

УТВЕРЖДАЮ

Ректор Бохтарского государственного  
университета им. Н.Хусрава, доктор  
экономических наук, профессор



Курбонзода М.Р.

» января 2025 г.

### О Т З Ы В

ведущей организации на диссертацию А.Захурбекова «Экстремальные задачи приближения функций многих переменных суммами Фурье по произвольным ортогональным системам», представленную на соискание ученой степени доктора философии (PhD) по специальности 6D060100 – Математика: 6D060101 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Теория приближения функций является одной из наиболее важных ветвей современного математического анализа, который интенсивно развивается на протяжении многих десятилетий. Она возникла из потребностей чисто технических задач, и начало этой теории было заложено в знаменитых трудах великого русского математика П.Л.Чебышева: “Теория механизмов, известных под именем параллелограммов” и “Вопросы о наименьших величинах, связанных с приближенным представлением функций”, в середине XIX века в его работах о наилучшем равномерном приближении функций на конечном отрезке алгебраическими многочленами и приближении непрерывной периодической функции тригонометрическими многочленами на всей оси. Указанные работы были опубликованы много лет раньше, чем классическая теорема К.Ф. Вейерштрасса о приближении непрерывных функций алгебраическими и тригонометрическими многочленами, что определяет дальнейший путь аппроксимации функций.

Современное развитие теории приближения функций как в действительной, так и в комплексной областях связано с оптимизационными работами А.Н.Колмогорова и С.М.Никольского. В тридцатых годах прошлого столетия возникла задача приближения заданного класса функций фиксированным подпространством. В связи с решением этой задачи А. Н. Колмогоров поставил экстремальную задачу о поиске конкретного подпространства, которое приближает данный класс функций наилучшим образом, то есть подпространства, которое приводит к минимальным значениям погрешности на данном классе функций, т.е. к отысканию точного значения колмогоровского поперечника.

В решение этой задачи для различных классов функций существенный вклад внесли С.Б.Стечкин, В.К.Дзядык, Н.П.Корнейчук, В.М.Тихомиров, Л.В.Тайков, Н.И.Черных, В.В.Жук, А.А.Лигун, А.Пинкус, А.Г.Бабенко, В.И.Иванов, Г.Г.Магарил-Ильяев, С.Б.Вакарчук, М.Ш.Шабозов, Г.А.Юсупов и многие другие.

В последнее время появляются работы, в которых решается более общая экстремальная задача: требуется найти точное значение наилучшего совместного приближения функций и их последовательных производных на данном классе функций. Эта экстремальная



задача в теории приближения функций многих переменных мало изучена. основополагающие работы в этом направлении были выполнены А.Ф.Тимановым, В.К.Дзядыком, Н.П.Корнейчуком, А.И.Степанцом, С.Б.Вакарчуком, М.Ш.Шабозовым и др.

Диссертационная работа Захурбекова Алишера посвящена некоторым вопросам приближения функций многих переменных суммами Фурье по различным ортогональным системам. При этом в диссертационной работе вводится класс функций многих переменных, который характеризуется обобщенным модулем непрерывности. Для этих функций автор находит точные значения бернштейновского, колмогоровского, гельфандовского, линейного и проекционного  $N$ -поперечников. Эти результаты имеют важное значение для теории приближения функций и расширяют существующие знания в области функционального анализа, предоставляя новые инструменты и подходы для исследования свойств функций нескольких переменных.

Диссертация соответствует профилю диссертационного совета 6D.КОА-011 по специальности 6D.060101 — Вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Диссертационная работа состоит из введения, трех глав и списка цитированной литературы, включающего 44 наименования. Общий объем работы составляет 102 страницы машинописного текста, набранного на  $\text{\LaTeX}$ .

Во введении диссертации представлен перечень исследуемых обозначений, а также дана развернутая историческая справка об исследованиях, связанных с вопросами приближения функций многих переменных суммами Фурье по различным ортогональным системам.

В первой главе диссертации представлен обзор литературных источников по теме исследования. Также в этой главе выделены нерешенные задачи; которые будут рассмотрены и решены в ходе дальнейшего исследования в рамках диссертационной работы.

Во второй главе диссертации получены точные оценки наилучших среднеквадратических приближений различными суммами Фурье, включая “треугольные”, “гиперболические” и “круговые”, по произвольным ортогональным системам.

Теорема 2.1.1 является основным результатом первого параграфа второй главы. Вытекающие из нее следствия 2.1.1 и 2.1.2 в частных случаях содержат основные результаты работ Э.В. Селимханова. Более того, следствие 2.1.2 представляет собой точную константу в неравенстве Джексона – Стечкина в многомерном случае.

Во втором и третьем параграфе вычислены точные значения всех  $N$ -поперечников классов  $W_k(\Phi)$  и  $W_q(\Omega_k, \varphi; h)$  при всех  $0 < q \leq \infty$  и  $h \in (0, 1)$ . Для класса  $W_k(\Phi)$  ранее был вычислен только колмогоровский  $N$ -поперечник. Все остальные поперечники вычислены во втором параграфе данной работы. Поперечники класса  $W_q(\Omega_k, \varphi; h)$  даже в случае  $q = 2$  не были известны.

В четвертом параграфе изучена задача нахождения точных оценок наилучших среднеквадратических приближений “гиперболическими” частными суммами Фурье функций многих переменных по произвольным многомерным ортогональным системам. Указанный вопрос частично исследован в работах Абилова М.В., Айгунова Г.А. и Абилова В.А., Керимова М.К. В перечисленных работах рассматривается порядок сходимости частичных “треугольных”, “прямоугольных” и “гиперболических” сумм Фурье по произвольным ор-



тогональным системам функций многих переменных к заданным функциям. В теореме 2.4.1 решается экстремальная задача нахождения точных оценок наилучших среднеквадратических приближений произвольной функции многих переменных “гиперболическими” частичными суммами, из следствий 2.4.1 и 2.4.2 которой, в частности, вытекают известные результаты работ Абилова М.В., Айгунова Г.А. и Селимханова Э.В. Завершающий пятый параграф второй главы посвящен экстремальной задаче наилучшего среднеквадратического приближения функций многих переменных “сферическими” суммами Фурье по произвольным ортогональным системам. Здесь основная роль отведена теореме 2.5.2, в которой вычислена верхняя грань отношения наилучшего приближения сферическими суммами к усредненной с весом значений  $L_2$  – нормы ( $0 < q \leq \infty$ ) обобщенного модуля непрерывности  $k$ -го порядка.

В третьей главе найдены точные верхние грани наилучших приближений некоторых классов функций двух переменных “круговыми” суммами Фурье, которые характеризуются обобщенным модулем непрерывности в гильбертовом пространстве  $L_2$ . Эта глава акцентирует внимание на методах и результатах, позволяющих оценить качество приближений для заданных классов функций, что имеет важное значение для теории приближения и её приложений.

Основным результатом первого параграфа третьей главы является теорема 3.1.2, в которой для класса  $L_2^{(r)}$  ( $r \in \mathbb{N}$ ) периодических по обеим переменным функций  $f(x, y)$ , у которых  $\|\mathcal{D}^{(r)} f\|_{L_2} < \infty$ , где  $\mathcal{D} := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  – оператор Лапласа, доказано неулучшаемое неравенство типа Колмогорова.

Во втором параграфе третьей главы рассматривается задача оптимизации неравенства Джексона – Стечкина. В теореме 3.2.1 найдена общая оценка для неравенства указанного типа, из которой следует явный вид константы в неравенстве Джексона – Стечкина. Наиболее значимым результатом этого параграфа является теорема 3.2.2, из которой при конкретном значении весовой функции вытекают числовые значения верхней грани экстремальной характеристики, обозначенной как

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}(Q)} \frac{R^{2r} \mathcal{E}_R(f)}{\left( \int_0^h \Omega_\nu^q(\mathcal{D}^r f; t) \mu(t) dt \right)^{1/q}} = \left( \int_0^h [1 - (1-t)^{R^2}]^{\nu q} \mu(t) dt \right)^{-1/q}.$$

В заключительном параграфе 3.3 рассматривается экстремальная задача наилучшего совместного приближения функций  $f \in L_2^{(r)}(Q)$  и их частных производных с использованием круговых сумм Фурье. В теореме 3.3.1 установлена точная константа в неравенстве Джексона – Стечкина для совместного наилучшего полиномиального приближения функции  $f$  и всех её промежуточных производных  $\mathcal{D}^s f$  при всех  $0 \leq s \leq r$ ,  $r, s \in \mathbb{Z}_+$ . Основным результатом данного параграфа является теорема 3.3.2, в которой при всех  $R, \nu \in \mathbb{N}$ ,  $r, s \in \mathbb{Z}_+$ ,  $r \geq s$ ,  $1 \leq q < \infty$ ,  $h \in (0, 1)$  и весовой функции  $\mu(t)$ , определенной на  $[0, h]$ ,



доказано экстремальное равенство:

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f \notin \mathcal{P}_{2r}}} \frac{R^{2(r-s)} \mathcal{E}_R(\mathcal{D}^s f)}{\left( \int_0^h \Omega_\nu^q(\mathcal{D}^r f; t) \mu(t) dt \right)^{1/q}} = \left( \int_0^h [1 - (1-t)^{R^2}]^{\nu q} \mu(t) dt \right)^{-1/q}.$$

В целом в диссертации проделана большая содержательная работа. Автор диссертации владеет современными методами теории функций, функционального анализа и теории экстремальных задач вариационного содержания.

Диссертация написана автором самостоятельно, содержит новые научные результаты, выдвигаемые для публичной защиты и характеризующие личный вклад автора в теорию приближения функций многих переменных. Необходимые ссылки на авторов и источники заимствования материалов в диссертации имеются. Автореферат соответствует требованиям ВАК при Президенте Республики Таджикистан, полно и правильно отражает основные положения диссертационной работы. Основные результаты диссертации опубликованы в 12 научных работах, в том числе 6 статей в изданиях, включенных в действующий Перечень ВАК Республики Таджикистан, а 6 в трудах международных и республиканских конференций.

Автореферат и диссертационная работа оформлены хорошо. Имеются незначительные замечания:

1. Структура работы: Возможно, в некоторых местах более расширенно излагать некоторые разделы для более четкого понимания логики изложения.
2. Имеются мелкие стилистические и грамматические ошибки.

Отмеченные замечания не являются существенными и в большей степени касаются оформления и представления материала, чем его содержания. Они не умаляют общей высокой оценки диссертационной работы и не влияют на значимость и оригинальность представленных научных результатов. В целом, работа демонстрирует глубокое понимание темы и значительный личный вклад автора в теорию приближения функций.

Вышесказанное дает основание считать, что диссертационная работа А.Захурбекова «Экстремальные задачи приближения функций многих переменных суммами Фурье по произвольным ортогональным системам», представленная на соискание ученой степени доктора философии (PhD) по специальности 6D060100 – Математика: 6D060101 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ, является научно-квалификационной работой и полностью соответствует требованиям, предъявляемым ВАК при Президенте Республики Таджикистан к диссертациям на соискании ученой степени доктора философии (PhD) по вышеуказанной специальности.

Результаты диссертационной работы А.Захурбекова были заслушаны на специальном семинаре кафедры «Математического анализа и дифференциальных уравнений» Бохтарского государственного университета имени Н. Хусрава 28 января 2025 года. В семинаре принимали участие доктор физико-математических наук Дж. Сафаров и Ф.М. Шамсуудинов, кандидат физико-математических наук, доктор педагогических наук А.Сатторов, что подчеркивает значимость и актуальность представленных научных результатов.

Отзыв составил кандидат физико-математических наук по специальности 01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ, К.Махкамов. Отзыв обсужден и утвержден на заседании кафедры «Математического анализа и дифференциальных уравнений» Бохтарского государственного университета им. Н.Хусрава (протокол №6 от 28 января 2025 г.).

Председатель семинара,  
кандидат физ.-мат. наук по специальности  
01.01.01 – Вещественный, комплексный и  
функциональный анализ, доцент

К.Махкамов

Председатель заседания,  
зав. кафедрой «Математического анализа и  
дифференциальных уравнений» Бохтарского  
государственного университета им. Н.Хусрава,  
доктор PhD по специальности 01.01.02 –  
Дифференциальные уравнения, динамические  
системы и оптимальное управление

О.Абдулвохиди

Секретарь заседания, кандидат физ.-мат. наук

О.Неъматуллоев

Адрес: Бохтарский государственный университет  
им. Н. Хусрава, 735140, Таджикистан, г. Бохтар, улица Айни, 67.

Сайт: [www.btsu.tj](http://www.btsu.tj); e-mail: [bgu-1978@mail.ru](mailto:bgu-1978@mail.ru)

Тел. рабочий: +992(32) 222-54-81; +992(32) 222-22-53

Подписи К.Махкамова, О.Абдулвохиди и О.Неъматуллоева заверяю.

Начальник ОК КОКСИ БГУ им. Н.Хусрава



Т.И. Исозода