

«УТВЕРЖДАЮ»

Ректор Российско-Таджикский

(Славянский) университет,

д.ю.н., профессор

Золотухин А.В.

«15»

2026г.

ОТЗЫВ ВЕДУЩЕЙ ОРГАНИЗАЦИИ

на диссертацию Кулобизода Мирзо Ашурмад «Двоякопериодические решения для нагруженных уравнений обобщенных аналитических функций с дополнительными условиями», представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.3. Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

1. Соответствие диссертации специальности и отрасли науки, по которым диссертация представляется к защите. Тема диссертации Кулобизода М.А. и её содержание соответствует специальности 1.1.3.- Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление, по которой диссертационному совету 6D.KOA-011 предоставлено право на рассмотрение и проведение защиты диссертаций. Работа соответствует паспорту данной научной специальности, её формуле, а также трём основным направлениям области исследования: 1) общая теория дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений; 2) начально-краевые и спектральные задачи для дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений; 3) нелинейные дифференциальные уравнения и систем нелинейных дифференциальных уравнений.

Диссертация Кулобизода М.А. относится к области фундаментальных математических исследований и соответствует приоритетным направлениям научной деятельности в Республике Таджикистан на 2021–2025 годы.

2. Актуальность темы исследования. Теория уравнения обобщённых аналитических функций как математические модели ряда задач геометрии бесконечно малых изгибаний поверхностей и без моментной теории оболочек, задач гидродинамики, аэродинамики, задача квазиконформного отображения достаточно изучены в монографии академика Векуа И., и известного американского математика Берса Л., теорию таких уравнений также внесли вклад академики НАНТ Михайлов Л.Г., Джураев А.Д., Усмонов З.Д., Раджабов Н.Р., и их последователи.

В теории дифференциальных уравнений не менее важным разделом являются нагруженные дифференциальные уравнения. Интерес к нагруженным дифференциальным уравнениям обуславливается тем, что решение многих задач математической физики, математической биологии, экологии, химии и др. сводится к изучению таких задач. В монографии Нахушева А.М. «Нагруженные уравнения и их приложения» - изучено уравнения обобщенных аналитических с нагруженными членами. Дано решение задачи Дирихле для модельного уравнения.

Для уравнения обобщённых аналитических функций задачи существования и нахождения двоякопериодических решений изучены в работах Показеева В.И., Мухамадиева Э., Байзаева С., Сафарова Д., Гаюрова А., и др.. В монографии Сафарова Д.С. с применением аппарата теории эллиптических функций Вейерштрасса дано полное изучение уравнения обобщённых аналитических функций, как в обобщенном, так и в классическом смысле Векуа. Показано, что в классическом смысле задача фредгольмова, а в обобщенном смысле (заданными полюсами) задача нётерова. Причем во всех случаях находится решения через интегральные операторы $T_{\zeta}\rho(z)$ и $T_{\sigma}\rho(z)$, с ядрами $\zeta(z)$ — дзета-функция, $\sigma(z)$ — сигма-функция Вейерштрасса.

Уравнения обобщенных аналитических функций с нагруженными членами мало изучены. Поэтому представляет интерес нахождения двоякопериодических решений для уравнения, обобщенных аналитических функций с нагруженными членами и дополнительными условиями переопределения.

3. Степень обоснованности научных положений, выводов и предложений, изложенных в диссертации. — Научные положения, выводы, теоремы и утверждения, формулы двоякопериодических решений, изложенные в диссертации, обоснованы строгими доказательствами с мощным аппаратом теории эллиптических и обобщенных эллиптических функций Вейерштрасса. Также методы функции переменного комплексного и функционального анализа и теории дифференциальных уравнений.

4. Научная новизна и достоверность полученных результатов. Все полученные в диссертации результаты являются новыми. Их достоверность обосновывается четкими и логическими правильными доказательствами и получение явный вид двоякопериодических решений. Приведем кратко их научную новизну:

1) для уравнения обобщенных аналитических функций с нагруженными членами и точечными условиями переопределения в терминах

коэффициентов уравнения и нагруженных членов найдены необходимое и достаточное условие однозначной разрешимости задачи и явный вид решения посредством интегральных операторов с ядром эллиптических функций Вейерштрасса;

2) для уравнения обобщенных аналитических функций с нагруженными членами и неизвестными параметрами в правой части с дополнительными условиями найдены необходимые и достаточные условия обеспечивающий однозначной разрешимость задачи. Выписаны явные формулы решения задачи;

3) для уравнения с главной частью оператором Бельтрами с нагруженными членами и дополнительными условиями, найдены необходимое и достаточные условия однозначной разрешимости. Выписаны решения посредством интегральных операторов с ядрами обобщенных эллиптических функций Вейерштрасса;

4) для уравнения с главной частью оператором Бельтрами в классе $\mathbb{C}_*^1$ с неизвестными параметрами в правой части и точечными условиями переопределенная, найдены необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости задачи и выписаны явный вид решения.

5. Научная и практическая значимость результатов диссертации.

Научная и практическая значимость результатов диссертации заключается в том, что полученные результаты способствуют дальнейшему развитию теории обобщенных аналитических функций и теории равномерно эллиптических систем первого порядка. Разработанная методика исследования может быть использована при изучении уравнений метааналитических функций, а также других классов уравнений в частных производных первого и второго порядков, включая псевдоаналитические и метагиперболические уравнения.

Результаты диссертационного исследования могут быть применены в научно-исследовательской деятельности и в учебном процессе в Таджикском национальном университете (ТНУ), Институте математики имени А. Джураева Национальной академии наук Таджикистана, Худжандском государственном университете имени Б. Гафурова, Кулябском государственном университете имени А. Рудаки и Бохтарском государственном университете имени Н. Хусрава.

6. Степень достоверности, точности и обоснованность результатов исследования. Степень достоверности результатов исследования высокая, этот факт, а также точность и обоснованность результатов исследования подтверждаются проведенными четкими, логически связанными

рассуждениями, вычислениями и доказательствами теорем о решениях рассматриваемых систем, свойствах решений, о разрешимости граничных задач и публикацией результатов в рецензируемых журналах и трудах международных научных конференции.

7. Личный вклад соискателя в исследование. Личный вклад соискателя в исследование состоит в том, что основные результаты диссертационной работы, перечисленные в разделе «Научная новизна исследования» получены лично соискателем, а также подготовка статей к публикации, апробация полученных результатов диссертации выполнены соискателем.

8. Публикации результатов диссертации в рецензируемых научных журналах. Основные результаты диссертации опубликованы в 5 рецензируемых научных журналах, входящих в реестр ВАК при Президенте Республики Таджикистан.

9. Оценка содержания диссертации и степени ее завершенности. Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, общей характеристики, четырёх глав, заключения и списка литературы, включающего 134 наименования. Общий объём диссертации составляет 176 страниц.

В диссертации использована сквозная нумерация теорем, замечаний и формул, предусматривающая трёхзначную нумерацию. При этом первая цифра соответствует номеру главы, вторая — номеру параграфа, а третья — порядковому номеру теоремы, замечания или формулы в пределах соответствующего параграфа.

Первая глава диссертации посвящена обзору и анализу научной литературы по теме исследования. В ней представлен анализ научных работ, посвящённых нагруженным дифференциальным уравнениям в частных производных, в частности уравнениям с оператором Коши–Римана, а также изложены отдельные сведения из теории двоякопериодических обобщённых аналитических функций.

Во второй главе работы исследуются задачи нахождения двоякопериодических решений с основными периодами $h_1, h_2, \operatorname{Im} \left(\frac{h_2}{h_1} \right) > 0$ для нагруженного уравнения

$$w_{\bar{z}} + aw(z) + \sum_{k=1}^n a_k w(z_k) = \sum_{k=1}^m c_k f_k(z) + f(z), \quad (1)$$

где $a = a(z), a_k = a_k(z), f(z), f_j(z)$ — заданные функции, $k = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}$, неизвестными вместе с решением $w(z)$ являются числа $w(z_k), c_j, k = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}$.

Требуется найти решение, удовлетворяющие условиям переопределения

$$w(t_j) = e_j, \quad j = \overline{1, s}, \quad t_j \neq z_j. \quad (2)$$

Решение задачи (1), (2) ищется в классе регулярных (без полюсов) функций т.е. $w(z) \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ и обозначается так C_*^1 , Ω — основной параллелограмм двоякопериодической группы

$$P = z + m_1 h_1 + m_2 h_2, \quad m_1, m_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Вводится обозначение

$$\Gamma = \{m_1 h_1 + m_2 h_2, \quad m_1, m_2 = \text{целые}\},$$

Γ — решетка периодов и $\Gamma_1 = \frac{\pi}{\Omega_0} \Gamma$, $\Omega_0 = \text{mes} \Omega = |h_1|^2 \text{Im} \left(\frac{h_2}{h_1} \right)$.

В §2.1-2.2 уравнение (1) изучается в случае, когда $c_k = 0$, $k = \overline{1, m}$ и коэффициенты постоянные, $a(z) \equiv a$, $a_k(z) \equiv a_k$. Разрешимость этой задачи зависит от свойства числа a : $a \notin \Gamma_1$ или $a \in \Gamma_1$.

При $a \notin \Gamma_1$, задача сводится к решению системы алгебраических уравнений с n неизвестными $w(z_1), w(z_2), \dots, w(z_n)$. Вопрос о разрешимости зависит от ранга некоторой матрицы A , составленной из коэффициентов уравнения. Показано, что при $\text{rang} A = n$ уравнение (1) однозначно разрешимо при любой правой части $f(z) \in H_*^\alpha$, H_*^α — пространство Гёльдера двоякопериодических функций с периодами h_1, h_2 , $\alpha \in (0, 1)$. При этом решение выписывается в явном виде с помощью интегральных операторов $T_\sigma \rho(z), T_\zeta \rho(z)$, где $\zeta(z)$ — дзета, $\sigma(z)$ — сигма функции Вейерштрасса. В случае $a \notin \Gamma_1$ условия (2) не ставятся на решение уравнения. При $a \in \Gamma_1$, ставиться одно условие вида (2), $s = 1$. В этом случае разрешимость задачи (1), (2) сводится к решению системы алгебраических уравнений с $n + 1$ неизвестными: $w(z_1), w(z_2), \dots, w(z_n), c$ — неизвестная постоянная.

Показано, что когда $\text{rang} A = n + 1$, то задача (1), (2) при $a \in \Gamma_1$ имеет единственное решение и решение найдено в явном виде.

В §§2.3-2.4 задача (1), (2) в классе C_*^1 исследована для переменных коэффициентов $a(z), a_k(z), k = \overline{1, n}$. Когда коэффициенты $a(z), a_k(z), f(z) \in H_*^\alpha$, разрешимость задачи (1), (2) зависит от свойства, число

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} a(z) d\Omega: \quad a_0 \in \Gamma \text{ или } a_0 \notin \Gamma,$$

Γ — решетка периодов.

Показано, что при $a_0 \notin \Gamma$ для разрешимости уравнения (1) не нужны условия (2). В этом случае для нахождения решения получается система алгебраических уравнений из n неизвестных и n — уравнений и матрица

коэффициентов зависеть от числа: $T_{\zeta}a(z_j), T_{\sigma}a_k(z), T_{\sigma}f(z), j = \overline{1, n}$ где $T_{\zeta}\rho(z)$ — интегральный оператор с ядром $\zeta(z)$, а $T_{\sigma}\rho(z)$ — ядром $\sigma(z)$.

Показано, что при $\text{rang} A = n$ задача однозначно разрешима и решение найдено в явном виде.

При $a_0 \in \Gamma$ для разрешимости уравнения нужно одно условие, то есть $s = 1$. Решается систему алгебраических уравнений из $n + 1$ уравнений с $n + 1$ неизвестными. Показано, что условие $\text{rang} A = n + 1$, обеспечивает однозначную разрешимость задачи. При этом решение находится в явном виде.

В §2.5. изучена задача (1), (2), когда все $a_k(z) = 0, k = \overline{1, n}$, и неизвестными являются функции $w(z)$ и постоянные $c_1, c_2, \dots, c_n$. В случае, когда a — постоянная и $a \notin \Gamma_1$ или $a \in \Gamma_1$ найдены необходимое и достаточное условие однозначной разрешимости, когда $s = n$. В случае, $s \neq n$ однозначная разрешимость задач не будет.

В §2.6 изучается квазилинейное уравнение вида

$$w_{\bar{z}} + aw(z) + \left(b_0(z) + \sum_{k=1}^n c_k b_k(z) \right) w^m(z) = 0, \quad (3)$$

с условием переопределения (2).

Показано, что эта задача при $m = 2$ сводится к задаче изученной в §2.5. Воспользуясь результатами §2.5 и условиям $e_j \neq 0, j = \overline{1, s}$ доказана однозначная разрешимость задачи и выписано решение в явном виде.

В §2.7 исследована задача (1), (2) в общем виде (при $f(z) \equiv 0$). Сперва изучено одномерный случай, то есть для уравнения

$$w_{\bar{z}} + a(z)w(z) + b(z)w(z_0) = f(z)e, \quad (4)$$

$$w(z_1) = e_1, \quad w(z_2) = e_2, \quad z_1, z_2 \in \Omega. \quad (5)$$

Для разрешимости задачи (4), (5) доказано, что если $a_0 \notin \Gamma$ и

$$\Delta = F_1(z_1)F_2(z_2) - F_2(z_1)F_1(z_2) \neq 0,$$

то задача (4), (5) имеет единственное решение вида

$$w(z) = F_1(z_2)w(z_0) + F_2(z_1)e,$$

где

$$F_1(z) = e^{-T_{\zeta}a(z)}T_{\sigma}(be^{T_{\zeta}a}), \quad F_2(z) = e^{-T_{\zeta}a(z)}T_{\sigma}(fe^{T_{\zeta}a}).$$

В третьей главе изучается задача нахождения двоякопериодических решений класса C_*^1 для равномерно эллиптической системы вида

$$w_{\bar{z}} - q(z)w_z + a(z)w(z) + \sum_{k=1}^n a_k(z)w(z_k) = f(z), \quad q(z) \leq q_0 < 1, \quad (6)$$

с условиями переопределения

$$w(z_j) = e_j, \quad j = \overline{1, s} \quad (7)$$

и неизвестным решениям $w(z)$ и числа $w(z_1), w(z_2), \dots, w(z_n)$.

Параграф 3.1 носит вспомогательный характер. В рассматриваемом классе C_*^1 , найдено решение неоднородного уравнения Бельтрами

$$w_{\bar{z}} - q(z)w_z = f(z), \quad |q| \neq 1, \quad q - \text{const.} \quad (8)$$

Показано, что если

$$\iint_{\Omega} f(z) d\Omega = 0,$$

то уравнение (8) имеет решение вида

$$w(z) = C + \frac{1}{\pi(1 - |q|^2)} \tilde{T}_\zeta f(z),$$

где

$$\tilde{T}_\zeta f(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega'} f(t) \zeta(\tau - q\bar{\tau} - z + q\bar{z}) d\Omega,$$

$\zeta(z + q\bar{z})$ — обобщённая дзета-функция Вейерштрасса.

В §3.2-3.3 изучено уравнение

$$w_{\bar{z}} - qw_z + aw(z) + bw(z_1) = f(z). \quad (9)$$

Сначала изучено случай $a = 0$, затем $a \neq 0$. Условия разрешимости задачи зависят от свойства число a : $a \in (1 - |q|^2)\Gamma^1$ или где $\Gamma^1 = \Gamma + q\bar{\Gamma} = \{m_1(h_1 + q\bar{h}_1) + m_2(h_2 + q\bar{h}_2), m_1, m_2 - \text{целые}\}, m_1, m_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

При $a \notin (1 - |q|^2)\Gamma^1$, без условия (2) показано, что для однозначной разрешимости задачи, необходимо и достаточно, чтобы $a + b \neq 0$ и решение в точке z_1 принимало определенное значение, выражающие через интеграла $\tilde{T}_\sigma^\omega \rho(z)$ с ядром $\sigma(\omega(z)) = \sigma(z + q\bar{z})$, построенное на периодах $h^1 = h_1 + q\bar{h}_1, h^2 = h_2 + q\bar{h}_2, |q| \neq 1$.

Решение выписывается через интегрального оператора $\tilde{T}_\sigma^\omega \rho(\omega)$.

В случае $a \in (1 - |q|^2)\Gamma^1$, найдено единственное решение задачи (6), (7) в явном виде через интеграла $\tilde{T}_\zeta^\omega \rho(\omega)$ с ядром $\zeta(\omega) = \zeta(z + q\bar{z})$.

Далее, поставленная задача исследуется для постоянных коэффициентов. При $a \notin (1 - |q|^2)\Gamma^1$ разрешимость уравнения без дополнительной условия сводится к решению системе алгебраических уравнений из n уравнений с n неизвестными $w(z_1), w(z_2), \dots, w(z_n)$. Когда $\text{rang} A = n$, A — основной матрицы, уравнение, имеет единственное решение и решение выписывается через интегральные операторы $\tilde{T}_\zeta^\omega \rho(z)$ с ядром обобщенной функции Вейерштрасса $\sigma(z + q\bar{z})$.

В случае $a \in (1 - |q|^2)\Gamma^1$ решение получается из системы $n + 1$ уравнений с $n + 1$ неизвестными. Доказано, что если $\text{rang} \tilde{A} = n + 1$ то задача имеет единственное решение в явном виде через интеграла $\tilde{T}_\zeta^\omega \rho(z)$.

В §3.6 задача (6), (7) изучено для переменных коэффициентов. Разрешимость задачи зависит от свойства коэффициента

$$\tilde{a}_0 = \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \omega_z(z) a(z) d\Omega \in \Gamma^1 \text{ или } \tilde{a}_0 \notin \Gamma^1,$$

где $\omega_z(z) \in C_*^{1+\alpha}$ основной квазипериодической гомеоморфизм уравнения Бельтрами, удовлетворяющей условиям

$$\omega(0) = 0, \quad \omega(z + h_j) = \omega(z) + \tilde{h}_j, \quad j = 1, 2,$$

$$\operatorname{Im}(h_2/h_1) \neq 0, \quad \operatorname{Im}(\tilde{h}_2/\tilde{h}_1) \neq 0,$$

$\tilde{h}_j$ — зависят как функционал от $q(z)$, $q(z) \in C_*^1$, $|q(z)| \leq q_0 < 1$.

Решение задачи при $\tilde{a}_0 \in \Gamma$ получено с помощью интегрального оператора

$$\tilde{T}_\zeta \rho(z) = T_\zeta^\omega \rho(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \rho(t) H(t, s) d_t \Omega,$$

$$H(t, s) = \omega_t(t) [\zeta(\omega(t)) - \omega(z)] = \omega_t(t) \bar{\zeta}(t - z),$$

а при $\tilde{a}_0 \notin \Gamma^1$ через

$$\tilde{T}_\sigma^\omega \rho(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \rho(t) \omega_t(t) \frac{\sigma(\omega(t) - \omega(z) - \tilde{a}_0)}{\sigma(-\tilde{a}_0) \sigma(\omega(t) - \omega(z))} d_t \Omega,$$

$\zeta(\omega(z)), \sigma(\omega(z))$ — обобщенные эллиптические функции Вейерштрасса, построенные в работах Д.С. Сафарова.

Для первого случая $\operatorname{rang} \tilde{A} = n$, а для второго $\operatorname{rang} \tilde{A} = n + 1$ являются условиями однозначной разрешимости.

В параграфе 3.7 исследуется нелинейное уравнение вида

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} - q(z) \frac{\partial w}{\partial z} + a(z) w(z) + (f_0(z) + b f_1(z)) w^n(z) = 0, \quad (10)$$

с условием

$$w(z_0) = A, \quad z_0 \in \Omega. \quad (11)$$

При $n = 2$ это задачи сводится к задаче

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} - q(z) \frac{\partial \varphi}{\partial z} - a(z) \varphi(z) = f_0(z) + b f_1(z), \quad (12)$$

$$(z_0) = \frac{1}{A}, \quad A \neq 0. \quad (13)$$

Здесь неизвестными являются $\varphi(z)$ и постоянное b . Как выше находится необходимое и достаточное условие однозначной разрешимости задачи при $\tilde{a}_0 \notin \Gamma^1$ и $\tilde{a}_0 \in \Gamma^1$ и решение находится в явном виде.

10. Соответствие оформления диссертации требованиям ВАК при Президенте Республики Таджикистан. Оформление диссертации соответствует требованиям Инструкции о порядке оформления диссертации

и автореферата диссертации (Приложение 2 к распоряжению председателя ВАК при Президенте Республики Таджикистан от 27 декабря 2024 г., № 493).

11. Соответствие научной квалификации соискателя для получения ученой степени. По содержанию диссертации, опубликованным работам, участием в международных и республиканских конференциях и выступлению соискателя Кулобизода М.А. можно сделать вывод, что ее научная квалификация соответствует получению ученой степени кандидата физико-математических наук и представленной научной специальности 1.1.3 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

12. Замечания и спорные вопросы по поводу формирования диссертации. По диссертации и автореферату отметим следующие замечания:

- на стр. 6 автореферата второй абзац снизу надо было писать полностью, а не полностью;
- на стр. 75 диссертации седьмая строка снизу вместе $a_0 \in \Gamma_1$ должно было написать $a_0 \in \Gamma$;
- на стр. 150 диссертации девятая строка снизу вместе $|z| \neq 1$ должно быть $q \neq 1$.

Имеющиеся недостатки не снижают высокое научное качество диссертации.

Автореферат диссертации подготовлен в соответствии с установленным порядком получения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.3 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление и полностью отражает основное содержание исследования, в нём обоснованы и полностью объяснены значимые научные результаты.

13. Заключение по диссертации. В общем, диссертация Кулобизода Мирзо Ашурмад на тему «Двоякопериодические решения для нагруженных уравнений обобщенных аналитических функций с дополнительными условиями» для получения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.3 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление выполнена на необходимом научном уровне и по содержанию соответствует существующим требованиям.

Диссертация соответствует требованиям ВАК при Президенте Республики Таджикистан и автор Кулобизода М.А. достоин присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.3 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Отзыв подготовлен в соответствии с пунктами 76 – 79 и 81 Порядка присуждения ученых степеней, утверждённого постановлением Правительства Республики Таджикистан от 30 июня 2021 года, № 267 (в редакции постановления Правительства Республики Таджикистан от 26 июня 2023 года, №295).

Отзыв обсужден и утвержден на заседании кафедры математики и физики Российско-Таджикский (Славянский) университет, (протокол №2 от «15» сентября 2026 г.).

На заседании кафедры присутствовали 13 человек.

Результаты голосования: «за» - 13 человек, «против» - нет, «воздержавшиеся» - нет.

Председатель заседания: д.ф.-м.н.,
профессор кафедры информатики и
информационных систем:

Хасанов Ю.Х.

Эксперт: д.ф.-м.н., профессора
кафедры математики и физики:

Курбаншоев С.З.

Секретарь заседания,
к.ф.-м.н., доцент

Гаибов Д.С.

Подписи Ю.Х. Хасанова, С.З. Курбаншоева и Д.С. Гаибова заверяю.

Начальник управления кадров
Российско-Таджикского
(Славянского) университета



Боровицкая Л.А.

Адрес: 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе,
ул. Мирзо Турсунзаде, 30, Тел: +992 (37) 221-35-50;
E-mail: p.rektora@mail.ru

« 15 » 09 2026г.