Министерство образования и науки
Республики Таджикистан
Таджикский национальный университет

УДК 517.5

На правах рукописи

Абдухаминов Мунъим Абдумамадович

ТОЧНЫЕ НЕРАВЕНСТВА МЕЖДУ НАИЛУЧШИМИ ПРИБЛИЖЕНИЯМИ И УСРЕДНЁННЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ ГЛАДКОСТИ В L_2 И НЕКОТОРЫЕ ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

Д И С С Е Р Т А Ц И Я

на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук по специальности
01.01.01 — Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Научный руководитель:
академик Национальной академии
наук Таджикистана, доктор физико-
математических наук, профессор
М.Ш. Шабозов

Д У Ш А Н Б Е – 2022

Оглавление

Обозначения **3**

Введение **4**

Общая характеристика работы **6**

ГЛАВА 1. Анализ литературы по теме исследования и формулировка нерешённых задач **11**

§ 1.1. Характеристики гладкости Руновского и связанные с ней экстремальных задач 11

§ 1.2. Предварительные результаты и постановка новых экстремальных задач 17

ГЛАВА 2. Некоторые неравенства между наилучшими приближениями и усредненными характеристиками в пространстве $L_2 := L_2[0, 2\pi]$ **19**

§ 2.1. Общие сведения. Предварительные факты и основные определения и обозначения 20

2.1.1. Тригонометрические ряды и ряды Фурье. Вспомогательные факты 20

2.1.2. Пространство $L_2 := L_2[-\pi, \pi]$ 24

2.1.3. Наилучшее приближение функции f в среднем 25

2.1.4. Модуль непрерывности m-го порядка функции $f \in L_2$ . . . 31

2.1.5. Усреднённая характеристики гладкости $\Lambda_m(f, t)_2$ 34

2.1.6. Неравенство Джексона-Стечкина 40

§ 2.2. Неравенства типа Джексона-Стечкина для осредненной с весом характеристики гладкости $\Lambda_m\big(f^{(r)},t\big)_2$ на классах функций $L_2^{(r)}, r\in\mathbb{N}$ 55

§ 2.3. Решение экстремальной задачи (2.2.1) для некоторых классов функций из $L_2^{(r)}$, определяемых заданной мажорантой Ψ 61

ГЛАВА 3. Поперечники классов функций в метрике пространства L_2 **73**

§ 3.1. Определение поперечников и классов функций 73

§ 3.2. Точные значения n-поперечников классов $W_p^{(r)}(\Lambda_m,\varphi;h)$ 86

§ 3.3. Оценка модулей коэффициентов Фурье на классах функций . . . 89

Обсуждение полученных результатов **93**

Выводы **98**

Список литературы **99**

Обозначения

$\mathbb{N}$ — совокупность всех натуральных чисел

$\mathbb{R}$ — совокупность всех действительных чисел

$\mathbb{Z}$ — совокупность всех целых чисел

$\mathcal{T}_{2n-1}$ — множество тригонометрических полиномов

$L_2 := L_2[0, 2\pi]$ — пространство 2π-периодических функций

$\omega_m(f, t)$ — модуль непрерывности m-го порядка

$\Delta_h^m f(x)$ — разность m-го порядка функции f в точке x с шагом h

$\Lambda_m(f, t)_2$ — усредненная характеристика гладкости функции $f \in L_2$

$E_{n-1}(f)_2$ — величина наилучшего приближения функции $f \in L_2$

sup — точная верхняя грань

inf — точная нижняя грань

$Si(x)$ — интегральный синус

$d_n(\mathfrak{N}, L_2)$ — n-мерный поперечник (по Колмогорову) множества $\mathfrak{N}$ в L_2

$\delta_n(\mathfrak{N}, L_2)$ — n-мерный поперечник (линейный) множества $\mathfrak{N}$ в L_2

$\Pi_n(\mathfrak{N}, L_2)$ — n-мерный поперечник (проекционный) множества $\mathfrak{N}$ в L_2

$d^n(\mathfrak{N}, L_2)$ — n-мерный поперечник (по Гельфанду) множества $\mathfrak{N}$ в L_2

$b_n(\mathfrak{N}, L_2)$ — n-мерный поперечник (по Бернштейну) множества $\mathfrak{N}$ в L_2

Введение

Актуальность темы исследования. При решении ряда экстремальных задач теории приближения функций как комплексного, так и действительного переменного в последнее время часто применяют различные модификации классической характеристики гладкости функции – её модуля непрерывности. В большинстве случаев это продиктовано спецификой рассматриваемых задач и позволяет получить новые содержательные результаты. Так, для определения эффективных характеристик гладкости функции в работах Z.Ditzian, V.Totik [94], К.В.Руновского [49], Н.П.Пустовойтова [48], М.Ш.Шабозова, С.Б.Вакарчука и В.И.Забутнаяой [74] рассматривались различные способы осреднения конечных разностей, а в работах В.А.Абилова и Ф.В.Абиловой [1], С.Б.Вакарчука и В.И.Забутной [14], М.Ш.Шабозова и Г.А.Юсупова [85], М.Ш.Шабозова и К.Тухлиева [78], М.Ш.Шабозова и А.А.Шабозовой [80] рассматривались модификации конечных разностей, основанных на применении сглаживающих операторов Стеклова.

Данная диссертационная работа посвящена одной из характеристик гладкости функций, рассмотренной ранее в упомянутой выше работе Руновского и недавно более подробно рассмотренной в работе С.Б.Вакарчука и В.И.Забутной [14] в метрике пространства L_2. Полученные в диссертационной работе результаты являются обобщениями ранее полученных результатов в метрике L_2 на случай метрики L_q $(1 \leq q \leq \infty)$ и являются окончательными и неулучшаемыми. При этом результаты К.В.Руновского [49], С.Б.Вакарчука и В.И.Забутная [14], М.Ш.Шабозова [71, 72] обобщаются и распространяются на случай совместного приближения функций и её промежуточных производных, вычисляются точные верхние грани наилучших совместных приближений различных

классов функций, находятся точные значения целых ряд n-поперечников указанных классов функций. Следует отметить, что экстремальными задачами приближения классов периодических функций в различных банаховых пространствах в разное время занимались А.Н.Колмогоров [95], С.М.Никольский [42, 43], С.Б.Стечкин [53, 54], Н.П.Корнейчук [29, 31, 32], В.К.Дзядык [19], Н.И.Черных [67, 68], Л.В.Тайков [61], В.В.Арестов [92, 93], В.И.Иванов [23, 24], В.А.Юдин [89], А.А.Лигун [35, 36, 38–40], В.В.Жук[21, 22], В.Ф.Бабенко [6], А.Г.Бабенко [5], Н.Айнуллоев [3], Ю.Хуссейн [91], С.Б.Вакарчук [8, 11, 12], М.Ш.Шабозов [69–72, 101], Г.А.Юсупов [90, 105], К.Тухлиев [64, 65], М.Р.Лангаршоев [97], Н.Ф.Олифтаев [44, 45], К.К.Палавонов [46, 47] и многие другие.

Степень научной разработанности изучаемой проблемы. Задача совместного (или одновременного) приближения функций и их производных изучены сравнительно мало, а аналогичные задачи для наилучшего совместного приближения находятся в стадии разработки. Следует отметить, что экстремальные задачи наилучшего совместного приближения для некоторых классов сплайн-функции изучены Н.П.Корнейчуком [33]. Для наилучшего совместного приближении функций тригонометрическими полиномами некоторые результаты получены С.Б.Вакарчуком [8], а для аналитических в единичном круге функций экстремальные задачи совместного приближения изучены в работе М.Ш.Шабозова, Г.А.Юсупова и Дж.Дж.Заргарова [87].

Связь работы с научными программами (проектами), темами. Диссертационная работа выполнена в рамках реализации перспективного плана научно-исследовательских работ кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений Таджикского национального университета на 2015-2020 гг. и на 2021-2025 гг. по теме “Теория аппроксимации функций”.

Общая характеристика работы

Цель исследования. Хорошо известно, что интерес к полиномам и их свойствам проявили математики, занимавшиеся вопросами теории приближений. При выборе аппарата для приближенного представления функций они, как правило, останавливались на алгебраических и тригонометрических полиномах благодаря простоте их структуры и широким аппроксимационным возможностям. В последнее время выяснилось, что полиномы не только в задачах наилучших приближения функций играют главенствующий роль, но и с таким же успехом применяются в экстремальных задачах наилучшего совместного приближения функций и её последовательных производных.

Основной цель диссертационного работа является в точном решении различных экстремальных задач наилучшего совместного приближения классов функций как в гильбертовом пространстве L_2, так и в более важном пространстве L_p $(0 < p \leq \infty)$.

Задачи исследования. В соответствие с поставленной цели выделяются следующие задачи:

- найти точную верхнюю грань отношения между величиною наилучшего совместного приближения и характеристикой гладкости Руновского класса комплекснозначных функций $L_2^{(r)},\ r \in \mathbb{N}$;
- найти точную константу в неравенстве Джексона-Стечкина между наилучшим совместным приближением комплекснозначных функций и усреднённым значением характеристики гладкости Руновского порядка m с произвольным весом в метрике пространства L_p $(0 < p \leq \infty)$;

- решить экстремальную задачу отыскания верхней грани наилучших совместных приближений классов функций из $L_2^{(r)}$, определяемых заданной мажорантой Ψ;
- вычислить точные значения n-поперечников некоторых классов функций из L_2, задаваемых усреднённым значением характеристики гладкости Руновского в метрике L_p $(0 < p \leq \infty)$.

Объект исследования. Объектом исследования является отыскании точной верхней грани наилучших совместных приближений различных классов периодических функций тригонометрическими полиномами, задаваемых характеристикой гладкости К.В.Руновского.

Предмет исследования. Предметом исследования является отыскании точных верхних граней наилучших совместных приближений некоторых классов комплекснозначных функций и нахождении точных значений их n-поперечников.

Научная новизна исследований. В диссертации получены следующие основные результаты:

- найдено точное значение верхней грани отношения величины наилучшего совместного приближения и характеристики гладкости Руновского класса комплекснозначных функций $L_2^{(r)},\ r \in \mathbb{N}$;
- найдена точная константа в неравенстве Джексона-Стечкина между наилучшим совместным приближением комплекснозначных функций и усоеднённым значением характеристики гладкости Руновского порядка m с произвольным весом в метрике пространства L_p $(0 < p \leq \infty)$;
- решена экстремальная задача отыскания верхней грани наилучших сов-

местных приближений классов функций из $L_2^{(r)}$, определяемых заданной мажорантой Ψ;

- вычислены точные значения различных n-поперечников некоторых классов функций из L_2, задаваемых усреднённым значением характеристики гладкости Руновского в метрике L_p $(0 < p \leq \infty)$.

Теоретическая и научно-практическая значимость работы. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты и методы их доказательства можно применять при решении экстремальных задач функций комплексного переменного, принадлежащих пространствам Харди и Бергмана.

Положения, выносимые на защиту:

- основные теоремы о точных оценках наилучшего совместного приближения функций посредством характеристики гладкости m-го порядка Руновского;
- теоремы о точных константах в неравенстве Джексона-Стечкина между величиной наилучшего совместного приближения комплекснозначных функций и усреднённым значением характеристики гладкости Руновского порядка m с произвольным весом в метрике пространства L_p $(0 < p \leq \infty)$;
- теоремы о решении экстремальных задач отыскания верхней грани наилучших совместных приближений классов функций, определяемых заданной мажорантой;
- теоремы о точных значениях n-поперечников некоторых классов функций из L_2, задаваемых усреднённым значением характеристики гладкости Руновского в метрике L_p $(0 < p \leq \infty)$.

Степень достоверности результатов. Достоверность научных результатов диссертационной работы обеспечивается строгими математическими доказательствами всех утверждений, приведённых в диссертации, подтверждается исследованиями других авторов.

Соответствия диссертации паспорту научной специальности (формуле и области исследования). Диссертационная работа выполнена по специальности 01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ и является разделом математического анализа указанной в пункте III параграфа 3 паспорта научной специальности.

Личный вклад соискателя ученой степени. Содержание диссертации и основные результаты, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованных работах. Все приведенные в диссертационной работе результаты получены лично автором.

Апробация результатов диссертации. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на:

- семинарах кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений Таджикского национального университета под руководством академика НАН Таджикистана, профессора М.Ш.Шабозова (Душанбе, 2016-2022 гг.);
- международной научной конференции “Современные проблемы и приложения алгебры, теории чисел и математического анализа” (Душанбе, 13-14 декабря 2019 г.);
- международной научной конференции “Сингулярные интегральные уравнения и дифференциальные уравнения с сингулярными коэффициентами”

(Душанбе, 30-31 января 2020 г.);

- международной научной конференции “Теория приближения и её применение” (Днепро, Украина, 16-19 сентября 2020 г.);
- республиканской научно-практической конференции “Современные проблемы теории дифференциальных уравнений” (Душанбе, 26 сентября 2020 г.).
- международной научной конференции “Актуальные проблемы современной математики” (Душанбе, 25-26 июня 2021 г.);
- международной конференции “Современные проблемы теории чисел и математического анализа” (Душанбе, 29-30 апреля 2022 г.);
- международной научной конференции “Современные проблемы математического анализа и теории функций” (Душанбе, 24-25 июня 2022 г.).

Публикации по теме диссертации. Результаты исследований автора по теме диссертационной работы опубликованы в 12 научных работах, из них 5 статьи опубликованы в изданиях, входящих в действующий перечень ВАК Республики Таджикистан, а 7 – в трудах международных конференций.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, списка цитированной литературы из 117 наименования, занимает 112 страниц машинописного текста и набрана на LaTeX. Для удобства в диссертации применена сквозная нумерация теорем, лемм, следствий и формул. Они имеют тройную нумерацию, в которой первая цифра совпадает с номером главы, вторая указывает на номер параграфа, а третья на порядковый номер теорем, лемм, следствий или формулы в данном параграфе.

ГЛАВА 1. Анализ литературы по теме исследования и формулировка нерешённых задач

В данной главе кратко анализируем существующую литературу непосредственно примыкающем к теме диссертационной работе, формулируем постановку нерешённых задач, которых будем решать в последующих главах диссертационной работы, где также приводятся их применение.

§ 1.1. Характеристики гладкости Руновского и связанные с ней экстремальных задач

Пусть $f(x)$ — непрерывная 2π-периодическая функция, такая, что $f(x) \neq const$,

$$E_{n-1}(f)_C := E(f, T_{n-1})_C = \inf\left\{\left\|f - T_{n-1}\right\|_C : T_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}\right\}$$

— наилучшее равномерное приближение тригонометрическими полиномами $T_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}$ в пространстве $C := C[0, 2\pi]$, где $\mathcal{T}_{2n-1}$ — множество полиномов вида

$$T_{n-1}(x) = \alpha + \sum_{k=1}^{n-1} \big(\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx\big),$$

а равенством

$$\omega(f, t)_C = \sup\Big\{\big|f(x') - f(x'')\big| : \big|x' - x''\big| \leq t\Big\}$$

определим модуль непрерывности функции $f \in C := C[0, 2\pi]$.

В 1962 г. Н.П.Корнейчук [26] доказал, что

$$E_{n-1}(f)_C \leq 1 \cdot \omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right)_C, \ n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{1.1.1}$$

и для любых $\varepsilon > 0$ и $n \in \mathbb{N}$ существует непрерывная 2π-периодическая функция $f_n(x, \varepsilon)$ такая, для которой

$$E_{n-1}(f_n)_C > \left(1 - \frac{1}{2n} - \varepsilon\right) \omega\left(f_n, \frac{\pi}{n}\right)_C.$$

Последнее неравенство означает, что в неравенстве (1.1.1), число 1 нельзя заменит меньшей.

Такой результат для пространств $L_p[0, 2\pi]$ $(1 \le p < \infty)$ не был известен и лишь в 1967 г. Н.И.Черных [67] нашел точную константу в случае $p = 2$.

Пусть $L_2 := L_2[0, 2\pi]$ — пространство 2π-периодических функций, квадрат которых суммируем на $(0, 2\pi)$. Положим

$$\|f\|_2 := \|f\|_{L_2} = \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2},$$

$$\omega(f, t)_2 := \omega(f, t)_{L_2} := \sup\Big\{\|f(\cdot + h) - f(\cdot)\|_2 : |h| \le t\Big\},$$

$$E_{n-1}(f)_2 := \|f - \mathrm{S}_{n-1}(f)\|_2,$$

где $\mathrm{S}_{n-1}(f, x)$ — n-я частичная сумма ряда Фурье функции f.

Н.И.Черных [67] доказал, что если $f \in L_2$, то для любого $n \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство

$$E_{n-1}(f)_2 < \frac{1}{\sqrt{2}}\, \omega\Big(f, \frac{\pi}{n}\Big)_2, \tag{1.1.2}$$

причём существуют функции $g \in L_2$, для которых отношение

$$\frac{E_{n-1}(g)}{\omega\Big(g, \frac{\pi}{n}\Big)_2} \to \frac{1}{\sqrt{2}},\ n \to \infty.$$

Обобщая результат (1.1.2), Н.И.Черных [67] также доказал, что для любой

функции $f \in L_2$ и $n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$E_{n-1}(f)_2 \le \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{n}{2} \int_0^{\pi/n} \omega^2(f,t) \sin nt \; dt \right\}^{1/2}, \tag{1.1.3}$$

причём существует функция $g \in L_2$, для которой неравенство (1.1.3) обращается в равенство

$$\sup_{f \in L_2} \frac{E_{n-1}(f)_2}{\left\{ \frac{n}{2} \int_0^{\pi/n} \omega^2(f,t) \sin nt \; dt \right\}^{1/2}} =$$

$$= \frac{E_{n-1}(g)_2}{\left\{ \frac{n}{2} \int_0^{\pi/n} \omega^2(f,t) \sin nt \; dt \right\}^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Пусть теперь

$$\omega_m\big(f,t\big)_2 := \sup\left\{ \big\|\Delta_h^m f(x)\big\|_2 : \big|h\big| \le t \right\}$$

— модуль непрерывности m-го порядка функции $f \in L_2$, где

$$\Delta_h^m f(x) = \sum_{l=0}^{m} (-1)^l \binom{m}{l} f(x + lt), \;\; m \in \mathbb{N}$$

— разность m-го порядка функции f в точке x с шагом h. Н.И.Черных [67], доказал, что для любой функции $f \in L_2$ и любых $m, n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$E_{n-1}(f)_2 \le \mathcal{K}_{n,m} \left(\int_0^{2\pi/n} \omega_m^2(f,t)\, \varphi_n(t) \; dt \right)^{1/2}, \tag{1.1.4}$$

где

$$\varphi_n(t) = \sin \frac{nt}{2} + \frac{1}{2} \sin nt,$$

$$\mathcal{K}_{n,m} = \frac{1}{2}\sqrt{n(\mathrm{C}_{2m}^{m})^{-1}}\,,$$

и для любых фиксированных m и $n > m$ константа $\mathcal{K}_{n,m}$ неулучшаема. Из неравенства (1.1.4) вытекает следующее неравенство типа Джексона-Стечкина

$$E_{n-1}(f) < \left(\mathrm{C}_{2m}^{m}\right)^{-1/2}\omega_m(f, 2\pi/n)_2. \tag{1.1.5}$$

При $n > m$ константу $(\mathrm{C}_{2m}^{m})^{-1/2}$ в правой части неравенства (1.1.5) нельзя заменить меньшей.

Следующий шаг в развитие этой тематики был сделан Л.В.Тайковым [61]. Он доказал, что при любом $n \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Z}_+$ и $0 < nh \le 3\pi/(4n)$ имеет место соотношение

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{n^r E_{n-1}(f)_2}{\left(\displaystyle\int_0^h \omega^2\big(f^{(r)}, t\big)_2 dt\right)^{1/2}} = \left\{\frac{n}{2(nh - \sin nt)}\right\}^{1/2}. \tag{1.1.6}$$

Здесь $L_2^{(r)}$ — множество функций $f \in L_2$, у которых производная $f^{(r-1)}(x)$ абсолютно непрерывна, а $\left\|f^{(r)}\right\|_{L_2} < \infty$.

Условимся под весовой функцией на $[0, h]$ понимать неотрицательную измеримую суммируемую функцию $q(t)$, не эквивалентную нулю на этом отрезке.

Обобщение соотношений (1.1.3) и (1.1.6) дано А.А.Лигуном [41], который доказал, что при любых $m, n \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Z}_+$ и $0 < h < 3\pi/4n$ и $\psi(t) \ge 0$ — весовая на отрезке $[0, h]$ функция имеет место двустороннее неравенство

$$\frac{1}{\mathcal{B}_{n,h}^{r,m}(\psi)} \le \sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{E_{n-1}^2(f)_2}{\displaystyle\int_0^h \omega_m^2\big(f^{(r)}, t\big)_2 \psi(t) dt} \le \frac{1}{\inf\limits_{n\le k<\infty} \mathcal{B}_{k,h}^{r,m}(\psi)}, \tag{1.1.7}$$

где

$$\mathcal{B}_{k,h}^{r,m}(\psi) = 2^m k^{2r} \int\limits_0^h \big(1-\cos kt\big)^m \psi(t)dt.$$

Дальнейшее обобщение результата А.А.Лигуна (1.1.7) принадлежит М.Ш.Шабозову и Г.А.Юсупову [86]. Ими, в частности, доказано, что для любых $m, n \in \mathbb{N};\ r \in \mathbb{Z}_+;\ 0 < p \le 2,\ 0 < h \le 3\pi/(4n)$, φ — некоторая весовая на отрезке $[0,h]$ функция, справедливо неравенство

$$\frac{1}{\mathcal{A}_{n,m}^{r,p}(\varphi,h)} \le \sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{E_{n-1}(f)_2}{\left(\int\limits_0^h \omega_m^p\big(f^{(r)},t\big)_2\varphi(t)dt\right)^{1/p}} \le \frac{1}{\inf\limits_{n\le k<\infty} \mathcal{A}_{k,m}^{r,p}(\varphi,t)}, \qquad (1.1.8)$$

где

$$\mathcal{A}_{k,m}^{r,p}(\varphi,t) := 2^{m/2}\left(k^{rp}\int\limits_0^h \big(1-\cos kt\big)^{mp/2}\varphi(t)dt\right)^{1/p}.$$

В [86] доказано, что из неравенства (1.1.8) вытекают все цитированные выше результаты при конкретных значениях параметров m, n, r, p и конкретном выборе весовой функции φ на отрезке $[0,h]$. При этом нужно отметить, что верхняя грань в соотношениях (1.1.6)-(1.1.8) вычисляется по всем функциям $f \in L_2^{(r)}$, которые не являются постоянными, то есть $f \ne const$.

Более тонкое характеристики гладкости, чем модуль непрерывности m-го порядка $\omega_m(f,t)$, является характеристики гладкости

$$\Lambda_m(f,t)_2 := \left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \Big\|\Delta_h^m f\Big\|_2^2 dh\right)^{1/2}, \qquad (1.1.9)$$

введенный К.И.Руновским [49]. Так как

$$\Lambda_m(f,t)_2 := \left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \omega_m^2(f,h)_2\ dh\right)^{1/2} \le \omega_m(f,t)_2, \qquad (1.1.10)$$

то очевидно, что экстремальные задачи приближения, которые характеризуются при помощи характеристики (1.1.9) более тонкие, то есть в задачах отыскания точной константы в неравенствах типа Джексона-Стечкина могут привести к меньшим константам, причем структурные характеристики классов функций, задаваемых характеристикой $\Lambda_m(f,t)$, содержат внутри себя те же классы функций, задаваемые модулем непрерывности m-го порядка, и с этой точки зрения более ценны.

§ 1.2. Предварительные результаты и постановка новых экстремальных задач

Как мы отметили выше характеристика гладкости

$$\Lambda_m(f,t)_2 := \left(\frac{1}{t} \int_0^t \left\| \Delta_h^m f \right\|_2^2 dh \right)^{1/2} \tag{1.2.1}$$

была введена К.И.Руновским [49] для оценки скорости сходимости в прямых теорем теории приближения функций. Основные свойства характеристики гладкости (1.2.1) изучены С.Б.Вакарчуком и В.И.Забутной [14].

Приводим известные результаты о наилучших полиномиальных приближении периодических функций характеристики гладкости которых оцениваются посредством (1.2.1). С.Б.Вакарчук и В.И.Забутной [14] доказали, что при любых натуральных n, m и любом $t \in (0, 2\pi]$ имеет место равенство

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^r \, E_{n-1}(f)_2}{\Lambda_m(f^{(r)}, t/n)_2} = \frac{1}{J_{1,m}(t)}. \tag{1.2.2}$$

Задача I. Доказать обобщение равенство (1.2.2) на случай совместного приближения функций $f \in L_2^{(r)}$ и всех её промежуточных производных $f^{(s)}$ $(s = 1, 2, \ldots, r-1)$. Применить полученный результат к задаче отыскании точной константы в неравенстве типа Джексона-Стечкина.

Задача II. Доказать точное неравенство типа Джексона-Стечкина в интегральной метрике L_p $(0 < p \leq \infty)$ содержащей усреднённой с весом φ характеристику первого порядка $\Lambda_1^p(f^{(r)}, t)$ в степени p для производной $f^{(r)} \in L_2$. Для классов функций естественно возникающие из решения этой задачи найти точные значения n-поперечников и вычислить верхней грани модулей коэффициентов Фурье.

Задача III. Определить точную верхнюю грань величины

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{2^{m/2}\, n^{r-s}\, E_{n-1}(f^{(s)})_2}{\left(\int\limits_0^h \Lambda_m^p\big(f^{(r)},t\big)_2\, q(t)dt\right)^{1/p}}.$$

Отправляясь от полученного результата найти точную неравенства типа Джексона-Стечкина для осреднённой с весом характеристики гладкости $\Lambda_m\big(f^{(r)},t\big)_2$ на классах функций $f\in L_2^{(r)},\ r\in\mathbb{N}$.

Задача IV. Определить точное значение следующей экстремальной величины

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}(\mathfrak{M}^{(r)})_2 := \sup\left\{E_{n-1}(f^{(s)})_2 : f\in\mathfrak{M}^{(r)}\right\}$$

для классов функций естественно возникающихся из решения задач I – III.

В данной диссертационной работе экстремальные задачи совместного приближения функций и их промежуточных производных содержащие характеристики гладкости (1.2.1), решены в гильбертовом пространстве $L_2 := L_2[0,2\pi]$ и, в частности, все результаты являются окончательными. Этим обоснованием и характеризуется актуальность выбора темы диссертационной работы.

Полученные результаты затем обобщаются в L_p — норме для всех значений $p\in(0,+\infty]$. При некоторых конкретных значениях p и явного вида весовой функции из полученных нами результатов, как частные случаи, получаем многие ранее полученные результаты других авторов.

Анализ работ [1-104] выявлять основные задачи I – IV которые решаются в данной диссертационной работе и решение которых излагаются во втором и третьей главе.

ГЛАВА 2. Некоторые неравенства между наилучшими приближениями и усредненными характеристиками в пространстве $L_2 := L_2[0, 2\pi]$

В этой главе излагаются новые результаты по наилучшим среднеквадратическим приближениям дифференцируемых периодических функций $f(x)$ тригонометрическими полиномами в пространстве $L_2 = L_2[0, 2\pi]$. Прежде чем излагать наши основные результаты, приводим краткий исторический обзор результатов по исследуемой тематике и покажем ее ход развития для обоснования выбора темы диссертационной работы. Задачи наилучшего приближения периодических функций в пространстве L_2 впервые исследовались в работе С.Б.Вакарчуком и В.И.Забутной [14]. Наиболее общий результат этой работы является следующее общее двустороннее неравенство

$$\frac{1}{J_{n,k,r,p}(g,t)} \le \sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{2^{m/2}\, E_{n-1}(f)}{\left\{ \int\limits_0^t \Lambda_m^p(f^{(r)},\tau) g(\tau) d\tau \right\}^{1/p}} \le \frac{1}{\inf\limits_{n\le j<\infty} J_{j,k,r,p}(g,t)}. \qquad (2.0.1)$$

Наша цель найти точное значение величин в средней части неравенство (2.0.1) и распространить полученный результат на случай совместного приближения функций и их промежуточных производных.

Результаты изложенные в этой главе опубликованы в работах [1-А, 2-А, 4-А, 5-А, 6-А, 7-А].

§ 2.1. Общие сведения. Предварительные факты и основные определения и обозначения

2.1.1. Тригонометрические ряды и ряды Фурье. Вспомогательные факты

Тригонометрическим рядом называется ряд следующего вида

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \big(a_k \cos kx + b_k \sin kx\big). \tag{2.1.1}$$

Здесь x – вещественное переменное, числовые коэффициенты a_0, a_k, b_k, $k \in \mathbb{N}$ — произвольные числа, которые не зависят от переменного x. Всюду далее будем предполагать, что они действительные числа. Но, если они являются комплексными числами, то мы можем рассматривать действительную и мнимую части тригонометрического ряда (2.1.1) отдельно. Заметим, что все слагаемые ряда (2.1.1) 2π-периодические функции, а потому изучение указанного ряда достаточно провести на любом отрезке длины 2π, например на отрезке $[0, 2\pi]$ или $[-\pi, \pi]$.

Отметим, что если рассмотреть комплексный ряд

$$\frac{1}{2}\, a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \big(a_k - ib_k\big) \cdot z^k \tag{2.1.2}$$

на единичной окружности $z = e^{ix}, |z| = 1$, то ряд (2.1.1) представляет собой действительную часть ряда (2.1.2). В самом деле, по формуле Эйлера $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, а потому из (2.1.2) имеем:

$$\frac{1}{2}\, a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \big(a_k - ib_k\big) e^{ikx} =$$

$$= \frac{1}{2}\, a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \big(a_k - ib_k\big)\big(\cos kx + i \sin kx\big) =$$

$$= \frac{1}{2}\, a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \big(a_k \cos kx + b_k \sin kx\big) +$$

$$+ i \sum_{k=1}^{\infty} \big(a_k \cos kx - b_k \sin kx\big). \qquad (2.1.3)$$

Здесь второй ряд в (2.1.3), то есть ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \big(a_k \sin kx - b_k \cos kx\big)$$

называется *сопряженным рядом* к тригонометрическому ряду (2.1.1).

Конечная тригонометрическая сумма

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\, \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} \big(\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx\big) \qquad (2.1.4)$$

называется тригонометрическим полиномом порядка n. Множество всех тригонометрических полиномов $T_n(x)$ вида (2.1.4) обозначим символом $\mathcal{T}_{2n-1}$. При этом, если $|a_n| + |b_n| \neq 0$, то говорят, что тригонометрический полином (2.1.4) имеет точный порядок n. Очевидно, что каждый полином (2.1.4) есть действительная часть обычного (степенного) многочлена

$$\mathrm{P}_n(z) = c_0 + c_1 z + ... + c_n z^n = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z_k,$$

при $c_k := \alpha_k - i\beta_k, \quad z = e^{ix} = \cos x + i \sin x.$

Таким же образом, выражая синусы и косинусы через показательную функцию, можно записать n-ю частную сумму

$$\mathrm{S}_n(f, x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

в виде

$$\mathrm{S}_n(f, x) := \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \Big\{ \big(a_k - ib_k\big) e^{ikx} + \big(a_k + ib_k\big) e^{-ikx} \Big\}.$$

Если мы определим a_k и b_k для отрицательных k равенствами

$$a_{-k} = a_k,\ b_{-k} = -b_k,\ k \in \mathbb{Z}_+,$$

так, что в частности, $b_0 = 0$, то $\mathrm{S}_n(x)$ будет n-й симметричной суммой $2n+1$ центральных членов ряда Лорана:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx} \left(c_k = \frac{1}{2}\left(a_k - ib_k\right)\right), \tag{2.1.5}$$

где a_k и b_k, действительные, и в этом случае имеем

$$c_{-k} = \bar{c_k},\ k \in \mathbb{Z}_+. \tag{2.1.6}$$

С другой стороны, каждый ряд (2.1.5), удовлетворяющий условию (2.1.6), может быть записан в форме (2.1.1), где a_k и b_k-действительные числа.

Заметим, что система функций

$$e^{inx} = \cos nx + i \sin nx\ (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{2.1.7}$$

ортогональна на любом отрезке длины 2π, поскольку

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} e^{imx} \cdot e^{-inx} dx = \begin{cases} 0,\ m \neq n; \\ 2\pi,\ m = n. \end{cases}$$

Ряд Фурье по системе ортогональных функций (2.1.7) для заданной периодической функции $f(x)$, определенной, например, на интервале $(-\pi, \pi)$, имеет вид

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k\, e^{ikx}, \tag{2.1.8}$$

где

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots. \tag{2.1.9}$$

Положим

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt,\ b_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt dt,\ k \in \mathbb{Z}_+ \tag{2.1.10}$$

так, что

$$c_k = \frac{1}{2}\big(a_k - ib_k\big),\ c_{-k} = \frac{1}{2}\big(a_k + ib_k\big), k \in \mathbb{Z}_+. \tag{2.1.11}$$

Группируя в (2.1.8) члены с номерами $\pm k$, запишем указанный ряд в виде

$$c_0 + \big(c_1 e^{ix} + c_{-1} e^{-ix}\big) + \ldots + \big(c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}\big) + \ldots =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \big(c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}\big)$$

или, принимая во внимание формулы (2.1.11), получаем

$$\frac{1}{2}a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + \ldots + (a_n \cos nx + b_n \sin nx) + \ldots. \tag{2.1.12}$$

Так как ортогональность двух функций φ_1 и φ_2 влечет за собой ортогональность пар $\varphi_1 \pm \varphi_2$, то легко видеть, что система функций

$$\frac{1}{2},\ \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2},\ \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2i}, \cdots, \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2},\ \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}, \cdots$$

или, что то же самое, система

$$\frac{1}{2}, \cos x, \sin x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots \tag{2.1.13}$$

ортогональна на любом отрезке длины 2π.

Таким образом, ряд (2.1.12) будет рядом Фурье функции $f(x)$ $(-\pi \le x \le \pi)$ по системе функций (2.1.13).

Легко заметить, что если функция $f(x)$ четна, то есть если $f(-x) = f(x)$, то

$$a_k(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos ktdt,\ b_k = 0;\ k \in \mathbb{Z}_+, \tag{2.1.14}$$

а если $f(x)$ нечетна, то есть если $f(-x) = -f(x)$, то

$$a_k(f) = 0,\ b_k(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin ktdt\ k \in \mathbb{Z}_+. \tag{2.1.15}$$

Последовательность функции (2.1.13) называется тригонометрической системой, а (2.1.6) комплексной тригонометрической системой. Числа $a_k(f)$, $b_k(f)$ называют коэффициентами Фурье, а числа $c_k(f)$ комплексными коэффициентами Фурье функции f.

Ряд (2.1.12) или что то же тригонометрический ряд (2.1.1) с коэффициентами (2.1.10) называют рядом Фурье функции f, а ряд (2.1.8) с коэффициентами (2.1.9) называют комплексным рядом Фурье функции f.

2.1.2. Пространство $L_2 := L_2[-\pi, \pi]$

Всюду далее через $L_2 := L_2[-\pi, \pi]$ (или $L_2 := L_2[0, 2\pi]$) обозначим множество 2π-периодических функций $f(x)$, интегрируемых с квадратом на отрезке $[-\pi, \pi]$ (или $[0, 2\pi]$), то есть множество 2π-периодических функций f с конечной нормой

$$\|f\|_2 := \|f\|_{L_2} = \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx\right)^{1/2} < \infty. \tag{2.1.16}$$

Предположим, что функция $f(x)$ имеет формальное разложение в ряд Фурье

$$f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\big(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx\big). \tag{2.1.17}$$

Тогда, пользуясь тождеством Парсеваля, в силу ортогональности систем функций $\Big\{\sin kx, \cos kx\Big\}_{k=0}^{\infty}$ из (2.1.17) получаем

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \frac{a_0^2(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(a_k^2(f) + b_k^2(f)\Big). \tag{2.1.18}$$

Таким образом требование конечности нормы (2.1.16) равносильно сходимости числового ряда справа в равенстве (2.1.18). Всюду далее, ради краткости,

полагаем

$$\rho_0^2(f) = \frac{a_0^2(f)}{2};\ \rho_k^2(f) := a_k^2(f) + b_k^2(f),\ k \in \mathbb{N} \tag{2.1.19}$$

и, пользуясь которыми, запишем равенство (2.1.18) коротко в виде

$$\big\|f\big\|_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \rho_k^2(f). \tag{2.1.20}$$

2.1.3. Наилучшее приближение функции f в среднем

Рассмотрим следующую аппроксимационную задачу: среди всех полиномов $T_n(x) \in \mathcal{T}_{2n+1}$ найти тот, который реализует точную нижнюю грань в задаче на минимум:

$$E_n(f)_2 := \inf\Big\{ \big\|f - T_n\big\|_2 : T_n \in \mathcal{T}_{2n+1} \Big\}. \tag{2.1.21}$$

Полином $T_n^0(x)$, который реализует нижнюю грань в правой части равенства (2.1.21), называется полиномом наилучшего среднеквадратического приближения функции $f \in L_2$. Хорошо известно ([58, с.25-26]), что единственным полиномом $T_n^0(x)$, который доставляет минимум (или инфимум) в правой части (2.1.21), является n-я частная сумма $S_n(x)$ ряда (2.1.17):

$$S_n(f,x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n} \Big(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx \Big), \tag{2.1.22}$$

причем

$$E_n(f)_2 = \big\|f - S_n(f)\big\|_2 = \left\{ \sum_{k=n+1}^{\infty} \rho_k^2(f) \right\}^{1/2}. \tag{2.1.23}$$

Здесь, ради полноты изложения, исходя из комплексная форма ряда Фурье, приводим доказательство равенство (2.1.23). Предположим, что функция f разложена в комплексного вида ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k(f) e^{ikx}, \tag{2.1.24}$$

где

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt. \tag{2.1.25}$$

Положим

$$p_{n-1}(x) = \sum_{|k| \le n} d_k e^{ikx} \in \mathcal{T}_{2n-1}.$$

Имеем:

$$\left\| f - p_{n-1} \right\|_2^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x) - p_{n-1}(x) \right|^2 dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \big(f(x) - p_{n-1}(x) \big) \big(\overline{f(x)} - \overline{p_{n-1}(x)} \big) dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{-\infty}^{+\infty} c_k(f) e^{ikx} - \sum_{|k| \le n-1} d_k e^{ikx} \right) \times$$

$$\times \left(\sum_{-\infty}^{+\infty} \overline{c_l(f)} e^{-ilx} - \sum_{|l| \le n-1} \overline{d_l} e^{-ilx} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{|k| \ge n} c_k(f) e^{ikx} + \sum_{|k| \le n-1} \big(c_k(f) - d_k \big) e^{ikx} \right) \times$$

$$\times \left(\sum_{|l| \ge n} \overline{c_l(f)} e^{-ilx} + \sum_{|l| \le n-1} \big(\overline{c_l(f)} - \overline{d_l} \big) e^{-ilx} \right) dx =$$

$$= \sum_{|k| \ge n} \sum_{|l| \ge n} c_k(f) \overline{c_l(f)} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-l)x} dx +$$

$$+ \sum_{|k| \ge n} \sum_{|l| \le n-1} c_k(f) \big(\overline{c_l(f)} - \overline{d_l} \big) \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-l)x} dx +$$

$$+\sum_{|k|\le n-1}\sum_{|l|\ge n}\big(c_k(f)-d_k\big)\cdot\overline{c_l(f)}\cdot\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}e^{i(k-l)x}dx+$$

$$+\sum_{|k|\le n-1}\sum_{|l|\le n-1}\big(c_k(f)-d_k\big)\big(\overline{c_l(f)}-\overline{d_l}\big)\cdot\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}e^{i(k-l)x}dx=$$

$$=2\Big\{\sum_{|k|\ge n}\big|c_k(f)\big|^2+\sum_{|k|\le n-1}\big|c_k(f)-d_k\big|^2\Big\}. \tag{2.1.26}$$

Пользуясь формулой (2.1.26), для величины (2.1.21) находим

$$E^2_{n-1}(f)_2:=\inf\left\{\Big\|f-p_{n-1}\Big\|_2^2:p_{n-1}\in\mathcal{T}_{2n+1}\right\}=$$

$$=2\cdot\inf_{d_k}\left\{\sum_{|k|\ge n}\big|c_k(f)\big|^2+\sum_{|k|\le n-1}\big|c_k(f)-d_k\big|^2\right\}=$$

$$=\Big|c_k(f)\equiv d_k\Big|=2\cdot\sum_{|k|\ge n}\big|c_k(f)\big|^2=$$

$$=2\cdot\left\{\sum_{k=n}^{\infty}\big|c_k(f)\big|^2+\sum_{k=-\infty}^{-n}\big|c_k(f)\big|^2\right\}=$$

$$=2\cdot\sum_{k=n}^{\infty}\Big\{|c_k(f)|^2+|c_{-k}(f)|^2\Big\}. \tag{2.1.27}$$

В силу формул (2.1.11), получаем

$$\big|c_k(f)\big|^2=\big|c_{-k}(f)\big|^2=\frac{1}{4}\Big(a_k^2(f)+b_k^2(f)\Big).$$

Подставляя эти равенства в (2.1.27), будем иметь

$$E^2_{n-1}(f)_2=2\cdot\left\{\frac{1}{4}\sum_{k=n}^{\infty}\Big(a_k^2(f)+b_k^2(f)\Big)+\frac{1}{4}\sum_{k=n}^{\infty}\Big(a_k^2(f)+b_k^2(f)\Big)\right\}=$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} \Big(a_k^2(f) + b_k^2(f) \Big) = \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f).$$

Таким образом, доказана следующая

Лемма 2.1.1. *Среди всех комплексных полиномов вида*

$$p_{n-1}(x) = \sum_{|k| \le n-1} d_k e^{ikx}$$

величине (1.1.21) минимальное значение доставляет частичная сумма комплексного ряда Фурье (2.1.24):

$$S_{n-1}(f, x) = \sum_{|k| \le n-1} c_k(f) e^{ikx}.$$

При этом

$$E_{n-1}^2(f)_2 := 2 \sum_{|k| \ge n} \big| c_k(f) \big|^2 = \sum_{k=n}^{\infty} \Big(a_k^2(f) + b_k^2(f) \Big) = \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f). \tag{2.1.28}$$

Через $L_2^{(r)}\big(r \in \mathbb{Z}_+, L_2^{(0)} = L_2\big)$ обозначим множество функций $f \in L_2$, у которых производные $(r-1)$-го порядка $f^{(r-1)}(x)$ абсолютно непрерывны, а r-е производные $f^{(r)}(x) \in L_2$, то есть удовлетворяют условию

$$\left\| f^{(r)} \right\|_2 = \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \big| f^{(r)}(x) \big|^2 dx \right)^{1/2} < \infty. \tag{2.1.29}$$

Записав функцию f в комплексном виде ряда Фурье

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k(f) e^{ikx} \tag{2.1.30}$$

и дифференцируя r-раз ряда (2.1.30), будем иметь

$$f^{(r)}(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (ik)^r c_k(f) e^{ikx}. \tag{2.1.31}$$

Применением тождеством Парсеваля из (2.1.31) имеем:

$$\left\|f^{(r)}\right\|_2^2 = 2\cdot\sum_{-\infty}^{+\infty} k^{2r}\left|c_k(f)\right|^2 =$$

$$= 2\sum_{k=1}^{\infty} k^{2r}\left\{\left|c_k(f)\right|^2 + \left|c_{-k}(f)\right|^2\right\} = \sum_{k=1}^{\infty} k^{2r}\rho_k^2(f). \tag{2.1.32}$$

Последнее равенство означает, что конечность нормы (2.1.29) равносильно сходимости числового ряда в правой части (2.1.32). Пользуясь схемой доказательство леммой 2.1.1 и проведя простые вычисления находим

$$E_{n-1}^2\left(f^{(r)}\right)_2 := \inf\left\{\left\|f^{(r)} - T_{n-1}\right\|_2^2 : T_{n-1}\in\mathcal{T}_{2n-1}\right\} =$$

$$= \left\|f^{(r)} - S_{n-1}^{(r)}(f)\right\|_2^2 = \left\|f^{(r)} - S_{n-1}(f^{(r)})\right\|_2^2 =$$

$$= 2\cdot\sum_{k=n}^{\infty} k^{2r}\left\{\left|c_k(f)\right|^2 + \left|c_{-k}(f)\right|^2\right\} = \sum_{k=n}^{\infty} k^{2r}\rho_k^2(f). \tag{2.1.33}$$

Далее нам понадобиться следующее утверждение

Теорема 2.1.1. *Для произвольной функции $f\in L_2$ справедливо неравенство*

$$E_{n-1}(f)_2 \le n^{-r}E_{n-1}\left(f^{(r)}\right)_2. \tag{2.1.34}$$

Существует функция $f_0(x)\in L_2^{(r)}$ для которой неравенство (2.1.33) обращается в равенство.

Доказательство. В самом деле пользуясь формулой (2.1.33) из соотношения (2.1.28) получаем

$$E_{n-1}^2(f)_2 := \sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2(f) \le \sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{k}{n}\right)^{2r}\rho_k^2(f) =$$

$$= \frac{1}{n^{2r}} \sum_{k=n}^{\infty} k^{2r} \rho_k^2(f) = n^{-2r} E_{n-1}^2\big(f^{(r)}\big)_2 \,,$$

откуда и вытекает неравенство (2.1.34).

Докажем, что для функции $f_0(x) = a\cos(nx + \varphi)$ где $a, \varphi \in \mathbb{R} := (-\infty, +\infty)$, $n \in \mathbb{N}$, — очевидно принадлежащей классу $L_2^{(r)}, r \in \mathbb{Z}_+$, неравенство (2.1.34) обращается в равенство. Имеем

$$f_0^{(r)}(x) = an^r \cos(nx + \varphi + r\pi/2)$$

и в силу равенств (2.1.28) и (2.1.33) запишем

$$E_{n-1}^2(f_0)_2 = \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f_0) = a^2,$$

$$E_{n-1}^2(f_0^{(r)}) = \sum_{k=n}^{\infty} k^{2r} \rho_k^2(f_0) = n^{2r} a^2, \tag{2.1.35}$$

пользуясь которыми будем иметь

$$E_{n-1}^2(f_0)_2 := a^2 = n^{-2r}\big(a^2 n^{2r}\big) = n^{-2r} E_{n-1}^2\big(f_0^{(r)}\big)_2,$$

откуда и следует утверждение теоремы 2.1.1.

Доказанная теорема 2.1.1 допускает следующее обобщение.

Для любого $s \in \mathbb{Z}_+, s \in [0, r], r \in \mathbb{N}$, записав вытекающую из (2.1.33) формулу

$$E_{n-1}^2\big(f^{(s)}\big)_2 = \sum_{k=n}^{\infty} k^{2s} \rho_k^2(f), \tag{2.1.36}$$

сформулируем и докажем следующее утверждение

Теорема 2.1.2. *Пусть $n \in \mathbb{N}, r, s \in \mathbb{Z}_+, r \geq s$. Тогда справедливо следующее точное неравенство*

$$E_{n-1}\big(f^{(s)}\big)_2 \leq n^{-(r-s)} E_{n-1}\big(f^{(r)}\big)_2. \tag{2.1.37}$$

Неравенство (2.1.37) точно в том смысле, что для функции

$$f_0(x) = a\cos(nx + \varphi), \quad a, \varphi \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$$

обращается в равенство.

Доказательство. В самом деле, учитывая (2.1.33) из (2.1.36) имеем:

$$E_{n-1}^2\big(f^{(s)}\big)_2 = \sum_{k=n}^{\infty} k^{2s}\rho_k^2(f) = \sum_{k=n}^{\infty} k^{-2(r-s)} \cdot k^{2r}\rho_k^2(f) \le$$

$$\le n^{-2(r-s)} \sum_{k=n}^{\infty} k^{2r}\rho_k^2(f) = n^{-2(r-s)} E_{n-1}^2\big(f^{(r)}\big)_2. \tag{2.1.38}$$

Требуемое неравенство (2.1.37) вытекает из (2.1.38). Докажем точность неравенство (2.1.37). Так как для любого $s \in [0, r]$

$$f_0^{(s)}(x) = an^s \cos\Big(nx + \varphi + \frac{s\pi}{2}\Big),$$

$$E_{n-1}^2\big(f_0^{(s)}\big)_2 = \sum_{k=n}^{\infty} k^{2s}\rho_k^2(f_0) = n^{2s}a^2, \tag{2.1.39}$$

то, учитывая равенства (2.1.35) и (2.1.39), получаем

$$E_{n-1}^2\big(f_0^{(s)}\big)_2 := a^2 n^{2s} = n^{-2(r-s)} \cdot (n^{2r}a^2) = n^{-2(r-s)} E_{n-1}^2\big(f_0^{(r)}\big)_2.$$

Этим точность неравенства (2.1.37) установлена и тем самым доказана теорема 2.1.2.

2.1.4. Модуль непрерывности m-го порядка функции $f \in L_2$

Если функция $f \in L_2$, то символом $\Delta_h^m f(x)$ обозначим конечную разность m-го порядка функции $f \in L_2$ с шагом h:

$$\Delta_h^m f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{m}{k} f(x + kh),$$

и найдём норму разности m-го порядка в L_2:

$$\left\|\Delta_h^m f(\cdot)\right\|_2 = \left\{ \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left| \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} f(x+kh) \right|^2 dx \right\}^{1/2}.$$

Равенством

$$\omega_m(f,t)_2 := \sup\left\{ \left\|\Delta_h^m f(\cdot)\right\|_2 : |h| \le t \right\} \tag{2.1.40}$$

определим модуль непрерывности m-го порядка функции $f \in L_2$. Исходя из комплексного вида ряда Фурье функции $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k(f) e^{ikx}, \quad c_k(f) := \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx,$$

найдем явный вид модуля непрерывности (2.1.40). Найдем конечную разность m-го порядка функции $f(x)$

$$\Delta_h^m f(x) = \sum_{l=0}^{m} (-1)^l \binom{m}{l} f(x+lh) =$$

$$= \sum_{l=0}^{m} (-1)^l \binom{m}{l} \left\{ \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k(f) e^{ik(x+lh)} \right\} =$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k(f) e^{ikx} \left\{ \sum_{l=0}^{m} (-1)^l \binom{m}{l} \left(e^{ikh}\right)^l \right\} =$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k(f) e^{ikx} (1 - e^{ikh})^m. \tag{2.1.41}$$

Применяя тождество Парсеваля к равенству (2.1.41), находим норму разности m-го порядка функции $f \in L_2$:

$$\left\|\Delta_h^m f(\cdot)\right\|_2^2 = 2 \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty} \left|c_k(f)\right|^2 \cdot \left|1 - e^{ikh}\right|^{2m} =$$

$$= 2\sum_{-\infty}^{+\infty}\left|c_k(f)\right|^2\cdot(1-\cos kh)^m =$$

$$= 2^{m+1}\sum_{-\infty}^{+\infty}\left\{\left|c_k(f)\right|^2+\left|c_{-k}(f)\right|^2\right\}\cdot(1-\cos kh)^m. \tag{2.1.42}$$

Пользуясь формулой (2.1.23), где доказано что

$$2\left\{\left|c_k(f)\right|^2+\left|c_{-k}(f)\right|^2\right\}=\rho_k^2(f)\equiv a_k^2(f)+b_k^2(f),$$

равенство (2.1.42) запишем в конечном виде

$$\left\|\Delta_h^m f(\cdot)\right\|_2^2 = 2^m\sum_{k=1}^{\infty}\rho_k^2(f)(1-\cos kh)^m. \tag{2.1.43}$$

Так как для функции $f\in L_2^{(r)}, \rho_k^2\big(f^{(r)}\big)=k^{2r}\rho_k^2(f)$, то из (2.1.43) для любой функции $f\in L_2^{(r)}$ имеем:

$$\left\|\Delta_h^m f^{(r)}(\cdot)\right\|_2^2 = 2^m\sum_{k=1}^{\infty}\rho_k^2\big(f^{(r)}\big)\cdot(1-\cos kh)^m =$$

$$= 2^m\sum_{k=1}^{\infty}k^{2r}\rho_k^2(f)(1-\cos kh)^m. \tag{2.1.44}$$

Теперь из формулы (2.1.40) для любой функции $f\in L_2^{(r)}$ получаем общий вид модуля непрерывности m-го порядка производной $f^{(r)}\in L_2$:

$$\omega_m^2\big(f^{(r)},t\big)_2 := 2^m\sup_{|h|\le t}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}k^{2r}\rho_k^2(f)(1-\cos kh)^m\right\}. \tag{2.1.45}$$

При решении ряда экстремальных задач теории аппроксимации функций в последнее время применяют различные модификации классической характеристики гладкости функций – их модулей непрерывности порожденными конечно-разностными сдвигами функций. Полученные такими способами обобщенные модули гладкости во многих случаях учитывают специфику рассматриваемых задач и позволяют получить новые содержательные результаты (см.,

например, работы [1, 8, 14, 16, 48, 49, 51, 58, 74, 78] и приведенную в них литературу).

В следующем пункте 2.1.5 мы вводим конкретного вида модификации модуля непрерывности функции $f \in L_2$ и с его помощью обобщим как ранее полученные результаты, так и новые содержательные результаты, в некотором смысле, окончательные, где уже нельзя добавить и убавить что-либо существенное.

2.1.5. Усреднённая характеристики гладкости $\Lambda_m(f,t)_2$

Исходя из равенства (2.1.43), введем в рассмотрение усредненную характеристику гладкости функции $f \in L_2$:

$$\Lambda_m(f,t)_2 := \left\{ \frac{1}{t} \int_0^t \left\| \Delta_h^m(f) \right\|_2^2 dh \right\}^{1/2}, \ t \in \mathbb{R}_+. \tag{2.1.46}$$

Из равенств (2.1.45) и (2.1.46), для любого $t \in \mathbb{R}_+$ вытекает неравенство

$$\Lambda_m(f,t)_2 = \left\{ \frac{1}{t} \int_0^t \left\| \Delta_h^m(f) \right\|_2^2 dh \right\}^{1/2} \leq$$

$$\leq \left\{ \frac{1}{t} \int_0^t \omega_m^2(f,h)_2 dh \right\}^{1/2} \leq \omega_m(f,t)_2. \tag{2.1.47}$$

Укажем ряд свойств величины (2.1.46), полагая, что функция f, f_1, f_2 — элементы пространства L_2.

Свойство 1. *Функция $\Lambda_m(f,t)$ — непрерывная функция при $t > 0$.*

Свойство 2. *Выполнено равенство $\lim\limits_{t \to 0+0} \Lambda_m(f,t) = 0$.*

Свойство 3. *Имеет место оценка $\Lambda_m(f,t) \leq 2^m \left\| f \right\|$ для любого $t > 0$.*

Свойство 4. *Имеет место оценка*

$$\Lambda_m(f, nt) \le n^m \Lambda_m(f, t),$$

где $n \in \mathbb{N}$ *и* $t > 0$ *произвольные числа.*

Доказательство. Из формулы (2.1.46), выполняя замену переменной $h = n\tau$, имеем следующее соотношение:

$$\Lambda_m(f, nt)_2 :=$$

$$:= \left\{ \frac{1}{nt} \int_0^{nt} \left\| \Delta_h^m(f) \right\|_2^2 dh \right\}^{1/2} = \left\{ \frac{1}{t} \int_0^{t} \left\| \Delta_{n\tau}^m(f) \right\|_2^2 d\tau \right\}^{1/2}. \tag{2.1.48}$$

Далее воспользуемся равенством

$$\Delta_{n\tau}^m(f, x) = \sum_{j_1=0}^{n-1} \cdots \sum_{j_k=0}^{n-1} \Delta_\tau^m\big(f, x + (j_1 + \cdots + j_k)\tau\big).$$

Учитывая периодичность функции f, из данного равенства имеем

$$\left\| \Delta_{n\tau}^m(f) \right\| \le n^m \left\| \Delta_\tau^m(f) \right\|. \tag{2.1.49}$$

Используя формулы (2.1.46) и (2.1.48), (2.1.49), получаем свойство 4.

Свойство 5. *Выполнено неравенство*

$$\Lambda_m(f_1 + f_2, t) \le \sqrt{2}\,\big(\Lambda_m(f_1, t) + \Lambda_m(f_2, t)\big).$$

Свойство 6. *Функция* $\Lambda_m(f, t)$ *почти возрастает, то есть существует константа* c*, не зависящая от* t*, такая, что для всех* $0 < t_1 < t_2$ *выполняется неравенство*

$$\Lambda_m(f, t_1) \le c\,\Lambda_m(f, t_2).$$

Доказательство. На основании идеи доказательства теоремы 3.1 из работы Руновского [49] можно показать, что для произвольного положительного

числа t справедливо неравенство

$$\omega_m(f,t) \le c\,\Lambda_m(f,t), \tag{2.1.50}$$

где константа c не зависит от $f \in L_2$ и от t. Из формул

$$\Lambda_m(f,t) \le \omega_m(f,t)$$

и (2.1.50) для $0 < t_1 < t_2$ и произвольной функции $f \in L_2$ получаем

$$\Lambda_m(f,t_1) \le \omega_m(f,t_1) \le \omega_m(f,t_2), \Lambda_m(f,t_2),$$

то есть свойство 6 имеет место.

Далее, для $k, m \in \mathbb{N}$ и $t \in \mathbb{R}_+$ положим

$$J_{k,m}(t) := \left\{ \frac{1}{t} \int_0^t (1-\cos kh)^m dh \right\}^{1/2}. \tag{2.1.51}$$

Сделав замену переменных, легко проверить, что

$$J_{k,m}(t) = J_{1,m}(kt). \tag{2.1.52}$$

В самом деле, имеем:

$$J_{k,m}(t) = \left\{ \frac{1}{t} \int_0^t (1-\cos kh)^m dh \right\}^{1/2} =$$

$$= \left\{ \frac{1}{kt} \int_0^t (1-\cos kh)^m d(kh) \right\}^{1/2} =$$

$$= \left\{ \frac{1}{kt} \int_0^{kt} (1-\cos \tau)^m d\tau \right\}^{1/2} = J_{1,m}(kt), \tag{2.1.53}$$

и равенство (2.1.52) имеет место. Здесь и далее условимся, что при вычислении верхней грани по всем функциям $f \in L_2^{(r)}$ всегда предполагается, что $f \neq const$. В этом контексте имеет место следующая

Теорема 2.1.3. *Пусть* $n, m \in \mathbb{N}, r, s \in \mathbb{Z}_+$ $r \geq s$, *и* $0 < t \leq 2\pi$. *Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^{r-s} E_{n-1}\big(f^{(s)}\big)_2}{\Lambda_m\big(f^{(r)}, t/n\big)_2} = \frac{1}{2^{m/2} J_{1,m}(t)}. \tag{2.1.54}$$

Доказательство. Пусть $f \in L_2^{(r)}, r \in \mathbb{N}, s \in [0, r]$. Так как

$$\left\|\Delta_h^m f^{(s)}\right\|_2^2 = 2^m \sum_{k=1}^{\infty} k^{2s} \rho_k^2(f)(1 - \cos kh)^m,$$

то в силу равенств (2.1.46) запишем

$$\Lambda_m^2\big(f^{(r)}, t\big)_2 := \frac{2^m}{t} \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} k^{2r} \rho_k^2(f)(1 - \cos kh)^m dh =$$

$$= 2^m \sum_{k=1}^{\infty} k^{2r} \rho_k^2(f) \left\{ \frac{1}{t} \int_0^t (1 - \cos kh)^m dh \right\} =$$

$$= 2^m \sum_{k=1}^{\infty} k^{2r} \rho_k^2(f) J_{1,m}(kt) \geq 2^m \sum_{k=n}^{\infty} k^{2r} \rho_k^2(f) J_{1,m}^2(kt) =$$

$$= 2^m \sum_{k=n}^{\infty} k^{2(r-s)} \cdot k^{2s} \rho_k^2(f) J_{1,m}^2(kt).$$

Таким образом мы доказали, что

$$\Lambda_m^2\big(f^{(r)}, t\big)_2 = 2^m \sum_{k=n}^{\infty} k^{2(r-s)} \cdot k^{2s} \rho_k^2(f) J_{1,m}^2(kt)$$

Пользуясь этим равенством получаем

$$\Lambda_m^2\big(f^{(r)}, t\big)_2 = 2^m \sum_{k=n}^{\infty} k^{2(r-s)} \cdot k^{2s} \rho_k^2(f) J_{1,m}^2(kt) \geq$$

$$\geq 2^m \min_{k \geq n} \left\{ k^{2(r-s)} J_{1,m}^2(kt) \right\} \cdot \sum_{k=n}^{\infty} k^{2s} \rho_k^2(f) =$$

$$= 2^m \min_{k\ge n}\left\{k^{2(r-s)}J_{1,m}^2(kt)\right\}\cdot E_{n-1}^2\big(f^{(s)}\big)_2. \tag{2.1.55}$$

В [16] доказано, что при любых $l\in\mathbb{N}$ и $t\in\mathbb{R}_+$, такое, что $0<t\le 2\pi$,

$$\min_{k\ge n} k^{2l}J_{1,m}^2(kt) = n^{2l}J_{1,m}^2(nt),$$

учитывая которой из (2.1.55) получаем нужное нам неравенство

$$\Lambda_m^2\big(f^{(r)},t\big)_2 \ge 2^m\cdot n^{2(r-s)}J_{1,m}^2(nt)\cdot E_{n-1}^2\big(f^{(s)}\big)_2$$

или, что то же,

$$\Lambda_m\big(f^{(r)},t\big)_2 \ge 2^{m/2}\cdot n^{(r-s)}J_{1,m}(nt)E_{n-1}\big(f^{(s)}\big)_2. \tag{2.1.56}$$

Заменяя здесь t на t/n, запишем

$$\Lambda_m\big(f^{(r)},t/n\big)_2 \ge 2^{m/2}\cdot n^{(r-s)}J_{1,m}(t)E_{n-1}\big(f^{(s)}\big)_2. \tag{2.1.57}$$

Так как полученное неравенство верно для любой функции $f\in L_2^{(r)}$, то из него сразу следует оценка сверху величины стоящей в левой части (2.1.54):

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{n^{r-s}E_{n-1}\big(f^{(s)}\big)_2}{\Lambda_m\big(f^{(r)},t/n\big)_2}\le\frac{1}{2^{m/2}J_{1,m}(t)}. \tag{2.1.58}$$

Для получения аналогичной оценки снизу заметим, что для рассмотренной ранее нами функции $f_0(x)=a\cos(nx+\varphi)\in L_2^{(r)}$, для которой в силу первого равенства в соотношении (2.1.55)

$$\Lambda_m\big(f_0^{(r)},t\big)_2 = 2^{m/2}a\,n^r J_{1,m}(nt) \tag{2.1.59}$$

и равенств (2.1.39) имеет место оценка

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{n^{r-s}E_{n-1}\big(f^{(s)}\big)_2}{\Lambda_m\big(f^{(r)},t/n\big)_2}\ge\frac{n^{r-s}E_{n-1}\big(f_0^{(s)}\big)_2}{\Lambda_m\big(f_0^{(r)},t/n\big)_2}=$$

$$= \frac{n^{r-s} \cdot a \cdot n^s}{2^{m/2} \cdot an^r \cdot J_{1,m}(t)} = \frac{1}{2^{m/2} J_{1,m}(t)}. \tag{2.1.60}$$

Требуемое равенство (2.1.54) получаем из сравнения оценки сверху (2.1.58) с оценкой снизу (2.1.60), чем и завершаем доказательство теоремы 2.1.3.

Отметим, что из теоремы 2.1.3 при $s = 0$ получаем результат С.Б.Вакарчука и В.И.Забутной [14, с. 219]:

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^r E_{n-1}(f)_2}{\Lambda_m\big(f^{(r)}, t/n\big)_2} = \frac{1}{2^{m/2} J_{1,m}(t)}.$$

Следствие 2.1.1. *В условиях теоремы 2.1.3 при $t = \pi$ справедливо равенство*

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^{r-s} E_{n-1}\big(f^{(s)}\big)_2}{\Lambda_m\big(f^{(r)}, \pi/n\big)_2} = \frac{1}{2^{m/2}} \left\{ \frac{m!}{(2m-1)!!} \right\}^{1/2}. \tag{2.1.61}$$

Доказательство. В самом деле, из равенства (2.1.54) при значение $t = \pi$ имеем

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^{r-s} E_{n-1}\big(f^{(s)}\big)_2}{\Lambda_m\big(f^{(r)}, \pi/n\big)_2} = \frac{1}{2^{m/2} J_{1,m}(\pi)}. \tag{2.1.62}$$

Но так как

$$J_{1,m}(\pi) = \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (1 - \cos t)^m dt \right\}^{1/2} =$$

$$= \left\{ \frac{2^m}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^{2m} \frac{t}{2} dt \right\}^{1/2} = \left\{ \frac{2^{m+1}}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin^{2m} t dt \right\}^{1/2} =$$

$$= \left\{ \frac{2^m}{\pi} \cdot \frac{\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{m!} \right\}^{1/2}, \tag{2.1.63}$$

где $\Gamma(u)$ — гамма-функция Эйлера [66, с.400], и поскольку

$$\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2m-1)!!}{2^m}\cdot\sqrt{\pi},\quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi},$$

то, подставляя эти формулы в правую часть (2.1.63), имеем:

$$J_{1,m}(\pi)=\left\{\frac{2^m}{\pi}\cdot\frac{(2m-1)!!}{2^m}\cdot\pi\cdot\frac{1}{m!}\right\}^{1/2}=\left\{\frac{(2m-1)!!}{m!}\right\}^{1/2}.$$

Учитывая последнюю формулу, получаем равенство (2.1.61).

Следствие 2.1.1 доказано.

Следствие 2.1.2. *В условиях теоремы 2.1.3 справедливо равенство*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{n^{r-s}\,E_{n-1}(f^{(s)})}{\Lambda_1(f^{(r)},t/n)}=\frac{1}{\sqrt{2(1-\operatorname{sinc}t)}}. \tag{2.1.64}$$

Доказательство. Следует отметить, что равенство (2.1.64) при $s=0$ ранее установлено С.Б.Вакарчуком и В.И.Забутной [14, с. 218], так что (2.1.64) являлась следствием теоремы 2.1.3 одновременно является обобщением результата С.Б.Вакарчука и В.И.Забутной, упоминавшей выше.

Переходим к доказательству (2.1.64). Полагая в (2.1.54) $m=1$ получаем

$$J_{1,1}^2(t)=\frac{1}{t}\int_0^t(1-\cos h)dh=1-\frac{\sin t}{t}=1-\operatorname{sinc}t. \tag{2.1.65}$$

Учитывая равенство (2.1.65) имеем (2.1.64), чем и завершаем доказательство следствие 2.1.2.

2.1.6. Неравенство Джексона-Стечкина

Одна из основных задач теории аппроксимации периодических функций тригонометрическими полиномами может быть сформулирована таким обра-

зом: дана периодическая функция, требуется выяснить, какой точности приближения можно добиться, аппроксимируя ее по заданной норме банахова пространства полиномами $T_{n-1}(x) \in \mathcal{T}_{2n-1}$. Другими словами, требуется найти или дать хорошие оценки величины наилучшего приближения $E_{n-1}(f)$ по заданному порядку гладкости модулей непрерывности. Решение этой задачи дает неравенство Джексона-Стечкина для модулей непрерывности m-го порядка ($m \in \mathbb{N}$).

Напомним, что под неравенствами Джексона-Стечкина понимают неравенства, в котором величина наилучшего приближения функции

$$E_{n-1}(f)_X := E(f, \mathfrak{N}_{n-1})_X$$

конечномерным подпространством $\mathfrak{N}_{n-1}$ нормированного пространства X оценивается сверху через некоторую характеристику гладкости самой функции $f(x)$ или некоторую ее производную $f^{(r)}(x)$, например, через $\Lambda_m\big(f^{(r)}, \pi/n\big)_X$ или $\omega_m\big(f^{(r)}, \pi/n\big)$, то есть имеет место неравенство

$$E_{n-1}(f)_X := E(f, \mathfrak{N}_{n-1})_X \le \frac{\chi}{n^r}\Lambda_m\big(f^{(r)}, \pi/n\big)_X$$

или неравенство

$$E_{n-1}(f)_X := E(f, \mathfrak{N}_{n-1})_X \le \frac{\chi}{n^r}\omega_m\big(f^{(r)}, \pi/n\big)_X,$$

где $n \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Z}_+$, χ — константа, которая не зависеть ни от n, r, f, а зависеть только от числа $m \in \mathbb{N}$.

В рассматриваемом нами случае $\mathfrak{N}_{n-1} := \mathcal{T}_{2n-1}$ — подпространство тригонометрических полиномов, $X := L_2 = L_2[-\pi, \pi]$ — гильбертово пространство.

Заметим, что в силу основного свойства характеристики гладкости $\Lambda_m\big(f^{(r)},t\big)$ имеет место неравенство

$$\Lambda_m\left(f^{(r)},\frac{\pi}{n}\right)_2\le\omega_m\left(f^{(r)},\frac{\pi}{n}\right)_2,$$

а потому из доказанного в предыдующем пункте следствие 2.1.1 сразу получаем неравенство Джексона-Стечкина с точной константой

$$E_{n-1}(f)_2\le\frac{1}{2^{m/2}}\left\{\frac{m!}{(2m-1)!!}\right\}^{1/2}\cdot\frac{1}{n^r}\,\omega_m\left(f^{(r)},\frac{\pi}{n}\right)_2. \tag{2.1.66}$$

Здесь точная константа Джексона-Стечкина равна

$$\chi:=\chi(m)=\frac{1}{2^{m/2}}\left\{\frac{m!}{(2m-1)!!}\right\}^{1/2}. \tag{2.1.67}$$

В частности, при $m=1$ из (2.1.67) получаем $\chi=1/\sqrt{2}$, ранее найденную Н.И.Черных [67] для модуля непрерывности первого порядка.

Далее найдены точные константы в неравенствах типа Джексона-Стечкина для характеристик гладкости $\Lambda_m(f),\ m\in\mathbb{N}$, определенных при помощи усреднения нормы конечных разностей первого порядка функций f в L_2.

При решении ряда экстремальных задач теории аппроксимации функций как в действительной, так и в комплексной области часто применяют различные модификации классической характеристики гладкости функций - её модуля непрерывности, порожденным различными операторами сдвига. Полученные такими способами обобщенные модули гладкости во многих случаях учитывают специфику рассматриваемых задач и позволяют получить новые содержательные результаты (см., например, [5, 17, 25, 74, 80, 85, 94] и приведенную там литературу).

Напомним, что под неравенством типа Джексона-Стечкина понимают неравенство, в котором величина наилучшего приближения функции конечномерным подпространством оценивается сверху через некоторую характеристику гладкости самой функции или ее некоторой производной заданного порядка. Введем также обозначение

$$\operatorname{sinc} t := \left\{ \frac{\sin t}{t},\ \text{если } t \neq 0;\ 1,\ \text{если } t = 0 \right\}.$$

В соотношениях общего характера при вычислении верхней грани по всем функциям $f \in L_2^{(r)}$ всюду далее будем предполагать, что $f \neq const$. В этих предположениях имеет место следующая

Теорема 2.1.4. *Пусть* $n, r \in \mathbb{N},\ 0 < p \leq \infty,\ 0 < h \leq 3\pi/(4n),\ \varphi$ – *весовая на отрезке* $[0, h]$ *функция. Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{\sqrt{2} \cdot n^r \cdot E_{n-1}(f)_2}{\left(\int\limits_0^h \Lambda_1^p\big(f^{(r)}, t\big)_2\ \varphi(t)dt \right)^{1/p}} =$$

$$= \frac{1}{\left(\int\limits_0^h \left(1 - \operatorname{sinc} nt\right)^{p/2}\ \varphi(t)dt \right)^{1/p}}. \tag{2.1.68}$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что для параметра p, удовлетворяющего условию $0 < p \leq \infty$, функционал $\|\Lambda_1\|_p$ в знаменателе дроби в левой части (2.1.68) определен соотношением

$$\|\Lambda_1\|_p = \begin{cases} \left(\int\limits_0^h \Lambda_1^p(f^{(r)}, t)_2\ \varphi(t)dt \right)^{1/p}, \ \text{если } 0 < p < \infty, \\ \max\limits_{0 \leq t \leq h} \Lambda_1(f^{(r)}, t)_2, \ \text{если } p = \infty. \end{cases}$$

При этом указанный функционал лишь при $1 \le p \le \infty$ является нормой. Переходим к доказательству равенства (2.1.68). Воспользуясь равенством (2.1.46) при $m = 1$ и учитывая, что $J_{1,1}^2(kt) = 1 - \operatorname{sinc} kt$ для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$, запишем

$$\Lambda_1^2(f^{(r)}, t)_2 \;=\; 2\sum_{k=1}^{\infty} k^{2r}\rho_k^2(f)J_{1,1}^2(kt) =$$

$$= 2\sum_{k=1}^{\infty} k^{2r}\rho_k^2(f)(1 - \operatorname{sinc} kt) \ge 2\sum_{k=n}^{\infty} k^{2r}\rho_k^2(f)(1 - \operatorname{sinc} kt). \qquad (2.1.69)$$

Учитывая тот факт [59, с. 135], что при $0 < nt \le 3\pi/4$

$$\max\Big\{|\operatorname{sinc} u| : u \ge nt\Big\} = \operatorname{sinc} nt,$$

$$\min\Big\{(1 - \operatorname{sinc} u) : u \ge nt\Big\} = 1 - \max_{u \ge nt} \sin cu = 1 - \operatorname{sinc} nt,$$

продолжим неравенство (2.1.69)

$$\Lambda_1^2(f^{(r)}, t)_2 \ge 2\sum_{k=n}^{\infty} k^{2r}\rho_k^2(f)(1 - \operatorname{sinc} kt) \ge$$

$$\ge 2n^{2r}(1 - \operatorname{sinc} nt)\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f) =$$

$$= 2n^{2r}(1 - \operatorname{sinc} nt)E_{n-1}^2(f)_2.$$

Отсюда

$$\Lambda_1(f^{(r)}, t)_2 \ge \sqrt{2}\, n^r \sqrt{1 - \operatorname{sinc} nt} \cdot E_{n-1}(f)_2.$$

Возведя обе части полученного неравенства в степень p $(0 < p \le \infty)$, умножив на весовую функцию φ и интегрируя по отрезку $[0, h]$, будем иметь

$$\left(\int_0^h \Lambda_1^p(f^{(r)}, t)_2 \; \varphi(t)dt\right)^{1/p} \quad \ge$$

$$\geq \sqrt{2}\, n^r \cdot E_{n-1}(f)_2 \cdot \left(\int_0^h \left(1 - \operatorname{sinc} nt \right)^{p/2} \varphi(t)\, dt \right)^{1/p}. \qquad (2.1.70)$$

Из неравенства (2.1.70) вытекает оценка сверху величины, расположенной в левой части равенства (2.1.68):

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{\sqrt{2}\, n^r\, E_{n-1}(f)_2}{\left(\int_0^h \Lambda_1^p(f^{(r)}, t)_2\ \varphi(t) dt \right)^{1/p}} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\left(\int_0^h \left(1 - \operatorname{sinc} nt \right)^{p/2} \varphi(t)\, dt \right)^{1/p}}. \qquad (2.1.71)$$

Для получения оценки снизу указанной величины рассмотрим функцию $g_0(x) := \sin nx$, очевидно принадлежащую классу $L_2^{(r)}$. Используя формулы (2.1.23) и (2.1.69), получаем

$$E_{n-1}(g_0)_2 = 1,\ \Lambda_1\big(g_0^{(r)}, t\big)_2 = \sqrt{2} \cdot\ n^r \sqrt{1 - \operatorname{sinc} nt}. \qquad (2.1.72)$$

Учитывая равенств (2.1.72), запишем

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{\sqrt{2}\, n^r\, E_{n-1}(f)_2}{\left(\int_0^h \Lambda_1^p\Big(f^{(r)}, t \Big)_2\ \varphi(t) dt \right)^{1/p}} \geq$$

$$\geq \frac{\sqrt{2}\, n^r\, E_{n-1}(g_0)_2}{\left(\int_0^h \Lambda_1^p\Big(g_0^{(r)}, t \Big)_2\ \varphi(t)\, dt \right)^{1/p}} =$$

$$= \frac{1}{\left(\int\limits_0^h \left(1 - \operatorname{sinc} nt\right)^{p/2} \ \varphi(t)\, dt \right)^{1/p}}. \tag{2.1.73}$$

Требуемое равенство (2.1.68) вытекает из сопоставления неравенств (2.1.71) и (2.1.73), чем и завершаем доказательство теоремы 2.1.4.

Следующая теорема является обобщением теоремы 2.1.4.

Теорема 2.1.5. *Пусть $r, s \in \mathbb{Z}_+,\ r \geq s$. Тогда при любом $h \in (0, 3\pi/(4n)]$ справедливо равенство*

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{\sqrt{2}\, n^{r-s}\, E_{n-1}(f^{(s)})_2}{\left(\int\limits_0^h \Lambda_1^p(f^{(r)}, t)_2 \ \varphi(t)\, dt \right)^{1/p}} =$$

$$= \frac{1}{\left(\int\limits_0^h \left(1 - \operatorname{sinc} nt\right)^{p/2} \ \varphi(t)\, dt \right)^{1/p}}. \tag{2.1.74}$$

Доказательство. В левой части равенства (2.1.74), полагая $f^{(s)} = g$, получаем $f^{(r)} = g^{(r-s)}$, а потому из условия $f \in L_2^{(r)}$ вытекает, что $g \in L_2^{(r-s)}$. Но тогда, учитывая равенство (2.1.68), получаем

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{\sqrt{2}\, n^{r-s}\, E_{n-1}(f^{(s)})_2}{\left(\int\limits_0^h \Lambda_1^p(f^{(r)}, t)_2 \ \varphi(t)\, dt \right)^{1/p}} =$$

$$= \sup_{g \in L_2^{(r-s)}} \frac{\sqrt{2}\, n^{r-s}\, E_{n-1}(g)_2}{\left(\int\limits_0^h \Lambda_1^p(g^{(r-s)}, t)_2 \ \varphi(t)\, dt \right)^{1/p}} =$$

$$= \frac{1}{\left(\int\limits_0^h \left(1 - \operatorname{sinc} nt\right)^{p/2} \varphi(t)\, dt \right)^{1/p}},$$

откуда и вытекает утверждение теоремы 2.1.5.

Из теоремы 2.1.5 следует ряд утверждений.

Следствие 2.1.3. *В условиях теоремы 2.1.5 при $p = 2$, $\varphi \equiv 1$ имеет место равенство*

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^{r-s} E_{n-1}(f^{(s)})_2}{\left\{ \int\limits_0^h \Lambda_1^2(f^{(r)}, t)_2 \; dt \right\}^{1/2}} = \left\{ \frac{n}{2(nh - S_i(nh))} \right\}^{1/2}, \tag{2.1.75}$$

где $S_i(t) = \int\limits_0^t \operatorname{sinc} u du$ *— интегральный синус.*

В частности, из (2.1.75) при $h = \pi/(2n)$ получаем

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{E_{n-1}(f^{(s)})_2}{\left(\int\limits_0^{\pi/(2n)} \Lambda_1^2(f^{(r)}, t)_2 dt \right)^{1/2}} = \frac{n^{-(r-s)+1/2}}{\sqrt{\pi - 2S_i(\pi/2)}}. \tag{2.1.76}$$

Следствие 2.1.4. *В условиях теоремы 2.1.5 при $p = 2$, $\varphi(t) = t$ имеет место равенство*

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^{r-s} E_{n-1}(f^{(s)})_2}{\left(\int\limits_0^h t\, \Lambda_1^2(f^{(r)}, t)_2 \, dt \right)^{1/2}} = \frac{2}{h} \left\{ 1 - \left(\frac{2}{nh} \cdot \sin \frac{nh}{2} \right)^2 \right\}^{-1/2}. \tag{2.1.77}$$

В частности, из (2.1.77) при $h = \pi/(2n)$ вытекает равенство

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{n^{r-s-1}E_{n-1}(f^{(s)})_2}{\left(\int\limits_0^{\pi/(2n)} t\,\Lambda_1^2(f^{(r)},t)_2\,dt\right)^{1/2}} = \frac{4}{\sqrt{\pi^2-8}}. \tag{2.1.78}$$

Заметим, что из равенства (2.1.76) при всех $s = 0, 1, \ldots, r$ следует неравенство типа Джексона-Стечкина

$$E_{n-1}(f^{(s)})_2 \le \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\pi - Si(\pi/2)}}\cdot\frac{1}{n^{r-s+1/2}}\cdot\Lambda_1\left(f^{(r)},\frac{\pi}{2n}\right),$$

а из (2.1.78) получаем

$$E_{n-1}(f^{(s)})_2 \le \frac{2\pi}{\sqrt{\pi^2-8}}\cdot\frac{1}{n^{r-s}}\cdot\Lambda_1\left(f^{(r)},\frac{\pi}{2n}\right).$$

Приведенные выше теоремы 2.1.5 и вытекающее из неё следствие 2.1.3 и следствие 2.1.4 и результат С.Б.Вакарчука [11] обобщается в более общем виде. В [11] доказано, что для любых $r \in \mathbb{Z}_+$; $m, n \in \mathbb{N}$; $0 < p \le 2$; $0 < h \le 2\pi/n$, q — весовая на $[0, h]$ функции имеет место равенство

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\neq const}} \frac{2^{m/2}\cdot E_{n-1}(f)_2}{\left(\int\limits_0^h \Lambda_m^p(f^{(r)},t)_2 q(t)dt\right)^{1/p}} =$$

$$= \left\{\inf_{n\le k<\infty} \mathcal{A}_{k,m,r,p}(q,h)\right\}^{-1}, \tag{2.1.79}$$

где

$$\mathcal{A}_{k,m,r,p}(q,h) = \left(k^{rp}\int\limits_0^h J_{1,m}^p(kt)q(t)dt\right)^{1/p}. \tag{2.1.80}$$

Поскольку для функции $f \in L_2^{(r)}, r \in \mathbb{N}$ её промежуточные производные $f^{(\nu)},\ \nu = 1, 2, \ldots, r-1$ также принадлежат пространству L_2, то определённый интерес представляет изучение поведения величин $E_{n-1}\big(f^{(\nu)}\big)_2$ на некотором подклассе $\mathfrak{M}^{(r)} \subset L_2^{(r)}$ или на самом классе $L_2^{(r)}$. При этом, легко заметить, что при любом ν $(0 \le \nu \le r,\ r \in \mathbb{N})$ имеет место равенство

$$E_{n-1}\big(f^{(\nu)}\big)_2 = \Big\| f^{(\nu)} - S_{n-1}(f^{(\nu)}) \Big\|_2 = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} k^{2\nu} \rho_k^2(f) \right\}^{1/2}. \tag{2.1.81}$$

Справедлива следующая

Теорема 2.1.6. *Пусть $r \in \mathbb{Z}_+$; $m, n \in \mathbb{N}$; $0 < p \le \infty$; $0 < h \le 2\pi/n$; q — весовая на $[0, h]$ функция. Тогда для любого ν $(0 \le \nu \le r)$ имеет место равенство*

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f \ne const}} \frac{2^{m/2} \cdot E_{n-1}(f^{(\nu)})_2}{\left(\int_0^h \Lambda_m^p(f^{(r)}, t)_2 q(t) dt \right)^{1/p}} =$$

$$= \Big\{ \inf_{n \le k < \infty} \mathcal{A}_{k,m,r-\nu,p}(q, h) \Big\}^{-1}. \tag{2.1.82}$$

Доказательство. Пусть $f \in L_2^{(r)}, f \ne const$. Так как

$$\Big\| \triangle_h^m \big(f^{(r)}\big) \Big\|_2^2 = 2^m \sum_{k=1}^{\infty} k^{2r} \rho_k^2(f) \big(1 - \cos kh\big)^m,$$

то, учитывая соотношения (2.1.46), (2.1.17) и (2.1.52), запишем

$$\Lambda_m\big(f^{(r)}, t\big) = \left\{ \frac{2^m}{t} \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} k^{2r} \rho_k^2(f) \big(1 - \cos kh\big)^m dh \right\}^{1/2} =$$

$$= \left\{ 2^m \sum_{k=1}^{\infty} k^{2r} \rho_k^2(f) \cdot \frac{1}{kt} \int_0^{kt} \big(1 - \cos h\big)^m dh \right\}^{1/2} =$$

$$= \left\{ 2^m \sum_{k=1}^{\infty} k^{2r} \rho_k^2(f) \cdot J_{1,m}(kt) \right\}^{1/2} . \qquad (2.1.83)$$

Пользуясь упрощенным вариантом неравенства Минковского [98, с.104]:

$$\left(\int_0^h \left(\sum_{k=n}^{\infty} \left| g_j(t) \right|^2 \right)^{p/2} dt \right)^{1/p} \geq \left(\sum_{k=n}^{\infty} \left(\int_0^h \left| g_j(t) \right|^p dt \right)^{2/p} \right)^{1/2} ,$$

где $h > 0, 0 < p \leq 2$, и полагая $g_k := f_k q^{1/p}$, где $f_k \in L_2$, $k = n, n+1, \ldots$ получаем

$$\left(\int_0^h \left(\sum_{k=n}^{\infty} \left| f_j(t) \right|^2 q(t) dt \right)^{p/2} \right)^{1/p} \geq \left(\sum_{k=n}^{\infty} \left(\int_0^h \left| f_j(t) \right|^p q(t) dt \right)^{2/p} \right)^{1/2} . \qquad (2.1.84)$$

Учитывая соотношения (2.1.79) и (2.1.80), запишем

$$\left(\int_0^h \Lambda_m^p(f^{(r)}, t)_2 q(t) dt \right)^{1/p} \geq$$

$$\geq \left\{ 2^{mp/2} \int_0^h \left(\sum_{k=n}^{\infty} k^{2r} \rho_k^2(f) J_{1,m}(kt) \right)^{p/2} q(t) dt \right\}^{1/p} =$$

$$= 2^{m/2} \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} k^{2\nu} \rho_k^2(f) \left(k^{p(r-\nu)} \int_0^h J_{1,m}^p(kt) q(t) dt \right)^{2/p} \right\}^{1/2} =$$

$$= 2^{m/2} \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} k^{2\nu} \rho_k^2(f) \mathcal{A}_{k,m,r-\nu,p}(q,h) \right\}^{1/2} \geq$$

$$\geq 2^{m/2} E_{n-1}\left(f^{(\nu)}\right)_2 \cdot \inf_{n \leq k < \infty} \mathcal{A}_{k,m,r-\nu,p}(q,h). \qquad (2.1.85)$$

Отсюда сразу следует оценка сверху

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\neq const}} \frac{2^{m/2}\cdot E_{n-1}(f^{(\nu)})_2}{\left(\int\limits_0^h \Lambda_m^p(f^{(r)},t)_2 q(t)dt\right)^{1/p}} \leq$$

$$\leq \Big\{ \inf_{n\leq k<\infty} \mathcal{A}_{k,m,r-\nu,p}(q,h)\Big\}^{-1}. \tag{2.1.86}$$

С целью получения оценки снизу величины, расположенной в левой части неравенства (2.1.86), рассмотрим в классе $L_2^{(r)}$ множество функций

$$f_k(x) := \cos kx,\ k\in\mathbb{N},\ k\geq n.$$

Поскольку $E_{n-1}\big(f_k^{(\nu)}\big)= k^\nu$ и в силу формулы (2.1.46)

$$\Lambda_m(f_k^{(r)},t)_2 = 2^{m/2}k^r J_{1,m}(kt),$$

то имеем

$$\frac{2^{m/2}E_{n-1}\big(f_k^{(\nu)}\big)_2}{\left\{\int\limits_0^h \Lambda_m^p(f_k^{(r)},t)_2 q(t)dt\right\}^{1/p}} = \frac{2^{m/2}k^\nu}{2^{m/2}\left\{k^{rp}\int\limits_0^h J_{1,m}^p(kt)q(t)dt\right\}^{1/p}} =$$

$$= \frac{1}{\left\{k^{(r-\nu)p}\int\limits_0^h J_{1,m}^p(kt)q(t)dt\right\}^{1/p}} = \frac{1}{\mathcal{A}_{k,m,r-\nu,p}(q,h)}.$$

Отсюда сразу следует оценка снизу той же величины

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\neq const}} \frac{2^{m/2}\cdot E_{n-1}(f^{(\nu)})_2}{\left(\int\limits_0^h \Lambda_m^p(f^{(r)},t)_2 q(t)dt\right)^{1/p}} \geq$$

$$\geq \sup_{n\leq k<\infty} \frac{2^{m/2}\cdot E_{n-1}(f_k^{(\nu)})_2}{\left(\int\limits_0^h \Lambda_m^p(f_k^{(r)},t)_2 q(t)dt\right)^{1/p}} =$$

$$= \sup_{n\leq k<\infty} \frac{1}{\mathcal{A}_{k,m,r-\nu,p}(q,h)} = \Big\{ \inf_{n\leq k<\infty} \mathcal{A}_{k,m,r-\nu,p}(q,h)\Big\}^{-1}. \tag{2.1.87}$$

Сопоставляя оценку сверху (2.1.86) с оценкой снизу (2.1.87), получаем требуемое равенство (2.1.82). Теорема 2.1.6 доказана.

Отметим, что теорема 2.1.6 при $\nu = 0$ доказана в работе [11].

Возникает естественной вопрос: найти необходимое и достаточное условие на фигурирующих числовых параметрах и весовой функции q в условиях теоремы 2.1.6, при выполнении которых имеет место равенство

$$\inf_{n\leq k<\infty} \mathcal{A}_{k,m,r-\nu,p}(q,h) = \mathcal{A}_{n,m,r-\nu,p}(q,h). \tag{2.1.88}$$

Ответ на этот вопрос содержится в следующем утверждении

Теорема 2.1.7. *Пусть* $m,n,r \in \mathbb{N}$; $1/(r-\nu) \leq p \leq 2$, $0 \leq \nu < r$, $0 < h \leq 2\pi/n$, *и весовая функция* $q(t) \in C^{(1)}[0,h]$ *удовлетворяет условию*

$$\big[(r-\nu)p - 1\big]q(t) - tq'(t) \geq 0. \tag{2.1.89}$$

Тогда выполняется равенство (2.1.88) и имеет место соотношение

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\neq const}} \frac{2^{m/2}\cdot E_{n-1}(f^{(\nu)})_2}{\left(\int\limits_0^h \Lambda_m^p(f^{(r)},t)_2 q(t)dt\right)^{1/p}} = \frac{1}{\mathcal{A}_{n,m,r-\nu,p}(q,h)}. \tag{2.1.90}$$

Доказательство. Очевидно, что для справедливости (2.1.88), исходя из равенства (2.1.80), достаточно показать, что функция

$$y(x) = x^{(r-\nu)p} \int\limits_0^h J_{1,m}^p(xt) q(t) dt$$

при выполнении неравенства (2.1.89) является неубывающей при значении $x \geq n$. Для этого вычислим производную первого порядка

$$y'(x) = (r-\nu)p x^{(r-\nu)p-1} \int\limits_0^h J_{1,m}^p(xt) q(t) dt +$$

$$+ x^{(r-\nu)p} \int\limits_0^h \frac{\partial}{\partial x} J_{1,m}^p(xt) q(t) dt. \tag{2.1.91}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться в справедливости равенства

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(J_{1,m}^p(xt)\Big) = \frac{t}{x} \cdot \frac{\partial}{\partial t}\Big(J_{1,m}^p(xt)\Big). \tag{2.1.92}$$

Учитывая соотношения (2.1.92), из равенства (2.1.91) имеем

$$y'(x) = (r-\nu)p x^{(r-\nu)p-1} \int\limits_0^h J_{1,m}^p(xt) q(t) dt +$$

$$+ x^{(r-\nu)p-1} \int\limits_0^h tq(t) \frac{\partial}{\partial t}\Big(J_{1,m}^p(xt)\Big) dt =$$

$$= x^{(r-\nu)p-1} \left\{ (r-\nu)p \int\limits_0^h J_{1,m}^p(xt) q(t) dt + \int\limits_0^h tq(t) \frac{\partial}{\partial t} J_{1,m}^p(xt) dt \right\}. \tag{2.1.93}$$

Выполнив интегрирование по частям, во втором интеграле справа в (2.1.93) приходим к соотношению

$$y'(x) = x^{(r-\nu)p-1} \times$$

$$\times \left\{ hq(h) J_{1,m}^p(xh) + \int\limits_0^h \left\{ \Big[(r-\nu)p - 1\Big] q(t) - tq'(t) \right\} \cdot J_{1,m}^p(xt) dt \right\}. \tag{2.1.94}$$

Учитывая, что функция $J^p_{1,m}$ является положительной на $\mathbb{R}_+$, $q \geq 0$ на $[0,h]$, $p \in [1/(r-\nu),2]$, из (2.1.94) имеем $y'(x) \geq 0$ для любого $x \in [n,\infty)$. Следовательно,

$$\inf_{n\leq x<\infty} y^{1/p}(x) = y^{1/p}(n) = \mathcal{A}_{n,m,r-\nu,p}(q,h). \tag{2.1.95}$$

Равенство (2.1.95) означает, что соотношение (2.1.88) имеет место и в силу (2.1.80) справедливо равенство (2.1.90), чем и завершаем доказательство теоремы 2.1.7.

Из доказанной теоремы вытекает ряд утверждений.

Следствие 2.1.5. *В условиях теоремы 2.1.7 при* $m=1, p=2$ *и* $q(t)\equiv 1$ *имеет место равенство*

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\neq const}} \frac{\sqrt{2}\cdot n^{(r-\nu)-1/2}E_{n-1}(f^{(\nu)})_2}{\left\{\int\limits_0^h \Lambda_1^2(f^{(r)},t)_2 dt\right\}^{1/2}} = \Big(nh - Si(nh)\Big)^{-1/2},$$

где $Si(x) := \int\limits_0^x \sin cx dx$ *— интегральный синус.*

Следствие 2.1.6. *Пусть выполнены условия теоремы 2.1.7. Тогда при* $m=1$, $p=2$ *и* $q(t)=t$ *справедливо равенство*

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\neq const}} \frac{\sqrt{2}\cdot n^{(r-\nu)-1/2}E_{n-1}(f^{(\nu)})_2}{\left\{\int\limits_0^h t\,\Lambda_1^2(f^{(r)},t)_2 dt\right\}^{1/2}} = \left\{\frac{2}{(nh)^2 - \left(2\sin\dfrac{nh}{2}\right)^2}\right\}^{1/2},$$

и, в частности, при $nh=\pi$ *имеем*

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\neq const}} \frac{\sqrt{2}\cdot n^{(r-\nu)-1/2}E_{n-1}(f^{(\nu)})_2}{\left\{\int\limits_0^h t\,\Lambda_1^2(f^{(r)},t)_2 dt\right\}^{1/2}} = \left\{\frac{2}{\pi^2-4}\right\}^{1/2}.$$

§ 2.2. Неравенства типа Джексона-Стечкина для осредненной с весом характеристики гладкости $\Lambda_m\big(f^{(r)},t\big)_2$ на классах функций $L_2^{(r)}, r\in\mathbb{N}$

В этом параграфе мы докажем по существу основные теоремы первой главы, которые в дальнейшем играют существенную роль при доказательстве теорем о поперечниках во второй главе.

Отметим, что для функции $f(x)\in L_2^{(r)}$ $(r\in\mathbb{Z}_+,\ L_2^{(0)}\equiv L_2)$ её промежуточные производные $f^{(s)}(x)$ $(s=1,2,\dots,r-1;\ r\in\mathbb{N};\ r\geq 2)$ наравне с самой функций $f(x)$ и её r-й производной $f^{(r)}(x)$ также принадлежат пространству L_2. Этот факт вытекает из следующего неравенства Колмогорова для промежуточных производных $f^{(s)}(x)$ $(s=1,2,\dots,r-1,\ r\geq 2,\ r\in\mathbb{N})$ функций $f(x)\in L_2^{(r)}$:

Теорема Колмогорова [34, с.127]. *Если $f\in L_2^{(r)}$ $(r\in\mathbb{N}, r\geq 2)$, то имеет место неравенство*

$$\|f^{(s)}\|_2\leq\|f\|_2^{1-s/r}\cdot\|f^{(r)}\|_2^{s/r},\quad s=1,2,\dots,r-1.$$

Знак равенства здесь имеет место для функций $f(x)=\gamma\cos m(t+\alpha)$, $\gamma,\alpha\in\mathbb{R}:=(-\infty,+\infty)$.

Представляет несомненный интерес изучение поведения наилучших приближений $E_{n-1}\big(f^{(s)}\big)_2$ $(s=0,1,2,\dots,r;\ r\in\mathbb{N})$ на самом классе $L_2^{(r)}$ или на некотором подклассе $\mathfrak{M}^{(r)}\subset L_2^{(r)}$. Другими словами, требуется найти точное значение следующей экстремальной величины:

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}\big(\mathfrak{M}^{(r)}\big)_2:=\sup\Big\{E_{n-1}\big(f^{(s)}\big)_2:f\in\mathfrak{M}^{(r)}\Big\}. \tag{2.2.1}$$

Ясно, что для решения сформулированной задачи (2.2.1) нужно предварительно получить неравенство типа Джексона-Стечкина для усредненной с заданной весовой функции характеристику гладкости $\Lambda_m\big(f^{(r)},t\big)_2$, из которой можно было бы получить информацию о подклассе $\mathfrak{M}^{(r)}\subset L_2^{(r)}$.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 2.2.1. *Пусть* $m,n\in\mathbb{N}$, $r,s\in\mathbb{Z}_+$, $r\geq s$, $0<h\leq 2\pi$ *и* $0<p\leq\infty$, φ *— весовая на* $[0,h]$ *функция. Тогда имеет место равенство*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{2^{m/2}\,n^{r-s}\cdot E_{n-1}\big(f^{(s)}\big)_2}{\left(\int\limits_0^h\Lambda_m^p\big(f^{(r)},t\big)_2\;\varphi(t)dt\right)^{1/p}}=\left\{\int\limits_0^h J_{1,m}^p(nt)\varphi(t)\,dt\right\}^{-1/p}. \tag{2.2.2}$$

Доказательство. Прежде всего по-прежнему отметим, что для параметра p, удовлетворяющего условию $0<p\leq\infty$, функционал $\big\|\Lambda_m\varphi^{1/p}\big\|_p$ в знаменателе дроби в левой части неравенства (2.1.58) определен соотношением

$$\big\|\Lambda_m\varphi^{1/p}\big\|_p:=\begin{cases}\left(\int\limits_0^h\Lambda_m^p(f^{(r)},t)_2\;\varphi(t)dt\right)^{1/p}, & \text{если } 0<p<\infty,\\[2ex] \underset{0\leq t\leq h}{essup}\;\Lambda_m(f^{(r)},t)_2, & \text{если } p=\infty.\end{cases}$$

При этом указанный функционал лишь при $1\leq p\leq\infty$ является нормой. Переходим теперь к доказательству равенства (2.2.2). Далее, воспользуемся неравенством (2.1.56), где доказано, что для любых $m,n\in\mathbb{N}$, $r,s\in\mathbb{Z}_+$, $r\geq s$ имеет место неравенство

$$\Lambda_m\big(f^{(r)},t\big)_2\geq 2^{m/2}\;n^{r-s}\;J_{1,m}(nt)\cdot E_{n-1}\big(f^{(s)}\big)_2.$$

Возведя обе части последнего неравенства в степень p $(0<p\leq\infty)$, затем,

умножая на весовую функцию φ и интегрируя по отрезку $[0,h]$ $(0<h\le 2\pi)$, приходим к неравенству

$$\int_0^h \Lambda_m^p\big(f^{(r)},t\big)_2\ \varphi(t)dt \ge$$

$$\ge 2^{pm/2}\cdot n^{p(r-s)}\cdot E_{n-1}^p\big(f^{(s)}\big)_2\cdot\int_0^h J_{1,m}^p(nt)\varphi(t)dt.$$

Отсюда следует, что

$$\left(\int_0^h \Lambda_m^p\big(f^{(r)},t\big)_2\ \varphi(t)dt\right)^{1/p} \ge$$

$$\ge 2^{m/2}\cdot n^{r-s}E_{n-1}\big(f^{(s)}\big)_2\left(\int_0^h J_{1,m}^p(nt)\varphi(t)dt\right)^{1/p}.$$

Так как последнее неравенство верно для любой функции $f(x)\in L_2^{(r)}$, то из него вытекает оценка сверху величины, стоящей в левой части равенства (2.2.2):

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{2^{m/2}n^{r-s}\cdot \mathrm{E}_{n-1}\big(f^{(s)}\big)_2}{\left(\int_0^h \Lambda_m^p\big(f^{(r)},t\big)_2\ \varphi(t)dt\right)^{1/p}}\le$$

$$\le\frac{1}{\left(\int_0^h J_{1,m}^p(nt)\ \varphi(t)dt\right)^{1/p}}. \qquad (2.2.3)$$

Для получения оценки снизу экстремальной характеристики, лежащей в левой части (2.2.3), рассмотрим ранее введенную нами функцию

$$f_0(x)=a\cos(nx+\varphi)\in L_2^{(r)},$$

для которой в силу равенств (2.1.39) и первого равенства из (2.1.55) имеют место равенства

$$E_{n-1}\big(f_0^{(s)}\big)_2 = a\ n^s,$$

$$\Lambda_m\big(f_0^{(r)}, t\big)_2 = 2^{m/2}\ n^r J_{1,m}(nt)a.$$

Воспользуясь этими равенствами, запишем оценку снизу

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{2^{m/2} n^{r-s}\cdot E_{n-1}\big(f^{(s)}\big)_2}{\left(\int\limits_0^h \Lambda_m^p\big(f^{(r)}, t\big)_2\ \varphi(t)dt\right)^{1/p}} \geq$$

$$\geq \frac{2^{m/2} n^{r-s}\cdot \mathrm{E}_{n-1}\big(f_0^{(s)}\big)_2}{\left(\int\limits_0^h \Lambda_m^p\big(f_0^{(r)}, t\big)_2\ \varphi(t)dt\right)^{1/p}} =$$

$$= \frac{1}{\left(\int\limits_0^h J_{1,m}^p(nt)\ \varphi(t)dt\right)^{1/p}}. \tag{2.2.4}$$

Таким образом, требуемое равенство (2.2.2) следует из соотношений (2.2.3) и (2.2.4), чем и завершается доказательство теоремы 2.2.1.

В качестве следствий из теоремы 2.2.1 вытекают приведенные в предыдущем параграфе результаты и следующее утверждение

Следствие 2.2.1. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$, $0 < p \leq \infty$, $0 < h \leq 2\pi/n$ *и* $\varphi \equiv 1$. *Тогда имеет место равенство*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{n^{r-s-1/p}\mathrm{E}_{n-1}\big(f^{(s)}\big)_2}{\left(\int\limits_0^h \Lambda_m^p\big(f^{(r)},t\big)_2\,dt\right)^{1/p}} =$$

$$= \frac{1}{2^{m+\frac{1}{2}}\left(\int\limits_0^{nh}\left(\int\limits_0^{t/2}\sin^{2m}\tau d\tau\right)^{p/2}dt\right)^{1/p}}. \tag{2.2.5}$$

Доказательство. В самом деле, в предположении $\varphi(t)\equiv 1$ в знаменателе правой части равенства (2.2.2) имеем

$$\left(\int\limits_0^h J_{1,m}^p(nt)dt\right)^{1/p} = \left(\frac{1}{n}\int\limits_0^{nh} J_{1,m}^p(t)dt\right)^{1/p} =$$

$$= \left(\frac{1}{n}\int\limits_0^{nh}\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^{t}(1-\cos\tau)^m d\tau\right)^{p/2}dt\right)^{1/p} =$$

$$= \left(\frac{2^{mp/2}}{n}\int\limits_0^{nh}\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^{t}\sin^{2m}\frac{\tau}{2}d\tau\right)^{p/2}dt\right)^{1/p} =$$

$$= \left(\frac{2^{(m+1)p/2}}{n}\int\limits_0^{nh}\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^{t/2}\sin^{2m}\tau d\tau\right)^{p/2}dt\right)^{1/p} =$$

$$= \frac{2^{(m+1)/2}}{n^{1/p}}\cdot\left(\int\limits_0^{nh}\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^{t/2}\sin^{2m}\tau d\tau\right)^{p/2}dt\right)^{1/p}. \tag{2.2.6}$$

Воспользуясь равенством (2.2.6) из (2.2.2) получаем

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{n^{r-s}\cdot E_{n-1}\big(f^{(s)}\big)_2}{\left(\int\limits_0^h \Lambda_m^p\big(f^{(r)},t\big)_2\,dt\right)^{1/p}} = \frac{1}{2^{m/2}\left(\int\limits_0^h J_{1,m}^p(nt)dt\right)^{1/p}} =$$

$$= \frac{n^{1/p}}{2^{m+\frac{1}{2}}\left(\int\limits_0^h \left(\frac{1}{t}\int\limits_0^{t/2}\sin^{2m}\tau d\tau\right)^{p/2} dt\right)^{1/p}}.$$

Поделив обе части последнего равенство на числа $n^{1/p}$, приходим к равенству (2.2.5), чем и завершаем доказательство следствия 2.2.1.

В завершении данного параграфа отметим, что при некотором жестком ограничении относительно весовой функции φ утверждения вышеприведенных теоремы 2.2.1 и следствия 2.2.1 в частном случае $s = 0$ и $1/r \le p \le 2$ ранее были получены в работе С.Б. Вакарчука и В.И. Забутной [16]. Кроме того, следует отметить, что приведенная выше общая теорема 2.2.1. является своеобразным обобщением аналогичного утверждения, ранее доказанного для модуля непрерывности m-го порядка $\omega_m\big(f^{(r)},t\big)_2$ в работе М.Ш. Шабозова и Г.А. Юсупова [86], на случай характеристики гладкости $\Lambda_m\big(f^{(r)},t\big)_2$. В то же время результат М.Ш.Шабозова и Г.А.Юсупова [86] является обобщением результата А.А.Лигуна [41].

§ 2.3. Решение экстремальной задачи (2.2.1) для некоторых классов функций из $L_2^{(r)}$, определяемых заданной мажорантой Ψ

Теорема, доказанная нами в предыдущим параграфе, обеспечивает возможность решить общую экстремальную задачу отыскания верхней грани наилучших совместных приближений функций и их последовательных производных тригонометрическими полиномами (2.2.1):

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}\big(\mathfrak{M}^{(r)}\big)_2 := \sup\left\{ E_{n-1}\big(f^{(s)}\big)_2 : f \in \mathfrak{M}^{(r)} \right\}, \tag{2.3.1}$$

при всех значениях $n \in \mathbb{N},\ r, s \in \mathbb{Z}_+,\ r \geq s$ для некоторых классов функций $\mathfrak{M}^{(r)},\ r \in \mathbb{Z}_+$, задаваемых мажорантами $\Phi(h)$ и $\Psi(h)$. Используя определение характеристики гладкости $\Lambda_m(f)$ введём в рассмотрение следующий класс функций. Пусть $\Phi(u)$, где $u \in (0, 2\pi]$, есть непрерывная возрастающая функция такая, что $\lim\limits_{u\to+0} \Phi(u) = \Phi(0) = 0$. Символом $W^{(r)}(\Lambda_m, \Phi)$ обозначим класс функций $f \in L_2^{(r)}$, для которых при любом $\tau \in (0, 2\pi]$ имеет место неравенство

$$\Lambda_m(f^{(r)}, \tau) \leq \Phi(\tau).$$

Обозначим через t_* величину аргумента функции $\operatorname{sinc}\tau$ при котором она достигает на множестве $(0, 2\pi]$ своего наименьшего значения. Очевидно, что t_* — наименьший положительный корень уравнения

$$t = tg\, t \quad (4.49 < t_* < 4.51)$$

(см., например, [11]). Следуя работу [11] полагаем

$$(1 - \operatorname{sinc}\tau)_* := \begin{cases} 1 - \operatorname{sinc}\tau, & \text{если } 0 \leq \tau \leq t_*; \\ 1 - \operatorname{sinc} t_*, & \text{если } t_* \leq \tau < \infty. \end{cases}$$

Приведём теперь, решение экстремальной задачи (2.3.1) для класса $W^{(r)}(\Lambda_1, \Phi)$ пользуясь результатом следствие 2.1.3

Теорема 2.3.1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$ и мажоранта Φ удовлетворяет условию*

$$\frac{\Phi(\tau)}{\Phi\big(\pi/(2n)\big)} \geq \left\{ \frac{\pi(1 - \operatorname{sinc} \tau)_*}{\pi - 2} \right\}^{1/2}. \tag{2.3.2}$$

Тогда при всех $s = 0, 1, \ldots, r$ имеют место равенство

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}\Big(W^{(r)}(\Lambda_1, \Phi)\Big) = \sup\Big\{E_{n-1}(f^{(s)}) : f \in W^{(r)}(\Lambda_1, \Phi)\Big\} =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2(\pi - 2)}} \cdot \frac{1}{n^{r-s}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right). \tag{2.3.3}$$

Доказательство. Из равенство (2.1.61) для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ вытекает неравенство

$$E_{n-1}(f^{(s)}) \leq \frac{1}{n^{r-s}} \cdot \frac{\Lambda_1(f^{(r)}, t/n)}{\sqrt{2(1 - \operatorname{sinc} t)}}.$$

Полагая здесь $t = \pi/2$ и учитывая определение класса $W^{(r)}(\Lambda_1, \Phi)$ запишем оценку сверху величины стоящей в левой части равенство (2.3.3):

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}\Big(W^{(r)}(\Lambda_1, \Phi)\Big) \leq \sqrt{\frac{\pi}{2(\pi - 2)}} \cdot \frac{1}{n^{r-s}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right). \tag{2.3.4}$$

В силу соотношения (2.3.2) для получения соответствующей оценок снизу указанной величины достаточно показать, что в подпространство тригонометрических полиномов $\mathcal{T}_{2n+1}$ порядка n шар

$$S_{2n+1} := \left\{ T_n \in \mathcal{T}_{2n+1} : \|T_n\| \leq \sqrt{\frac{\pi}{2(\pi - 2)}} \cdot \frac{1}{n^r} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right\}$$

принадлежит классу $W^{(r)}(\Lambda_1, \Phi)$.

Используя формулу [14, с. 219, формула (2.10)]

$$\Lambda_1(f^{(r)},\tau)=\left\{2\sum_{k=1}^{\infty}k^{2r}\,\rho_k^2(f)\,J_{1,1}^2(k\tau)\right\}^{1/2}$$

для любого полинома $T_n\in\mathcal{T}_{2n+1}$ получаем

$$\Lambda_1(T_n^{(r)},\tau)=\left\{2\sum_{k=1}^{n}k^{2r}\,\rho_k^2(f)\,J_{1,1}^2(k\tau)\right\}^{1/2}\leq$$

$$\leq n^{2r}\cdot\left\{2\big(1-\operatorname{sinc}n\tau\big)_*\right\}^{1/2}\cdot\|T_n\|. \tag{2.3.5}$$

В силу неравенств (2.3.5) и условия (2.3.2) для произвольного полинома $T_n\in S_{2n+1}$ при любом $\tau\in(0,2\pi]$ запишем

$$\Lambda_1(T_n^{(r)},\tau)\leq n^{2r}\left\{2\big(1-\operatorname{sinc}n\tau\big)_*\right\}^{1/2}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2(\pi-2)}}\cdot\frac{1}{n^r}\cdot\Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right)=$$

$$=\left\{\frac{\pi\big(1-\operatorname{sinc}n\tau\big)_*}{\pi-2}\right\}^{1/2}\cdot\Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right)\leq\Phi(\tau).$$

Этим доказано, что $S_{2n+1}\subset W^{(r)}(\Lambda_1,\Phi)$. Принимая это во внимание рассмотрим функцию

$$\mathcal{F}_0(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2(\pi-2)}}\cdot\frac{1}{n^r}\cdot\Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right)\sin nx.$$

Так как

$$\|\mathcal{F}_0\|=\sqrt{\frac{\pi}{2(\pi-2)}}\cdot\frac{1}{n^r}\cdot\Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right),$$

то функция $\mathcal{F}_0\in W^{(r)}(\Lambda_1,\Phi)$. Для этой функции при всех $s=0,1,\ldots,r$

$$\mathcal{F}_0^{(s)}(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2(\pi-2)}}\cdot\frac{1}{n^{r-s}}\cdot\Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right)\sin\left(nx+\frac{s\pi}{2}\right)$$

и в силу формулы (2.1.36) имеем

$$E_{n-1}\big(\mathcal{F}_0^{(s)}\big) = \sqrt{\frac{\pi}{2(\pi-2)}} \cdot \frac{1}{n^{r-s}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right),$$

используя которой запишем оценка снизу

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}\Big(W^{(r)}(\Lambda_1,\Phi)\Big) \geq E_{n-1}\big(\mathcal{F}_0^{(s)}\big) = \sqrt{\frac{\pi}{2(\pi-2)}} \cdot \frac{1}{n^{r-s}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right). \tag{2.3.6}$$

Сопоставляя оценки сверху (2.3.4) с оценками снизу (2.3.6) получаем требуемое равенство (2.3.3), чем и завершаем доказательство теоремы 2.3.1.

Теперь приведём решение экстремальной задачи (2.3.1) для класса функций $W^{(r)}(\Lambda_m,\Phi)$ при любом $m \in \mathbb{N}$.

Теорема 2.3.2. *Пусть $m,n \in \mathbb{N}$, $r,s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$. Если мажоранта Φ для произвольных $\tau \in (0,2\pi]$ и $n \in \mathbb{N}$ удовлетворяет условию*

$$\frac{\Phi(t)}{\Phi(\pi/n)} \geq \sqrt{\frac{2^m}{C_{2m}^m}} \cdot J_{1,m}(n\tau), \tag{2.3.7}$$

то при всех $s = 0,1,\ldots,r$ справедливы равенства

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}\Big(W^{(r)}(\Lambda_m,\Phi)\Big)_2 = (C_{2m}^m)^{-1/2} \cdot \frac{1}{n^{r-s}} \cdot \Phi\Big(\frac{\pi}{n}\Big). \tag{2.3.8}$$

Доказательство. Для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ при $t = \pi$ из равенство

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\neq const}} \frac{n^r E_{n-1}(f)}{\Lambda_m(f^{(r)},t/n)} = \frac{1}{2^{m/2}J_{1,m}(t)}$$

получаем

$$E_{n-1}(f^{(s)}) \leq \frac{1}{2^{m/2}\,J_{1,m}(\pi)} \cdot \frac{1}{n^{r-s}} \cdot \Lambda_m\Big(f^{(r)},\frac{\pi}{n}\Big) =$$

$$= (C_{2m}^m)^{-1/2} \cdot \frac{1}{n^{r-s}} \cdot \Lambda_m\Big(f^{(r)},\frac{\pi}{n}\Big). \tag{2.3.9}$$

Используя определение класса $W^{(r)}(\Lambda_m, \Phi)$ отсюда получаем оценку сверху величины стоящей в левой части (2.3.8):

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}\Big(W^{(r)}(\Lambda_m, \Phi)\Big)_2 \le (C_{2m}^m)^{-1/2} \cdot \frac{1}{n^{r-s}} \cdot \Phi\Big(\frac{\pi}{n}\Big). \tag{2.3.10}$$

При доказательстве теоремы 5 из [16] была показана, что множество тригонометрических полиномов $T_n \in \mathcal{T}_{2n+1}$, удовлетворяющих условию

$$\big\|T_n\big\| \le (C_{2m}^m)^{-1/2} \cdot n^{-r} \cdot \Phi\Big(\frac{\pi}{n}\Big)$$

принадлежит классу $W^{(r)}(\Lambda_m, \Phi)$. Принимая это во внимание введём в рассмотрение функцию

$$f_1(x) := (C_{2m}^m)^{-1/2} \cdot n^{-r} \cdot \Phi(\pi/n)\, \cos nx.$$

Для этой функции при всех $s = 0, 1, \ldots, r$

$$f_1^{(s)}(x) := (C_{2m}^m)^{-1/2} \cdot n^{-(r-s)} \cdot \Phi(\pi/n)\, \cos\Big(nx + \frac{s\pi}{2}\Big),$$

$$E_{n-1}(f^{(s)}) = (C_{2m}^m)^{-1/2} \cdot n^{-(r-s)} \cdot \Phi(\pi/n). \tag{2.3.11}$$

Так как

$$\big\|f_1\big\| = (C_{2m}^m)^{-1/2} \cdot n^{-r} \cdot \Phi(\pi/n),$$

то $f_1 \in W^{(r)}(\Lambda_m, \Phi)$ и учитывая (2.3.11) имеем:

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}\Big(W^{(r)}(\Lambda_m, \Phi)\Big)_2 \ge E_{n-1}(f^{(s)}) = (C_{2m}^m)^{-1/2} \cdot \frac{1}{n^{r-s}} \cdot \Phi\Big(\frac{\pi}{n}\Big). \tag{2.3.12}$$

Сопоставляя неравенств (2.3.10) и (2.3.12) получаем требуемое равенство (2.3.8). Теорема 2.3.2 доказана.

Приводим решение задачи (2.3.1) для следующий класс функций.

Символом $W_p^{(r)}(\Lambda_1, \Phi)$, где $r \in \mathbb{N}$, $0 < p \le \infty$, Φ — некоторая мажоранта, обозначим класс функций $f \in L_2^{(r)}$, у которых производные r-го порядка $f^{(r)}$ при любом $0 < \tau < 2\pi$ удовлетворяют условию

$$\int_0^{\tau} \Lambda_1^p(f^{(r)}, t)dt \le \Phi^p(\tau).$$

Теорема 2.3.3. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{R}_+$, $r \ge s$, $0 < q \le \infty$. Если для любых значений $\tau \in (0, 2\pi]$ и $n \in \mathbb{N}$ мажоранта Φ удовлетворяет условию*

$$\frac{\Phi^p(\tau)}{\Phi^p(\pi/n)} \ge \frac{\displaystyle\int_0^{n\tau} \big(1 - \operatorname{sinc} t\big)^{p/2} dt}{\displaystyle\int_0^{\pi} \big(1 - \operatorname{sinc} t\big)^{p/2} dt}, \tag{2.3.13}$$

то имеет место равенства

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}\Big(W_p^{(r)}(\Lambda_1, \Phi)\Big)_2 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\, n^{r-s-1/p}} \cdot \left\{ \int_0^{\pi} \big(1 - \operatorname{sinc} t\big)^{p/2} dt \right\}^{-1/p} \cdot \Phi\Big(\frac{\pi}{n}\Big). \tag{2.3.14}$$

При этом множество мажорант Φ, удовлетворяющих ограничению (2.3.13)*, не пусто.*

Доказательство. Если в равенстве (2.2.2) полагать $m = 1$, $\varphi(t) \equiv 1$, $h = \pi/n$, то имеем

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{\sqrt{2}\, n^{r-s} \cdot E_{n-1}\big(f^{(s)}\big)_2}{\left(\displaystyle\int_0^{\pi/n} \Lambda_1^p\big(f^{(r)}, t\big)_2 \, dt \right)^{1/p}} = \left\{ \int_0^{\pi/n} J_{1,1}^p(nt)\, dt \right\}^{-1/p}. \tag{2.3.15}$$

Так как $J_{1,1}(t) = \sqrt{1 - \operatorname{sinc} t}$, то из (2.3.15) находим

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{\sqrt{2}\,n^{r-s-1/p}\cdot E_{n-1}\big(f^{(s)}\big)_2}{\left(\int\limits_0^{\pi/n}\Lambda_1^p\big(f^{(r)},t\big)_2\,dt\right)^{1/p}} = \frac{1}{\left(\int\limits_0^{\pi/n}\big(1-\operatorname{sinc}t\big)^{p/2}dt\right)^{1/p}}. \tag{2.3.16}$$

Так как равенство (2.3.16) верно для произвольной функции $f\in L_2^{(r)}$, то из него следует неравенство

$$E_{n-1}(f^{(s)})_2 \le \frac{1}{\sqrt{2}\,n^{r-s-1/p}}\cdot\frac{\left(\int\limits_0^{\pi/n}\Lambda_1^p\big(f^{(r)},t\big)_2 dt\right)^{1/p}}{\left(\int\limits_0^{\pi}\big(1-\operatorname{sinc}t\big)^{p/2}dt\right)^{1/p}}.$$

Отсюда, учитывая определение класса $W_p^{(r)}(\Lambda_1,\Phi)$ получаем оценка сверху величины $\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}\Big(W_p^{(r)}(\Lambda_1,\Phi)\Big)$:

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}\Big(W_p^{(r)}(\Lambda_1,\Phi)\Big)_2 \le$$

$$\le \frac{1}{\sqrt{2}\,n^{r-s-1/p}}\cdot\left\{\int\limits_0^{\pi}\big(1-\operatorname{sinc}t\big)^{p/2}dt\right\}^{-1/p}\cdot\Phi\Big(\frac{\pi}{n}\Big). \tag{2.3.17}$$

Для получения оценок снизу рассматриваемой величины в подпространстве тригонометрических полиномов $T_n\in\mathcal{T}_{2n+1}$ рассмотрим шар

$$\sigma_{2n+1} :=$$

$$:= \left\{T_n\in\mathcal{T}_{2n+1}:\|T_n\|\le\frac{1}{\sqrt{2}\,n^{r-s-1/p}}\cdot\left(\int\limits_0^{\pi}\big(1-\operatorname{sinc}t\big)^{p/2}dt\right)^{-1/p}\Phi\Big(\frac{\pi}{n}\Big)\right\}$$

и покажем, что $\sigma_{2n+1}\subset W_p^{(r)}(\Lambda_1,\Phi)$. Используя формулу

$$\Lambda_1(T_n^{(r)},\tau)\le\sqrt{2}\,n^r\big(1-\operatorname{sinc}nt\big)^{p/2}dt\cdot\|T_n\|^p.$$

доказанное в [14, с. 230] для произвольного полинома $T_n \in \mathcal{T}_{2n+1}$ при любом $\tau \in (0, 2\pi]$ запишем

$$\int_0^\tau \Lambda_1^p(T_n^{(r)}, t)dt \le 2^{p/2}\, n^{rp} \int_0^\tau \big(1 - \operatorname{sinc} nt\big)^{p/2} dt \cdot \|T_n\|^p.$$

Тогда для произвольного полинома $T_n \in \sigma_{2n+1}$ на основании условия (2.3.13) получаем

$$\int_0^\tau \Lambda_1^p(T_n^{(r)}, t)dt \le 2^{p/2}\, n^{rp} \int_0^\tau \big(1 - \operatorname{sinc} nt\big)^{p/2} dt \times$$

$$\times \frac{1}{2^{p/2}\, n^{rp+1}} \left(\int_0^\pi \big(1 - \operatorname{sinc} t\big)^{p/2} dt \right)^{-1/p} \Phi^p\Big(\frac{\pi}{n}\Big) =$$

$$= \frac{\displaystyle\int_0^{n\tau} \big(1 - \operatorname{sinc} t\big)^{p/2} dt}{\displaystyle\int_0^{\pi} \big(1 - \operatorname{sinc} t\big)^{p/2} dt} \cdot \Phi^p\Big(\frac{\pi}{n}\Big) \le \Phi^p(\tau),$$

где $0 < \tau \le 2\pi$. Следовательно, шар σ_{2n+1} принадлежит классу $W_p^{(r)}(\Lambda_1, \Phi)$. Имея это обстоятельство в виде введём в рассмотрение функцию

$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}\, n^{r-s-1/p}} \left(\int_0^\pi \big(1 - \operatorname{sinc} t\big)^{p/2} dt \right)^{-1/p} \Phi\Big(\frac{\pi}{n}\Big) \cos nx.$$

Для этой функции

$$\|f_1\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2}\, n^{r-s-1/p}} \left(\int_0^\pi \big(1 - \operatorname{sinc} t\big)^{p/2} dt \right)^{-1/p} \Phi\Big(\frac{\pi}{n}\Big),$$

а потому функция f_1 принадлежит шару σ_{2n+1} и, следовательно, классу $W_p^{(r)}(\Lambda_1, \Phi)$. Поскольку для $s = 0, 1, 2, \ldots, r$

$$f_1^{(s)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}\,n^{r-s-1/p}} \left(\int\limits_0^{\pi} \bigl(1 - \operatorname{sinc} t\bigr)^{p/2} dt \right)^{-1/p} \Phi\Bigl(\frac{\pi}{n}\Bigr) \cos\Bigl(nx + \frac{s\pi}{2}\Bigr)$$

и в силу

$$E_{n-1}(f_1^{(s)}) = \frac{1}{\sqrt{2}\,n^{r-s-1/p}} \left(\int\limits_0^{\pi} \bigl(1 - \operatorname{sinc} t\bigr)^{p/2} dt \right)^{-1/p} \Phi\Bigl(\frac{\pi}{n}\Bigr).$$

Пользуясь последним равенством запишем оценок снизу

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}\Bigl(W_p^{(r)}(\Lambda_1, \Phi)\Bigr) \geq E_{n-1}\bigl(f_1^{(s)}\bigr) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\,n^{r-s-1/p}} \left(\int\limits_0^{\pi} \bigl(1 - \operatorname{sinc} t\bigr)^{p/2} dt \right)^{-1/p} \Phi\Bigl(\frac{\pi}{n}\Bigr). \qquad (2.3.18)$$

Требуемое равенство (2.3.14) получаем из сравнении оценок сверху (2.3.17) с оценкой снизу (2.3.18). В [14, стр. 233] доказано, что мажоранта

$$\widetilde{\Phi}(t) := t^{\alpha/p}, \quad \text{где} \;\; \alpha := \frac{\pi}{\displaystyle\int\limits_0^{\pi} \bigl(1 - \operatorname{sinc} t\bigr)^{p/2} dt}, \;\; \bigl(1 + p/2 < \alpha < 1 + p\bigr)$$

удовлетворяет условию (2.3.13). Теорема 2.3.3 доказана.

Пусть $\Psi(h)$, $h \in \mathbb{R}_+$ — непрерывная неубывающая функция такая, что в нуле равна нулю, $\Psi(0) = 0$. Исходя из результата теоремы 2.2.1, символом $\mathcal{F}_{p,m}^{(r)}\bigl(\Psi, \varphi\bigr) := \mathcal{F}_p^{(r)}\bigl(\Lambda_m; \Psi, \varphi\bigr)_2$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < p \leq \infty$, $\varphi(t)$ — весовая на $[0, h]$ функция обозначим множество функций $f(x) \in L_2^{(r)}$, удовлетворяющих при любом $0 < h \leq 3\pi/(4n)$ ограничению

$$\left(\int\limits_0^{h} \Lambda_m^p\bigl(f^{(r)}, t\bigr)_2 \, \varphi(t)\, dt \right)^{1/p} \leq \Psi(h).$$

Таким образом, задача состоит в точном вычислении величины (2.3.1) в случае, когда $\mathfrak{M} \equiv \mathcal{F}_{p,m}^{(r)}\big(\Psi, h\big)_2$.

Справедлива следующая

Теорема 2.3.4. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{R}_+$, $r \geq s$, $\varphi(t)$ — весовая на $(0, h]$ функция. Тогда при любых $m \in \mathbb{N}$ и $h \in (0, 3\pi/(4n)]$ имеет место равенство*

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}\Big(\mathcal{F}_{p,m}^{(r)}(\Psi, \varphi)\Big)_2 :=$$

$$:= 2^{-m/2}\, n^{-(r-s)} \left\{ \int_0^h J_{1,m}^p(n,t)\varphi(t)\, dt \right\}^{-1/p} \Psi(h). \tag{2.3.19}$$

Доказательство. В самом деле, из неравенства (2.2.3) для произвольной функции $f(x) \in L_2^{(r)}$ вытекает

$$E_{n-1}\big(f^{(s)}\big)_2 \leq \frac{1}{2^{m/2} \cdot n^{r-s}} \cdot \frac{\left(\int_0^h \Lambda_m^p(f^{(r)}, t)_2 \varphi(t) dt \right)^{1/p}}{\left(\int_0^h J_{1,m}^p(nt)\varphi(t)\, dt \right)^{1/p}}. \tag{2.3.20}$$

Из (2.3.20) в предположении $f(x) \in \mathcal{F}_{p,m}^{(r)}\big(\Psi, \varphi\big)$ имеем

$$E_{n-1}\big(f^{(s)}\big)_2 \leq \frac{1}{2^{m/2} \cdot n^{r-s}} \cdot \frac{\Psi(h)}{\left(\int_0^h J_{1,m}^p(nt)\varphi(t)\, dt \right)^{1/p}},$$

откуда сразу получаем оценку сверху величины в левой части (2.3.1):

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}\Big(\mathcal{F}_{p,m}^{(r)}(\Psi, \varphi)_2\Big)_2 \leq$$

$$\leq 2^{-m/2} \cdot n^{-(r-s)} \left(\int_0^h J_{1,m}^p(nt)\varphi(t)\, dt \right)^{-1/p} \cdot \Psi(h). \tag{2.3.21}$$

С целью получения аналогичной оценки снизу той же величины вводим в рассмотрение функцию

$$f_1(x) = \frac{1}{2^{m/2}\cdot n^r}\cdot\frac{\Psi(h)\cdot\cos x}{\left(\int\limits_0^h J_{1,m}^p(nt)\varphi(t)\,dt\right)^{1/p}}.$$

Для функции $f_1(x)$, согласно равенством (2.1.36) и правой части определения $\Lambda_m(f^{(r)},t)_2$ в соотношении (2.1.55) запишем:

$$E_{n-1}\big(f_1^{(s)}\big)_2 = \frac{1}{2^{m/2}\cdot n^{r-s}}\cdot\frac{\Psi(h)}{\left(\int\limits_0^h J_{1,m}^p(nt)\varphi(t)\,dt\right)^{1/p}}, \tag{2.3.22}$$

$$\Lambda_m\big(f_1^{(s)},t\big)_2 = \frac{1}{2^{m/2}\cdot n^{r-s}}\cdot\frac{\Psi(h)J_{1,m}(nt)}{\left(\int\limits_0^h J_{1,m}^p(nt)\varphi(t)\,dt\right)^{1/p}},$$

$$\int\limits_0^h \Lambda_m^p\big(f_1^{(s)},t\big)_2\varphi(t)dt = \Psi^p(h). \tag{2.3.23}$$

Равенство (2.3.22) означает, что функция $f_1(x)\in\mathcal{F}_{p,m}^{(r)}(\Psi,\varphi)$. Учитывая это обстоятельство, запишем нужную оценку снизу

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}\Big(\mathcal{F}_{p,m}^{(r)}(\Psi,\varphi)\Big)_2 \geq E_{n-1}\big(f_1^{(s)}\big)_2 =$$

$$= 2^{-m/2}\cdot n^{-(r-s)}\left(\int\limits_0^h J_{1,m}^p(nt)\varphi(t)\,dt\right)^{-1/p}\cdot\Psi(h). \tag{2.3.24}$$

Таким образом доказательство теоремы 2.3.4 завершается сопоставлением оценки сверху (2.3.21) с оценкой снизу (2.3.24).

Из теоремы 2.3.4 вытекает ряд следствий.

Следствие 2.3.1. *Пусть* $m = 1,\ n \in \mathbb{N},\ r, s \in \mathbb{Z}_+,\ r \geq s,\ 0 < h \leq 3\pi/(4n)$, $0 < p \leq \infty$, $\varphi(t)$ *— неотрицательная на* $[0, h]$ *функция. Тогда имеет место равенство*

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}\Big(\mathcal{F}_{p,1}^{(r)}(\Psi,\varphi)\Big)_2 = \frac{n^{-(r-s)}\Psi(h)}{\sqrt{2}\left(\int\limits_0^h (1-\operatorname{sinc} nt)^{p/2}\cdot\varphi(t)\,dt\right)^{1/2}}. \tag{2.3.25}$$

Из (2.3.25), в частности, при $p = 2$, $\varphi(t) \equiv 1$ *получаем*

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}\Big(\mathcal{F}_{2,1}^{(r)}(\Psi,1)\Big)_2 = \left\{\frac{n}{2(nh - S_i(nh))}\right\}^{1/2}\cdot n^{-(r-s)}\Psi(h). \tag{2.3.26}$$

В свою очередь из (2.3.26) при $h = \pi/(2n)$ *имеем*

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}\Big(\mathcal{F}_{2,1}^{(r)}(\Psi,1)\Big)_2 =$$

$$= \frac{\Psi\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)n^{-(r-s)+1/2}}{\sqrt{\pi - 2S_i(\pi/2)}} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{n^{(r-s)-1/2}}\cdot\Psi\left(\frac{\pi}{2n}\right).$$

Следствие 2.3.2. *При выполнении условий теоремы 2.3.4 при* $p = 2$, $\varphi(t) = t$ *имеет место равенство*

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}\Big(\mathcal{F}_{2,1}^{(r)}(\Psi,t)\Big)_2 = n^{-(r-s)}\cdot h^{-1}\left\{1 - \left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-1/2}\Psi(h),$$

из которого, в частности, при $h = \pi/(2n)$ *получаем*

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}\Big(\mathcal{F}_{2,1}^{(r)}(\Psi,t)\Big)_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi^2 - 4}}\cdot\frac{1}{n^{r-s}}\cdot\Psi\left(\frac{\pi}{2n}\right).$$

ГЛАВА 3. Поперечники классов функций в метрике пространства L_2

§ 3.1. Определение поперечников и классов функций

Прежде всего отметим, что изложенные в этой главе результаты полностью опубликованы в работах автора [4-А, 5-А, 10-А, 12-А].

Основной целью исследования настоящей главы является вычисление значения различных поперечников для классов функций, возникающих естественным образом из результатов, полученных в параграфах 2.2 и 2.3.

Прежде чем сформулировать результаты о поперечниках, напомним необходимые понятия и определения, используемые в дальнейшем. Пусть $\mathfrak{N}$ — некоторый класс функций из L_2 и пусть $\Lambda_n \subset L_2$ — некоторое подпространство размерности n. Величину

$$E_n\big(\mathfrak{N}\big) = \sup\big\{E_n(f) : f \in \mathfrak{N}\big\} =$$

$$= \sup\Big\{\inf\big\{\|f-g\| : g \in \Lambda_n\big\} : f \in \mathfrak{N}\Big\} \tag{3.1.1}$$

называют наилучшим приближением класса $\mathfrak{N}$ подпространством $\Lambda_n \subset L_2$ и она характеризует отклонение класса $\mathfrak{N}$ от подпространства Λ_n в метрике пространства L_2. Если обозначить через $\mathcal{L}(L_2, \Lambda_n)$ множество всех линейных непрерывных операторов $A : L_2 \to \Lambda_n$, действующих из L_2 в произвольное заданное подпространство $\Lambda_n \in L_2$ размерности n, то возникает задача: найти величину

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{N}) = \inf\big\{\sup\big\{\|f - Af\| : f \in \mathfrak{N}\big\} : A \in \mathcal{L}(L_2, \Lambda_n)\big\} \tag{3.1.2}$$

и указать оператор $A^* \in \mathcal{L}(L_2, \Lambda_n)$, реализующий точную нижнюю грань

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{N}) = \sup\Big\{\|f - A^* f\| : f \in \mathfrak{N}\Big\}.$$

Если в $\mathcal{L}(L_2, \Lambda_n)$ выделить класс $\mathcal{L}^{\perp}(L_2, \Lambda_n)$ операторов A линейного проектирования на подпространство Λ_n, то есть таких, что $Af = f$ при условии $f \in \Lambda_n$, то принято рассматривать величину

$$\mathcal{E}_n^{\perp}(\mathfrak{N}) = \inf\Big\{\sup\big\{\|f - Af\| : f \in \mathfrak{N}\big\} : A \in \mathcal{L}^{\perp}(L_2, \Lambda_n)\Big\}. \tag{3.1.3}$$

Напомним определения поперечников, значения которых будут вычислены в этой главе для некоторых конкретных классов $\mathfrak{N}$ функций.

Поперечником в смысле А.Н. Колмогорова [95] класса функций $\mathfrak{N}$ называется величина

$$d_n(\mathfrak{N}, L_2) = \inf\big\{E_n(\mathfrak{N}) : \Lambda_n \in L_2\big\} =$$

$$= \inf\Big\{\sup\big\{\inf\{\|f - g\| : g \in \Lambda_n\} : f \in \mathfrak{N}\big\} : \Lambda_n \in L_2\Big\}, \tag{3.1.4}$$

где нижняя грань рассматривается сначала по всем функциям $g(x)$, принадлежащим n-мерному подпространству $\Lambda_n \subset L_2$, а затем по всем подпространствам заданной размерности n.

Если исходить из наилучшего линейного приближения $\mathcal{E}_n(\mathfrak{N})$, то величину

$$\delta_n(\mathfrak{N}, L_2) = \inf\{\mathcal{E}_n(\mathfrak{N}) : \Lambda_n \in L_2\} =$$

$$= \inf\Big\{\inf\{\sup\{\|f - Af\| : f \in \mathfrak{N}\} : A \in \mathcal{L}(L_{2,\rho}, \Lambda_n)\} : \Lambda_n \in L_2\Big\}. \tag{3.1.5}$$

называют линейным поперечником. Рассматривают также проекционный поперечник

$$\Pi_n(\mathfrak{N}, L_2) =$$

$$= \inf \Big\{ \inf \big\{ \sup\{\|f - Af\| : f \in \mathfrak{N}\} : A \in \mathcal{L}^{\perp}(L_2, \Lambda_n)\big\} : \Lambda_n \in L_2 \Big\}.$$

Величина

$$d^n(\mathfrak{N}, L_2) = \inf \big\{ \sup\{\|f\| : f \in \mathfrak{N} \cap L_n\} : \Lambda^n \subset L_2 \big\}, \tag{3.1.6}$$

где inf берется по всем подпространствам Λ^n коразмерности n, называется n-поперечником по Гельфанду.

Пусть S — единичный шар в L_2. Величина

$$b_n(\mathfrak{N}, L_2) = \sup\{\sup\{\mathfrak{N} \cap \Lambda_{n+1} \supset \varepsilon s \cap \Lambda_{n+1} : \varepsilon > 0\} : \Lambda_{n+1} \subset L_2\} \tag{3.1.7}$$

называется n-поперечником по Бернштейну. Отметим свойства монотонности поперечников, которые сразу вытекают из их определений.

Пусть $p_n(\cdot)$ — любой из вышеуказанных поперечников. Тогда имеют места следующие неравенства:

а) $p_n(\mathfrak{N}, L_2) \geq p_{n+1}(\mathfrak{N}, L_2)$ — монотонность по n;

б) $p_n(\mathfrak{M}, L_2) \leq p_n(\mathfrak{N}, L_2)$, если $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}$.

Так как подпространство L_2 является гильбертовым, то имеет место соотношение

$$b_n\big(\mathfrak{N}, L_2\big) \leq d^n\big(\mathfrak{N}, L_2\big) \leq d_n\big(\mathfrak{N}, L_2\big) = \delta_n\big(\mathfrak{N}, L_2\big) = \Pi_n\big(\mathfrak{N}, L_2\big). \tag{3.1.8}$$

Первое неравенство $b_n(\mathfrak{N}, X) \leq d^n(\mathfrak{N}, X)$ справедливо для любого банахова пространства X, и его можно найти в монографии А. Пинкуса [98, с.19], а все остальные в книге В.М. Тихомирова [62, с.239]. При вычислении поперечников в любом банаховом пространстве X весьма важным является следующая фундаментальная

Теорема В.М. Тихомирова [62]. *Пусть* $p_n(\mathfrak{N}, X)$ — *любой из перечисленных выше поперечников класса* $\mathfrak{N}$ *в пространстве* X *и пусть* $d_{2n-1}(\mathfrak{N}, X) \le R$. *Если шар* $S_{2n+1} = \{x : \|x\|_X \le R\}$ *размерности не меньше* $2n+1$ *содержится в классе* $\mathfrak{N}$, $S_{2n+1} \subset \mathfrak{N}$, *то при* $\mathbb{N} = 2n-1$ *и* $\mathbb{N} = 2n$, $b_{2n-1}(\mathfrak{N}, X) \ge b_{2n}(\mathfrak{N}, X) \ge b_{2n}(S_{2n+1}, X) \ge R$, *а потому* $p_{2n-1}(\mathfrak{N}, X) = p_{2n}(\mathfrak{N}, X) = R$.

Отметим, что вычислению в пространстве L_2 точных значений n-поперечников классов 2π-периодических дифференцируемых функций, задаваемых различными характеристиками гладкости, посвящено достаточно много работ (см., например, [16] и приведенную там литературу). Все полученные точные значения n-поперечников ниже рассматриваемых классов функций в этой главе основываются на фундаментальной теореме Тихомирова, формулировка которой приведена выше.

Приводим теперь определение классов функций, возникающих при решении задач в параграфах 2.1 и 2.2.

Пользуясь определением характеристики гладкости (2.1.46), введем в рассмотрение следующий класс функций.

Пусть $\Phi(t)$ $(0 \le t \le 2\pi)$ — непрерывная возрастающая функция, такая, что $\Phi(0) = 0$. Такая функция называется мажорантой. Символом $W_p^{(r)}(\varphi; \Phi) := W_p^{(r)}(\Lambda_1, \varphi; \Phi)$ обозначим класс функций $f(x) \in L_2^{(r)}$, у которых производные r-го порядка $f^{(r)}(x)$ при любых $0 < p \le \infty, r \in \mathbb{Z}_+$ и $h \in (0, 2\pi]$ удовлетворяют условию

$$\int_0^h \Lambda_1^p(f^{(r)},t)_2\ \varphi(t)\,dt \le \Phi^p(h).$$

Справедлива следующая

Теорема 3.1.1. *Пусть* $0 < p \le \infty,\ r \in \mathbb{Z}_+,\ \varphi^*(t) = t$. *Если для любых* $h \in (0, 2\pi]$ *и* $n \in \mathbb{N}$ *мажоранта* Φ *удовлетворяет условию*

$$\frac{\Phi^p(h)}{\Phi^p(\pi/n)} \ge \frac{\displaystyle\int_0^{nh} t\left(1-\operatorname{sinc} t\right)^{p/2}dt}{\displaystyle\int_0^{\pi} t\left(1-\operatorname{sinc} t\right)^{p/2}dt}, \tag{3.1.9}$$

то имеют место равенства

$$\lambda_{2n}\Big(W_p^{(r)}\big(\varphi^*,\Phi\big);L_2\Big)=\lambda_{2n-1}\Big(W_p^{(r)}\big(\varphi^*,\Phi\big);L_2\Big)=E_{n-1}\Big(W_p^{(r)}\big(\varphi^*,\Phi\big)\Big)_2=$$

$$=\frac{n^{2/p-r}}{\sqrt{2}}\cdot\left\{\int_0^{\pi} t\left(1-\operatorname{sinc} t\right)^{p/2}dt\right\}^{-1/p}\Phi\Big(\frac{\pi}{n}\Big), \tag{3.1.10}$$

где $\lambda_n(\cdot)$ *— любой из* n*-поперечников* $b_n(\cdot),\ d_n(\cdot),\ d^n(\cdot),\ \delta_n(\cdot)$ *и* $\Pi_n(\cdot)$, *а*

$$E_{n-1}(\mathfrak{M}) := \sup\big\{E_{n-1}(f) : f \in \mathfrak{M}\big\}.$$

Доказательство. Из неравенства (2.1.71) для произвольной функции $f \in W_p^{(r)}(\varphi^*,\Phi)$, полагая $h = \pi/n$, запишем оценку сверху величины её наилучшего приближения на всем классе функций:

$$E_{n-1}\Big(W_p^{(r)}\big(\varphi^*,\Phi\big)\Big)_2=\sup\Big\{E_{n-1}(f)_2 : f \in W_p^{(r)}\big(\varphi^*,\Phi\big)\Big\}\le$$

$$\le\frac{n^{2/p-r}}{\sqrt{2}}\cdot\left\{\int_0^{\pi} t\left(1-\operatorname{sinc} t\right)^{p/2}dt\right\}^{-1/p}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right). \tag{3.1.11}$$

Отсюда, учитывая соотношения (3.1.8), запишем

$$\lambda_{2n}\Big(W_p^{(r)}\big(\varphi^*,\Phi\big);L_2\Big)\le\lambda_{2n-1}\Big(W_p^{(r)}\big(\varphi^*,\Phi\big);L_2\Big)\le$$

$$\le E_{n-1}\Big(W_p^{(r)}\big(\varphi^*,\Phi\big)\Big)_2\le\frac{n^{2/p-r}}{\sqrt{2}}\left\{\int\limits_0^{\pi}t\big(1-\operatorname{sinc}t\big)^{p/2}dt\right\}^{-1/2}\cdot\Phi\Big(\frac{\pi}{n}\Big).\quad(3.1.12)$$

С целью получения оценок снизу указанных n-поперечников в подпространстве тригонометрических полиномов $\mathcal{T}_{2n+1}$ рассмотрим шар

$$S_{2n+1}:=$$

$$=\left\{T_n\in\mathcal{T}_{2n+1}:\|T_n\|_2\le\frac{n^{2/p-r}}{\sqrt{2}}\left(\int\limits_0^{\pi}t\big(1-\operatorname{sinc}t\big)^{p/2}dt\right)^{-1/p}\cdot\Phi\Big(\frac{\pi}{n}\Big)\right\}$$

и покажем справедливость включения $S_{2n+1}\subset W_p^{(r)}(\varphi^*,\Phi)$. В самом деле, пусть T_n — произвольный полином из S_{2n+1}. Используя левую часть формулы (2.1.69) для $0<nt\le\pi$, запишем

$$\Lambda_1\big(T_n^{(r)},t\big)_2=2\sum_{k=1}^{n}k^{2r}\rho_k^2(T_n)(1-\operatorname{sinc}kt)\le$$

$$\le 2n^{2r}(1-\operatorname{sinc}nt)\sum_{k=1}^{n}\rho_k^2(T_n)=2n^{2r}(1-\operatorname{sinc}nt)\cdot\big\|T_n\big\|_2^2,$$

откуда, учитывая условия (3.1.9), при любых $r\in\mathbb{Z}_+,0<p\le\infty$ и $h\in(0,2\pi]$ получаем

$$\left(\int\limits_0^{h}t\,\Lambda_1^p\big(T_n^{(r)},t\big)_2dt\right)^{1/p}\le$$

$$\leq \sqrt{2}\cdot n^r\|T_n\|_2\cdot\left(\int\limits_0^h t\left(1-\operatorname{sinc} nt\right)^{p/2}dt\right)^{1/p}=$$

$$=\sqrt{2}\cdot n^{r-2/p}\cdot\|T_n\|_2\left(\int\limits_0^h t\left(1-\operatorname{sinc} nt\right)^{p/2}dt\right)^{1/p}=$$

$$=\left(\int\limits_0^{nh} t\left(1-\operatorname{sinc} t\right)^{p/2}dt\right)^{1/p}\left(\int\limits_0^{\pi} t\left(1-\operatorname{sinc} t\right)^{p/2}dt\right)^{-1/p}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)\leq\Phi(h).$$

Следовательно, шар S_{2n+1} принадлежит классу $W_p^{(r)}\left(\varphi^*,\Phi\right)$. Учитывая формулу (3.1.9) и определение бернштейновского n-поперечника, запишем оценку снизу рассматриваемых экстремальных величин

$$\lambda_{2n-1}\Big(W_p^{(r)}(\varphi^*,\Phi);L_2\Big)\geq\lambda_{2n}\Big(W_p^{(r)}(\varphi^*,\Phi);L_2\Big)\geq$$

$$\geq b_{2n}\Big(W_p^{(r)}(\varphi^*,\Phi);L_2\Big)\geq b_{2n}\big(S_{2n+1};L_2\big)\geq$$

$$\geq\frac{n^{2/p-r}}{\sqrt{2}}\cdot\left\{\int\limits_0^{\pi} t\left(1-\operatorname{sinc} t\right)^{p/2}dt\right\}^{-1/p}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right).\qquad(3.1.13)$$

Сопоставляя оценки сверху (3.1.12) с оценками снизу (3.1.13), получаем требуемое равенство (3.1.10). Легко показать, что множество мажорант, удовлетворяющих условию (3.1.9), не пусто. Как следует из схемы рассуждений теоремы 6 работы [16, с.232] условию (3.1.9) удовлетворяет, например, функция $\Phi^*(t):=t^{\alpha/p}$, где

$$\alpha := \frac{\pi^2}{\int\limits_0^\pi t(1-\operatorname{sinc} t)^{p/2} d\tau}. \tag{3.1.14}$$

Для функции $\Phi^*(t)$ условие (3.1.9) имеет следующий вид:

$$\left(\frac{nh}{\pi}\right)^\alpha \geq \frac{\int\limits_0^{nh} t\left(1-\operatorname{sinc} t\right)^{p/2} dt}{\int\limits_0^\pi t\left(1-\operatorname{sinc} t\right)^{p/2} dt}. \tag{3.1.15}$$

Полагая $u := nh$, где $0 \leq u < \infty$, и используя формулу (3.1.14), из (3.1.15) получаем неравенство

$$u^\alpha \geq \alpha \pi^{\alpha-2} \int\limits_0^u t(1-\operatorname{sinc} t)^{p/2} dt, \tag{3.1.16}$$

которое ещё требуется доказать. Сначала найдём границы изменения величины α, то есть вычислим оценки сверху и снизу числа α. При получении оценки сверху воспользуемся неравенством

$$1-\operatorname{sinc} t > \left(\frac{t}{\pi}\right)^2, \tag{3.1.17}$$

где $0 < t < \pi$, доказательство которого приведено в [16, с. 234]. Используя неравенство (3.1.17), из (3.1.14) имеем

$$\alpha := \frac{\pi^2}{\int\limits_0^\pi t\,(1-\operatorname{sinc} t)^{p/2}} < \frac{\pi^2}{\int\limits_0^\pi t\,\left(\frac{t}{\pi}\right)^p dt} = \frac{1}{\int\limits_0^1 t^{p+1} dt} = p+2. \tag{3.1.18}$$

С другой стороны, из геометрических соображений очевидно, что для любого $t \in (0, \pi)$ выполняется неравенство $\operatorname{sinc} t > 1 - t/\pi$, а потому из соотношения

(3.1.14) получаем обратное неравенство

$$\alpha > \frac{\pi^2}{\int\limits_0^\pi t \left(\frac{t}{\pi}\right)^{p/2} dt} = 2 + \frac{p}{2}. \tag{3.1.19}$$

Из неравенство (3.1.18) и (3.1.19) следует, что при любом $p \in (0, +\infty]$ число α имеет следующие границы значений:

$$2 + \frac{p}{2} < \alpha < 2 + p. \tag{3.1.20}$$

Исходя из формулы (3.1.16) рассмотрим вспомогательную функцию

$$\varphi(u) := u^\alpha - \alpha\pi^{\alpha-2} \int\limits_0^u t\,(1 - \operatorname{sinc} t)^{p/2} dt \tag{3.1.21}$$

и докажем, что на положительной полуоси $0 \leq u < \infty$ она является неотрицательной. Рассуждения приведём для трёх случаев в зависимости от изменения переменной u:

а) $u \in [0, 2\pi]$;

б) $u \in [\pi, 2\pi]$;

в) $u \in [2\pi, +\infty]$.

а) Пусть $u \in [0, 2\pi]$. Поскольку при $t \in [0, \pi]$ имеет место неравенство $\sin t > t - t^3/6$, то из (3.1.21) следует, что

$$\varphi(u) \geq u^\alpha - \alpha\pi^{\alpha-2} \int\limits_0^u t(t^2/6)^{p/2} dt = u^\alpha \left(1 - \frac{\alpha\pi^{\alpha-2}}{6^{\,p/2}} \cdot u^{p+2-\alpha}\right). \tag{3.1.22}$$

Из формул (3.1.20) и (3.1.22) следует, что при $u \to 0 + 0$ функция $\varphi(u)$ принимает лишь положительные значения.

Покажем, что на всём интервале $(0,\pi)$ функция $\varphi(u)$ является положительной. С этой целью применим метод рассуждения от противного, предполагая, что существует некоторая точка $\eta \in (0,\pi)$, при переходе аргумента u через которую функция $\varphi(u)$ меняет свой знак. Учитывая равенство (3.1.14), из соотношения (3.1.21) получаем $\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0$. Отсюда, в силу теоремы Ролля следует, что производная первого порядка

$$\varphi^{'}(u) = \alpha\, u^{\alpha-1} - \alpha\pi^{\alpha-2}\cdot u\,(1-\operatorname{sinc} u)^{p/2} =$$

$$= \alpha\,\pi^{\alpha-2}\cdot u\,\left(\left(\frac{u}{\pi}\right)^{\alpha-2} - (1-\operatorname{sinc} t)^{p/2}\right) \tag{3.1.23}$$

должна иметь на интервале $(0,\pi)$ не менее двух различных нулей. Из (3.1.23) следует, что столько различных нулей на $(0,\pi)$ и в тех же точках должна иметь функция

$$\varphi_1(u) = \left(\frac{u}{\pi}\right)^{(\alpha-2)2/p} - 1 + \operatorname{sinc} u\,. \tag{3.1.24}$$

Из формулы (3.1.24) получаем $\varphi_1(0) = \varphi_1(\pi) = 0$, а потому функция $\varphi_1(u)$ должна иметь на отрезке $[0,\pi]$ не менее четырёх различных нулей. Представляем функцию $\varphi_1(u)$ в виде

$$\varphi_1(u) = \frac{\varphi_2(u)}{u},$$

где

$$\varphi_2(u) = \pi^{(2-\alpha)2/p}\, u^{1+(\alpha-2)2/p} - u + \sin u. \tag{3.1.25}$$

Из сказанного выше следует, что в силу представления (3.1.25) функция $\varphi_2(u)$ на отрезке $[0,\pi]$ также должна иметь не менее четырёх различных нулей. На

основании теоремы Ролля заключаем, что производная первого порядка

$$\varphi_2^{'}(u) = \pi^{(2-\alpha)2/p}\Big(1 + (\alpha-2)2/p\Big)u^{(\alpha-2)2/p} - 1 + \cos u \qquad (3.1.26)$$

должна обращаться в нуль на интервале $(0,\pi)$ не менее чем в трёх различных точках. Так как $\varphi^{'}(0) = 0$, то на основании той же теоремы Ролля производная второго порядка

$$\varphi_2^{''}(u) = \pi^{(2-\alpha)2/p}\Big(1 + (\alpha-2)2/p\Big)(\alpha-2)2/p\, u^{(\alpha-2)2/p-1} - \sin u \qquad (3.1.27)$$

должна иметь на $(0,\pi)$ не менее трёх различных нулей. Учитывая левую часть неравенства (3.1.20), из соотношения (3.1.27) получаем $\varphi_2^{''}(0) = 0$. Это значит, что производная третьего порядка

$$\varphi_2^{'''}(u) = \pi^{(2-\alpha)2/p}\Big(1 + (\alpha-2)2/p\Big)\times$$

$$\times(\alpha-2)2/p((\alpha-2)2/p-1)\, u^{(\alpha-2)2/p-2} - \cos u \qquad (3.1.28)$$

должна обращаться в нуль на $(0,\pi)$ не менее чем в трёх различных точках. На основании неравенства (3.1.28) получаем, что функция $u^{(\alpha-2)2/p-2}$ является положительной выпуклой вниз и монотонно убывающей на $(0,\pi)$. Учитывая поведение функции $\cos u$ на этом же интервале, заключаем, что на основании формулы (3.1.28) функция $\varphi_2^{'''}(u)$ может иметь на интервале $(0,\pi)$ не больше двух различных нулей. Полученное противоречие доказывает справедливость неравенства (3.1.16) в случае а).

Рассмотрим теперь случай б). Из формулы (3.1.27) следует, что на отрезке $[\pi, 2\pi]$ функция $\varphi_2^{''}(u)$ принимает только положительные значения, то есть

$\varphi_2^{'}(u)$ является монотонно возрастающей на $[\pi, 2\pi]$ функцией. Используя формулу (3.1.19), из соотношения (3.1.26) получаем

$$\varphi_2^{'}(\pi) = \frac{2}{p}(\alpha - 2) - 1 > 0.$$

Следовательно, $\varphi_2^{'}(u) > 0$ для любого $u \in [\pi, 2\pi]$, что означает монотонно возрастание функции $\varphi_2(u)$ на указанном множестве точек из $[\pi, 2\pi]$. Так как $\varphi_2(\pi) = 0$, то при значении $u \in (\pi, 2\pi]$ имеем $\varphi_2(u) > 0$. Но это означает, что на основании формул (3.1.23) – (3.1.25) при всех $u \in (\pi, 2\pi]$ $\varphi^{'}(u) > 0$ и так как $\varphi(\pi) = 0$, то функция $\varphi(u)$ является положительной монотонно возрастающей функцией на полуинтервале $(\pi, 2\pi]$, а это в силу (3.1.21) означает выполнение неравенства (3.1.16) в случае б).

Рассмотрим случай в). Анализируя функцию (3.1.16) и учитывая неравенство (3.1.19), для любого значения $u \in [2\pi, +\infty)$ получаем оценку производной $\varphi_2^{'}(u)$ снизу

$$\varphi_2^{'}(u) \geq \pi^{(2-\alpha)2/p}\Big(1 + \frac{2}{p}(\alpha - 2)\Big) \min_{2\pi \leq u < \infty} u^{(\alpha-2)2/p} - 1 + \min_{2\pi \leq u < \infty} \cos u =$$

$$= 2\left\{2^{(\alpha-2)2/p-1}\Big(1 + (\alpha - 2)2/p\Big) - 1\right\} > 2.$$

Полученное неравенство означает, что $\varphi_2^{'}(u)$ принимает положительные значения на множестве $[2\pi, \infty)$, то есть функция $\varphi_2(u)$ является монотонно возрастающей. Поскольку, как следует из формул (3.1.19) и (3.1.25),

$$\varphi_2(2\pi) = 2\pi\Big(2^{(\alpha-2)2/p} - 1\Big) > 0,$$

то производная $\varphi'(u)$, в силу (3.1.23) – (3.1.25), принимает только положительные значения на множестве точек из $[2\pi,\infty)$, то есть функция $\varphi(u)$ является монотонно возрастающей. Исследование пункта б) показывает, что $\varphi(2\pi)>0$, то есть $\varphi(u)>0$ для произвольного $u\in[2\pi,\infty)$ и неравенство (3.1.16) имеет место также в случае в). Теорема 3.1.1 полностью доказана.

По аналогичной схеме доказывается следующая

Теорема 3.1.2. *Пусть* $0<p\le\infty$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $\varphi^{**}(t)\equiv 1$. *Если для любых* $h\in(0,2\pi]$ *и* $n\in\mathbb{N}$ *мажоранта* Φ *удовлетворяет условию*

$$\frac{\Phi^p(h)}{\Phi^p(\pi/n)}\ge\frac{\int\limits_0^{nh}\bigl(1-\operatorname{sinc}t\bigr)^{p/2}\,dt}{\int\limits_0^{\pi}\bigl(1-\operatorname{sinc}t\bigr)^{p/2}\,dt}\,, \tag{3.1.29}$$

то имеют место равенства

$$\lambda_{2n}\Bigl(W_p^{(r)}\bigl(\varphi^{**},\Phi\bigr);L_2\Bigr)=\lambda_{2n-1}\Bigl(W_p^{(r)}\bigl(\varphi^{**},\Phi\bigr);L_2\Bigr)=$$

$$=E_{n-1}\Bigl(W_p^{(r)}\bigl(\varphi^{**},\Phi\bigr)\Bigr)_2=\frac{n^{1/p-r}}{\sqrt{2}}\cdot\left\{\int\limits_0^{\pi}\bigl(1-\operatorname{sinc}t\bigr)^{p/2}dt\right\}^{-1/p}\Phi\Bigl(\frac{\pi}{n}\Bigr), \tag{3.1.30}$$

где $\lambda_n(\cdot)$ *— любой из* n*-поперечников* $b_n(\cdot)$, $d_n(\cdot)$, $d^n(\cdot)$, $\delta_n(\cdot)$ *и* $\Pi_n(\cdot)$.

Следует отметить, что теорема 3.1.2 для случая $0<p\le 2$ была доказана С.Б.Вакарчуком и В.И.Забутной [16], а на случая $0<p\le\infty$ распространяется по схеме доказательства предыдущей теоремы 3.1.1.

§ 3.2. Точные значения n-поперечников классов $W_p^{(r)}(\Lambda_m, \varphi; h)$

Пусть $n, m \in \mathbb{N},\ r \in \mathbb{Z}_+,\ h \in (0, 3\pi/(4n)]$, $0 < p \le \infty$, φ – весовая на отрезке $[0, h]$ функция. Символом $W_p^{(r)}(\Lambda_m, \varphi; h)$ $(W_p^{(0)}(\Lambda_m, \varphi; h) := W_p(\Lambda_m, \varphi; h))$ обозначим класс функций $f \in L_2^{(r)}$, у которых производные r-го порядка $f^{(r)}$ удовлетворяют условию

$$\int_0^h \Lambda_m^p(f^{(r)}, t)_2\, \varphi(t)dt \le \int_0^h \varphi(t)dt.$$

Теорема 3.2.1. *Пусть $n, m \in \mathbb{N},\ r \in \mathbb{Z}_+, 0 < p \le \infty$ и $0 < h \le 3\pi/(4n)$. Тогда имеют место равенства*

$$\lambda_{2n}\left(W_p^{(r)}(\Lambda_m, \varphi; h), L_2\right) = \lambda_{2n-1}\left(W_p^{(r)}(\Lambda_m, \varphi; h), L_2\right) =$$

$$= E_{n-1}\left(W_p^{(r)}(\Lambda_m, \varphi; h)\right)_2 = \frac{1}{2^{m/2}\, n^r}\left\{\frac{\int_0^h \varphi(t)dt}{\int_0^h J_{1,m}^p(nt)\, \varphi(t)dt}\right\}^{1/p}, \qquad (3.2.1)$$

где функция $J_{1,m}(\cdot)$ — определяется формулой (2.1.51), а $\lambda_n(\cdot)$ — любой из вышеперечисленных поперечников.

Доказательство. Используя неравенство (2.2.3) для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$, получаем

$$E_{n-1}(f)_2 \le \frac{1}{2^{m/2}\, n^r} \cdot \frac{\left(\int_0^h \Lambda_m^p(f^{(r)}, t)_2\, \varphi(t)dt\right)^{1/p}}{\left(\int_0^h J_{1,m}^p(nt)\varphi(t)dt\right)^{1/p}}. \qquad (3.2.2)$$

Отсюда, учитывая соотношение (3.1.8) между n-поперечниками и определение класса $W_p^{(r)}(\Lambda_m, \varphi; h)$, запишем

$$\lambda_{2n}\left(W_p^{(r)}(\Lambda_m,\varphi;h), L_2\right) \le \lambda_{2n-1}\left(W_p^{(r)}(\Lambda_m,\varphi;h), L_2\right) \le$$

$$\le d_{2n-1}\left(W_p^{(r)}(\Lambda_m,\varphi;h), L_2\right) \le E_{n-1}\left(W_p^{(r)}(\Lambda_m,\varphi;h)\right)_2 \le$$

$$\le \frac{1}{2^{m/2}\, n^r}\left\{\frac{\int\limits_0^h \varphi(t)dt}{\int\limits_0^h J_{1,m}^p(nt)\varphi(t)dt}\right\}^{1/p}. \tag{3.2.3}$$

Для получения аналогичных оценок снизу рассматриваемых n-поперечников на множестве $\mathcal{T}_{2n-1} \cap L_2$ рассмотрим шар

$$\tilde{S}_{2n+1} := \left\{ T_n \in \mathcal{T}_{2n-1} : \|T_n\|_2 \le \frac{1}{2^{m/2} n^r}\left(\frac{\int\limits_0^h \varphi(t)dt}{\int\limits_0^h J_{1,m}^p(nt)\varphi(t)dt}\right)^{1/p} \right\}.$$

Из равенства

$$\Lambda_m^2\left(f^{(r)}, t\right)_2 = 2^m \sum_{k=1}^{\infty} k^{2r}\rho_k^2(f) J_{1,m}^2(kt),$$

легко вытекающего из (2.1.46) и (2.1.52), для любого $T_n \subset \mathcal{T}_{2n-1} \cap L_2$ получаем

$$\Lambda_m^2\left(T_n^{(r)}, t\right)_2 = 2^m \sum_{k=1}^{n} k^{2r}\rho_k^2(T_n) J_{1,m}^2(kt) \le$$

$$\leq 2^m \max_{1\leq k\leq n}\left\{k^{2r}J_{1,m}^2(kt)\right\}\cdot\sum_{k=1}^{n}\rho_k^2(T_n) = 2^m n^{2r}J_{1,m}^2(nt)\cdot\|T_n\|_2^2. \qquad (3.2.4)$$

Возведя обе части неравенства (3.2.4) в степень $p/2$ $(0 < p \leq \infty)$, затем умножая на весовую функцию φ и интегрируя по переменной t в пределах от 0 до h $(0 < h \leq 3\pi/(4n)]$, получаем

$$\int_0^h \Lambda_m^p\left(T_n^{(r)},t\right)_2\varphi(t)dt \leq 2^{mp/2}n^{rp}\cdot\|T_n\|_2^p\cdot\int_0^h J_{1,m}^p(nt)\varphi(t)dt.$$

Отсюда для произвольного полинома $T_n \in \tilde{S}_{2n+1}$ имеем

$$\int_0^h \Lambda_m^p\left(T_n^{(r)},t\right)_2\varphi(t)dt \leq \int_0^h \varphi(t)dt.$$

Этим включение $\tilde{S}_{2n+1} \subset W_p^{(r)}(\Lambda_m,\varphi;h)$ доказано. Используя определение бернштейновского n-поперечника, запишем оценки снизу рассматриваемых n-поперечников

$$\lambda_{2n}\left(W_p^{(r)}(\Lambda_m,\varphi;h),L_2\right) \geq b_{2n}\left(W_p^{(r)}(\Lambda_m,\varphi;h),L_2\right) \geq$$

$$\geq b_{2n}\left(\tilde{S}_{2n+1},L_2\right) \geq \frac{1}{2^{m/2}\,n^r}\left\{\frac{\int_0^h \varphi(t)dt}{\int_0^h J_{1,m}^p(nt)\varphi(t)dt}\right\}^{1/p}. \qquad (3.2.5)$$

Требуемые равенства (3.2.1) получаем из соотношений (3.2.3) и (3.2.5), чем и завершаем доказательство теоремы 3.2.1.

§ 3.3. Оценка модулей коэффициентов Фурье на классах функций

В теории приближения функций определённый интерес представляет вычисление точных значений модулей косинус- и синус-коэффициентов Фурье на различных классах функций (см., например, цитированную литературу в [16]). Доказанные в предыдующих пунктах теоремы 3.1.1, 3.1.2 и 3.2.1 обеспечивают возможность решать аналогичную задачу на рассмотренных нами классах функций. Полученные результаты сформулируем в виде следствий указанных теорем.

Следствие 3.3.1. *Пусть выполнены все условия теоремы 3.1.1. Тогда для произвольного $n \in \mathbb{N}$ и $r \in \mathbb{Z}_+$ имеют место равенства*

$$\sup\left\{ |a_n(f)| : f \in W_p^{(r)}(\varphi^*, \Phi) \right\} =$$

$$= \sup\left\{ |b_n(f)| : f \in W_p^{(r)}(\varphi^*, \Phi) \right\} =$$

$$= \frac{n^{2/p-r}}{\sqrt{2}} \left\{ \int_0^{\pi} t\,(1 - \operatorname{sinc} t)^{p/2} dt \right\}^{-1/p} \Phi\Big(\frac{\pi}{n}\Big), \tag{3.3.1}$$

где $a_n(\cdot)$ и $b_n(\cdot)$ соответственно косинус- и синус-коэффициенты Фурье.

Доказательство. Представим коэффициент $b_n(f)$ в следующем виде

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos n\Big(t + \frac{\pi}{2n}\Big) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f\Big(t - \frac{\pi}{2n}\Big) \cos nt dt$$

и так как сдвиг по аргументу не выводит функцию f из класса $W_p^{(r)}(\varphi^*, \Phi)$, то

очевидно, что

$$\sup\left\{|a_n(f)| : f \in W_p^{(r)}(\varphi^*, \Phi)\right\} = \sup\left\{|b_n(f)| : f \in W_p^{(r)}(\varphi^*, \Phi)\right\}.$$

Следовательно, достаточно рассмотреть одну из них. Докажем равенство (3.3.1) для косинус-коэффициентов Фурье $a_n(f)$. Так как

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)\cos ntdt = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\Big(f(t) - S_{n-1}(f,t)\Big)\cos ntdt, \tag{3.3.2}$$

где $S_{n-1}(f)$ — частная сумма $(n-1)$-го порядка функции $f \in W_p^{(r)}(\varphi^*, \Phi)$, то, применяя неравенство Коши-Буняковского с учётом равенства (2.1.23), из (3.3.2) получаем

$$|a_n(f)| \le \big\|f - S_{n-1}(f)\big\|_2 = E_{n-1}(f)_2.$$

Переходя в обеих частях полученного неравенства к верхним граням по всем функциям из рассматриваемого класса и учитывая соотношения (3.1.13), получаем оценку сверху

$$\sup\left\{|a_n(f)| : f \in W_p^{(r)}(\varphi^*, \Phi)\right\} \le E_{n-1}\left(W_p^{(r)}(\varphi^*, \Phi)\right)_2 =$$

$$= \frac{n^{2/p-r}}{\sqrt{2}}\left\{\int\limits_0^{\pi} t\,(1-\operatorname{sinc} t)^{p/2}dt\right\}^{1/p}\Phi\Big(\frac{\pi}{n}\Big). \tag{3.3.3}$$

Для получения аналогичной оценки снизу воспользуемся функцией

$$f_2(x) = \frac{n^{2/p-r}}{\sqrt{2}}\left\{\int\limits_0^{\pi} t(1-\operatorname{sinc} t)^{p/2}dt\right\}^{1/p}\Phi\Big(\frac{\pi}{n}\Big)\cos nx,$$

которая, как легко проверить, принадлежит шару S_{2n+1}, введенному при доказательстве теоремы 3.1.1. Поскольку $S_{2n+1} \subset W_p^{(r)}(\varphi^*, \Phi)$, то f_2 также принадлежит этому классу, а потому

$$\sup\left\{|a_n(f)| : f \in W_p^{(r)}(\varphi^*, \Phi)\right\} \geq |a_n(f_2)| =$$

$$= \frac{n^{2/p-r}}{\sqrt{2}} \left\{\int_0^\pi t\,(1-\operatorname{sinc} t)^{p/2} dt\right\}^{1/p} \Phi\Big(\frac{\pi}{n}\Big). \tag{3.3.4}$$

Требуемое равенство (3.3.1) получаем из сопоставления неравенств (3.3.3) и (3.3.4), откуда и следует утверждение следствия 3.3.1.

Следствие 3.3.2. *Пусть выполнены все условия теоремы 3.1.2. Тогда для произвольного $n \in \mathbb{N}$ имеют место равенства*

$$\sup\left\{|a_n(f)| : f \in W_p^{(r)}(\varphi^{**}, \Phi)\right\} =$$

$$= \sup\left\{|b_n(f)| : f \in W_p^{(r)}(\varphi^{**}, \Phi)\right\} =$$

$$= \frac{n^{1/p-r}}{\sqrt{2}} \left\{\int_0^\pi (1-\operatorname{sinc} t)^{p/2} dt\right\}^{-1/p} \Phi\Big(\frac{\pi}{n}\Big). \tag{3.3.5}$$

Следствие 3.3.3. *Пусть выполнены условия теоремы 3.2.1. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ имеют место равенства*

$$\sup\left\{|a_n(f)| : f \in W_p^{(r)}(\Lambda_m, \varphi; h)\right\} =$$

$$= \sup\left\{|b_n(f)| : f \in W_p^{(r)}(\Lambda_m, \varphi; h)\right\} =$$

$$= \frac{1}{2^{m/2}\, n^r} \left\{ \frac{\int_0^h \varphi(t)dt}{\int_0^h J_{1,m}^p(nt)\varphi(t)dt} \right\}^{1/p} . \qquad (3.3.6)$$

Доказательство следствия 3.3.2 и 3.3.3 не приводится, поскольку оба доказательства повторяют схему доказательства следствия 3.3.1.

Обсуждение полученных результатов

В последнее время при решении ряда задач теории аппроксимации функций действительного переменного часто принимают различные модификации классического модуля непрерывности. Так, например, в монографии Z.Ditzian и V.Totik [94], Б.Сендова и В.Попова [51] рассматриваются различные усреднённые модули непрерывности и гладкости различных порядков. Во многих случаях введение таких модификаций продиктовано спецификой рассматриваемых задач и позволяют получить новые содержательные результаты на основе которых удаётся полностью определить как структурных свойств, так и конструктивных свойств функций. Так, например, для определения эффективных характеристик гладкости функций в работах К.Руновский [49], Н.А.Пустовойтова [48], В.А.Абилова и Ф.В.Абилова [1], С.Б.Вакарчука [8–10], М.Ш.Шабозова, С.Б.Вакарчука, В.И.Забутная [74], С.Б.Вакарчука, В.И.Забутная [14], М.Ш.Шабозова, Г.А.Юсупова [85] рассматривались различные способы осреднения конечных разностей, а также способы их модификации, основанные на применении сглаживающих операторов, например, оператора Стеклова [13, 14, 85]

$$S(f,x)=\frac{1}{2h}\int\limits_{-h}^{h}f(x+t)dt,\quad h\in\mathbb{R}_{+},$$

вместе классического оператора сдвига

$$T_h(f,x):=f(x+h),\quad x,h\in\mathbb{R}.$$

В данной диссертационной работе продолжается и развивается указанную

тематику и посвящена использованию одной из характеристик гладкости

$$\Lambda_m(f,t) := \left\{ \frac{1}{t} \int\limits_0^t \left\| \Delta_h^m(f) \right\|^2 dh \right\}^{1/2} . \qquad (0.0.1)$$

Характеристика гладкости (0.0.1) впервые в явном виде была использована К.В.Руновским [49] при доказательстве прямых теорем теории приближения функций. При решении экстремальных задач теории приближения периодических функций тригонометрическими полиномами характеристики (0.0.1) использована С.Б.Вакарчуком и В.И.Забутной [16]. При этом в работе [16] доказаны все свойства функций (0.0.1) многие из которых аналогичны свойствам модулей непрерывности m-го порядка. Следует отметить, что не все результаты, приведенные в работе [16] являются точными.

В диссертационной работе характеристика гладкости (0.0.1) используется при решении экстремальных задач наилучшего совместного приближения функций и её промежуточных производных. Один из основных результатов работы С.Б.ВАкарчука и В.И.Забутной [16] является следующее равенство

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^r \, E_{n-1}(f)_2}{\Lambda_m(f^{(r)}, t/n)_2} = \frac{1}{2^{m/2} \, J_{1,m}(t)}, \qquad (0.0.2)$$

где $m, n, r \in \mathbb{N}$, $0 < t \leq 2\pi$, $J_{1,m}(t) := \left\{ \frac{1}{t} \int\limits_0^t (1 - \cos h)^m dh \right\}^{1/2}$.

В теореме 2.1.3 равенство (0.0.2) обобщается на случай наилучшего приближения функций и их производных, принадлежащих классу $L_2^{(r)}$. При этом доказывается, что при любых $n, m \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$ и $0 < t \leq 2\pi$

справедливо равенство

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{n^{r-s}\,E_{n-1}(f^{(s)})_2}{\Lambda_m(f^{(r)},t/n)_2}=\frac{1}{2^{m/2}\,J_{1,m}(t)}. \tag{0.0.3}$$

В частности, из (0.0.3) при $t=\pi$ имеем:

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{n^{r-s}\,E_{n-1}(f^{(s)})_2}{\Lambda_m(f^{(r)},\pi/n)_2}=\frac{1}{2^{m/2}}\left\{\frac{m!}{(2m-1)!!}\right\}^{1/2}. \tag{0.0.4}$$

Равенство (0.0.4) является точная константа типа Джексона-Стечкина в неравенстве между наилучшим совместном приближении $E_{n-1}(f^{(s)})_2$ и характеристикой гладкости $\Lambda_m(f^{(r)},\pi/n)_2$ который имеет явный вид:

$$E_{n-1}(f^{(s)})_2\le\frac{1}{2^{m/2}}\left\{\frac{m!}{(2m-1)!!}\right\}^{1/2}\cdot\frac{1}{n^{r-s}}\,\Lambda_m(f^{(r)},\pi/n)_2. \tag{0.0.5}$$

Отметим, что обычное неравенство Джексона-Стечкина из (0.0.5) вытекает при $s=0$ с точной константой

$$E_{n-1}(f^{(s)})_2\le\frac{1}{2^{m/2}}\left\{\frac{m!}{(2m-1)!!}\right\}^{1/2}\cdot\frac{1}{n^{r}}\,\Lambda_m\left(f^{(r)},\frac{\pi}{n}\right)_2. \tag{0.0.6}$$

Далее отметим, что в теореме 2.1.5 доказывается при любых $m,n\in\mathbb{N}$, $r,s\in\mathbb{Z}_+$, $r\ge s$ и любой $h\in(0,3\pi/4n)$ справедливо равенство

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{\sqrt{2}\cdot n^{r-s}\,E_{n-1}(f^{(s)})_2}{\left(\int\limits_0^h\Lambda_1^p(f^{(r)},t)_2\,\varphi(t)dt\right)^{1/p}}=\frac{1}{\left(\int\limits_0^h(1-\operatorname{sinc}nt)^{p/2}\varphi(t)dt\right)^{1/p}}. \tag{0.0.7}$$

При $s=0$ из этого равенство следует ранее полученного результата из [16]. В свою очередь, из (0.0.7) следуют важные следствия 2.1.3 и 2.1.4 в ко-

торых при $h = \pi/(2n)$ и весовых значений $\varphi(t) \equiv 1$ и $\varphi(t) \equiv t$ правый часть (0.0.7) доведено до численного значения. Так, например, из (0.0.7) при всех $s = 0, 1, \ldots, r$ следует неравенство типа Джексона-Стечкина для наилучшего совместного приближения произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$

$$E_{n-1}(f^{(s)})_2 \le \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\pi - \mathrm{Si}(\pi/n)}} \cdot \frac{1}{n^{r-s+1/2}} \cdot \Lambda_1\big(f^{(r)}, \pi/(2n)\big),$$

а из результата следствия 2.1.4 получаем

$$E_{n-1}(f^{(s)})_2 \le \frac{2\pi}{\sqrt{\pi^2 - 8}} \cdot \frac{1}{n^{r-s}} \cdot \Lambda_1\big(f^{(r)}, \pi/(2n)\big).$$

Приведенные выше результаты затем обобщаются в более общем виде в теореме 2.2.1, где доказывается, что при любых $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \ge s$, $h \in (0, 2\pi]$, $0 < p \le \infty$, φ — весовая на $[0, h]$ функция имеет место равенство

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{2^{m/2}\, n^{r-s} \cdot E_{n-1}\big(f^{(s)}\big)_2}{\left(\int\limits_0^h \Lambda_m^p\big(f^{(r)}, t\big)_2\, \varphi(t)dt\right)^{1/p}} = \left\{\int\limits_0^h J_{1,m}^p(nt)\varphi(t)\, dt\right\}^{-1/p}. \qquad (0.0.8)$$

Пользуясь равенством (0.0.8) в параграфе 2.3 решаются ряд задач для наилучшего совместного приближения классов функций. Одним из основных результатов данного параграфа является теорема 2.3.4.

В третьем главе пользуясь результатами основных теорем доказанных во второй главе, для классов функций, естественно возникающих из доказательств указанных теорем.

В первом параграфе третьей главы после формулировки определения n-поперечников значений этих аппроксимационных характеристик для класса

$W_m^{(r)}(\varphi;\Phi)$ при $\varphi(t)=t$ вычисляется в теореме 3.1.1. Этот результат позволяет решать задачу отыскании верхней грани модуля коэффициентов Фурье для класса $W_p^{(r)}(\varphi;\Phi)$.

Во второй параграфе третьей главы получен основной результат в теореме 3.2.1 для класса $W_p^{(r)}(\Lambda_m,\varphi;h)$ — функций $f\in L_2^{(r)}$, у которых производные r-го порядка $f^{(r)}$ удовлетворяют условию

$$\int\limits_0^h \Lambda_m^p(f^{(r)},t)_2\,\varphi(t)dt \le \int\limits_0^h \varphi(t)dt,$$

а именно утверждается, что если $n,m\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $0<p\le\infty$, $0<h\le 3\pi/(4n)$, $\varphi(t)$ — произвольная весовая функция, то имеют место равенства

$$\lambda_{2n}\left(W_p^{(r)}(\Lambda_m,\varphi;h),L_2\right)=\lambda_{2n-1}\left(W_p^{(r)}(\Lambda_m,\varphi;h),L_2\right)=$$

$$=E_{n-1}\left(W_p^{(r)}(\Lambda_m,\varphi;h)\right)_2=\frac{1}{2^{m/2}\,n^r}\left\{\frac{\int\limits_0^h\varphi(t)dt}{\int\limits_0^h J_{1,m}^p(nt)\,\varphi(t)dt}\right\}^{1/p},$$

где функция $J_{1,m}(t)$ — определено в (2.1.51), а $\lambda_n(\cdot)$ — любой из n-поперечников Бернштейна, Колмогорова, Гельфанда, линейный или проекционный.

В завершающем параграфе доказаны ряд следствий о точном вычислении верхней грани модулей коэффициентов Фурье для различных классов функций.

Выводы

Основные научные результаты работы заключаются в следующем:

- найдено точное значение верхней грани отношения величины наилучшего совместного приближения и характеристики гладкости Руновского класса комплекснозначных функций $L_2^{(r)},\ r \in \mathbb{N}$ [1-A, 4-A, 5-A];
- найдена точная константа в неравенстве Джексона-Стечкина между наилучшим совместным приближением комплекснозначных функций и усреднённым значением характеристики гладкости Руновского порядка m с произвольным весом в метрике пространства L_p $(0 < p \leq \infty)$ [1-A, 4-A, 8-A];
- решена экстремальная задача отыскания верхней грани наилучших совместных приближений классов функций из $L_2^{(r)}$, определяемых заданной мажорантой Ψ [3-A, 4-A, 9-A];
- вычислен точные значения различных n-поперечников некоторых классов функций из L_2, задаваемых усреднённым значением характеристики гладкости Руновского в метрике L_p $(0 < p \leq \infty)$ [2-A, 4-A].

Рекомендации по практическому использованию результатов

Результаты диссертационной работы и методы их доказательств можно применять в экстремальных задачах теории приближения функций комплексного переменного аналитических в круге функций, принадлежащих пространству Бергмана B_p.

Список литературы

А) Список использованных источников

[1] Абилов В.А., Абилова Ф.В. Некоторые вопросы приближения 2π-периодических функций суммами Фурье в пространстве $L_2(2\pi)$ // Матем. заметки. – 2004. – Т.76. – №6. – С. 803–811.

[2] Айнуллоев Н. О поперечниках дифференцируемых функций в L_2 // Доклады АН Тадж. ССР. – 1985. – Т.28, – №6. – С.309-313.

[3] Айнуллоев Н. Наилучшее приближение некоторых классов дифференцируемых функций в L_2 // Применение функционального анализа в теории приближений. Сборник научных трудов: Калининский госуниверситет. – 1986. – С.3–10.

[4] Бабенко А.Г. Неравенство Джексона для среднеквадратичных приближений периодических функций тригонометрическими полиномами на равномерной сетке // Матем. заметки. – 1988. – Т.43. – №4. – С. 460–473.

[5] Бабаенко А.Г. О неравенстве Джексона-Стечкина для наилучших L^2-приближений функций тригонометрическими полиномами. Теория приближений. Асимптотические разложения // Труды ИММ УрО РАН. – 2001. – №7. – №1. – С. 30–46.

[6] Бабенко В.Ф. Неравенства для перестановок дифференцируемых периодических функций, задачи приближения и приближенного интегрирования // ДАН СССР. – 1983. – Т.272. – №5. – С.1038–1041.

[7] Бабенко В.Ф. О поперечниках некоторых классов сверток // Укр. матем. журн. – 1983. – Т.35. – №5. – С.603–607.

[8] Вакарчук С.Б. О наилучших полиномиальных приближениях в L_2 некоторых классов 2π-периодических функций и точных значениях их n-поперечников // Матем. заметки. – 2001. – Т.70. – №3. – С. 334–345.

[9] Вакарчук С.Б. Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников функциональных классов из L_2 // Матем. заметки. – 2005. – Т.78. – №5. – С. 792–796.

[10] Вакарчук С.Б. Неравенство типа Джексона и поперечники классов функций в L_2 // Матем. заметки. – 2006. – Т.80. – №1. – С. 11–18.

[11] Вакарчук С.Б. О наилучшем полиномиальном приближении 2π-периодических функций в пространстве L_2 // Вісник Дніпропетровського університету. серия: Математика. – 2015. – Вып. 20. – С.19–24.

[12] Вакарчук С.Б. Неравенства типа Джексона с обобщенным модулем непрерывности и точные значения n-поперечников классов (φ, β)-дифференцируемых функций в L_2. I // Укр. матем. журнал. – 2016. – Т.68. – №6. – С.723–745.

[13] Вакарчук С.Б., Забутная В.И. Точное неравенство типа Джексона-Стечкина в L_2 и поперечники функциональных классов // Матем. заметки. – 2009. – Т.86. – №3. – С.328–336.

[14] Вакарчук С.Б., Забутная В.И. Неравенства типа Джексона-Стечкина для специальных модулей непрерывности и поперечники функциональных классов в пространстве L_2 // Матем. заметки. – 2012. – Т.92. – №4. – С. 497–514.

[15] Вакарчук С.Б., Забутная В.И. О наилучшем полиномиальном приближении в пространстве L_2 и поперечниках некоторых классов функций // Укр. матем. журнал. – 2012. – Т.64. – №8. – С.1025–1032.

[16] Вакарчук С.Б., Забутная В.И. Неравенства между наилучшими полиномиальными приближениями и некоторыми характеристиками гладкости в пространстве L_2 и поперечники классов функций // Матем. заметки. – 2016. – Т.99. – №2. – С. 215–238.

[17] Васильев С.Н. Неравенство Джексона-Стечкина в $L_2[-\pi, \pi]$. Теория приближений. Асимптотические разложения // Труды ИММ УрО РАН. – 2001. – №7. – С. 75–84.

[18] Васильев С.Н. Точное неравенство Джексона-Стечкина в $L^2[-\pi, \pi]$ для наилучших приближений тригонометрическими полиномами // Электрон. журн. „Исследовано в России". – 2002. – С.1577–1586.

[19] Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами // М.: Наука. – 1977.

[20] Есмаганбетов М.Г. Поперечники классов из $L_2[0, 2\pi]$ и минимизация точных констант в неравенствах типа Джексона // Матем. заметки. – 1999. – Т.65. – №6. – С.816–820.

[21] Жук В.В. О некоторых точных неравенствах между наилучшими приближениями и модулями непрерывности // Сиб. матем. журнал. – 1971. – Т.12. – №6. – С.1283–1291.

[22] Жук В.В. Некоторые точные неравенства между равномерными приближениями периодических функций // ДАН СССР. – 1971. – Т.201. – №2. – С.263–265.

[23] Иванов В.И. Прямые и обратные теоремы теории приближений в метрике L_p для $0 < p < 1$ // Матем. заметки. – 1975. – Т.18. – №5. – С.641–658.

[24] Иванов В.И. Прямые и обратные теоремы теории приближений периодических функций в работах С.Б.Стечкина и их развитие // Тр. ИММ УрО РАН. – 2010. – Т.16. – №4. – С.5–15.

[25] Козко А.И., Рождественский А.В. О неравенстве Джексона в L_2 с обобщенным модулем непрерывности // Матем. сборник. – 2004. – Т.195. – №8. – С. 3–46.

[26] Корнейчук Н.П. Точная константа в теореме Джексона о наилучшем равномерном приближении непрерывных периодических функций // ДАН СССР. – 1962. – Т.145. – С. 514–515.

[27] Корнейчук Н.П. О наилучшем приближении непрерывных функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1963. – Т.27. – С.29–44.

[28] Корнейчук Н.П. Точное значение наилучших приближений и поперечников некоторых классов функций // ДАН СССР. – 1963. – Т.150. – С.1218–1220.

[29] Корнейчук Н.П. Точные значения норм дифференцируемых периодических функций в метрике L_2 // Матем. заметки. – 1967. – Т.2. – №6. – С.569–576.

[30] Корнейчук Н.П. Экстремальные значения функционалов и наилучшее приближение на классах периодических функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1971. – Т.35. №1. – С.93–124.

[31] Корнейчук Н.П. Экстремальные задачи теории приближения // М.: Наука. – 1976.

[32] Корнейчук Н.П. О точной константе в неравенстве Джексона для непрерывных периодических функций // Матем. заметки. – 1982. – Т.32. – №5. – С.669–674.

[33] Корнейчук Н.П. Сплайны в теории приближения // М.: Наука. – 1984. 342 С.

[34] Корнейчук Н.П. Точные константы в теории приближения // М.: Наука. – 1987. – 424 С.

[35] Лигун А.А. Точные неравенства для верхних граней полунорм на классах периодических функций // Матем. заметки. – 1973. – Т.13. – № 5. – С. 647–654.

[36] Лигун А.А. О точных константах приближения дифференцируемых периодических функций // Матем. заметки. – 1973. – Т.14. – №1. – С.21–30.

[37] Лигун А.А. Некоторые неравенства между наилучшими приближениями и модулями непрерывности в пространстве L_2 // Матем. заметки. – 1978. – Т.24. – №6. – С.785–792.

[38] Лигун А.А. О неравенствах между нормами производных периодических функций // Матем. заметки. – 1983. – Т.33. – №3. – С.385–391.

[39] Лигун А.А. О константах в теореме Джексона // Матем. заметки. – 1985. – Т.37. – №3. – С.326–336.

[40] Лигун А.А. О точных константах в неравенствах типа Джексона // Матем. заметки. – 1985. – Т.38. – №5. – С.248–256.

[41] Лигун А.А. Точные неравенства типа Джексона для периодических функций в пространстве L_2 // Мат. заметки. – 1988. – Т.43. – №6. – С. 757–769.

[42] Никольский С.М. Об интерполировании и наилучшем приближении дифференцируемых периодических функций тригонометрическими полиномами // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1945. – Т.15. – С.1–76.

[43] Никольский С.М. Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами // Тр. матем. ин-та. АН СССР. – 1946. – Т.10. №5. – С.393–410.

[44] Олифтаев Н.Ф. О значениях некоторых классов периодических дифференцируемых функций в пространстве L_2 // Изв. АН РТ. Отд. физ-мат., хим., геол. и техн. н. – 2013. – №1(150). – С.21–31.

[45] Олифтаев Н.Ф. Неравенства Джексона для τ-модулей гладкости и значения поперечников в L_2 // ДАН РТ. – 2015. – Т.57. – №12. – С.830–836.

[46] Палавонов К.К. О наилучшем приближении периодических функций и значениях поперечников функциональных классов в L_2 // Изв. АН РТ. Отд. физ-мат., хим., геол. и техн. н. – 2013. №2(151). – С.40–50.

[47] Палавонов К.К. Приближение функций в $L_2[0, 2\pi]$ и значение поперечников некоторых классов функций // ДАН РТ. – 2014. – Т.57. №6. – С.452–458.

[48] Пустовойтов Н.П. Оценка наилучших приближений периодических функций тригонометрическими полиномами через усредненные разности и многомерная теорема Джексона // Матем. сборник. – 1997. – Т.188. – №10. – С. 95–108.

[49] Руновский К.В. О приближении семействами линейных полиномиальных операторов в пространстве $L_p,\ 0 < p < 1$ // Матем. сборник. – 1994. – Т.185. – №8. – С. 81–102.

[50] Руновский К.В. Приближение средними Фурье и обобщенные модули гладкости // Матем. заметки. – 2016. – Т.99. – №4. – С.574–587.

[51] Сендов Б., Попов В. Усредненные модули гладкости // М.: Мир. – 1988.

[52] Сердюк А.С., Степанец А.И. Прямые и обратные теоремы теории приближений функций в пространстве S^p // Укр. матем. журн. – 2002. – Т.54. – №1. – С. 106–124.

[53] Стечкин С.Б. О порядке наилучших приближений непрерывных функций // Докл. СССР. – 1949. – Т.65. – №2. – С.135–137.

[54] Стечкин С.Б. О порядке наилучших приближений непрерывных функций // Изв. АН. СССР. Сер. матем. – 1951. – Т.15. – №3. – С.219–242.

[55] Степанец А.И. Равномерные приближения тригонометрическими полиномами // Киев: Наука. думка. – 1981.

[56] Стороженко Э.А., Кротов В.Г., Освальд П. Прямые и обратные теоремы типа Джексона в пространствах $L_p,\ 0 < p < 1$ // Матем. сб. – 1975. – Т.98. №3. – С.395–415.

[57] Стороженко Э.А., Освальд П. Теоремы Джексона в $L_p(\mathbb{R}^k)$ $0 < p < 1$ // Сиб. матем. журнал. – 1978. – Т.19. – №4. – С.888–901.

[58] Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены // М.: Наука. – 1979. – 416 С.

[59] Тайков Л.В. Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности функций из L_2 // Матем. заметки. – 1976. – Т.20. – №3. – С. 433–438.

[60] Тайков Л.В. Структурные и конструктивные характеристики функций из L_2 // Матем. заметки. – 1979. – Т.25. – №2. – С.217–223.

[61] Тайков Л.В. О приближении в среднем некоторых классов периодических функций // Труды МИАН. – 1988. – Т.88. – С. 61–70.

[62] Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений // М.: МГУ. – 1976. – 304 С.

[63] Тригуб Р.М. Абсолютная сходимость интегралов Фурье, суммируемость рядов Фурье и приближение полиномами функций на торе // Изв. АН СССР. – 1980. – Сер. матем. – Т.44. – №6. – С. 1378–1409.

[64] Тухлиев К. О наилучшем полиномиальном приближении периодических функций в L_2 и поперечники некоторых классов функций // ДАН РТ. – 2013. – Т.56. – №7. – С.515–520.

[65] Тухлиев К. О приближении периодических функций в L_2 и значениях поперечников некоторых классов функций // Модел. и анализ информ. систем. – 2015. – Т.22. №1. – С.127–143.

[66] Фихтенгольц Г.М. Курс интегрального и дифференциального исчисления // М. – 1972.

[67] Черных Н.И. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 // Матем. заметки. – 1967. – Т.2. – №5. – С. 513–522.

[68] Черных Н.И. Неравенство Джексона в $L_p(0, 2\pi)$ с точной константой // Тр. МИАН. – 1992. – Т.198. – С.232–241.

[69] Шабозов М.Ш. Поперечники некоторых классов периодических дифференцируемых функций в пространстве $L_2[0, 2\pi]$ // Матем. заметки. – 2010. – Т.87. – №4. – С.616–623.

[70] Шабозов М.Ш. Точные неравенства типа Джексона-Стечкина для 2π-периодических функций в L_2 и поперечники некоторых классов функций // Укр. матем. журнал. – 2011. – Т.63. – №10. – С.1040–1048.

[71] Шабозов М.Ш. Некоторые вопросы аппроксимации периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 // Чебышевский сб. – 2019. – Т.20. – №4. – С. 385–398.

[72] Шабозов М.Ш. Неравенства между наилучшими полиномиальными приближениями и некоторыми характеристиками гладкости функций в L_2 // Матем. заметки. – 2021. – Т.110. – В.3. – С. 450–458.

[73] Шабозов М.Ш., Вакарчук С.Б. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами и точных значениях поперечников функциональных классов в L_2 // Analysis Mathematics. – 2012. – V.38. – №6. – PP. 147–159.

[74] Шабозов М.Ш., Вакарчук С.Б., Забутная В.И. Точные неравенства типа Джексона-Стечкина для периодических функций в L_2 и значения поперечников классов функций // Докл. РАН. – 2013. – Т.451. – №6. – С. 625–628.

[75] Шабозов М.Ш., Палавонов К.К. Точные константы в неравенствах типа Джексона-Стечкина и поперечники классов функций в L_2 // ДАН РТ. – 2011. – Т.54. – №10. – С.793–800.

[76] Шабозов М.Ш., Саидусайнов М.С. Среднеквадратическое приближение функций комплексного переменного суммами Фурье по ортогональным системам // Тр. ИММ УрО РАН. – 2019. – Т.25. – №2. – С.258–272.

[77] Шабозов М.Ш., Фарозова А.Д. Точное неравенство Джексона–Стечкина с неклассическим модулем непрерывности // Тр. ИММ УрО РАН. – 2016. – Т.2. – №4. – С.311–319.

[78] Шабозов М.Ш., Тухлиев К. Наилучшие полиномиальные приближения и поперечники некоторых функциональных классов в L_2 // Матем.заметки. – 2013. – Т.94. – №6. – С. 908–917.

[79] Шабозов М.Ш., Тухлиев К. Неравенства Джексона-Стечкина с обобщенными модулями непрерывности и поперечники некоторых классов функций // Тр. ИММ УрО РАН. – 2015. – Т.21. – №4. – С.292–308.

[80] Шабозов М.Ш., Шабозова А.А. Некоторые точные неравенства типа Джексона-Стечкина для периодических дифференцируемых в смысле Вейля функций в L_2 // Тр. ИММ УрО РАН. – 2019. – Т.25. – №4. – С. 255–264.

[81] Шабозов М.Ш., Шабозов О.Ш. Поперечники некоторых классов аналитических функций в пространстве Харди H_2 // Матем. заметки. – 2000. – Т.68. – №5. – С.796–800.

[82] Шабозов М.Ш., Шабозов О.Ш. О поперечниках классов периодических функций в пространстве $L_2[0, 2\pi]$ // Докл. АН РТ. – 2006. – Т.49. – №2. – С. 111–115.

[83] Шабозов М.Ш., Юсупов Г. А. Некоторые неравенства между наилучшими приближениями и модулями непрерывности в пространстве L_2 и их применение // Изв. АН Респ. Тадж., отдел. физ.-мат., хим., геол. и техн. наук. – 2008. – №4. – С.7–19.

[84] Шабозов М.Ш., Юсупов Г. А. Неравенства между наилучшими приближениями и усреднениями модулей непрерывности в пространстве L_2 // ДАН России. – 2010. – Т.435. – №2. – С.178–181.

[85] Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников некоторых классов функций в L_2 // Сиб. матем. журн. – 2011. – Т.52. – №6. – С. 1414–1427.

[86] Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 некоторых классов 2π-периодических функций и точные значения их поперечников // Матем. заметки. – 2011. – Т.90, – №5. – С. 764–775.

[87] Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А., Заргаров Дж.Дж. О наилучшей совместной полиномиальной аппроксимации функций и их производных в пространстве Харди // Тр. ИММ УрО РАН. – 2021. – Т.27. – №4. – С. 239–254.

[88] Шалаев В.В. О поперечниках в L_2 классов дифференцируемых функций, определяемых модулями непрерывности высших порядков // Укр. матем. журнал. – 1991. – Т.43. №1. – С.125–129.

[89] Юдин В. А. Диофантовы приближения в экстремальных задачах // ДАН СССР. – 1980. – Т.1. – №251. – С.54–57.

[90] Юсупов Г.А. Точные неравенства типа Джексона-Стечкина и поперечники функциональных классов в L_2 // Известия Тульского госуниверситета. Естественные науки. – 2012. – Вип. 2. – С.124–135.

[91] Юссеф Х. О наилучших приближениях функций и значениях поперечников классов функций в L_2 // Применение функционального анализа в теории приближений. Калининский гос. ун-т. Калинин. – 1988, – С. 100–114.

[92] Arestov V.V. On Jackson inequalities for approximation in L^2 of periodic functions by trigonometric polynomials and of functions on the line by entire functions // Approximation Theory. A volume dedicated to Borislaw Bojanov. M. Drinov Acad. Publ. Hause. Sofia. – 2004. – PP.1–19.

[93] Arestov V.V., Chernykh N.I. On the L_2-approximation of periodic function by trigonometric polynomials // Approximation and Function Space. North Holland. Amsterdam. – 1981. – PP.25–43.

[94] Ditzian Z., Totik V. Moduli of Smoothness // Springer Ser. Comput. Math., 9 Springer. – New York. – 1997.

[95] Kolmogorov A.N. Über die besste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionklassen // Ann. of Math. – 1936. – V.37. – PP. 107–110.

[96] Kokilashvili V., Yildirir Y.E. On the approximation in weighted Lebesgue space // Proc. A. Razmadze Math. Inst. – 2007. – V.143. – PP.103–113.

[97] Langarshoev M. R. Sharp inequality of JacksonЦIStechkin type and widths of functional classes in the space L_2 // Eurasian Math. J. – 2014. – T.5. – №1. PP.122–134.

[98] Pinkus A. n-Widths in Approximation Theory // Berlin: Springer-Verlag. – 1985. – 291 P.

[99] Vakarchuk S.B., Zabutnaya V.I. Widths of function classes from L_2 and exact constants in Jackson type inequalities // East J. Approx. – 2008. – 14:4. – PP.411–421.

[100] Vakarchuk S.B., Shabozov M.Sh., Zabutnaya V.I. Structural characteristics of functions from L_2 and the exact values of widths of some functional classes // Journal of Mathematical Sciences. – 2015. – V.206. – №1. – PP. 97–144.

[101] Shabozov M.Sh. Exact Jackson-Stechkin-type inequalities for 2π-periodic functions in L_2 and widths of some classes of functions // Ukr. Math. J. – 2012. – V.63:10. – PP.1633–1639.

[102] Shabozov M.Sh. Palavonov K.K. Exact values of widths of certain classes of periodic differentiable functions in the space $L_2[0, 2\pi]$ // Analysis Mathematica. – 2015. – V.41. – PP.103–115.

[103] Shabozov M.Sh., Yusupov G.A. Widths of Certain Classes of Periodic Functions in L_2 // Journal of Approx. Theory. – 2012. – V.164. – Issue 1. PP. 869–878.

[104] Shabozov M.Sh., Yusupov G.A., Temurbekova S.D. n-widths of certain function classes defined by the modulus of continuity // Journal of Approx. Theory. – 2017. – V.215. – PP. 145–162.

[105] Yusupov G.A. Best polynomial approximation and widths of certain classes of functions in the space L_2 // Eurasian Mathematical Journal. – 2013. – V.4. – №3. – P.120–126.

Б) РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ:

1. В журналах, входящих в Перечень ВАК при Президенте Республики Таджикистан и ВАК Российской Федерации

[1-А] Абдухаминов М.А. О совместном приближении периодической функции и ее последовательных производных [Текст] / М.А.Абдухаминов // Известия Академии наук Республики Таджикистан. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. – 2019. – №2(175). – С. 7–13.

[2-А] Абдухаминов М.А. О приближении периодических дифференцируемых функций в пространстве L_2 [Текст] / М.А.Абдухаминов // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. – 2019. – Т.62. – №9-10. – С. 503–510.

[3-А] Абдухаминов М.А. Некоторые неравенства между наилучшими полиномиальными приближениями и усредненными нормами конечных разностей в пространстве L_2 и поперечники функциональных классов [Текст] / М.Ш.Шабозов, М.А.Абдухаминов // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. – 2020. – Т.63. – №3-4. – С. 146–160.

[4-А] Абдухаминов М.А. Некоторые неравенства между наилучшими полиномиальными приближениями и усредненными нормами конечных разностей в пространстве L_2 [Текст] / М.Ш.Шабозов, М.А.Абдухаминов // Известия вузов. Математика. – 2021. – №10. – С. 78–91.

[5-А] Абдухаминов М.А. О задаче наилучшего совместного полиномиального приближения дифференцируемых периодических функции в L_2 [Текст] / М.А.Абдухаминов // Доклады НАН Таджикистан. – 2022. – Т.65. – № 7-8. – С. 335–341.

В других изданиях:

[6-А] Абдухаминов М.А. О приближении периодической функции и ее последовательных производных в L_2 [Текст] / М.А.Абдухаминов // Материалы международной научной конференции "*Современные проблемы и приложения алгебры, теории чисел и математического анализа*", посвященной 60-летию академика АН РТ, профессора З.Х.Рахмонова и члена корреспондента АН РТ, профессора С.А.Исхокова (Душанбе, 13-14 декабря 2019 г.). – С. 37–40.

[7-А] Абдухаминов М.А. Неравенства между наилучшими полиномиальными приближениями и усредненными нормами конечных разностей в пространстве L_2 [Текст] / М.А.Абдухаминов // Материалы международной научной конференции "*Сингулярные интегральные уравнения и дифференциальные уравнения с сингулярными коэффициентами*", посвященной 70-летию профессора Г.Джангибекова. (Душанбе, 30-31 января 2020 г.). – С. 31–34.

[8-А] Абдухаминов М.А. Точные неравенства между наилучшими полиномиальными приближениями и усредненными нормами конечных разностей пространстве L_2 и поперечники функциональных классов [Текст] / М.Ш.Шабозов, М.А.Абдухаминов // Материалы республиканской научно-практической конференции "*Современные проблемы теории дифференциальных уравнений*", посвященной 80-летию профессора М.Исмати и 20-летию развития естественных, точных и математических наук. (Душанбе,

26 сентября 2020 г.). – С. 237–244.

[9-А] Абдухаминов М.А. Наилучшее полиномиальное приближение в пространстве L_2 [Текст] / М.А.Абдухаминов // Мїжнародна наукова конференція "*Теорія наближень і її застосування*", присвячена 100-річчю з дня народження М.П.Корнейчука (Дніпро, Україна, 16-19 вересня 2020 г.). – С. 30–31.

[10-А] Абдухаминов М.А. О неравенствах между наилучшими полиномиальными приближениями и усредненными нормами конечных разностей в L_2 [Текст] / М.А.Абдухаминов // Материалы международной научной конференции "*Актуальные проблемы современной математики*", посвященной 80-летию профессора Т.Собира (Душанбе, 25-26 июня 2021 г.). – С. 30–31.

[11-А] Абдухаминов М.А. О наилучшем совместном приближение периодических функции в L_2 [Текст] / М.А.Абдухаминов, М.Ш.Шабозов // Материалы международной конференции "*Современные проблемы теории чисел и математического анализа*", посвященной 80-летию профессора Д.Исмоилова (Душанбе, 29-30 апреля 2022 г.). – С. 10–13.

[12-А] Абдухаминов М.А. Наилучшее совместное полиномиальное приближения дифференцируемых периодических функций в L_2 [Текст] / М.А.Абдухаминов // Материалы международной научной конференции "*Современные проблемы математического анализа и теории функций*", посвященной 70-летию академика НАН Таджикистаана М.Ш.Шабозова (Душанбе, 24-25 июня 2022 г.). – С. 13–15.