У Т В Е Р Ж Д А Ю
Ректор Бохтарского государственного университета имени Н.Хусрава, доктор биологических наук, профессор

_____ С.Х.Давлатзода

«__» ноября 2022 г.

О Т З Ы В

ведущей организации на диссертацию Абдухаминова Мунъима Абдумамадовича „Точные неравенства между наилучшими приближениями и усреднёнными характеристиками гладкости в L_2 и некоторые их применения", представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Теория приближения функций – одна из интенсивно развивающихся областей современной математики. В последнее время наблюдается проникновение идей и методов теории приближения в самые различные разделы математической науки, особенно в прикладные направления. Одновременно с этим перестраивается и ставится на более широкую и прочную основу круг задач теории приближения, заложенных в классических трудах Чебышева и Вейерштрасса, Джексона и Бернштейна о приближении многочленами индивидуальных функций и целых их классов.

Задачи аппроксимационного содержания, задаваемые на классах функций, во многих случаях являются задачами на экстремум. В них требуется найти точную верхнюю грань погрешности приближения заданным методом на фиксированном классе функций или указать для этого класса наилучший аппарат приближения. В последнее время при решении различных экстремальных задач теории приближения часто принимают различные модификации модулей непрерывности, чтобы учитывать содержание рассматриваемых задач и получить новые содержательные результаты. Различные модификации модулей непрерывности изучались в работах Z.Ditzian, V.Totik, Н.П.Пуставойтова, К.В.Руновского, В.А.Абилова, С.Б.Вакарчука и В.И.Забутной, М.Ш.Шабозова и Г.А.Юсупова, М.Ш.Шабозова и К.Тухлиева и многих других.

В диссертационной работе Абдухаминова М.А. рассматривается более общая задача – совместное приближение функций и их последовательных производных тригонометрическими полиномами и их соответствующими производными в метрике пространства L_2. При этом полученные в диссертационной работе результаты являются обобщениями ранее полученных результатов К.В.Руновского, С.Б.Вакарчука и В.И.Забутная, М.Ш.Шабозова в метрике L_2 на случай метрики L_p $(1 \leq p \leq \infty)$ и являются окончательными и неулучшаемыми. Во всех результатах в качестве характеристики гладкости функции рассматриваются характеристики гладкости Руновского.

Перечисленные выше результаты обобщаются и распространяются на случай совместного приближения функций и их промежуточных производных тригонометрическими полиномами, вычисляются точные верхние грани наилучших совместных приближений различных классов функция, находятся точные значения n-поперечников. Решения перечисленных экстремальных задач составляют основное содержание диссертационной работы.

Диссертация соответствует профилю диссертационного совета 6D.KOA-011 по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Диссертация состоит из введения, трёх глав, списка цитированной литературы из 117 наименований, занимает 112 страницу машинописного текста, набранного на LaTeX-е.

В первой главе диссертации приводится научный обзор литературных источников по исследуемой теме, приводятся формулировки нерешённых задач, намеченных для последующего решения.

Во второй главе найдены точные неравенства между наилучшими среднеквадратичными приближениями и усреднёнными характеристиками гладкости Руновского в пространстве $L_2 := L_2[0, 2\pi]$ и $L_p := L_p[0, 2\pi](0 < p \leq \infty)$. Здесь вычислены верхние грани наилучших совместных приближении некоторых классов периодических дифференцируемых функций тригонометрическими полиномами, определяемые характеристикой гладкости Руновского, а также найдено неравенства типа Джексона-Стечкина с точной константы. Этот же результат обобщается на неравенство типа Джексона-Стечкина для усреднённой с весом характеристики гладкости $\Lambda_m(f^{(r)}, t)_2$ на классах функций из $L_2^{(r)}$ в метрике L_p, задаваемой мажорантной функцией Ф. В этой главе в качестве основных результатов отметим теоремы 2.1.2, 2.1.3, след-

ствие 2.1.1, теоремы 2.1.4, 2.1.5, следствия 2.1.3, 2.1.4, теоремы 2.1.6, 2.1.7, следствия 2.1.5, 2.1.6, теоремы 2.2.1, 2.3.1 – 2.3.4 и их следствия 2.2.1, 2.3.1, 2.3.2.

В третьей главе вычислены точные значения n-поперечников некоторых классов функций, естественно возникающих из результатов теорем первой главы. В первом параграфе третьей главы приводятся определения различных n-поперечников и классов функций, исследуемых в дальнейшем. Здесь же приводится основной результат данного параграфа, который приводим в качестве образца:

Теорема 3.1.1. *Пусть* $0 < p \le \infty$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $\varphi^*(t) = t$. *Если для любых* $h \in (0, 2\pi]$ *и* $n \in \mathbb{N}$ *мажоранта* Φ *удовлетворяет условию*

$$\frac{\Phi^p(h)}{\Phi^p(\pi/n)} \ge \frac{\int\limits_0^{nh} t\left(1-\operatorname{sinc} t\right)^{p/2} dt}{\int\limits_0^{\pi} t\left(1-\operatorname{sinc} t\right)^{p/2} dt},$$

то имеют место равенства

$$\lambda_{2n}\Big(W_p^{(r)}(\varphi^*,\Phi);L_2\Big) = \lambda_{2n-1}\Big(W_p^{(r)}(\varphi^*,\Phi);L_2\Big) = E_{n-1}\Big(W_p^{(r)}(\varphi^*,\Phi)\Big)_2 =$$

$$= \frac{n^{2/p-r}}{\sqrt{2}} \cdot \left\{\int\limits_0^{\pi} t\left(1-\operatorname{sinc} t\right)^{p/2} dt\right\}^{-1/p} \Phi\Big(\frac{\pi}{n}\Big),$$

где $\lambda_n(\cdot)$ *любой из* n*-поперечников* $b_n(\cdot)$, $d_n(\cdot)$, $d^n(\cdot)$, $\delta_n(\cdot)$ *и* $\Pi_n(\cdot)$, *а*

$$E_{n-1}(\mathfrak{M}) := \sup\big\{E_{n-1}(f) : f \in \mathfrak{M}\big\}.$$

Параграф завершается общей теоремой 3.1.2 для случая L_p, $0 < p \le \infty$. Теорема 3.1.2 для случая $0 < p \le 2$ ранее была доказана С.Б.Вакарчуком и В.И.Забутной. Случай $p = 2$ рассмотрел В.А.Абилов.

Во втором параграфе третьей главы найдены точные значения n-поперечников класса $W_p^{(r)}(\Lambda_m, \varphi; h)$, которые являются обобщением результатов М.Ш.Шабозова.

В завершающем третьем параграфе третьей главы вычисляется верхняя грань модулей коэффициентов Фурье на всех классах функций, рассмотренных в диссертационной работе. Доказывается, что указанная верхняя грань

модулей коэффициентов Фурье совпадает со значениями n-поперечников классов функций.

В целом в диссертации проделана большая содержательная работа. Автор диссертации владеет современными методами теории аппроксимации, функционального анализа, теории экстремальных задач вариационного содержания.

Диссертация написана автором самостоятельно, содержит новые научные результаты, выдвигаемые для публичной защиты и характеризующие личный вклад автора в теорию приближения функций. Необходимые ссылки на авторов и источники заимствования материалов в диссертации имеются. Автореферат соответствует требованиям ВАК при Президенте Республики Таджикистан, полно и правильно отражает основные положения диссертационной работы. Основные результаты диссертации опубликованы в 12 научных работах, в том числе 5 статьи в изданиях, включенных в действующий Перечень ВАК Республики Таджикистан, а 7 – в трудах международных и республиканских конференций.

Автореферат и диссертационная работа оформлены хорошо. Имеются незначительные замечания:

1. Надо было бы отметить, что характеристики гладкости Руновского являются более тонкими характеристиками гладкости функции, чем их модули непрерывности, поскольку результаты, полученные для характеристик гладкости Руновского, в частности содержат результаты для модулей непрерывности, а наоборот нет.

Отмеченное замечание не влияет на общую положительную оценку диссертации.

Вышесказанное дает основание считать, что диссертационная работа Абдухаминова Мунъима Абдумамадовича „Точные неравенства между наилучшими приближениями и усреднёнными характеристиками гладкости в L_2 и некоторые их применения", представленная на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ, является научно-квалификационной работой и полностью соответствует требованиям, предъявляемым ВАК при Президенте Республики Таджикистан к диссертациям на соискании ученой степени кандидата физико-математических наук по вышеуказанной специальности.

Результаты диссертационной работы М.А.Абдухаминова заслушаны на специальном семинаре кафедры “Математического анализа и дифференциальных уравнений” Бохтарского государственного университета имени Н.Хусрава 22 октября 2022 г. В семинаре присутствовали доктора физико-математических наук Дж.Сафаров и Ф.Шамсуддинов.

Отзыв составил кандидат физико математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ, З.Х.Рахимов. Отзыв обсужден и утвержден на заседании кафедры “Математического анализа и дифференциальных уравнений” Бохтарского государственного университета имени Н.Хусрава (протокол №4 от 05.11. 2022 г.).

Председатель семинара,
кандидат физ.-мат. наук по специальности
01.01.01 – вещественный, комплексный и
функциональный анализ, доцент Рахимов З.Х.

Председатель заседания,
зав. кафедрой “Математического анализа и
дифференциальных уравнений” Бохтарского
государственного университета им. Н.Хусрава,
доктор философии (Ph.D), по специальности
6D060100 – математика Абдулвохиди О.

Секретарь заседания, кандидат
физико-математических наук по
специальности 01.01.01 – вещественный,
комплексный и функциональный анализ,
доцент Нематуллоев О.А.

Адрес: Бохтарский государственный университет
им. Н. Хусрава, 735140, Таджикистан, г. Бохтар, улица Айни, 67.
Сайт: www.btsu.tj; e-mail: bgu-1978@mail.ru
Тел. рабочий: +992(32) 222-54-81; +992(32) 222-22-53

Подписи З.Х. Рахимова , О. Абдулвохида и О.А.Нематуллоева заверяю:

Начальник
ОК БГУ им. Н.Хусрава **Шукурзод Дж.**