва қувваи чандирӣ дар сарҳади рост амалӣ мегардад, мавриди омӯзиш қарор дода шуд [1-A], [3-A], [4-A], [7-A], [11-A];
2. Масъалаи идоракунии сарҳадӣ, ки тавассути қувваи чандирӣ дар сарҳади чап ва ҷойивазкунӣ дар сарҳади рост амалӣ мегардад, мавриди омӯзиш қарор дода шуд [2-A], [5-A], [8-A], [9-A], [10-A].

Дар ҳар ду ҳолат:

- теорема дар бораи ягонагии ҳалли масъалаи баррасишавандаи идоракунии сарҳадӣ барои вақтҳои хурд ё баробари критикӣ исбот карда шуд;
- шартҳои зарурӣ ва кифоягии мавҷудияти идоракуниҳои сарҳадии ҷустуҷӯшаванда дар вақти критикӣ ба даст оварда шуданд;
- баҳои априорӣ барои ҳалли масъалаи идоракунии сарҳадӣ ҳосил гардид, ки устувории ҳалли бадастомадаро нисбат ба шартҳои ибтидоӣ ва ниҳоӣ тасдиқ менамояд;
- регулярӣ будани ҳалли масъалаи идоракунии сарҳадӣ нисбат ба ошӯби аддитивии оператори мавҷӣ $q(x,t)u(x,t)$ бо коэффитсиенти бо квадрат замшаванда асоснок карда шуд.

Илова бар ин, яккимата ҳалшавандагии масъалаҳои омехтаи мувофиқ барои муодилаи телеграфии баррасишаванда исбот карда шуд. Аниқаш:

- теоремаҳои ягонагии ҳалли масъалаҳои омехтаи мувофиқ исбот гардиданд;
- теоремаҳои мавҷудияти ҳалли масъалаҳои омехтаи мувофиқ исбот шуданд;
- асоснок карда шуд, ки ҳалли масъалаҳои омехта нисбат ба ошӯби аддитивии $q(x,t)u(x,t)$, инчунин нисбат ба функсияҳое, ки ба гузориши масъалаҳо дохил мешаванд, устувор мебошад.

Бояд таъкид намуд, ки ҳалшавандагии ҳамаи масъалаҳои баррасишуда дар марҳилаи аввал барои муодилаи лаппишҳои маҷбурии тор, ки ҳолати хусусии муодилаи таҳқиқшаванда ҳангоми $q(x,t) \equiv 0$ мебошад, нишон дода шудааст. Барои ин ҳолати хусусӣ ҳамаи тасдиқоти мувофиқ таҳия шуда, исбот гардидаанд.

3. Идоракуниҳои сарҳадии оптималӣ, ки тавассути ҷойивазкунӣ дар сарҳади чап ва қувваи чандирӣ дар сарҳади рост амалӣ мегарданд, дар фосилаи ихтиёрии ба қадри кофӣ калони вақт барои равандҳое, ки бо муодилаи лаппишҳои маҷбурии тор тавсиф мешаванд, сохта шудаанд [6-А];
4. Идоракуниҳои сарҳадии оптималӣ, ки тавассути қувваи чандирӣ дар сарҳади чап ва ҷойивазкунӣ дар сарҳади рост амалӣ мегарданд, дар фосилаи ихтиёрии ба қадри кофӣ калони вақт барои равандҳое, ки бо муодилаи лаппишҳои маҷбурии тор тавсиф мешаванд, сохта шудаанд [6-А].

Тавсияҳо оид ба истифодаи амалии натиҷаҳо

Кори диссертатсионӣ ҷанбаи назариявӣ дорад. Усулҳои дар он таҳияшуда имконият медиҳанд, ки ҳалшавандагии масъалаҳои монанди идоракунии сарҳадӣ барои равандҳои гуногун таҳқиқ карда шаванд. Натиҷаҳои бадастомада метавонанд ҳангоми хондани курсҳои махсус барои донишҷӯёни курсҳои болоӣ, магистрантон ва докторантони (PhD) ихтисосҳои математика ва физика дар муассисаҳои таҳсилоти олии касбӣ истифода гарданд.

Илова бар ин, ба назар гирифта мешавад, ки натиҷаҳои ҳосилшуда инчунин метавонанд барои амсиласозии равандҳои гуногун, ки бо муодилаҳои баррасишуда тавсиф меёбанд, истифода шаванд.

Рӯйхати интишороти довталаби дараҷаи илмӣ

Мақолаҳое, ки дар маҷаллаҳои тақризшавандаи аз ҷониби КОА-и назди Президенти Ҷумҳурии Тоҷикистон ва ё КОА-и назди Вазорати илм ва таҳсилоти олии Федератсияи Русия тавсияшуда нашр шудаанд:

[1-А] Абдукаримов М.Ф. О задаче граничного управления смещением на одном конце и упругой силой на другом для одномерного телеграфного уравнения с переменным коэффициентом [Текст] / М.Ф. Абдукаримов, **Ф.Р. Исматов** // Вестник Бохтарского государственного университета имени Носира Хусрава. Серия естественных наук. – 2025. – 2/3 (138). – С. 5-21.

[2-А] Абдукаримов М.Ф. Об однозначной разрешимости двух комбинированных смешанных задач для телеграфного уравнения с переменным коэффициентом [Текст] / М.Ф. Абдукаримов, **Ф.Р. Исматов** // Вестник филиала МГУ имени М.В.Ломоносова в г. Душанбе. Серия естественных наук. – 2024. – Т.1. – №3(41). – С. 5-31.

[3-А] Абдукаримов М.Ф. О разрешимости одной смешанной задачи для телеграфного уравнения с переменным коэффициентом из класса суммируеммых с квадратом функций [Текст] / М.Ф. Абдукаримов, **Ф.Р. Исматов** // Доклады национальной Академии наук Таджикистана. – 2022. – Т.65. – №9-10. – С. 586-592.

[4-А] Исматов Ф.Р. Однозначная разрешимость двух комбинированных смешанных задач для телеграфного уравнения с переменным коэффициентом из класса L_2 [Текст] / **Ф.Р. Исматов** // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. – 2024. – №4. – С. 15-34.

[5-А] Исматов Ф.Р. Об однозначной разрешимости одной комбинированной задачи граничного управления для телеграфного уравнения с переменным коэффициентам [Текст] / **Ф.Р. Исматов** // Вестник филиала МГУ имени М.В.Ломоносова в г. Душанбе. Серия естественных наук. – 2025. – Т.1. – №1(45). – С. 5-28.

Маводди конференсияҳо ва фишурдаи маърӯзаҳо:

[6-А] Исматов Ф.Р. Об одной задаче оптимального граничного управления для уравнения вынужденных колебаний струны [Текст] / М.Ф. Абдукаримов, **Ф.Р. Исматов** // Материалы международной конференции, посвященной 85-летию со дня рождения выдающегося таджикского математика доктора физико-математических наук, профессора Собирова Темура Сафаровича. – Душанбе, 28-29 ноября 2025. – С. 29-32.

[7-А] Абдукаримов М.Ф. Однозначная разрешимость одной комбинированной задачи граничного управления за критическое время [Текст] / М.Ф. Абдукаримов, **Ф.Р. Исматов** // Материалы международной научно-практической конференции, посвящённой «Двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических наук в сфере науки и образования» и 80-летию со дня рождения профессора Боймурода Алиева. – Душанбе, 2025. – С. 8-11.

[8-А] Абдукаримов М.Ф. О разрешимости одной комбинированной задачи граничного уравнения для уравнения вынужденных колебаний струны за минимальный промежуток времени [Текст] / М.Ф. Абдукаримов, **Ф.Р. Исматов** // Материалы международной научно-практической конференции XIV Ломоносовские чтения «Роль Филиала Московского государственного университета имени М.В.

Ломоносова в городе Душанбе в развитии науки и образования». – Душанбе, 2024. – С. 3-7.

[9-А] Абдукаримов М.Ф. О задаче граничного управления упругой силой на одном конце и смещением на другом процесса, описываемого телеграфным уравнением [Текст] / М.Ф. Абдукаримов, **Ф.Р. Исматов** // Материалы IV международной научно-практической конференции «Современные проблемы математики и её приложений». – Душанбе, 2024. – С. 16-19.

[10-А] Абдукаримов М.Ф. О задаче граничного управления, производимого упругой силой на одном конце и смецением на другом процесса вынужденных колебаний струны [Текст] / М.Ф. Абдукаримов, **Ф.Р. Исматов** // Материалы международной научной конференции, посвящённой 75- летию ТНУ, 20-летию развития точных, естественных и математических наук, 85-летию академика НАН Таджикистана Раджабова Н. – Душанбе, 2023. – С. 12-14.

[11-А] Абдукаримов М.Ф. О граничном управлении смещением на одном конце и упругой силой на другом процесса вынужденных колебаний струны за критическое время [Текст] / М.Ф. Абдукаримов, **Ф.Р. Исматов** // Материалы международной научно-практической конференции «XIII Ломоносовкие чтения», посвящённой 115-летию академика Бободжона Гафурова. Часть 3. Естественные науки. – Душанбе, 2023. – С. 3-6.

РЕСПУБЛИКА ТАДЖИКИСТАН

ТАДЖИКСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УДК 517.956.32: 517.977.56

На правах рукописи

Рахматуллохзода Файзуллох Рахматулло

ИССЛЕДОВАНИЕ КОМБИНИРОВАННЫХ ЗАДАЧ ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРОЦЕССОМ, ОПИСЫВАЕМЫМ ТЕЛЕГРАФНЫМ УРАВНЕНИЕМ С ПЕРЕМЕННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание учёной степени доктора философии (PhD)
– доктора по специальности 6D060100 – Математика (6D060103 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление)

Душанбе – 2026

Диссертация выполнена на кафедре вычислительной математики и механики механико-математического факультета Таджикского национального университета.

Научный руководитель: Абдукаримов Махмадсалим Файзуллоевич, доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой вычислительной математики и механики Таджикского национального университета

Официальные оппоненты: Шамсудинов Файзулло Мамадуллоевич, доктор физико-математических наук, и.о. профессора кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений Бохтарского государственного университета имени Н. Хусрава

Саидов Бахтиёр Бобокалонович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Таджикского государственного финансово-экономического университета

Ведущая организация: Международный университет туризма и предпринимательства Таджикистана

Защита состоится 16.09.2026 года в 14:00 часов на заседании диссертационного совета 6D.КОА-011 при Таджикском национальном университете по адресу: 734027, г. Душанбе, ул. Буни Хисорак, механико-математический факультет, корпус 17, аудитория 203.

E-mail: alisher_gaforov@mail.ru; номер мобильного телефона учёного секретаря: +992900766603.

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной научной библиотеке Таджикского национального университета или на сайте *http://www.tnu.tj*

Автореферат разослан «____» «___________» 2026 года согласно утверждённому списку рассылки.

Учёный секретарь диссертационного совета,
кандидат физико-математических наук **Гафоров А.Б.**

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. «В рамках настоящего диссертационного исследования проводится анализ комбинированных задач граничного управления, возникающие для процессов, описываемых одномерным телеграфным уравнением с переменным коэффициентом из класса L_2. Ключевое внимание сосредоточено на установлении условий существования и единственности решения указанных задач при достижении граничного управления за минимально возможное время» [5].

Аналогичные уравнения и соответствующие постановки задач управления находят широкое применение при построении математических моделей значимых физических явлений. К их числу относятся процессы распространения электромагнитных волн в протяжённых линиях передачи, динамика транспортировки нефти или газа по трубопроводным системам, а также распространение волн в геологических средах.

Задача граничного управления представляется при момощи начально – краевой задачи для дифференциального уравнения, моделирующего исследуемый процесс. Исследование данного направления относится к числу приоритетных и динамично развивающихся областей современной теории управления и теории граничных задач для дифференциальных уравнений, обладая высокой научной значимостью и привлекая постоянное внимание специалистов соответствующих дисциплин.

Степень разработанности темы исследования. В 1988 году Ж.Л.Лионсом были получены фундаментальные результаты в области граничного управления колебательными процессами, рассматриваемыми в форме смешанных задач для волнового уравнения. В его статье [2] исследуется задача успокоения, понимаемая как приведение колебательной системы к состоянию с нулевыми начальными (данными Коши) характеристиками, при наложении граничных условий Дирихле. С использованием аппарата теории гильбертовых пространств автором установлено свойство неединственности решения сформулированной задачи в случае, когда $T > 2l,$ где l обозначает длину струны, а T фиксированный момент времени. Указанный результат доказан в рамках обобщенных решений, принадлежащих классу L_2.

В исследованиях Е.Зуазуа [3] и [4] концепция Лионса была распространена на квазилинейные волновые уравнения с асимптотически линейным характером нелинейности.

В работах А.Г. Бутковского и А.Я. Лернера [7] и [8] представлены методы решения задач оптимального управления линейными системами с распределёнными параметрами, основанные на применении L-проблемы моментов.

В монографии А.Г. Бутковского [9] задача граничного управления исследуется посредством метода Фурье и метода моментов. В результате искомое граничное управление получено в форме ряда Фурье.

В исследовании А.Е. Егорова [12] для конструктивного решения задачи граничного управления применён метод падающих и отраженных волн. В его монографии [13] систематически изложены ключевые направления современной математической теории управления, включая математическое моделирование управляемых систем; основы теории устойчивости нелинейных и управляемых систем; периодические колебания нелинейных систем; фундаментальные положения теории управляемости, наблюдаемости и идентифицируемости; методы теории оптимального управления; элементы теории стохастических управляемых систем. Рассмотрение проводится как для систем с сосредоточенными, так и с распределёнными параметрами. Совместная работа А.Е. Егорова с Л.Н. Знаменской [14] также посвящена указанной проблематике и охватывает различные постановки задач управления, наблюдения и оптимального управления.

В работе Ф.П.Васильева [10] предложена интерпретация теории двойственности применительно к линейным задачам управления и наблюдения. Проблематика граничного управления колебательными процессами с использованием функциональных методов получила развитие в его совместном исследовании с М.М.Потаповым, А.В.Разгулиным и М.А.Куржанским, где разработаны эффективные численные алгоритмы для вычисления искомого граничного управления [11]. Приближённые методы решения задач граничного управления для волнового уравнения рассматриваются также в работах М.М.Потапова и его ученика Д.А. Иванова [25], [26] и [15].

В работе В.А. Ильина [16] впервые для любого T из интервала $0 < T < l$ сформулированы необходимые и достаточные условия существования и найден явный вид граничных управлений смещениями на двух концах, а для случая $T > l$ (точнее, для случая $l < T \leq 2l$) представлен общий вид возможных граничных управлений, включающих две произвольные постоянные и четыре произвольные функции из класса W_2^2 на сегменте по переменной t длины $T - l$, которые переводят колебательный процесс, описываемый однородным волновым уравнением

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0,\ \ 0 < x < l,\ \ 0 < t < T, \qquad (*)$$

из произвольного начального состояния $\{u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x)\}$ в наперед заданное финальное состояние $\{u(x,T) = \varphi_1(x), u_t(x,T) = \psi_1(x)\}$. В этой работе при изучении задачи ключевую роль играет класс $\widehat{W}_2^2[(0 \leq x \leq \leq l) \times (0 \leq t \leq T)]$, впервые введенный В.А.Ильиным в данной работе. Доказано, что случай $T = l$ для задачи граничного управления смещением на двух концах является критическим, т.е. промежуток времени $0 \leq t \leq l$ является минимальным для полной управляемости рассматриваемого процесса при минимальных ограничениях на начальные и финальные условия. Аналогичный результат В.А.Ильиным был получен и в случае, когда управление действует на одном конце струны при закрепленном втором в [17]. Доказано, что критическим в этом случае является момент времени $T = 2l$.

В [18] и [19] В.А. Ильин исследовал задачи граничного управления в терминах обобщенного решения уравнения (*) из класса, допускающего существование конечной энергии. В этих работах все задачи, рассмотренные им раньше в терминах классического решения (*), изучались в обобщенной постановке.

Поскольку в случае, когда момент времени T больше критического, задача граничного управления имеет бесконечно много решений, то приходится решать задачу о нахождении оптимального граничного управления, например, отыскание среди всех управлений того, которое доставляет минимум интегралу граничной энергии. Этой важной практической задаче посвящены совместные работы В.А.Ильина и Е.И.Моисеева [22] и [23].

Надо отметить, что по теме граничного управления процессом, описываемым волновым уравнением (*), как для локальных, так и нелокальных смешанных задач, В.А. Ильин, Е.И. Моисеев и их ученики: А.В. Беликов, Л.Н.Знаменская, А.А. Кулешов, П.В. Луференко, А.А. Никитин, П.А.Рево, А.М.Рогожников, В.В. Тихомиров, А.А.Фролов, А.А. Холомеева, Г.Д.Чабакаури, опубликовали значительный большой цикл работ.

В совместной работе В.А. Ильина и Е.И. Моисеева [20] была изучена задача граничного управления смещением на одном конце при закрепленном втором для телеграфного уравнения

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) + c^2 u(x,t) = 0, \quad 0 < x < l, \ 0 < t < T, \ c = const, \quad (**)$$

при времени, равном критическому, т.е. $T = 2l$. Аналогичная задача в случае, когда управления действуют на обоих концах ими же исследована в [21].

В работах [27]-[29] И.Н. Смирнов исследовал задачу граничного управления смещениями на двух концах для уравнения (**) в случае, когда отрезок $[0, l]$ состоит из двух участков, на которых рассматриваемый процесс имеет разные физические параметры. В этих же работах для уравнения (**) он также изучал некоторые смешанные задачи.

Отметим, что в указанных работах [20], [21] и [27]-[29] для искомого граничного управления найден явный аналитический вид при помощи функции Бесселя.

Проблемы управляемости на сверхкритических промежутках времени для уравнения (**) исследовались для непрерывного неотрицательного коэффицента $q(x)$ в работе В.А. Коморника [1].

Следует отметить, что некоторые вопросы теории смешанных задач, а также задач граничного и оптимального управления с разных точек зрения исследованы в работах В.И. Агошкова, Л.Д. Акуленко, А.А. Андреева, А.Х.Аттаева, В.Р. Барсегяна, А.В. Боровских, А.А. Воронова, М. Исмати, А.З.Ишмухаметова, Е.А. Козловой, Е.К. Костоусовой, С.В. Лексиной, Ф.Е.Ломовцева, А. Манча, М.И. Мустафаева, А.И. Прилепко, А.В. Фурсикова, О.Ю. Эмануилова, М.К. Юнуси и др.

В настоящей диссертации будут исследованы комбинированные задачи граничного управления для уравнения (**) с переменным коэффициентом $q(x,t)$ и правой частью $f(x,t)$, то есть

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) - q(x,t)u(x,t) = f(x,t). \qquad (***)$$

Все задачи будут рассмотрены в обобщенной постановке и будут предположены, что функции $q(x,t)$ и $f(x,t)$ принадлежат только классу L_2. Следует отметить, что близкие вопросы, сначала для измеримого и ограниченного коэффициента, затем для суммируемого коэффициента были изучены в работах [5], [6] и [24]. Анализ литературы показывает, что задачи граничного управления для уравнения (***) практически мало изучены.

В главе 1 настоящей диссертационной работы будет проведён более подробный анализ литературы.

Связь работы с программами (проектами) и научными темами. Настоящая диссертационная работа выполнена в рамках реализации перспективного плана научно-исследовательской работы кафедры вычислительной математики и механики механико - математического факультета Таджикского национального университета на 2021-2025гг. по теме «Аналитическое исследование, качественный анализ и численное решение задач прикладной математики и механики» (Научный руководитель: д.ф.-м.н., доцент Абдукаримов М.Ф.).

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ИССЛЕДОВАНИЯ

Цель исследования. Основная цель данного диссертационного исследования заключается в проведении теоретического анализа комбинированных задач граничного управления для уравнения (***), в которых управляющее воздействие реализуется посредством задания смещения на одном конце рассматриваемой области и упругой силы на другом, а также в обратной постановке, предусматривающей приложение упругой силы на одном конце и задание смещения на другом.

Задачи исследования. К числу основных задач, решаемых в диссертационной работе, относятся:

- формулирование и строгое доказательство теорем, обеспечивающих существование и единственность решения комбинированных смешанных задач для телеграфного уравнения с переменным коэффициентом из класса L_2;
- для указанного уравнения установление и доказательство теорем единственности решения комбинированных задач граничного управления;
- для рассматриваемого уравнения вывод и математическое обоснование необходимых и достаточных условий существования решения комбинированных задач граничного управления;
- теоретическое исследование и обоснование устойчивости решения всех анализируемых постановок задач, связанных с рассматриваемым уравнением;
- анализ и решение комбинированных оптимальных задач граничного управления для уравнения вынужденных колебаний струны за большой интервал времени.

Объект исследования. Объектом исследования данной диссертации являются уравнение вынужденных колебаний струны, а также одномерное телеграфное уравнение с переменным коэффициентом.

Тема исследования. К предмету исследования относятся комбинированные смешанные задачи и комбинированные задачи граничного управления для рассматриваемых уравнений.

Методы исследования. В диссертационной работе применяются методы математической физики, функционального анализа, аппарат теории линейных интегральных уравнений типа Вольтеры второго рода, а также методы теории задач граничного управления.

Научная новизна исследования. Все полученные в диссертационной работе результаты обладают научной новизной. К основным из них относятся следующие положения:

1. Для телеграфного уравнения с переменным коэффициентом, принадлежащим классу L_2 установлены и доказаны теоремы, устанавливающие разрешимость соответствующих комбинированных смешанных задач;

2. Для указанного уравнения при значениях времени, не превышающих критического, доказаны теоремы, устанавливающие единственность решения комбинированных задач граничного управления;
3. Доказаны теоремы существования решения комбинированных задач граничного управления для указанного уравнения в критический момент времени;
4. Устойчивость решения всех анализируемых смешанных задач и задач граничного управления доказана как относительно $q(x,t)u(x,t)$, так и относительно функций, участвующих в формулировке задач;
5. Для процессов, выражаемых уравнением вынужденных колебаний струны, на больших временных интервалах, получены оптимальные комбинированные граничные управления, которые минимизируют интеграл граничной энергии.

Теоретическая и практическая значимость исследования. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы при чтении специальных курсов для старшекурсников, магистрантов и докторантов PhD по направлениям математики и физики. Кроме того, результаты исследования обладают практической значимостью, так как их можно применять при моделировании различных процессов, описываемых рассматриваемыми уравнениями.

Положения, выносимые на защиту, включают:

1) для телеграфного уравнения с переменным коэффициентом, принадлежащим классу суммируемых с квадратом функций, формулировка теорем, гарантирующих однозначную разрешимость комбинированных смешанных задач;
2) для указанного уравнения формулирование теорем, устанавливающих однозначную разрешимость задачи граничного управления, реализуемого посредством задания смещения (упругой силы) на одном конце и упругой силы (смещения) на противоположном конце рассматриваемой области;
3) формулировка теорем, устанавливающих существование оптимальных комбинированных граничных управлений для процессов, выражаемых уравнением вынужденных колебаний струны, на больших временных интервалах, которые минимизируют интеграл граничной энергии.

Степень достоверности результатов проведённых исследований. Достоверность результатов диссертационной работы обеспечивается строгими математическими доказательствами всех приведённых в ней утверждений. Кроме того, полученные результаты подтверждаются исследованиями других авторов в соответствующей области.

Соответствие диссертации паспорту научной специальности. Диссертационная работа выполнена по специальности 6D060100 - Математика: 6D060103 - Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление и полностью соответствует её формуле (дифференциальные уравнения с частными производными), а также трём основным направлениям области исследования: 1) общая теория дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений; 2) начально-краевые и спектральные задачи для дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений; 3) качественная теория дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений. Указанные направления относятся к разделу «Дифференциальные уравнения», предусмотренному в параграфе 3 пункта III паспорта научной специальности.

Личный вклад соискателя учёной степени. Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, полностью отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Все представленные в диссертации результаты получены лично автором. В совместных работах [1-А] – [3-А], [6-А] – [11-А] соавтор принимал участие только в обсуждении полученных результатов.

Апробация и реализация результатов диссертации. Полученные в диссертации результаты доложены и обсуждены на следующих семинарах и конференциях:

- научном семинаре кафедры вычислительной математики и механики механико-математического факультета Таджикского национального университета под руководством профессора Абдукаримова М.Ф. (2023-2025);
- международной научно-практической конференции «XIII Ломоносовкие чтения», посвящённой 115-летию академика Бободжона Гафурова (Душанбе, 28-29 апреля 2023 года);
- международной научной конференции, посвящённой 75- летию ТНУ, 20-летию развития точных, естественных и математических наук, 85-летию академика НАН Таджикистана Раджабова Н. (Душанбе, 5 октября 2023 года);
- IV международной научно-практической конференции «Современные проблемы математики и её приложений» (Душанбе, 1 июня 2024 года);
- международной научно-практической конференции XIV Ломоносовские чтения «Роль Филиала МГУ имени М.В. Ломоносова в городе Душанбе в развитии науки и образования» (Душанбе, 22-23 ноября 2024 года);

- международной научно-практической конференции, посвящённой «Двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических наук в сфере науки и образования» и 80-летию со дня рождения профессора Боймурода Алиева (Душанбе, 2 апреля 2025 года).
- международной конференции, посвященной 85-летию со дня рождения выдающегося таджикского математика доктора физико-математических наук, профессора Собирова Т.С. (Душанбе, 28-29 ноября 2025 года).

Публикации по теме диссертации. Основное содержание диссертации опубликовано в 11 работах автора, 5 из которых – в изданиях, рекомендованных ВАК при Президенте Республики Таджикистан. Список опубликованных работ представлен в конце диссертации и автореферата.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, общей характеристики работы, трёх глав, обсуждения полученных результатов, заключения и списка литературы, включающего 150 наименований. В диссертации использована двойная нумерация, первая из которых совпадает с номером главы, а вторая – с номером определений, утверждений, лемм, теорем, замечаний и формул. Текст диссертации изложен на 193 страницах, набранных в текстовом процессоре Microsoft Word.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

«Во **введении** диссертационной работы подробно обосновывается актуальность выбранной темы и её значимость для развития теории граничного управления и математического моделирования динамических процессов, подчёркивается её научная и практическая ценност. Приводится систематизированный обзор существующих результатов и подходов, непосредственно относящихся к рассматриваемой проблематике, что позволяет определить текущие направления исследований и выявить нерешённые задачи. Введение также включает чёткую формулировку цели и предмета исследования, выделение основных задач работы и описание используемых методов их решения. Наконец, кратко излагается структура диссертации и содержание её отдельных разделов, обеспечивая логическую и концептуальную преемственность всего исследования» [6].

«В **первой главе «Обзор результатов по теории задач граничного управления»** осуществлён систематизированный анализ научных работ, в которых изучены задачи управления в разных постановках» [5].

Во **второй главе** в прямоугольной области $Q_T = [0 \le x \le l] \times [0 \le t \le T]$ в рамках обобщённого решения исследуется задача граничного управления для анализируемого уравнения

$$Lu \equiv u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) - q(x,t)u(x,t) = f(x,t). \tag{1}$$

Будет изучаться управление процессом, моделируемым указанным уравнением, которое осуществляется посредством задания смещения на левом конце области $x = 0$ и приложения упругой силы на правом конце области $x = l$:

$$u(0, t) = \mu(t), \quad u_x(l, t) = \nu(t) \quad \text{при} \quad 0 \le t \le T. \tag{2}$$

Глава включеат четыре параграфа, в которых последовательно излагаются постановка задачи, используемые определения и исследование задач. В первом параграфе формулируются рассматриваемые задачи и вводятся основные определения, необходимые для дальнейшего изложения и обоснования полученных результатов. Пусть при начальном моменте времени t=0 заданы условия

$$u(x, 0) = \varphi(x), \; u_t(x, 0) = \psi(x) \quad \text{при} \quad 0 \le x \le l, \tag{3}$$

а при финальном моменте времени t=T –условия

$$u(x, T) = \varphi_1(x), \, u_t(x, T) = \psi_1(x) \; \text{при} \quad 0 \le x \le l. \tag{4}$$

Далее, мы будем предполагать, что $\mu(t) \in W_2^1[0, T]$, $\nu(t) \in L_2[0, T]$, $\varphi(x)$, $\varphi_1(x) \in W_2^1[0, l]$, $\psi(x)$, $\psi_1(x) \in L_2[0, l]$, $f(x, t), q(x, t) \in L_2(Q_T)$ и выполнены условия согласования $\mu(0) = \varphi(0)$; $\mu(T) = \varphi_1(0)$.

«Мы будем рассматривать решение задачи граничного управления (1)-(4) в обобщённом смысле и его будем искать в классе $\widehat{W}_2^1(Q_T)$, который был предложен В.А. Ильиным» [18].

«Определение 1. Обобщённым решением задачи (1)-(3) из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ будем называть функцию $u(x, t)$, принадлежащую указанному классу, для которой выполняется интегральное тождество

$$\int_0^l \int_0^T u(x, t) L\Phi(x, t) dx dt + \int_0^l \varphi(x) \Phi_t(x, 0) dx - \int_0^T \psi(x) \Phi(x, 0) dx -$$
$$- \int_0^T \mu(t) \Phi_x(0, t) dt - \int_0^T \nu(t) \Phi(l, t) dt = \int_0^l \int_0^T f(x, t) \Phi(x, t) dx dt \tag{5}$$

для любой пробной функции $\Phi(x, t) \in \widehat{W}_2^2(Q_T)$ (определение этого класса также дано в работе» [18]), удовлетворяющей условиям $\Phi(0, t) = \Phi_x(l, t) \equiv 0$ при $0 \le t \le T$ и условиям $\Phi(x, T) = \Phi_t(x, T) \equiv 0$ при $0 \le x \le l$. Кроме того, для функции $u(x, t)$ должны быть выполнены второе граничное условие (2) и второе начальное условие (3) почти всюду на $[0, l]$, а первое граничное условие (2) и первое начальное условие (3) – для всех $x \in [0, l]$.

Для получения равенства (5) обе части уравнения (1) умножаются на пробную функцию $\Phi(x, t)$, после чего с использованием метода интегрирования по частям производные, содержащиеся в функцию $u(x, t)$, переносятся на функцию $\Phi(x,t)$. Тождество (5) выражает слабое обобщённое решение. Поскольку такая форма записи удобна для доказательства теорем единственности, мы сохраним её в этом виде, несмотря на то, что ищем сильное обобщённое решение.

Определение 2. Обобщённым решением задачи граничного управления (1)-(4) из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ назовём функцию $u(x,t)$, принадлежащую указанному классу, которая является решением смешанной задачи (1)-(3) с функцией $\mu(t) \in W_2^1[0,T]$, удовлетворяющей условиям согласования $\mu(0)=\varphi(0)$; $\mu(T)=\varphi_1(0)$ и функцией $\nu(t) \in L_2[0,T]$, для которой имеет место первое финальное условие (4) для всех $x \in [0,l]$, а второе финальное условие (4) будет выполняться почти всюду на $[0,l]$.

Во **втором параграфе** исследуются условия существования и единственности обобщённого решения смешанной задачи (1) – (3) в соответствующем функциональном классе.

Обозначим через $\underline{\mu}(t)$ и $\underline{\nu}(t)$ функции, совпадающие с $\mu(t)$ и $\nu(t)$ при $0 \le t \le T$ и продолженные нулём при $t<0$. Очевидно, что

$$\underline{\mu}(t) \in W_2^1[-\varepsilon,T]\ \forall\varepsilon>0 \text{ и } \underline{\nu}(t) \in L_2[-\varepsilon,T]\ \ \forall\varepsilon>0.$$

Лемма 1. *Предположим выполнение следующих условий:* $T \le l$, $q(x,t), f(x,t) \in L_2(Q_T)$, $\varphi(x) \equiv 0$ *при* $x \in [0,\,l]$, $\psi(x)=0$ *для почти всех* $x \in [0,\,l]$. *Тогда обобщённое решение рассматриваемой смешанной задачи (1)-(3) из класса* $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ *при выполнении приведённых условий есть любая функция* $u(x,t)$, *ограниченная в области* Q_T *и удовлетворяющая следующему интегральному соотношению:*

$$u(x,t)=\underline{\mu}(t-x)+\int\limits_0^{t+x-l}\underline{\nu}(\tau)d\tau+\frac{1}{2}\int_0^t d\tau\int_{|x-t+\tau|}^{l-|x+t-l-\tau|}[q(\xi,\tau)u(\xi,\tau)+f(\xi,\tau)]\,d\xi+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{x+t-l}d\tau\int_{2l-x-t+\tau}^{l}[q(\xi,\tau)u(\xi,\tau)+f(\xi,\tau)]d\xi. \qquad (6)$$

Замечание 1. Предположим, что выполнены следующие условия: $\underline{\mu}(t) \in W_2^2(-\varepsilon_1,T]\ \forall\,\varepsilon_1>0$, $\underline{\nu}(t) \in W_2^1(-\varepsilon_2,T]\ \ \forall\,\varepsilon_2>0$, $q(x,t)$ и $q_x(x,t)$ ограничены в области Q_T и $f(x,t) \in \widehat{W}_2^1(Q_T)$. Тогда решение смешанной задачи (1)-(3), которое рассматривается в лемме 1, будет принадлежать классу $\widehat{W}_2^2(Q_T)$.

Теорема 1. *Предположим выполнение следующих условий:* $T \le l$ и $q(x,t), f(x,t) \in L_2(Q_T)$. *Тогда интегральное уравнение (6) имеет* *единственное ограниченное решение u(x,t), причём если* $f(x,t)\equiv 0$, *то* $u(x,t)\equiv 0$ *в области* $\left\{(x,t): 0\le t\le \frac{l}{2}, t\le x\le l-t\right\}\cap Q_T$.

Для доказательства теоремы существования мы разбиваем прямоугольную область её диагоналями на четыре треугольника. Затем в каждой из полученных подобластей составляем соответствующее интегральное уравнение и доказываем его разрешимость. В заключение показываем, что все четыре построенных решения сохраняют свою непрерывность при переходе через границу одной области к другой.

Следствие 1. *Предположим выполнение условий теоремы 1. Тогда справедлива оценка*

$$\sup_{(x,t)\in Q_T}\left|u(x,t)\right|\le C\left(\sup_{t\in[0,T]}\left|\mu(t)\right|+\left\|\nu\right\|_{L_2[0,T]}+\left\|f\right\|_{L_2(Q_T)}\right),$$

которая является равномерной по всем q(x,t): $\left\|q\right\|_{L_2(Q_T)}\le\gamma$ (*тем самым,* $C=C(\gamma)>0$).

Устойчивость построенного решения по отношению к граничным условиям и правой части уравнения непосредственно следует из полученной априорной оценки.

Теорема 2. *Предположим выполнение следующих условий: переменный коэффициент q(x,t) принадлежит классу* $L_2(Q_T)$ *и* $T\in(0;l]$. *Тогда смешанная задача (1)-(3) в классе* $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ *обладает не более чем одним решением.*

Для доказательства теоремы единственности при $q(x,t)\equiv 0$ предположим существование двух решений и затем рассмотрим их разность. Далее, используя спектральный метод В.А. Ильина, получаем совпадение двух первоначально предположенных решений. В случае, когда $q(x,t)\in L_2(Q_T)$, мы составляем соответствующие интегральные уравнения, после чего доказывем, что составленная разность двух решений равна нулю. Точнее, показываем, что построенные интегральные уравнения являются однородными.

В **третьем параграфе** приведены и доказаны теоремы, которые устанавливают единственность при $T\le l$ и существование при $T=l$ решения исследуемой задачи (1) – (4). Изложение начинается с анализа частного случая рассматриваемой задачи граничного управления, что позволяет выявить основные особенности метода доказательства и подготовить переход к общей постановке.

Утверждение 1. *Предположим выполнение следующих условий:* $T\le l$ *и* $q(x,t)\equiv 0$. *В этом случае задача (1)-(4) допускает существование только одного решения из класса* $\widehat{W}_2^1(Q_T)$.

Утверждение 2. *Предположим выполнение условий* $q(x,t) \equiv 0$ *и* $T = l$. *При выполнении этих условий для существования решения задачи (1)-(4), которое принадлежит классу* $\widehat{W}_2^1(Q_T)$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось*

$$\varphi(0) + \varphi(l) - \varphi_1(0) - \varphi_1(l) + \int_0^l \psi(x)dx + \int_0^l \psi_1(x)dx + \int_0^l d\tau \int_\tau^{l-\tau} f(\eta,\tau)d\eta = 0.$$

При выполнении этого условия решение указанной задачи дается формулой

$$u(x,t) = \begin{cases} u_1(x,t) & \text{в } \Delta_1, \\ u_2(x,t) & \text{в } \Delta_2, \\ u_3(x,t) & \text{в } \Delta_3, \\ u_4(x,t) & \text{в } \Delta_4, \end{cases}$$

где

$$u_1(x,t) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x+t) + \varphi(x-t) + \int_{x-t}^{x+t} \psi(\xi)d\xi + \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi,\tau)d\xi d\tau\right],$$

$$u_2(x,t) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x+t) + \varphi_1(x-t+l) + \varphi_1(0) - \varphi(l) + \int_l^{x+t} \psi(\xi)d\xi -\right.$$

$$\left.- \int_0^{x-t+l} \psi(\xi)d\xi + \iint_{\Omega_{21}} f(\xi,\tau)d\xi d\tau - \iint_{\Omega_{22}} f(\xi,\tau)d\xi d\tau - \iint_{\Omega_{24}} f(\xi,\tau)d\xi d\tau\right],$$

$$\Omega_{21} \equiv \Omega_{21}(x,t) = \left\{(\xi,\tau): 0 \le \tau \le \frac{x+t}{2},\ \tau \le \xi \le x+t-\tau\right\},$$

$$\Omega_{24} \equiv \Omega_{24}(x,t) = \left\{(\xi,\tau): \frac{l}{2} \le \tau \le l,\ \ \frac{x-t+l}{2} + \left|\tau - \frac{t-x+l}{2}\right| \le \xi \le \tau\right\};$$

$$\Omega_{22} \equiv \Omega_{22}(x,t) = \left\{(\xi,\tau): \frac{x+t}{2} \le \tau \le \frac{l-x+t}{2},\ x + |\tau - t| \le \xi \le \frac{l}{2} - \left|\tau - \frac{l}{2}\right|\right\},$$

$$u_3(x,t) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x-t) - \varphi(0) + \varphi_1(l) + \varphi_1(x+t-l) - \int_0^{x-t} \psi(\xi)d\xi +\right.$$

$$\left.+ \iint_{\Omega_{31}} f(\xi,\tau)d\xi d\tau - \iint_{\Omega_{33}} f(\xi,\tau)d\xi d\tau - \iint_{\Omega_{34}} f(\xi,\tau)d\xi d\tau\right],$$

$$\Omega_{31} \equiv \Omega_{31}(x,t) = \left\{(\xi,\tau): 0 \le \tau \le \frac{l-x+t}{2},\ x-t+\tau \le \xi \le l-\tau\right\},$$

$$\Omega_{34} \equiv \Omega_{34}(x,t) = \left\{(\xi,\tau): \frac{l}{2} \le \tau \le l,\ \ l-\tau \le \xi \le \frac{x+t}{2} - \left|\tau - \frac{x+t}{2}\right|\right\};$$

$$\Omega_{33} \equiv \Omega_{33}(x,t) = \left\{(\xi,\tau): \frac{l-x+t}{2} \le \tau \le \frac{x+t}{2},\ \ \frac{l}{2} + \left|\tau - \frac{l}{2}\right| \le \xi \le x - |\tau - t|\right\},$$

$$u_4(x,t) = \frac{1}{2}\left[\varphi_1(x+t-l) + \varphi_1(x-t+l) + \int_{x-t+l}^{x+t-l} \psi_1(\xi)d\xi + \int_t^l \int_{x+t-\tau}^{x-t+\tau} f(\xi,\tau)d\xi d\tau\right],$$

Δ_1 *есть треугольник, который ограничен линиями* $x-t=0,\ x+t-l=0,\ t=0$, Δ_2 *рассматривается как треугольник, который ограничен линиями* $x-t=0$, $x+t-l=0,\ x=0,\ \Delta_3$ *- треугольник, который ограничен линиями* $x-t=0$, $x+t-l=0,\ x=l$, Δ_4 *представляет собой треугольник, который ограничен линиями* $x-t=0,\ x+t-l=0,\ t=l$.

В этом случае искомые граничные управления находятся при помощи следующих аналитических формул:

$$\mu(t) = \frac{1}{2}\left[\varphi(t) + \varphi(0) + \int_0^t \psi(x)dx + \varphi_1(l-t) - \varphi_1(l) + \int_{l-t}^l \psi_1(x)dx - \int_0^l d\tau \int_{\tau-t}^{\tau} f(\xi,\tau)d\xi\right],$$

$$\nu(t) = \frac{1}{2}\left[\varphi'(l-t) - \psi(l-t) + \varphi_1'(t) + \psi_1(t) - \int_0^l f(l+t-\tau,\tau)d\tau\right].$$

Далее, рассмотрим общую постановку задачи граничного управления (1)-(4). Для упрашения выкладок и ради ясности, считаем, что функция правой части уравнения (1): $f(x,t)$ является нулевым элементом из класса $L_2(Q_T)$.

Теорема 3. *Предположим выполнение следующих условий:* $q(x,t) \in L_2(Q_T)$ *и* $T \in (0,l]$. *Тогда у задачи граничного управления (1)-(4) не может существовать более одного решения в классе* $\widehat{W}_2^1(Q_T)$.

Будем использовать следующие обозначения:

$$\varphi(0) + \varphi(l) + \int_0^l \psi(\xi)d\xi \equiv A_0; \quad \varphi_1(0)+\varphi_1(l) - \int_0^l \psi_1(\xi)d\xi \ \equiv B_0.$$

Теорема 4. *Предположим выполнение следующих условий:* $T=l$ *и* $q(x,t) \in$ $\in L_2(Q_T)$. *Тогда, для того чтобы существовало решение задачи (1)-(4), принадлежащее классу* $\widehat{W}_2^1(Q_T)$, *необходимо выполнение условия*

$$A_0+\int_0^{\frac{l}{2}}d\tau\int_{\tau}^{l-\tau}q(\xi,\tau)u_1(\xi,\tau)d\xi=B_0+\int_{\frac{l}{2}}^{l}d\tau\int_{l-\tau}^{\tau}q(\xi,\tau)u_4(\xi,\tau)d\xi,$$

где величины $u_1(x,t),\ u_4(x,t)$ *вычисляются по формулам*

$$u_1(x,t)=\hat{u}_1(x,t)+\sum_{k=1}^{\infty}\left[G_1^k\hat{u}_1\right](x,t),$$

$$\hat{u}_1(x,t)=\frac{1}{2}\left[\varphi(x+t)+\varphi(x-t)+\int_{x-t}^{x+t}\psi(\xi)d\xi\right],$$

$$[G_1\hat{u}_1](x,t)=\frac{1}{2}\int_0^t d\tau\int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau}q(\xi,\tau)\hat{u}_1(\xi,\tau)d\xi\,;$$

$$u_4(x,t)=\hat{u}_4(x,t)+\sum_{k=1}^{\infty}\left[G_4^k\hat{u}_4\right](x,t),$$

$$\hat{u}_4(x,t)=\frac{1}{2}\left[\varphi_1(x+t-l)+\varphi_1(x-t+l)-\int_{x+t-l}^{x-t+l}\psi_1(\xi)d\xi\right],$$

$$[G_4\hat{u}_4](x,t)=\frac{1}{2}\int_t^l d\tau\int_{x+t-\tau}^{x-t+\tau}q(\xi,\tau)\hat{u}_4(\xi,\tau)d\xi\,.$$

Теорема 5. *Предположим выполнение условий* $T=l$ *и* $q(x,t)\in L_2(Q_T)$. *Тогда приведённое в теореме 4 соотношение является и достаточным для существования единственного решения задачи граничного управления (1)-(4) из класса* $\widehat{W}_2^1(Q_l)$.

Замечание 2. Имеет место следующая априорная оценка для решения задачи граничного управления (1)-(4):

$$\|u(x,t)\|_{\widehat{W}_2^1(Q_l)}\le L\big(\|\varphi\|_{W_2^1[0,l]}+\|\varphi_1\|_{W_2^1[0,l]}+\|\psi\|_{L_2[0,l]}+\|\psi_1\|_{L_2[0,l]}\big),$$

в которой постоянная L не зависит от норм функций, входящих в задачу.

Это оценка демонстрирует устойчивость полученного решения по отношению начальных и финальных условий.

Более того, если имеет место $\|q\|_2\to 0$, то $\|\mu-\widehat{\mu}\|_{W_2^1[0,T]}\to 0$ и $\|\nu-\hat{\nu}\|_{L_2[0,T]}\to 0$, где $\widehat{\mu}(t)=\hat{u}(0,t),\ \hat{\nu}(t)=\hat{u}_x(l,t)$.

Полученный результат устанавливает свойство регулярности решения исследуемой задачи (1)-(4) относительно $q(x,t)u(x,t)$ в (1) с $q(x,t)\in L_2(Q_T)$.

В случае, когда $T>l$ задача граничного управления перестаёт обладать свойством едиственности и допускает бесконечное множество решений. В этой ситуации естественным образом возникает задача оптимизации граничного управления, состоящая в выборе таких функций $\mu(t) \in W_2^1[0,T], \nu(t) \in L_2[0,T]$, которые минимизируют интеграл граничной энергии при соблюдении условий связи, вытекающих из выполнения начальных и конечных условий.

Четвёртый параграф первой главы посвящён решению сформулированной задачи. Главным результатом данного параграфа является теорема 6.

Теорема 6. *Предположим выполнение условий* $T = 2ln + \Delta$, *где* $n \in N$, $\Delta \in [0; 2l]$ *и* $q(x,t) \equiv 0$ *в задаче (1)-(4). В рассматриваемом случае существуют единственные граничные управления* $u(0,t) = \mu(t) \in$ $\in W_2^1[0,T]$ и $u_x(l,t) = \nu(t) \in L_2[0,T]$, *с помощью которых можно перевести систему колебаний из начального состояния (3) в конечное состояние (4) и обеспечить минимальное значение интеграла*

$$\int_0^T \{[\mu'(t)]^2 + [\nu(t)]^2\} dt.$$

Эти граничные управления для всех $0 \leq t \leq \Delta$ *и* $m = \overline{0,n}$ *и для всех* $\Delta \leq t \leq 2l$ *и* $m = \overline{0,n-1}$ *определяются следующими формулами:*

при $0 \leq \Delta \leq l$:

$$\mu(2lm + t) = \varphi(0) + m \int_0^{2l} F_1(\eta)d\eta + \int_0^t F_1(\eta)d\eta, \quad \nu(2lm + t) = F_2(t),$$

где

$$F_1(t) = \begin{cases} (-1)^{m+1} \cdot \dfrac{A_2(t)}{2n+1} + (-1)^{m+1} \cdot \dfrac{\sum_{m=0}^{n}(-1)^m C}{2n+1} + C, \ t \in [0;\Delta]; \\ (-1)^{m+1} \cdot \dfrac{A_3(t)}{2n} + (-1)^{m+1} \cdot \dfrac{\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m C}{2n} + C, t \in [\Delta;l]; \\ (-1)^{m+1} \cdot \dfrac{A_1(t-l)}{2n+1} + (-1)^{m+1} \cdot \dfrac{\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m C}{2n+1} + C, t \in [l;l+\Delta]; \\ (-1)^{m+1} \cdot \dfrac{A_4(t-l)}{2n} + (-1)^{m+1} \cdot \dfrac{\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m C}{2n} + C, t \in [l+\Delta;2l]; \end{cases}$$

$$F_2(t) = \begin{cases} (-1)^{m} \cdot \dfrac{A_1(t)}{2n+1} + (-1)^{m} \cdot \dfrac{\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m C}{2n+1} + C, \quad t \in [0;\Delta]; \\ (-1)^{m} \cdot \dfrac{A_4(t)}{2n} + (-1)^{m} \cdot \dfrac{\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m C}{2n}, \quad t \in [\Delta;l]; \\ (-1)^{m} \cdot \dfrac{A_2(t-l)}{2n+1} + (-1)^{m} \cdot \dfrac{\sum_{m=0}^{n}(-1)^m C}{2n+1}, \quad t \in [l;l+\Delta]; \\ (-1)^{m} \cdot \dfrac{A_3(t-l)}{2n} + (-1)^{m} \cdot \dfrac{\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m C}{2n}, \quad t \in [l+\Delta;2l]; \end{cases}$$

$$A_1(t)=\frac{1}{2}\Big[\varphi_1'(t-\Delta+l)+\varphi'(l-t)+\psi_1(t-\Delta+l)-\psi(l-t)-$$

$$-\int_l^{2ln+\Delta} f(x+2ln+l-\tau,\tau)d\tau-\int_0^l f(l-t+\tau,\tau)d\tau\Big];$$

$$A_2(t)=\frac{1}{2}\Big[\varphi_1'(\Delta-t)-\varphi'(t)-\psi_1(\Delta-t)-\psi(t)+$$

$$+\int_l^{2ln+\Delta} f(\tau-t-2ln,\tau)d\tau-\int_0^l f(t-\tau,\tau)d\tau\Big];$$

$$A_3(t)=\frac{1}{2}\Big[\varphi_1'(t-\Delta)-\varphi'(t)+\psi_1(t-\Delta)-\psi(t)-$$

$$-\int_l^{2ln+\Delta} f(t+2ln-\tau,\tau)d\tau-\int_0^l f(t-\tau,\tau)d\tau\Big];$$

$$A_4(t)=\frac{1}{2}\Big[\varphi_1'(\Delta-t+l)+\varphi'(l-t)-\psi_1(\Delta-t+l)-\psi(l-t)+$$

$$+\int_l^{2ln+\Delta} f(t-2ln-t+\tau,\tau)d\tau-\int_0^l f(l-t+\tau,\tau)d\tau\Big];$$

$$C=\begin{cases}\dfrac{(4s-2)[\varphi_1(0)-\varphi(0)]+\int_\Delta^l A_3(t)dt}{8s^2l-8sl+4s\Delta+l-\Delta} & \text{при } n=2s-1,\\[2ex] \dfrac{(4s+1)[\varphi_1(0)-\varphi(0)]+\int_0^\Delta A_2(t)dt}{4s\Delta+8s^2l+2sl} & \text{при } n=2s;\end{cases}$$

при $l\le\Delta\le 2l$:

$$\mu(2lm+t)=\varphi(0)+m\int_0^{2l}F_3(\eta)d\eta+\int_0^t F_3(\eta)d\eta,\quad \nu(2lm+t)=F_4(t),$$

где

$$F_3(t) = \begin{cases} (-1)^{m+1} \cdot \dfrac{B_1(t)}{2n+2} + (-1)^{m+1} \cdot \dfrac{\sum_{m=0}^{n} (-1)^m C_1}{2n+2} + C_1, t \in [0; \Delta - l]; \\ (-1)^{m+1} \cdot \dfrac{B_4(t)}{2n+1} + (-1)^{m+1} \cdot \dfrac{\sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m C_1}{2n+1} + C_1, t \in [\Delta - l; l]; \\ (-1)^{m+1} \cdot \dfrac{B_2(t-l)}{2n+2} + (-1)^{m+1} \cdot \dfrac{\sum_{m=0}^{n} (-1)^m C_1}{2n+2} + C_1, t \in [l; \Delta]; \\ (-1)^{m+1} \cdot \dfrac{B_3(t-l)}{2n+1} + (-1)^{m+1} \cdot \dfrac{\sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m C_1}{2n+1} + C_1, t \in [\Delta; 2l]; \end{cases}$$

$$F_4(t) = \begin{cases} (-1)^{m} \cdot \dfrac{B_2(t)}{2n+2} + (-1)^{m} \cdot \dfrac{\sum_{m=0}^{n} (-1)^m C_1}{2n+2}, \quad t \in [0; \Delta - l]; \\ (-1)^{m} \cdot \dfrac{B_3(t)}{2n+1} + (-1)^{m} \cdot \dfrac{\sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m C_1}{2n+1}, \quad t \in [\Delta - l; l]; \\ (-1)^{m} \cdot \dfrac{B_1(t-l)}{2n+2} + (-1)^{m} \cdot \dfrac{\sum_{m=0}^{n} (-1)^m C_1}{2n+2}, \quad t \in [l; \Delta]; \\ (-1)^{m} \cdot \dfrac{B_4(t-l)}{2n+1} + (-1)^{m} \cdot \dfrac{\sum_{m=0}^{n} (-1)^m C_1}{2n+1}, \quad t \in [\Delta; 2l]; \end{cases}$$

$$B_1(t) = \frac{1}{2}\Big[\varphi_1'(t - \Delta + 2l) - \varphi'(t) + \psi_1(t - \Delta + 2l) - \psi(t) -$$

$$- \int_{l}^{2ln+\Delta} f(t + 2ln + 2l - \tau, \tau)d\tau - \int_0^l f(t - \tau, \tau)d\tau\Big];$$

$$B_2(t) = \frac{1}{2}\Big[\varphi_1'(\Delta - l - t) + \varphi'(l - t) - \psi_1(\Delta - l - t) - \psi(l - t) +$$

$$+ \int_{l}^{2ln+\Delta} f(\tau - l - 2ln - t, \tau)d\tau - \int_0^l f(l - t + \tau, \tau)d\tau\Big];$$

$$B_3(t) = \frac{1}{2}\Big[\varphi_1'(t - \Delta + l) + \varphi'(l - t) + \psi_1(t - \Delta + l) - \psi(l - t) -$$

$$- \int_{l}^{2ln+\Delta} f(t + 2ln + l - \tau, \tau)d\tau - \int_0^l f(l - t + \tau, \tau)d\tau\Big];$$

$$B_4(t) = \frac{1}{2}\left[\varphi_1'(\Delta - t) - \varphi'(t) - \psi_1(\Delta - t) - \psi(t) + \right.$$

$$\left. + \int_l^{2ln+\Delta} f(\tau - 2ln - t, \tau) d\tau - \int_0^l f(t - \tau, \tau) d\tau \right];$$

$$C_1 = \begin{cases} \dfrac{4s[\varphi_1(0) - \varphi(0)] + \int_0^{\Delta - l} B_1(t)dt}{8s^2 l + 4s\Delta - 4sl} & \text{при } n = 2s - 1, \\ \\ \dfrac{(4s+1)[\varphi_1(0) - \varphi(0)] + \int_{\Delta - l}^{l} B_4(t)dt}{8s^2 l + 4s\Delta + 2sl + \Delta} & \text{при } n = 2s. \end{cases}$$

Для доказательства теоремы 6 вначале доказываются два вспомогательных утверждения, которые способствуют получению условий связи. Затем для нахождения оптимальных управлений применяются лемма Ильина-Моисеева и метод Лагранжа.

С прикладной точки зрения, особенно при анализе задач предотвращения резонансных явлений в системах с граничным управлением, существенное значение имеет тот факт, что минимальное значение функционала, соответствующего оптимальным граничным управлениям, должно уменьшаться по мере увеличения временного интервала управления.

Пуст $suppf(x,t)$ содержится в области Q_{T_*}, где $T_* = const$, то ест при $T > T_*$ внешнее воздействие $f(x,t)$ тождественно равно нулю. Тогда минимальное значение интеграла граничной энергии оценивается величиной порядка $O\left(\frac{1}{T}\right)$. При этом константа в данной оценке зависит от норм функций, входящих в задачу, а также момента времени T. Следовательно, при $T \to \infty$ минимальное значение данного интеграла стремится к нулю, что делает возможным предотвращение резонансного режима в процессе колебаний струны.

В **третьей главе** рассматривается задача граничного управления процессом, описываемым уравнением (1). Управляющее воздействие реализуется посредством упругой силы, приложенной на левом конце струны при $x = 0$ и задания смещения на правом конце при $x = l$:

$$u_x(0,t) = \mu(t), \;\; u(l,t) = \nu(t) \quad \text{при} \quad 0 \le t \le T. \tag{7}$$

Структурно третья глава также включает четыре параграфа. По аналогии со второй главой, в её первом параграфе формулируется постановка рассматриваемых задач и вводятся основные понятия и определения, необходимые для дальнейшего анализа.

В задаче граничного управления (1), (3), (4) и (7) предполагается, что переменный коэффициент $q(x,t)$ принадлежит лишь классу $L_2(Q_T)$, $\varphi(x)$, $\varphi_1(x) \in W_2^1[0,l]$, $\psi(x)$, $\psi_1(x) \in L_2[0,l]$, $f(x,t) \in L_2(Q_T)$. Предполагается также выполнение условий согласования $\nu(0) = \varphi(l)$, $\nu(T) = \varphi_1(l)$.

Искомое решение предполагается находить в классе $\widehat{W}_2^1(Q_T)$. Для введения обобщённого решения задачи граничного управления в форме интегрального тождества дополнительно используется класс $\widehat{W}_2^2(Q_T)$. Определения решений рассматриваемых задач формулируются по аналогии с определениями, приведёнными во второй главе, на основе соответствующего интегрального тождества.

Во **втором параграфе третьей главы** анализируется вопрос разрешимости смешанной задачи (1), (3) и (7). Здесь рассматриваются условия, при которых задача имеет единственное обобщённое решение в смысле интегрального тождества, а также исследуются свойство решения и особенность его зависимости от граничных функций. При нулевых началных условий доказана следующая

Лемма 2. *Предположим выполнение следующих условий:* $T \leq l$ и $q(x,t), f(x,t) \in\in L_2(Q_T)$. *При этом обобщённое решение из класса* $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ *изучаемой задачи (1), (3) и (7) есть любая ограниченная в* Q_T *функция* $u(x,t)$, *для которой имеет место*

$$u(x,t) = -\int_0^{t-x} \underline{\mu}(\tau)d\tau + \underline{\nu}(t+x-l) + \frac{1}{2}\int_0^{t-x} d\tau \int_0^{t-x-\tau} [q(\xi,\tau)u(\xi,\tau) + f(\xi,\tau)]d\xi +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{t} d\tau \int_{\frac{\tau-t+x}{2}+\left|\frac{\tau-t+x}{2}\right|}^{l-|\tau-t-x-l|} [q(\xi,\tau)u(\xi,\tau) + f(\xi,\tau)]d\xi. \quad (8)$$

Замечание 3. Если предполагать выполнение условий $\underline{\mu}(t) \in \in W_2^1(-\varepsilon_1, T]\ \forall\ \varepsilon_1 > 0$, $\underline{\nu}(t) \in W_2^2(-\varepsilon_2, T]\ \ \forall\ \varepsilon_2 > 0$, ограниченность $q(x,t)$, $q_x(x,t)$ в области Q_T, а также принадлежность $f(x,t)$ классу $\widehat{W}_2^1(Q_T)$, то рассматриваемое в лемме 2 решение смешанной задачи (1), (3) и (7) будет принадлежать классу $\widehat{W}_2^2(Q_T)$.

Главным результатом этого параграфа являются теоремы 7 и 8.

Теорема 7. *Предположим выполнение следующих условий:* $T \leq l$ *и* $q(x,t), f(x,t) \in L_2(Q_T)$. *Тогда у интегрального уравнения (8) существует единственное ограниченное решение u(x,t), причём при выполнении условия* $f(x,t) \equiv 0,\ u(x,t) \equiv 0$ *в следующей области:*

$$\left\{(x,t)\colon 0 \leq t \leq \frac{l}{2}, t \leq x \leq l - t\right\} \cap Q_T.$$

Следствие 2. *Если выполнены условия теоремы 7, то для решения смешанной задачи* (1), (3) и (7) *справедлива оценка*

$$\operatorname*{Sup}_{(x,t)\in Q_T} |u(x,t)| \leq C\left(\|\mu(t)\|_{L_2[0,T]} + \operatorname*{Sup}_{t\in[0,T]} |\nu(t)| + \|f\|_{L_2(Q_T)}\right), \tag{9}$$

которая является равномерной по всем $q(x,t)\colon \|q\|_{L_2(Q_T)} \leq \gamma,\ C = C(\gamma) > 0.$

Устойчивость полученного решения относительно граничных условий и правой части уравнения вытекает из оценки (9).

Теорема 8. *Предположим выполнение условий* $T \leq l$ *и* $q(x,t), f(x,t) \in \in L_2(Q_T)$. *Тогда у смешанной задачи* (1), (3) *и* (7) *не может существовать более одного решения из* $\widehat{W}_2^1(Q_T)$.

В **третьем параграфе** анализируется вопрос существования решения при $T = l$ и единственности решения при $T \leq l$ задачи граничного управления (1), (3), (4) и (7).

Начнём с формулировки теоремы, утверждающей единственность решения.

Теорема 9. *Предположим выполнение следующих условий:* $T \leq l$ *и* $q(x,t), f(x,t) \in L_2(Q_T)$. *Тогда у задачи граничного управления (1), (3), (4) и (7) может существовать не более одного обобщённого в смысле интегрального тождества решения из класса* $\widehat{W}_2^1(Q_T)$.

Далее ради простаты выкладок положим $f(x,t) \equiv 0$.

Теорема 10. *Предположим выполнение следующих условий:* $T = l$ *и* $q(x,t) \in L_2(Q_T)$. *Следовательно, для того чтобы задача граничного управления* (1), (3), (4) *и* (7) *имела решение из класса* $\widehat{W}_2^1(Q_T)$, *необходимо, чтобы начальные и конечные функции удовлетворяли соотношению*

$$A_0 + \int_0^{\frac{l}{2}} \int_{\tau}^{l-\tau} q(\xi,\tau) u_1(\xi,\tau) d\xi d\tau = B_0 + \int_{\frac{l}{2}}^{l} \int_{l-\tau}^{\tau} q(\xi,\tau) u_4(\xi,\tau) d\xi d\tau,$$

где A_0, B_0 *– вышеприведённые константы*, *величины* $u_1(x,t)$, $u_4(x,t)$ *вычисляются по следующим формулам:*

$$u_1(x,t)=\hat{u}_1(x,t)+\sum_{k=1}^{\infty}[T_1^k\hat{u}_1](x,t),\quad \hat{u}_1(x,t)=\frac{1}{2}\left[\varphi(x+t)+\varphi(x-t)+\int_{x-t}^{x+t}\psi(\xi)d\xi\right],$$

$$[T_1\hat{u}_1](x,t)=\frac{1}{2}\int_0^t d\tau\int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau}q(\xi,\tau)\hat{u}_1(\xi,\tau)d\xi\,;\quad u_4(x,t)=\hat{u}_4(x,t)+\sum_{k=1}^{\infty}[T_4^k\hat{u}_4](x,t),$$

$$\hat{u}_4(x,t)=\frac{1}{2}\left[\varphi_1(x+t-l)+\varphi_1(x-t+l)-\int_{x+t-l}^{x-t+l}\psi_1(\xi)d\xi\right],$$

$$[T_4\hat{u}_4](x,t)=\frac{1}{2}\int_t^l d\tau\int_{x+t-\tau}^{x-t+\tau}q(\xi,\tau)\hat{u}_4(\xi,\tau)d\xi\,.$$

Теорема 11. *Предположим выполнение следующих условий:* $T=l$ *и* $q(x,t)\in L_2(Q_T)$. *Следовательно, соотношение, сформулированное в теореме (10), оказывается не только необходимым, но и достаточным условием для существования единственного решения задачи граничного управления* (1), (3), (4) *и* (7) *из класса* $\widehat{W}_2^1(Q_l)$.

Замечание 4. Из процесса доказательства теоремы 11 вытекает априорная оценка решения задачи граничного управления (1), (3), (4) и (7)

$$\|u(x,t)\|_{\widehat{W}_2^1(Q_l)}\le L\left(\|\varphi\|_{W_2^1[0,l]}+\|\varphi_1\|_{W_2^1[0,l]}+\|\psi\|_{L_2[0,l]}+\|\psi_1\|_{L_2[0,l]}\right),$$

в которой постоянная L не зависит от норм функций, входящих в задачу. Это оценка демонстрирует устойчивость полученного решения по отношению к начальным и финальным условиям.

Кроме того, если предполагать выполнение условия $\|q\|_2\to 0$, то будут справедливы $\|\mu-\widehat{\mu}\|_{L_2[0,T]}\to 0$ и $\|\nu-\hat{\nu}\|_{W_2^1[0,T]}\to 0$, где $\widehat{\mu}(t)=\hat{u}_x(0,t)$, $\hat{\nu}(t)=\hat{u}(l,t)$. Полученный результат устанавливает свойство регулярности решения исследуемой задачи (1), (3), (4) и (7) относительно $q(x,t)u(x,t)$ в (1) с $q(x,t)\in L_2(Q_T)$.

Замечание 5. Анализ результатов, изложенных в главах 2 и 3, говорят о том, что в случае $T=l$ общий вид решения $u(x,t)$ задачи граничного управления для рассматриваемого уравнения, переводящего систему из произвольного начального состояния $\{u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x)\}$ в произвольное конечное состояние $\{u(x,l)=\varphi_1(x),\ u_t(x,l)=\psi_1(x)\}$, а также необходимые и достаточные условия существования такого управления не зависят от конкретнего типа граничного управления, то есть от того, управляем ли мы смещением на левом конце и упругой силой на правом конце: $\{u(0,t)=\mu(t),\ u_x(l,t)=\nu(t)\}$ или упругой силой на левом конце и смещением на правом конце: $\{u_x(0,t)=\mu(t),\ u(l,t)=\nu(t)\}$. При этом конкретные значения граничных управлений различаются и определяются через решение двумерных интегральных уравнений типа Вольтерры. Этот результат является одним из главных результатов диссертационной работы.

В параграфе 4 второй главы отмечалось, что при $T>l$ задача граничного управления перестаёт обладать свойством единственности и допускает бесконечное множество решений. В связи с этим возникает естественная задача оптимизации граничного управления: необходимо выбрать функции $\mu(t)\in L_2[0,T],\ \nu(t)\in W_2^1[0,T]$, чтобы с помощью которых была возможность минимизироват интеграл граничной энергии с учётом условий связи, которые следуют из выполнения начальных и конечных состояний системы.

Четвёртый параграф третьей главы содержит решение поставленной задачи, причём в качестве основного результата данного параграфа вступает теорема 12.

Теорема 12. *Предположим выполнение следующих условий в рассматриваемой задаче (1), (3), (4) и (7):* $T=2ln+\Delta$, *где* $n\in N$, $\Delta\in[0;2l]$ *и* $q(x,t)\equiv 0$. *При выполнении этих условий существуют единственные граничные управления* $u_x(0,t)=\mu(t)\in L_2[0,T]$ и $u(l,t)=\nu(t)\in W_2^1[0,T]$, *с помощью которых можно перевести систему колебаний из начального состояния (3) в заданное конечное состояние (4) и одновременно обеспечивать минимальное значение интеграла граничной энергии*

$$\int_0^T\{[\mu(t)]^2+[\nu'(t)]^2\}dt.$$

Значения этих граничных управлений для всех $0\le t\le\ \Delta$ *и* $m=\overline{0,n}$ *и для всех* $\Delta\le t\le\ 2l$ *и* $m=\overline{0,n-1}$ *определяются следующими формулами:*

при $0\le\Delta\le\ l$:

$$\mu(2lm+t)=F_1(t),\qquad \nu(2lm+t)=\ \varphi(l)+m\int_0^{2l}F_2(\eta)d\eta+\int_0^t F_2(\eta)d\eta,$$

где

$$F_1(t)=\begin{cases}(-1)^{m+1}\cdot\dfrac{A_2(t)}{2n+1}+(-1)^m\cdot\dfrac{\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m C}{2n+1}, & t\in[0;\Delta];\\ (-1)^m\cdot\dfrac{A_3(t)}{2n}+(-1)^{m+1}\cdot\dfrac{\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m C}{2n}, & t\in[\Delta;l];\\ (-1)^{m+1}\cdot\dfrac{A_1(t-l)}{2n+1}+(-1)^m\cdot\dfrac{\sum_{m=0}^{n}(-1)^m C}{2n+1}, & t\in[l;l+\Delta];\\ (-1)^{m+1}\cdot\dfrac{A_4(t-l)}{2n}+(-1)^m\cdot\dfrac{\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m C}{2n}, & t\in[l+\Delta;2l];\end{cases}$$

$$F_2(t)=\begin{cases}(-1)^m\cdot\dfrac{A_1(t)}{2n+1}+(-1)^{m+1}\cdot\dfrac{\sum_{m=0}^{n}(-1)^m C}{2n+1}+C, & t\in[0;\Delta];\\ (-1)^m\cdot\dfrac{A_4(t)}{2n}+(-1)^{m+1}\cdot\dfrac{\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m C}{2n}+C, & t\in[\Delta;l];\\ (-1)^m\cdot\dfrac{A_2(t-l)}{2n+1}+(-1)^m\cdot\dfrac{\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m C}{2n+1}+C, & t\in[l;l+\Delta];\\ (-1)^m\cdot\dfrac{A_3(t-l)}{2n}+(-1)^{m+1}\cdot\dfrac{\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m C}{2n}+C, & t\in[l+\Delta;2l];\end{cases}$$

$$A_1(t)=\frac{1}{2}\Big[\varphi_1'(t-\Delta+l)-\varphi'(l-t)+\psi_1(t-\Delta+l)+\psi(l-t)-$$

$$-\int_{l}^{2ln+\Delta}f(t+2ln+l-\tau,\tau)d\tau+\int_0^l f(l-t+\tau,\tau)d\tau\Big];$$

$$A_2(t)=\frac{1}{2}\Big[\varphi_1'(\Delta-t)+\varphi'(t)-\psi_1(\Delta-t)+\psi(t)+$$

$$+\int_{l}^{2ln+t}f(\tau-t-2ln,\tau)d\tau+\int_0^l f(l-t+\tau,\tau)d\tau\Big];$$

$$A_3(t)=\frac{1}{2}\Big[\varphi_1'(t-\Delta)+\varphi'(t)+\psi_1(t-\Delta)+\psi(t)-$$

$$-\int_{l}^{2ln+\Delta}f(t+2ln-\tau,\tau)d\tau+\int_0^l f(t-\tau,\tau)d\tau\Big];$$

$$A_4(t)=\frac{1}{2}\Big[\varphi_1'(t+\Delta-t)-\varphi'(l-t)-\psi_1(l+\Delta-t)+\psi(l-t)+$$

$$+\int\limits_{l}^{2ln+\Delta} f(l-2ln-t+\tau,\tau)d\tau+\int\limits_{0}^{l} f(l-t+\tau,\tau)d\tau\Bigg];$$

$$C=\begin{cases}\dfrac{(4s-2)[\varphi_1(l)-\varphi(l)]-\int_\Delta^l A_4(t)dt}{8s^2l-8sl+4s\Delta-\Delta+l} & \text{при } n=2s-1,\\[2ex] \dfrac{(4s+1)[\varphi_1(l)-\varphi(l)]-\int_0^\Delta A_1(t)dt}{8s^2\Delta+4s\Delta+2sl} & \text{при } n=2s;\end{cases}$$

при $l\le\Delta\le 2l$:

$$\mu(2lm+t)=F_3(t),\qquad \nu(2lm+t)=\varphi(l)+m\int\limits_0^{2l}F_4(\eta)d\eta+\int\limits_0^{t}F_4(\eta)d\eta,$$

где

$$F_3(t)=\begin{cases}(-1)^{m+1}\cdot\dfrac{B_1(t)}{2n+2}+(-1)^m\cdot\dfrac{\sum_{m=0}^{n}(-1)^mC_1}{2n+2}, t\in[0;\Delta-l];\\ (-1)^{m+1}\cdot\dfrac{B_4(t)}{2n+1}+(-1)^m\cdot\dfrac{\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^mC_1}{2n+1}, t\in[\Delta-l;l];\\ (-1)^{m+1}\cdot\dfrac{B_2(t-l)}{2n+2}+(-1)^m\cdot\dfrac{\sum_{m=0}^{n}(-1)^mC_1}{2n+2}, t\in[l;\Delta];\\ (-1)^{m}\cdot\dfrac{B_3(t-l)}{2n+1}+(-1)^m\cdot\dfrac{\sum_{m=0}^{n}(-1)^mC_1}{2n+1}, t\in[\Delta;2l];\end{cases}$$

$$F_4(t)=\begin{cases}(-1)^{m}\cdot\dfrac{B_2(t)}{2n+2}+(-1)^{m+1}\cdot\dfrac{\sum_{m=0}^{n}(-1)^mC_1}{2n+2}+C_1,\quad t\in[0;\Delta-l];\\ (-1)^{m+1}\cdot\dfrac{B_3(t)}{2n+1}+(-1)^{m+1}\cdot\dfrac{\sum_{m=0}^{n}(-1)^mC_1}{2n+1}+C_1, t\in[\Delta-l;l];\\ (-1)^{m}\cdot\dfrac{B_1(t-l)}{2n+2}+(-1)^{m+1}\cdot\dfrac{\sum_{m=0}^{n}(-1)^mC_1}{2n+2}+C_1, t\in[l;\Delta];\\ (-1)^{m}\cdot\dfrac{B_4(t-l)}{2n+1}+(-1)^{m+1}\cdot\dfrac{\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^mC_1}{2n+1}+C_1, t\in[\Delta;2l];\end{cases}$$

$$B_1(t)=\frac{1}{2}[\varphi_1'(t-\Delta+2l)+\varphi'(t)+\psi_1(t-\Delta+2l)+\psi(t)-$$

$$-\int\limits_{l}^{2ln+\Delta} f(t+2ln+2l-\tau,\tau)d\tau+\int\limits_{0}^{l} f(t-\tau,\tau)d\tau\Bigg],$$

$$B_2(t)=\frac{1}{2}[\varphi_1'(\Delta-l-t)+\varphi'(l-t)-\psi_1(\Delta-l-t)-\psi(l-t)+$$

$$\left.+\int_{l}^{2ln+\Delta} f(\tau-l-2ln-t,\tau)d\tau-\int_{0}^{l} f(l-t+\tau,\tau)d\tau\right];$$

$$B_3(t)=\frac{1}{2}[\varphi_1'(t-\Delta+l)+\varphi'(l-t)+\psi_1(t-\Delta+l)-\psi(l-t)-$$

$$\left.-\int_{l}^{2ln+\Delta} f(t+2ln+l-\tau,\tau)d\tau-\int_{0}^{l} f(l-t+\tau,\tau)d\tau\right];$$

$$B_4(t)=\frac{1}{2}[\varphi_1'(\Delta-t)+\varphi'(t)-\psi_1(\Delta-t)+\psi(t)+$$

$$\left.+\int_{l}^{2ln+\Delta} f(\tau-t-2ln,\tau)d\tau+\int_{0}^{l} f(t-\tau,\tau)d\tau\right],$$

$$C_1=\begin{cases}\dfrac{4s[\varphi_1(l)-\varphi(l)]-\int_0^{\Delta-l}B_2(t)dt}{8s^2l+4s\Delta-4sl}, & \text{при } n=2s-1,\\[2ex] \dfrac{(4s+1)[\varphi_1(l)-\varphi(l)]-\int_{\Delta-l}^{l}B_3(t)dt}{8s^2l+4s\Delta+2sl+2\Delta-2l}, & \text{при } n=2s.\end{cases}$$

Пуст $supp f(x,t)$ содержится в области Q_{T_*}, где $T_*=const$, то ест при $T>T_*$ внешнее воздействие $f(x,t)$ тождественно равно нулю. При этом предположении минимальное значение интеграла граничной энергии оценивается величиной порядка $O\left(\frac{1}{T}\right)$. При этом константа, присутствующая в приведённой оценке зависит от норм функций, которые входят в анализируемые задачи, а также T. Следовательно, при $T\to\infty$ минимальное значение указанного интеграла стремится к нулю, что делает возможным предотвращение резонансного режима в процессе колебаний струны.

В разделе «**Обсуждение полученных результатов**» представлен краткий анализ результатов, полученных в диссертационной работе, а также проведено их сравнение с результатами, достигнутыми другими исследователями в данной области.

ВЫВОДЫ

Основные научные результаты диссертации

Итак, в работе подробно рассмотрены все поставленные задачи и получены соответствующие результаты. Кратко они могут быть изложены следующим образом: для одномерного телеграфного уравнения с переменным коэффициентом из класса суммируемых с квадратом функций вида

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) - q(x,t)u(x,t) = f(x,t),\ \ 0 < x < l,\ \ 0 < t < T$$

в обобщённой постановке:

1. При $T \le l$ проанализирована задача граничного управления, в которой воздействие осуществлялось смещением на левом конце области и приложением упругой силой на правом конце [1-А], [3-А], [4-А], [7-А], [11-А];
2. Для $T \le l$ изучалась задача граничного управления с обратной схемой воздействия: упругая сила на левом конце и смещение на правом конце [2-А], [5-А], [8-А], [9-А], [10-А].

Во обеих ситуациях:

- установлена теорема, утверждающая единственность решения задачи граничного управления при времени, не превышающем критического значения;
- выведены условия, которые представляют собой необходимые и достаточные условия, гарантирующие существование искомого граничного управления в критическое время;
- сформулирована априорная оценка построенного решения, демонтрирующая устойчивость полученного решения по отношению к начальным и конечным условиям;
- обоснована регулярность решения рассматриваемой задачи относительно $q(x,t)u(x,t)$, в котором $q(x,t) \in L_2(Q_T)$.

Кроме того, установлена разрешимость соответствующих смешанных задач для исследуемого телеграфного уравнения, а именно:

- доказаны теоремы, обеспечиваюҳие единственность решения соответствующих смешанных задач;
- доказаны теоремы, гарантирующие существование решения соответствующих смешанных задач;
- установлена устойчивость решения указанных задач относительно $q(x,t)u(x,t)$, в котором $q(x,t) \in L_2(Q_T)$, а также по отношению к функциям, которые входят в постановку задач.

Подчеркнём, что первоначально разрешимость всех рассматриваемых задач была продемонстрирована на примере уравнения вынужденных колебаний струны, которое представляет собой частный случай исследуемого уравнения при $q(x,t) \equiv 0$. Для данного частного случая все соответствующие утверждения чётко сформулированы и строго доказаны.

3. Найдены явные аналитические формулы для оптимальных граничных управлений, реализуемых смещением на левом конце и упругой силой на правом конце, для произвольного достаточно длинного интервала времени, описывающего процессы, подчинённые уравнению вынужденных колебаний струны [6-А];
4. Найдены явные аналитические формулы для оптимальных граничных управлений, реализуемых упругой силой на левом конце и смещением на правом конце, для произвольного достаточно длинного интервала времени, описывающего процессы, подчинённые уравнению вынужденных колебаний струны [6-А].

Рекомендации по практическому использованию результатов:

Настоящая диссертационная работа носит преимущественно теоретический характер. Разработанные и обоснованные в ней методы позволяют анализировать разрешимость сходных задач граничного управления для различных динамических систем. Полученные результаты могут быть использованы при преподавании специализированных курсов для студентов старших курсов, магистрантов и докторантов PhD по специальностям математики и физики в высших профессиональных учебных заведениях.

Кроме того, результаты настоящей работы могут находит применение в моделировании различных процессов, описываемых исследуемыми уравнениями, что существенно расширяет сферу их практического использования.

Список использованных источников

[1] Komornik V. Exact controllability and stabilization. The multiplier method [Text] / V. Komornik. – Paris, Chichester, 1994. – 166 p.

[2] Lions J.L. Exact Controllability, Stabilization and Perturbations for Distributed Systems [Text] / J.L. Lions // SIAM Review. – 1988. – Vol. 30. – № 1. – PP. 1-68.

[3] Zuazua E. Exact controllability of distributed systems for arbitrary small time [Text] / E. Zuazua // C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I. – 1987. – V. 804. – № 7. – P. 173-176.

[4] Zuazua E. Exact Controllability for the Semilinear Wave Equation [Text] / E.Zuazua // J. Math. pures et appl. – 1990. – №69. – PP. 1-31.

[5] Абдукаримов М.Ф. Исследование некоторых задач граничного управления для телеграфного уравнения с переменным коэффициентом: диссертация на соискание учёной степени доктора физико-математических наук [Текст] / М.Ф. Абдукаримов. – Душанбе, 2022. – 308 с.

[6] Абдукаримов М.Ф. Некоторые задачи граничного управления смещением для телеграфного уравнения с переменным коэффициентом [Текст] / М.Ф. Абдукаримов. – Душанбе, 2018. – 240 с.

[7] Бутковский А.Г. Об оптимальном управлении системами с распределёнными параметрами [Текст] / А.Г. Бутковский, А.Я. Лернер // Доклады АН СССР, Кибернетика и теория регулирования. – 1960. – Т.134. – №4. – С. 778-781.

[8] Бутковский А.Г. Метод моментов в теории оптимального управления системами с распределёнными параметрами [Текст] / А.Г. Бутковский // Автоматика и телемеханика. – 1963. – Т. XXIV. –№9. – С. 1217-1225.

[9] Бутковский А.Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами [Текст] / А.Г. Бутковский. – М.: Наука, 1965. – 480 с.

[10] Васильев Ф.П. О двойственности в линейных задачах управления и наблюдения [Текст] / Ф.П. Васильев // Дифференциальные уравнения. – 1995. – Т. 31. – №11. – С.1893-1900.

[11] Васильев Ф.П. Приближенное решение двойственных задач управления и наблюдения [Текст] / Ф.П. Васильев, М.А. Куржанский, М.М. Потапов, А.В. Разгулин. – М.: МАКС Пресс, 2010. – 382 с.

[12] Егоров А.И. Управление упругими колебаниями [Текст] / А.И. Егоров // ДАН УССР. Серия физ-мат. и техн. наук. – 1986. – №5. – С. 60-63.

[13] Егоров А.И. Основы теории управления [Текст] / А.И. Егоров. – М.: Физматлит, 2004. – 504 с.

[14] Егоров А.И. Введение в теорию управления системами с распределёнными параметрами [Текст] / А.И. Егоров, Л.Н. Знаменская.–Санкт-Петербург, 2017.–288

[15] Иванов Д.А. Приближенное решение задачи быстродействия для волнового уравнения с граничными управлениями [Текст] / Д.А. Иванов, М.М. Потапов // Труды Математического института имени В.А.Стеклова. – 2015. – Т. 291. №1. – С. 112-129.

[16] Ильин В.А. Волновое уравнение с граничным управлением на двух концах за произвольный промежуток времени [Текст] / В.А. Ильин // Дифференциальные уравнения – 1999. – Т. 35. – №11. – С. 1517-1534.

[17] Ильин В. А. Волновое уравнение с граничным управлением на одном конце при закрепленном втором конце [Текст] / В.А. Ильин // Дифференциальные уравнения. – 1999. – Т. 35. – №12. – С. 1640-1659.
[18] Ильин В. А. Граничное управление процессом колебаний на двух концах в терминах обобщенного решения волнового уравнения с конечной энергией [Текст] / В.А. Ильин // Дифференциальные уравнения. – 2000. – Т. 36. – №11. – С. 1513-1528.
[19] Ильин В.А. Граничное управление процессом колебаний на одном конце при закрепленном втором конце в терминах обобщенного решения волнового уравнения с конечной энергией [Текст] / В.А. Ильин // Дифференциальные уравнения. – 2000. – Т. 36. – №12. – С. 1670-1686.
[20] Ильин В.А. О граничном управлении на одном конце процессом, описываемым телеграфным уравнением [Текст] / В.А. Ильин, Е.И.Моисеев // Доклады Академии наук. – 2002. – Т. 387. – № 5. – С. 600-603.
[21] Ильин В.А. Граничное управление на двух концах процессом, описываемым телеграфным уравнением [Текст] / В.А. Ильин, Е.И.Моисеев // Доклады Академии наук России. – 2004. – Т. 394. – №2. – С. 154-158.
[22] Ильин В.А. Оптимальное граничное управление процессом колебаний струны на одном конце при свободном другом конце [Текст] / В.А.Ильин, Е.И. Моисеев // Нелинейная динамика и управление. – 2004. – №4. – С. 25-38.
[23] Ильин В.А. Оптимальное граничное управление упругой силой на одном конце струны при свободном втором её конце [Текст] / В.А. Ильин, Е.И. Моисеев // Дифференциальные уравнения. – 2005. – Т. 41. – №1. – С. 105-115.
[24] Крицков Л.В. О задачах граничного управления для уравнения Клейна-Гордона-Фока с суммируемым коэффициентом [Текст] / Л.В. Крицков // Дифференциальные уравнения. – 2015.–Т.51.–№5.–С.688-701.
[25] Потапов М.М. Устойчивый метод решения линейных уравнений с неравномерно возмущённым оператором [Текст] / М.М. Потапов // Доклады Академии наук. – 1999. – Т. 365. – №5. – С. 596-598.
[26] Потапов М.М. Неравенства наблюдаемости в пространствах Соболева для волнового уравнения с переменными коэффициентами [Текст] / М.М. Потапов, Д.А. Иванов // Доклады Академии наук. – 2012. – Т. 447. – №5. – С. 493-497.
[27] Смирнов И.Н. Смешанные задачи для телеграфного уравнения, в случае системы, состоящей из двух участков, имеющих разные плотности и разные упругости, но одинаковые импедансы. Одностороннее управление [Текст] / И.Н. Смирнов // Доклады Академии наук. – 2010. – Т.435. – №1. – С. 22-25.
[28] Смирнов И.Н. Решение смешанных задач с граничным управлением упругой силой для телеграфного уравнения [Текст] / И.Н. Смирнов // Дифференциальные уравнения. – 2011. – Т.47. – № 3. – С. 433–441.
[29] Смирнов И.Н. Управление процессом, описываемым телеграфным уравнением: диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук [Текст] / Н.Н. Смирнов. – Москва, 2011. – 76 с.

Список публикаций соискателя учёной степени

Статьи, опубликованные в рецензируемых журналах, рекомендованных ВАК при Президенте Республики Таджикистан и ВАК при Министерстве образования и науки Российской Федерации:

[1-А] Абдукаримов М.Ф. О задаче граничного управления смещением на одном конце и упругой силой на другом для одномерного телеграфного уравнения с переменным коэффициентом [Текст] / М.Ф. Абдукаримов, **Ф.Р. Исматов** // Вестник Бохтарского государственного университета имени Носира Хусрава. Серия естественных наук. – 2025. – 2/3 (138). – С. 5-21.

[2-А] Абдукаримов М.Ф. Об однозначной разрешимости двух комбинированных смешанных задач для телеграфного уравнения с переменным коэффициентом [Текст] / М.Ф. Абдукаримов, **Ф.Р. Исматов** // Вестник филиала МГУ имени М.В.Ломоносова в г. Душанбе. Серия естественных наук. – 2024. – Т.1. – №3(41). – С. 5-31.

[3-А] Абдукаримов М.Ф. О разрешимости одной смешанной задачи для телеграфного уравнения с переменным коэффициентом из класса суммируеммых с квадратом функций [Текст] / М.Ф. Абдукаримов, **Ф.Р. Исматов** // Доклады национальной Академии наук Таджикистана. – 2022. – Т.65. – №9-10. – С. 586-592.

[4-А] Исматов Ф.Р. Однозначная разрешимость двух комбинированных смешанных задач для телеграфного уравнения с переменным коэффициентом из класса L_2 [Текст] / **Ф.Р. Исматов** // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. – 2024. – №4. – С. 15-34.

[5-А] Исматов Ф.Р. Об однозначной разрешимости одной комбинированной задачи граничного управления для телеграфного уравнения с переменным коэффициентам [Текст] / **Ф.Р. Исматов** // Вестник филиала МГУ имени М.В.Ломоносова в г. Душанбе. Серия естественных наук. – 2025. – Т.1. – №1(45). – С. 5-28.

Материалы конференций и тезисы докладов:

[6-А] Исматов Ф.Р. Об одной задаче оптимального граничного управления для уравнения вынужденных колебаний струны [Текст] / М.Ф. Абдукаримов, **Ф.Р. Исматов** // Материалы международной конференции, посвященной 85-летию со дня рождения выдающегося таджикского математика доктора физико-математических наук, профессора Собирова Темура Сафаровича. – Душанбе, 28-29 ноября 2025. – С. 29-32.

[7-А] Абдукаримов М.Ф. Однозначная разрешимость одной комбинированной задачи граничного управления за критическое время [Текст] / М.Ф. Абдукаримов, **Ф.Р. Исматов** // Материалы международной научно-практической конференции, посвящённой «Двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических наук в сфере науки и образования» и 80-летию со дня рождения профессора Боймурода Алиева. – Душанбе, 2025. – С. 8-11.

[8-А] Абдукаримов М.Ф. О разрешимости одной комбинированной задачи граничного уравнения для уравнения вынужденных колебаний струны за минимальный промежуток времени [Текст] / М.Ф. Абдукаримов, **Ф.Р. Исматов** // Материалы международной научно-практической конференции XIV Ломоносовские чтения «Роль Филиала Московского государственного университета имени М.В.

Ломоносова в городе Душанбе в развитии науки и образования». – Душанбе, 2024. – С. 3-7.

[9-А] Абдукаримов М.Ф. О задаче граничного управления упругой силой на одном конце и смещением на другом процесса, описываемого телеграфным уравнением [Текст] / М.Ф. Абдукаримов, **Ф.Р. Исматов** // Материалы IV международной научно-практической конференции «Современные проблемы математики и её приложений». – Душанбе, 2024. – С. 16-19.

[10-А] Абдукаримов М.Ф. О задаче граничного управления, производимого упругой силой на одном конце и смещением на другом процесса вынужденных колебаний струны [Текст] / М.Ф. Абдукаримов, **Ф.Р. Исматов** // Материалы международной научной конференции, посвящённой 75- летию ТНУ, 20-летию развития точных, естественных и математических наук, 85-летию академика НАН Таджикистана Раджабова Н. – Душанбе, 2023. – С. 12-14.

[11-А] Абдукаримов М.Ф. О граничном управлении смещением на одном конце и упругой силой на другом процесса вынужденных колебаний струны за критическое время [Текст] / М.Ф. Абдукаримов, **Ф.Р. Исматов** // Материалы международной научно-практической конференции «XIII Ломоносовкие чтения», посвящённой 115-летию академика Бободжона Гафурова. Часть 3. Естественные науки. – Душанбе, 2023. – С. 3-6.

АННОТАТСИЯ

ба автореферати диссертатсияи Раҳматуллоҳзода Файзуллоҳ Раҳматулло дар мавзуи «Таҳқиқи масъалаҳои идоракунии сарҳадии таркибӣ барои равандҳое, ки бо муодилаи телеграфӣ бо коэффитсиенти тағйирёбанда тавсиф меёбанд» барои дарёфти дараҷаи илмии доктори фалсафа (PhD) – доктор аз рӯйи ихтисоси 6D060100 – Математика (6D060103 – Муодилаҳои дифференсиалӣ, системаҳои динамикӣ ва идоракунии оптималӣ)

Калидвожаҳо: идоракунии сарҳадӣ, масъалаи омехта, муодилаи телеграфӣ, ҳалли умумишуда, муодилаи интегралӣ, қатори Нейман, лаҳзаи критикии вақт.

Ҳадафи кор. Ҳадафи асосии таҳқиқоти диссертатсионӣ таҳқиқи масъалаҳои идоракунии сарҳадии таркибӣ мебошад, ки тавассути ҷойивазкунӣ дар як сарҳад ва қувваи чандирӣ дар сарҳади дигар, ё баръакс қувваи чандирӣ дар як сарҳад ва ҷойивазкунӣ дар сарҳади дигар, барои муодилаи телеграфӣ бо коэффитсиенти тағйирёбанда амалӣ карда мешаванд.

Усулҳои таҳқиқот. Дар кори мазкур аз усулҳои физикаи математикӣ, таҳлили функсионалӣ, назарияи муодилаҳои интегралии хаттии ҷинси дуюми намуди Волтера ва назарияи масъалаи идоракунии сарҳадӣ истифода шудаанд.

Навовариҳои илмии таҳқиқот. Ҳамаи натиҷаҳои диссертатсия нав мебошанд. Натиҷаҳои асосиро ба таври мухтасар номбар мекунем.

1. Теоремаҳо оид ба ҳалшавандагии масъалаҳои омехтаи таркибии мувофиқ барои муодилаи телеграфии якченака бо коэффисиенти тағйирёбанда исбот карда шудаанд;
2. Теоремаҳо оид ба ягонагии ҳалли масъалаҳои идоракунии сарҳадии таркибӣ барои муодилаи телеграфии якченака бо коэффитсиенти тағйирёбанда дар вақти хурд ё баробари критикӣ исбот карда шудаанд;
3. Теоремаҳо оид ба мавҷудияти ҳалли масъалаҳои идоракунии сарҳадии таркибӣ барои вақти критикӣ исбот карда шудаанд;
4. Устувории ҳалли ҳамаи масъалаҳои омехта ва идоракунии сарҳадии баррасишаванда нисбат ба ошӯби аддитивии $q(x,t)u(x,t)$ ва инчунин нисбат ба функсияҳои дар гузоришӣ масъала истифодашаванда асоснок карда шудааст;
5. Идоракуниҳои сарҳадии оптималии таркибӣ барои равандҳое, ки бо муодилаи лапишҳои маҷбурии тор тавсиф мешаванд, дар фосилаҳои вақти калон, ки қимати хурдтарин қабул кардани интеграли энергияи сарҳадиро таъмин менамоянд, ба даст оварда шудаанд.

Арзишҳои назариявӣ ва амалии таҳқиқот. Кор характери назариявӣ дорад. Натиҷаҳои он метавонанд ҳангоми омӯзиши курсҳои махсус барои донишҷӯёни курсҳои болоӣ, магистрантҳо ва докторантҳои PhD барои ихтисосҳои математика ва физика истифода шаванд. Ҳамчунин, натиҷаҳои бадастомада метавонанд барои амсиласозии равандҳои гуногун, ки бо муодилаҳои баррасишаванда тавсиф мешаванд, истифода шаванд.

АННОТАЦИЯ

на автореферат диссертации Рахматуллохзода Файзуллох Рахматулло на тему «Исследование комбинированных задач граничного управления процессом, описываемым телеграфным уравнением с переменным коэффициентом», представленной на соискание учёной степени доктора философии (PhD) - доктора по специальности 6D060100 – Математика (6D060103 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление)

Ключевые слова: граничное управление, смешанная задача, телеграфное уравнение, обобщённое решение, интегральное уравнение, ряд Неймана, критический момент времени.

Цель работы. Основной целью исследования диссертационной работы является изучение комбинированных задач граничных управлений, производимых смещением на одном конце и упругой силой на другом, или упругой силой на одном конце и смещением на другом для телеграфного уравнения с переменным коэффициентом при времени, меньшем или равном критическому.

Методы исследования. В работе используются методы математической физики, функционального анализа, теории линейных интегральных уравнений типа Вольтеры второго рода и теории задач граничного управления.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми. Вкратце перечислим основные результаты:

1. Доказаны теоремы о разрешимости соответствующих комбинированных смешанных задач для одномерного телеграфного уравнения с переменным коэффициентом;
2. Доказаны теоремы о единственности решения комбинированных задач граничного управления для одномерного телеграфного уравнения с переменным коэффициентом при времени, меньшем или равном критическому;
3. Доказаны теоремы о существовании решения комбинированных задач граничного управления для одномерного телеграфного уравнения с переменным коэффициентом при времени, равном критическому;
4. Обоснована устойчивость решения всех изучаемых смешанных задач и задач граничного управления по отношению к аддитивному возмущению $q(x,t)u(x,t)$, а также относительно функций, входящих в постановку задач;
5. Получены оптимальные комбинированные граничные управления для процессов, описываемых уравнением вынужденных колебаний струны, за большие времена, доставляющие минимум интегралу граничной энергии.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Её результаты можно использовать при чтении спецкурсов для старшекурсников, магистрантов и докторантов PhD специальностей математики и физики. Кроме того, учитывается, что полученные результаты также могут быть использованы для моделирования различных процессов, описываемых рассмотренными уравнениями.

ANNOTATION

of the dissertation of Rakhmatullokhzoda Fayzulloh Rakhmatullo on the topic "Study of Combined Boundary Control Problems for a Process Described by a Telegraph Equation with a Variable Coefficient," submitted for the degree of Doctor of Philosophy (PhD) in the specialty 6D060100 – Mathematics (6D060103 – Differential Equations, Dynamic Systems, and Optimal Control)

Keywords: boundary control, mixed problem, telegraph equation, generalized solution, integral equation, Neumann series, critical time.

Purpose of the work. The main objective of this dissertation is to study combined boundary control problems generated by a displacement at one end and an elastic force at the other, or an elastic force at one end and a displacement at the other, for a telegraph equation with a variable coefficient at a time less than or equal to the critical time.

Research Methods. This paper utilizes methods from mathematical physics, functional analysis, the theory of linear integral Voltaire equations of the second kind, and the theory of boundary control problems.

Scientific Novelty. All results of this dissertation are new. The main results are summarized below:

1. Theorems on the solvability of the corresponding combined mixed problems for a one-dimensional telegraph equation with a variable coefficient are proved;
2. Theorems on the uniqueness of the solution of combined boundary control problems for a one-dimensional telegraph equation with a variable coefficient for a time less than or equal to the critical value are proved;
3. Theorems on the existence of a solution to combined boundary control problems for a one-dimensional telegraph equation with a variable coefficient for a time equal to the critical value are proved;
4. The stability of the solutions of all studied mixed and boundary control problems with respect to an additive perturbation q(x,t)u(x,t), as well as with respect to the functions included in the problem formulation, is substantiated.
5. Optimal combined boundary controls for processes described by the equation of forced string oscillations are obtained over long time scales, minimizing the boundary energy integral.

Theoretical and practical value. This work is theoretical in nature. Its results can be used in specialized courses for senior, master's, and PhD students in mathematics and physics. Furthermore, it is noted that the obtained results can also be used to model various processes described by the equations considered.