ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертационную работу Абдукаримова Махмадсалима Файзуллоевича на тему «Исследование некоторых задач граничного управления для телеграфного уравнения с переменным коэффициентом», представленную на соискание учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 – «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

В диссертационной работе Абдукаримова М.Ф. изучаются задачи граничного управления для процесса, описываемого гиперболическими уравнениями с одной пространственной переменной – уравнением вынужденных колебаний струны

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = f(x,t)$$

с произвольной правой частью $f(x,t)$ из класса L_2 и уравнением колебаний с переменным коэффициентом

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) - q(x,t)u(x,t) = f(x,t),$$

в котором коэффициент $q(x,t)$ и функция правой части $f(x,t)$ являются произвольными суммируемыми с квадратом функциями двух переменных (так называемое телеграфным уравнением с переменным коэффициентом). Задача граничного управления состоит в переводе рассматриваемого процесса из произвольного начального состояния (при $t = 0, 0 \le x \le l$) в произвольное конечное состояние (при $t = T,\ 0 \le x \le l$). В качестве управляющей функции рассматриваются данные Дирихле и Неймана на одном или на обоих концах рассматриваемого промежутка, т.е. при $x = 0,\ x = l$.

Тема исследования, выбранная автором, представляется актуальной, так как на данный момент либо исчерпывающе изучались процессы, описываемые уравнением колебаний ($q(x,t) \equiv 0,\ f(x,t) \equiv 0$), либо рассматривался случай телеграфного уравнения ($q(x,t) \equiv -c^2$), либо

изучалась ситуация, когда время управления T превосходит «критический» порог, а сама задача граничного управления имеет бесконечно много решений.

Структура диссертационной работы Абдукаримова М.Ф. логична и отражает цели поставленного исследования. После детального анализа во введении и обзоре литературы имеющихся на данный момент работ по выбранной тематике автор приступает к подробному исследованию задач граничного управления для процесса, описываемого телеграфным уравнением с переменным коэффициентом $q(x,t)$ и с правой частью $f(x,t)$, принадлежащими лишь классу L_2 в рассматриваемом прямоугольнике $Q_T = [0 \le x \le l] \times [0 \le t \le T]$.

В главе I изучается задача, в которой на одном конце задано условие закрепления $u(l,t) = 0$, а на другом осуществляется управление условием Дирихле $u(0,t) = \mu(t)$, в главе II управление производится двумя условиями Дирихле $u(0,t) = \mu(t)$, $u(l,t) = \nu(t)$, а в третьей главе условие закрепления заменяется на однородное условие Неймана $u_x(l,t) = 0$. Во всех этих главах диссертационной работы автором, прежде всего, обобщены известные результаты В.А.Ильина, Г.Д.Чабакаури и А.А.Никитина, а именно:

- подтверждено, что критический период времени управляемости $T_{\text{крит}}$ - такой же, как и в случае однородного волнового уравнения, т.е. $T_{\text{крит}} = 2l$ для первой и третьей задач и $T_{\text{крит}} = l$ для второй задачи;

- получены необходимые и достаточные условие на данные Коши в начальный и финальный момент времени и на коэффициент уравнения, обеспечивающие управляемость при $T = T_{\text{крит}}$.

Кроме этого, для каждой из рассматриваемых задач для уравнения вынужденных колебаний струны получены представления, необходимые для исследования решений уравнения с переменным коэффициентом, когда выписать явные решения не представляется возможным.

Следует отметить, что в отличие от задачи I, где необходимое и достаточное условие управляемости выглядит так же, как и в случае однородного волнового уравнения, теоремы существования для задач II и III требуют более сложного необходимого и достаточного условия, задействующего переменный коэффициент уравнения. Вид этого условия установлен автором впервые.

В следующих главах IV-VI автором исследуются задачи граничного управления упругой силой для телеграфного уравнения с переменным коэффициентом в случае: действия управления на одном конце при закреплённом втором; действия управления на одном конце при свободном втором; действия управлений на обоих концах при времени, равном критическому. Как и в предыдущих главах, во всех теоремах о существовании сформулированы необходимые и достаточные условия для существования решения рассматриваемых задач граничного управления.

Изложение во всех шести главах следует одной и той же схеме. Сначала для рассматриваемого обобщённого из класса W_2^1 решения устанавливается теорема единственности (при $T \leq T_{\text{крит}}$), а затем доказывается теорема о необходимых и достаточных условиях управляемости процесса при $T = T_{\text{крит}}$. Следует отметить, что обоснована устойчивость решения всех изучаемых смешанных задач и задач граничного управления по отношению к аддитивному возмущению $q(x,t)u(x,t)$, а также относительно функций, входящих в постановку задач.

Основным инструментом исследования в диссертационной работе является сведение рассматриваемой задачи к интегральным уравнениям Вольтерры и необходимая оценка получающихся степеней интегральных операторов.

Нельзя не подчеркнуть, что Абдукаримов М.Ф. подробно анализирует получаемые в диссертации результаты и, в частности, проверяет их «преемственность» по отношению к случаю $q(x,t) \equiv 0$. Так, в работе установлена оценка для разности полученного решения и решения для

«невозмущенного» случая, из которой следует, что ее W_2^1-норма мала, если мала L_2 −норма коэффициента $q(x,t)$.

В качестве замечаний к диссертационной работе хочется отметить следующее.

1) Было бы хорошо, если бы привели определения функций $\underline{\mu}(t)$ и $\underline{\nu}(t)$ при формулировке леммы 1.2 (на автореферате лемма 2);

2) Исследование диссертационной работы было бы более цельным, если автор изучил случай, когда время управления больше или меньше критического. Однако надо признаться, что это могло бы привести к существенному увеличению объёма диссертационной работы;

3) На странице 161 диссертации символ $D_{46}(x,t)$ два раза повторяется.

Приведённые замечания не влияют на качество и общую оценку диссертационной работы.

В заключении хочется отметить, что полученные в диссертационной работе Абдукаримова М.Ф. результаты являются новыми, достоверными и тщательно обоснованы в тексте работы. Автор продемонстрировал необходимый профессионализм и должное владение методами теории дифференциальных уравнений, функционального анализа и теории задач граничного управления. Содержание диссертационной работы несомненно соответствует заявленной специальности 01.01.02 - «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление», автореферат правильно и полно отражает содержание работы. Результаты диссертационной работы в полном объеме опубликованы в научной печати – автором опубликовано 52 работы, из которых – 18 в журналах, рекомендованных ВАК при Президенте Республики Таджикистан.

Полученные автором результаты могут быть использованы в Таджикском национальном университете, в Таджикском техническом университете имени М. Осими, в филиале МГУ имени М.В. Ломоносова в городе Душанбе, а также в других научно-образовательных учреждениях и

научных коллективах, занимающихся исследованиями дифференциальных уравнений и их приложениями.

Диссертация М.Ф.Абдукаримова является законченной научно-квалификационной работой, в которой содержится решение ключевых задач граничного управления смещением и упругой силой для процесса, описываемого телеграфным уравнением с суммируемым с квадратом коэффициентом, что соответствует требованиям «Положения о порядке присуждения учёных степеней и званий», утверждённого Правительством Республики Таджикистан от 30 июня 2021 года за №267, а её автор заслуживает присуждения искомой учёной степени по специальности 01.01.02 – «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление».

Официальный оппонент:

Пиров Рахмон, доктор физико-математических наук по специальности 01.01.02 - дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление, профессор кафедры математического анализа Таджикского государственного педагогического университета имени С.Айни

Подпись профессора Пирова Р. заверяю.

Начальник ОК и СР ТГПУ им. С. Айни А.Мустафозода

«18» августа 2022г.