

«УТВЕРЖДАЮ»

Ректор Российско-Таджикского
(Славянского) университета



Д.э.н., профессор М.К. Файзулло

« 23 » сентября 2024 г.

ОТЗЫВ

ведущей организации на диссертацию Шокира Фархода по теме «Математическое моделирование динамических и топологических локализованных решений нелинейных эволюционных уравнений», представленную на соискание учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 05.13.18 – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ».

Актуальность темы диссертации, теоретическая и практическая значимость полученных результатов.

Исследование нелинейных эволюционных уравнений (НЭУ) является одним из самых фундаментальных и перспективных направлений в математической физике. За последние десятилетия, благодаря интенсивному развитию наукоемких технологий наблюдается ускоренное расширение спектра практических применений новых явлений, описываемых в рамках НЭУ, которые представляют собой особый класс ключевых дифференциальных уравнений в частных производных, содержащих временные переменные. В настоящее время НЭУ применяется для описания состояний или процессов, меняющихся со временем, в таких основных областях, как физика плазмы, физика твердого тела, механика жидкости, биология, квантовая оптика и оптоволоконная технология, химическая кинематика, астрономия и т. д.

Диссертационная работа Шокира Ф. посвящена изучению одной из наиболее важных и актуальных научных проблем данной сферы – исследованию локализованных решений НЭУ, свойства которых описываются, в частности, теорией уединенных волн. Напомним, что указанные локализованные решения относятся к классу особых волн, обладающих корпускулярно-волновым дуализмом и почти повсеместно существующих в природе. До настоящего времени теория уединенных волн нашла широкое применение в нелинейных областях, например, в механике жидкости, нелинейной оптике, оптоволоконной связи, астрономии, а также в медицине, биологии, экологии и т. д.

Структура диссертации состоит из введения, 6 глав, выводов и рекомендации по практическому использованию результатов, списка литературы и публикации автора и приложений, представлена на 353 страницах машинописного текста и содержит 311 библиографических ссылок. Работа хорошо иллюстрирована, результаты исследований представлены в том числе, в виде рисунков, графиков и таблиц.

Во введении приведены общие сведения о представленной работе, в том числе описаны цели и задачи, объекты и предметы, а также научная новизна исследования. Приведены положения, выносимые на защиту и обоснована теоретическая и практическая значимость исследования.

В первой главе, состоящей из 3 параграфов приведены результаты анализа изученной литературы и теоретических идей, теоретико-методологических основ исследования, постановка и анализ существующих проблем, полученных результатов, нерешенных вопросов, положение исследования в общем контексте изучаемой области относительно современного уровня разработки, обоснована важность и актуальность поставленных задач. В том числе проведен краткий обзор работ по НЭУ и их локализованных решений, развития методологии исследования, актуальные проблемы математического моделирования НЭУ теоретико-полевых моделей. В частности, приведены основные сведения об

уравнениях Буссинеска, Кортевега де Фриза и его модифицированного варианта, \sin -Гордона, Бюргерса, о нелинейном уравнении Шредингера, уравнении Ландау-Лифшица и других уравнений, обладающих солитонными решениями.

Во второй главе, также состоящей из 3 параграфов приведены подробные сведения о материале и методологии исследования, включая динамические и топологические локализованные решения нелинейных уравнений математической физики, многоуровневые квантовые системы и разработанные в диссертационной работе методов исследования. Приведены общие сведения о солитонном явлении, в частности проведен общий анализ доменной структуры вакуума и доменных стенок, пульсонов, бризеров и так называемых световых пул. Отмечено также ключевое влияние эксперимента Ферми-Паста-Уламы, который инициировал эпоху компьютерных расчетов в исследовании локализованных решений НЭУ, а также известных аналитических и численных методов решения вышеуказанных уравнений, включая метод обратной задачи рассеяния, преобразования Бэклунда, метод Хироты, а также численные методы – конечных разностных схем, конечных элементов, граничных элементов и конечных объемов. В параграфах 2.2 и 2.3 данной главы также приведены подробные сведения об основной теоретико-полевой модели диссертационной работы – семейства нелинейных сигма-моделей, методов построения численных схем для математического моделирования, разрешимость и устойчивость численных схем и их программная реализация на языке программирования Фортран. Обсуждены также многоуровневые квантовые системы, актуальные задачи и некоторые вопросы математического моделирования сложных квантовых систем, в частности, приведены сведения о представлении Майораны, который был использован в диссертационной работе для исследования квантовых систем с высоким значением спина.

Таким образом, в первых двух главах диссертации сформирована теоретическая и практическая основа исследований диссертационной работы, включая обоснование задач, использованных и разработанных методов исследования. Далее, на основе применения данной научно-практической базы существующих и разработанных методов, описанных в первых двух главах диссертационной работы, в последующих главах приведены подробные сведения о следующих полученных результатах, выносимых на защиту:

– разработаны алгоритм, численная схема и комплекс компьютерных программ для проведения численного моделирования процессов эволюции динамических и топологических локализованных решений и их взаимодействия в рамках $(2+1)$ -мерных НЭУ – уравнения \sin -Гордона и $O(3)$ нелинейной сигма-модели (НСМ) (глава 3);

– получены новые движущиеся линейные доменные стенки в рамках $(2+1)$ -мерных уравнения \sin -Гордона и $O(3)$ НСМ. Разработаны модели их взаимодействия и выявлен ряд свойств данных моделей, от образования единой осциллирующей структуры и дальнего действия до прохождения доменных стенок друг сквозь друга (глава 3);

– разработаны модели процессов взаимодействия топологического вихря и доменных стенок. Показано, что топологический вихрь с топологическим зарядом Q_t распадается на $2Q_t$ локализованные возмущения, движущихся вдоль доменной стенки со скоростью света. При этом доменные стенки при различных параметрах взаимодействия сохраняют структурную устойчивость (глава 3);

– разработаны модели процессов взаимодействия топологического вихря и двух доменных стенок. Выявлен ряд новых свойств полученных моделей, при различных скоростях и пространственных конфигурациях (глава 3);

– получены новые осциллирующие топологические вихри (2+1)-мерной $O(3)$ НСМ, разработаны модели их взаимодействия и показана устойчивость полученных решений (глава 3);

– разработаны алгоритм, численные схемы и компьютерные программы, для численного моделирования процессов эволюции исследуемых локализованных решений и их взаимодействия в рамках (2+1)-мерных уравнений \sin -Гордона и $O(3)$ НСМ в обратном течении времени: $t' = -t$. Получены модели, подтверждающие свойство Т-инвариантности исследуемых НЭУ (глава 3);

– получен аналитический вид новых бризерных решений (2+1)-мерного уравнения \sin -Гордона. Методами численного моделирования добавлением возмущений найденному решению получены новые бризерные решения $O(3)$ НСМ (глава 4);

– разработаны численные модели, описывающие процесс эволюции полученных новых бризерных решений, а также их взаимодействия с топологическим вихрем и доменной стенкой. Выявлены новые свойства полученных моделей (глава 4);

– исследована система полиномов Майораны для описания квантовых систем в высоком значении спина и определен общий вид функции распределения вероятности согласования ориентированных состояний данных систем при различных значениях спинового числа: $S \geq 1/2$ (глава 5).

Следует отметить, что НСМ, рассмотренная в диссертационной работе, была предложена как эффективная модель физиками М.Гелл-Манном и М.Леви, в статье от 1960 года для описания σ -частицы, участвующей в бета-распаде вместе с пионами. С математической точки зрения данные модели описывают отображение из области Σ , рассматриваемой как многообразие, в другое многообразие T , называемое целевым пространством. То есть, эти модели можно описать как

гармонические отображения из-за их геометрической интерпретации целевого пространства. Любая конфигурация поля описывает отображение из комплексной плоскости в сферу S^2 . В случае инвариантной относительно трехмерного вращения $O(3)$ НСМ этот метод приводит к её связи с уравнением \sin -Гордона, на основе формулировки НСМ в терминах триплета скалярных полей φ_i , которые принимают значения в симметричном целевом пространстве, а именно в S^2 . Известно также, что $O(3)$ НСМ имеют несколько интересных решений, включая рассмотренные в диссертации класс решений с целым топологическим зарядом, а также решения с полуцелым топологическим зарядом. Данная модель в свое время была предложена как теоретическая лаборатория для апробации идей теории квантовой хромодинамики, из-за её основных особенностей: асимптотическая свобода, динамическая генерация массы, инстантоны, скирмионы, интегрируемость и т. д. По этим и другим причинам $O(3)$ НСМ по-прежнему привлекает интерес многих физиков и математиков. Например, в случае спиновых цепочек $O(3)$ НСМ становится не просто теоретической лабораторией, а реалистичной моделью, описывающей физику низких энергий.

В главе 3 диссертации приведены результаты по численному моделированию топологических вихрей Белавина-Полякова, которых называют также скирмионами. Скирмионы в свое время были введены в фундаментальной ядерной физике как модели нуклонов, но, тем не менее, они имеют также и практические внедрения в области современного материаловедения. Одной из причин интереса исследователей к изучению скирмионов в теориях ферро- и антиферромагнетиков является сходство $O(3)$ НСМ с непрерывной спин-полевой моделью обменного взаимодействия. Топологические эффекты, которые порождают скирмионы, возникают также в самых актуальных сферах современной науки, включая конденсаты Бозе-Эйнштейна, квантовый эффект Холла, аномальный эффект Холла, жидкие кристаллы и графен.

Также в главе 3 (параграф 3.2) диссертации получены модели стационарных и движущихся локализованных границ магнитных доменов – доменных стенок. Данные топологические структуры представляют собой очень тонкие области, разделяющие магнитные домены и играют существенную роль в электрических, электромеханических и оптических свойствах сегнетоэлектрических материалов, которые очень часто разделяются на домены, области, которые различаются по направлению спонтанной поляризации. В частности, с практической точки зрения, особенно актуальным является свойство высокой подвижности данных стенок, которое способствует быстрому переключению поляризации материала.

Четвертая глава диссертации Шокира Ф. посвящена бризерным локализованным решениям НЭУ, где, в частности, автором найдено точное аналитическое решение в виде двумерного бризера уравнения \sin -Гордона (параграф 4.1). Заметим, что существование локализованных структур нелинейных сред в виде уединенных волн, солитонов и их различных видов, включая бризеры (осциллирующее решение), среди прочих, является одной из самых ярких демонстраций нелинейных свойств среды, в которой они распространяются. Такие волны встречаются в самых разных областях исследований, относящихся к оптике, акустике, плазме, гидродинамике, физике элементарных частиц и т. д. В зависимости от характера нелинейности реализуются различные механизмы образования уединенных волн. Бризерные явления представляют особый интерес, поскольку они могут распространяться при относительно низкой интенсивности волны по сравнению с другими видами солитонов. Они изучались в течение очень долгого времени, как теоретически, так и экспериментально, во многих нелинейных физических явлениях.

Исследования, проведенные в рамках задач главы 5 диссертации, имеют некоторые особенности и отличия от объектов исследований и результатов, полученных в главах 3 и 4. Двумерные локализованные

структуры НЭУ, изученные в главах 3 (топологические вихри, доменные стенки) и 4 (бризерные решения) являясь квазичастицами ограничены в рамках систем со спиновым числом $1/2$. Вышеуказанные локализованные структуры являются квазичастицами, состоящими из когерентных волн возмущений изотопических спинов, с основными состояниями на полюсах единичной сферы S^2 : «спин вверх» в точке $(0,0,1)$ или «спин вниз» в точке $(0,0,-1)$. То есть, все модели, разработанные и полученные в главах 3 и 4 с точки зрения физики функционируют в рамках так называемых базовых фермионных моделей с двумя основными квантовыми состояниями: $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$.

Таким образом, в главе 5 диссертации рассмотрена задача разработки методов математического моделирования нелинейных явлений и процессов в рамках систем со значением спина $J > 1/2$. Напомним, что с теоретической точки зрения квантовые спиновые системы являются математическими моделями, которые часто используются для представления сложных физических систем, в том числе – в физике конденсированного состояния, в квантовой теории информации, включая модели для магнетизма и квантовых цепей. В последнее время квантовые системы с высоким значением спина привлекают большое внимание в квантовых вычислениях и квантовых измерениях, поскольку обладают гораздо большим количеством степеней свободы их можно использовать для реализации многих передовых методов в квантовых технологиях. В частности, изучение динамики управляемой многоуровневой квантовой системы, особенно при аналитической обработке, имеет решающее значение для многих практических приложений в квантовых измерениях или квантовых вычислениях.

Для решения поставленных задач автором диссертации использовано представление Майораны, являющееся математическим инструментом описания квантовых состояний частиц с высоким спином и представляет состояние как точку на сфере с более высоким числом измерений, причем каждая точка соответствует разному состоянию спина. То есть, в отличие от

других представлений, таких как сфера Блоха, представление Майораны можно использовать для частиц с любым значением спина, а не только для частиц со спином $1/2$. На основе данного метода автором диссертации найдены значения функции, описывающих вероятность согласования ориентированных квантовых систем со спиновым значением $J \geq 1/2$.

Полученные в главе 5 результаты могут быть использованы в различных областях физики, таких как квантовая информация и квантовые вычисления, а также в изучении топологических фаз материи и при описании спин-орбитальной связи в конденсированных системах.

В заключительной 6-ой главе диссертации проведено обсуждение результатов исследования, полученных в рамках $(2+1)$ -мерных НЭУ и высокоспиновых квантовых систем, научно-практический потенциал полученных результатов и их сравнение с исследованиями других авторов. Также обсуждены вопросы практического применения новых научных данных, связанных с полученными результатами, определение их физических параметров и общего вклада работы современному состоянию исследуемой теории.

Исходя из вышеприведенных рассуждений можно утверждать, что тема диссертации является актуальной, соответствующей требованиям, предъявляемым квалификационным научно-исследовательским работам, а полученные результаты имеют важные научно-практические значения для развития исследований локализованных решений НЭУ, имеющих множество приложений, в частности, в физике, химии, биологии, медицине, астрономии и в их современных направлениях.

Степень достоверности и апробация результатов исследования.

Достоверность научных результатов, полученных в диссертации Шокира Ф. численными методами основано на разработке устойчивых разностных схем, алгоритмов и комплексов компьютерных программ, проверенных на тестовых задачах, сравнении полученных результатов с справочными литературными данными и соответствующими работами

других авторов. Автору удалось разработать метод численного компьютерного моделирования, который позволяет получить эволюционные двумерные модели, отображающие процесс взаимодействия локализованных решений НЭУ. Достоверность результатов, полученных аналитическими методами также основаны на использовании известных методов, соответствии полученных решений условиям задачи, научным данным и в сравнении параметров решения с результатами других работ.

Разработанные методы и полученные результаты диссертации доложены и обсуждены в ряде республиканских и международных научных конференциях, а также на семинарах Физико-технического института им. С.У Умарова НАНТ и механико-математического факультета Таджикского национального университета. По результатам диссертационного исследования опубликованы 21 статья в рецензируемых научных журналах из списка ВАК при Президенте Республики Таджикистан и ВАК при Министерстве науки и высшего образования Российской Федерации, в том числе в журналах входящих в список Scopus и Web of sciences. Изданы 3 монографии, получены 4 свидетельства о государственной регистрации информационного ресурса от ГУ «НПИЦ» МЭРТ РТ, 8 свидетельств о государственной регистрации программы для ЭВМ от ФСИС «Роспатент» РФ. Также опубликованы около 90 статей и тезисов в других научных журналах и сборниках республиканских и международных конференций, в том числе 19 статей и тезисов на английском языке.

Оценка новизны полученных результатов, содержания и структуры диссертации, соответствие её оформления требованиям.

Все научные результаты, полученные в диссертации, являются новыми. Наиболее важными среди них являются – получение точного аналитического вида класса бризерных решений $(2+1)$ -мерного уравнения \sin -Гордона; получение осциллирующих топологических вихрей в рамках $(2+1)$ -мерного $O(3)$ НСМ; разработка моделей взаимодействия топологических вихрей и доменных стенок, которые подтверждают и

существенно обобщают известные ранее результаты; разработка численных моделей, описывающих динамику двумерных доменных стенок; разработка моделей обратной эволюции процессов взаимодействия локализованных решений (2+1)-мерных НЭУ – уравнения sin-Гордона и O(3) НСМ, подтверждающих свойство T-инвариантности исследуемых моделей; определение выражений для корреляционных функций ориентированных состояний представления чистых спиновых систем на основе базовых состояний со спином $J \geq 1/2$.

С технической точки зрения следует отметить следующие результаты: разработка алгоритма, численной схемы и комплекса компьютерных программ, позволяющих проведение моделирования эволюции как отдельных локализованных решений (2+1)-мерных НЭУ в стационарном и движущимся состояниях, так и процессов их взаимодействия с высокой точностью сохранения энергии; разработка аналогичных комплексов программ численного моделирования эволюции процессов взаимодействия локализованных решений в рамках (2+1)- мерного уравнения sin-Гордона и O(3) НСМ в обращенном времени: $t' = -t$.

Структура диссертации имеет корректную логическую последовательность обзора изучаемых тем, описания исследований и свойств полученных результатов. Выводы диссертации и положения, выносимые на защиту обоснованы анализом полученных результатов и их сопоставлением с известными научными литературными источниками, справочными данными, а также результатами других авторов. Полученные результаты соответствуют цели и задачам исследования, представляют научную ценность и могут найти широкое применение в практической деятельности по разработке средств оптической телекоммуникации, а также устройств, функционирующих на основе квантовых вычислений.

Оформление работы соответствует всем требованиям Инструкции о порядке оформления диссертаций и автореферата диссертаций, утвержденной решением Президиума ВАК при Президенте Республики

Таджикистан от 31 марта 2022 года (№3), Приложения 2 к постановлению Правительства Республики Таджикистан №267 от 30 июня 2021 года, о порядке присуждения ученых степеней ВАК при Президенте Республики Таджикистан (в редакции пост. Правительства РТ № 295 от 26 июня 2023 года).

Соответствие автореферата основному содержанию диссертации.

Автореферат полностью отражает основное содержание, логику и внутреннее единство диссертационной работы, её структура обусловлена поставленными целью и задачами исследования.

Замечания и рекомендации.

1. В численных исследованиях для проведения научных расчетов использован язык программирования Фортран, который является первым языком программирования высокого уровня и имеет более чем 60-летнюю историю. Несмотря на то, что существуют современные версии данного языка программирования, однако в настоящее время в численных научных расчетах преимущественно используются современные языки программирования, такие как C++ и Python.

2. В численных экспериментах работы, а также в аналитических исследованиях автора использованы в основном безразмерные величины, уточнение которых было бы необходимо экспериментаторам для разработки методов практического внедрения или лабораторной апробации полученных в диссертации результатов.

3. Обзор литератур главы 1 и сведения о существующих и разработанных методах исследования главы 2 можно было объединить в более сжатом виде, а обсуждения результатов исследования главы 6 можно было разместить в конце каждой из глав 3–5. В этом случае, можно было выделить отдельной главой задачу математического моделирования исследуемых нелинейных процессов в обращенном времени, рассмотренную в параграфе 3.4, для более подробного изложения

полученных в этом направлении результатов, включая вопросы и перспективы их практического внедрения.

4. Несмотря на множество разработанных моделей, описывающих взаимодействие локализованных решений НЭУ топологического и динамического видов, выявление ряда их уникальных свойств, в диссертации не приведены прямые аналогии с экспериментальными работами, которые могли существенно повысить ценность полученных результатов.

Но, следует отметить, что все указанные замечания носят технический и рекомендательный характер и не снижают качество и высокую научную значимость рассматриваемой диссертационной работы.

Заключение о соответствии диссертации критериям и требованиям, установленным «Порядком присуждения учёных степеней».

Вышеизложенное даёт основание считать, что диссертационная работа Шокира Фархода «Математическое моделирование динамических и топологических локализованных решений нелинейных эволюционных уравнений», представленная на соискание учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 05.13.18 – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ», является завершённой научно-квалификационной работой и полностью соответствует требованиям ВАК при Президенте Республики Таджикистан, в том числе соответствующим пунктам Порядка присуждения ученых степеней (в редакции пост. Правительства РТ № 295 от 26 июня 2023 года), предъявляемым к диссертациям на соискание учёной степени доктора физико-математических наук, а её автор Шокир Ф. заслуживает присвоения ему искомой учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 05.13.18 – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ».

Результаты диссертационной работы Шокира Фархода заслушаны и обсуждены на заседании объединенного семинара кафедры информатики и информационных технологий и кафедры математики и физики естественно-научного факультета Российско-Таджикского (Славянского) университета («20» сентября 2024 г.).

Отзыв обсужден и утвержден на заседании объединенного семинара кафедры информатики и информационных технологий и кафедры математики и физики естественно-научного факультета Российско-Таджикского (Славянского) университета (Протокол № 1 от «20» сентября 2024 г.).

Председатель заседания:

д.ф.-м.н., по специальности 01.01.01 –
«Вещественный, комплексный и функциональный
анализ», профессор кафедры информатики
и информационных технологий РТСУ

Ю.Х. Хасанов

Эксперты:

д.ф.-м.н. по специальности 05.13.18 – «Математическое
моделирование, численные методы и комплексы
программ», доцент кафедры информатики и
информационных технологий РТСУ

М.М. Кабилов

д.ф.-м.н. по специальности 01.01.11 – «Системный
анализ и автоматическое управление», профессор
кафедры математики и физики РТСУ

С.З. Курбаншоев

Секретарь:

К.ф.-м.н., доцент кафедры информатики
и информационных технологий РТСУ

И.И. Халимов

Контактная информация:

МОУ ВО Российско-Таджикский (Славянский) университет, 734025, Республика Таджикистан, г.Душанбе, ул. Мирзо Турсунзаде, 30; сайт организации: <https://www.rtsu.tj>; Адрес электронной почты: p.rektora@mail.ru; Телефон: (+99237) 221-35-50.

Подписи Ю.Х. Хасанова, М.М. Кабилова, С.З. Курбаншоева и И.И. Халимова заверяю.

/Начальник УК РТСУ



Рахимов А.А.