ТАДЖИКСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УДК: 517.968.220 На правах рукописи

АХМАДОВ ФАРВАРИДДИН МУФАЗАЛОВИЧ

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА С ГРАНИЧНЫМИ ОСОБЫМИ И СИЛЬНО-ОСОБЫМИ ЛИНИЯМИ

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02–Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Раджабова Лутфия Нусратовна

Душанбе – 2024

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность и необходимость проведения исследований по теме диссертации. В настоящей диссертации впервые исследуется класс интегральных уравнений типа Вольтерра в двумерном случае, когда ядро уравнения имеет граничные особые и сильно-особые линии.

В современной математике интегральные уравнения типа Фредгольма и Вольтерра, в том числе с особыми ядрами составляют одну из важнейших и активно развивающихся областей исследования.

Теория сингулярных интегральных уравнений давно уже стала одним из распространённых инструментов исследования различных задач математической физике. В прикладных задачах математики, механики, физики, теории упругости, теории конформных отображений встречаются различные классы (одномерных и многомерных, линейных и нелинейных) сингулярных интегральных уравнений типа Вольтерра.

Интегральные уравнения неоднократно появлялись в трудах различных математиков, начиная с XVIII века. В развитии теории интегральных уравнений решающий вклад внесли такие выдающиеся математики, как С. Д. Пуассон, О.Л.Коши, Дж.Лиувилл, Б.Риман, Т.И.Стилтьес, Э.Бельтрами, Н.Сонин, В.Стеклов, К.Нейман, Ш.Е.Пикар, А.Пуанкаре, Г.Шварц и др. Скачок в теории линейных интегральных уравнений произошёл в конце XIX начале XX века в связи с классическими работами В.Вольтерры [24]-[28], Э.И.Фредгольма [4], Д.Гильберта [5], Э.Шмидта [22], [23].

Основным методом изучения интегральных уравнений и краевых задач для аналитических функций явился аппарат интегралов типа Коши, в предельном смысле законченный вид он принял в известных монографиях Н.И.Мусхелишвили [54], Ф.Д.Гахова [35] и З.Пресдорф [56].

Исследование двумерных интегральных уравнений в конечной области, а также изучение общих аналитических функций и сингулярных двумерных интегральных уравнений связано с монографией И.Н.Векуа [33], а также с работами А. Джураева [38], Г. Джангибекова [36] и их учеников.

В работах Михайлова Л.Г [49], Бильмана Б.М [32] изучены интегральные уравнения с однородным ядром -1 степени. Достойный вклад в развитии теории интегральных уравнений с непрерывными ядрами, со слабо-сингулярными ядрами, многомерных интегральных уравнений внес труд С.Г.Михлина [48].

Отметим, что исследованию характеристического сингулярного интегрального уравнения с ядром Коши в исключительном случае, получению условия разрешимости и явной формулы представления решений посвящена работа А.П.Солдатова [106]. Следует заметить, что работа С. А. Довгого [41] посвящена основам вычисления определенных, сингулярных и гиперсингулярных одномерных и двумерных интегралов, а также численного решения уравнений с ними, работа Н.Б.Плещинского [55] посвящена теории сингулярных интегральных уравнений с особенностями логарифмического или степенного типа, также одновременно со слабыми и сильными особенностями в различных сочетаниях. Исследованию слабо- сингулярных и сингулярных интегральных уравнений различных видов, построению и обоснованию вычислительных схем решеный данных уравнений посвящены работы Г.А Расолько [92] и И.В.Байков [31].

Необходимо отметить, что работа Н.Раджабова [59] посвящена изучению интегральных уравнений типа Вольтерра с граничными сингулярными или сверх-сингулярными точками вида:

$$\varphi(x) + \int_0^x \frac{K(x,t)}{|t|^\alpha}\varphi(t)dt = f(x), \text{ где } \alpha \geq 1.$$

Степень разработанности темы исследования. Изложенные выше результаты относятся к различным классам одномерных и многомерных, линейных и нелинейных сингулярных интегральных уравнений, также изучению некоторых случаев особых интегральных уравнений типа Вольтерра первого и второго рода. Однако интегральные уравнения типа Вольтерра с граничными особыми и сильно особыми линиями мало изучены. Получение многообразия решений и разрешимость граничных задач для таких уравнений связанны с некоторыми трудностями принципиального характера. В этой связи весьма актуальным является вопрос изучения интегральных уравнений типа Вольтерра с граничными особыми и сильно особыми линиями.

Связь работы с научными программами (проектами), темами. Данное диссертационное исследование выполнено в рамках реализации перспективного плана научно-исследовательской работы кафедры математического анализа и теории функций Таджикского национального университета на 2020-2025 гг. по теме «Сингулярные и сверхсингулярные дифференциальные и интегральные операторы».

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Цель исследования. В предлагаемой диссертационной работе основной целью является получение явных многообразий решений двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра с особыми ядрами.

Задачи исследования:

- Получение представлений многообразий решений в явном виде двумерного интегрального уравнения Вольтерра с особыми ядрами, когда коэффициенты уравнения связаны определенными равенствами;
- Постановка и решение задач типа Коши для двумерного интегрального уравнения Вольтерра с особыми ядрами, в случае, когда общее решение содержит произвольные функции;
- Нахождение явных решений двумерного интегрального уравнения Вольтерра с особыми ядрами в виде степенных и функциональных рядов, когда коэффициенты уравнения не связаны определенными равенствами.

Объект исследования. Основным объектом исследования является двумерное интегральное уравнение типа Вольтерра с граничными особой и сильно-особыми линиями.

Предмет исследования. Исследование одного класса интегрального уравнения типа Вольтерра с особой и сильно-особой граничными линиями.

Методы исследования. В работе используются общие методы теории дифференциальных и интегральных уравнений, метод получения интегральных представлений. В работе также используется метод решения интегральных уравнений типа Вольтерра с фиксированными сингулярными и сверх-сингулярными ядрами, также широко используются методы, разработанные в работах Н.Раджабова и Л.Н.Раджабовой.

Научная новизна исследований. Результаты диссертационной работы полученны автором самостоятельно, являются новыми результатами и включают в себя:

- явные представления многообразия решений двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра с особыми ядрами, когда корни характеристических уравнений принимают всевозможные значения и коэффициенты уравнения связаны определенными равенствами;
- постановка и решение задач типа Коши изучаемого интегрального уравнения в случае, когда коэффициенты связаны определенными равенствами;
- многообразие решений в виде обобщенного степенного и функционального рядов двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра с особыми ядрами, когда коэффициенты уравнения не связаны определенными равенствами.

Положения, выносимые на защиту:

- теоремы о явных решениях двумерного интегрального уравнения Вольтерра с особыми и сильно-особыми ядрами, когда коэффициенты уравнения связаны определенными равенствами;
- теоремы о разрешимости задач типа Коши;
- теоремы о получении общих решений с помощью обобщенных функциональных и степенных рядов для двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра с граничными особыми ядрами, когда коэффициенты уравнения не связаны определенными равенствами.

Теоретическая и практическая ценность. Исследования, изложенные в диссертации, носят теоретический характер. Полученные результаты диссертационной работы могут быть использованы для дальнейшего развития теории многомерных интегральных уравнений типа Вольтерра с сингулярными и сверх-сингулярными ядрами, а также использоваться при решении различных прикладных задач.

Материалы данной диссертационной работы могут быть применены при изложении специальных курсов для студентов, магистров и докторантов вузов, обучающихся по специальности «Математика».

Достоверность диссертационных результатов. Достоверность результатов, полученных в диссертационной работе, определяется обоснованными теоретическими выкладками и строгими доказательствами, опирающимися на методы интегральных уравнений.

Соответствие диссертации паспорту научной специальности. Диссертационная работа выполнена по специальности 01.01.02– Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление и полностью соответствует её формуле (обыкновенные дифференциальные уравнения) и двум пунктам области исследования (1. Общая теория дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений; 2. Начально-краевые и спектральные задачи для дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений; 3. Теория дифференциально-операторных уравнений). Диссертацию можно считать разделом вещественного, комплексного и функционального анализа (смежная специальность 01.01.01– Вещественный, комплексный и функциональный анализ).

Апробация работы. Основные результаты диссертации обсуждались на:

- семинарах кафедры математического анализа и теории функции ТНУ под руководством д.ф.-м.н., профессора, академика НАН РТ Раджабова Н.Р. (Душанбе, 2020-2024гг.);

- республиканской научно-практической конференции «Краевые задачи для некоторых классов дифференциальных уравнений» (г. Душанбе, Таджикистан, 4 декабря 2021 г.);
- научно-теоретической конференции преподавателей и студентов университета «Краевые задачи для некоторых классов дифференциальных уравнений» посвящённой обявлению 2022-2026 годов годами развития промышленности (г. Душанбе, Таджикистан, МУТПТ, 29-30 апреля 2022 г.);
- международной научно-практической конференции «Современные проблемы математики и её приложения», посвящённой 20-летию развития естественных, точных и математических наук (г. Душанбе, Таджикистан, 20-21 октября 2022 г.);
- международной научно-практической конференции «Современные проблемы математического анализа и теории функций», посвящённой 70-летию академика НАН Таджикистана, доктора физико-математических наук, профессора Шабозова Мирганда Шабозовича (г. Душанбе, Таджикистан, 24-25 июня 2022 г.);
- международной научно-практической конференции «Современные проблемы математики и её приложения», посвящёной 85-летию академика НАНТ, доктора физико-математических наук, профессор Раджабова Н (г. Душанбе, Таджикистан, 5 октября 2023 г.).

Личный вклад соискателя ученой степени состоит:

- в том, что исследовано ранее не изученное уравнение:
- в получении явных решений двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра с особой и сильно-особой линиями, когда параметры уравнения связаны и не связаны между собой и корни характеристических уравнений являются вещественными и разными, вещественными и равными, комплексно-сопряженными, вещественными-разными и равными, вещественными-разными и комплексно-сопряженными, вещественными-

равными и разными, вещественными-равными и комплексно-сопряженными, комплексно-сопряженными и вещественными-разными, комплексно-сопряженными и вещественными-равными;

- в постановке и решении задач типа Коши для двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра с граничными особой и сильно-особыми линиями, когда общие решения интегрального уравнения содержат произвольные функции;
- в подготовке публикаций по работе и личном участии в апробации результатов диссертации. Содержание диссертации и основные результаты, выносимые на защиту, отражают персональный вклад соискателя в опубликованных работах. Все результаты диссертационной работы получены лично соискателем.

Публикации. Результаты автора по теме диссертации опубликованы в 20 работах [1-A]-[20-A]. Из них 6 статей опубликованы в изданиях, входящих в перечень ВАК при Президенте Республики Таджикистан, три статьи в других изданиях, остальные в трудах международных и республиканских конференций.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, 4 глав, списка литературы, состоящего из 144 наименований. Общий объём диссертации 189 страниц машинописного текста.

Благодарность автора. Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору Л.Н.Раджабовой за постановку задач и полезные советы при подготовке данной диссертационной работы.

ГЛАВА 1

АНАЛИЗ ЛИТЕРАТУРЫ ПО ТЕОРИИ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1.1. Общие сведения

Интегральные уравнения неоднократно появлялись в трудах различных математиков, начиная с XVIII века. Но эти задачи были отдельными и не связанными между собой. Лишь к концу XIX в. стали вызревать убеждения, что интегральные уравнения составляют самостоятельную сущность, для которой следует выработать общий подход, позволяющий охватить целый, как потом выяснилось, очень обширный класс задач.

Основы теории линейных интегральных уравнений были сформулированы на рубеже XIX-XX вв, и это связано с именами целого ряда выдающихся математиков: В.Вольтерра, Э.И.Фредгольма, Д.Гильберта, Э.Шмидта и др. Первый шаг в создании теории интегральных уравнений традиционно связывают с известной работой Н.Абеля о таутохроне (1823) [1].

В нашей стране общая теория для сингулярных интегральных уравнений с различными видами особенностей в ядрах разрабатывалась многими известными математиками, в том числе А.Д.Джураевым [39], [40], Л.Г.Михайловым [50]-[52], Н.Раджабовым [59]-[69], Г.Джангибековым [37], Л.Н.Раджабовой [16]-[20] и их учениками.

Как известно, решения многих задач естествознаний сводятся к решению интегральных уравнений. Среди них наиболее популярными являются интегральные уравнения типа Вольтерра. Найти точное решение таких уравнений, даже в линейном случае, удается не всегда. Поэтому для решения интегральных уравнений типа Вольтера, в основном, используются приближенные методы. Среди приближенных методов наиболее часто применяемыми к решению интегральных уравнений, являются численные методы. Одним из известных численных методов для решения интегральных уравнений является метод квадратур. Сам основоположник теории интегральных и интегро-дифференциальных уравнений Вито Вольтерра для нахождения приближенных решений интегрального уравнения с переменными границами использовал метод квадратур (см. напр. [28]). Отметим, что метод квадратур и сейчас применяется к решению нелинейного интегрального уравнения Вольтерра.

Из работ других авторов, посвященных приближенному вычислению сингулярных интегралов и решению интегральных уравнений, содержащих такие интегралы, следуеть отметить работы И.В.Байкова [30], Б.Г.Габдулхаева [34]., Д.Элиота [3]., В.А.Золотаревского [45], [46]., В.И.Мусаева [53]., Д.Г.Саникидзе [102]-[104]., В.Н.Сейчука [105]., Н.А.Тихоненко [108]., М.А.Шешко [116]., А.А.Корнейчука [47] и их учеников.

Из анализа литературы можно сделать вывод, что многие известные математики решали интегральные уравнения разными способами.

Сейчас мы приведем некоторые из них.

В книге Н.И.Мусхелишвили [54] «Сингулярные интегральные уравнения (1968)» построена теория для сингулярных интегральных уравнений

$$A(t_0)\Phi(t_0)+\frac{B(t_0)}{\pi i}\int_L \frac{\Phi(t_0)dt}{t-t_0}+\frac{1}{\pi i}\int_L k(t_0,t)dt = f(t_0),$$

при достоточно общих предположениях на линию интегрирования, коэффиценты и искомые функции.

Одним из наиболее простых уравнений 1-го рода с логарифмическим ядром является уравнение на отрезке вещественной оси:

$$\int_a^b \varphi(t)\ln\frac{1}{|t-x|}dt = f(x), x\in(a,b).$$

Решение этого уравнения на единичном отрезке впервые получил методом аналитического продолжения в комплексную плоскость Т.Карлеман в 1992 г [2].

В работе А.П.Солдатова [107] рассматриваются сингулярные интегральные операторы на кусочно гладкой кривой в весовых лебеговых и гёльдеровых пространствах с кусочно-непрерывными матричными коэффициентами

$$(K\varphi)(t_0) = \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)dt}{t-t_0}, t_0 \in \Gamma \text{ .}$$

В работе Ш.С.Хубежты [109] рассматривается один метод квадратур для численного решения гипер-сингулярных интегральных уравнений на классе функций, неограниченных на концах интервала интегрирования вида

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\varphi_0(t)}{(t-x)^p}dt + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} K(x,t)\varphi_0(t)dt = f(x),$$

где $-1 < x < 1, k(x,t)$ и $f(x)$ – непрерывно дифференцируемые функции, $\varphi_0(t)$ – неизвестная функция.

П.А.Желток в работе [42] находит приближенное решение характеристического сингулярныго интегрального уравнения второго рода с постоянными коэффициентами в различных классах функций по Мусхелишвили

$$a\varphi(x) + \frac{b}{\pi i}\int_a^b \varphi(t)\frac{dt}{t-x} = f(x), -1 < x < 1,$$

a, b – заданные комплекснозначные числа, $f(x)$ – заданная гельдеровская функция, $\varphi(x)$ – неизвестная гельдеровская функция.

В работе Ю.Р.Агачева [29] исследуются слабосингулярные интегральные уравнения вида

$$Au \equiv u(x) + \int_D \frac{h(x,y)u(y)}{r^2}dy = f(x), 0 \le \alpha < 2,$$

где D – круг единичного радиуса с центром в начале координат, r - евклидово расстояние от начала координат до точки y, а $u(y)$ – искомая функции.

§1.2. Обзор результатов, касающихся исследования интегральных уравнений типа Вольтерра

Существенный вклад в развитие теории сингулярных одномерных, двумерных и многомерных интегральных уравнений типа Вольтерра внесли работы Раджабова Н. Особо следует выделить введённый Н.Раджабовым новый класс интегральных уравнений с особыми и сильно особыми ядрами вида

$$\varphi(x) + \lambda \int_a^x \frac{\varphi(t)}{t-a}dt = f(x),$$

и

$$\varphi(x) + \lambda \int_a^x \frac{\varphi(t)}{(t-a)^\alpha}dt = f(x),$$

где $\alpha > 1$.

Важно отметить активное изучение различных видов интегральных уравнений типа Вольтерра с сингулярными ядрами в трудах работах Н.Раджабов [8-15], [57-70].

Здесь мы представляем вам некоторые из них, которые тесно связаны с нашей научной работой.

В работе Н.Раджабов [58] изучено одномерное интегральное уравнение, имеющее фиксированную особенность первого порядка и логарифмическую особенность вида:

$$\varphi(x)+\int_a^x\left[p+q\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right]\frac{\varphi(t)}{t-a}dt=f(x), \qquad (1.2.1)$$

где $p,q-$ заданные постоянные, $f(x)-$ заданная функция, $\varphi(x)-$ искомая функция.

В зависимости от знака параметров и корней соответствующего характеристического уравнения, общее решение рассматриваемого уравнения может содержать две произвольные постоянные, одно произвольное постоянное или выделяется случай, когда решение единственно.

Решение интегрального уравнения (1.2.1) ищется в классе функций $\varphi(x)\in[a,b],\varphi(x)=0$ с асимптотическим поведением

$$\varphi(x)=o[(x-a)^{\varepsilon}],\varepsilon>0 \text{ при } x\to a.$$

В работе [8], [9] Н.Раджабовым исследовано уравнение вида (1.2.1), когда ядро уравнения имеет вид:

$$K(x,t)=p_1+p_2\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)+...+p_n\ln^{n-1}\left(\frac{x-a}{t-a}\right)$$

В работе Н.Раджабова [57] для одного нового класса интегральных уравнений волтерровского типа со сверхсингулярным ядром в модельном случае вида:

$$\varphi(x)+\int_a^x\left[p+q\left(\omega_a(t)-\omega_a(x)\right)\right]\frac{\varphi(t)}{(t-a)^{\alpha}}dt=f(x), \qquad (1.2.2)$$

где $p,q-$ заданные постоянные, $f(x)-$ заданная функция, $\varphi(x)-$ искомая функция, в зависимости от корней характеристического уравнения и знака параметров присутствующие в уравнении, найдено многообразие общего решения.

Решение интегрального уравнения (1.2.2) ищется в классе функций $\varphi(x)\in[a,b],\varphi(x)=0$ с асимптотическим поведением

$$\varphi(x)=o[(x-a)^{\delta}],\delta>2\beta-1, \text{ при } x\to a.$$

В работе [10] Раджабовым Н. изучено более общее интегральное уравнение со сверхсингулярным ядром вида:

$$\varphi(x)+\int_a^x\left[p_1+p_2\left(\omega_a(x)-\omega_a(t)\right)+_{\dots}+p_n\left(\omega_a(x)-\omega_a(t)\right)^{n-1}\right]\frac{\varphi(t)}{(t-a)^{\alpha}}dt=f(x).$$

Также важно отметить и другие работы учеников Раджабов Н, в том числе работы С.А.Саидова [21], [93]-[101], С.Б.Зарипова [43], [44] и других.

Работа С.А.Саидова [97] посвящена исследованию одномерного интегрального уравнения вида:

$$\varphi(x)+\int_a^x\frac{K(x,t)\varphi(t)dt}{(t-a)(b-t)}=f(x),$$

при выполнении условии $K(a,a)\neq 0$, $K(b,b)\neq 0$.

В работе [96] С.А.Саидовым исследуется одномерное интегральное уравнение вида:

$$\varphi(x)+\int_a^x\left[K_1(x,t)+K_2(x,t)\ln\left[\left(\frac{x-a}{b-x}\right)\left(\frac{b-t}{t-a}\right)\right]\right]\frac{\varphi(t)dt}{(t-a)(b-t)}=f(x),$$

ядро которого, кроме фиксированной граничной особенности, имеет также и логарифмическую особенность.

В работе С.Б.Зарипова [43] рассматривается двухмерное интегральное уравнение типа Вольтерра второго рода, симметричное по одному из переменных с фиксированной внутренний линией и одной фиксированной граничной сингулярной или сверхсингулярной линией вида:

$$\varphi(x,y)+\int_{-x}^{x}\frac{A(t)\varphi(t,y)}{|t|^{\alpha}}dt+\int_0^y\frac{B(s)\varphi(x,s)}{s^{\beta}}ds+\int_{-x}^{x}\frac{dt}{|t|^{\alpha}}\int_0^y\frac{C(t,s)\varphi(t,s)}{s^{\beta}}ds=f(x,y),$$

где $A(x),B(y),C(x,y),f(x,y)$ – заданные функции, $\varphi(x,y)$ – искомая функция, $\alpha\geq 1,\beta\geq 1$.

Работа С.Б.Зарипова [44] посвящена исследованию двухмерного интегрального уравнения типа Вольтерра второго рода с симметричными переменными пределами по обоим переменным и внутренними сингулярными линиями:

$$\varphi(x,y)+\int_{-x}^{x}\frac{A(t)\varphi(t,y)}{|t|}dt+\int_{-y}^{y}\frac{B(s)\varphi(x,s)}{s}ds+\int_{-x}^{x}\frac{dt}{|t|}\int_0^y\frac{C(t,s)\varphi(t,s)}{s}ds=f(x,y).$$

Следует отметить, что работы Л.Н.Раджабовой посвящены изучению двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с осбыми и сильно-особыми линиями [71]-[91].

В работе Раджабовой Л.Н [83] в области $D=\{(x,y): a<x<a_0, b<y<b_0\}$ рассматривается двумерное интегральное уравнение вида:

$$U(x,y)+\lambda\int_a^x \frac{U(t,y)}{(t-a)^\alpha}dt-\mu\int_y^b \frac{U(x,s)}{(b-s)^\beta}ds+\delta\int_a^x \frac{dt}{(t-a)^\alpha}\int_y^b \frac{U(t,s)}{(b-s)^\beta}ds=f(x,y),$$

где λ,μ,δ – заданные постоянные числа, $f(x,y)$ – заданная функция, $U(x,y)$ – искомая функция, $\alpha=const\geq 1, \beta=const\geq 1$.

В работе [86] Раджабова Л.Н в области D исследует немодельное двумерное интегральное уравнение граничными особыми и сильно-особыми ядрами, зависящими от переменных интегрирования вида:

$$U(x,y)+\int_a^x \frac{A(t)U(t,y)}{(t-a)^\alpha}dt-\int_y^b \frac{B(s)U(x,s)}{(b-s)^\beta}ds+\int_a^x \frac{dt}{(t-a)^\alpha}\int_y^b \frac{C(t,s)U(t,s)}{(b-s)^\beta}ds=f(x,y).$$

Раджабова Л.Н в работе [82] в области D исследуется общее двумерное интегральное уравнение с граничными особыми и сильно-особыми ядрами вида:

$$U(x,y)+\int_a^x \frac{K_1(x,y,t)U(t,y)}{(t-a)^\alpha}dt-\int_y^b \frac{K_2(x,y,s)U(x,s)}{(b-s)^\beta}ds+\int_a^x \frac{dt}{(t-a)^\alpha}\int_y^b \frac{K_3(x,y,t,s)U(t,s)}{(b-s)^\beta}ds=f(x,y),$$

где $K_1(x,y,t), K_2(x,y,s), K_3(x,y,t,s)$ – заданные непрерывные функции.

Также важно отметить и другие работы. в том числе работы учеников Раджабовой Л.Н, в том числе работы Г.Н.Шукуровой [117]-[124] и М.Б.Хушвахтова [6], [110]-[115].

Например в работе Г.Н.Шукуровой [117] на интервале $L=\{x: a<x<a_1\}$ рассматривается одномерное интегральное уравнение вида:

$$\varphi(x)+\int_{-x}^{x}\left[p(x,t)+q(x,t)\ln\left|\frac{x}{t}\right|\right]\frac{u(t)}{|t|}dt=f(x),$$

где p,q – заданные постоянные, $p(x,t), q(x,t), f(x)$ – заданные функции, $u(x)$ – искомая функция.

В работе Г.Н.Шукуровой [122] в области $R=\{(x,y):-a<x<a, 0<y<b\}$ рассматривается двумерное интегральное уравнение типа Вольтерра вида:

$$u(x,y)+\int_{-x}^{x}\left[p+q\ln\left|\frac{x}{t}\right|\right]\frac{u(t,y)}{|t|}dt+\lambda\int_{0}^{y}\frac{u(x,s)}{s}ds+\int_{-x}^{x}\left[p_1+q_1\ln\left|\frac{x}{t}\right|\right]\frac{dt}{|t|}\int_{0}^{y}\frac{u(t,s)}{s}ds=f(x,y),$$

где p,q,p_1,q_1,λ – заданные числа, $f(x,y)$ – заданная функция, $u(x,y)$ – искомая функция.

В работе [118] Г.Н.Шукурова в области $R=\{(x,y):-a<x<a, 0<y<b\}$ изучает более общий случай двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра вида:

$$u(x,y)+\int_{-x}^{x}\left[p+q\ln\left|\frac{x}{t}\right|\right]\frac{u(t,y)}{|t|}dt+\lambda\int_{0}^{y}\frac{u(x,s)}{s^\beta}ds+\int_{-x}^{x}\left[p_1+q_1\ln\left|\frac{x}{t}\right|\right]\frac{dt}{|t|}\int_{0}^{y}\frac{u(t,s)}{s^\beta}ds=f(x,y),$$

где $\beta>1$.

Хушвахтов М.Б в [110] в области $D=\{(x,y):0\le a<x<\infty, 0\le b<y<b_0\}$ рассматривает двумерное интегральное уравнение типа Вольтерра с особой и слабо-особой линией вида:

$$u(x,y)+\lambda\int_{x}^{\infty}\frac{u(t,y)}{(t-a)^\alpha}dt+\mu\int_{b}^{y}\frac{u(x,s)}{s-b}ds+\delta\int_{x}^{\infty}\frac{dt}{(t-a)^\alpha}\int_{b}^{y}\frac{u(t,s)}{s-b}ds=f(x,y),$$

где λ,μ,δ – заданные постоянные числа, $f(x,y)$ – заданная функция, $u(x,y)$ – искомая функция, $0<\alpha<1$.

Отметим,что работа Раджабовой Л.Н., Хушвахтова М.Б [6] посвящена изучению в $D=\{(x,y):0\le a<x<\infty, 0\le b<y<b_0\}$ немодельного двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра с сильно-особой и слабо-особой линиями на полосе:

$$u(x,y)+\int_{x}^{\infty}\frac{A(t)u(t,y)}{(t-a)^\alpha}dt+\int_{b}^{y}\frac{B(s)u(x,s)}{s-b}ds+\int_{x}^{\infty}\frac{dt}{(t-a)^\alpha}\int_{b}^{y}\frac{C(t,s)u(t,s)}{s-b}ds=f(x,y).$$

ГЛАВА 2
ИССЛЕДОВАНИЕ ДВУМЕРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА ВОЛЬТЕРРА С ГРАНИЧНЫМИ ОСОБОЙ И СИЛЬНО−ОСОБЫМИ ЛИНИЯМИ, КОГДА ПАРАМЕТРЫ УРАВНЕНИЯ СВЯЗАНЫ МЕЖДУ СОБОЙ

“В настоящей главе изучается в прямоугольнике D двумерное интегральное уравнение типа Вольтерра с фиксированной особенностью и логарифмической особенностью по одной из переменных и сильной особенностью по другой переменной. В случае, когда параметры уравнения связаны между собой определенным образом, задача о нахождении многообразия решений данного двумерного интегрального уравнения сводится к задаче о нахождении многообразия решений интегрального уравнения типа Вольтерра с фиксированной сингулярной и логарифмической особенностью на линии, также интегрального уравнения типа Вольтерра с фиксированной сильной особенностью на линии. Для вышеуказанных интегральных уравнений решая характеристические уравнения, в зависимости от корней характеристических уравнений и знака параметров уравнения, находятся многообразия решений двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра с фиксированной особенностью и логарифмической особенностью по одной из переменных и фиксированной сильной особенностью по другой переменной. Доказано, что решение вышеуказанного уравнения может содержать от двух до четырех произвольных функций. Также установлены случаи, когда решение единственно [1-А, с. 87] ”.

§2.1. Исследование двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра, когда корни характеристических уравнений вещественные и разные

Пусть D прямоугольник $D = \{(x, y) : a < x < a_1, b < y < b_1\}$ с граничными линиями: $\Gamma_1 = \{y = b, a < x < a_1\}$, $\Gamma_2 = \{x = a, b < y < b_1\}$.

Рассмотрим в прямоугольнике D двумерное интегральное уравнение:

$$u(x, y) + \int_a^x \left[p + q ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right]\frac{u(t, y)}{t-a}dt + \int_b^y \left[\lambda + \mu\left(\omega_b^\beta(s) - \omega_b^\beta(y)\right)\right]\frac{u(x, s)}{(s-b)^\beta}ds +$$
$$+\int_a^x \left[p_1 + q_1 ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right]\frac{dt}{t-a}\int_b^y \left[\lambda_1 + \mu_1\left(\omega_b^\beta(s) - \omega_b^\beta(y)\right)\right]\frac{u(t, s)}{(s-b)^\beta}ds = f(x, y). \tag{2.1.1}$$

В уравнении (2.1.1) $p, q, \lambda, \mu, p_1, q_1, \lambda_1, \mu_1$ – заданные постоянные числа, $\beta > 1$, $f(x, y)$ – заданная, $u(x, y)$ – искомая функции, $\omega_b^\beta(y) = [(\beta-1)(y-b)^{\beta-1}]^{-1}$.

Решение интегрального уравнения (2.1.1) будем искать в классе функций $u(x, y) \in C(\overline{D})$, которые обращаются в нуль при $x \to a$, $y \to b$ с асимптотическими поведениями:

$u(x, y) = o[(x-a)^\varepsilon], \varepsilon > 0$, при $x \to a$,

$u(x, y) = o[(y-b)^\nu], \nu > 2(\beta-1)$, при $y \to b$.

Если параметры уравнения (2.1.1) связаны между собой равенствами

$$p = p_1, q = q_1, \lambda = \lambda_1, \mu = \mu_1, \tag{2.1.2}$$

его можно представить в виде:

$$u(x, y) + \int_a^x \left[p + q ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right]\frac{u(t, y)}{t-a}dt +$$
$$+\int_b^y \left[\lambda + \mu\left(\omega_b^\beta(s) - \omega_b^\beta(y)\right)\right]\left\{u(x, s) + \int_a^x \left[p + q ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right]\frac{u(t, s)}{t-a}dt\right\}\frac{ds}{(s-b)^\beta} = f(x, y). \tag{2.1.3}$$

Интегральное уравнение (2.1.3) при помощи интегральных операторов представим в виде:

$$\Pi^{y}_{\lambda,\mu}\left(T^{x}_{p,q}(u)\right) = f(x,y), \tag{2.1.4}$$

где

$$T^{x}_{p,q}(u) \equiv u(x,y) + \int_{a}^{x}\left[p + qln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right]\frac{u(t,y)}{t-a}dt = \psi(x,y), \tag{2.1.5}$$

$$\Pi^{y}_{\lambda,\mu}(\psi) \equiv \psi(x,y) + \int_{b}^{y}\left[\lambda + \mu\left(\omega^{\beta}_{b}(s) - \omega^{\beta}_{b}(y)\right)\right]\frac{\psi(x,s)}{(s-b)^{\beta}}ds = f(x,y). \tag{2.1.6}$$

Интегральное уравнение вида (2.1.5) дважды дифференцируя по x, получим дифференциальное уравнение вида:

$$(D_x)^2 u(x,y) + pD_x u(x,y) + qu(x,y) = (D_x)^2\psi(x,y), \tag{2.1.7}$$

где $D_x = (x-a)\dfrac{d}{dx}$.

Решение однородного уравнения (2.1.6) будем искать в виде:

$$u(x,y) = (x-a)^{\gamma}. \tag{2.1.8}$$

Подставляя (2.1.8) в уравнение (2.1.7), получим характеристическое уравнение вида:

$$\gamma^2 + p\gamma + q = 0. \tag{2.1.9}$$

Если $\Delta_1 = p^2 - 4q > 0$, тогда характеристическое уравнение (2.1.9) имеет решение вида:

$$\gamma_1 = \frac{-p + \sqrt{\Delta_1}}{2}, \quad \gamma_2 = \frac{-p - \sqrt{\Delta_1}}{2}.$$

Следовательно, общее решение однородного уравнения (2.1.7) имеет вид:

$$u(x,y) = c_1(y)(x-a)^{\gamma_1} + c_2(y)(x-a)^{\gamma_2}. \tag{2.1.10}$$

Для нахождения общего решения неоднородного уравнения (2.1.7) используем метод вариации произвольных постоянных, полагая:

$$u(x,y) = c_1(x,y)(x-a)^{\gamma_1} + c_2(x,y)(x-a)^{\gamma_2}, \tag{2.1.11}$$

где $c_1(x,y), c_2(x,y)$ – произвольные функции точек Γ_1. Дифференцируя (2.1.11), далее используя произвольность функции $c_1(x,y)$ и $c_2(x,y)$, получим:

$$D_x u(x,y) = \gamma_1 c_1(x,y)(x-a)^{\gamma_1} + \gamma_2 c_2(x,y)(x-a)^{\gamma_2} + c_1^{|}(x,y)(x-a)^{\gamma_1+1} + c_2^{|}(x,y)(x-a)^{\gamma_2+1},$$

$$D_x c_1(x,y)(x-a)^{\gamma_1} + D_x c_2(x,y)(x-a)^{\gamma_2} = 0.$$

Дифференцируя ещё раз полученное равенство, после замечая, что γ_1 и γ_2 корни уравнения (2.1.9), имеем:

$$(D_x)^2 u(x,y) = \gamma_1 c_1^{|}(x,y)(x-a)^{\gamma_1+1} + \gamma_2 c_2^{|}(x,y)(x-a)^{\gamma_2+1} + \gamma_1^2 c_1(x,y)(x-a)^{\gamma_1} + \gamma_2^2 c_2(x,y)(x-a)^{\gamma_2}.$$

В результате для определения произвольных функций $c_1(x,y)$ и $c_2(x,y)$ получим систему вырождающихся дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{cases} D_x c_1(x,y)(x-a)^{\gamma_1} + D_x c_2(x,y)(x-a)^{\gamma_2} = 0, \\ D_x c_1(x,y)\gamma_1(x-a)^{\gamma_1} + D_x c_2(x,y)\gamma_2(x-a)^{\gamma_2} = (D_x)^2\psi(x,y). \end{cases} \tag{2.1.12}$$

Решая систему уравнений (2.1.12) методом Крамера, получим:

$$\Delta = \begin{vmatrix} (x-a)^{\gamma_1} & (x-a)^{\gamma_2} \\ \gamma_1(x-a)^{\gamma_1} & \gamma_2(x-a)^{\gamma_2} \end{vmatrix} = (\gamma_2 - \gamma_1)(x-a)^{\gamma_1+\gamma_2},$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & (x-a)^{\gamma_2} \\ (D_x)^2\psi(x,y) & \gamma_2(x-a)^{\gamma_2} \end{vmatrix} = -(D_x)^2\psi(x,y)(x-a)^{\gamma_2},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} (x-a)^{\gamma_1} & 0 \\ \gamma_1(x-a)^{\gamma_1} & (D_x)^2\psi(x,y) \end{vmatrix} = (D_x)^2\psi(x,y)(x-a)^{\gamma_1}.$$

Тогда решения системы уравнений (2.1.12) примут вид:

$$\begin{cases} D_x c_1(x,y) = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = -\dfrac{(D_x)^2\psi(x,y)}{\gamma_2 - \gamma_1}(x-a)^{-\gamma_1}, \\ D_x c_2(x,y) = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{(D_x)^2\psi(x,y)}{\gamma_2 - \gamma_1}(x-a)^{-\gamma_2}. \end{cases} \tag{2.1.13}$$

Отсюда находим:

$$c_1(x,y)=\theta_1(y)-\frac{(x-a)^{-\gamma_1}}{\gamma_2-\gamma_1}D_x\psi(x,y)-\frac{\gamma_1}{\gamma_2-\gamma_1}\left[(x-a)^{-\gamma_1}\psi(x,y)-\left((t-a)^{-\gamma_1}\psi(x,y)\right)_{t=0}-\frac{\gamma_1^2}{\gamma_2-\gamma_1}\int_a^x\frac{\psi(t,y)}{(t-a)^{\gamma_1+1}}dt\right].$$

От функции $\psi(x,y)$ потребуем обращение в нуль в точке $x=a$ с асимптотическим поведением:

$$\psi(x,y)=o[(x-a)^{\delta}],\delta>\gamma_1,\ \text{при}\ x\to a. \qquad (2.1.14)$$

Следовательно:

$$c_1(x,y)=\theta_1(y)-\frac{(x-a)^{-\gamma_1}}{\gamma_2-\gamma_1}D_x\psi(x,y)-\frac{\gamma_1}{\gamma_2-\gamma_1}(x-a)^{-\gamma_1}\psi(x,y)-\frac{\gamma_1^2}{\gamma_2-\gamma_1}\int_a^x\frac{\psi(t,y)}{(t-a)^{\gamma_1+1}}dt.$$

Аналогичным образом находим:

$$c_2(x,y)=\theta_1(y)+\frac{(x-a)^{-\gamma_2}}{\gamma_2-\gamma_1}D_x\psi(x,y)+\frac{\gamma_2}{\gamma_2-\gamma_1}\left[(x-a)^{-\gamma_2}\psi(x,y)-\left((t-a)^{-\gamma_2}\psi(t,y)\right)_{t=0}+\frac{\gamma_2^2}{\gamma_2-\gamma_1}\int_a^x\frac{\psi(t,y)}{(t-a)^{\gamma_2+1}}dt\right].$$

Откуда:

$$c_2(x,y)=\theta_2(y)+\frac{(x-a)^{-\gamma_2}}{\gamma_2-\gamma_1}D_x\psi(x,y)+\frac{\gamma_2}{\gamma_2-\gamma_1}(x-a)^{-\gamma_2}\psi(x,y)+\frac{\gamma_2^2}{\gamma_2-\gamma_1}\int_a^x\frac{\psi(t,y)}{(t-a)^{\gamma_2+1}}dt.$$

Полученные значения $c_1(x,y)$ и $c_2(x,y)$ ставим в решение вида (2.1.11), когда $p<0, q>0, p^2-4q>0$ и если решение интегрального уравнения (2.1.5) существует, тогда оно представимо в виде:

$$u(x,y)=\theta_1(y)(x-a)^{\gamma_1}+\theta_2(y)(x-a)^{\gamma_2}+\psi(x,y)+\frac{1}{\sqrt{p^2-4q}}\int_a^x\left[(\gamma_2)^2\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\gamma_2}-(\gamma_1)^2\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\gamma_1}\right]\frac{\psi(t,y)}{t-a}dt. \qquad (2.1.15)$$

Аналогично, интегральное уравнение вида (2.1.6) дважды дифференцируя по y, получим дифференциальное уравнение вида:

$$(D_y)^2\psi(x,y)-\lambda D_y\psi(x,y)+\mu\psi(x,y)=(D_y)^2 f(x,y), \qquad (2.1.16)$$

где $D_y=(y-b)^{\beta}\dfrac{d}{dy}$.

Решение однородного уравнения (2.1.6) будем искать в виде:

$$\psi(x, y) = e^{\eta \omega_b^\beta (y)}. \tag{2.1.17}$$

Подставляя (2.1.17) в уравнение (2.1.16), получим характеристическое уравнение вида:

$$\eta^2 - \lambda \eta + \mu = 0. \tag{2.1.18}$$

Если $\Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu > 0$, тогда характеристическое уравнение (2.1.18) имеет решение вида:

$$\eta_1 = \frac{\lambda + \sqrt{\Delta_2}}{2}, \quad \eta_2 = \frac{\lambda - \sqrt{\Delta_2}}{2}.$$

Следовательно, общее решение однородного уравнения (2.1.6) имеет вид:

$$\psi(x, y) = c_3(x) e^{\eta_1 \omega_b^\beta (y)} + c_4(x) e^{\eta_2 \omega_b^\beta (y)}. \tag{2.1.19}$$

Для нахождения общего решения неоднородного уравнения (2.1.6) используем метод вариации произвольных постоянных, полагая:

$$\psi(x, y) = c_3(x, y) e^{\eta_1 \omega_b^\beta (y)} + c_4(x, y) e^{\eta_2 \omega_b^\beta (y)}, \tag{2.1.20}$$

где $c_3(x, y), c_4(x, y)$ – произвольные функции точек Γ_2. Дифференцируя (2.1.20), далее используя произвольность функции $c_3(x, y)$ и $c_4(x, y)$, получим:

$$D_y \psi(x, y) = -\eta_1 c_3(x, y) e^{\eta_1 \omega_b^\beta (y)} - \eta_2 c_4(x, y) e^{\eta_2 \omega_b^\beta (y)} + c_3^{|}(x, y)(y - b)^\beta e^{\eta_1 \omega_b^\beta (y)} + c_4^{|}(x, y)(y - b)^\beta e^{\eta_2 \omega_b^\beta (y)},$$
$$D_y c_3(x, y) e^{\eta_1 \omega_b^\beta (y)} + D_y c_4(x, y) e^{\eta_2 \omega_b^\beta (y)} = 0.$$

Дифференцируя ещё раз полученное равенство, после замечая, что η_1 и η_2 корни уравнения (2.1.18), имеем:

$$(D_y)^2 \psi(x, y) = -c_3^{|}(x, y) \eta_1 (y - b)^\beta e^{\eta_1 \omega_b^\beta (y)} - c_4^{|}(x, y) \eta_2 (y - b)^\beta e^{\eta_2 \omega_b^\beta (y)} +$$
$$+ c_3(x, y) \eta_1^2 e^{\eta_1 \omega_b^\beta (y)} + c_4(x, y) \eta_2^2 e^{\eta_2 \omega_b^\beta (y)}$$

В результате, для определения произвольных функций $c_3(x,y)$ и $c_4(x,y)$ получим систему вырождающихся дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{cases} D_y c_3(x,y) e^{\eta_1 \omega_b^\beta(y)} + D_y c_4(x,y) e^{\eta_2 \omega_b^\beta(y)} = 0, \\ D_y c_3(x,y) \eta_1 e^{\eta_1 \omega_b^\beta(y)} + D_y c_4(x,y) \eta_2 e^{\eta_2 \omega_b^\beta(y)} = (D_y)^2 f(x,y). \end{cases} \tag{2.1.21}$$

Решая систему уравнений (2.1.21) методом Крамера, получим:

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{\eta_1 \omega_b^\beta(y)} & e^{\eta_2 \omega_b^\beta(y)} \\ \eta_1 e^{\eta_1 \omega_b^\beta(y)} & \eta_2 e^{\eta_2 \omega_b^\beta(y)} \end{vmatrix} = (\eta_2 - \eta_1) e^{(\eta_1 + \eta_2)\omega_b^\beta(y)},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & e^{\eta_2 \omega_b^\beta(y)} \\ (D_y)^2 f(x,y) & \eta_2 e^{\eta_2 \omega_b^\beta(y)} \end{vmatrix} = -(D_y)^2 f(x,y) e^{\eta_2 \omega_b^\beta(y)},$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} e^{\eta_1 \omega_b^\beta(y)} & 0 \\ \eta_1 e^{\eta_1 \omega_b^\beta(y)} & (D_y)^2 f(x,y) \end{vmatrix} = (D_y)^2 f(x,y) e^{\eta_1 \omega_b^\beta(y)}.$$

Тогда решения системы уравнений (2.1.21) примут вид:

$$\begin{cases} D_y c_3(x,y) = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = -\dfrac{(D_y)^2 f(x,y)}{\eta_2 - \eta_1} e^{-\eta_1 \omega_b^\beta(y)}, \\ D_y c_4(x,y) = \dfrac{\Delta_4}{\Delta} = \dfrac{(D_y)^2 f(x,y)}{\eta_2 - \eta_1} e^{-\eta_2 \omega_b^\beta(y)}. \end{cases} \tag{2.1.22}$$

Отсюда находим:

$$c_3(x,y) = \varphi_1(x) - \frac{e^{-\eta_1 \omega_b^\beta(y)}}{\eta_2 - \eta_1} D_y f(x,y) + \frac{\eta_1}{\eta_2 - \eta_1}\left[e^{-\eta_1 \omega_b^\beta(y)} f(x,y) - \left(e^{-\eta_1 \omega_b^\beta(s)} f(x,s) \right)_{s=b} \right] - \frac{\eta_1^2}{\eta_2 - \eta_1} \int_b^y \frac{e^{-\eta_1 \omega_b^\beta(s)}}{(s-b)^\beta} f(x,s)\,ds.$$

От функции $f(x,y)$ потребуем обращение в нуль в точке $y = b$ с асимптотическим поведением:

$$f(x,y) = o[e^{\eta_1 \omega_b^\beta(y)} (y-b)^\nu], \nu > \eta_2, \quad \text{при} \quad y \to b. \tag{2.1.23}$$

Следовательно:

$$c_3(x,y)=\varphi_1(x)-\frac{e^{-\eta_1\omega_b^\beta(y)}}{\eta_2-\eta_1}D_y f(x,y)+\frac{\eta_1}{\eta_2-\eta_1}e^{-\eta_1\omega_b^\beta(y)}f(x,y)-\frac{\eta_1^2}{\eta_2-\eta_1}\int_b^y\frac{e^{-\eta_1\omega_b^\beta(s)}}{(s-b)^\beta}f(x,s)ds.$$

Аналогичным образом находим:

$$c_4(x,y)=\varphi_2(x)+\frac{e^{-\eta_2\omega_b^\beta(y)}}{\eta_2-\eta_1}D_y f(x,y)-\frac{\eta_2}{\eta_2-\eta_1}\left[e^{-\eta_2\omega_b^\beta(y)}f(x,y)-\left(e^{-\eta_2\omega_b^\beta(s)}f(x,s)\right)_{s=b}\right]-\frac{\eta_2^2}{\eta_2-\eta_1}\int_b^y\frac{e^{-\eta_2\omega_b^\beta(s)}}{(s-b)^\beta}f(x,s)ds.$$

Откуда:

$$c_4(x,y)=\varphi_2(x)+\frac{e^{-\eta_2\omega_b^\beta(y)}}{\eta_2-\eta_1}D_y f(x,y)-\frac{\eta_2}{\eta_2-\eta_1}e^{-\eta_2\omega_b^\beta(y)}f(x,y)+\frac{\eta_2^2}{\eta_2-\eta_1}\int_b^y\frac{e^{-\eta_2\omega_b^\beta(s)}}{(s-b)^\beta}f(x,s)ds.$$

Полученные значение $c_3(x,y)$ и $c_4(x,y)$ ставим в решение вида (2.1.21), если решение интегрального уравнения (2.1.6) при $\lambda<0,\mu>0,\lambda^2-4\mu>0$ существует, тогда оно имеет вид:

$$\psi(x,y)=\varphi_1(x)e^{\eta_1\omega_b^\beta(y)}+\varphi_2(x)e^{\eta_2\omega_b^\beta(y)}+f(x,y)+\frac{1}{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}\left[(\eta_2)^2e^{\eta_2\left(\omega_b^\beta(y)-\omega_b^\beta(s)\right)}-(\eta_1)^2e^{\eta_1\left(\omega_b^\beta(y)-\omega_b^\beta(s)\right)}\right]\frac{f(x,s)}{(s-b)^\beta}ds. \quad (2.1.24)$$

Вместо функции $\psi(x,y)$ в равенстве (2.1.15) подставим её значение из равенства (2.1.24), откуда получим решение интегрального уравнения (2.1.1) в виде:

$$u(x,y)=\theta_1(y)(x-a)^{\gamma_1}+\theta_2(y)(x-a)^{\gamma_2}+e^{\eta_1\omega_b^\beta(y)}\Phi_1(x)+e^{\eta_2\omega_b^\beta(y)}\Phi_2(x)+K_{p,q,\lambda,\mu}^{(x,y)}\left[f(x,y)\right], \quad (2.1.25)$$

где

$$\Phi_i(x)=\varphi_i(x)+\frac{1}{\sqrt{p^2-4q}}\int_a^x\left[(\gamma_2)^2\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\gamma_2}-(\gamma_1)^2\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\gamma_1}\right]\frac{\varphi_i(t)}{t-a}dt,\ (i=\ 1,2), \quad (2.1.26)$$

$$\begin{aligned}K_{p,q,\lambda,\mu}^{(x,y)}[f(x,y)]=\ &f(x,y)+\frac{1}{\sqrt{p^2-4q}}\int_a^x\left[(\gamma_2)^2\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\gamma_2}-(\gamma_1)^2\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\gamma 1}\right]\frac{f(t,y)}{t-a}dt+\\&+\frac{1}{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}\int_b^y\left[(\eta_2)^2e^{\eta_2\left(\omega_b^\beta(y)-\omega_b^\beta(s)\right)}-(\eta_1)^2e^{\eta_1\left(\omega_b^\beta(y)-\omega_b^\beta(s)\right)}\right]\frac{f(x,s)}{(s-b)^\beta}ds+\\&+\frac{1}{\sqrt{\left(p^2-4q\right)\left(\lambda^2-4\mu\right)}}\int_b^y\left[(\eta_2)^2e^{\eta_2\left(\omega_b^\beta(y)-\omega_b^\beta(s)\right)}-(\eta_1)^2e^{\eta_1\left(\omega_b^\beta(y)-\omega_b^\beta(s)\right)}\right]\frac{ds}{(s-b)^\beta}\times\\&\times\int_a^x\left[(\gamma_2)^2\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\gamma_2}-(\gamma_1)^2\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\gamma_1}\right]\frac{f(t,s)}{t-a}dt.\end{aligned} \quad (2.1.27)$$

На основе вышеизложенных рассуждений справедливы следующие утверждения:

Теорема 2.1.1. *Если в интегральном уравнении* (2.1.1) *выполняются условия* (2.1.2)*, также условия*:

1. $\Delta_1 = p^2 - 4q > 0$, $p < 0$, $q > 0$,
2. $\Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu > 0$, $\lambda < 0$, $\mu > 0$,
3. $f(x,y) \in C(\overline{D})$, $f(a,b) = 0$ *с асимптотическим поведением на* Γ_1 *и* Γ_2:

$$f(x,y) = o[(x-a)^{\delta_1}], \delta_1 > \gamma_1, \text{ при } \quad x \to a,$$

$$f(x,y) = o[e^{\eta_2 \omega_b^\beta(y)}(y-b)^{\nu_1}], \nu_1 > \beta - 1, \text{ при } \quad y \to b,$$

тогда интегральное уравнение (2.1.1) *в классе* $C(\overline{D})$, *обращающихся в нуль при* $x \to a$, $y \to b$, *всегда разрешимо и его явное решение представимо в виде* (2.1.25), *где* $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \theta_1(y), \theta_2(y)$ – *произвольные непрерывные функции на* Γ_1 *и* Γ_2, *обращающиеся в нуль при* $x \to a$, $y \to b$ *с асимптотическими поведениями*:

$$\varphi_i(x) = o[(x-a)^{\delta_2}], \delta_2 > \gamma_1, \text{ при } \quad x \to a, \ (i = 1,2),$$

$$\theta_j(y) = o[(y-b)^{\nu_2}], \nu_2 > 2(\beta - 1), \text{ при } \quad y \to b, (j = 1,2),$$

$$\gamma_1 = \frac{-p + \sqrt{\Delta_1}}{2} > 0, \ \gamma_2 = \frac{-p - \sqrt{\Delta_1}}{2} > 0, \ \eta_1 = \frac{\lambda + \sqrt{\Delta_2}}{2} < 0, \ \eta_2 = \frac{\lambda - \sqrt{\Delta_2}}{2} < 0, \ (\gamma_1 > \gamma_2), \ (\eta_1 > \eta_2). \quad (2.1.28)$$

Следствие 2.1.1. *Пусть коэффициенты интегрального уравнения* (2.1.1) *удовлетворяют условиям теоремы* 2.1.1. *Тогда* $u(x,y) \in C(\overline{D})$ *и обращается в нуль с асимптотическими поведениями*:

$$u(x,y) = o[(x-a)^{\gamma_1}], x \to a,$$

$$u(x,y) = o[(y-b)^{\nu_3}], \nu_3 > 2(\beta - 1), y \to b.$$

Теорема 2.1.2. *Если в интегральном уравнении* (2.1.1) *выполняются условия* (2.1.2)*, также условия*:

1. $\Delta_1 = p^2 - 4q > 0$, $p < 0$, $q > 0$,

2. $\Delta_2=\lambda^2-4\mu>0,\lambda>0,\mu<0,$

3. $f(x,y)\in C(\overline{D}),\ f(a,b)=0$ *с асимптотическим поведением на* Γ_1 *и* Γ_2:

$f(x,y)=o[(x-a)^{\delta_3}],\delta_3>\gamma_1,$ *при* $x\to a,$

$f(x,y)=o[e^{\eta_3\omega_b^\beta(y)}(y-b)^{\nu_4}],\nu_4>\beta-1,$ *при* $y\to b$,

тогда интегральное уравнение (2.1.1) *в классе* $C(\overline{D})$, *обращающихся в нуль при* $x\to a,\ \ y\to b,$ *всегда разрешимо и его явное решение представимо в виде*:

$$u(x,y)=\theta_1(y)(x-a)^{\gamma_1}+\theta_2(y)(x-a)^{\gamma_2}+e^{\eta_3\omega_b^\beta(y)}\Phi_3(x)+K_{p,q,\lambda,\mu}^{(x,y)}\left[f(x,y)\right], \quad (2.1.29)$$

где $\varphi_3(x),\theta_1(y),\theta_2(y)-$ *произвольные непрерывные функции на* Γ_1 *и* Γ_2, *обращающиеся в нуль при* $x\to a,\ y\to b$ *с асимптотическими поведениями:*

$\varphi_3(x)=o[(x-a)^{\delta_4}],\delta_4>\gamma_1,$ *при* $x\to a,$

$\theta_j(y)=o[(y-b)^{\nu_5}],\nu_5>2(\beta-1),$ *при* $y\to b$, $(j=1,2),$

$$\eta_3=\frac{\lambda-\sqrt{\Delta_2}}{2}<0. \quad (2.1.30)$$

Следствие 2.1.2. *Пусть коэффициенты интегрального уравнения* (2.1.1) *удовлетворяют условиям теоремы* 2.1.2. *Тогда* $u(x,y)\in C(\overline{D})$ *и обращается в нуль с асимптотическими поведениями*:

$u(x,y)=o[(x-a)^{\gamma_1}],x\to a,$

$u(x,y)=o[(y-b)^{\nu_6}],\nu_6>2(\beta-1),y\to b.$

Теорема 2.1.3. *Если в интегральном уравнении* (2.1.1) *выполняются условия* (2.1.2)*, также условия*:

1. $\Delta_1=p^2-4q>0,\ p<0,\ q>0,$

2. $\Delta_2=\lambda^2-4\mu>0,\lambda<0,\mu<0,$

3. $f(x,y)\in C(\overline{D}),\ f(a,b)=0$ *с асимптотическим поведением на* Γ_1 *и* Γ_2:

$f(x,y)=o[(x-a)^{\delta_5}],\delta_5>\gamma_1,$ *при* $x\to a,$

$$f(x,y)=o[e^{\eta_4\omega_b^\beta(y)}(y-b)^{\nu_7}],\nu_7>\beta-1,\ \text{при}\quad y\to b\,,$$

тогда интегральное уравнение (2.1.1) *в классе* $C(\overline{D})$, *обращающихся в нуль при* $x\to a,\ \ y\to b$, *всегда разрешимо и его явное решение представимо в виде*:

$$u(x,y)=\theta_1(y)(x-a)^{\gamma_1}+\theta_2(y)(x-a)^{\gamma_2}+e^{\eta_4\omega_b^\beta(y)}\Phi_4(x)+K_{p,q,\lambda,\mu}^{(x,y)}[f(x,y)],\ \ (2.1.31)$$

где $\varphi_4(x),\theta_1(y),\theta_2(y)-$*произвольные непрерывные функции на* Γ_1 *и* Γ_2, *обращающиеся в нуль при* $x\to a$, $y\to b$ *с асимптотическими поведениями*:

$$\varphi_4(x)=o[(x-a)^{\delta_6}],\delta_6>\gamma_1,\ \text{при}\ x\to a,$$

$$\theta_j(y)=o[(y-b)^{\nu_8}],\nu_8>2(\beta-1),\ \text{при}\ y\to b\,,\ (j=\ 1,2),$$

$$\eta_4=\frac{\lambda-\sqrt{\Delta_2}}{2}<0. \qquad (2.1.32)$$

Следствие 2.1.3. *Пусть коэффициенты интегрального уравнения* (2.1.1) *удовлетворяют условиям теоремы* 2.1.3. *Тогда* $u(x,y)\in C(\overline{D})$ *и обращается в нуль с асимптотическими поведениями*:

$$u(x,y)=o[(x-a)^{\gamma_1}],x\to a,$$

$$u(x,y)=o[(y-b)^{\nu_9}],\nu_9>2(\beta-1),y\to b.$$

Теорема 2.1.4. *Если в интегральном уравнении* (2.1.1) *выполняются условия* (2.1.2)*, также условия*:

1. $\Delta_1=p^2-4q>0\,,p<0,\ q>0,$
2. $\Delta_2=\lambda^2-4\mu>0\,,\lambda>0,\mu>0,$
3. $f(x,y)\in C(\overline{D}),\ \ f(a,b)\ =0$ *с асимптотическим поведением на* Γ_1 *и* Γ_2:

$$f(x,y)=o[(x-a)^{\delta_7}],\delta_7>\gamma_1,\text{при}\quad x\to a,$$

$$f(x,y)=o[(y-b)^{\nu_{10}}],\nu_{10}>\beta-1,\text{при}\ \ y\to b,$$

тогда интегральное уравнение (2.1.1) *в классе* $C(\overline{D})$, *обращающихся в нуль при* $x \to a$, $y \to b$, *всегда разрешимо и его явное решение представимо в виде*:

$$u(x, y) = \theta_1(y)(x-a)^{\gamma_1} + \theta_2(y)(x-a)^{\gamma_2} + K^{(x,y)}_{p,q,\lambda,\mu}[f(x, y)], \quad (2.1.33)$$

где $\theta_1(y), \theta_2(y)$ – *произвольные непрерывные функции на* Γ_2, *обращающиеся в нуль при* $y \to b$ *с асимптотическим поведением*:

$\theta_j(y) = o[(y-b)^{\nu_{11}}], \nu_{11} > 2(\beta-1)$, *при* $y \to b$, $(j = 1, 2)$.

Следствие 2.1.4. *Пусть коэффициенты интегрального уравнения* (2.1.1) *удовлетворяют условиям теоремы* 2.1.4. *Тогда* $u(x, y) \in C(\overline{D})$ *и обращается в нуль с асимптотическими поведениями*:

$u(x, y) = o[(x-a)^{\gamma_1}], x \to a,$

$u(x, y) = o[(y-b)^{\nu_{12}}], \nu_{12} > 2(\beta-1), y \to b.$

Теорема 2.1.5. *Если в интегральном уравнении* (2.1.1) *выполняются условия* (2.1.2)*, также условия*:

1. $\Delta_1 = p^2 - 4q > 0$, $p > 0, q < 0,$
2. $\Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu > 0$, $\lambda < 0, \mu > 0,$
3. $f(x, y) \in C(\overline{D})$, $f(a, b) = 0$ *с асимптотическим поведением на* Γ_1 *и* Γ_2:

$f(x, y) = o[(x-a)^{\delta_8}], \delta_8 > \gamma_3$, *при* $x \to a$,

$f(x, y) = o[e^{\eta_1\omega_b^\beta(y)}(y-b)^{\nu_{13}}], \nu_{13} > \beta - 1$, *при* $y \to b$,

тогда интегральное уравнение (2.1.1) *в классе* $C(\overline{D})$, *обращающихся в нуль при* $x \to a$, $y \to b$, *всегда разрешимо и его явное решение представимо в виде*:

$$u(x, y) = \theta_3(y)(x-a)^{\gamma_3} + e^{\eta_1\omega_b^\beta(y)}\Phi_1(x) + e^{\eta_2\omega_b^\beta(y)}\Phi_2(x) + K^{(x,y)}_{p,q,\lambda,\mu}[f(x, y)], \quad (2.1.34)$$

где $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \theta_3(y)$ – *произвольные непрерывные функции на* Γ_1 *и* Γ_2, *обращающиеся в нуль при* $x \to a$, $y \to b$ *с асимптотическим поведением*:

$\varphi_i(x) = o[(x-a)^{\delta_9}], \delta_9 > \gamma_3$, *при* $x \to a$, $i = (1,2)$,

$\theta_3(y) = o[(y-b)^{\nu_{14}}], \nu_{14} > 2(\beta - 1)$, *при* $y \to b$,

$$\gamma_3 = \frac{-p+\sqrt{\Delta_1}}{2} > 0. \tag{2.1.35}$$

Следствие 2.1.5. *Пусть коэффициенты интегрального уравнения* (2.1.1) *удовлетворяют условиям теоремы* 2.1.5. *Тогда* $u(x,y) \in C(\overline{D})$ *и обращается в нуль с асимптотическими поведениями*:

$u(x,y) = o[(x-a)^{\gamma_3}], x \to a$,

$u(x,y) = o[(y-b)^{\nu_{15}}], \nu_{15} > 2(\beta-1), y \to b$.

Теорема 2.1.6. *Если в интегральном уравнении* (2.1.1) *выполняются условия* (2.1.2), *также условия*:

1. $\Delta_1 = p^2 - 4q > 0$, $p > 0, q < 0$,
2. $\Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu > 0$, $\lambda > 0, \mu < 0$,
3. $f(x,y) \in C(\overline{D})$, $f(a,b) = 0$ *с асимптотическим поведением на* Γ_1 *и* Γ_2:

$f(x,y) = o[(x-a)^{\delta_{10}}], \delta_{10} > \gamma_3$, *при* $x \to a$,

$f(x,y) = o[e^{\eta_3 \omega_b^{\beta}(y)}(y-b)^{\nu_{16}}], \nu_{16} > \beta - 1$, *при* $y \to b$,

тогда интегральное уравнение (2.1.1) *в классе* $C(\overline{D})$, *обращающихся в нуль при* $x \to a$, $y \to b$, *всегда разрешимо и его явное решение представимо в виде*:

$$u(x,y) = \theta_3(y)(x-a)^{\gamma_3} + e^{\eta_3 \omega_b^{\beta}(y)} \Phi_3(x) + K_{p,q,\lambda,\mu}^{(x,y)}[f(x,y)], \tag{2.1.36}$$

где $\varphi_3(x), \theta_3(y)$ – *произвольные непрерывные функции на* Γ_1 *и* Γ_2, *обращающиеся в нуль при* $x \to a$, $y \to b$ *с асимптотическими поведениями*:

$\varphi_3(x) = o[(x-a)^{\delta_{15}}], \delta_{15} > \gamma_3$, *при* $x \to a$,

$\theta_3(y) = o[(y-b)^{\nu_{17}}], \nu_{17} > 2(\beta - 1),$ *при* $y \to b$,

Следствие 2.1.6. *Пусть коэффициенты интегрального уравнения* (2.1.1) *удовлетворяют условиям теоремы* 2.1.6. *Тогда* $u(x,y) \in C(\overline{D})$ *и обращается в нуль с асимптотическими поведениями*:

$u(x,y) = o[(x-a)^{\gamma_3}], x \to a,$

$u(x,y) = o[(y-b)^{\nu_{18}}], \nu_{18} > 2(\beta - 1), y \to b.$

Теорема 2.1.7. *Если в интегральном уравнении* (2.1.1) *выполняются условия* (2.1.2)*, также условия*:

1. $\Delta_1 = p^2 - 4q > 0$, $p > 0, q < 0,$
2. $\Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu > 0$, $\lambda < 0, \mu < 0,$
3. $f(x,y) \in C(\overline{D}),\ f(a,b) = 0$ *с асимптотическим поведением на* Γ_1 *и* Γ_2:

$f(x,y) = o[(x-a)^{\delta_{11}}], \delta_{11} > \gamma_3,$ *при* $x \to a,$

$f(x,y) = o[e^{\eta_4 \omega_b^{\beta}(y)}(y-b)^{\nu_{19}}], \nu_{19} > \beta - 1,$ *при* $y \to b,$

тогда интегральное уравнение (2.1.1) *в классе* $C(\overline{D})$, *обращающихся в нуль при* $x \to a$, $y \to b$, *всегда разрешимо и его явное решение представимо в виде*:

$$u(x,y) = \theta_3(y)(x-a)^{\gamma_3} + e^{\eta_4 \omega_b^{\beta}(y)} \Phi_4(x) + K_{p,q,\lambda,\mu}^{(x,y)}\left[f(x,y)\right], \quad (2.1.37)$$

где $\varphi_4(x), \theta_3(y)$ – *произвольные непрерывные функции на* Γ_1 *и* Γ_2, *обращающиеся в нуль при* $x \to a$, $y \to b$ *с асимптотическими поведениями*:

$\varphi_4(x) = o[(x-a)^{\delta_{12}}], \delta_{12} > \gamma_3,$ *при* $x \to a,$

$\theta_3(y) = o[(y-b)^{\nu_{20}}], \nu_{20} > 2(\beta - 1),$ *при* $y \to b$,

Следствие 2.1.7. *Пусть коэффициенты интегрального уравнения* (2.1.1) *удовлетворяют условиям теоремы* 2.1.7. *Тогда* $u(x,y) \in C(\overline{D})$ *и обращается в нуль с асимптотическими поведениями*:

$u(x,y)=o[(x-a)^{\gamma_3}],x\to a,$

$u(x,y)=o[(y-b)^{\nu_{21}}],\nu_{21}>2(\beta-1),y\to b.$

Теорема 2.1.8. *Если в интегральном уравнении* (2.1.1) *выполняются условия* (2.1.2)*, также условия*:

1. $\Delta_1=p^2-4q>0,\ p>0,q<0,$
2. $\Delta_2=\lambda^2-4\mu>0,\lambda>0,\mu>0,$
3. $f(x,y)\in C(\overline{D}),\ f(a,b)=0$ *с асимптотическим поведением на* Γ_1 *и* Γ_2:

$f(x,y)=o[(x-a)^{\delta_{13}}],\delta_{13}>\gamma_3,$ *при* $x\to a,$

$f(x,y)=o[(y-b)^{\nu_{22}}],\nu_{22}>\beta-1,$ *при* $y\to b,$

тогда интегральное уравнение (2.1.1) *в классе* $C(\overline{D})$, *обращающихся в нуль при* $x\to a,\ y\to b,$ *всегда разрешимо и его явное решение представимо в виде*:

$$u(x,y)=\theta_3(y)(x-a)^{\gamma_3}+K_{p,q,\lambda,\mu}^{(x,y)}[f(x,y)], \qquad (2.1.38)$$

где $\theta_3(y)$ – *произвольные непрерывные функции на* Γ_2, *обращающиеся в нуль при* $y\to b$ *с асимптотическими поведениями*:

$\theta_3(y)=o[(y-b)^{\nu_{23}}],\nu_{23}>2(\beta-1)$ *при* $y\to b.$

Следствие 2.1.8. *Пусть коэффициенты интегрального уравнения* (2.1.1) *удовлетворяют условиям теоремы* 2.1.8. *Тогда* $u(x,y)\in C(\overline{D})$ *и обращается в нуль с асимптотическими поведениями*:

$u(x,y)=o[(x-a)^{\gamma_3}],x\to a,$

$u(x,y)=o[(y-b)^{\nu_{24}}],\nu_{24}>2(\beta-1),y\to b.$

Теорема 2.1.9. *Если в интегральном уравнении* (2.1.1) *выполняются условия* (2.1.2)*, также условия*:

1. $\Delta_1=p^2-4q>0,\ p<0,\ q<0,$

2. $\Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu > 0, \lambda < 0, \mu > 0,$

3. $f(x,y) \in C(\overline{D}),\ f(a,b) = 0$ *с асимптотическим поведением на* Γ_1 *и* Γ_2:

$f(x,y) = o[(x-a)^{\delta_{14}}], \delta_{14} > \gamma_4$, *при* $x \to a,$

$f(x,y) = o[e^{\eta_1 \omega_b^\beta(y)}(y-b)^{\nu_{25}}], \nu_{25} > \beta - 1,$ *при* $y \to b,$

тогда интегральное уравнение (2.1.1) *в классе* $C(\overline{D})$, *обращающихся в нуль при* $x \to a,\ \ y \to b$, *всегда разрешимо и его явное решение представимо в виде*:

$$u(x,y) = \theta_4(y)(x-a)^{\gamma_4} + e^{\eta_1 \omega_b^\beta(y)} \Phi_1(x) + e^{\eta_2 \omega_b^\beta(y)} \Phi_2(x) + K_{p,q,\lambda,\mu}^{(x,y)}\left[f(x,y)\right], \quad (2.1.39)$$

где $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \theta_4(y)$ – *произвольные непрерывные функции на* Γ_1 *и* Γ_2, *обращающиеся в нуль при* $x \to a,\ y \to b$ *с асимптотическим поведением*:

$\varphi_i(x) = o[(x-a)^{\delta_{15}}], \delta_{15} > \gamma_9,$ *при* $x \to a,\ i = (1,2),$

$\theta_4(y) = o[(y-b)^{\nu_{26}}], \nu_{26} > 2(\beta - 1),$ *при* $y \to b$,

$$\gamma_4 = \frac{-p + \sqrt{\Delta_1}}{2} > 0. \quad (2.1.40)$$

Следствие 2.1.9. *Пусть коэффициенты интегрального уравнения* (2.1.1) *удовлетворяют условиям теоремы* 2.1.9. *Тогда* $u(x,y) \in C(\overline{D})$ *и обращается в нуль с асимптотическими поведениями*:

$u(x,y) = o[(x-a)^{\gamma_4}], x \to a,$

$u(x,y) = o[(y-b)^{\nu_{27}}], \nu_{27} > 2(\beta - 1), y \to b.$

Теорема 2.1.10. *Если в интегральном уравнении* (2.1.1) *выполняются условия* (2.1.2), *также условия*:

1. $\Delta_1 = p^2 - 4q > 0, p < 0,\ q < 0,$

2. $\Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu > 0, \lambda > 0, \mu < 0,$

3. $f(x,y) \in C(\overline{D}),\ f(a,b) = 0$ *с асимптотическим поведением на* Γ_1 *и* Γ_2:

$$f(x,y)=o[(x-a)^{\delta_{16}}],\delta_{16}>\gamma_4, \text{ при } x\to a,$$

$$f(x,y)=o[e^{\eta_3\omega_b^\beta(y)}(y-b)^{\nu_{28}}],\nu_{28}>\beta-1, \text{ при } y\to b,$$

тогда интегральное уравнение (2.1.1) *в классе* $C(\overline{D})$, *обращающихся в нуль при* $x\to a$, $y\to b$, *всегда разрешимо и его явное решение представимо в виде*:

$$u(x,y)=\theta_4(y)(x-a)^{\gamma_4}+e^{\eta_3\omega_b^\beta(y)}\Phi_3(x)+K_{p,q,\lambda,\mu}^{(x,y)}\left[f(x,y)\right], \tag{2.1.41}$$

где $\varphi_3(x),\theta_4(y)$ – *произвольные непрерывные функции на* Γ_1 *и* Γ_2, *обращающиеся в нуль при* $x\to a$, $y\to b$ *с асимптотическими поведениями*:

$$\varphi_3(x)=o[(x-a)^{\delta_{17}}],\delta_{17}>\gamma_4, \text{ при } x\to a,$$

$$\theta_4(y)=o[(y-b)^{\nu_{29}}],\nu_{29}>2(\beta-1), \text{ при } y\to b,$$

Следствие 2.1.10. *Пусть коэффициенты интегрального уравнения* (2.1.1) *удовлетворяют условиям теоремы* 2.1.10. *Тогда* $u(x,y)\in C(\overline{D})$ *и обращается в нуль с асимптотическими поведениями*:

$$u(x,y)=o[(x-a)^{\gamma_4}],x\to a,$$

$$u(x,y)=o[(y-b)^{\nu_{30}}],\nu_{30}>2(\beta-1),y\to b.$$

Теорема 2.1.11. *Если в интегральном уравнении* (2.1.1) *выполняются условия* (2.1.2), *также условия*:

1. $\Delta_1=p^2-4q>0$, $p<0,q<0,$
2. $\Delta_2=\lambda^2-4\mu>0$, $\lambda<0,\mu<0,$
3. $f(x,y)\in C(\overline{D})$, $f(a,b)=0$ *с асимптотическим поведением на* Γ_1 *и* Γ_2:

$$f(x,y)=o[(x-a)^{\delta_{18}}],\delta_{18}>\gamma_4, \text{ при } x\to a,$$

$$f(x,y)=o[e^{\eta_4\omega_b^\beta(y)}(y-b)^{\nu_{31}}],\nu_{31}>\beta-1, \text{ при } y\to b,$$

тогда интегральное уравнение (2.1.1) *в классе* $C(\overline{D})$, *обращающихся в нуль при* $x \to a$, $y \to b$, *всегда разрешимо и его явное решение представимо в виде*:

$$u(x,y) = \theta_4(y)(x-a)^{\gamma_4} + e^{\eta_4 \omega_b^{\beta}(y)}\Phi_4(x) + K^{(x,y)}_{p,q,\lambda,\mu}\left[f(x,y)\right], \quad (2.1.42)$$

где $\varphi_4(x), \theta_4(y)$ – *произвольные непрерывные функции на* Γ_1 *и* Γ_2, *обращающиеся в нуль при* $x \to a$, $y \to b$ *с асимптотическими поведениями*:

$\varphi_4(x) = o[(x-a)^{\delta_{19}}], \delta_{19} > \gamma_4,$ *при* $x \to a,$

$\theta_4(y) = o[(y-b)^{\nu_{32}}], \nu_{32} > 2(\beta - 1),$ *при* $y \to b.$

Следствие 2.1.11. *Пусть коэффициенты интегрального уравнения* (2.1.1) *удовлетворяют условиям теоремы* 2.1.11. *Тогда* $u(x,y) \in C(\overline{D})$ *и обращается в нуль с асимптотическими поведениями*:

$u(x,y) = o[(x-a)^{\gamma_4}], x \to a,$

$u(x,y) = o[(y-b)^{\nu_{33}}], \nu_{33} > 2(\beta-1), y \to b.$

Теорема 2.1.12. *Если в интегральном уравнении* (2.1.1) *выполняются условия* (2.1.2)*, также условия*:

1. $\Delta_1 = p^2 - 4q > 0$, $p < 0, q < 0,$
2. $\Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu > 0$, $\lambda > 0, \mu > 0,$
3. $f(x,y) \in C(\overline{D}),\ f(a,b) = 0$ *с асимптотическим поведением на* Γ_1 *и* Γ_2:

$f(x,y) = o[(x-a)^{\delta_{20}}], \delta_{20} > \gamma_4,$ *при* $x \to a,$

$f(x,y) = o[(y-b)^{\nu_{34}}], \nu_{34} > \beta - 1,$ *при* $y \to b,$

тогда интегральное уравнение (2.1.1) *в классе* $C(\overline{D})$, *обращающихся в нуль при* $x \to a$, $y \to b$, *всегда разрешимо и его явное решение представимо в виде*:

$$u(x,y) = \theta_4(y)(x-a)^{\gamma_4} + K^{(x,y)}_{p,q,\lambda,\mu}\left[f(x,y)\right], \quad (2.1.43)$$

где $\theta_4(y)$ – *произвольные непрерывные функции на* Γ_2, *обращающиеся в нуль при* $y \to b$ *с асимптотическими поведениями*:

$\theta_4(y) = o[(y-b)^{\nu_{35}}], \nu_{35} > 2(\beta - 1)$ *при* $y \to b$.

Следствие 2.1.12. *Пусть коэффициенты интегрального уравнения* (2.1.1) *удовлетворяют условиям теоремы* 2.1.12. *Тогда* $u(x,y) \in C(\overline{D})$ *и обращается в нуль с асимптотическими поведениями*:

$u(x,y) = o[(x-a)^{\gamma_4}], x \to a,$

$u(x,y) = o[(y-b)^{\nu_{36}}], \nu_{36} > 2(\beta - 1), y \to b.$

Теорема 2.1.13. *Если в интегральном уравнении* (2.1.1) *выполняются условия* (2.1.2)*, также условия*:

1. $\Delta_1 = p^2 - 4q > 0,\ p > 0,\ q > 0,$
2. $\Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu > 0,\ \lambda < 0, \mu > 0,$
3. $f(x,y) \in C(\overline{D}),\ f(a,b) = 0$ *с асимптотическим поведением на* Γ_1 *и* Γ_2:

$f(x,y) = o[(x-a)^{\varepsilon}], \varepsilon > 0,$ *при* $x \to a,$

$f(x,y) = o[e^{\eta_1 \omega_b^{\beta}(y)}(y-b)^{\nu_{37}}], \nu_{37} > \beta - 1,$ *при* $y \to b,$

тогда интегральное уравнение (2.1.1) *в классе* $C(\overline{D})$, *обращающихся в нуль при* $x \to a,\ \ y \to b,$ *всегда разрешимо и его явное решение представимо в виде*:

$$u(x,y) = e^{\eta_1 \omega_b^{\beta}(y)} \Phi_1(x) + e^{\eta_2 \omega_b^{\beta}(y)} \Phi_2(x) + K_{p,q,\lambda,\mu}^{(x,y)}[f(x,y)], \qquad (2.1.44)$$

где $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ – *произвольные непрерывные функции на* Γ_1, *обращающиеся в нуль при* $x \to a$ *с асимптотическими поведениями*:

$\varphi_i(x) = o[(x-a)^{\varepsilon}], \varepsilon > 0,$ *при* $x \to a,\ (i = 1, 2).$

Следствие 2.1.13. *Пусть коэффициенты интегрального уравнения* (2.1.1) *удовлетворяют условиям теоремы* 2.1.13. *Тогда* $u(x,y)\in C(\overline{D})$ *и обращается в нуль с асимптотическими поведениями*:

$$u(x,y)=o[(x-a)^{\varepsilon}],\varepsilon>0,x\to a,$$

$$u(x,y)=o[(y-b)^{\nu_{38}}],\nu_{38}>2(\beta-1),y\to b.$$

Теорема 2.1.14. *Если в интегральном уравнении* (2.1.1) *выполняются условия* (2.1.2)*, также условия*:

1. $\Delta_1=p^2-4q>0$, $p>0,q>0,$
2. $\Delta_2=\lambda^2-4\mu>0$, $\lambda>0,\mu<0,$
3. $f(x,y)\in C(\overline{D}),\ f(a,b)=0$ *с асимптотическим поведением на* Γ_1 *и* Γ_2:

$$f(x,y)=o[(x-a)^{\varepsilon}],\varepsilon>0\ \textit{при}\quad x\to a,$$

$$f(x,y)=o[e^{\eta_3\omega_b^{\beta}(y)}(y-b)^{\nu_{39}}],\nu_{39}>\beta-1,\ \textit{при}\ y\to b,$$

тогда интегральное уравнение (2.1.1) *в классе* $C(\overline{D})$, *обращающихся в нуль при* $x\to a,\ \ y\to b,$ *всегда разрешимо и его явное решение представимо в виде*:

$$u(x,y)=e^{\eta_3\omega_b^{\beta}(y)}\Phi_3(x)+K_{p,q,\lambda,\mu}^{(x,y)}\left[f(x,y)\right], \tag{2.1.45}$$

где $\varphi_3(x)$ – *произвольные непрерывные функции на* Γ_1, *обращающиеся в нуль при* $x\to a$, *с асимптотическими поведениями*:

$$\varphi_{16}(x)=o[(x-a)^{\varepsilon}],\varepsilon>0,\ \textit{при}\ x\to a.$$

Следствие 2.1.14. *Пусть коэффициенты интегрального уравнения* (2.1.1) *удовлетворяют условиям теоремы* 2.1.14. *Тогда* $u(x,y)\in C(\overline{D})$ *и обращается в нуль с асимптотическими поведениями*:

$$u(x,y)=o[(x-a)^{\varepsilon}],\varepsilon>0,x\to a,$$

$$u(x,y)=o[(y-b)^{\nu_{40}}],\nu_{40}>2(\beta-1),y\to b.$$

Теорема 2.1.15. *Если в интегральном уравнении* (2.1.1) *выполняются условия* (2.1.2)*, также условия*:

1. $\Delta_1 = p^2 - 4q > 0\,,\, p > 0, q > 0,$
2. $\Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu > 0\,, \lambda < 0, \mu < 0,$
3. $f(x,y) \in C(\overline{D}),\ \ f(a,b) = 0$ *с асимптотическим поведением на* Γ_1 *и* Γ_2:

$f(x,y) = o[(x-a)^{\varepsilon}], \varepsilon > 0$ *при* $x \to a,$

$f(x,y) = o[e^{\eta_4 \omega_b^{\beta}(y)}(y-b)^{\nu_{41}}], \nu_{41} > \beta - 1,$ *при* $y \to b,$

тогда интегральное уравнение (2.1.1) *в классе* $C(\overline{D})$, *обращающихся в нуль при* $x \to a,\ \ y \to b,$ *всегда разрешимо и его явное решение представимо в виде*:

$$u(x,y) = e^{\eta_4 \omega_b^{\beta}(y)} \Phi_4(x) + K_{p,q,\lambda,\mu}^{(x,y)}\left[f(x,y)\right], \tag{2.1.46}$$

где $\varphi_4(x)$ – *произвольная непрерывная функция на* Γ_1, *обращающиеся в нуль при* $x \to a,$ *с асимптотическими поведениями*:

$\varphi_4(x) = o[(x-a)^{\varepsilon}], \varepsilon > 0,$ *при* $x \to a.$

Следствие 2.1.15. *Пусть коэффициенты интегрального уравнения* (2.1.1) *удовлетворяют условиям теоремы* 2.1.15. *Тогда* $u(x,y) \in C(\overline{D})$ *и обращается в нуль с асимптотическими поведениями*:

$u(x,y) = o[(x-a)^{\varepsilon}], \varepsilon > 0, x \to a,$

$u(x,y) = o[(y-b)^{\nu_{42}}], \nu_{42} > 2(\beta - 1), y \to b.$

Теорема 2.1.16. *Если в интегральном уравнении* (2.1.1) *выполняются условия* (2.1.2)*, также условия*:

1. $\Delta_1 = p^2 - 4q > 0\,,\, p > 0, q > 0,$
2. $\Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu > 0\,, \lambda > 0, \mu > 0,$
3. $f(x,y) \in C(\overline{D}),\ \ f(a,b) = 0$ *с асимптотическим поведением на* Γ_1 *и* Γ_2:

$f(x,y)=o[(x-a)^{\varepsilon}],\varepsilon>0$ *при* $x\to a$,

$f(x,y)=o[(y-b)^{\nu_{43}}],\nu_{43}>\beta-1,$ *при* $y\to b$,

тогда интегральное уравнение (2.1.1) *в классе* $C(\overline{D})$, *обращающихся в нуль при* $x\to a$, $y\to b$, *всегда разрешимо и его единственное решение представимо в виде*:

$$u(x,y)=K_{p,q,\lambda,\mu}^{(x,y)}[f(x,y)]. \tag{2.1.47}$$

Следствие 2.1.16. *Пусть коэффициенты интегрального уравнения* (2.1.1) *удовлетворяют условиям теоремы* 2.1.16. *Тогда* $u(x,y)\in C(\overline{D})$ *и обращается в нуль с асимптотическими поведениями*:

$u(x,y)=o[(x-a)^{\varepsilon}],\varepsilon>0,x\to a,$

$u(x,y)=o[(y-b)^{\nu_{44}}],\nu_{45}>2(\beta-1),y\to b.$

§2.2. Исследование двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра, когда корни характеристических уравнений вещественные и равные: $\Delta_1=p^2-4q=0$ $\Delta_2=\lambda^2-4\mu=0$, когда $p=p_1,q=q_1,\lambda=\lambda_1,\mu=\mu_1$

Теперь изучим двумерного интегрального уравнения (2.1.1), когда корни характеристического уравнения вещественные и равные.

Если $\Delta_1=p^2-4q=0$, тогда характеристическое уравнение (2.1.9) имеет решение вида:

$$\gamma_{1,2}=\frac{|p|}{2}.$$

Общее решение однородного уравнения (2.1.7) имеет вид:

$$u(x,y)=(x-a)^{\frac{|p|}{2}}\left[c_5(y)+c_6(y)\ln(x-a)\right]. \tag{2.2.1}$$

Для нахождения общего решения неоднородного уравнения (2.1.7) используем метод вариации произвольных постоянных, полагая:

$$u(x,y)=(x-a)^{\frac{|p|}{2}}\left[c_5(x,y)+c_6(x,y)\ln(x-a)\right], \tag{2.2.2}$$

где $c_5(x,y), c_6(x,y)$ – произвольные функции точек Γ_1. Дифференцируя (2.2.2), далее используя произвольность функции $c_5(x,y)$ и $c_6(x,y)$, получим:

$$D_x u(x,y)=\frac{|p|}{2}(x-a)^{\frac{|p|}{2}}c_5(x,y)+\left[1+\frac{|p|}{2}\ln(x-a)\right](x-a)^{\frac{|p|}{2}}c_6(x,y)+(x-a)^{\frac{|p|}{2}+1}c_5^{|}(x,y)+(x-a)^{\frac{|p|}{2}+1}\ln(x-a)c_6^{|}(x,y),$$

$$D_x c_5(x,y)(x-a)^{\frac{|p|}{2}}+D_x c_6(x,y)(x-a)^{\frac{|p|}{2}}\ln(x-a)=0 .$$

Дифференцируя ещё раз полученное равенство, после замечая, что γ_1 и γ_2 корни уравнения (2.1.9), имеем:

$$(D_x)^2u(x,y)=\frac{|p|}{2}(x-a)^{\frac{|p|}{2}+1}c_5^{|}(x,y)+\left[1+\frac{|p|}{2}\ln(x-a)\right](x-a)^{\frac{|p|}{2}+1}c_6^{|}(x,y)+\left(\frac{|p|}{2}\right)^2(x-a)^{\frac{|p|}{2}}c_5(x,y)+\left[\left(\frac{|p|}{2}\right)^2\ln(x-a)+|p|\right](x-a)^{\frac{|p|}{2}}c_6(x,y).$$

В результате для определения произвольных функций $c_5(x,y)$ и $c_6(x,y)$ получим систему вырождающихся дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{cases} D_x c_5(x,y)(x-a)^{\frac{|p|}{2}}+D_x c_6(x,y)(x-a)^{\frac{|p|}{2}}\ln(x-a)=0, \\ D_x c_5(x,y)\dfrac{|p|}{2}(x-a)^{\frac{|p|}{2}}+D_x c_6(x,y)\left[1+\dfrac{|p|}{2}\ln(x-a)\right](x-a)^{\frac{|p|}{2}}=(D_x)^2\psi(x,y). \end{cases} \tag{2.2.3}$$

Решая систему уравнений (2.2.3) методом Крамера, получим:

$$\Delta=\begin{vmatrix} (x-a)^{\frac{|p|}{2}} & (x-a)^{\frac{|p|}{2}}\ln(x-a) \\ \dfrac{|p|}{2}(x-a)^{\frac{|p|}{2}} & (x-a)^{\frac{|p|}{2}}\left[1+\dfrac{|p|}{2}\ln(x-a)\right] \end{vmatrix}=(x-a)^{|p|},$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 0 & (x-a)^{\frac{|p|}{2}}\ln(x-a) \\ (D_x)^2\psi(x,y) & (x-a)^{\frac{|p|}{2}}\left[1+\dfrac{|p|}{2}\ln(x-a)\right] \end{vmatrix}=-(D_x)^2\psi(x,y)(x-a)^{\frac{|p|}{2}}\ln(x-a),$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} (x-a)^{\frac{|p|}{2}} & 0 \\ \frac{|p|}{2}(x-a)^{\frac{|p|}{2}} & (D_x)^2\psi(x,y) \end{vmatrix} = (D_x)^2\psi(x,y)(x-a)^{\frac{|p|}{2}}.$$

Тогда решения системы уравнений (2.2.3) примут вид:

$$\begin{cases} D_x c_5(x,y) = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = -(D_x)^2\psi(x,y)(x-a)^{-\frac{|p|}{2}}\ln(x-a), \\ D_x c_6(x,y) = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = (D_x)^2\psi(x,y)(x-a)^{-\frac{|p|}{2}}. \end{cases} \tag{2.2.4}$$

Отсюда находим:

$$c_5(x,y) = \theta_1(y) - \ln(x-a)(x-a)^{-\frac{|p|}{2}} D_x\psi(x,y) -$$
$$-\left[(x-a)^{-\frac{|p|}{2}}\left[1+\frac{|p|}{2}\ln(x-a)\right]\psi(x,y) - \left((t-a)^{-\frac{|p|}{2}}\left[1+\frac{|p|}{2}\ln(t-a)\right]\psi(t,y)\right)_{t=0} - \left(\frac{|p|}{2}\right)^2\int_a^x\left[2+\frac{|p|}{2}\ln(t-a)\right]\frac{\psi(t,y)}{(t-a)^{\frac{|p|}{2}+1}}dt\right].$$

От функции $\psi(x,y)$ потребуем обращение в нуль в точке $x=a$ с асимптотическим поведением:

$$\psi(x,y) = o[(x-a)^{\delta}],\ \delta > \frac{|p|}{2},\ \text{при} \quad x \to a, \tag{2.2.5}$$

Следовательно:

$$c_5(x,y) = \theta_1(y) - \ln(x-a)(x-a)^{-\frac{|p|}{2}} D_x\psi(x,y) - (x-a)^{-\frac{|p|}{2}}\left[1+\frac{|p|}{2}\ln(x-a)\right]\psi(x,y) - \left(\frac{|p|}{2}\right)^2\int_a^x\left[2+\frac{|p|}{2}\ln(t-a)\right]\frac{\psi(t,y)}{(t-a)^{\frac{|p|}{2}+1}}dt.$$

Аналогичным образом находим:

$$c_6(x,y) = \theta_2(y) + (x-a)^{-\frac{|p|}{2}} D_x\psi(x,y) - \frac{|p|}{2}(x-a)^{-\frac{|p|}{2}}\psi(x,y) - \left(\frac{|p|}{2}(t-a)^{-\frac{|p|}{2}}\psi(t,y)\right)_{t=0} + \left(\frac{|p|}{2}\right)^2\int_a^x\frac{\psi(t,y)}{(t-a)^{\frac{|p|}{2}+1}}dt.$$

Откуда:

$$c_6(x,y) = \theta_2(y) + (x-a)^{-\frac{|p|}{2}} D_x\psi(x,y) - \frac{|p|}{2}(x-a)^{-\frac{|p|}{2}}\psi(x,y) - \left(\frac{|p|}{2}\right)^2\int_a^x\frac{\psi(t,y)}{(t-a)^{\frac{|p|}{2}+1}}dt.$$

Полученные значение $c_5(x,y)$ и $c_6(x,y)$ ставим в решение вида (2.2.2), когда $p<0,\, p^2-4q=0$ и если решение интегрального уравнения (2.1.5) существует, оно представимо в виде:

$$
\begin{gathered}
u(x,y)=(x-a)^{\frac{|p|}{2}}\left[\theta_1(y)+\ln(x-a)\theta_2(y)\right]+\psi(x,y)+\\
+\frac{|p|}{2}\int_a^x\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\frac{|p|}{2}}\left[2+\frac{|p|}{2}\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right]\frac{\psi(t,y)}{t-a}\,dt.
\end{gathered}
\tag{2.2.6}
$$

Если $\Delta_2=\lambda^2-4\mu=0$, тогда характеристическое уравнение (2.1.16) имеет решение вида:

$$\eta_{1,2}=\frac{\lambda}{2}.$$

Следовательно, общее решение однородного уравнения (2.1.6) имеет вид:

$$\psi(x,y)=e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\left[c_7(x)+c_8(x)\omega_b^\beta(y)\right]. \tag{2.2.7}$$

Для нахождения общего решения неоднородного уравнения (2.1.6) используем метод вариации произвольных постоянных, полагая:

$$\psi(x,y)=e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\left[c_7(x,y)+c_8(x,y)\omega_b^\beta(y)\right], \tag{2.2.8}$$

где $c_7(x,y), c_8(x,y)$ – произвольные функции точек Γ_2. Дифференцируя (2.2.8), далее используя произвольность функции $c_7(x,y)$ и $c_8(x,y)$, получим:

$$D_y\psi(x,y)=-\frac{\lambda}{2}e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}c_7(x,y)-\left[1+\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)\right]e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}c_8(x,y)+c_7^{|}(x,y)(y-b)^\beta e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}+c_8^{|}(x,y)(y-b)^\beta e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)},$$

$$D_yc_7(x,y)e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}+D_yc_8(x,y)e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}=0.$$

Дифференцируя ещё раз полученное равенство, после замечая, что η_1 и η_2 корни уравнения (2.1.16), имеем:

$$(D_y)^2\psi(x,y) = -\frac{\lambda}{2}(y-b)^\beta e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)} c_7^|(x,y) - (y-b)^\beta\left[1+\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)\right]e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)} c_8^|(x,y) -$$

$$-\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)} c_7(x,y) - \left[1+\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)\right]\frac{\lambda}{2}e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)} c_8(x,y),$$

В результате для определения произвольных функций $c_7(x,y)$ и $c_8(x,y)$ получим систему вырождающихся дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{cases} D_y c_7(x,y) e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)} + D_y c_8(x,y)\omega_b^\beta(y) e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)} = 0, \\ D_y c_7(x,y)\frac{\lambda}{2}e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)} + D_y c_8(x,y)\left[1+\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)\right]e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)} = -(D_y)^2 f(x,y). \end{cases} \tag{2.2.9}$$

Решая систему уравнений (2.2.9) методом Крамера, получим:

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)} & \omega_b^\beta(y) e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)} \\ \frac{\lambda}{2}e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)} & \left[1+\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)\right]e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)} \end{vmatrix} = e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)},$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \omega_b^\beta(y) e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)} \\ -(D_y)^2 f(x,y) & \left[1+\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)\right]e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)} \end{vmatrix} = (D_y)^2 f(x,y)\omega_b^\beta(y) e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)} & 0 \\ \frac{\lambda}{2}e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)} & -(D_y)^2 f(x,y) \end{vmatrix} = -(D_y)^2 f(x,y) e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}.$$

Тогда решения системы уравнений (2.2.9) примут вид:

$$\begin{cases} D_y c_7(x,y) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = (D_y)^2 f(x,y)\omega_b^\beta(y) e^{-\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}, \\ D_y c_8(x,y) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -(D_y)^2 f(x,y) e^{-\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}. \end{cases} \tag{2.2.10}$$

Отсюда находим:

$$c_7(x,y)=\varphi_1(x)+\omega_b^\beta(y)e^{-\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}D_y f(x,y)+\left[1-\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)\right]\left[e^{-\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}f(x,y)-\left(e^{-\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(s)}f(x,s)\right)_{s=b}\right]+\frac{\lambda}{2}\int_b^y\left(2-\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)\right)e^{-\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\frac{f(x,s)}{(s-b)^\beta}ds.$$

От функции $f(x,y)$ потребуем обращение в нуль в точке $y=b$ с асимптотическим поведением:

$$f(x,y)=o[e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}(y-b)^\nu],\nu>2(\beta-1),\ \text{ при }\ y\to b. \qquad (2.2.11)$$

Следовательно:

$$c_7(x,y)=\varphi_1(x)+\omega_b^\beta(y)e^{-\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}D_y f(x,y)+\left(1-\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)\right)e^{-\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}f(x,y)+\frac{\lambda}{2}\int_b^y\left(2-\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)\right)e^{-\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\frac{f(x,s)}{(s-b)^\beta}ds.$$

Аналогичным образом находим:

$$c_8(x,y)=\varphi_2(x)-\omega_b^\beta(y)e^{-\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}D_y f(x,y)-\frac{\lambda}{2}\left[e^{-\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}f(x,y)-\left(e^{-\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(s)}f(x,s)\right)_{s=b}\right]+\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2\int_b^y e^{-\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\frac{f(x,s)}{(s-b)^\beta}ds.$$

Откуда:

$$c_8(x,y)=\varphi_2(x)-e^{-\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}D_y f(x,y)-\frac{\lambda}{2}e^{-\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}f(x,y)+\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2\int_b^y e^{-\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\frac{f(x,s)}{(s-b)^\beta}ds.$$

Полученные значение $c_7(x,y)$ и $c_8(x,y)$ ставим в решение вида (2.2.8), если решение интегрального уравнения (2.1.6) при $\lambda<0,\lambda^2-4\mu=0$ существует, тогда оно имеет вид:

$$\begin{aligned}\psi(x,y)=e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\left[\varphi_1(x)+\omega_b^\beta(y)\varphi_2(x)\right]+f(x,y)-\\ -\int_b^y e^{\frac{\lambda}{2}(\omega_b^\beta(y)-\omega_b^\beta(s))}\left[\lambda+\frac{\lambda^2}{4}(\omega_b^\beta(y)-\omega_b^\beta(s))\right]\frac{f(x,s)}{(s-b)^\beta}ds.\end{aligned} \qquad (2.2.12)$$

Из равенство (2.2.6) и (2.2.12) получим решение двумерного интегрального уравнения (2.1.1) в виде:

$$u(x,y)=(x-a)^{\frac{|p|}{2}}\left[\theta_1(y)+\ln(x-a)\theta_2(y)\right]+e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\Phi_1(x)+\omega_b^\beta(y)e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\Phi_2(x)+M_{p,\lambda}^{(x,y)}[f(x,y)], \qquad (2.2.13)$$

где

$$\Phi_i(x)=\varphi_i(x)+\frac{|p|}{2}\int_a^x\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\frac{|p|}{2}}\left[2+\frac{|p|}{2}\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right]\frac{\varphi_i(t)}{t-a}dt\;,(i=\;1,2),\qquad(2.2.14)$$

$$\begin{gathered}M_{p,\lambda}[f(x,y)]=f(x,y)+\frac{|p|}{2}\int_a^x\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\frac{|p|}{2}}\left[2+\frac{|p|}{2}\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right]\frac{f(t,y)}{t-a}dt+\\+\int_b^y e^{\frac{\lambda}{2}(\omega_b^\beta(y)-\omega_b^\beta(s))}\left[\lambda+\frac{\lambda^2}{4}(\omega_b^\beta(y)-\omega_b^\beta(s))\right]\frac{f(x,s)}{(s-b)^\beta}ds+\\+\frac{|p|}{2}\int_b^y e^{\frac{\lambda}{2}(\omega_b^\beta(y)-\omega_b^\beta(s))}\left[\lambda+\frac{\lambda^2}{4}(\omega_b^\beta(y)-\omega_b^\beta(s))\right]\frac{ds}{(s-b)^\beta}\times\\\times\int_a^x\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\frac{|p|}{2}}\left[2+\frac{|p|}{2}\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right]\frac{f(t,s)}{t-a}dt.\end{gathered}\qquad(2.2.15)$$

Из приведенных выше результатов вытекают следующие теоремы:

Теорема 2.2.1. *Если в интегральном уравнении* (2.1.1) *выполняются условия* (2.1.2)*, также условия*:

1. $\Delta_1=p^2-4q=0\,,\,p<0,$
2. $\Delta_2=\lambda^2-4\mu=0\,,\lambda<0,$
3. $f(x,y)\in C(\overline{D}),\;\; f(a,b)\;=0$ *с асимптотическим поведением на* Γ_1 *и* Γ_2:

$f(x,y)=o[(x-a)^{\delta_{21}}],\delta_{21}>\frac{|p|}{2},$ *при* $x\to a,$

$f(x,y)=o[e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}(y-b)^{\nu_{46}}],\nu_{46}>2(\beta-1),$ *при* $y\to b,$

тогда интегральное уравнение (2.1.1) *в классе* $C(\overline{D})$, *обращающихся в нуль при* $x\to a,\;\; y\to b,$ *всегда разрешимо и его явное решение представимо в виде* (2.2.13), *где* $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\theta_1(y),\theta_2(y)$ – *произвольные непрерывные функции на* Γ_1 *и* Γ_2, *обращающиеся в нуль при* $x\to a,\, y\to b$ *с асимптотическими поведениями:*

$\varphi_i(x)=o[(x-a)^{\delta_{22}}],\delta_{22}>\frac{|p|}{2},$ *при* $x\to a,\;\; i=(1,2)\,,$

$\theta_j(y)=o[(y-b)^{\nu_{47}}],\nu_{47}>2(\beta-1),$ *при* $y\to b\,,\;\; j=(1,2)\,.$

Следствие 2.2.1. *Пусть коэффициенты интегрального уравнения* (2.1.1) *удовлетворяют условиям теоремы* 2.2.1. *Тогда* $u(x,y)\in C(\overline{D})$ *и обращается в нуль с асимптотическими поведениями*:

$$u(x,y)=o[(x-a)^{\frac{|p|}{2}}],x\to a,$$

$$u(x,y)=o[(y-b)^{\nu_{48}}],\nu_{48}>2(\beta-1),y\to b.$$

Теорема 2.2.2. *Если в интегральном уравнении* (2.1.1) *выполняются условия* (2.1.2)*, также условия*:

1. $\Delta_1=p^2-4q=0$, $p<0$,
2. $\Delta_2=\lambda^2-4\mu=0$, $\lambda>0$,
3. $f(x,y)\in C(\overline{D})$, $f(a,b)=0$ *с асимптотическим поведением на* Γ_1 *и* Γ_2:

$$f(x,y)=o[(x-a)^{\delta_{23}}],\delta_{23}>\frac{|p|}{2},\ \text{при}\quad x\to a,$$

$$f(x,y)=o[(y-b)^{\nu_{49}}],\nu_{49}>2(\beta-1),\text{при}\quad y\to b,$$

тогда интегральное уравнение (2.1.1) *в классе* $C(\overline{D})$, *обращающихся в нуль при* $x\to a$, $y\to b$, *всегда разрешимо и его явное решение представимо в виде*:

$$u(x,y)=(x-a)^{\frac{|p|}{2}}\left[\theta_1(y)+\ln(x-a)\theta_2(y)\right]+M_{p,\lambda}^{(x,y)}[f(x,y)],, \tag{2.2.16}$$

где $\theta_1(y),\theta_2(y)$ – *произвольные непрерывные функции на* Γ_2, *обращающиеся в нуль при* $y\to b$ *с асимптотическими поведениями*:

$$\theta_j(y)=o[(y-b)^{\nu_{50}}],\nu_{50}>2(\beta-1),\ \text{при}\ y\to b,\ j=(1,2).$$

Следствие 2.2.2. *Пусть коэффициенты интегрального уравнения* (2.1.1) *удовлетворяют условиям теоремы* 2.2.2. *Тогда* $u(x,y)\in C(\overline{D})$ *и обращается в нуль с асимптотическими поведениями*:

$$u(x,y)=o[(x-a)^{\frac{|p|}{2}}],x\to a,$$

$u(x,y)=o[(y-b)^{\nu_{51}}],\nu_{51}>2(\beta-1),y\to b.$

Теорема 2.2.3. *Если в интегральном уравнении* (2.1.1) *выполняются условия* (2.1.2)*, также условия*:

1. $\Delta_1=p^2-4q=0$, $p>0$,

2. $\Delta_2=\lambda^2-4\mu=0$, $\lambda<0$,

3. $f(x,y)\in C(\overline{D})$, $f(a,b)=0$ *с асимптотическим поведением на* Γ_1 *и* Γ_2:

$f(x,y)=0[(x-a)^{\varepsilon}],\varepsilon>0,$ *при* $x\to a,$

$f(x,y)=o[e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^{\beta}(y)}(y-b)^{\nu_{52}}],\nu_{52}>2(\beta-1),$ *при* $y\to b,$

тогда интегральное уравнение (2.1.1) *в классе* $C(\overline{D})$, *обращающихся в нуль при* $x\to a$, $y\to b$, *всегда разрешимо и его явное решение представимо в виде*:

$$u(x,y)=e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^{\beta}(y)}\left[\Phi_1(x)+\omega_b^{\beta}(y)\Phi_2(x)\right]+M_{p,\lambda}^{(x,y)}[f(x,y)], \tag{2.2.17}$$

где $\varphi_1(x),\varphi_2(x)$ – *произвольные непрерывные функции на* Γ_1, *обращающиеся в нуль при* $x\to a$, *с асимптотическими поведениями*:

$\varphi_i(x)=o[(x-a)^{\delta_{24}}],\delta_{24}>\frac{|p|}{2},$ *при* $x\to a$, $i=(1,2).$

Следствие 2.2.3. *Пусть коэффициенты интегрального уравнения* (2.1.1) *удовлетворяют условиям теоремы* 2.2.3. *Тогда* $u(x,y)\in C(\overline{D})$ *и обращается в нуль с асимптотическими поведениями*:

$u(x,y)=0[(x-a)^{\varepsilon}],\varepsilon>0,\ x\to a,$

$u(x,y)=o[(y-b)^{\nu_{53}}],\nu_{53}>2(\beta-1),y\to b.$

Теорема 2.2.4. *Если в интегральном уравнении* (2.1.1) *выполняются условия* (2.1.2)*, также условия*:

1. $\Delta_1=p^2-4q=0$, $p>0$,

2. $\Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu = 0, \lambda > 0,$

3. $f(x,y) \in C(\overline{D}),\ f(a,b) = 0$ *с асимптотическим поведением на* Γ_1 *и* Γ_2:

$f(x,y) = 0[(x-a)^{\varepsilon}], \varepsilon > 0,$ *при* $x \to a,$

$f(x,y) = o[(y-b)^{\nu_{54}}], \nu_{54} > 2(\beta - 1),$ *при* $y \to b,$

тогда интегральное уравнение (2.1.1) *в классе* $C(\overline{D})$, *обращающихся в нуль при* $x \to a,\quad y \to b,$ *всегда разрешимо и его единственное решение представимо в виде*:

$$u(x,y) = M_{p,\lambda}^{(x,y)}[f(x,y)]. \tag{2.2.18}$$

Следствие 2.2.4. *Пусть коэффициенты интегрального уравнения* (2.1.1) *удовлетворяют условиям теоремы* 2.2.4. *Тогда* $u(x,y) \in C(\overline{D})$ *и обращается в нуль с асимптотическими поведениями*:

$u(x,y) = 0[(x-a)^{\varepsilon}], \varepsilon > 0,\ x \to a,$

$u(x,y) = o[(y-b)^{\nu_{55}}], \nu_{55} > 2(\beta - 1), y \to b.$

§2.3. Исследование двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра, когда корни характеристических уравнений комплексно-сопряженные

Изучим двумерного интегрального уравнения (2.1.1), когда корни характеристического уравнения комплексно-сопряженными.

Если $\Delta_1 = p^2 - 4q < 0$, тогда характеристическое уравнение (2.1.9) имеет решение вида:

$$\gamma_{1,2} = \alpha_1 + i\beta_1, \quad \alpha_1 = -\frac{p}{2}, \beta_1 = \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2}.$$

Общее решение однородного уравнения (2.1.7) имеет вид:

$$u(x,y) = (x-a)^{\frac{|p|}{2}}\left[\cos\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)c_9(y) + \sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)c_{10}(y)\right]. \tag{2.3.1}$$

Для нахождения общего решения неоднородного уравнения (2.1.7) используем метод вариации произвольных постоянных, полагая:

$$u(x,y)=(x-a)^{\frac{|p|}{2}}\left[\cos\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)c_9(x,y)+\sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)c_{10}(x,y)\right], \qquad (2.3.2)$$

где $c_9(x,y), c_{10}(x,y)$ – произвольные функции точек Γ_1. Дифференцируя (2.3.2), далее используя произвольность функции $c_9(x,y)$ и $c_{10}(x,y)$, получим:

$$D_x u(x,y)=(x-a)^{\frac{|p|}{2}}\times$$
$$\times\left\{\left[\frac{|p|}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)-\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)\right]c_9(x,y)+\left[\frac{|p|}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)+\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)\right]c_{10}(x,y)\right\},$$

$$D_x(x-a)^{\frac{|p|}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)c_9(x,y)+D_x(x-a)^{\frac{|p|}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)c_{10}(x,y)=0 \cdot$$

Дифференцируя ещё раз полученное равенство, после замечая, что γ_1 и γ_2 корни уравнения (2.1.9), имеем:

$$(D_x)^2 u(x,y)=(x-a)^{\frac{|p|}{2}}\times$$
$$\times\left\{\left[q\cos\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)-\frac{p\sqrt{4q-p^2}}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)\right]c_9(x,y)+\left[q\sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)+\frac{p\sqrt{4q-p^2}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)\right]c_9(x,y)\right\}+$$
$$(x-a)^{\frac{|p|}{2}+1}\left[\frac{|p|}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)-\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)\right]c_9^{|}(x,y)+\left[\frac{|p|}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)+\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)\right]c_{10}^{|}(x,y),$$

$$D_x(x-a)^{\frac{|p|}{2}}\left[\frac{|p|}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)-\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)\right]c_9(x,y)+$$
$$+D_x(x-a)^{\frac{|p|}{2}}\left[\frac{|p|}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)+\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)\right]c_{10}(x,y)=(D_x)^2\psi(x,y).$$

В результате для определения произвольных функций $c_9(x,y)$ и $c_{10}(x,y)$ получим систему вырождающихся дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{cases} D_x c_9(x,y)(x-a)^{\frac{|p|}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)+D_x c_{10}(x,y)(x-a)^{\frac{|p|}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)=0, \\ D_x(x-a)^{\frac{|p|}{2}}\left[\frac{|p|}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)-\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)\right]c_9(x,y)+ \\ +D_x(x-a)^{\frac{|p|}{2}}\left[\frac{|p|}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)+\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)\right]c_{10}(x,y)=(D_x)^2\psi(x,y). \end{cases} \qquad (2.3.3)$$

Решая систему уравнений (2.3.3) методом Крамера, получим:

$$\Delta=\begin{vmatrix} (x-a)^{\frac{|p|}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right) & (x-a)^{\frac{|p|}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right) \\ (x-a)^{\frac{|p|}{2}}\left[\frac{|p|}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)-\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)\right] & (x-a)^{\frac{|p|}{2}}\left[\frac{|p|}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)+\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)\right]\end{vmatrix}=\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}(x-a)^{|p|},$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 0 & (x-a)^{\frac{|p|}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right) \\ (D_x)^2\psi(x,y) & (x-a)^{\frac{|p|}{2}}\left[\frac{|p|}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)+\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)\right]\end{vmatrix}=-(D_x)^2\psi(x,y)(x-a)^{\frac{|p|}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right),$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} (x-a)^{\frac{|p|}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right) & 0 \\ (x-a)^{\frac{|p|}{2}}\left[\frac{|p|}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)-\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)\right] & (D_x)^2\psi(x,y)\end{vmatrix}=(D_x)^2\psi(x,y)(x-a)^{\frac{|p|}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right).$$

Тогда решения системы уравнений (2.3.3) примут вид:

$$\begin{cases} D_xc_9(x,y)=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}=-\dfrac{2}{\sqrt{4q-p^2}}(D_x)^2\psi(x,y)(x-a)^{-\frac{|p|}{2}}\sin\left(\dfrac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right), \\ D_xc_{10}(x,y)=\dfrac{\Delta_2}{\Delta}=\dfrac{2}{\sqrt{4q-p^2}}(D_x)^2\psi(x,y)(x-a)^{-\frac{|p|}{2}}\cos\left(\dfrac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right). \end{cases} \tag{2.3.4}$$

Отсюда находим:

$$c_9(x,y)=\theta_1(y)-\frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}(x-a)^{-\frac{|p|}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)D_x\psi(x,y)+$$
$$+(x-a)^{-\frac{|p|}{2}}\left[\frac{|p|}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)-\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)\right]\psi(x,y)-$$
$$-\int_a^x\left[q\cos\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)-\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\right)^2\sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)\right]\frac{\psi(t,y)}{(t-a)^{\frac{|p|}{2}+1}}dt.$$

От функции $\psi(x,y)$ потребуем обращение в нуль в точке $x=a$ с асимптотическим поведением:

$$\psi(x,y)=o[(x-a)^{\delta}],\delta>\frac{|p|}{2},\ \text{при}\quad x\to a. \tag{2.3.5}$$

Следовательно:

$$c_9(x,y)=\theta_1(y)-\frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}(x-a)^{-\frac{|p|}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)D_x\psi(x,y)+$$

$$+\frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}(x-a)^{-\frac{|p|}{2}}\left[\frac{|p|}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)-\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)\right]\psi(x,y)-$$

$$-\frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\int_a^x\left[q\cos\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)-\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\right)^2\sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)\right]\frac{\psi(t,y)}{(t-a)^{\frac{|p|}{2}+1}}dt.$$

Аналогичным образом находим:

$$c_{10}(x,y)=\theta_2(y)+\frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}(x-a)^{-\frac{|p|}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)D_x\psi(x,y)+$$

$$+\frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}(x-a)^{-\frac{|p|}{2}}\left[\frac{|p|}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)+\frac{p\sqrt{4q-p^2}}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)\right]\psi(x,y)+$$

$$+\int_a^x\left[q\cos\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)-\frac{p\sqrt{4q-p^2}}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)\right]\frac{\psi(t,y)}{(t-a)^{\frac{|p|}{2}+1}}dt.$$

Откуда:

$$c_{10}(x,y)=\theta_2(y)+\frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}(x-a)^{-\frac{|p|}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)D_x\psi(x,y)+$$

$$+\frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}(x-a)^{-\frac{|p|}{2}}\left[\frac{|p|}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)+\frac{p\sqrt{4q-p^2}}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)\right]\psi(x,y)+$$

$$+\int_a^x\left[q\cos\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)-\frac{p\sqrt{4q-p^2}}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)\right]\frac{\psi(t,y)}{(t-a)^{\frac{|p|}{2}+1}}dt.$$

Полученные значение $c_9(x,y)$ и $c_{10}(x,y)$ ставим в решение вида (2.3.2), когда $p<0,\ p^2-4q<0$ и если решение интегрального уравнения (2.1.5) существует, оно представимо в виде:

$$u(x,y)=(x-a)^{\frac{|p|}{2}}\left\{\cos\left[\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right]\theta_1(y)+\sin\left[\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right]\theta_2(y)\right\}+\psi(x,y)+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{4q-p^2}}\int_a^x\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\frac{|p|}{2}}\left[(p^2-4q)\sin\left[\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right]-p\sqrt{4q-p^2}\cos\left[\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right]\right]\frac{\psi(t,y)}{t-a}dt. \quad (2.3.6)$$

Если $\Delta_2=\lambda^2-4\mu<0$, тогда характеристическое уравнение (2.1.16) имеет решение вида:

$$\gamma_{1,2}=\alpha_2+i\beta_2,\quad \alpha_2=\frac{\lambda}{2},\ \beta_2=\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}.$$

Следовательно, общее решение однородного уравнения (2.1.6) имеет вид:

$$\psi(x,y)=e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\left[\cos\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right)c_{11}(x)+\sin\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right)c_{12}(x)\right]. \quad (2.3.7)$$

Для нахождения общего решения неоднородного уравнения (2.1.6) используем метод вариации произвольных постоянных, полагая:

$$\psi(x,y)=e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\left[\cos\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right)c_{11}(x,y)+\sin\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right)c_{12}(x,y)\right], \quad (2.3.8)$$

где $c_{11}(x,y), c_{12}(x,y)$ – произвольные функции точек Γ_2. Дифференцируя (2.3.8), далее используя произвольность функции $c_{11}(x,y)$ и $c_{12}(x,y)$, получим:

$$D_y\psi(x,y)=e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\times$$
$$\times\left[\left(\frac{\lambda}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right)+\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right)\right)c_{11}(x,y)+\left(\frac{\lambda}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right)-\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right)\right)c_{12}(x,y)\right],$$

$$D_yc_{11}(x,y)e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\cos\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right)+D_yc_{12}(x,y)e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\sin\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right)=0\cdot$$

Дифференцируя ещё раз полученное равенство, после замечая, что η_1 и η_2 корни уравнения (2.1.16), имеем:

$$(D_y)^2\psi(x,y)=-\frac{\lambda}{2}(y-b)^\beta e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}c_{11}^{|}(x,y)-(y-b)^\beta\left[1+\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)\right]e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}c_{12}^{|}(x,y)-$$
$$-\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}c_{11}(x,y)-\left[1+\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)\right]\frac{\lambda}{2}e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}c_{12}(x,y).$$

В результате для определения произвольных функций $c_{11}(x,y)$ и $c_{12}(x,y)$ получим систему вырождающихся дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{cases} D_yc_{11}(x,y)e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}+D_yc_{12}(x,y)\omega_b^\beta(y)e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}=0, \\ D_yc_{11}(x,y)\frac{\lambda}{2}e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}+D_yc_{12}(x,y)\left[1+\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)\right]e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}=-(D_y)^2f(x,y). \end{cases} \quad (2.3.9)$$

Решая систему уравнений (2.3.9) методом Крамера, получим:

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)} & \omega_b^\beta(y) e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)} \\ \frac{\lambda}{2} e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)} & \left[1+\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)\right] e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)} \end{vmatrix} = e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)},$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \omega_b^\beta(y) e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)} \\ -(D_y)^2 f(x,y) & \left[1+\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)\right] e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)} \end{vmatrix} = (D_y)^2 f(x,y) \omega_b^\beta(y) e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)} & 0 \\ \frac{\lambda}{2} e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)} & -(D_y)^2 f(x,y) \end{vmatrix} = -(D_y)^2 f(x,y) e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}.$$

Тогда решения системы уравнений (2.3.9) примут вид:

$$\begin{cases} D_y c_{11}(x,y) = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = (D_y)^2 f(x,y) \omega_b^\beta(y) e^{-\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}, \\ D_y c_{12}(x,y) = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = -(D_y)^2 f(x,y) e^{-\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}. \end{cases} \tag{2.3.10}$$

Отсюда находим:

$$c_{11}(x,y) = \varphi_1(x) + \omega_b^\beta(y) e^{-\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)} D_y f(x,y) + \left[1-\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)\right]\left[e^{-\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)} f(x,y) - \left(e^{-\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(s)} f(x,s)\right)_{s=b}\right] + \frac{\lambda}{2}\int_b^y \left(2-\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)\right) e^{-\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)} \frac{f(x,s)}{(s-b)^\beta} ds.$$

От функции $f(x,y)$ потребуем обращение в нуль в точке $y=b$ с асимптотическим поведением:

$$f(x,y) = o[e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)} (y-b)^\nu], \nu > 2(\beta-1), \quad \text{при} \quad y \to b. \tag{2.3.11}$$

Следовательно:

$$c_{11}(x,y) = \varphi_1(x) + \omega_b^\beta(y) e^{-\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)} D_y f(x,y) + \left(1-\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)\right) e^{-\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)} f(x,y) + \frac{\lambda}{2}\int_b^y \left(2-\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)\right) e^{-\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)} \frac{f(x,s)}{(s-b)^\beta} ds.$$

Аналогичным образом находим:

$$c_{12}(x,y) = \varphi_2(x) - \omega_b^\beta(y) e^{-\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)} D_y f(x,y) - \frac{\lambda}{2}\left[e^{-\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)} f(x,y) - \left(e^{-\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(s)} f(x,s)\right)_{s=b}\right] + \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 \int_b^y e^{-\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)} \frac{f(x,s)}{(s-b)^\beta} ds.$$

Откуда:

$$c_{12}(x,y)=\varphi_2(x)-e^{-\frac{\lambda}{2}\omega_b^{\beta}(y)}D_y f(x,y)-\frac{\lambda}{2}e^{-\frac{\lambda}{2}\omega_b^{\beta}(y)}f(x,y)+\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2\int_b^y e^{-\frac{\lambda}{2}\omega_b^{\beta}(y)}\frac{f(x,s)}{(s-b)^{\beta}}ds.$$

Полученные значение $c_{11}(x,y)$ и $c_{12}(x,y)$ ставим в решение вида (2.3.8), если решение интегрального уравнения (2.1.6) при $\lambda<0,\lambda^2-4\mu<0$ существует, тогда оно имеет вид:

$$\psi(x,y)=e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^{\beta}(y)}\left\{\cos\left[\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^{\beta}(y)\right]\varphi_1(x)+\sin\left[\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^{\beta}(y)\right]\varphi_2(x)\right\}+$$

$$+f(x,y)+\frac{2}{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}\int_b^y e^{\frac{\lambda}{2}(\omega_b^{\beta}(y)-\omega_b^{\beta}(s))}\times$$

$$\times\left[\left(\frac{\lambda^2-2\mu}{2}\right)\sin\left[\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\left(\omega_b^{\beta}(y)-\omega_b^{\beta}(s)\right)\right]+\frac{\lambda\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\cos\left[\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\left(\omega_b^{\beta}(y)-\omega_b^{\beta}(s)\right)\right]\right]\frac{f(x,s)}{(s-b)^{\beta}}ds. \qquad (2.3.12)$$

На основе равенств (2.3.6) и (2.3.9) и после некоторых преобразований решение интегрального уравнения (2.1.1) представим в виде:

$$u(x,y)=(x-a)^{\frac{|p|}{2}}\left\{\cos\left[\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right]\theta_1(y)+\sin\left[\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right]\theta_2(y)\right\}+$$
$$+e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^{\beta}(y)}\left[\cos\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^{\beta}(y)\right)\Phi_1(x)+\sin\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^{\beta}(y)\right)\Phi_2(x)\right]+E_{p,q,\lambda,\mu}^{(x,y)}[f(x,y)], \qquad (2.3.13)$$

где

$$\Phi_i(x)=\varphi_i(x)+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{4q-p^2}}\int_a^x\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\frac{|p|}{2}}\left[(p^2-4q)\sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right)-p\sqrt{4q-p^2}\cos\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right)\right]\frac{\varphi_i(t)}{t-a}dt, \qquad (2.3.14)$$

$$E_{p,q,\lambda,\mu}^{(x,y)}\left(f(x,y)\right)=f(x,y)+\frac{1}{\sqrt{4q-p^2}}\times$$

$$\times\int_a^x\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\frac{|p|}{2}}\left[(p^2-4q)\sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right)-p\sqrt{4q-p^2}\cos\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right)\right]\frac{f(t,y)}{t-a}dt+$$

$$+\frac{2}{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}\int_b^y e^{\frac{\lambda}{2}(\omega_b^\beta(y)-\omega_b^\beta(s))}\times$$

$$\times\left[\left(\frac{\lambda^2-2\mu}{2}\right)\sin\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\left(\omega_b^\beta(y)-\omega_b^\beta(s)\right)\right)+\frac{\lambda\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\left(\omega_b^\beta(y)-\omega_b^\beta(s)\right)\right)\right]\frac{f(x,s)}{(s-b)^\beta}ds+$$

$$+\frac{2}{\sqrt{4\mu-\lambda^2}\sqrt{4q-p^2}}\int_b^y e^{\frac{\lambda}{2}(\omega_b^\beta(y)-\omega_b^\beta(s))}\times$$

$$\times\left[\left(\frac{\lambda^2-2\mu}{2}\right)\sin\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\left(\omega_b^\beta(y)-\omega_b^\beta(s)\right)\right)+\frac{\lambda\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\left(\omega_b^\beta(y)-\omega_b^\beta(s)\right)\right)\right]\frac{ds}{(s-b)^\beta}\times$$

$$\times\int_a^x\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\frac{|p|}{2}}\left[(p^2-4q)\sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right)-p\sqrt{4q-p^2}\cos\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right)\right]\frac{f(t,s)}{t-a}dt. \quad (2.3.15)$$

Из вышеприведенных рассуждений вытекают следующие утверждения:

Теорема 2.3.1. *Если в интегральном уравнении* (2.1.1) *выполняются условия* (2.1.2)*, также условия*:

1. $\Delta_1 = p^2 - 4q < 0,\ p < 0,$
2. $\Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu < 0, \lambda < 0,$
3. $f(x,y)\in C(\overline{D}),\ f(a,b) = 0$ *с асимптотическим поведением на* Γ_1 *и* Γ_2:

$$f(x,y) = o[(x-a)^{\delta_{25}}], \delta_{25} > \frac{|p|}{2}, x\to a,$$

$$f(x,y) = o[e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}(y-b)^{\nu_{56}}], \nu_{56} > 2(\beta-1), y\to b,$$

тогда интегральное уравнение (2.1.1) *в классе* $C(\overline{D})$*, обращающихся в нуль при* $x\to a$, $y\to b$, *всегда разрешимо и его явное решение представимо в виде* (2.3.13), *где* $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\theta_1(y),\theta_2(y)$ *-произвольные непрерывные функции, обращающиеся в нуль при* $x\to a$, $y\to b$, *поведения которых определяются из асимптотических формул*:

$$\varphi_i(x) = o[(x-a)^{\delta_{26}}], \delta_{26} > \frac{|p|}{2}, x\to a, i = (1,2),$$

$$\theta_j(y) = o[(y-b)^{\nu_{57}}], \nu_{57} > 2(\beta-1), y\to b,\ j = (1,2).$$

Следствие 2.3.1. *Пусть коэффициенты интегрального уравнения* (2.1.1) *удовлетворяют условиям теоремы* 2.3.1. *Тогда* $u(x,y)\in C(\overline{D})$ *и обращается в нуль с асимптотическими поведениями*:

$$u(x,y)=o[(x-a)^{\frac{|p|}{2}}],\ x\to a,$$

$$u(x,y)=o[(y-b)^{\nu_{58}}],\nu_{58}>2(\beta-1),\quad y\to b.$$

Теорема 2.3.2. *Если в интегральном уравнении* (2.1.1) *выполняются условия* (2.1.2)*, также условия*:

1. $\Delta_1=p^2-4q<0,\ p<0,$
2. $\Delta_2=\lambda^2-4\mu<0,\ \lambda>0,$
3. $f(x,y)\in C(\overline{D}),\ f(a,b)=0$ *с асимптотическим поведением на* Γ_1 *и* Γ_2:

$$f(x,y)=o[(x-a)^{\delta_{27}}],\delta_{27}>\frac{|p|}{2},\ x\to a,$$

$$f(x,y)=o[(y-b)^{\nu_{59}}],\nu_{59}>2(\beta-1),\ y\to b,$$

тогда интегральное уравнение (2.1.1) *в классе* $C(\overline{D})$, *обращающихся в нуль при* $x\to a,\ y\to b$, *всегда разрешимо и его явное решение представимо в виде:*

$$u(x,y)=(x-a)^{\frac{|p|}{2}}\left\{\cos\left[\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right]\theta_1(y)+\sin\left[\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right]\theta_2(y)\right\}+E^{(x,y)}_{p,q,\lambda,\mu}[f(x,y)],\quad(2.3.16)$$

где $\theta_1(y),\theta_2(y)$- *произвольные непрерывные функции, обращающиеся в нуль при* $y\to b$, *поведения которых определяются из асимптотических формул:*

$$\theta_j(y)=o[(y-b)^{\nu_{60}}],\nu_{60}>2(\beta-1),\ j=(1,2),\ \text{при}\ y\to b.$$

Следствие 2.3.2. *Пусть коэффициенты интегрального уравнения* (2.1.1) *удовлетворяют условиям теоремы* 2.3.2. *Тогда* $u(x,y)\in C(\overline{D})$ *и обращается в нуль с асимптотическими поведениями*:

$$u(x,y)=o[(x-a)^{\frac{|p|}{2}}],\ x\to a,$$

$$u(x,y)=o[(y-b)^{\nu_{61}}],\nu_{61}>2(\beta-1),\ y\to b.$$

Теорема 2.3.3. *Если в интегральном уравнении* (2.1.1) *выполняются условия* (2.1.2)*, также условия*:

1. $\Delta_1 = p^2-4q<0\,,\ p>0,$
2. $\Delta_2=\lambda^2-4\mu<0\,,\lambda<0,$
3. $f(x,y)\in C(\overline{D}),\ f(a,b)\ =0$ *с асимптотическим поведением на* Γ_1 *и* Γ_2:

$$f(x,y)=o[(x-a)^{\varepsilon}],\varepsilon>0,\ \textit{при}\ x\to a,$$

$$f(x,y)=o[e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^{\beta}(y)}(y-b)^{\nu_{62}}],\nu_{62}>2(\beta-1),\ \textit{при}\ y\to b,$$

тогда интегральное уравнение (2.1.1) *в классе* $C(\overline{D})$, *обращающихся в нуль при* $x\to a,\ \ y\to b,$ *всегда разрешимо и его явное решение представимо в виде:*

$$u(x,y)=e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^{\beta}(y)}\left[\cos\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^{\beta}(y)\right)\Phi_1(x)+\sin\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^{\beta}(y)\right)\Phi_2(x)\right]+E_{p,q,\lambda,\mu}^{(x,y)}[f(x,y)],\qquad(2.3.17)$$

где $\varphi_1(x),\varphi_2(x)$ *- произвольные непрерывные функции, обращающиеся в нуль при* $x\to a$, *поведения которых определяются из асимптотических формул*:

$$\varphi_i(x)=o[(x-a)^{\varepsilon}],\varepsilon>0,\ \textit{при}\ x\to a,\ i=(1,2).$$

Следствие 2.3.3. *Пусть коэффициенты интегрального уравнения* (2.1.1) *удовлетворяют условиям теоремы* 2.3.3. *Тогда* $u(x,y)\in C(\overline{D})$ *и обращается в нуль с асимптотическими поведениями*:

$$u(x,y)=o[(x-a)^{\varepsilon}],\varepsilon>0,\ \textit{при}\ x\to a,$$

$$u(x,y)=o[(y-b)^{\nu_{63}}],\nu_{63}>2(\beta-1),\ \ \textit{при}\ y\to b.$$

Теорема 2.3.4. *Если в интегральном уравнении* (2.1.1) *выполняются условия* (2.1.2)*, также условия*:

1. $\Delta_1 = p^2 - 4q < 0$, $p > 0$,

2. $\Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu < 0$, $\lambda > 0$,

3. $f(x,y) \in C(\overline{D})$, $f(a,b) = 0$ *с асимптотическим поведением на* Γ_1 *и* Γ_2:

$f(x,y) = o[(x-a)^{\varepsilon}], \varepsilon > 0,$ *при* $x \to a$,

$f(x,y) = o[(y-b)^{\nu_{64}}], \nu_{64} > 2(\beta - 1),$ *при* $y \to b$,

тогда интегральное уравнение (2.1.1) *в классе* $C(\overline{D})$, *обращающихся в нуль при* $x \to a$, $y \to b$, *всегда разрешимо и его единственное решение представимо в виде:*

$$u(x,y) = E_{p,q,\lambda,\mu}^{(x,y)}[f(x,y)]. \tag{2.3.18}$$

Следствие 2.3.4. *Пусть коэффициенты интегрального уравнения* (2.1.1) *удовлетворяют условиям теоремы* 2.3.4. *Тогда* $u(x,y) \in C(\overline{D})$ *и обращается в нуль с асимптотическими поведениями*:

$u(x,y) = o[(x-a)^{\varepsilon}], \varepsilon > 0,\ x \to a,$

$u(x,y) = o[(y-b)^{\nu_{65}}], \nu_{65} > 2(\beta - 1),\ y \to b.$

§2.4. Исследование двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра, когда корни характеристических уравнений вещественные, разные и равные

Изучим случай, когда корни характеристических уравнений вида (2.1.9) и (2.1.18) являются вещественные, разными и равными:

$$\Delta_1 = p^2 - 4q > 0\ \ \Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu = 0, \text{ также } p = p_1, q = q_1, \lambda = \lambda_1, \mu = \mu_1.$$

Используя вышеуказанный метод нахождения решения интегрального уравнения (2.1.1) как (§2.1 и §2.2 глава 2) учитивая выпольняется условиях:

$f(x,y) = o[(x-a)^{\delta_1}], \delta_1 > \gamma_1,$ при $x \to a$,

$f(x,y) = o[e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^{\beta}(y)}(y-b)^{\nu_{66}}], \nu_{66} > \beta - 1,$ при $y \to b$, в случае, когда $p<0, q>0, p^2-4q>0$ и если решение интегрального уравнения (2.1.5) существует, тогда оно представимо в виде:

$$u(x,y)=\theta_1(y)(x-a)^{\gamma_1}+\theta_2(y)(x-a)^{\gamma_2}+\psi(x,y)+ \\ +\frac{1}{\sqrt{p^2-4q}}\int_a^x\left[(\gamma_2)^2\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\gamma_2}-(\gamma_1)^2\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\gamma_1}\right]\frac{\psi(t,y)}{t-a}dt. \tag{2.4.1}$$

Соответственно, если решение интегрального уравнения (2.1.6) при $\lambda<0, \lambda^2-4\mu=0$ существует, тогда согласно [57] оно имеет вид:

$$\psi(x,y)=e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^{\beta}(y)}\left[\varphi_1(x)+\omega_b^{\beta}(y)\varphi_2(x)\right]+f(x,y)- \\ -\int_b^y e^{\frac{\lambda}{2}(\omega_b^{\beta}(y)-\omega_b^{\beta}(s))}\left[\lambda+\frac{\lambda^2}{4}(\omega_b^{\beta}(y)-\omega_b^{\beta}(s))\right]\frac{f(x,s)}{(s-b)^{\beta}}ds. \tag{2.4.2}$$

Из равенство (2.4.1) и (2.4.2) после некоторых преобразованный решение интегрального уравнения (2.1.1) получим в виде:

$$u(x,y)=\theta_1(y)(x-a)^{\gamma_1}+\theta_2(y)(x-a)^{\gamma_2}+e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^{\beta}(y)}\Phi_1(x)+e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^{\beta}(y)}\omega_b^{\beta}(y)\Phi_2(x)+K_{p,q,\lambda}\left[f(x,y)\right], \tag{2.4.3}$$

где

$$K_{p,q,\lambda}[f(x,y)]=f(x,y)+\frac{1}{\sqrt{p^2-4q}}\int_a^x\left[(\gamma_2)^2\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\gamma_2}-(\gamma_1)^2\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\gamma 1}\right]\frac{f(t,y)}{t-a}dt+ \\ +\int_b^y e^{\frac{\lambda}{2}(\omega_b^{\beta}(y)-\omega_b^{\beta}(s))}\left[\lambda+\frac{\lambda^2}{4}(\omega_b^{\beta}(y)-\omega_b^{\beta}(s))\right]\frac{f(x,s)}{(s-b)^{\beta}}ds+ \\ +\frac{1}{\sqrt{p^2-4q}}\int_b^y e^{\frac{\lambda}{2}(\omega_b^{\beta}(y)-\omega_b^{\beta}(s))}\left[\lambda+\frac{\lambda^2}{4}(\omega_b^{\beta}(y)-\omega_b^{\beta}(s))\right]\frac{ds}{(s-b)^{\beta}}\times \\ \times\int_a^x\left[(\gamma_2)^2\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\gamma_2}-(\gamma_1)^2\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\gamma_1}\right]\frac{f(t,s)}{t-a}dt. \tag{2.4.4}$$

$\Phi_1(x), \Phi_2(x), \gamma_1, \gamma_2$ – определены из равенство (2.1.26), (2.1.28).

Итак доказана:

Теорема 2.4.1. *Если в интегральном уравнении* (2.1.1) *выполняются условия* (2.1.2), *также условия*:

1. $\Delta_1 = p^2 - 4q > 0,\ p < 0,\ q > 0,$

2. $\Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu = 0,\ \lambda < 0,$

3. $f(x,y) \in C(\overline{D}),\ f(a,b) = 0$ *с асимптотическим поведением на* Γ_1 *и* Γ_2:

$$f(x,y) = o[(x-a)^{\delta_{28}}],\ \delta_{28} > \gamma_1,\ \ \text{при}\ \ x \to a,$$

$$f(x,y) = o[e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^{\beta}(y)}(y-b)^{\nu_{67}}],\ \nu_{67} > \beta - 1,\ \ \text{при}\ \ y \to b,$$

тогда интегральное уравнение (2.1.1) *в классе* $C(\overline{D})$, *обращающихся в нуль при* $x \to a,\ \ y \to b$, *всегда разрешимо и его явное решение представимо в виде* (2.4.3), *где* $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \theta_1(y), \theta_2(y)$ – *произвольные непрерывные функции на* Γ_1 *и* Γ_2, *обращающиеся в нуль при* $x \to a,\ y \to b$ *с асимптотическими поведениями*:

$$\varphi_i(x) = o[(x-a)^{\delta_{29}}],\ \delta_{29} > \gamma_1,\ \text{при}\ \ x \to a,\ (i = 1,2),$$

$$\theta_j(y) = o[(y-b)^{\nu_{68}}],\ \nu_{68} > 2(\beta - 1),\ \text{при}\ \ y \to b,\ (j = 1,2).$$

Следствие 2.4.1. *Пусть коэффициенты интегрального уравнения* (2.1.1) *удовлетворяют условиям теоремы* 2.4.1. *Тогда* $u(x,y) \in C(\overline{D})$ *и обращается в нуль с асимптотическими поведениями*:

$$u(x,y) = o[(x-a)^{\delta_{30}}],\ \delta_{30} > \gamma_2,\ x \to a,$$

$$u(x,y) = o[(y-b)^{\nu_{69}}],\ \nu_{69} > 2(\beta - 1),\ y \to b.$$

Теорема 2.4.2. *Если в интегральном уравнении* (2.1.1) *выполняются условия* (2.1.2), *также условия*:

1. $\Delta_1 = p^2 - 4q > 0,\ p < 0,\ q > 0,$

2. $\Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu = 0,\ \lambda > 0,$

3. $f(x,y) \in C(\overline{D}),\ f(a,b) = 0$ *с асимптотическим поведением на* Γ_1 *и* Γ_2:

$f(x,y)=o[(x-a)^{\delta_{31}}],\delta_{31}>\gamma_1,$ *при* $x\to a,$

$f(x,y)=o[(y-b)^{\nu_{70}}],\nu_{70}>\beta-1,$ *при* $y\to b,$

тогда интегральное уравнение (2.1.1) *в классе* $C(\overline{D})$, *обращающихся в нуль при* $x\to a,$ $y\to b,$ *всегда разрешимо и его явное решение представимо в виде*:

$$u(x,y)=\theta_1(y)(x-a)^{\gamma_1}+\theta_2(y)(x-a)^{\gamma_2}+K_{p,q,\lambda}[f(x,y)], \tag{2.4.5}$$

где $\theta_1(y),\theta_2(y)-$ *произвольные непрерывные функции на* Γ_2, *обращающиеся в нуль при* $y\to b,$ *с асимптотическими поведениями*:

$\theta_j(y)=o[(y-b)^{\nu_{71}}],\nu_{71}>2(\beta-1),$ *при* $y\to b$, $j=(1,2).$

Следствие 2.4.2. *Пусть коэффициенты интегрального уравнения* (2.1.1) *удовлетворяют условиям теоремы* 2.4.2. *Тогда* $u(x,y)\in C(\overline{D})$ *и обращается в нуль с асимптотическими поведениями*:

$u(x,y)=o[(x-a)^{\delta_{32}}],\delta_{32}>\gamma_1,x\to a,$

$u(x,y)=o[(y-b)^{\nu_{72}}],\nu_{72}>2\beta-1,y\to b.$

Теорема 2.4.3. *Если в интегральном уравнении* (2.1.1) *выполняются условия* (2.1.2), *также условия*:

1. $\Delta_1=p^2-4q>0$, $p>0,q<0,$
2. $\Delta_2=\lambda^2-4\mu=0$, $\lambda<0,$
3. $f(x,y)\in C(\overline{D}),$ $f(a,b)=0$ *с асимптотическим поведением на* Γ_1 *и* Γ_2:

$f(x,y)=o[(x-a)^{\delta_{33}}],\delta_{33}>\gamma_3,$ *при* $x\to a,$

$f(x,y)=o[e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}(y-b)^{\nu_{73}}],\nu_{73}>\beta-1,$ *при* $y\to b,$

тогда интегральное уравнение (2.1.1) *в классе* $C(\overline{D})$, *обращающихся в нуль при* $x\to a,$ $y\to b,$ *всегда разрешимо и его явное решение представимо в виде*:

$$u(x,y)=\theta_3(y)(x-a)^{\gamma_3}+e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^{\beta}(y)}\Phi_1(x)+e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^{\beta}(y)}\omega_b^{\beta}(y)\Phi_2(x)+K_{p,q,\lambda}\left[f(x,y)\right], \quad (2.4.6)$$

где $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\theta_3(y)$ *– произвольные непрерывные функции на* Γ_1 *и* Γ_2, *обращающиеся в нуль при* $x\to a$, $y\to b$ *с асимптотическими поведениями*:

$\varphi_i(x)=o[(x-a)^{\delta_{34}}],\delta_{34}>\gamma_3$, *при* $x\to a$, $(i=1,2)$,

$\theta_3(y)=o[(y-b)^{\nu_{74}}],\nu_{74}>2(\beta-1)$, *при* $y\to b$.

Следствие 2.4.3. *Пусть коэффициенты интегрального уравнения* (2.1.1) *удовлетворяют условиям теоремы* 2.4.3. *Тогда* $u(x,y)\in C(\overline{D})$ *и обращается в нуль с асимптотическими поведениями*:

$u(x,y)=o[(x-a)^{\delta_{35}}],\delta_{35}>\gamma_3$, $x\to a$,

$u(x,y)=o[(y-b)^{\nu_{75}}],\nu_{75}>2(\beta-1)$, $y\to b$.

Теорема 2.4.4. *Если в интегральном уравнении* (2.1.1) *выполняются условия* (2.1.2)*, также условия*:

1. $\Delta_1=p^2-4q>0$, $p>0,q<0$,
2. $\Delta_2=\lambda^2-4\mu=0$, $\lambda>0$,
3. $f(x,y)\in C(\overline{D})$, $f(a,b)=0$ *с асимптотическим поведением на* Γ_1 *и* Γ_2:

$f(x,y)=o[(x-a)^{\delta_{36}}],\delta_{36}>\gamma_1$, *при* $x\to a$,

$f(x,y)=o[(y-b)^{\nu_{76}}],\nu_{76}>\beta-1$, *при* $y\to b$,

тогда интегральное уравнение (2.1.1) *в классе* $C(\overline{D})$, *обращающихся в нуль при* $x\to a$, $y\to b$, *всегда разрешимо и его явное решение представимо в виде*:

$$u(x,y)=\theta_3(y)(x-a)^{\gamma_3}+K_{p,q,\lambda}\left[f(x,y)\right], \quad (2.4.7)$$

где $\theta_3(y)$ *– произвольная непрерывная функция на* Γ_2, *обращающееся в нуль при* $y\to b$ *с асимптотическим поведением*:

$\theta_3(y) = o[(y-b)^{\nu_{77}}], \nu_{77} > 2(\beta - 1),$ *при* $y \to b.$

Следствие 2.4.4. *Пусть коэффициенты интегрального уравнения* (2.1.1) *удовлетворяют условиям теоремы* 2.4.4. *Тогда* $u(x,y) \in C(\overline{D})$ *и обращается в нуль с асимптотическими поведениями*:

$$u(x,y) = o[(x-a)^{\delta_{37}}], \delta_{37} > \gamma_3, x \to a,$$

$$u(x,y) = o[(y-b)^{\nu_{78}}], \nu_{78} > 2(\beta - 1), y \to b.$$

Теорема 2.4.5. *Если в интегральном уравнении* (2.1.1) *выполняются условия* (2.1.2)*, также условия*:

1. $\Delta_1 = p^2 - 4q > 0$, $p < 0,\ q < 0,$
2. $\Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu = 0$, $\lambda < 0,$
3. $f(x,y) \in C(\overline{D}),\ f(a,b) = 0$ *с асимптотическим поведением на* Γ_1 *и* Γ_2:

$$f(x,y) = o[(x-a)^{\delta_{38}}], \delta_{38} > \gamma_4, \text{ при } x \to a,$$

$$f(x,y) = o[e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^{\beta}(y)}(y-b)^{\nu_{79}}], \nu_{79} > \beta - 1, \text{ при } y \to b,$$

тогда интегральное уравнение (2.1.1) *в классе* $C(\overline{D})$, *обращающихся в нуль при* $x \to a,\ y \to b,$ *всегда разрешимо и его явное решение представимо в виде*:

$$u(x,y) = \theta_4(y)(x-a)^{\gamma_4} + e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^{\beta}(y)}\Phi_1(x) + e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^{\beta}(y)}\omega_b^{\beta}(y)\Phi_2(x) + K_{p,q,\lambda}[f(x,y)], \quad (2.4.8)$$

где $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \theta_4(y)$ – *произвольные непрерывные функции на* Γ_1 *и* Γ_2, *обращающиеся в нуль при* $x \to a,\ y \to b,$ *с асимптотическими поведениями*:

$$\varphi_i(x) = o[(x-a)^{\delta_{39}}], \delta_{39} > \gamma_4, \text{ при } x \to a, \ (i = 1,2),$$

$$\theta_4(y) = o[(y-b)^{\nu_{80}}], \nu_{80} > 2(\beta - 1), \text{ при } y \to b,$$

Следствие 2.4.5. *Пусть коэффициенты интегрального уравнения* (2.1.1) *удовлетворяют условиям теоремы* 2.4.5. *Тогда* $u(x,y) \in C(\overline{D})$ *и обращается в нуль с асимптотическими поведениями*:

$u(x,y) = o[(x-a)^{\delta_{40}}], \delta_{40} > \gamma_4, \ x \to a,$

$u(x,y) = o[(y-b)^{\nu_{81}}], \nu_{81} > 2(\beta - 1), \ y \to b.$

Теорема 2.4.6. *Если в интегральном уравнении* (2.1.1) *выполняются условия* (2.1.2)*, также условия*:

1. $\Delta_1 = p^2 - 4q > 0, \ p < 0, \ q < 0,$
2. $\Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu = 0, \lambda > 0,$
3. $f(x,y) \in C(\overline{D}), \ f(a,b) = 0$ *с асимптотическим поведением на* Γ_1 *и* Γ_2:

$f(x,y) = o[(x-a)^{\delta_{41}}], \delta_{41} > \gamma_4,$ *при* $x \to a,$

$f(x,y) = o[(y-b)^{\nu_{82}}], \nu_{82} > \beta - 1,$ *при* $y \to b,$

тогда интегральное уравнение (2.1.1) *в классе* $C(\overline{D})$, *обращающихся в нуль при* $x \to a, \ \ y \to b,$ *всегда разрешимо и его явное решение представимо в виде*:

$$u(x,y) = \theta_4(y)(x-a)^{\gamma_4} + K_{p,q,\lambda}\left[f(x,y)\right], \tag{2.4.9}$$

где $\theta_4(y)$ – *произвольная непрерывная функция на* Γ_2, *обращающееся в нуль при* $y \to b$ *с асимптотическим поведением*:

$\theta_4(y) = o[(y-b)^{\nu_{83}}], \nu_{83} > 2(\beta - 1),$ *при* $y \to b.$

Следствие 2.4.6. *Пусть коэффициенты интегрального уравнения* (2.1.1) *удовлетворяют условиям теоремы* 2.4.6. *Тогда* $u(x,y) \in C(\overline{D})$ *и обращается в нуль с асимптотическими поведениями*:

$u(x,y) = o[(x-a)^{\delta_{42}}], \delta_{42} > \gamma_4, x \to a,$

$u(x,y) = o[(y-b)^{\nu_{84}}], \nu_{84} > 2(\beta - 1), y \to b.$

Теорема 2.4.7. *Если в интегральном уравнении* (2.1.1) *выполняются условия* (2.1.2)*, также условия*:

1. $\Delta_1 = p^2 - 4q > 0\,, p > 0,\ q > 0,$
2. $\Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu = 0\,, \lambda < 0,$
3. $f(x,y) \in C(\overline{D}),\ \ f(a,b) = 0$ *с асимптотическим поведением на* Γ_1 *и* Γ_2:

$f(x,y) = o[(x-a)^{\varepsilon}], \varepsilon > 0,$ *при* $x \to a,$

$f(x,y) = o[e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^{\beta}(y)}(y-b)^{\nu_{85}}], \nu_{85} > \beta - 1,$ *при* $y \to b,$

тогда интегральное уравнение (2.1.1) *в классе* $C(\overline{D})$, *обращающихся в нуль при* $x \to a,\ \ y \to b,$ *всегда разрешимо и его явное решение представимо в виде*:

$$u(x,y) = e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^{\beta}(y)}\Phi_1(x) + e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^{\beta}(y)}\omega_b^{\beta}(y)\Phi_2(x) + K_{p,q,\lambda}[f(x,y)], \tag{2.4.10}$$

где $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ – *произвольные непрерывные функции на* Γ_1, *обращающиеся в нуль при* $x \to a,$ *с асимптотическими поведениями*:

$\varphi_i(x) = o[(x-a)^{\varepsilon}], \varepsilon > 0,$ *при* $x \to a,\ (i = 1,2).$

Следствие 2.4.7. *Пусть коэффициенты интегрального уравнения* (2.1.1) *удовлетворяют условиям теоремы* 2.4.7. *Тогда* $u(x,y) \in C(\overline{D})$ *и обращается в нуль с асимптотическими поведениями*:

$u(x,y) = o[(x-a)^{\varepsilon}], \varepsilon > 0, x \to a,$

$u(x,y) = o[(y-b)^{\nu_{86}}], \nu_{86} > 2(\beta - 1), y \to b.$

Теорема 2.4.8. *Если в интегральном уравнении* (2.1.1) *выполняются условия* (2.1.2)*, также условия*:

1. $\Delta_1 = p^2 - 4q > 0\,, p > 0,\ q > 0,$
2. $\Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu = 0\,, \lambda > 0,$

3. $f(x,y)\in C(\overline{D}),\ f(a,b)=0$ *с асимптотическим поведением на* Γ_1 *и* Γ_2:

$f(x,y)=o[(x-a)^{\varepsilon}],\varepsilon>0,$ *при* $x\to a,$

$f(x,y)=o[(y-b)^{\nu_{87}}],\nu_{87}>\beta-1,$ *при* $y\to b,$

тогда интегральное уравнение (2.1.1) *в классе* $C(\overline{D})$, *обращающихся в нуль при* $x\to a,\quad y\to b,$ *всегда разрешимо и его единственное решение представимо в виде*:

$$u(x,y)=K_{p,\lambda,\mu}[f(x,y)], \tag{2.4.11}$$

Следствие 2.4.8. *Пусть коэффициенты интегрального уравнения* (2.1.1) *удовлетворяют условиям теоремы* 2.4.8. *Тогда* $u(x,y)\in C(\overline{D})$ *и обращается в нуль с асимптотическими поведениями*:

$u(x,y)=o[(x-a)^{\varepsilon}],\varepsilon>0,x\to a,$

$u(x,y)=o[(y-b)^{\nu_{88}}],\nu_{88}>2(\beta-1),y\to b.$

§2.5. Исследование двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра, когда корни характеристических уравнений вещественные, разные и комплексно-сопряженные

Теперь рассмотрим случай, когда корни характеристического уравнениях вида (2.1.9) и (2.1.18) являются вещественные разные и комплексно-сопряженные:

$$\Delta_1=p^2-4q>0\ \ \Delta_2=\lambda^2-4\mu<0,\ \text{также}\ \ p=p_1,q=q_1,\lambda=\lambda_1,\mu=\mu_1.$$

Используя вышеуказанный метод нахождения решения интегрального уравнения (2.1.1) как (§2.1 и §2.3 глава 2) учитивая выпольняется условиях:

$f(x,y)=o[(x-a)^{\delta_{43}}],\delta_{43}>\gamma_1,$ при $x\to a,$

$f(x,y)=o[e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^{\beta}(y)}(y-b)^{\nu_{89}}],\nu_{89}>2(\beta-1),$ при $y\to b.$

Когда $p<0,q>0,p^2-4q>0$ [57] и если решение интегрального уравнения (2.1.5) существует, тогда оно представимо в виде:

$$u(x,y)=\theta_1(y)(x-a)^{\gamma_1}+\theta_2(y)(x-a)^{\gamma_2}+\psi(x,y)+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{p^2-4q}}\int_a^x\left[(\gamma_2)^2\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\gamma_2}-(\gamma_1)^2\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\gamma_1}\right]\frac{\psi(t,y)}{t-a}dt. \quad (2.5.1)$$

Соответственно, если решение интегрального уравнения (2.1.6) при $\lambda<0, \lambda^2-4\mu<0$ существует, согласно [58] оно имеет вид:

$$\psi(x,y)=e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\left\{\cos\left[\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right]\varphi_1(x)+\sin\left[\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right]\varphi_2(x)\right\}+$$
$$+f(x,y)+\frac{2}{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}\int_b^y e^{\frac{\lambda}{2}(\omega_b^\beta(y)-\omega_b^\beta(s))}\times \quad (2.5.2)$$
$$\times\left[\left(\frac{\lambda^2-2\mu}{2}\right)\sin\left[\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\left(\omega_b^\beta(y)-\omega_b^\beta(s)\right)\right]+\frac{\lambda\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\cos\left[\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\left(\omega_b^\beta(y)-\omega_b^\beta(s)\right)\right]\right]\frac{f(x,s)}{(s-b)^\beta}ds.$$

Решение двумерного интегрального уравнения (2.1.1) на основе равенство (2.5.2), (2.5.1) получим в виде:

$$u(x,y)=\theta_1(y)(x-a)^{\gamma_1}+\theta_2(y)(x-a)^{\gamma_2}+e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\cos\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right)\Phi_1(x)+$$
$$+e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\sin\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right)\Phi_2(x)+K_{p,q,\lambda}[f(x,y)], \quad (2.5.3)$$

где

$$K_{p,q,\lambda}[f(x,y)]=f(x,y)+\frac{1}{\sqrt{p^2-4q}}\int_a^x\left[(\gamma_2)^2\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\gamma_2}-(\gamma_1)^2\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\gamma_1}\right]\frac{f(t,y)}{t-a}dt+$$
$$+\frac{2}{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}\int_b^y e^{\frac{\lambda}{2}(\omega_b^\beta(y)-\omega_b^\beta(s))}\times$$
$$\times\left[\left(\frac{\lambda^2-2\mu}{2}\right)\sin\left[\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\left(\omega_b^\beta(y)-\omega_b^\beta(s)\right)\right]+\frac{\lambda\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\cos\left[\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\left(\omega_b^\beta(y)-\omega_b^\beta(s)\right)\right]\right]\frac{f(x,s)}{(s-b)^\beta}ds+$$
$$+\frac{2}{\sqrt{(4\mu-\lambda^2)(p^2-4q)}}\int_b^y e^{\frac{\lambda}{2}(\omega_b^\beta(y)-\omega_b^\beta(s))}\times$$
$$\times\left[\left(\frac{\lambda^2-2\mu}{2}\right)\sin\left[\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\left(\omega_b^\beta(y)-\omega_b^\beta(s)\right)\right]+\frac{\lambda\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\cos\left[\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\left(\omega_b^\beta(y)-\omega_b^\beta(s)\right)\right]\right]\frac{ds}{(s-b)^\beta}\times$$
$$\times\int_a^x\left[(\gamma_2)^2\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\gamma_2}-(\gamma_1)^2\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\gamma_1}\right]\frac{f(t,s)}{t-a}dt, \quad (2.5.4)$$

$\Phi_1(x), \Phi_2(x), \gamma_1, \gamma_2$ – соответственно определены из равенством (2.1.25), (2.1.26), (2.1.28).

Справедливо следующая утверждения.

Теорема 2.5.1. *Если в интегральном уравнении* (2.1.1) *выполняются условия* (2.1.2)*, также условия*:

1. $\Delta_1 = p^2 - 4q > 0$, $p < 0$, $q > 0$,
2. $\Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu < 0$, $\lambda < 0$,
3. $f(x,y) \in C(\overline{D})$, $f(a,b) = 0$ *с асимптотическим поведением на* Γ_1 *и* Γ_2:

$$f(x,y) = o[(x-a)^{\delta_{44}}], \delta_{44} > \gamma_1, \text{ при } x \to a,$$

$$f(x,y) = o[e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^{\beta}(y)}(y-b)^{\nu_{90}}], \nu_{90} > 2(\beta - 1), \text{ при } y \to b,$$

тогда интегральное уравнение (2.1.1) *в классе* $C(\overline{D})$, *обращающихся в нуль при* $x \to a$, $y \to b$, *всегда разрешимо и его явное решение представимо в виде* (2.5.3), *где* $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \theta_1(y), \theta_2(y)$ – *произвольные непрерывные функции на* Γ_1 *и* Γ_2, *обращающиеся в нуль при* $x \to a$, $y \to b$ *с асимптотическими поведениями*:

$$\varphi_i(x) = o[(x-a)^{\delta_{45}}], \delta_{45} > \gamma_1, \text{ при } x \to a, \ (i = 1,2),$$

$$\theta_j(y) = o[(y-b)^{\nu_{91}}], \nu_{91} > 2(\beta-1), \text{ при } y \to b, \ (j = 1,2).$$

Следствие 2.5.1. *Пусть коэффициенты интегрального уравнения* (2.1.1) *удовлетворяют условиям теоремы* 2.5.1. *Тогда* $u(x,y) \in C(\overline{D})$ *и обращается в нуль с асимптотическими поведениями*:

$$u(x,y) = o[(x-a)^{\delta_{46}}], \delta_{46} > \gamma_2, x \to a,$$

$$u(x,y) = o[(y-b)^{\nu_{92}}], \nu_{92} > 2(\beta-1), y \to b.$$

Теорема 2.5.2. *Если в интегральном уравнении* (2.1.1) *выполняются условия* (2.1.2)*, также условия*:

1. $\Delta_1 = p^2 - 4q > 0$, $p < 0$, $q > 0$,

2. $\Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu < 0$, $\lambda > 0$,

3. $f(x,y) \in C(\overline{D})$, $f(a,\mathrm{b}) = 0$ *с асимптотическим поведением на* Γ_1 *и* Γ_2:

$f(x,y) = o[(x-a)^{\delta_{47}}], \delta_{47} > \gamma_1$, *при* $x \to a$,

$f(x,y) = o[(y-b)^{\nu_{93}}], \nu_{93} > \beta - 1$, *при* $y \to b$,

тогда интегральное уравнение (2.1.1) *в классе* $C(\overline{D})$, *обращающихся в нуль при* $x \to a$, $y \to b$, *всегда разрешимо и его явное решение представимо в виде*:

$$u(x,y) = \theta_1(y)(x-a)^{\gamma_1} + \theta_2(y)(x-a)^{\gamma_2} + K_{p,q,\lambda}\left[f(x,y)\right], \tag{2.5.5}$$

где $\theta_1(y), \theta_2(y)$ – *произвольные непрерывные функции на* Γ_2, *обращающиеся в нуль при* $y \to b$, *с асимптотическими поведениями*:

$\theta_j(y) = 0[(y-b)^{\nu_{94}}], \nu_{94} > 2(\beta - 1)$, *при* $y \to b$, $j = (1,2)$.

Следствие 2.5.2. *Пусть коэффициенты интегрального уравнения* (2.1.1) *удовлетворяют условиям теоремы* 2.5.2. *Тогда* $u(x,y) \in C(\overline{D})$ *и обращается в нуль с асимптотическими поведениями*:

$u(x,y) = o[(x-a)^{\delta_{48}}], \delta_{48} > \gamma_1, x \to a$,

$u(x,y) = o[(y-b)^{\nu_{95}}], \nu_{95} > 2(\beta - 1), y \to b$.

Теорема 2.5.3. *Если в интегральном уравнении* (2.1.1) *выполняются условия* (2.1.2), *также условия*:

1. $\Delta_1 = p^2 - 4q > 0$, $p > 0$, $q < 0$,

2. $\Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu < 0$, $\lambda < 0$,

3. $f(x,y) \in C(\overline{D})$, $f(a,b) = 0$ *с асимптотическим поведением на* Γ_1 *и* Γ_2:

$f(x,y) = o[(x-a)^{\delta_{49}}], \delta_{49} > \gamma_3$, *при* $x \to a$,

$$f(x,y)=o[e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}(y-b)^{\nu_{96}}],\nu_{96}>\beta-1,\ \textit{при}\ y\to b,$$

тогда интегральное уравнение (2.1.1) *в классе* $C(\overline{D})$, *обращающихся в нуль при* $x\to a$, $y\to b$, *всегда разрешимо и его явное решение представимо в виде*:

$$u(x,y)=\theta_3(y)(x-a)^{\gamma_3}+e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\cos\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right)\Phi_1(x)+e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\sin\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right)\Phi_2(x)+ \tag{2.5.6}$$
$$+K_{p,q,\lambda}[f(x,y)],$$

где $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\theta_3(y)$ – *произвольные непрерывные функции на* Γ_1 *и* Γ_2, *обращающиеся в нуль при* $x\to a$, $y\to b$ *с асимптотическими поведениями:*

$$\varphi_i(x)=o[(x-a)^{\delta_{50}}],\delta_{50}>\gamma_3,\textit{при}\ x\to a,$$

$$\theta_3(y)=o[(y-b)^{\nu_{97}}],\nu_{97}>2(\beta-1),\ \textit{при}\ y\to b.$$

Следствие 2.5.3. *Пусть коэффициенты интегрального уравнения* (2.1.1) *удовлетворяют условиям теоремы* 2.5.3. *Тогда* $u(x,y)\in C(\overline{D})$ *и обращается в нуль с асимптотическими поведениями*:

$$u(x,y)=o[(x-a)^{\delta_{51}}],\delta_{51}>\gamma_3\ \textit{при}\ x\to a,$$

$$u(x,y)=o[(y-b)^{\nu_{98}}],\nu_{98}>2(\beta-1)\ \ \textit{при}\ y\to b.$$

Теорема 2.5.4. *Если в интегральном уравнении* (2.1.1) *выполняются условия* (2.1.2), *также условия*:

1. $\Delta_1=p^2-4q>0$, $p>0,\ q<0$,
2. $\Delta_2=\lambda^2-4\mu<0$, $\lambda>0$,
3. $f(x,y)\in C(\overline{D}),\ f(a,b)=0$ *с асимптотическим поведением на* Γ_1 *и* Γ_2:

$$f(x,y)=o[(x-a)^{\delta_{52}}],\delta_{52}>\gamma_3,\ \textit{при}\ x\to a,$$

$$f(x,y)=o[(y-b)^{\nu_{99}}],\nu_{99}>\beta-1,\ \textit{при}\ y\to b,$$

тогда интегральное уравнение (2.1.1) *в классе* $C(\overline{D})$, *обращающихся в нуль при* $x \to a$, $y \to b$, *всегда разрешимо и его явное решение представимо в виде*:

$$u(x,y) = \theta_3(y)(x-a)^{\gamma_3} + K_{p,q,\lambda}\left[f(x,y)\right], \tag{2.5.7}$$

где $\theta_3(y)$ – *произвольная непрерывная функция на* Γ_2, *обращающееся в нуль при* $y \to b$ *с асимптотическим поведением*:

$\theta_3(y) = o[(y-b)^{\nu_{100}}], \nu_{100} > 2(\beta - 1),$ *при* $y \to b$.

Следствие 2.5.4. *Пусть коэффициенты интегрального уравнения* (2.1.1) *удовлетворяют условиям теоремы* 2.5.4. *Тогда* $u(x,y) \in C(\overline{D})$ *и обращается в нуль с асимптотическими поведениями*:

$u(x,y) = o[(x-a)^{\delta_{53}}], \delta_{53} > \gamma_3, x \to a,$

$u(x,y) = o[(y-b)^{\nu_{101}}], \nu_{101} > 2(\beta - 1), y \to b.$

Теорема 2.5.5. *Если в интегральном уравнении* (2.1.1) *выполняются условия* (2.1.2), *также условия*:

1. $\Delta_1 = p^2 - 4q > 0$, $p < 0$, $q < 0$,
2. $\Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu < 0$, $\lambda < 0$,
3. $f(x,y) \in C(\overline{D})$, $f(a,b) = 0$ *с асимптотическим поведением на* Γ_1 *и* Γ_2:

$f(x,y) = o[(x-a)^{\delta_{54}}], \delta_{54} > \gamma_4,$ *при* $x \to a$,

$f(x,y) = o[e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^{\beta}(y)}(y-b)^{\nu_{102}}], \nu_{102} > \beta - 1,$ *при* $y \to b$,

тогда интегральное уравнение (2.1.1) *в классе* $C(\overline{D})$, *обращающихся в нуль при* $x \to a$, $y \to b$, *всегда разрешимо и его явное решение представимо в виде*:

$$u(x,y)=\theta_4(y)(x-a)^{\gamma_4}+e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\cos\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right)\Phi_1(x)+e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\sin\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right)\Phi_2(x)+ \quad (2.5.8)$$
$$+K_{p,q,\lambda}\left[f(x,y)\right],$$

где $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\theta_4(y)$ *– произвольные непрерывные функции на* Γ_1 *и* Γ_2, *обращающиеся в нуль при* $x\to a$, $y\to b$, *с асимптотическими поведениями*:

$\varphi_i(x)=o[(x-a)^{\delta_{55}}],\delta_{55}>\gamma_1,$ *при* $x\to a$, $(i=1,2)$,

$\theta_4(y)=o[(y-b)^{\nu_{103}}],\nu_{103}>2(\beta-1),$ $y\to b$.

Следствие 2.5.5. *Пусть коэффициенты интегрального уравнения* (2.1.1) *удовлетворяют условиям теоремы* 2.5.5. *Тогда* $u(x,y)\in C(\overline{D})$ *и обращается в нуль с асимптотическими поведениями*:

$u(x,y)=o[(x-a)^{\delta_{56}}],\delta_{56}>\gamma_4$ *при* $x\to a$,

$u(x,y)=o[(y-b)^{\nu_{104}}],\nu_{104}>2(\beta-1),y\to b.$

Теорема 2.5.6. *Если в интегральном уравнении* (2.1.1) *выполняются условия* (2.1.2), *также условия*:

1. $\Delta_1=p^2-4q>0$, $p<0$, $q<0$,
2. $\Delta_2=\lambda^2-4\mu<0$, $\lambda>0$,
3. $f(x,y)\in C(\overline{D})$, $f(a,b)=0$ *с асимптотическим поведением на* Γ_1 *и* Γ_2:

$f(x,y)=o[(x-a)^{\delta_{57}}],\delta_{57}>\gamma_4,$ *при* $x\to a$,

$f(x,y)=o[(y-b)^{\nu_{105}}],\nu_{105}>\beta-1,$ *при* $y\to b$,

тогда интегральное уравнение (2.1.1) *в классе* $C(\overline{D})$, *обращающихся в нуль при* $x\to a$, $y\to b$, *всегда разрешимо и его явное решение представимо в виде*:

$$u(x,y)=\theta_4(y)(x-a)^{\gamma_4}+K_{p,q,\lambda}\left[f(x,y)\right], \quad (2.5.9)$$

где $\theta_4(y)$ – *произвольная непрерывная функция на* Γ_2, *обращающееся в нуль при* $y \to b$ *с асимптотическим поведением*:

$\theta_4(y) = o[(y-b)^{\nu_{106}}], \nu_{106} > 2(\beta - 1),$ *при* $y \to b$.

Следствие 2.5.6. *Пусть коэффициенты интегрального уравнения* (2.1.1) *удовлетворяют условиям теоремы* 2.5.6. *Тогда* $u(x,y) \in C(\overline{D})$ *и обращается в нуль с асимптотическими поведениями*:

$u(x,y) = o[(x-a)^{\delta_{58}}], \delta_{58} > \gamma_4, x \to a,$

$u(x,y) = o[(y-b)^{\nu_{107}}], \nu_{107} > 2(\beta - 1),\ y \to b.$

Теорема 2.5.7. *Если в интегральном уравнении* (2.1.1) *выполняются условия* (2.1.2)*, также условия*:

1. $\Delta_1 = p^2 - 4q > 0$, $p > 0,\ q > 0,$
2. $\Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu < 0$, $\lambda < 0,$
3. $f(x,y) \in C(\overline{D}),\ f(a,b) = 0$ *с асимптотическим поведением на* Γ_1 *и* Γ_2:

$f(x,y) = o[(x-a)^{\varepsilon}], \varepsilon > 0,$ *при* $x \to a,$

$f(x,y) = o[e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^{\beta}(y)}(y-b)^{\nu_{108}}], \nu_{108} > \beta - 1,$ *при* $y \to b,$

тогда интегральное уравнение (2.1.1) *в классе* $C(\overline{D})$, *обращающихся в нуль при* $x \to a,\ \ y \to b,$ *всегда разрешимо и его явное решение представимо в виде*:

$$u(x,y) = e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^{\beta}(y)}\cos\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^{\beta}(y)\right)\Phi_1(x) + e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^{\beta}(y)}\sin\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^{\beta}(y)\right)\Phi_2(x) + \\ + K_{p,q,\lambda}[f(x,y)], \tag{2.5.10}$$

где $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ – *произвольные непрерывные функции на* Γ_1, *обращающиеся в нуль при* $x \to a$, *с асимптотическими поведениями*:

$\varphi_i(x) = o[(x-a)^{\varepsilon}], \varepsilon > 0,$ *при* $x \to a,\ (i = 1,2).$

Следствие 2.5.7. *Пусть коэффициенты интегрального уравнения* (2.1.1) *удовлетворяют условиям теоремы* 2.5.7. *Тогда* $u(x,y)\in C(\overline{D})$ *и обращается в нуль с асимптотическими поведениями*:

$$u(x,y)=o[(x-a)^{\varepsilon}],\varepsilon>0,x\to a,$$

$$u(x,y)=o[(y-b)^{\nu_{109}}],\nu_{109}>2(\beta-1),y\to b.$$

Теорема 2.5.8. *Если в интегральном уравнении* (2.1.1) *выполняются условия* (2.1.2)*, также условия*:

1. $\Delta_1=p^2-4q>0\,,\,p>0,\;q>0,$
2. $\Delta_2=\lambda^2-4\mu<0\,,\lambda>0,$
3. $f(x,y)\in C(\overline{D}),\;f(a,b)\;=0$ *с асимптотическим поведением на* Γ_1 *и* Γ_2:

$$f(x,y)=o[(x-a)^{\varepsilon}],\varepsilon>0 \text{ при } x\to a,$$

$$f(x,y)=o[(y-b)^{\nu_{110}}],\nu_{110}>\beta-1, \text{ при } y\to b,$$

тогда интегральное уравнение (2.1.1) *в классе* $C(\overline{D})$, *обращающихся в нуль при* $x\to a,\quad y\to b,$ *всегда разрешимо и его единственное решение представимо в виде*:

$$u(x,y)=K_{p,q,\lambda}\,[\,f(x,y)].\tag{2.5.11}$$

Следствие 2.5.8. *Пусть коэффициенты интегрального уравнения* (2.1.1) *удовлетворяют условиям теоремы* 2.5.8. *Тогда* $u(x,y)\in C(\overline{D})$ *и обращается в нуль с асимптотическими поведениями*:

$$u(x,y)=o[(x-a)^{\varepsilon}],\varepsilon>0,x\to a,$$

$$u(x,y)=o[(y-b)^{\nu_{111}}],\nu_{111}>2(\beta-1),y\to b.$$

§2.6. Исследование двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра, когда корни характеристических уравнений вещественные, равные и разные

Исследуем случай, когда корни характеристических уравнений вида (2.1.9) и (2.1.18) являются вещественными, равными и разными:

$$\Delta_1 = p^2 - 4q = 0 \ \Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu > 0, \text{ также } p = p_1, q = q_1, \lambda = \lambda_1, \mu = \mu_1.$$

Используя вышеуказанный метод нахождения решения интегрального уравнения (2.1.1) как (§2.2 и §2.1 глава 2) учитивая выпольняется условиях:

$$f(x,y) = o[(x-a)^{\delta_{59}}], \delta_{59} > \frac{|p|}{2}, \text{ при } x \to a,$$

$$f(x,y) = o[e^{\eta_1 \omega_b^\beta(y)}(y-b)^{\nu_{112}}], \nu_{112} > \beta - 1, \text{ при } y \to b,$$

когда $p < 0, p^2 - 4q = 0$ и решение интегрального уравнения (2.1.5) существует, тогда оно представимо в виде:

$$\begin{aligned} u(x,y) &= (x-a)^{\frac{|p|}{2}}\left[\theta_1(y) + \ln(x-a)\theta_2(y)\right] + \psi(x,y) + \\ &+ \frac{|p|}{2}\int_a^x \left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\frac{|p|}{2}}\left[2 + \frac{|p|}{2}\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right]\frac{\psi(t,y)}{t-a}dt. \end{aligned} \tag{2.6.1}$$

Соответственно, если решение интегрального уравнения (2.1.6) при $\lambda < 0, \mu > 0, \lambda^2 - 4\mu > 0$ существует, тогда согласно [58] оно имеет вид:

$$\begin{aligned} \psi(x,y) &= \varphi_1(x)e^{\eta_1\omega_b^\beta(y)} + \varphi_2(x)e^{\eta_2\omega_b^\beta(y)} + f(x,y) + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}\int_b^y \left[(\eta_2)^2 e^{\eta_2\left(\omega_b^\beta(y) - \omega_b^\beta(s)\right)} - (\eta_1)^2 e^{\eta_1\left(\omega_b^\beta(y) - \omega_b^\beta(s)\right)}\right]\frac{f(x,s)}{(s-b)^\beta}ds. \end{aligned} \tag{2.6.2}$$

Вместо функции $\psi(x,y)$ в равенстве (2.6.1) подставляя её значение из равенства (2.6.2) и после некоторых преобразований решение интегрального уравнения (2.1.1) получим в виде:

$$u(x,y) = (x-a)^{\frac{|p|}{2}}\left[\theta_1(y) + \ln(x-a)\theta_2(y)\right] + e^{\eta_1\omega_b^\beta(y)}\Phi_1(x) + e^{\eta_2\omega_b^\beta(y)}\Phi_2(x) + K_{p,\lambda,\mu}^{(x,y)}[f(x,y)], \tag{2.6.3}$$

где

$$
\begin{aligned}
&K^{(x,y)}_{p,\lambda,\mu}[f(x,y)] = f(x,y) + \frac{|p|}{2}\int\limits_a^x \left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\frac{|p|}{2}} \left[2 + \frac{|p|}{2}\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right]\frac{f(t,y)}{t-a}dt + \\
&+\frac{1}{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}\int\limits_b^y \left[(\eta_2)^2 e^{\eta_2\left(\omega_b^\beta(y)-\omega_b^\beta(s)\right)} - (\eta_1)^2 e^{\eta_1\left(\omega_b^\beta(y)-\omega_b^\beta(s)\right)}\right]\frac{f(x,s)}{(s-b)^\beta}ds + \\
&+\frac{p}{2\sqrt{\lambda^2-4\mu}}\int\limits_b^y \left[(\eta_2)^2 e^{\eta_2\left(\omega_b^\beta(y)-\omega_b^\beta(s)\right)} - (\eta_1)^2 e^{\eta_1\left(\omega_b^\beta(y)-\omega_b^\beta(s)\right)}\right]\frac{ds}{(s-b)^\beta}\times \\
&\times\int\limits_a^x \left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\frac{|p|}{2}} \left[2 + \frac{|p|}{2}\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right]\frac{f(t,s)}{t-a}dt.
\end{aligned}
\tag{2.6.4}
$$

$\Phi_1(x), \Phi_2(x), \eta_1, \eta_2$ – соответственно определены из равенством (2.2.14), (2.2.15), (2.1.28).

Справедливо следующие утверждения:

Теорема 2.6.1. *Если в интегральном уравнении* (2.1.1) *выполняются условия* (2.1.2)*, также условия*:

1. $\Delta_1 = p^2 - 4q = 0$, $p < 0$,
2. $\Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu > 0$, $\lambda < 0, \mu > 0$,
3. $f(x,y) \in C(\overline{D})$, $f(a,b) = 0$ *с асимптотическим поведением на* Γ_1 *и* Γ_2:

$$f(x,y) = o[(x-a)^{\delta_{60}}], \delta_{60} > \frac{|p|}{2}, \ \text{при} \quad x \to a,$$

$$f(x,y) = o[e^{\eta_1\omega_b^\beta(y)}(y-b)^{\nu_{113}}], \nu_{113} > \beta - 1, \ \text{при} \quad y \to b,$$

тогда интегральное уравнение (2.1.1) *в классе* $C(\overline{D})$, *обращающихся в нуль при* $x \to a$, $y \to b$, *всегда разрешимо и его явное решение представимо в виде* (2.6.3), *где* $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \theta_1(y), \theta_2(y)$ – *произвольные непрерывные функции на* Γ_1 *и* Γ_2, *обращающиеся в нуль при* $x \to a$, $y \to b$ *с асимптотическими поведениями:*

$$\varphi_i(x) = o[(x-a)^{\delta_{61}}], \delta_{61} > \frac{|p|}{2}, \ \text{при} \quad x \to a, \ (i = 1, 2),$$

$\theta_j(y) = o[(y-b)^{\nu_{114}}], \nu_{114} > 2(\beta-1),$ *при* $y \to b, (j = 1,2).$

Следствие 2.6.1. *Пусть коэффициенты интегрального уравнения* (2.1.1) *удовлетворяют условиям теоремы* 2.6.1. *Тогда* $u(x,y) \in C(\overline{D})$ *и обращается в нуль с асимптотическими поведениями*:

$$u(x,y) = o[(x-a)^{\frac{|p|}{2}}], x \to a,$$

$$u(x,y) = o[(y-b)^{\nu_{115}}], \nu_{115} > 2(\beta-1), y \to b.$$

Теорема 2.6.2. *Если в интегральном уравнении* (2.1.1) *выполняются условия* (2.1.2)*, также условия*:

1. $\Delta_1 = p^2 - 4q = 0, p > 0,$
2. $\Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu > 0, \lambda < 0, \mu > 0,$
3. $f(x,y) \in C(\overline{D}),$ $f(a,\mathrm{b}) = 0$ *с асимптотическим поведением на* Γ_1 *и* Γ_2:

$$f(x,y) = o[(x-a)^{\varepsilon}], \varepsilon > 0, \text{при } x \to a,$$

$$f(x,y) = o[e^{\eta_1\omega_b^{\beta}(y)}(y-b)^{\nu_{116}}], \nu_{116} > \beta - 1, \text{при } y \to b,$$

тогда интегральное уравнение (2.1.1) *в классе* $C(\overline{D})$, *обращающихся в нуль при* $x \to a$, $y \to b$, *всегда разрешимо и его явное решение представимо в виде*:

$$u(x,y) = e^{\eta_1\omega_b^{\beta}(y)}\Phi_1(x) + e^{\eta_2\omega_b^{\beta}(y)}\Phi_2(x) + K_{p,\lambda,\mu}^{(x,y)}[f(x,y)], \qquad (2.6.5)$$

где $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ *– произвольные непрерывные функции на* Γ_1, *обращающиеся в нуль при* $x \to a$, *с асимптотическими поведениями*:

$$\varphi_i(x) = o[(x-a)^{\varepsilon}], \varepsilon > 0, \text{ при } x \to a, \ (i = 1,2).$$

Следствие 2.6.2. *Пусть коэффициенты интегрального уравнения* (2.1.1) *удовлетворяют условиям теоремы* 2.6.2. *Тогда* $u(x,y) \in C(\overline{D})$ *и обращается в нуль с асимптотическими поведениями*:

$$u(x,y) = o[(x-a)^{\varepsilon}], \varepsilon > 0, x \to a,$$

$$u(x,y)=o[(y-b)^{\nu_{117}}],\nu_{117}>2(\beta-1),y\to b.$$

Теорема 2.6.3. *Если в интегральном уравнении* (2.1.1) *выполняются условия* (2.1.2)*, также условия*:

1. $\Delta_1 = p^2-4q=0,\ p<0,$
2. $\Delta_2=\lambda^2-4\mu>0,\lambda>0,\mu<0,$
3. $f(x,y)\in C(\overline{D}),\ f(a,b)=0$ *с асимптотическим поведением на* Γ_1 *и* Γ_2:

$$f(x,y)=o[(x-a)^{\delta_{62}}],\delta_{62}>\frac{|p|}{2},\textit{при}\quad x\to a,$$

$$f(x,y)=o[e^{\eta_3\omega_b^\beta(y)}(y-b)^{\nu_{118}}],\nu_{118}>\beta-1,\textit{при}\ y\to b,$$

тогда интегральное уравнение (2.1.1) *в классе* $C(\overline{D})$, *обращающихся в нуль при* $x\to a,\ \ y\to b$, *всегда разрешимо и его явное решение представимо в виде*:

$$u(x,y)=(x-a)^{\frac{|p|}{2}}\left[\theta_1(y)+\ln(x-a)\theta_2(y)\right]+e^{\eta_3\omega_b^\beta(y)}\Phi_3(x)+K_{p,\lambda,\mu}^{(x,y)}[f(x,y)],\quad (2.6.6)$$

где $\varphi_3(x),\theta_1(y),\theta_2(y)-$ *произвольные непрерывные функции на* Γ_1 *и* Γ_2, *обращающиеся в нуль при* $x\to a,\ y\to b$ *с асимптотическими поведениями:*

$$\varphi_3(x)=o[(x-a)^{\delta_{63}}],\delta_{63}>\frac{|p|}{2},\textit{при}\ x\to a,$$

$$\theta_j(y)=o[(y-b)^{\nu_{119}}],\nu_{119}>2(\beta-1),\ \textit{при}\ \ y\to b,\ (j=\ 1,2).$$

Следствие 2.6.3. *Пусть коэффициенты интегрального уравнения* (2.1.1) *удовлетворяют условиям теоремы* 2.6.3. *Тогда* $u(x,y)\in C(\overline{D})$ *и обращается в нуль с асимптотическими поведениями*:

$$u(x,y)=o[(x-a)^{\frac{|p|}{2}}],x\to a,$$

$$u(x,y)=o[(y-b)^{\nu_{120}}],\nu_{120}>2(\beta-1),y\to b.$$

Теорема 2.6.4. *Если в интегральном уравнении* (2.1.1) *выполняются условия* (2.1.2)*, также условия*:

1. $\Delta_1 = p^2 - 4q = 0$, $p > 0$,

2. $\Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu > 0$, $\lambda > 0, \mu < 0$,

3. $f(x,y) \in C(\overline{D})$, $f(a,b) = 0$ *с асимптотическим поведением на* Γ_1 *и* Γ_2:

$f(x,y) = o[(x-a)^{\varepsilon}], \varepsilon > 0,$ *при* $x \to a,$

$f(x,y) = o[e^{\eta_3 \omega_b^{\beta}(y)}(y-b)^{\nu_{121}}], \nu_{121} > \beta - 1,$ *при* $y \to b,$

тогда интегральное уравнение (2.1.1) *в классе* $C(\overline{D})$, *обращающихся в нуль при* $x \to a$, $y \to b$, *всегда разрешимо и его явное решение представимо в виде*:

$$u(x,y) = e^{\eta_3 \omega_b^{\beta}(y)} \Phi_3(x) + K_{p,\lambda,\mu}^{(x,y)}[f(x,y)], \qquad (2.6.7)$$

где $\varphi_3(x)$ – *произвольная непрерывная функция на* Γ_1, *обращающееся в нуль при* $x \to a$, *с асимптотическим поведением*:

$\varphi_3(x) = o[(x-a)^{\varepsilon}], \varepsilon > 0,$ *при* $x \to a.$

Следствие 2.6.4. *Пусть коэффициенты интегрального уравнения* (2.1.1) *удовлетворяют условиям теоремы* 2.6.4. *Тогда* $u(x,y) \in C(\overline{D})$ *и обращается в нуль с асимптотическими поведениями*:

$u(x,y) = o[(x-a)^{\varepsilon}], \varepsilon > 0, x \to a,$

$u(x,y) = o[e^{\eta_3 \omega_b^{\beta}(y)}], y \to b.$

Теорема 2.6.5. *Если в интегральном уравнении* (2.1.1) *выполняются условия* (2.1.2)*, также условия*:

1. $\Delta_1 = p^2 - 4q = 0$, $p < 0$,

2. $\Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu > 0$, $\lambda < 0, \mu < 0$,

3. $f(x,y) \in C(\overline{D})$, $f(a,b) = 0$ *с асимптотическим поведением на* Γ_1 *и* Γ_2:

$f(x,y) = o[(x-a)^{\delta_{64}}], \delta_{64} > \frac{|p|}{2},$ *при* $x \to a,$

$f(x,y) = o[e^{\eta_4 \omega_b^{\beta}(y)}(y-b)^{\nu_{122}}], \nu_{122} > \beta - 1,$ *при* $y \to b,$

тогда интегральное уравнение (2.1.1) *в классе* $C(\overline{D})$, *обращающихся в нуль при* $x \to a, \quad y \to b$, *всегда разрешимо и его явное решение представимо в виде*:

$$u(x,y) = (x-a)^{\frac{|p|}{2}}\left[\theta_1(y) + \ln(x-a)\theta_2(y)\right] + e^{\eta_4 \omega_b^\beta (y)}\Phi_4(x) + K_{p,\lambda,\mu}^{(x,y)}\left[f(x,y)\right], \quad (2.6.8)$$

где $\varphi_4(x), \theta_1(y), \theta_2(y) -$ *произвольные непрерывные функции на* Γ_1 *и* Γ_2, *обращающиеся в нуль при* $x \to a, \quad y \to b$, *с асимптотическими поведениями*:

$$\varphi_4(x) = o[(x-a)^{\delta_{65}}], \delta_{65} > \frac{|p|}{2}, \text{ при } x \to a,$$

$$\theta_j(y) = o[(y-b)^{\nu_{123}}], \nu_{123} > 2(\beta - 1), \text{ при } y \to b, \ (j = 1, 2).$$

Следствие 2.6.5. *Пусть коэффициенты интегрального уравнения* (2.1.1) *удовлетворяют условиям теоремы* 2.6.5. *Тогда* $u(x,y) \in C(\overline{D})$ *и обращается в нуль с асимптотическими поведениями*:

$$u(x,y) = o[(x-a)^{\frac{|p|}{2}}], x \to a,$$

$$u(x,y) = o[(y-b)^{\nu_{124}}], \nu_{124} > 2(\beta - 1), y \to b.$$

Теорема 2.6.6. *Если в интегральном уравнении* (2.1.1) *выполняются условия* (2.1.2), *также условия*:

1. $\Delta_1 = p^2 - 4q = 0, \ p > 0,$
2. $\Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu > 0, \lambda < 0, \mu < 0,$
3. $f(x,y) \in C(\overline{D}), \ f(a,b) = 0$ *с асимптотическим поведением на* Γ_1 *и* Γ_2:

$$f(x,y) = o[(x-a)^{\varepsilon}], \varepsilon > 0, \text{при } x \to a,$$

$$f(x,y) = o[e^{\eta_4 \omega_b^\beta (y)}(y-b)^{\nu_{125}}], \nu_{125} > \beta - 1, \text{при } y \to b,$$

тогда интегральное уравнение (2.1.1) *в классе* $C(\overline{D})$, *обращающихся в нуль при* $x \to a, \quad y \to b$, *всегда разрешимо и его явное решение представимо в виде*:

$$u(x,y)=e^{\eta_4\omega_b^{\beta}(y)}\Phi_4(x)+K_{p,\lambda,\mu}^{(x,y)}\left[f(x,y)\right], \tag{2.6.9}$$

где $\varphi_4(x)$ – *произвольная непрерывная функция на* Γ_1, *обращающееся в нуль при* $x\to a$, *с асимптотическим поведением:*

$\varphi_4(x)=o[(x-a)^{\varepsilon}],\varepsilon>0$, *при* $x\to a$.

Следствие 2.6.6. *Пусть коэффициенты интегрального уравнения* (2.1.1) *удовлетворяют условиям теоремы* 2.6.6. *Тогда* $u(x,y)\in C(\overline{D})$ *и обращается в нуль с асимптотическими поведениями*:

$u(x,y)=o[(x-a)^{\varepsilon}],\varepsilon>0,x\to a,$

$u(x,y)=o[e^{\eta_4\omega_b^{\beta}(y)}],y\to b.$

Теорема 2.6.7. *Если в интегральном уравнении* (2.1.1) *выполняются условия* (2.1.2)*, также условия*:

1. $\Delta_1=p^2-4q=0,p<0,$
2. $\Delta_2=\lambda^2-4\mu>0,\lambda>0,\mu>0,$
3. $f(x,y)\in C(\overline{D})$, $f(a,b)=0$ *с асимптотическим поведением на* Γ_1 *и* Γ_2:

$f(x,y)=o[(x-a)^{\delta_{66}}],\delta_{66}>\dfrac{|p|}{2}$, *при* $x\to a,$

$f(x,y)=o[(y-b)^{\nu_{126}}],\nu_{126}>2(\beta-1)$, *при* $y\to b,$

тогда интегральное уравнение (2.1.1) *в классе* $C(\overline{D})$, *обращающихся в нуль при* $x\to a$, $y\to b$, *всегда разрешимо и его явное решение представимо в виде*:

$$u(x,y)=(x-a)^{\frac{|p|}{2}}\left[\theta_1(y)+\ln(x-a)\theta_2(y)\right]+K_{p,\lambda,\mu}^{(x,y)}\left[f(x,y)\right], \tag{2.6.10}$$

где $\theta_1(y),\theta_2(y)$ – *произвольные непрерывные функции на* Γ_2, *обращающиеся в нуль при* $y\to b$, *с асимптотическими поведениями*:

$\theta_j(y)=o[(y-b)^{\nu_{127}}],\nu_{127}>2(\beta-1)$, *при* $y\to b$, $(j=1,2)$.

Следствие 2.6.7. *Пусть коэффициенты интегрального уравнения* (2.1.1) *удовлетворяют условиям теоремы* 2.6.7. *Тогда* $u(x,y)\in C(\overline{D})$ *и обращается в нуль с асимптотическими поведениями*:

$$u(x,y)=o[(x-a)^{\frac{|p|}{2}}],x\to a,$$

$$u(x,y)=o[(y-b)^{\nu_{128}}],\nu_{128}>2(\beta-1),y\to b.$$

Теорема 2.6.8. *Если в интегральном уравнении* (2.1.1) *выполняются условия* (2.1.2)*, также условия*:

1. $\Delta_1=p^2-4q=0\,,\,p>0,$
2. $\Delta_2=\lambda^2-4\mu>0\,,\lambda>0,\mu>0,$
3. $f(x,y)\in C(\overline{D}),\ \ f(a,b)\ =0$ *с асимптотическим поведением на* Γ_1 *и* Γ_2:

$$f(x,y)=o[(x-a)^{\varepsilon}],\varepsilon>0, \textit{при}\quad x\to a,$$

$$f(x,y)=o[(y-b)^{\nu_{129}}],\nu_{129}>2(\beta-1), \textit{при}\ \ y\to b,$$

тогда интегральное уравнение (2.1.1) *в классе* $C(\overline{D})$, *обращающихся в нуль при* $x\to a$, $y\to b$, *всегда разрешимо и его единственное решение представимо в виде*:

$$u(x,y)=K_{p,\lambda,\mu}^{(x,y)}[f(x,y)]. \tag{2.6.11}$$

Следствие 2.6.8. *Пусть коэффициенты интегрального уравнения* (2.1.1) *удовлетворяют условиям теоремы* 2.6.8. *Тогда* $u(x,y)\in C(\overline{D})$ *и обращается в нуль с асимптотическими поведениями*:

$$u(x,y)=o[(x-a)^{\varepsilon}],\varepsilon>0,x\to a,$$

$$u(x,y)=o[(y-b)^{\nu_{130}}],\nu_{130}>2(\beta-1),y\to b.$$

§2.7. Исследование двумерного интегрального уравнения типа, когда корни характеристических уравнений вещественные, равные и комплексно-сопряженные

Изучим случай, когда корни характеристического уравнениях вида (2.1.9) и (2.1.18) являются вещественные равные и комплексно-сопряженные:

$$\Delta_1 = p^2 - 4q = 0,\ \Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu < 0,\ \text{также}\ p = p_1, q = q_1, \lambda = \lambda_1, \mu = \mu_1.$$

Используя вышеуказанный метод нахождения решения интегрального уравнения (2.1.1) как (§2.2 и §2.3 глава 2) учитивая выпольняется условиях:

$$f(x,y) = o[(x-a)^{\delta_{67}}], \delta_{67} > \frac{|p|}{2}, \text{ при } x \to a,$$

$$f(x,y) = o[e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}(y-b)^{\nu_{131}}], \nu_{131} > 2(\beta - 1), при\ y \to b,$$

Если решение интегрального уравнения (2.1.5) при $p < 0,\ p^2 - 4q = 0$ существует, тогда оно представимо в виде:

$$u(x,y) = (x-a)^{\frac{|p|}{2}}\left[\theta_1(y) + \ln(x-a)\theta_2(y)\right] + \psi(x,y) + \\ + \frac{|p|}{2}\int_a^x \left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\frac{|p|}{2}}\left[2 + \frac{|p|}{2}\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right]\frac{\psi(t,y)}{t-a}dt. \tag{2.7.1}$$

Соответственно, если решение интегрального уравнения (2.1.5) при $\lambda < 0$, $\lambda^2 - 4\mu < 0$, существует, тогда согласно [58] оно имеет вид:

$$\psi(x,y) = e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\left\{\cos\left[\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right]\varphi_1(x) + \sin\left[\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right]\varphi_2(x)\right\} + \\ + f(x,y) + \frac{2}{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}\int_b^y e^{\frac{\lambda}{2}(\omega_b^\beta(y)-\omega_b^\beta(s))}\times \\ \times\left[\left(\frac{\lambda^2-2\mu}{2}\right)\sin\left[\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\left(\omega_b^\beta(y)-\omega_b^\beta(s)\right)\right] + \frac{\lambda\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\cos\left[\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\left(\omega_b^\beta(y)-\omega_b^\beta(s)\right)\right]\right]\frac{f(x,s)}{(s-b)^\beta}ds. \tag{2.7.2}$$

Из равенство (2.7.2) и (2.7.1) вытекает решение интегрального уравнения (2.1.1) в виде (2.7.3).

$$u(x,y)=(x-a)^{\frac{|p|}{2}}\left[\theta_1(y)+\ln(x-a)\theta_2(y)\right]+e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\cos\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right)\Phi_1(x)+$$
$$+e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\sin\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right)\Phi_2(x)+E_{p,\lambda}^{(x,y)}\left(f(x,y)\right), \tag{2.7.3}$$

где

$$E_{p,\lambda}^{(x,y)}\left(f(x,y)\right)=f(x,y)+\frac{|p|}{2}\int_a^x\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\frac{|p|}{2}}\left[2+\frac{|p|}{2}\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right]\frac{f(t,y)}{t-a}dt+$$
$$+\frac{2}{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}\int_b^y e^{\frac{\lambda}{2}(\omega_b^\beta(y)-\omega_b^\beta(s))}\times$$
$$\times\left[\left(\frac{\lambda^2-2\mu}{2}\right)\sin\left[\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\left(\omega_b^\beta(y)-\omega_b^\beta(s)\right)\right]+\frac{\lambda\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\cos\left[\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\left(\omega_b^\beta(y)-\omega_b^\beta(s)\right)\right]\right]\frac{f(x,s)}{(s-b)^\beta}ds+$$
$$+\frac{|p|}{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}\int_b^y e^{\frac{\lambda}{2}(\omega_b^\beta(y)-\omega_b^\beta(s))}\times$$
$$\times\left[\left(\frac{\lambda^2-2\mu}{2}\right)\sin\left[\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\left(\omega_b^\beta(y)-\omega_b^\beta(s)\right)\right]+\frac{\lambda\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\cos\left[\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\left(\omega_b^\beta(y)-\omega_b^\beta(s)\right)\right]\right]\frac{ds}{(s-b)^\beta}\times$$
$$\times\int_a^x\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\frac{|p|}{2}}\left[2+\frac{|p|}{2}\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right]\frac{f(t,s)}{t-a}dt. \tag{2.7.4}$$

$\varPhi_1(x),\varPhi_2(x)$ – определены из равенство (2.2.14), (2.2.15).

Справедливо следующее:

Теорема 2.7.1. *Если в интегральном уравнении* (2.1.1) *выполняются условия* (2.1.2)*, также условия*:

1. $\Delta_1=p^2-4q=0\,,\ p<0,$
2. $\Delta_2=\lambda^2-4\mu<0\,,\lambda<0,$
3. $f(x,y)\in C(\overline{D}),\ f(a,b)\ =0$ *с асимптотическим поведением на* Γ_1 *и* Γ_2:

$$f(x,y)=o[(x-a)^{\delta_{68}}],\delta_{68}>\frac{|p|}{2},\ \ \text{при}\quad x\to a,$$

$$f(x,y)=o[e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}(y-b)^{\nu_{132}}],\nu_{132}>2(\beta-1),\text{при}\ y\to b,$$

тогда интегральное уравнение (2.1.1) *в классе* $C(\overline{D})$, *обращающихся в нуль при* $x\to a,\ \ y\to b,$ *всегда разрешимо и его явное решение представимо в виде* (2.7.3), *где* $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\theta_1(y),\theta_2(y)$ – *произвольные непрерывные функции* *на* Γ_1 *и* Γ_2, *обращающиеся в нуль при* $x \to a$, $y \to b$ *с асимптотическими поведениями*:

$$\varphi_i(x) = o[(x-a)^{\frac{|p|}{2}}] \text{ при } x \to a,\ (i = 1,2),$$

$$\theta_j(y) = o[(y-b)^{\nu_{133}}], \nu_{133} > 2(\beta - 1), \text{ при } y \to b, (j = 1,2).$$

Следствие 2.7.1. *Пусть коэффициенты интегрального уравнения* (2.1.1) *удовлетворяют условиям теоремы* 2.7.1. *Тогда* $u(x,y) \in C(\overline{D})$ *и обращается в нуль с асимптотическими поведениями*:

$$u(x,y) = o[(x-a)^{\frac{|p|}{2}}], x \to a,$$

$$u(x,y) = o[(y-b)^{\nu_{134}}], \nu_{134} > 2(\beta - 1), y \to b.$$

Теорема 2.7.2. *Если в интегральном уравнении* (2.1.2) *выполняются условия* (2.1.2), *также условия*:

1. $\Delta_1 = p^2 - 4q = 0$, $p > 0$,
2. $\Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu < 0$, $\lambda < 0$,
3. $f(x,y) \in C(\overline{D})$, $f(a,b) = 0$ *с асимптотическим поведением на* Γ_1 *и* Γ_2:

$$f(x,y) = o[(x-a)^{\varepsilon}], \varepsilon > 0, \text{ при } x \to a,$$

$$f(x,y) = o[e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^{\beta}(y)}(y-b)^{\nu_{135}}], \nu_{135} > 2(\beta - 1), \text{ при } y \to b,$$

тогда интегральное уравнение (2.1.1) *в классе* $C(\overline{D})$, *обращающихся в нуль при* $x \to a$, $y \to b$, *всегда разрешимо и его явное решение представимо в виде*:

$$u(x,y) = e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^{\beta}(y)} \cos\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2}\omega_b^{\beta}(y)\right)\Phi_1(x) + e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^{\beta}(y)} \sin\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2}\omega_b^{\beta}(y)\right)\Phi_2(x) + E_{p,\lambda}^{(x,y)}(f(x,y)), \quad (2.7.5)$$

где $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ – *произвольные непрерывные функции на* Γ_1, *обращающиеся в нуль при* $x \to a$, *с асимптотическими поведениями*:

$$\varphi_i(x) = o[(x-a)^{\varepsilon}], \varepsilon > 0 \text{ при } x \to a,\ (i = 1,2).$$

Следствие 2.7.2. *Пусть коэффициенты интегрального уравнения* (2.1.1) *удовлетворяют условиям теоремы* 2.7.2. *Тогда* $u(x,y)\in C(\overline{D})$ *и обращается в нуль с асимптотическими поведениями*:

$$u(x,y)=o[(x-a)^{\varepsilon}],\varepsilon>0,x\to a,$$

$$u(x,y)=o[(y-b)^{\nu_{136}}],\nu_{136}>2(\beta-1),y\to b.$$

Теорема 2.7.3. *Если в интегральном уравнении* (2.1.1) *выполняются условия* (2.1.2)*, также условия*:

1. $\Delta_1=p^2-4q=0,\ p<0,$
2. $\Delta_2=\lambda^2-4\mu<0,\lambda>0,$
3. $f(x,y)\in C(\overline{D}),\ f(a,b)=0$ *с асимптотическим поведением на* Γ_1 *и* Γ_2:

$$f(x,y)=o[(x-a)^{\delta_{69}}],\delta_{69}>\frac{|p|}{2},\text{при}\quad x\to a,$$

$$f(x,y)=o[e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^{\beta}(y)}(y-b)^{\nu_{137}}],\nu_{137}>2(\beta-1),\text{при}\ y\to b,$$

тогда интегральное уравнение (2.1.1) *в классе* $C(\overline{D})$, *обращающихся в нуль при* $x\to a,\ \ y\to b,$ *всегда разрешимо и его явное решение представимо в виде*:

$$u(x,y)=(x-a)^{\frac{|p|}{2}}\left[\theta_1(y)+\ln(x-a)\theta_2(y)\right]+E_{p,\lambda}^{(x,y)}\left(f(x,y)\right),\tag{2.7.6}$$

где $\theta_1(y),\theta_2(y)$ – *произвольные непрерывные функции на* Γ_2, *обращающиеся в нуль при* $y\to b$ *с асимптотическими поведениями*:

$$\theta_j(y)=o[(y-b)^{\nu_{138}}],\nu_{138}>2(\beta-1),\ \text{при}\quad y\to b,\ (j=\ 1,2).$$

Следствие 2.7.3. *Пусть коэффициенты интегрального уравнения* (2.1.1) *удовлетворяют условиям теоремы* 2.7.3. *Тогда* $u(x,y)\in C(\overline{D})$ *и обращается в нуль с асимптотическими поведениями*:

$$u(x,y)=o[(x-a)^{\frac{|p|}{2}}],x\to a,$$

$$u(x,y)=o[(y-b)^{\nu_{139}}],\nu_{139}>2(\beta-1),y\to b.$$

Теорема 2.7.4. *Если в интегральном уравнении* (2.1.1) *выполняются условия* (2.1.2)*, также условия*:

1. $\Delta_1 = p^2-4q=0$, $p>0$,
2. $\Delta_2=\lambda^2-4\mu<0$, $\lambda>0$,
3. $f(x,y)\in C(\overline{D})$, $f(a,\mathrm{b})=0$ *с асимптотическим поведением на* Γ_1 *и* Γ_2:

$$f(x,y)=o[(x-a)^{\varepsilon}],\varepsilon>0 \text{ при } x\to a,$$

$$f(x,y)=o[(y-b)^{\nu_{140}}],\nu_{140}>2(\beta-1), \text{ при } y\to b,$$

тогда интегральное уравнение (2.1.1) *в классе* $C(\overline{D})$, *обращающихся в нуль при* $x\to a$, $y\to b$, *всегда разрешимо и его единственное решение представимо в виде*:

$$u(x,y)=E_{p,\lambda}^{(x,y)}\left(f(x,y)\right). \qquad (2.7.7)$$

Следствие 2.7.4. *Пусть коэффициенты интегрального уравнения* (2.1.1) *удовлетворяют условиям теоремы* 2.7.4. *Тогда* $u(x,y)\in C(\overline{D})$ *и обращается в нуль с асимптотическими поведениями*:

$$u(x,y)=o[(x-a)^{\varepsilon}],\varepsilon>0,x\to a,$$

$$u(x,y)=o[(y-b)^{\nu_{141}}],\nu_{141}>2(\beta-1),y\to b.$$

§2.8. Исследование двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра, когда корни характеристических уравнений комплексно-сопряженные и вещественные разные

Рассмотрим случай, когда корни характеристического уравнениях вида (2.1.9) и (2.1.18) являются комплексно-сопряженные и вещественные разные:

$$\Delta_1=p^2-4q<0\ \Delta_2=\lambda^2-4\mu>0, \text{ также } p=p_1,q=q_1,\lambda=\lambda_1,\mu=\mu_1.$$

Используя вышеуказанный метод нахождения решения интегрального уравнения (2.1.1) как (§2.3 и §2.1 глава 2) учитивая выпольняется условиях:

$$f(x,y) = o[(x-a)^{\delta_{70}}],\delta_{70} > \frac{|p|}{2}, \text{при} \quad x \to a,$$

$$f(x,y) = o[e^{\eta_2 \omega_b^\beta(y)}(y-b)^{\nu_{142}}],\nu_{142} > \beta - 1, при \ y \to b,$$

В случае, когда $p < 0$, $p^2 - 4q < 0$ [57] и если решение интегрального уравнения (2.1.5) существует, тогда оно представимо в виде:

$$u(x,y) = (x-a)^{\frac{|p|}{2}}\left[\cos\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)\theta_1(y) + \sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)\theta_2(y)\right] + \psi(x,y) +$$
$$+\frac{1}{\sqrt{4q-p^2}}\int_a^x\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\frac{|p|}{2}}\left[(p^2-4q)\sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right) - p\sqrt{4q-p^2}\cos\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right)\right]\frac{\psi(t,y)}{t-a}dt. \quad (2.8.1)$$

Соответственно, если решение интегрального уравнения (2.1.5) при $\lambda < 0$, $\mu > 0$, $\lambda^2 - 4\mu > 0$ существует, согласно [58] оно имеет вид:

$$\psi(x,y) = \varphi_1(x)e^{\eta_1\omega_b^\beta(y)} + \varphi_2(x)e^{\eta_2\omega_b^\beta(y)} + f(x,y) +$$
$$+\frac{1}{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}\int_b^y\left[(\eta_2)^2 e^{\eta_2\left(\omega_b^\beta(y)-\omega_b^\beta(s)\right)} - (\eta_1)^2 e^{\eta_1\left(\omega_b^\beta(y)-\omega_b^\beta(s)\right)}\right]\frac{f(x,s)}{(s-b)^\beta}ds. \quad (2.8.2)$$

После подставляя значение функции $\psi(x,y)$ вместо из (2.8.2) на (2.8.1) получим решение интегрального уравнения (2.1.1) в виде:

$$u(x,y) = (x-a)^{\frac{|p|}{2}}\left[\cos\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)\theta_1(y) + \sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)\theta_2(y)\right] + \quad (2.8.3)$$
$$+e^{\eta_1\omega_b^\beta(y)}\Phi_1(x) + e^{\eta_2\omega_b^\beta(y)}\Phi_2(x) + K_{p,\lambda,\mu}[f(x,y)],$$

где

$$K_{p,\lambda,\mu}[f(x,y)] = f(x,y) + \frac{1}{\sqrt{4q-p^2}}\times$$

$$\times\int_a^x\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\frac{|P|}{2}}\left[(p^2-4q)\sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right) - p\sqrt{4q-p^2}\cos\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right)\right]\frac{f(t,y)}{t-a}dt +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}\int_b^y\left[(\eta_2)^2 e^{\eta_2\left(\omega_b^\beta(y)-\omega_b^\beta(s)\right)} - (\eta_1)^2 e^{\eta_1\left(\omega_b^\beta(y)-\omega_b^\beta(s)\right)}\right]\frac{f(x,s)}{(s-b)^\beta}ds +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\left(\lambda^2-4\mu\right)\left(4q-p^2\right)}}\int_b^y\left[(\eta_2)^2 e^{\eta_2\left(\omega_b^\beta(y)-\omega_b^\beta(s)\right)}-(\eta_1)^2 e^{\eta_1\left(\omega_b^\beta(y)-\omega_b^\beta(s)\right)}\right]\frac{ds}{(s-b)^\beta}\times$$

$$\times\int_a^x\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\frac{|P|}{2}}\left[(p^2-4q)\sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right)-p\sqrt{4q-p^2}\cos\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right)\right]\frac{f(t,s)}{t-a}dt. \quad (2.8.4)$$

$\Phi_1(x),\Phi_2(x),\eta_1,\eta_2$ – соответственно определены из равенством (2.3.11), (2.3.12), (2.1.28).

Имеет место следующая.

Теорема 2.8.1. *Если в интегральном уравнении* (2.1.1) *выполняются условия* (2.1.2)*, также условия*:

1. $\Delta_1 = p^2-4q<0$, $p<0$,
2. $\Delta_2=\lambda^2-4\mu>0$, $\lambda<0, \mu>0$;
3. $f(x,y)\in C(\overline{D})$, $f(a,b)=0$ *с асимптотическим поведением на* Γ_1 *и* Γ_2:

$$f(x,y)=o[(x-a)^{\delta_{71}}],\delta_{71}>\frac{|p|}{2}, \textit{при} \quad x\to a,$$

$$f(x,y)=o[e^{\eta_2\omega_b^\beta(y)}(y-b)^{\nu_{143}}],\nu_{143}>\beta-1, \textit{при} \ y\to b,$$

тогда интегральное уравнение (2.1.1) *в классе* $C(\overline{D})$, *обращающихся в нуль при* $x\to a$, $y\to b$, *всегда разрешимо и его явное решение представимо в виде* (2.8.3), *где* $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\theta_1(y),\theta_2(y)$ – *произвольные непрерывные функции на* Γ_1 *и* Γ_2, *обращающиеся в нуль при* $x\to a$, $y\to b$ *с асимптотическими поведениями:*

$$\varphi_i(x)=o[(x-a)^{\delta_{72}}],\delta_{72}>\frac{|p|}{2}, \ \textit{при} \quad x\to a, \ (i=1,2),$$

$$\theta_j(y)=o[(y-b)^{\nu_{144}}],\nu_{144}>2(\beta-1), \ \textit{при} \quad y\to b, \ (j=1,2).$$

Следствие 2.8.1. *Пусть коэффициенты интегрального уравнения* (2.1.1) *удовлетворяют условиям теоремы* 2.8.1. *Тогда* $u(x,y)\in C(\overline{D})$ *и обращается в нуль с асимптотическими поведениями*:

$u(x,y) = o[(x-a)^{\frac{|p|}{2}}],\ x \to a,$

$u(x,y) = o[(y-b)^{\nu_{145}}], \nu_{145} > 2(\beta - 1), y \to b.$

Теорема 2.8.2. *Если в интегральном уравнении* (2.1.1) *выполняются условия* (2.1.2)*, также условия*:

1. $\Delta_1 = p^2 - 4q < 0\ , p > 0,$

2. $\Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu > 0\ , \lambda < 0, \mu > 0,$

3. $f(x,y) \in C(\overline{D}),\ f(a,b) = 0$ *с асимптотическим поведением на* Γ_1 *и* Γ_2:

$f(x,y) = o[(x-a)^{\varepsilon}], \varepsilon > 0$ *при* $x \to a,$

$f(x,y) = o[e^{\eta_1 \omega_b^{\beta}(y)} (y-b)^{\nu_{146}}], \nu_{146} > \beta - 1,$ *при* $y \to b,$

тогда интегральное уравнение (2.1.1) *в классе* $C(\overline{D})$, *обращающихся в нуль при* $x \to a,\ \ y \to b,$ *всегда разрешимо и его явное решение представимо в виде*:

$$u(x,y) = e^{\eta_1 \omega_b^{\beta}(y)} \Phi_1(x) + e^{\eta_2 \omega_b^{\beta}(y)} \Phi_2(x) + K_{p,\lambda,\mu}\left[f(x,y)\right], \tag{2.8.5}$$

где $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ – *произвольные непрерывные функции на* Γ_1, *обращающиеся в нуль при* $x \to a$, *с асимптотическими поведениями*:

$\varphi_i(x) = o[(x-a)^{\varepsilon}], \varepsilon > 0$ *при* $x \to a,\ i = (1,2)$.

Следствие 2.8.2. *Пусть коэффициенты интегрального уравнения* (2.1.1) *удовлетворяют условиям теоремы* 2.8.2. *Тогда* $u(x,y) \in C(\overline{D})$ *и обращается в нуль с асимптотическими поведениями*:

$u(x,y) = o[(x-a)^{\varepsilon}], \varepsilon > 0\ ,\ x \to a,$

$u(x,y) = o[(y-b)^{\nu_{147}}], \nu_{147} > 2(\beta - 1), y \to b.$

Теорема 2.8.3. *Если в интегральном уравнении* (2.1.1) *выполняются условия* (2.1.2)*, также условия*:

1. $\Delta_1 = p^2 - 4q < 0\ , p < 0,$

2. $\Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu > 0, \lambda > 0, \mu < 0,$

3. $f(x,y) \in C(\overline{D}),\ f(a,b) = 0$ *с асимптотическим поведением на* Γ_1 *и* Γ_2:

$$f(x,y) = o[(x-a)^{\delta_{73}}], \delta_{73} > \frac{|p|}{2}, \ \textit{при} \ \ x \to a,$$

$$f(x,y) = o[e^{\eta_3 \omega_b^{\beta}(y)} (y-b)^{\nu_{148}}], \nu_{148} > \beta - 1, \textit{при} \ y \to b,$$

тогда интегральное уравнение (2.1.1) *в классе* $C(\overline{D})$, *обращающихся в нуль при* $x \to a$, $y \to b$, *всегда разрешимо и его явное решение представимо в виде*:

$$u(x,y) = (x-a)^{\frac{|p|}{2}} \left[\cos\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2} \ln(x-a) \right) \theta_1(y) + \sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2} \ln(x-a) \right) \theta_2(y) \right] + e^{\eta_3 \omega_b^{\beta}(y)} \Phi_3(x) + K_{p,\lambda,\mu}[f(x,y)], \quad (2.8.6)$$

где $\varphi_3(x), \theta_1(y), \theta_2(y)$ – *произвольные непрерывные функции на* Γ_1 *и* Γ_2, *обращающиеся в нуль при* $x \to a$, $y \to b$ *с асимптотическими поведениями*:

$$\varphi_3(x) = o[(x-a)^{\delta_{74}}], \delta_{74} > \frac{|p|}{2}, \textit{при} \ x \to a,$$

$$\theta_j(y) = o[(y-b)^{\nu_{149}}], \nu_{149} > 2(\beta - 1), \ \textit{при} \ \ y \to b, \ (j = 1, 2).$$

Следствие 2.8.3. *Пусть коэффициенты интегрального уравнения* (2.1.1) *удовлетворяют условиям теоремы* 2.8.3. *Тогда* $u(x,y) \in C(\overline{D})$ *и обращается в нуль с асимптотическими поведениями*:

$$u(x,y) = o[(x-a)^{\frac{|p|}{2}}], \ x \to a,$$

$$u(x,y) = o[(y-b)^{\nu_{150}}], \nu_{150} > 2(\beta - 1), y \to b.$$

Теорема 2.8.4. *Если в интегральном уравнении* (2.1.1) *выполняются условия* (2.1.2), *также условия*:

1. $\Delta_1 = p^2 - 4q < 0, p > 0,$

2. $\Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu > 0, \lambda > 0, \mu < 0,$

3. $f(x,y) \in C(\overline{D}),\ f(a,b) = 0$ *с асимптотическим поведением на* Γ_1 *и* Γ_2:

$$f(x,y) = o[(x-a)^{\varepsilon}], \varepsilon > 0 \ \textit{при} \ x \to a,$$

$f(x,y)=o[e^{\eta_3\omega_b^{\beta}(y)}(y-b)^{\nu_{151}}],\nu_{151}>\beta-1,$ *при* $y\to b,$

тогда интегральное уравнение (2.1.1) *в классе* $C(\overline{D})$, *обращающихся в нуль при* $x\to a,$ $y\to b,$ *всегда разрешимо и его явное решение представимо в виде*:

$$u(x,y)=e^{\eta_3\omega_b^{\beta}(y)}\Phi_3(x)+K_{p,\lambda,\mu}\left[f(x,y)\right], \tag{2.8.7}$$

где $\varphi_3(x)$ – *произвольная непрерывная функция на* Γ_1, *обращающееся в нуль при* $x\to a,$ *с асимптотическим поведением*:

$\varphi_3(x)=o[(x-a)^{\varepsilon}],\varepsilon>0$ *при* $x\to a.$

Следствие 2.8.4. *Пусть коэффициенты интегрального уравнения* (2.1.1) *удовлетворяют условиям теоремы* 2.8.4. *Тогда* $u(x,y)\in C(\overline{D})$ *и обращается в нуль с асимптотическими поведениями*:

$u(x,y)=o[(x-a)^{\varepsilon}],\varepsilon>0,$ $x\to a,$

$u(x,y)=o[(y-b)^{\nu_{152}}],\nu_{152}>2(\beta-1),y\to b.$

Теорема 2.8.5. *Если в интегральном уравнении* (2.1.1) *выполняются условия* (2.1.2), *также условия*:

1. $\Delta_1=p^2-4q<0,\ p<0,$
2. $\Delta_2=\lambda^2-4\mu>0,\lambda<0,\mu<0,$
3. $f(x,y)\in C(\overline{D}),$ $f(a,b)=0$ *с асимптотическим поведением на* Γ_1 *и* Γ_2:

$f(x,y)=o[(x-a)^{\delta_{75}}],\delta_{75}>\dfrac{|p|}{2},$ *при* $x\to a,$

$f(x,y)=o[e^{\eta_4\omega_b^{\beta}(y)}(y-b)^{\nu_{153}}],\nu_{153}>\beta-1,$ *при* $y\to b,$

тогда интегральное уравнение (2.1.1) *в классе* $C(\overline{D})$, *обращающихся в нуль при* $x\to a,$ $y\to b,$ *всегда разрешимо и его явное решение представимо в виде*:

$$u(x,y)=(x-a)^{\frac{|p|}{2}}\left[\cos\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)\theta_1(y)+\sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)\theta_2(y)\right]+ \qquad (2.8.8)$$
$$+e^{\eta_4\omega_b^\beta(y)}\Phi_4(x)+K_{p,\lambda,\mu}[f(x,y)].$$

Где $\varphi_4(x),\theta_1(y),\theta_2(y)$ *– произвольные непрерывные функции на* Γ_1 *и* Γ_2, *обращающиеся в нуль при* $x\to a,\ \ y\to b$, *с асимптотическими поведениями:*

$$\varphi_4(x)=o[(x-a)^{\delta_{76}}],\delta_{76}>\frac{|p|}{2},\ x\to a,$$

$$\theta_j(y)=o[(y-b)^{\nu_{154}}],\nu_{154}>2(\beta-1),\ \textit{при}\ \ y\to b,\ (j=\ 1,2).$$

Следствие 2.8.5. *Пусть коэффициенты интегрального уравнения* (2.1.1) *удовлетворяют условиям теоремы* 2.8.5. *Тогда* $u(x,y)\in C(\overline{D})$ *и обращается в нуль с асимптотическими поведениями*:

$$u(x,y)=o[(x-a)^{\frac{|p|}{2}}],\ x\to a,$$

$$u(x,y)=o[(y-b)^{\nu_{155}}],\nu_{155}>2(\beta-1),y\to b.$$

Теорема 2.8.6. *Если в интегральном уравнении* (2.1.1) *выполняются условия* (2.1.2)*, также условия*:

1. $\Delta_1=\lambda^2-4\mu>0\,,\lambda<0,\mu<0,$
2. $\Delta_2=p^2-4q<0\,,p>0,$
3. $f(x,y)\in C(\overline{D}),\ f(a,b)\ =0$ *с асимптотическим поведением на* Γ_1 *и* Γ_2:

$$f(x,y)=o[(x-a)^{\varepsilon}],\varepsilon>0\ \ \textit{при}\ \ x\to a,$$

$$f(x,y)=o[e^{\eta_4\omega_b^\beta(y)}(y-b)^{\nu_{156}}],\nu_{156}>\beta-1,\textit{при}\ \ y\to b,$$

тогда интегральное уравнение (2.1.1) *в классе* $C(\overline{D})$, *обращающихся в нуль при* $x\to a,\ \ y\to b$, *всегда разрешимо и его явное решение представимо в виде*:

$$u(x,y)=e^{\eta_4\omega_b^\beta(y)}\Phi_4(x)+K_{p,\lambda,\mu}[f(x,y)], \qquad (2.8.9)$$

где $\varphi_4(x)$ – *произвольная непрерывная функция на* Γ_1, *обращающееся в нуль при* $x \to a$, *с асимптотическим поведением*:

$\varphi_4(x) = o[(x-a)^{\varepsilon}], \varepsilon > 0$ *при* $x \to a$.

Следствие 2.8.6. *Пусть коэффициенты интегрального уравнения* (2.1.1) *удовлетворяют условиям теоремы* 2.8.6. *Тогда* $u(x,y) \in C(\overline{D})$ *и обращается в нуль с асимптотическими поведениями*:

$u(x,y) = o[(x-a)^{\varepsilon}], \varepsilon > 0$, $x \to a$,

$u(x,y) = o[(y-b)^{\nu_{157}}], \nu_{157} > 2(\beta - 1), y \to b$.

Теорема 2.8.7. *Если в интегральном уравнении* (2.1.1) *выполняются условия* (2.1.2), *также условия*:

1. $\Delta_1 = \lambda^2 - 4\mu > 0, \lambda > 0, \mu > 0,$
2. $\Delta_2 = p^2 - 4q < 0, p < 0,$
3. $f(x,y) \in C(\overline{D}),\ f(a,b) = 0$ *с асимптотическим поведением на* Γ_1 *и* Γ_2:

$f(x,y) = o[(x-a)^{\delta_{77}}], \delta_{77} > \dfrac{|p|}{2}$, *при* $x \to a$,

$f(x,y) = o[(y-b)^{\nu_{158}}], \nu_{158} > 2(\beta-1)$, *при* $y \to b$,

тогда интегральное уравнение (2.1.1) *в классе* $C(\overline{D})$, *обращающихся в нуль при* $x \to a$, $y \to b$, *всегда разрешимо и его явное решение представимо в виде*:

$$u(x,y) = (x-a)^{\frac{|p|}{2}}\left[\cos\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)\theta_1(y) + \sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)\theta_2(y)\right] + K_{p,\lambda,\mu}[f(x,y)], \quad (2.8.10)$$

где $\theta_1(y), \theta_2(y)$ – *произвольные непрерывные функции на* Γ_2, *обращающиеся в нуль при* $y \to b$ *с асимптотическим поведением*:

$\theta_j(y) = o[(y-b)^{\nu_{159}}], \nu_{159} > 2(\beta-1)$, *при* $y \to b$, $(j = 1, 2)$.

Следствие 2.8.7. *Пусть коэффициенты интегрального уравнения* (2.1.1) *удовлетворяют условиям теоремы* 2.8.7. *Тогда* $u(x,y) \in C(\overline{D})$ *и обращается в нуль с асимптотическими поведениями*:

$$u(x,y) = o[(x-a)^{\frac{|p|}{2}}],\ x \to a,$$

$$u(x,y) = o[(y-b)^{\nu_{160}}], \nu_{160} > 2(\beta - 1), y \to b.$$

Теорема 2.8.8. *Если в интегральном уравнении* (2.1.1) *выполняются условия* (2.1.2)*, также условия*:

1. $\Delta_1 = \lambda^2 - 4\mu > 0,\ \lambda > 0,\ \mu > 0,$
2. $\Delta_2 = p^2 - 4q < 0,\ p > 0,$
3. $f(x,y) \in C(\overline{D}),\ f(a,b) = 0$ *с асимптотическим поведением на* Γ_1 *и* Γ_2:

$$f(x,y) = o[(x-a)^{\varepsilon}], \varepsilon > 0 \text{ при } x \to a,$$

$$f(x,y) = o[(y-b)^{\nu_{161}}], \nu_{161} > 2(\beta - 1), \text{при } y \to b,$$

тогда интегральное уравнение (2.1.1) *в классе* $C(\overline{D})$, *обращающихся в нуль при* $x \to a$, $y \to b$, *всегда разрешимо и его единственное решение представимо в виде*:

$$u(x,y) = K_{p,\lambda,\mu}[f(x,y)]. \tag{2.8.11}$$

Следствие 2.8.8. *Пусть коэффициенты интегрального уравнения* (2.1.1) *удовлетворяют условиям теоремы* 2.8.8. *Тогда* $u(x,y) \in C(\overline{D})$ *и обращается в нуль с асимптотическими поведениями*:

$$u(x,y) = o[(x-a)^{\varepsilon}], \varepsilon > 0, x \to a,$$

$$u(x,y) = o[(y-b)^{\nu_{162}}], \nu_{162} > 2(\beta - 1), y \to b.$$

§2.9. Исследование двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра, когда корни характеристических уравнений комплексно-сопряженные и вещественные равные

Изучим случай, когда корни характеристического уравнениях вида (2.1.9) и (2.1.18) являются комплексно-сопряженные и вещественные равные:

$$\Delta_1 = p^2 - 4q < 0\,,\ \Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu = 0\,,\ \text{также}\ \ p = p_1, q = q_1, \lambda = \lambda_1, \mu = \mu_1\,.$$

Используя вышеуказанный метод нахождения решения интегрального уравнения (2.1.1) как (§2.3 и §2.2 глава 2) учитивая выпольняется условиях:

$$f(x,y) = o[(x-a)^{\delta_{78}}],\delta_{78} > \frac{|p|}{2},\ \text{при}\quad x \to a,$$

$$f(x,y) = o[e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}(y-b)^{\nu_{163}}],\nu_{163} > 2(\beta-1),\, при\ \ y \to b,$$

Если решение интегрального уравнения (2.1.5) при $p<0,\ p^2-4q<0$ существует, тогда оно представимо в виде:

$$u(x,y) = (x-a)^{\frac{|p|}{2}}\left[\cos\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)\theta_1(y) + \sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)\theta_2(y)\right] +$$
$$+\psi(x,y) + \frac{1}{\sqrt{4q-p^2}}\times \tag{2.9.1}$$
$$\times\int_a^x\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\frac{|p|}{2}}\left[(p^2-4q)\sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right) - p\sqrt{4q-p^2}\cos\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right)\right]\frac{\psi(t,y)}{t-a}dt.$$

Если решение интегрального уравнения (2.1.6) при $\lambda<0,\ \lambda^2-4\mu=0$ существует, тогда согласно [58] оно имеет вид:

$$\psi(x,y) = e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\left[\varphi_1(x) + \omega_b^\beta(y)\varphi_2(x)\right] + f(x,y) +$$
$$+\int_b^y e^{\frac{\lambda}{2}(\omega_b^\beta(y)-\omega_b^\beta(s))}\left[\lambda + \frac{\lambda^2}{4}(\omega_b^\beta(y)-\omega_b^\beta(s))\right]\frac{f(x,s)}{(s-b)^\beta}ds. \tag{2.9.2}$$

Из равенство (2.9.2) и (2.9.1) вытекает решение интегрального уравнения (2.1.1) в виде (2.9.3).

$$u(x,y)=(x-a)^{\frac{|p|}{2}}\left[\cos\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)\theta_1(y)+\sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)\theta_2(y)\right]+$$
$$+e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\left[\Phi_1(x)+\omega_b^\beta(y)\Phi_2(x)\right]+E_{p,\lambda}^{(x,y)}[f(x,y)], \quad (2.9.3)$$

где

$$E_{p,\lambda}^{(x,y)}\left(f(x,y)\right)=f(x,y)+\frac{1}{\sqrt{4q-p^2}}\times$$

$$\times\int_a^x\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{-\frac{p}{2}}\left[(p^2-4q)\sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right)-p\sqrt{4q-p^2}\cos\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right)\right]\frac{f(t,y)}{t-a}dt+$$

$$+\int_b^y e^{\frac{\lambda}{2}(\omega_b^\beta(y)-\omega_b^\beta(s))}\left[\lambda+\frac{\lambda^2}{4}(\omega_b^\beta(y)-\omega_b^\beta(s))\right]\frac{f(x,s)}{(s-b)^\beta}ds+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{4q-p^2}}\int_b^y e^{\frac{\lambda}{2}(\omega_b^\beta(y)-\omega_b^\beta(s))}\left[\lambda+\frac{\lambda^2}{4}(\omega_b^\beta(y)-\omega_b^\beta(s))\right]\frac{ds}{(s-b)^\beta}\times$$

$$\times\int_a^x\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{-\frac{p}{2}}\left[(p^2-4q)\sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right)-p\sqrt{4q-p^2}\cos\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right)\right]\frac{f(t,s)}{t-a}dt. \quad (2.9.4)$$

$\Phi_1(x),\Phi_2(x)$ – определены из равенство (2.3.11), (2.3.12).

Итак доказана теорема:

Теорема 2.9.1. *Если в интегральном уравнении* (2.1.1) *выполняются условия* (2.1.2)*, также условия*:

1. $\Delta_1=p^2-4q<0$, $p<0$,
2. $\Delta_2=\lambda^2-4\mu=0$, $\lambda<0$,
3. $f(x,y)\in C(\overline{D})$, $f(a,b)=0$ *с асимптотическим поведением на* Γ_1 *и* Γ_2:

$$f(x,y)=o[(x-a)^{\delta_{79}}],\delta_{79}>\frac{|p|}{2},\ \text{при}\quad x\to a,$$

$$f(x,y)=o[e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}(y-b)^{\nu_{164}}],\nu_{164}>2(\beta-1),\text{при}\ y\to b,$$

тогда интегральное уравнение (2.1.1) *в классе* $C(\overline{D})$, *обращающихся в нуль при* $x\to a$, $y\to b$, *всегда разрешимо и его явное решение представимо в* *виде* (2.9.3), *где* $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \theta_1(y), \theta_2(y)$ – *произвольные непрерывные функции на* Γ_1 *и* Γ_2, *обращающиеся в нуль при* $x \to a$, $y \to b$ *с асимптотическими поведениями*:

$\varphi_i(x) = o[(x-a)^{\frac{|p|}{2}}]$ *при* $x \to a$, $(i = 1,2)$,

$\theta_j(y) = o[(y-b)^{\nu_{165}}], \nu_{165} > 2(\beta - 1)$, *при* $y \to b$, $(j = 1,2)$.

Следствие 2.9.1. *Пусть коэффициенты интегрального уравнения* (2.1.1) *удовлетворяют условиям теоремы* 2.9.1. *Тогда* $u(x,y) \in C(\overline{D})$ *и обращается в нуль с асимптотическими поведениями*:

$u(x,y) = o[(x-a)^{\frac{|p|}{2}}], x \to a,$

$u(x,y) = o[(y-b)^{\nu_{166}}], \nu_{166} > 2(\beta - 1), y \to b.$

Теорема 2.9.2. *Если в интегральном уравнении* (2.1.1) *выполняются условия* (2.1.2)*, также условия*:

1. $\Delta_1 = p^2 - 4q < 0$, $p > 0$,
2. $\Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu = 0$, $\lambda < 0$,
3. $f(x,y) \in C(\overline{D})$, $f(a,b) = 0$ *с асимптотическим поведением на* Γ_1 *и* Γ_2:

$f(x,y) = o[(x-a)^{\varepsilon}], \varepsilon > 0,$ *при* $x \to a$,

$f(x,y) = o[e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^{\beta}(y)}(y-b)^{\nu_{167}}], \nu_{167} > 2(\beta - 1),$ *при* $y \to b$,

тогда интегральное уравнение (2.1.1) *в классе* $C(\overline{D})$, *обращающихся в нуль при* $x \to a$, $y \to b$, *всегда разрешимо и его явное решение представимо в виде*:

$$u(x,y) = e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^{\beta}(y)}\left[\Phi_1(x) + \omega_b^{\beta}(y)\Phi_2(x)\right] + E_{p,\lambda}^{(x,y)}[f(x,y)], \tag{2.9.5}$$

где $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ – *произвольные непрерывные функции на* Γ_1, *обращающиеся в нуль при* $x \to a$, *с асимптотическими поведениями*:

$\varphi_i(x) = o[(x-a)^{\varepsilon}], \varepsilon > 0$ *при* $x \to a$, $(i = 1,2)$.

Следствие 2.9.2. *Пусть коэффициенты интегрального уравнения* (2.1.1) *удовлетворяют условиям теоремы* 2.9.2. *Тогда* $u(x,y) \in C(\overline{D})$ *и обращается в нуль с асимптотическими поведениями*:

$$u(x,y) = o[(x-a)^{\varepsilon}], \varepsilon > 0, x \to a,$$

$$u(x,y) = o[(y-b)^{\nu_{168}}], \nu_{168} > 2(\beta - 1), y \to b.$$

Теорема 2.9.3. *Если в интегральном уравнении* (2.1.1) *выполняются условия* (2.1.2)*, также условия*:

1. $\Delta_1 = p^2 - 4q < 0, \; p < 0,$
2. $\Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu = 0, \; \lambda > 0,$
3. $f(x,y) \in C(\overline{D}), \; f(a,b) = 0$ *с асимптотическим поведением на* Γ_1 *и* Γ_2:

$$f(x,y) = o[(x-a)^{\delta_{80}}], \delta_{80} > \frac{|p|}{2}, \text{ при } x \to a,$$

$$f(x,y) = o[(y-b)^{\nu_{169}}], \nu_{169} > 2(\beta - 1), \text{ при } y \to b,$$

тогда интегральное уравнение (2.1.1) *в классе* $C(\overline{D})$, *обращающихся в нуль при* $x \to a$, $y \to b$, *всегда разрешимо и его явное решение представимо в виде*:

$$u(x,y) = (x-a)^{\frac{|p|}{2}} \left[\cos\left(\frac{\sqrt{4q - p^2}}{2} \ln(x-a) \right) \theta_1(y) + \sin\left(\frac{\sqrt{4q - p^2}}{2} \ln(x-a) \right) \theta_2(y) \right] + E_{p,\lambda}^{(x,y)}[f(x,y)], \quad (2.9.6)$$

где $\theta_1(y), \theta_2(y)$ – *произвольные непрерывные функции на* Γ_2, *обращающиеся в нуль при* $y \to b$ *с асимптотическими поведениями*:

$$\theta_j(y) = o[(y-b)^{\nu_{170}}], \nu_{170} > 2(\beta - 1), \text{ при } y \to b, \; (j = 1, 2).$$

Следствие 2.9.3. *Пусть коэффициенты интегрального уравнения* (2.1.1) *удовлетворяют условиям теоремы* 2.9.3. *Тогда* $u(x,y) \in C(\overline{D})$ *и обращается в нуль с асимптотическими поведениями*:

$$u(x,y) = o[(x-a)^{\frac{|p|}{2}}], x \to a,$$

$u(x,y)=o[(y-b)^{\nu_{171}}], \nu_{171}>2(\beta-1), y\to b.$

Теорема 2.9.4. *Если в интегральном уравнении* (2.1.1) *выполняются условия* (2.1.2)*, также условия*:

1. $\Delta_1 = p^2-4q<0, p>0,$
2. $\Delta_2 = \lambda^2-4\mu=0, \lambda>0,$
3. $f(x,y)\in C(\overline{D}),\ f(a,b)=0$ *с асимптотическим поведением на* Γ_1 *и* Γ_2:

$f(x,y)=o[(x-a)^{\varepsilon}], \varepsilon>0$ *при* $x\to a,$

$f(x,y)=o[(y-b)^{\nu_{172}}], \nu_{172}>2(\beta-1),$ *при* $y\to b,$

тогда интегральное уравнение (2.1.1) *в классе* $C(\overline{D})$, *обращающихся в нуль при* $x\to a,$ $y\to b,$ *всегда разрешимо и его единственное решение представимо в виде*:

$$u(x,y)=E_{p,\lambda}^{(x,y)}[f(x,y)]. \tag{2.9.6}$$

Следствие 2.9.4. *Пусть коэффициенты интегрального уравнения* (2.1.1) *удовлетворяют условиям теоремы* 2.9.4. *Тогда* $u(x,y)\in C(\overline{D})$ *и обращается в нуль с асимптотическими поведениями*:

$u(x,y)=o[(x-a)^{\varepsilon}], \varepsilon>0, x\to a,$

$u(x,y)=o[(y-b)^{\nu_{173}}], \nu_{173}>2(\beta-1), y\to b.$

ГЛАВА 3
ЗАДАЧИ ТИПА КОШИ ДЛЯ ДВУМЕРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА ВОЛЬТЕРРА С ГРАНИЧНЫМИ ОСОБЫМИ И СИЛЬНО-ОСОБЫМИ ЛИНИЯМИ

В настоящей главе ставятся и решаются задачи типа Коши для двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра с особенностью и логарифмической особенностью по одной переменной и сильной особенностью по другой переменной.

Отметим, что при постановке задачи типа Коши условия задаются на особых линиях и в зависимости от знака параметров уравнений, когда корни характеристических уравнений являются вещественными, разными и равными; вещественными, разными и комплексно-сопряженными; вещественными, равными и разными; вещественными, равными и комплексно-сопряженными; комплексно-сопряженными и вещественными разными и комплексно-сопряженными и вещественными равными, находятся явные решения поставленных задач.

§3.1. Случай, когда корни характеристических уравнений вещественные и разные: $\Delta_1 = p^2 - 4q > 0$, $\Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu > 0$

Задача K$_{3.1.1.}$ *Найти решение интегрального уравнения Вольтерра* (2.1.1) *из класса* $C(\overline{D})$, *которое обращается в нуль на* Γ_1 *и* Γ_2, *если* $p < 0,\ q > 0,\ \lambda < 0, \mu > 0,\ \Delta_1 = p^2 - 4q > 0, \Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu > 0$, *по условиям*:

$$\begin{cases} \left[(x-a)^{-\gamma_1} \left(\gamma_2 u(x,y) - D_x u(x,y) \right) \right]_{x=a} = \mathrm{A}_1(y), \\ \left[(x-a)^{-\gamma_2} \left(-\gamma_1 u(x,y) + D_x u(x,y) \right) \right]_{x=a} = \mathrm{A}_2(y), \\ \left[e^{-\eta_1 \omega_b^\beta(y)} \left(\eta_2 u(x,y) - D_\beta^y u(x,y) \right) \right]_{y=b} = \mathrm{B}_1(x), \\ \left[e^{-\eta_2 \omega_b^\beta(y)} \left(-\eta_1 u(x,y) - D_\beta^y u(x,y) \right) \right]_{y=b} = \mathrm{B}_2(x), \end{cases}$$

где $\mathrm{B}_1(x), \mathrm{B}_2(x), \mathrm{A}_1(y), \mathrm{A}_2(y) -$ *заданные произвольные непрерывные функции соответственно на* Γ_1 *и* Γ_2.

Решение задача K$_{3.1.1}$:

Согласно [1-A], решение интегрального уравнения (2.1.1) при:

$p < 0,\ q > 0,\ \lambda < 0, \mu > 0,\ \Delta_1 = p^2 - 4q > 0, \Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu > 0,$

$p = p_1, q = q_1, \lambda = \lambda_1, \mu = \mu_1,$

имеет вид:

$$u(x,y) = \theta_1(y)(x-a)^{\gamma_1} + \theta_2(y)(x-a)^{\gamma_2} + e^{\eta_1 \omega_b^\beta(y)} \Phi_1(x) + e^{\eta_2 \omega_b^\beta(y)} \Phi_2(x) + K_{p,q,\lambda,\mu}^{(x,y)}\left[f(x,y) \right]. \quad (3.1.1)$$

где $K_{p,q,\lambda,\mu}^{(x,y)}[f(x,y)], \varPhi_1(x), \varPhi_2(x), \gamma_1, \gamma_2, \eta_1, \eta_2 -$ соответственно определены из равенств (2.1.27), (2.1.25), (2.1.26) и (2.1.28).

Решение (3.1.1) представим в виде:

$$\gamma_2 u(x,y) = \gamma_2 (x-a)^{\gamma_1} \theta_1(y) + \gamma_2 (x-a)^{\gamma_2} \theta_2(y) + \gamma_2 \Omega_1 \left[\varphi_1(x), \varphi_2(x), f(x,y) \right],$$

где

$$\Omega_1 \left[\varphi_1(x), \varphi_2(x), f(x,y) \right] = e^{\eta_1 \omega_b^\beta(y)} \Phi_1(x) + e^{\eta_2 \omega_b^\beta(y)} \Phi_2(x) + K_{p,q,\lambda,\mu}^{(x,y)}\left[f(x,y) \right].$$

Дифференцируя решение интегрального уравнения (2.1.1) - равенство (3.1.1), далее умножая на $(x-a)$, получим:

$$D_x u(x,y)=(x-a)\frac{du(x,y)}{dx}=(x-a)\left\{\gamma_1(x-a)^{\gamma_1-1}\theta_1(y)+\gamma_2(x-a)^{\gamma_2-1}\theta_2(y)+\frac{\partial}{\partial x}\Omega_1\left[\varphi_1(x),\varphi_2(x),f(x,y)\right]\right\}=$$
$$=\gamma_1(x-a)^{\gamma_1}\theta_1(y)+\gamma_2(x-a)^{\gamma_2}\theta_2(y)+D_x\Omega_1\left[\varphi_1(x),\varphi_2(x),f(x,y)\right].$$

Подставляя полученное равенство в первое условие задачи **$K_{3.1.1}$**, находим:

$$\left[(x-a)^{-\gamma_1}\left(\gamma_2 u(x,y)-D_x u(x,y)\right)\right]_{x=a}=$$

$$=\left\{(\gamma_2-\gamma_1)\theta_1(y)+(x-a)^{-\gamma_1}\left[\gamma_2\Omega_1\left[\varphi_1(x),\varphi_2(x),f(x,y)\right]-D_x\Omega_1\left[\varphi_1(x),\varphi_2(x),f(x,y)\right]\right]\right\}_{x=a}=$$
$$=(\gamma_2-\gamma_1)\theta_1(y)=\mathrm{A}_1(y), \qquad (3.1.2)$$

отсюда:

$$\theta_1(y)=\frac{\mathrm{A}_1(y)}{\gamma_2-\gamma_1}. \qquad (3.1.3)$$

Аналогичном образом, справедливо равенство:

$$-\gamma_1 u(x,y)=-\gamma_1(x-a)^{\gamma_1}\theta_1(y)-\gamma_1(x-a)^{\gamma_2}\theta_2(y)-\gamma_1\Omega_1\left[\varphi_1(x),\varphi_2(x),f(x,y)\right],$$

$$D_x u(x,y)=\gamma_1(x-a)^{\gamma_1}\theta_1(y)+\gamma_2(x-a)^{\gamma_2}\theta_2(y)+D_x\Omega_1\left[\varphi_1(x),\varphi_2(x),f(x,y)\right].$$

Подставляя полученные значения во второе условие задача **$K_{3.1.1}$**, получим:

$$\left[(x-a)^{-\gamma_2}\left(-\gamma_1 u(x,y)+D_x u(x,y)\right)\right]_{x=a}=$$
$$=\left\{(\gamma_2-\gamma_1)\theta_2(y)+(x-a)^{-\gamma_2}\left[-\gamma_1\Omega_1\left[\varphi_1(x),\varphi_2(x),f(x,y)\right]+D_x\Omega_1\left[\varphi_1(x),\varphi_2(x),f(x,y)\right]\right]\right\}_{x=a}=$$
$$=(\gamma_2-\gamma_1)\theta_2(y)=\mathrm{A}_2(y), \qquad (3.1.4)$$

отсюда:

$$\theta_1(y)=\frac{\mathrm{A}_2(y)}{\gamma_2-\gamma_1}. \qquad (3.1.5)$$

Далее, дифференцируя решение интегрального уравнения (2.1.1) и умножая на $(y-b)^{\beta}$, получим:

$$D_\beta^y u(x,y)=(y-b)^{\beta}\frac{du(x,y)}{dy}=-\eta_1\Phi_1(x)e^{\eta_1\omega_b^{\beta}(y)}-\eta_2\Phi_2(x)e^{\eta_2\omega_b^{\beta}(y)}+D_\beta^y\Omega_2\left[\theta_1(y),\theta_2(y),f(x,y)\right].$$

Подставим полученное значение в третье условие задачи **$K_{3.1.1}$**:

$$\left[e^{-\eta_1\omega_b^{\beta}(y)}\left(\eta_2 u(x,y)-D_\beta^y u(x,y)\right)\right]_{y=b}=$$

$$=\left[(\eta_2-\eta_1)\Phi_1(x)+e^{-\eta_1\omega_b^\beta(y)}\left[\eta_2\Omega_2\left[\theta_1(y),\theta_2(y),\, f(x,y)\right]+D_\beta^y\Omega_2\left[\theta_1(y),\theta_2(y),\, f(x,y)\right]\right]\right]_{y=b}= \tag{3.1.6}$$
$$=(\eta_2-\eta_1)\Phi_1(x)=\mathrm{B}_1(x),$$

отсюда:

$$\Phi_1(x)=\frac{\mathrm{B}_1(x)}{\eta_2-\eta_1}, \tag{3.1.7}$$

где

$$\Omega_2\left[\theta_1(y),\theta_2(y),\, f(x,y)\right]=\theta_1(y)(x-a)^{\gamma_1}+\theta_2(y)(x-a)^{\gamma_2}+K_{p,q,\lambda,\mu}^{(x,y)}\left[f(x,y)\right].$$

Аналогичном образом, находим:

$$\eta_1 u(x,y)=\eta_1\Phi_1(x)e^{\eta_1\omega_b^\beta(y)}+\eta_1\Phi_2(x)e^{\eta_2\omega_b^\beta(y)}+\eta_1\Omega_2\left[\theta_1(y),\theta_2(y),\, f(x,y)\right],$$

$$D_\beta^y u(x,y)=-\eta_1\Phi_1(x)e^{\eta_1\omega_b^\beta(y)}-\eta_2\Phi_2(x)e^{\eta_2\omega_b^\beta(y)}+D_\beta^y\Omega_2\left[\theta_1(y),\theta_2(y),\, f(x,y)\right].$$

Подставляя полученное значение в четвертое условие задачи **$K_{3.1.1}$**, имеем:

$$\left[e^{-\eta_2\omega_b^\beta(y)}\left(-\eta_1 u(x,y)-D_\beta^y u(x,y)\right)\right]_{y=b}=$$

$$=\left[(\eta_2-\eta_1)\Phi_2(x)+e^{-\eta_2\omega_b^\beta(y)}\left[-\eta_1\Delta\left[\theta_1(y),\theta_2(y),\, f(x,y)\right]-D_\beta^y\Delta\left[\theta_1(y),\theta_2(y),\, f(x,y)\right]\right]\right]_{y=b}= \tag{3.1.8}$$
$$=(\eta_2-\eta_1)\Phi_2(x)\equiv\mathrm{B}_2(x).$$

отсюда:

$$\Phi_2(x)=\frac{\mathrm{B}_2(x)}{\eta_2-\eta_1}. \tag{3.1.9}$$

Итак, доказана:

Теорема 3.1.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1.1. Т*огда задача* **$K_{3.1.1}$** *разрешима и её единственное решение выражается равенством*:

$$u(x,y)=\frac{\mathrm{A}_1(y)}{\gamma_2-\gamma_1}(x-a)^{\gamma_1}+\frac{\mathrm{A}_2(y)}{\gamma_2-\gamma_1}(x-a)^{\gamma_2}+e^{\eta_1\omega_b^\beta(y)}\frac{\mathrm{B}_1(x)}{\eta_2-\eta_1}+e^{\eta_2\omega_b^\beta(y)}\frac{\mathrm{B}_2(x)}{\eta_2-\eta_1}+K_{p,q,\lambda,\mu}^{(x,y)}\left[f(x,y)\right]. \tag{3.1.10}$$

Задача $K_{3.1.2}$. *Найти решение интегрального уравнения Вольтерра* (2.1.1) *из класса* $C(\overline{D})$, *которое обращается в нуль на* Γ_1 *и* Γ_2, *если* $p<0,\ q>0,\ \lambda>0, \mu<0,\ \Delta_1=p^2-4q>0,\Delta_2=\lambda^2-4\mu>0$, *по условиям*:

$$\begin{cases} \left[(x-a)^{-\gamma_1}\left(\gamma_2 u(x,y) - D_x u(x,y)\right)\right]_{x=a} = \mathrm{A}_1(y), \\ \left[(x-a)^{-\gamma_2}\left(-\gamma_1 u(x,y) + D_x u(x,y)\right)\right]_{x=a} = \mathrm{A}_2(y), \\ \left[e^{-\eta_3\omega_b^\beta(y)} u(x,y)\right]_{y=b} = \mathrm{B}_3(x), \end{cases}$$

где $\mathrm{B}_3(x), \mathrm{A}_1(y), \mathrm{A}_2(y)$ – *заданные произвольные непрерывные функции.*

Используя вышеприведенный способ решения задачи **К$_{3.1.1}$**, получим следующую теорему о разрешимости задачи **К$_{3.1.2}$:**

Теорема 3.1.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1.2. Т*огда задача* **К$_{3.1.2}$** *разрешима и её единственное решение выражается равенством*:

$$u(x,y) = \frac{\mathrm{A}_1(y)}{\gamma_2-\gamma_1}(x-a)^{\gamma_1} + \frac{\mathrm{A}_2(y)}{\gamma_2-\gamma_1}(x-a)^{\gamma_2} + e^{\eta_3\omega_b^\beta(y)}\mathrm{B}_3(x) + K_{p,q,\lambda,\mu}^{(x,y)}[f(x,y)]. \quad (3.1.11)$$

Задача К$_{3.1.3}$. *Найти решение интегрального уравнения Вольтерра* (2.1.1) *из класса* $C(\overline{D})$, *которое обращается в нуль на* Γ_1 *и* Γ_2, *если* $p<0,\ q>0,\ \lambda<0, \mu<0,\ \Delta_1 = p^2-4q>0,\ \Delta_2 = \lambda^2-4\mu>0,$ *по условиям*:

$$\begin{cases} \left[(x-a)^{-\gamma_1}\left(\gamma_2 u(x,y) - D_x u(x,y)\right)\right]_{x=a} = \mathrm{A}_1(y), \\ \left[(x-a)^{-\gamma_2}\left(-\gamma_1 u(x,y) + D_x u(x,y)\right)\right]_{x=a} = \mathrm{A}_2(y), \\ \left[e^{-\eta_4\omega_b^\beta(y)} u(x,y)\right]_{y=b} = \mathrm{B}_4(x), \end{cases}$$

где $\mathrm{B}_4(x), \mathrm{A}_1(y), \mathrm{A}_2(y)$ – *заданные произвольные непрерывные функции.*

На основе свойств (3.1.2), (3.1.4) и (3.1.8) справедлива теорема:

Теорема 3.1.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1.3. Т*огда задача* **К$_{3.1.3}$** *разрешима и её единственное решение выражается равенством*:

$$u(x,y) = \frac{\mathrm{A}_1(y)}{\gamma_2-\gamma_1}(x-a)^{\gamma_1} + \frac{\mathrm{A}_2(y)}{\gamma_2-\gamma_1}(x-a)^{\gamma_2} + e^{\eta_4\omega_b^\beta(y)}\mathrm{B}_4(x) + K_{p,q,\lambda,\mu}^{(x,y)}[f(x,y)]. \quad (3.1.12)$$

Задача К$_{3.1.4}$. *Найти решение интегрального уравнения Вольтерра* (2.1.1) *из класса* $C(\overline{D})$, *которое обращается в нуль на* Γ_1 *и* Γ_2, *если* $p<0,\ q>0,$ $\lambda>0, \mu>0,\ \Delta_1 = p^2-4q>0,\ \Delta_2 = \lambda^2-4\mu>0,$ *по условиям*:

$$\begin{cases} \left[(x-a)^{-\gamma_1} \left(\gamma_2 u(x,y) - D_x u(x,y) \right) \right]_{x=a} = \mathrm{A}_1(y) \\ \left[(x-a)^{-\gamma_2} \left(-\gamma_1 u(x,y) + D_x u(x,y) \right) \right]_{x=a} = \mathrm{A}_2(y) \end{cases}$$

где $\mathrm{A}_1(y), \mathrm{A}_2(y)$ – *заданные произвольные непрерывные функции.*

На основе свойств (3.1.2), (3.1.4) справедлива теорема:

Теорема 3.1.4. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1.4. Т*огда задача* **К$_{3.1.4}$** *разрешима и её единственное решение выражается равенством*:

$$u(x,y) = \frac{\mathrm{A}_1(y)}{\gamma_2 - \gamma_1}(x-a)^{\gamma_1} + \frac{\mathrm{A}_2(y)}{\gamma_2 - \gamma_1}(x-a)^{\gamma_2} + K^{(x,y)}_{p,q,\lambda,\mu}[f(x,y)]. \quad (3.1.13)$$

Задача К$_{3.1.5.}$ *Найти решение интегрального уравнения Вольтерра* (2.1.1) *из класса* $C(\overline{D})$, *которое обращается в нуль на* Γ_1 *и* Γ_2, *если* $p > 0, q < 0,\ \lambda < 0, \mu > 0,\ \Delta_1 = p^2 - 4q > 0, \Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu > 0$, *по условиям*:

$$\begin{cases} \left[(x-a)^{-\gamma_3} u(x,y) \right]_{x=a} = \mathrm{A}_3(y), \\ \left[e^{-\eta_1 \omega_b^\beta(y)} \left(\eta_2 u(x,y) - D_\beta^y u(x,y) \right) \right]_{y=b} = \mathrm{B}_1(x), \\ \left[e^{-\eta_2 \omega_b^\beta(y)} \left(-\eta_1 u(x,y) - D_\beta^y u(x,y) \right) \right]_{y=b} = \mathrm{B}_2(x), \end{cases}$$

где $\mathrm{B}_1(x), \mathrm{B}_2(x), \mathrm{A}_3(y)$ – *заданные произвольные непрерывные функции.*

На основе свойств (3.1.2), (3.1.6) и (3.1.8) справедлива теорема:

Теорема 3.1.5. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1.5. Т*огда задача* **К$_{3.1.5}$** *разрешима и её единственное решение выражается равенством*:

$$u(x,y) = \mathrm{A}_3(y)(x-a)^{\gamma_3} + e^{\eta_1 \omega_b^\beta(y)} \frac{\mathrm{B}_1(x)}{\eta_2 - \eta_1} + e^{\eta_2 \omega_b^\beta(y)} \frac{\mathrm{B}_2(x)}{\eta_2 - \eta_1} + K^{(x,y)}_{p,q,\lambda,\mu}[f(x,y)], \quad (3.1.14)$$

Задача К$_{3.1.6.}$ *Найти решение интегрального уравнения Вольтерра* (2.1.1) *из класса* $C(\overline{D})$, *которое обращается в нуль на* Γ_1 *и* Γ_2, *если* $p > 0, q < 0,\ \lambda > 0, \mu < 0,\ \Delta_1 = p^2 - 4q > 0, \Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu > 0$, *по условиям*:

$$\begin{cases} \left[(x-a)^{-\gamma_3} u(x,y) \right]_{x=a} = \mathrm{A}_3(y) \\ \left[e^{-\eta_3 \omega_b^\beta(y)} u(x,y) \right]_{y=b} = \mathrm{B}_3(x) \end{cases}$$

где $\mathrm{B}_3(x), \mathrm{A}_3(y)$ – *заданные произвольные непрерывные функции.*

На основе свойств (3.1.2), (3.1.8) справедлива теорема:

Теорема 3.1.6. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1.6. Т*огда задача* **К$_{3.1.6}$** *разрешима и её единственное решение выражается равенством*:

$$u(x,y) = \mathrm{A}_3(y)(x-a)^{\gamma_3} + e^{\eta_3\omega_b^\beta(y)}\mathrm{B}_3(x) + K_{p,q,\lambda,\mu}^{(x,y)}\left[f(x,y)\right]. \tag{3.1.15}$$

Задача К$_{3.1.7.}$ *Найти решение интегрального уравнения Вольтерра* (2.1.1) *из класса* $C(\overline{D})$, *которое обращается в нуль на* Γ_1 *и* Γ_2, *если* $p>0$, $q<0, \lambda<0,\ \mu<0,\ \Delta_1 = p^2-4q>0,\ \Delta_2=\lambda^2-4\mu>0,$ *по условиям*:

$$\begin{cases} \left[(x-a)^{-\gamma_3}u(x,y)\right]_{x=a} = \mathrm{A}_3(y), \\ \left[e^{-\eta_4\omega_b^\beta(y)}u(x,y)\right]_{y=b} = \mathrm{B}_4(x), \end{cases}$$

где $\mathrm{B}_4(x), \mathrm{A}_3(y)$ – *заданные произвольные непрерывные функции.*

На основе свойств (3.1.2), (3.1.8) справедлива теорема:

Теорема 3.1.7. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1.7. Т*огда задача* **К$_{3.1.7}$** *разрешима и её единственное решение выражается равенством*:

$$u(x,y) = \mathrm{A}_3(y)(x-a)^{\gamma_3} + e^{\eta_4\omega_b^\beta(y)}\mathrm{B}_4(x) + K_{p,q,\lambda,\mu}^{(x,y)}\left[f(x,y)\right]. \tag{3.1.16}$$

Задача К$_{3.1.8.}$ *Найти решение интегрального уравнения Вольтерра* (2.1.1) *из класса* $C(\overline{D})$, *которое обращается в нуль на* Γ_1 *и* Γ_2, *если* $p>0$, $p>0,\ q<0,\ \lambda>0,\ \mu>0,\ \Delta_1 = p^2-4q>0, \Delta_2=\lambda^2-4\mu>0$, *по условиям*:

$$\left[(x-a)^{-\gamma_3}u(x,y)\right]_{x=a} = \mathrm{A}_3(y),$$

где $\mathrm{A}_3(y)$ – *заданная произвольная непрерывная функция.*

На основе свойства (3.1.2) справедлива теорема:

Теорема 3.1.8. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1.8. Т*огда задача* **К$_{3.1.8}$** *разрешима и её единственное решение выражается равенством*:

$$u(x,y) = \mathrm{A}_3(y)(x-a)^{\gamma_3} + K_{p,q,\lambda,\mu}^{(x,y)}\left[f(x,y)\right]. \tag{3.1.17}$$

Задача К$_{3.1.9}$. *Найти решение интегрального уравнения Вольтерра* (2.1.1) *из класса* $C(\overline{D})$, *которое обращается в нуль на* Γ_1 *и* Γ_2, *если* $p > 0$, $p < 0,\ q < 0,\ \lambda < 0, \mu > 0,\ \Delta_1 = p^2 - 4q > 0, \Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu > 0$, *по условиям*:

$$\begin{cases} \left[(x-a)^{-\gamma_4} u(x,y)\right]_{x=a} = \mathrm{A}_4(y), \\ \left[e^{-\eta_1 \omega_b^\beta(y)} \left(\eta_2 u(x,y) - D_\beta^y u(x,y)\right)\right]_{y=b} = \mathrm{B}_1(x), \\ \left[e^{-\eta_2 \omega_b^\beta(y)} \left(-\eta_1 u(x,y) - D_\beta^y u(x,y)\right)\right]_{y=b} = \mathrm{B}_2(x), \end{cases}$$

где $\mathrm{B}_1(x), \mathrm{B}_2(x), \mathrm{A}_4(y)$ – *заданные произвольные непрерывные функции.*

На основе свойств (3.1.2), (3.1.6) и (3.1.8) справедлива теорема:

Теорема 3.1.9. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1.9. Т*огда задача* **К$_{3.1.9}$** *разрешима и её единственное решение выражается равенством*:

$$u(x,y) = \mathrm{A}_4(y)(x-a)^{\gamma_4} + e^{\eta_1 \omega_b^\beta(y)} \frac{\mathrm{B}_1(x)}{\eta_2 - \eta_1} + e^{\eta_2 \omega_b^\beta(y)} \frac{\mathrm{B}_2(x)}{\eta_2 - \eta_1} + K_{p,q,\lambda,\mu}^{(x,y)}[f(x,y)]. \qquad (3.1.18)$$

Задача К$_{3.1.10}$. *Найти решение интегрального уравнения Вольтерра* (2.1.1) *из класса* $C(\overline{D})$, *которое обращается в нуль на* Γ_1 *и* Γ_2, *если* $p > 0$, $p < 0,\ q < 0,\ \lambda > 0, \mu < 0,\ \Delta_1 = p^2 - 4q > 0,\ \Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu > 0$, *по условиям*:

$$\begin{cases} \left[(x-a)^{-\gamma_4} u(x,y)\right]_{x=a} = \mathrm{A}_4(y), \\ \left[e^{-\eta_3 \omega_b^\beta(y)} u(x,y)\right]_{y=b} = \mathrm{B}_3(x), \end{cases}$$

где $\mathrm{B}_3(x), \mathrm{A}_4(y)$ – *заданные произвольные непрерывные функции.*

На основе свойств (3.1.2), (3.1.8) справедлива теорема:

Теорема 3.1.10. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1.10. Т*огда задача* **К$_{3.1.10}$** *разрешима и её единственное решение выражается равенством*:

$$u(x,y) = \mathrm{A}_4(y)(x-a)^{\gamma_4} + e^{\eta_3 \omega_b^\beta(y)} \mathrm{B}_3(x) + K_{p,q,\lambda,\mu}^{(x,y)}[f(x,y)]. \qquad (3.1.19)$$

Задача К$_{3.1.11}$. *Найти решение интегрального уравнения Вольтерра* (2.1.1) *из класса* $C(\overline{D})$, *которое обращается в нуль на* Γ_1 *и* Γ_2, *если* $p > 0$, $p < 0, q < 0,\ \lambda < 0, \mu < 0,\ \Delta_1 = p^2 - 4q > 0$, $\Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu > 0$, *по условиям*:

$$\begin{cases} \left[(x-a)^{-\gamma_4} u(x,y) \right]_{x=a} = \mathrm{A}_4(y), \\ \left[e^{-\eta_4 \omega_b^\beta(y)} u(x,y) \right]_{y=b} = \mathrm{B}_4(x), \end{cases}$$

где $\mathrm{B}_4(x), \mathrm{A}_4(y)$ – *заданные произвольные непрерывные функции.*

На основе свойств (3.1.2), (3.1.8) справедлива теорема:

Теорема 3.1.11. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1.11. Т*огда задача* **К$_{3.1.11}$** *разрешима и её единственное решение выражается равенством*:

$$u(x,y) = \mathrm{A}_4(y)(x-a)^{\gamma_4} + e^{\eta_4 \omega_b^\beta(y)} \mathrm{B}_4(x) + K_{p,q,\lambda,\mu}^{(x,y)} \left[f(x,y) \right]. \quad (3.1.20)$$

Задача К$_{3.1.12}$. *Найти решение интегрального уравнения Вольтерра* (2.1.1) *из класса* $C(\overline{D})$, *которое обращается в нуль на* Γ_1 *и* Γ_2, *если* $p > 0$, $p < 0, q < 0,\ \lambda > 0, \mu > 0,\ \Delta_1 = p^2 - 4q > 0$, $\Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu > 0$, *по условиям*:

$$\left[(x-a)^{-\gamma_4} u(x,y) \right]_{x=a} = \mathrm{A}_4(y),$$

где $\mathrm{A}_4(y)$ – *заданная произвольная непрерывная функция.*

На основе свойства (3.1.2) справедлива теорема:

Теорема 3.1.12. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1.12. Т*огда задача* **К$_{3.1.12}$** *разрешима и её единственное решение выражается равенством*:

$$u(x,y) = \mathrm{A}_4(y)(x-a)^{\gamma_4} + K_{p,q,\lambda,\mu}^{(x,y)} \left[f(x,y) \right]. \quad (3.1.21)$$

Задача К$_{3.1.13}$. *Найти решение интегрального уравнения Вольтерра* (2.1.1) *из класса* $C(\overline{D})$, *которое обращается в нуль на* Γ_1 *и* Γ_2, *если* $p > 0,\ q > 0$, $\lambda < 0, \mu > 0,\ \Delta_1 = p^2 - 4q > 0$, $\Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu > 0$, *по условиям*:

$$\begin{cases} \left[e^{-\eta_1 \omega_b^\beta(y)} \left(\eta_2 u(x,y) - D_\beta^y u(x,y) \right) \right]_{y=b} = \mathrm{B}_1(x), \\ \left[e^{-\eta_2 \omega_b^\beta(y)} \left(-\eta_1 u(x,y) - D_\beta^y u(x,y) \right) \right]_{y=b} = \mathrm{B}_2(x), \end{cases}$$

где $\mathrm{B}_1(x), \mathrm{B}_2(x)$ – *заданные произвольные непрерывные функции.*

На основе свойств (3.1.6), (3.1.8) справедлива теорема:

Теорема 3.1.13. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1.13. Т*огда задача* **К$_{3.1.13}$** *разрешима и её единственное решение выражается равенством*:

$$u(x,y) = e^{\eta_1 \omega_b^\beta(y)} \frac{\mathrm{B}_1(x)}{\eta_2 - \eta_1} + e^{\eta_2 \omega_b^\beta(y)} \frac{\mathrm{B}_2(x)}{\eta_2 - \eta_1} + K_{p,q,\lambda,\mu}^{(x,y)}\left[f(x,y)\right]. \quad (3.1.22)$$

Задача К$_{3.1.14}$. *Найти решение интегрального уравнения Вольтерра* (2.1.1) *из класса* $C(\overline{D})$*, которое обращается в нуль на* Γ_1 *и* Γ_2*, если* $p > 0, q > 0,\ \lambda > 0, \mu < 0,\ \Delta_1 = p^2 - 4q > 0, \Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu > 0, \Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu > 0,$ *по условиям*:

$$\left[e^{-\eta_3 \omega_b^\beta(y)} u(x,y)\right]_{y=b} = \mathrm{B}_3(x),$$

где $\mathrm{B}_3(x)$ – *заданная произвольная непрерывная функция.*

На основе свойства (3.1.8) справедлива теорема:

Теорема 3.1.14. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1.14. Т*огда задача* **К$_{3.1.14}$** *разрешима и её единственное решение выражается равенством*:

$$u(x,y) = e^{\eta_3 \omega_b^\beta(y)} \mathrm{B}_3(x) + K_{p,q,\lambda,\mu}^{(x,y)}\left[f(x,y)\right]. \quad (3.1.23)$$

Задача К$_{3.1.15}$. *Найти решение интегрального уравнения Вольтерра* (2.1.1) *из класса* $C(\overline{D})$*, которое обращается в нуль на* Γ_1 *и* Γ_2*, если* $p > 0$*,* $q > 0,\ \lambda < 0,\ \mu < 0,\ \Delta_1 = p^2 - 4q > 0, \Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu > 0$*, по условиям*:

$$\left[e^{-\eta_4 \omega_b^\beta(y)} u(x,y)\right]_{y=b} = \mathrm{B}_4(x),$$

где $\mathrm{B}_4(x)$ – *заданная произвольная непрерывная функция.*

На основе свойства (3.1.8) справедлива теорема:

Теорема 3.1.15. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1.15. Т*огда задача* **К$_{3.1.15}$** *разрешима и её единственное решение выражается равенством*:

$$u(x,y) = e^{\eta_4 \omega_b^\beta(y)} \mathrm{B}_4(x) + K_{p,q,\lambda,\mu}^{(x,y)}\left[f(x,y)\right]. \quad (3.1.24)$$

§3.2. Случай, когда корни характеристических уравнений вещественные равные: $\Delta_1 = p^2 - 4q = 0\,, \Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu = 0$

Задача К$_{3.2.1.}$ *Найти решение интегрального уравнения Вольтерра* (2.1.1) *из класса* $C(\overline{D})$, *которое обращается в нуль на* Г$_1$ *и* Г$_2$, *если* $p < 0, \lambda < 0,\ \Delta_1 = p^2 - 4q = 0\,, \Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu = 0$, *по условиям*:

$$\begin{cases} \left\{(x-a)^{-\frac{|p|}{2}}\left[\left(1+\frac{|p|}{2}\ln(x-a)\right)u(x,y)-\ln(x-a)D_x\left(u(x,y)\right)\right]\right\}_{x=a} = \mathrm{A}_1(y), \\ \left\{(x-a)^{-\frac{|p|}{2}}\left[D_x\left(u(x,y)\right)-\frac{|p|}{2}u(x,y)\right]\right\}_{x=a} = \mathrm{A}_2(y), \\ \left\{e^{-\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\left[-\left(1+\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)\right)u(x,y)-\omega_b^\beta(y)D_\beta^y\left(u(x,y)\right)\right]\right\}_{y=b} = \mathrm{B}_1(x), \\ \left\{e^{-\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\left[\frac{\lambda}{2}u(x,y)+D_\beta^y\left(u(x,y)\right)\right]\right\}_{y=b} = \mathrm{B}_2(x), \end{cases}$$

где $\mathrm{B}_1(x), \mathrm{B}_2(x), \mathrm{A}_1(y), \mathrm{A}_2(y)$ – *заданные произвольные непрерывные функции.*

Решение задача К$_{3.2.1}$:

Согласно [57]-[58], решение интегрального уравнения (2.1.1) при:

$p < 0, \lambda < 0,\ \Delta_1 = p^2 - 4q = 0,\ \Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu = 0,\ \ p = p_1, q = q_1, \lambda = \lambda_1, \mu = \mu_1,$

имеет вид:

$$u(x,y) = (x-a)^{\frac{|p|}{2}}\left[\theta_1(y) + \ln(x-a)\theta_2(y)\right] + e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\Phi_1(x) + \omega_b^\beta(y)e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\Phi_2(x) + M_{p,\lambda}^{(x,y)}[f(x,y)]. \quad (3.2.1)$$

$M_{p,\lambda}^{(x,y)}[f(x,y)], \Phi_1(x), \Phi_2(x)$ – соответственно определены из равенством (2.2.16), (2.2.14), (2.2.15).

Решение (3.2.1) представим в виде:

$$u(x,y) = (x-a)^{\frac{|p|}{2}}\left[\theta_1(y) + \ln(x-a)\theta_2(y)\right] + \Omega_3\left[\varphi_1(x), \varphi_2(x),\ f(x,y)\right], \quad (3.2.2)$$

где

$$\Omega_3\left[\varphi_1(x), \varphi_2(x),\ f(x,y)\right] = e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\Phi_1(x) + \omega_b^\beta(y)e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\Phi_2(x) + M_{p,\lambda}^{(x,y)}[f(x,y)],$$

Дифференцируя решение интегрального уравнения (2.2.1), равенство (3.2.2), далее умножая на $(x-a)$, получим:

$$D_x u(x,y)=(x-a)\frac{du(x,y)}{dx}=(x-a)^{\frac{|p|}{2}}\left\{\frac{|p|}{2}\theta_1(y)+\left(1+\frac{|p|}{2}\ln(x-a)\right)\theta_2(y)\right\}+D_x\Omega_3\left[\varphi_1(x),\varphi_2(x),\,f(x,y)\right].$$

Из полученных равенств для определения функций $\theta_1(y)$ и $\theta_2(y)$ получим линейную алгебраическую систему уравнений вида:

$$\begin{cases}\theta_1(y)+\ln(x-a)\theta_2(y)=(x-a)^{-\frac{|p|}{2}}\left[u(x,y)-\Omega_3\left[\varphi_1(x),\varphi_2(x),\,f(x,y)\right]\right]\\ \frac{|p|}{2}\theta_1(y)+\left(1+\frac{|p|}{2}\ln(x-a)\right)\theta_2(y)=(x-a)^{-\frac{|p|}{2}}\left[D_x u(x,y)-D_x\Omega_3\left[\varphi_1(x),\varphi_2(x),\,f(x,y)\right]\right]\end{cases}$$

Для решения системы уравнений используем метода Крамера, получим:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & \ln(x-a)\\ \frac{|p|}{2} & 1+\frac{|p|}{2}\ln(x-a)\end{vmatrix}=1$$

$$\Delta_{\theta_1(y)}=\begin{vmatrix}(x-a)^{-\frac{|p|}{2}}\left[u(x,y)-\Omega_3\left[\varphi_1(x),\varphi_2(x),\,f(x,y)\right]\right] & \ln(x-a)\\ (x-a)^{-\frac{|p|}{2}}\left[D_x u(x,y)-D_x\Omega_3\left[\varphi_1(x),\varphi_2(x),\,f(x,y)\right]\right] & 1+\frac{|p|}{2}\ln(x-a)\end{vmatrix}=\theta_1(y),$$

$$\Delta_{\theta_2(y)}=\begin{vmatrix}1 & (x-a)^{-\frac{|p|}{2}}\left[u(x,y)-\Omega_3\left[\varphi_1(x),\varphi_2(x),\,f(x,y)\right]\right]\\ \frac{|p|}{2} & (x-a)^{-\frac{|p|}{2}}\left[D_x u(x,y)-D_x\Omega_3\left[\varphi_1(x),\varphi_2(x),\,f(x,y)\right]\right]\end{vmatrix}=\theta_2(y),$$

$$\begin{cases}\theta_1(y)=\dfrac{\Delta_{\theta_1(y)}}{\Delta}=\mathrm{A}_1(y),\\ \theta_2(y)=\dfrac{\Delta_{\theta_2(y)}}{\Delta}=\mathrm{A}_2(y).\end{cases}\qquad(3.2.3)$$

Аналогичном решение (3.2.1) представим в виде:

$$u(x,y)=e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\Phi_1(x)+\omega_b^\beta(y)e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\Phi_2(x)+\Omega_4\left[\theta_1(y),\theta_2(y),\,f(x,y)\right],\qquad(3.2.4)$$

где

$$\Omega_4\left[\theta_1(y),\theta_2(y),\,f(x,y)\right]=(x-a)^{\frac{|p|}{2}}\left[\theta_1(y)+\ln(x-a)\theta_2(y)\right]+M_{p,\lambda}^{(x,y)}[\,f(x,y)],$$

Вычисляя производную по (3.2.3) и умножая на $(y-b)^\beta$, получим:

$$D_\beta^y u(x,y)=(y-b)^\beta\,\frac{du(x,y)}{dy}=e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\left\{-\frac{\lambda}{2}\Phi_1(x)-\left(1+\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)\right)\Phi_2(x)\right\}+D_\beta^y\Omega_4\left[\theta_1(y),\theta_2(y),\,f(x,y)\right].$$

Из полученных равенств для определения функций $\Phi_1(x)$ и $\Phi_2(x)$ получим линейную алгебраическую систему уравнений вида:

$$\begin{cases}\Phi_1(x)+\omega_b^\beta(y)\Phi_2(x)=e^{-\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\left[u(x,y)-\Omega_4\left[\theta_1(y),\theta_2(y),\,f(x,y)\right]\right],\\ -\dfrac{\lambda}{2}\Phi_1(x)-\left(1+\dfrac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)\right)\Phi_2(x)=e^{-\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\left[D_\beta^y u(x,y)-D_\beta^y\Omega_4\left[\theta_1(y),\theta_2(y),\,f(x,y)\right]\right].\end{cases}$$

После используя метода Крамера, получим:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & \omega_b^\beta(y)\\ -\dfrac{\lambda}{2} & -\left(1+\dfrac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)\right)\end{vmatrix}=-1,$$

$$\Delta_{\Phi_1(x)}=\begin{vmatrix}e^{-\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\left[u(x,y)-\Omega_4\left[\theta_1(y),\theta_2(y),\,f(x,y)\right]\right] & \omega_b^\beta(y)\\ e^{-\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\left[D_\beta^y u(x,y)-D_\beta^y\Omega_4\left[\theta_1(y),\theta_2(y),\,f(x,y)\right]\right] & -\left(1+\dfrac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)\right)\end{vmatrix}=-\Phi_1(x),$$

$$\Delta_{\Phi_2(x)}=\begin{vmatrix}1 & e^{-\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\left[u(x,y)-\Omega_4\left[\theta_1(y),\theta_2(y),\,f(x,y)\right]\right]\\ -\dfrac{\lambda}{2} & e^{-\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\left[D_\beta^y u(x,y)-D_\beta^y\Omega_4\left[\theta_1(y),\theta_2(y),\,f(x,y)\right]\right]\end{vmatrix}=-\Phi_2(x),$$

$$\begin{cases}\Phi_1(x)=\dfrac{\Delta_{\Phi_1(x)}}{\Delta}=\mathrm{B}_1(x),\\ \Phi_2(x)=\dfrac{\Delta_{\Phi_2(x)}}{\Delta}=\mathrm{B}_2(x).\end{cases}\tag{3.2.5}$$

Итак, доказана:

Теорема 3.2.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.2.1. Т*огда задача* **К$_{3.2.1}$** *разрешима и её единственное решение выражается равенством*:

$$u(x,y)=(x-a)^{\frac{|p|}{2}}\left[\mathrm{A}_1(y)+\ln(x-a)\mathrm{A}_2(y)\right]+e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\mathrm{B}_1(x)+\omega_b^\beta(y)e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\mathrm{B}_2(x)+M_{p,\lambda}^{(x,y)}[f(x,y)].\tag{3.2.6}$$

На основе равенств (3.2.3), (3.2.5) справедлива теорема:

Задача К$_{3.2.2.}$ *Найти решение интегрального уравнения Вольтерра* (2.1.1) *из класса* $C(\overline{D})$, *которое обращается в нуль на* Γ_1 *и* Γ_2, *если* $p<0,\lambda>0$, $\Delta_1=p^2-4q=0$, $\Delta_2=\lambda^2-4\mu=0$, *по условиям*:

$$\begin{cases} \left\{ (x-a)^{-\frac{|p|}{2}} \left[\left(1+\frac{|p|}{2}\ln(x-a) \right) u(x,y) - \ln(x-a) D_x\left(u(x,y)\right) \right] \right\}_{x=a} = \mathrm{A}_1(y), \\ \left\{ (x-a)^{-\frac{|p|}{2}} \left[D_x\left(u(x,y)\right) - \frac{|p|}{2} u(x,y) \right] \right\}_{x=a} = \mathrm{A}_2(y), \end{cases}$$

где $\mathrm{A}_1(y), \mathrm{A}_2(y)$ – *заданные произвольные непрерывные функции.*

На основе равенства (3.2.3) справедлива теорема:

Теорема 3.2.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.2.2. Т*огда задача* **К$_{3.2.2}$** *разрешима и её единственное решение выражается равенством*:

$$u(x,y) = (x-a)^{\frac{|p|}{2}} \left[\mathrm{A}_1(y) + \ln(x-a)\mathrm{A}_2(y) \right] + M_{p,\lambda}^{(x,y)}[f(x,y)]. \tag{3.2.7}$$

Задача К$_{3.2.3}$. *Найти решение интегрального уравнения Вольтерра* (2.1.1) *из класса* $C(\overline{D})$, *которое обращается в нуль на* Γ_1 *и* Γ_2, *если* $p > 0, \lambda < 0$, $\Delta_1 = p^2 - 4q = 0$, $\Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu = 0$, *по условиям*:

$$\begin{cases} \left\{ e^{-\frac{\lambda}{2}\omega_b^{\beta}(y)} \left[-\left(1+\frac{\lambda}{2}\omega_b^{\beta}(y) \right) u(x,y) - \omega_b^{\beta}(y) D_{\beta}^{y}\left(u(x,y)\right) \right] \right\}_{y=b} = \mathrm{B}_1(x), \\ \left\{ e^{-\frac{\lambda}{2}\omega_b^{\beta}(y)} \left[\frac{\lambda}{2} u(x,y) + D_{\beta}^{y}\left(u(x,y)\right) \right] \right\}_{y=b} = \mathrm{B}_2(x), \end{cases}$$

где $\mathrm{B}_1(x), \mathrm{B}_2(x)$ – *заданные произвольные непрерывные функции.*

На основе равенства (3.2.5) справедлива теорема:

Теорема 3.2.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.2.3. Т*огда задача* **К$_{3.2.3}$** *разрешима и её единственное решение выражается равенством*:

$$u(x,y) = e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^{\beta}(y)} \mathrm{B}_1(x) + \omega_b^{\beta}(y) e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^{\beta}(y)} \mathrm{B}_2(x) + M_{p,\lambda}^{(x,y)}[f(x,y)]. \tag{3.2.8}$$

§3.3. Случай, когда корни характеристических уравнений комплексно-сопряжённые: $\Delta_1 = p^2 - 4q < 0,\ \Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu < 0$

Задача К$_{3.3.1}$. *Найти решение интегрального уравнения Вольтерра* (2.1.1) *из класса* $C(\overline{D})$, *которое обращается в нуль на* Γ_1 *и* Γ_2, *если* $\lambda < 0$, $p < 0$, $\Delta_1 = p^2 - 4q < 0$, $\Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu < 0$, *по условиям*:

$$\begin{cases} \left\{ (x-a)^{-\frac{|p|}{2}} \left[\left(\frac{|p|}{2} \sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2} \ln(x-a) \right) + \frac{\sqrt{4q-p^2}}{2} \cos\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2} \ln(x-a) \right) \right) u(x,y) - \sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2} \ln(x-a) \right) D_x\left(u(x,y)\right) \right] \right\}_{x=a} = \mathrm{A}_1(y), \\ \left\{ (x-a)^{-\frac{|p|}{2}} \left[\cos\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2} \ln(x-a) \right) D_x\left(u(x,y)\right) - \left(\frac{|p|}{2} \cos\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2} \ln(x-a) \right) - \frac{\sqrt{4q-p^2}}{2} \sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2} \ln(x-a) \right) \right) u(x,y) \right] \right\}_{x=a} = \mathrm{A}_2(y), \\ \left\{ e^{-\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)} \left[\left(\frac{\lambda}{2} \sin\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2} \omega_b^\beta(y) \right) + \frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2} \cos\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2} \omega_b^\beta(y) \right) \right) u(x,y) + \sin\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2} \omega_b^\beta(y) \right) D_x\left(u(x,y)\right) \right] \right\}_{y=b} = \mathrm{B}_1(x), \\ \left\{ e^{-\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)} \left[\cos\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2} \omega_b^\beta(y) \right) D_x\left(u(x,y)\right) + \left(\frac{\lambda}{2} \cos\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2} \omega_b^\beta(y) \right) - \frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2} \sin\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2} \omega_b^\beta(y) \right) \right) u(x,y) \right] \right\}_{y=b} = \mathrm{B}_2(x), \end{cases}$$

где $\mathrm{B}_1(x), \mathrm{B}_2(x), \mathrm{A}_1(y), \mathrm{A}_2(y)$ – *заданные произвольные непрерывные функции.*

Решение задача $К_{3.3.1}$:

Согласно [57]-[58], решение интегрального уравнения (2.1.1) при:

$p < 0, \lambda < 0,\ \Delta_1 = p^2 - 4q < 0,\ \Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu < 0,\ p = p_1, q = q_1, \lambda = \lambda_1, \mu = \mu_1,$

имеет вид:

$$u(x,y) = (x-a)^{\frac{|p|}{2}} \left\{ \cos\left[\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2} \ln(x-a) \right] \theta_1(y) + \sin\left[\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2} \ln(x-a) \right] \theta_2(y) \right\} + \\ + e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)} \left[\cos\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2} \omega_b^\beta(y) \right) \Phi_1(x) + \sin\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2} \omega_b^\beta(y) \right) \Phi_2(x) \right] + E_{p,q,\lambda,\mu}^{(x,y)}[f(x,y)], \qquad (3.3.1)$$

$E_{p,q,\lambda,\mu}^{(x,y)}[f(x,y)], \Phi_1(x), \Phi_2(x)$ – соответственно определены из равенством (2.2.13), (2.2.11), (2.2.12).

Решение (3.3.1) представим в виде:

$$u(x,y) = (x-a)^{\frac{|p|}{2}} \left\{ \cos\left[\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2} \ln(x-a) \right] \theta_1(y) + \sin\left[\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2} \ln(x-a) \right] \theta_2(y) \right\} + \\ + \Omega_5\left[\varphi_1(x), \varphi_2(x), f(x,y)\right], \qquad (3.3.2)$$

где

$$\Omega_5\left[\varphi_1(x), \varphi_2(x), f(x,y)\right] = e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)} \left[\cos\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2} \omega_b^\beta(y) \right) \Phi_1(x) + \sin\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2} \omega_b^\beta(y) \right) \Phi_2(x) \right] + \\ + E_{p,q,\lambda,\mu}^{(x,y)}[f(x,y)],$$

Вычисляя производную по (3.2.2), далее умножая на $(x-a)$, получим:

$$D_x u(x,y) = (x-a)\frac{du(x,y)}{dx} =$$

$$= (x-a)^{\frac{|p|}{2}}\left\{\frac{|p|}{2}\cos\left[\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right) - \frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)\right]\theta_1(y) + \left[\frac{|p|}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right) + \frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)\right]\theta_2(y)\right\} +$$

$$+\Omega_5\left[\varphi_1(x),\varphi_2(x), f(x,y)\right].$$

Из полученных равенств для определения функций $\theta_1(y)$ и $\theta_2(y)$ получим линейную алгебраическую систему уравнений вида:

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)\theta_1(y) + \sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)\theta_2(y) = (x-a)^{-\frac{|p|}{2}}\left[u(x,y) - \Omega_5\left[\varphi_1(x),\varphi_2(x), f(x,y)\right]\right], \\ \frac{|p|}{2}\cos\left[\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right) - \frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)\right]\theta_1(y) + \left[\frac{|p|}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right) + \frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)\right]\theta_2(y) = \\ = (x-a)^{-\frac{|p|}{2}}\left[D_x u(x,y) - D_x\Omega_5\left[\varphi_1(x),\varphi_2(x), f(x,y)\right]\right], \end{cases}$$

Для решения системы уравнений используем метода Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right) & \sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right) \\ \frac{|p|}{2}\cos\left[\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right) - \frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)\right] & \frac{|p|}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right) + \frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right) \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{4q-p^2}}{2},$$

$$\Delta_{\theta_1(y)} = \begin{vmatrix} (x-a)^{-\frac{|p|}{2}}\left[u(x,y) - \Omega_5\left[\varphi_1(x),\varphi_2(x), f(x,y)\right]\right] & \sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right) \\ (x-a)^{-\frac{|p|}{2}}\left[D_x u(x,y) - D_x\Omega_5\left[\varphi_1(x),\varphi_2(x), f(x,y)\right]\right] & \frac{|p|}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right) + \frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right) \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\theta_1(y),$$

$$\Delta_{\theta_2(y)} = \begin{vmatrix} \cos\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right) & (x-a)^{-\frac{|p|}{2}}\left[u(x,y) - \Omega_5\left[\varphi_1(x),\varphi_2(x), f(x,y)\right]\right] \\ \frac{|p|}{2}\cos\left[\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right) - \frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)\right] & (x-a)^{-\frac{|p|}{2}}\left[D_x u(x,y) - D_x\Omega_5\left[\varphi_1(x),\varphi_2(x), f(x,y)\right]\right] \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\theta_2(y),$$

$$\begin{cases} \theta_1(y) = \dfrac{\Delta_{\theta_1(y)}}{\Delta} = \dfrac{\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\theta_1(y)}{\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}} = \mathrm{A}_1(y), \\ \theta_2(y) = \dfrac{\Delta_{\theta_2(y)}}{\Delta} = \dfrac{\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\theta_2(y)}{\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}} = \mathrm{A}_2(y). \end{cases} \tag{3.3.3}$$

Аналогичном решение (3.3.1) представим в виде:

$$u(x,y)=e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\left[\cos\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right)\Phi_1(x)+\sin\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right)\Phi_2(x)\right]+\Omega_6[\theta_1(y),\theta_2(y),\,f(x,y)],\quad (3.3.4)$$

где

$$\Omega_6[\theta_1(y),\theta_2(y),\,f(x,y)]=(x-a)^{\frac{|p|}{2}}\left\{\cos\left[\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right]\theta_1(y)+\sin\left[\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right]\theta_2(y)\right\}+$$

$$+E^{(x,y)}_{p,q,\lambda,\mu}[\,f(x,y)],$$

Вычисляя производную по (3.3.4) и умножая на $(y-b)^\beta$, получим:

$$D_\beta^y u(x,y)=(y-b)^\beta\,\frac{du(x,y)}{dy}=e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\times$$

$$\times\left\{\left[\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right)-\frac{\lambda}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right)\right]\Phi_1(x)-\left[\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right)+\frac{\lambda}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right)\right]\Phi_2(x)\right\}+$$

$$+D_\beta^y\Omega_6\left[\theta_1(y),\theta_2(y),\,f(x,y)\right].$$

Из полученных равенств для определения произвольных функций $\Phi_1(x)$ и $\Phi_2(x)$ получим линейную алгебраическую систему уравнений вида:

$$\begin{cases}\cos\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right)\Phi_1(x)+\sin\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right)\Phi_2(x)=e^{-\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\left[u(x,y)-\Omega_6\left[\theta_1(y),\theta_2(y),\,f(x,y)\right]\right],\\ \left[\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right)-\frac{\lambda}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right)\right]\Phi_1(x)-\\ -\left[\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right)+\frac{\lambda}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right)\right]\Phi_2(x)=e^{-\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\left[D_\beta^y u(x,y)-D_\beta^y\Omega_6\left[\theta_1(y),\theta_2(y),\,f(x,y)\right]\right].\end{cases}$$

Для определения неизвестных $\Phi_1(x)$ и $\Phi_2(x)$ используем метод Крамера:

$$\Delta=\begin{vmatrix}\cos\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right) & \sin\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right)\\ \frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right)-\frac{\lambda}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right) & -\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right)-\frac{\lambda}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right)\end{vmatrix}=-\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2},$$

$$\Delta_{\Phi_1(x)}=\begin{vmatrix}e^{-\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\left[u(x,y)-\Omega_6\left[\theta_1(y),\theta_2(y),\,f(x,y)\right]\right] & \sin\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right)\\ e^{-\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\left[D_\beta^y u(x,y)-D_\beta^y\Omega_6\left[\theta_1(y),\theta_2(y),\,f(x,y)\right]\right] & -\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right)-\frac{\lambda}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right)\end{vmatrix}=-\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\Phi_1(x),$$

$$\Delta_{\Phi_2(x)} = \begin{vmatrix} \cos\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right) & e^{-\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\left[u(x,y)-\Omega_6\left[\theta_1(y),\theta_2(y),f(x,y)\right]\right] \\ \frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right)-\frac{\lambda}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right) & e^{-\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\left[D_\beta^y u(x,y)-D_\beta^y\Omega_6\left[\theta_1(y),\theta_2(y),f(x,y)\right]\right] \end{vmatrix} = -\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\Phi_2(x),$$

$$\begin{cases} \Phi_1(x) = \dfrac{\Delta_{\Phi_1(x)}}{\Delta} = \mathrm{B}_1(x), \\ \Phi_2(x) = \dfrac{\Delta_{\Phi_2(x)}}{\Delta} = \mathrm{B}_2(x). \end{cases} \tag{3.3.5}$$

Итак, доказана:

Теорема 3.3.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.3.1. Т*огда задача* **К$_{3.3.1}$** *разрешима и её единственное решение выражается равенством*:

$$\begin{gathered} u(x,y) = (x-a)^{\frac{|p|}{2}}\left\{\cos\left[\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right]\mathrm{A}_1(y)+\sin\left[\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right]\mathrm{A}_2(y)\right\}+ \\ +e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\left[\cos\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right)\mathrm{B}_1(x)+\sin\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right)\mathrm{B}_2(x)\right]+E_{p,q,\lambda,\mu}^{(x,y)}[f(x,y)]. \end{gathered} \tag{3.3.6}$$

Задача К$_{3.3.2.}$ *Найти решение интегрального уравнения Вольтерра* (2.1.1) *из класса* $C(\overline{D})$, *которое обращается в нуль на* Γ_1 *и* Γ_2, *если* $\lambda > 0$, $p < 0$, $\Delta_1 = \lambda^2 - 4\mu < 0$, $\Delta_2 = p^2 - 4q < 0$, *по условиям*:

$$\begin{cases} \left\{(x-a)^{-\frac{|p|}{2}}\left[\left(\frac{|p|}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)+\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)\right)u(x,y)-\sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)D_x\left(u(x,y)\right)\right]\right\}_{x=a} = \mathrm{A}_1(y), \\ \left\{(x-a)^{-\frac{|p|}{2}}\left[\cos\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)D_x\left(u(x,y)\right)-\left(\frac{|p|}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)-\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)\right)u(x,y)\right]\right\}_{x=a} = \mathrm{A}_2(y), \end{cases}$$

где $\mathrm{A}_1(y), \mathrm{A}_2(y)$ – *заданные произвольные непрерывные функции.*

На основе равенства (3.3.3) справедлива теорема:

Теорема 3.3.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.3.2. Т*огда задача* **К$_{3.3.2}$** *разрешима и её единственное решение выражается равенством*:

$$u(x,y) = (x-a)^{\frac{|p|}{2}}\left\{\cos\left[\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right]\mathrm{A}_1(y)+\sin\left[\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right]\mathrm{A}_2(y)\right\}+E_{p,q,\lambda,\mu}^{(x,y)}[f(x,y)]. \tag{3.3.7}$$

Задача К$_{3.3.3.}$ *Найти решение интегрального уравнения Вольтерра* (2.1.1) *из класса* $C(\overline{D})$, *которое обращается в нуль на* Γ_1 *и* Γ_2, *если* $\lambda<0$, $p>0$, $\Delta_1=\lambda^2-4\mu<0$, $\Delta_2=p^2-4q<0$, *по условиям*:

$$\begin{cases}\left\{e^{-\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\left(\left(\frac{\lambda}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right)+\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right)\right)u(x,y)+\sin\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right)D_x\left(u(x,y)\right)\right)\right\}_{y=b}=\mathrm{B}_1(x),\\ \left\{e^{-\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right)D_x\left(u(x,y)\right)+\left(\frac{\lambda}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right)-\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right)\right)u(x,y)\right)\right\}_{y=b}=\mathrm{B}_2(x),\end{cases}$$

где $\mathrm{B}_1(x),\mathrm{B}_2(x)$ – *заданные произвольные непрерывные функции.*

На основе равенства (3.3.5) справедлива теорема:

Теорема 3.3.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.3.3. Т*огда задача* **К$_{3.3.3}$** *разрешима и её единственное решение выражается равенством*:

$$u(x,y)=e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\left[\cos\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right)\mathrm{B}_1(x)+\sin\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right)\mathrm{B}_2(x)\right]+E_{p,q,\lambda,\mu}^{(x,y)}[f(x,y)]. \quad (3.3.8)$$

§3.4. Случай, когда корни характеристических уравнений вещественные, разные и равные: $\Delta_1=p^2-4q>0$, $\Delta_2=\lambda^2-4\mu=0$

Задача К$_{3.4.1.}$ *Найти решение интегрального уравнения Вольтерра* (2.1.1) *из класса* $C(\overline{D})$, *которое обращается в нуль на* Γ_1 *и* Γ_2, *если* $p<0,\ q>0, \lambda<0,\ \Delta_1=p^2-4q>0$, $\Delta_2=\lambda^2-4\mu=0$, *по условиям*:

$$\begin{cases}\left\{(x-a)^{-\gamma_1}\left[\gamma_2u(x,y)-D_xu(x,y)\right]\right\}_{x=a}=\mathrm{A}_1(y),\\ \left\{(x-a)^{-\gamma_2}\left[-\gamma_1u(x,y)+D_xu(x,y)\right]\right\}_{x=a}=\mathrm{A}_2(y),\\ \left\{e^{-\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\left[-\left(1+\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)\right)u(x,y)-\omega_b^\beta(y)D_\beta^y\left(u(x,y)\right)\right]\right\}_{y=b}=\mathrm{B}_1(x),\\ \left\{e^{-\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\left[\frac{\lambda}{2}u(x,y)+D_\beta^y\left(u(x,y)\right)\right]\right\}_{y=b}=\mathrm{B}_2(x),\end{cases}$$

где $\mathrm{B}_1(x),\mathrm{B}_2(x),\mathrm{A}_1(y),\mathrm{A}_2(y)$ – *заданные произвольные непрерывные функции.*

На основе свойств (3.1.2), (3.1.4) и равенств (3.2.3), (3.2.5) справедлива теорема:

Теорема 3.4.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.4.1. *Тогда задача* **К$_{3.4.1}$** *разрешима и её единственное решение выражается равенством*:

$$u(x,y)=\frac{\mathrm{A}_1(y)}{\gamma_2-\gamma_1}(x-a)^{\gamma_1}+\frac{\mathrm{A}_2(y)}{\gamma_2-\gamma_1}(x-a)^{\gamma_2}+e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\mathrm{B}_1(x)+\omega_b^\beta(y)e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\mathrm{B}_2(x)+K_{p,q,\lambda}\left[f(x,y)\right]. \quad (3.4.1)$$

Задача К$_{3.4.2.}$ *Найти решение интегрального уравнения Вольтерра* (2.1.1) *из класса* $C(\overline{D})$, *которое обращается в нуль на* Γ_1 *и* Γ_2, *если* $p<0,\ q>0, \lambda>0,\ \Delta_1=p^2-4q>0, \Delta_2=\lambda^2-4\mu=0$, *по условиям*:

$$\begin{cases}\left[(x-a)^{-\gamma_1}\left[\gamma_2 u(x,y)-D_x u(x,y)\right]\right]_{x=a}=\mathrm{A}_1(y),\\ \left[(x-a)^{-\gamma_2}\left[-\gamma_1 u(x,y)+D_x u(x,y)\right]\right]_{x=a}=\mathrm{A}_2(y),\end{cases}$$

где $\mathrm{A}_1(y), \mathrm{A}_2(y)$ – *заданные произвольные непрерывные функции.*

На основе свойств (3.1.2), (3.1.4) справедлива теорема:

Теорема 3.4.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.4.2. *Тогда задача* **К$_{3.4.2}$** *разрешима и её единственное решение выражается равенством*:

$$u(x,y)=\frac{\mathrm{A}_1(y)}{\gamma_2-\gamma_1}(x-a)^{\gamma_1}+\frac{\mathrm{A}_2(y)}{\gamma_2-\gamma_1}(x-a)^{\gamma_2}+K_{p,q,\lambda}\left[f(x,y)\right]. \quad (3.4.2)$$

Задача К$_{3.4.3.}$ *Найти решение интегрального уравнения Вольтерра* (2.1.1) *из класса* $C(\overline{D})$, *которое обращается в нуль на* Γ_1 *и* Γ_2, *если* $p>0, q<0, \lambda<0,\ \Delta_1=p^2-4q>0, \Delta_2=\lambda^2-4\mu=0$, *по условиям*:

$$\begin{cases}\left[(x-a)^{-\gamma_3}u(x,y)\right]_{x=a}=\mathrm{A}_3(y),\\ \left\{e^{-\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\left[-\left(1+\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)\right)u(x,y)-\omega_b^\beta(y)D_\beta^y\left(u(x,y)\right)\right]\right\}_{y=b}=\mathrm{B}_1(x),\\ \left\{e^{-\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\left[\frac{\lambda}{2}u(x,y)+D_\beta^y\left(u(x,y)\right)\right]\right\}_{y=b}=\mathrm{B}_2(x),\end{cases}$$

где $\mathrm{B}_1(x), \mathrm{B}_2(x), \mathrm{A}_3(y)$ – *заданные произвольные непрерывные функции.*

На основе свойства (3.1.2) и равенств (3.2.3), (3.2.5) справедлива теорема:

Теорема 3.4.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.4.3. *Тогда задача* **К$_{3.4.3}$** *разрешима и её единственное решение выражается равенством*:

$$u(x,y)=\frac{\mathrm{A}_3(y)}{\gamma_2-\gamma_1}(x-a)^{\gamma_3}+e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\mathrm{B}_1(x)+\omega_b^\beta(y)e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\mathrm{B}_2(x)+K_{p,q,\lambda}[f(x,y)]. \quad (3.4.3)$$

Задача К$_{3.4.4}$. *Найти решение интегрального уравнения Вольтерра* (2.1.1) *из класса* $C(\overline{D})$, *которое обращается в нуль на* Γ_1 *и* Γ_2, *если* $p>0, q<0, \lambda>0$, $\Delta_1=p^2-4q>0$, $\Delta_2=\lambda^2-4\mu=0$, *по условиям*:

$$\left[(x-a)^{-\gamma_3}u(x,y)\right]_{x=a}=\mathrm{A}_3(y),$$

где $\mathrm{A}_3(y)$ – *заданная произвольная непрерывная функция.*

На основе свойства (3.1.2) справедлива теорема:

Теорема 3.4.4. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.4.4. Т*огда задача* **К$_{3.4.4}$** *разрешима и её единственное решение выражается равенством*:

$$u(x,y)=\frac{\mathrm{A}_3(y)}{\gamma_2-\gamma_1}(x-a)^{\gamma_3}+K_{p,q,\lambda}[f(x,y)]. \quad (3.4.4)$$

Задача К$_{3.4.5}$. *Найти решение интегрального уравнения Вольтерра* (2.1.1) *из класса* $C(\overline{D})$, *которое обращается в нуль на* Γ_1 *и* Γ_2, *если* $p<0, q<0, \lambda<0$, $\Delta_1=p^2-4q>0$, $\Delta_2=\lambda^2-4\mu=0$, *по условиям*:

$$\begin{cases}\left\{(x-a)^{-\gamma_4}u(x,y)\right\}_{x=a}=\mathrm{A}_4(y),\\ \left\{e^{-\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\left[-\left(1+\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)\right)u(x,y)-\omega_b^\beta(y)D_\beta^y\left(u(x,y)\right)\right]\right\}_{y=b}=\mathrm{B}_1(x),\\ \left\{e^{-\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\left[\frac{\lambda}{2}u(x,y)+D_\beta^y\left(u(x,y)\right)\right]\right\}_{y=b}=\mathrm{B}_2(x),\end{cases}$$

где $\mathrm{B}_1(x),\mathrm{B}_2(x),\mathrm{A}_4(y)$ – *заданные произвольные непрерывные функции.*

На основе свойства (3.1.4) и равенств (3.2.3), (3.2.5) справедлива теорема:

Теорема 3.4.5. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.4.5. Т*огда задача* **К$_{3.4.5}$** *разрешима и её единственное решение выражается равенством*:

$$u(x,y)=\frac{\mathrm{A}_4(y)}{\gamma_2-\gamma_1}(x-a)^{\gamma_4}+e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\mathrm{B}_1(x)+\omega_b^\beta(y)e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\mathrm{B}_2(x)+K_{p,q,\lambda}[f(x,y)]. \quad (3.4.5)$$

Задача К$_{3.4.6}$. *Найти решение интегрального уравнения Вольтерра* (2.1.1) *из класса* $C(\overline{D})$, *которое обращается в нуль на* Γ_1 *и* Γ_2, *если* $p < 0, q < 0, \lambda > 0$, $\Delta_1 = p^2 - 4q > 0$, $\Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu = 0$, *по условиям*:

$$\left[(x-a)^{-\gamma_4} u(x,y)\right]_{x=a} = \mathrm{A}_4(y),$$

где $\mathrm{A}_4(y)$ – *заданная произвольная непрерывная функция.*

На основе свойства (3.1.4) справедлива теорема:

Теорема 3.4.6. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.4.6. Т*огда задача* **К$_{3.4.6}$** *разрешима и её единственное решение выражается равенством*:

$$u(x,y) = \frac{\mathrm{A}_4(y)}{\gamma_2 - \gamma_1}(x-a)^{\gamma_4} + K_{p,q,\lambda}[f(x,y)]. \tag{3.4.6}$$

Задача К$_{3.4.7}$. *Найти решение интегрального уравнения Вольтерра* (2.1.1) *из класса* $C(\overline{D})$, *которое обращается в нуль на* Γ_1 *и* Γ_2, *если* $p > 0, q > 0, \lambda < 0$, $\Delta_1 = p^2 - 4q > 0$, $\Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu = 0$, *по условиям*:

$$\begin{cases} \left\{ e^{-\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)} \left[-\left(1 + \frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)\right) u(x,y) - \omega_b^\beta(y) D_\beta^y \left(u(x,y)\right) \right] \right\}_{y=b} = \mathrm{B}_1(x), \\ \left\{ e^{-\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)} \left[\frac{\lambda}{2} u(x,y) + D_\beta^y \left(u(x,y)\right) \right] \right\}_{y=b} = \mathrm{B}_2(x), \end{cases}$$

где $\mathrm{B}_1(x), \mathrm{B}_2(x)$ – *заданные произвольные непрерывные функции.*

На основе равенств (3.2.3), (3.2.5) справедлива теорема:

Теорема 3.4.7. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.4.7. Т*огда задача* **К$_{3.4.7}$** *разрешима и её единственное решение выражается равенством*:

$$u(x,y) = e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\mathrm{B}_1(x) + \omega_b^\beta(y) e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\mathrm{B}_2(x) + K_{p,q,\lambda}[f(x,y)]. \tag{3.4.7}$$

§3.5. Случай, когда корни характеристических уравнений вещественные, разные и комплексно-сопряжённые: $\Delta_1 = p^2 - 4q > 0$, $\Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu < 0$

Задача К$_{3.5.1.}$ *Найти решение интегрального уравнения Вольтерра* (2.1.1) *из класса* $C(\overline{D})$, *которое обращается в нуль на* Γ_1 *и* Γ_2, *если* $p < 0, q > 0, \lambda < 0$, $\Delta_1 = p^2 - 4q > 0$, $\Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu < 0$, *по условиям*:

$$\begin{cases} \left[(x-a)^{-\gamma_1}\left(\gamma_2 u(x,y) - D_x u(x,y)\right)\right]_{x=a} = \mathrm{A}_1(y), \\ \left[(x-a)^{-\gamma_2}\left(-\gamma_1 u(x,y) + D_x u(x,y)\right)\right]_{x=a} = \mathrm{A}_2(y), \\ \left\{ e^{-\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\left(\frac{\lambda}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right) + \frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right)\right) u(x,y) + \sin\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right) D_x\left(u(x,y)\right)\right\}_{y=b} = \mathrm{B}_1(x), \\ \left\{ e^{-\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\cos\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right) D_x\left(u(x,y)\right) + \left(\frac{\lambda}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right) - \frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right)\right) u(x,y)\right\}_{y=b} = \mathrm{B}_2(x), \end{cases}$$

где $\mathrm{B}_1(x), \mathrm{B}_2(x), \mathrm{A}_1(y), \mathrm{A}_2(y)$ – *заданные произвольные непрерывные функции*.

На основе свойств (3.1.2), (3.1.4) и равенств (3.3.3), (3.3.5) справедлива теорема:

Теорема 3.5.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.5.1. Т*огда задача* **К$_{3.5.1}$** *разрешима и её единственное решение выражается равенством*:

$$\begin{gathered} u(x,y) = \frac{\mathrm{A}_1(y)}{\gamma_2 - \gamma_1}(x-a)^{\gamma_1} + \frac{\mathrm{A}_2(y)}{\gamma_2 - \gamma_1}(x-a)^{\gamma_2} + e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\cos\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right)\mathrm{B}_1(x) + \\ + e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\sin\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right)\mathrm{B}_2(x) + K_{p,q,\lambda}\left[f(x,y)\right]. \end{gathered} \tag{3.5.1}$$

Задача К$_{3.5.2.}$ *Найти решение интегрального уравнения Вольтерра* (2.1.1) *из класса* $C(\overline{D})$, *которое обращается в нуль на* Γ_1 *и* Γ_2, *если* $p < 0, q > 0, \lambda > 0$, $\Delta_1 = p^2 - 4q > 0$, $\Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu < 0$, *по условиям*:

$$\begin{cases} \left[(x-a)^{-\gamma_1}\left(\gamma_2 u(x,y) - D_x u(x,y)\right)\right]_{x=a} = \mathrm{A}_1(y), \\ \left[(x-a)^{-\gamma_2}\left(-\gamma_1 u(x,y) + D_x u(x,y)\right)\right]_{x=a} = \mathrm{A}_2(y), \end{cases}$$

где $\mathrm{A}_1(y), \mathrm{A}_2(y)$ – *заданные произвольные непрерывные функции.*

На основе свойств (3.1.2), (3.1.4) справедлива теорема:

Теорема 3.5.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.5.2. Т*огда задача* **К$_{3.5.2}$** *разрешима и её единственное решение выражается равенством*:

$$u(x,y)=\frac{\mathrm{A}_1(y)}{\gamma_2-\gamma_1}(x-a)^{\gamma_1}+\frac{\mathrm{A}_2(y)}{\gamma_2-\gamma_1}(x-a)^{\gamma_2}+K_{p,q,\lambda}\left[f(x,y)\right]. \tag{3.5.2}$$

Задача К$_{3.5.3}$. *Найти решение интегрального уравнения Вольтерра* (2.1.1) *из класса* $C(\overline{D})$, *которое обращается в нуль на* Γ_1 *и* Γ_2, *если* $p>0, q<0, \lambda<0,\ \Delta_1=p^2-4q>0,\ \Delta_2=\lambda^2-4\mu<0,$ *по условиям*:

$$\begin{cases}\left[(x-a)^{-\gamma_3}u(x,y)\right]_{x=a}=\mathrm{A}_3(y),\\ \left\{e^{-\frac{\lambda}{2}\omega_b^{\beta}(y)}\left(\frac{\lambda}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^{\beta}(y)\right)+\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^{\beta}(y)\right)\right)u(x,y)+\sin\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^{\beta}(y)\right)D_x\left(u(x,y)\right)\right\}_{y=b}=\mathrm{B}_1(x),\\ \left\{e^{-\frac{\lambda}{2}\omega_b^{\beta}(y)}\cos\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^{\beta}(y)\right)D_x\left(u(x,y)\right)+\left(\frac{\lambda}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^{\beta}(y)\right)-\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^{\beta}(y)\right)\right)u(x,y)\right\}_{y=b}=\mathrm{B}_2(x),\end{cases}$$

где $\mathrm{B}_1(x), \mathrm{B}_2(x), \mathrm{A}_3(y)$ – *заданные заданные произвольные непрерывные функции.*

На основе свойства (3.1.2) и равенств (3.3.3), (3.3.5) справедлива теорема:

Теорема 3.5.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.5.3. Т*огда задача* **К$_{3.5.3}$** *разрешима и её единственное решение выражается равенством*:

$$u(x,y)=\frac{\mathrm{A}_3(y)}{\gamma_2-\gamma_1}(x-a)^{\gamma_3}+e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^{\beta}(y)}\cos\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^{\beta}(y)\right)\mathrm{B}_1(x)+e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^{\beta}(y)}\sin\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^{\beta}(y)\right)\mathrm{B}_2(x)+K_{p,q,\lambda}\left[f(x,y)\right]. \tag{3.5.3}$$

Задача К$_{3.5.4}$. *Найти решение интегрального уравнения Вольтерра* (2.1.1) *из класса* $C(\overline{D})$, *которое обращается в нуль на* Γ_1 *и* Γ_2, *если* $p>0, q<0, \lambda>0,\ \Delta_1=p^2-4q>0,\ \Delta_2=\lambda^2-4\mu<0,$ *по условиям*:

$$\left[(x-a)^{-\gamma_3}u(x,y)\right]_{x=a}=\mathrm{A}_3(y),$$

где $\mathrm{A}_3(y)$ – *заданная произвольная непрерывная функция.*

На основе свойства (3.1.2) справедлива теорема:

Теорема 3.5.4. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.5.4. Т*огда задача* **К$_{3.5.4}$** *разрешима и её единственное решение выражается равенством*:

$$u(x,y)=\frac{A_3(y)}{\gamma_2-\gamma_1}(x-a)^{\gamma_3}+K_{p,q,\lambda}\left[f(x,y)\right]. \qquad (3.5.4)$$

Задача К$_{3.5.5}$. *Найти решение интегрального уравнения Вольтерра* (2.1.1) *из класса* $C(\overline{D})$, *которое обращается в нуль на* Г$_1$ *и* Г$_2$, *если* $p<0,\ q<0,\ \lambda<0,\ \Delta_1=p^2-4q>0,\ \Delta_2=\lambda^2-4\mu<0,$ *по условиям*:

$$\begin{cases}\left[(x-a)^{-\gamma_4}u(x,y)\right]_{x=a}=A_4(y),\\ \left\{e^{-\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\left(\frac{\lambda}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right)+\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right)\right)u(x,y)+\sin\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right)D_x\left(u(x,y)\right)\right\}_{y=b}=B_1(x),\\ \left\{e^{-\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\cos\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right)D_x\left(u(x,y)\right)+\left(\frac{\lambda}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right)-\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right)\right)u(x,y)\right\}_{y=b}=B_2(x),\end{cases}$$

где $B_1(x), B_2(x), A_4(y)$ – *заданные произвольные непрерывные функции.*

На основе свойства (3.1.4) и равенств (3.3.3), (3.3.5) справедлива теорема:

Теорема 3.5.5. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.5.5. Т*огда задача* **К$_{3.5.5}$** *разрешима и её единственное решение выражается равенством*:

$$u(x,y)=\frac{A_4(y)}{\gamma_2-\gamma_1}(x-a)^{\gamma_4}+e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\cos\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right)B_1(x)+e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\sin\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right)B_2(x)+K_{p,q,\lambda}\left[f(x,y)\right]. \qquad (3.5.5)$$

Задача К$_{3.5.6}$. *Найти решение интегрального уравнения Вольтерра* (2.1.1) *из класса* $C(\overline{D})$, *которое обращается в нуль на* Г$_1$ *и* Г$_2$, *если* $p<0,\ q<0,\ \lambda>0,\ \Delta_1=p^2-4q>0,\ \Delta_2=\lambda^2-4\mu<0,$ *по условиям*:

$$\left[(x-a)^{-\gamma_4}u(x,y)\right]_{x=a}=A_4(y)\ ,$$

где $A_4(y)$ – *заданная произвольная непрерывная функция.*

На основе свойства (3.1.4) справедлива теорема:

Теорема 3.5.6. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.5.6. Т*огда задача* **К$_{3.5.6}$** *разрешима и её единственное решение выражается равенством*:

$$u(x,y)=\frac{A_4(y)}{\gamma_2-\gamma_1}(x-a)^{\gamma_4}+K_{p,q,\lambda}\left[f(x,y)\right]. \qquad (3.5.6)$$

Задача К$_{3.5.7}$. *Найти решение интегрального уравнения Вольтерра* (2.1.1) *из класса* $C(\overline{D})$, *которое обращается в нуль на* Γ_1 *и* Γ_2, *если* $p>0,\ q>0,\ \lambda<0,\ \Delta_1=p^2-4q>0,\ \Delta_2=\lambda^2-4\mu<0,$ *по условиям*:

$$\begin{cases}\left\{e^{-\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\left(\left(\frac{\lambda}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right)+\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right)\right)u(x,y)+\sin\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right)D_x\left(u(x,y)\right)\right)\right\}_{y=b}=\mathrm{B}_1(x),\\ \left\{e^{-\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right)D_x\left(u(x,y)\right)+\left(\frac{\lambda}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right)-\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right)\right)u(x,y)\right)\right\}_{y=b}=\mathrm{B}_2(x),\end{cases}$$

где $\mathrm{B}_1(x),\mathrm{B}_2(x)$ – *заданные произвольные непрерывные функции.*

На основе равенств (3.3.3), (3.3.5) справедлива теорема:

Теорема 3.5.7. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.5.7. *Тогда задача* **К$_{3.5.7}$** *разрешима и её единственное решение выражается равенством*:

$$u(x,y)=e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\cos\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right)\mathrm{B}_1(x)+e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\sin\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right)\mathrm{B}_2(x)+K_{p,q,\lambda}\left[f(x,y)\right]. \qquad (3.5.7)$$

§3.6. Случай, когда корни характеристических уравнений вещественные, равные и разные: $\Delta_1=p^2-4q=0,\Delta_2=\lambda^2-4\mu>0$

Задача К$_{3.6.1}$. *Найти решение интегрального уравнения Вольтерра* (2.1.1) *из класса* $C(\overline{D})$, *которое обращается в нуль на* Γ_1 *и* Γ_2, *если* $p<0$, $\lambda<0,\mu>0,\ \Delta_1=p^2-4q=0,\Delta_2=\lambda^2-4\mu>0$, *по условиям*:

$$\begin{cases}\left\{(x-a)^{-\frac{|p|}{2}}\left[\left(1+\frac{|p|}{2}\ln(x-a)\right)u(x,y)-\ln(x-a)D_x\left(u(x,y)\right)\right]\right\}_{x=a}=\mathrm{A}_1(y),\\ \left\{(x-a)^{-\frac{|p|}{2}}\left[D_x\left(u(x,y)\right)-\frac{|p|}{2}u(x,y)\right]\right\}_{x=a}=\mathrm{A}_2(y),\\ \left[e^{-\eta_1\omega_b^\beta(y)}\left(\eta_2u(x,y)-D_\beta^yu(x,y)\right)\right]_{y=b}=\mathrm{B}_1(x),\\ \left[e^{-\eta_2\omega_b^\beta(y)}\left(-\eta_1u(x,y)-D_\beta^yu(x,y)\right)\right]_{y=b}=\mathrm{B}_2(x),\end{cases}$$

где $\mathrm{B}_1(x), \mathrm{B}_2(x), \mathrm{A}_1(y), \mathrm{A}_2(y)$ – заданные произвольные непрерывные функции. На основе равенств (3.2.3), (3.2.5) и свойств (3.1.6), (3.1.8) справедлива теорема:

Теорема 3.6.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.6.1. Т*огда задача* **К3.6.1** *разрешима и её единственное решение выражается равенством*:

$$u(x,y) = (x-a)^{\frac{|p|}{2}}\left[\mathrm{A}_1(y) + \ln(x-a)\mathrm{A}_2(y)\right] + e^{\eta_1\omega_b^\beta(y)}\mathrm{B}_1(x) + e^{\eta_2\omega_b^\beta(y)}\mathrm{B}_2(x) + K_{p,\lambda,\mu}^{(x,y)}\left[f(x,y)\right]. \quad (3.6.1)$$

Задача К3.6.2. *Найти решение интегрального уравнения Вольтерра* (2.1.1) *из класса* $C(\overline{D})$, *которое обращается в нуль на* Γ_1 *и* Γ_2, *если* $\lambda < 0, \mu > 0,\ p > 0,\ \Delta_1 = p^2 - 4q = 0, \Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu > 0$, *по условиям*:

$$\begin{cases} \left[e^{-\eta_1\omega_b^\beta(y)}\left(\eta_2 u(x,y) - D_\beta^y u(x,y)\right)\right]_{y=b} = \mathrm{B}_1(x), \\ \left[e^{-\eta_2\omega_b^\beta(y)}\left(-\eta_1 u(x,y) - D_\beta^y u(x,y)\right)\right]_{y=b} = \mathrm{B}_2(x), \end{cases}$$

где $\mathrm{B}_1(x), \mathrm{B}_2(x)$ – *заданные произвольные непрерывные функции.*

На основе свойств (3.1.6), (3.1.8) справедлива теорема:

Теорема 3.6.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.6.2. Т*огда задача* **К3.6.2** *разрешима и её единственное решение выражается равенством*:

$$u(x,y) = e^{\eta_1\omega_b^\beta(y)}\mathrm{B}_1(x) + e^{\eta_2\omega_b^\beta(y)}\mathrm{B}_2(x) + K_{p,\lambda,\mu}^{(x,y)}\left[f(x,y)\right]. \quad (3.6.2)$$

Задача К3.6.3. *Найти решение интегрального уравнения Вольтерра* (2.1.1) *из класса* $C(\overline{D})$, *которое обращается в нуль на* Γ_1 *и* Γ_2, *если* $\lambda > 0, \mu < 0,\ p < 0,\ \Delta_1 = p^2 - 4q = 0, \Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu > 0$, *по условиям*:

$$\begin{cases} \left\{ (x-a)^{-\frac{|p|}{2}} \left[\left(1 + \frac{|p|}{2} \ln(x-a) \right) u(x,y) - \ln(x-a) D_x \left(u(x,y) \right) \right] \right\}_{x=a} = \mathrm{A}_1(y), \\ \left\{ (x-a)^{-\frac{|p|}{2}} \left[D_x \left(u(x,y) \right) - \frac{|p|}{2} u(x,y) \right] \right\}_{x=a} = \mathrm{A}_2(y), \\ \left[e^{-\eta_3 \omega_b^\beta (y)} u(x,y) \right]_{y=b} = \mathrm{B}_3(x), \end{cases}$$

где $\mathrm{B}_3(x), \mathrm{A}_1(y), \mathrm{A}_2(y)$ – *заданные произвольные непрерывные функции.*

На основе равенств (3.2.3), (3.2.5) и свойства (3.1.6) справедлива теорема:

Теорема 3.6.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.6.3. Т*огда задача* **К$_{3.6.3}$** *разрешима и её единственное решение выражается равенством*:

$$u(x,y) = (x-a)^{\frac{|p|}{2}} \left[\mathrm{A}_1(y) + \ln(x-a) \mathrm{A}_2(y) \right] + e^{\eta_3 \omega_b^\beta (y)} \mathrm{B}_3(x) + K_{p,\lambda,\mu}^{(x,y)} \left[f(x,y) \right]. \quad (3.6.3)$$

Задача К$_{3.6.4}$. *Найти решение интегрального уравнения Вольтерра* (2.1.1) *из класса* $C(\overline{D})$, *которое обращается в нуль на* Г$_1$ *и* Г$_2$*, если* $\lambda > 0, \mu < 0,\ p > 0,\ \Delta_1 = p^2 - 4q = 0, \Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu > 0$, *по условиям*:

$$\left[e^{-\eta_3 \omega_b^\beta (y)} u(x,y) \right]_{y=b} = \mathrm{B}_3(x),$$

где $\mathrm{B}_3(x)$ – *заданная произвольная непрерывная функция.*

На основе равенства (3.1.6) справедлива теорема:

Теорема 3.6.4. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.6.4. Т*огда задача* **К$_{3.6.4}$** *разрешима и её единственное решение выражается равенством*:

$$u(x,y) = e^{\eta_3 \omega_b^\beta (y)} \mathrm{B}_3(x) + K_{p,\lambda,\mu}^{(x,y)} \left[f(x,y) \right]. \quad (3.6.4)$$

Задача К$_{3.6.5}$. *Найти решение интегрального уравнения Вольтерра* (2.1.1) *из класса* $C(\overline{D})$, *которое обращается в нуль на* Г$_1$ *и* Г$_2$*, если* $\lambda < 0, \mu < 0,\ p < 0,\ \Delta_1 = p^2 - 4q = 0, \Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu > 0,$ *по условиям*:

$$
\begin{cases}
\left\{(x-a)^{-\frac{|p|}{2}}\left[\left(1+\frac{|p|}{2}\ln(x-a)\right)u(x,y)-\ln(x-a)D_x\left(u(x,y)\right)\right]\right\}_{x=a}=\mathrm{A}_1(y),\\
\left\{(x-a)^{-\frac{|p|}{2}}\left[D_x\left(u(x,y)\right)-\frac{|p|}{2}u(x,y)\right]\right\}_{x=a}=\mathrm{A}_2(y),\\
\left[e^{-\eta_4\omega_b^{\beta}(y)}u(x,y)\right]_{y=b}=\mathrm{B}_4(x),
\end{cases}
$$

где $\mathrm{B}_4(x), \mathrm{A}_1(y), \mathrm{A}_2(y)$ – *заданные произвольные непрерывные функции.*

На основе равенств (3.2.3), (3.2.5) и свойства (3.1.8) справедлива теорема:

Теорема 3.6.5. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.6.5. Т*огда задача* **К3.6.5** *разрешима и её единственное решение выражается равенством*:

$$
u(x,y)=(x-a)^{\frac{|p|}{2}}\left[\mathrm{A}_1(y)+\ln(x-a)\mathrm{A}_2(y)\right]+e^{\eta_4\omega_b^{\beta}(y)}\mathrm{B}_4(x)+K_{p,\lambda,\mu}^{(x,y)}\left[f(x,y)\right]. \qquad (3.6.5)
$$

Задача К3.6.6. *Найти решение интегрального уравнения Вольтерра* (2.1.1) *из класса* $C(\overline{D})$, *которое обращается в нуль на* Γ_1 *и* Γ_2, *если* $\lambda<0, \mu<0, \; p>0, \; \Delta_1=p^2-4q=0, \Delta_2=\lambda^2-4\mu>0,$ *по условиям*:

$$
\left[e^{-\eta_4\omega_b^{\beta}(y)}u(x,y)\right]_{y=b}=\mathrm{B}_4(x),
$$

где $\mathrm{B}_4(x)$ – *заданная произвольная непрерывная функция.*

На основе свойства (3.1.8) справедлива теорема:

Теорема 3.6.6. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.6.6. Т*огда задача* **К3.6.6** *разрешима и её единственное решение выражается равенством*:

$$
u(x,y)=e^{\eta_4\omega_b^{\beta}(y)}\mathrm{B}_4(x)+K_{p,\lambda,\mu}^{(x,y)}\left[f(x,y)\right]. \qquad (3.6.6)
$$

Задача К3.6.7. *Найти решение интегрального уравнения Вольтерра* (2.1.1) *из класса* $C(\overline{D})$, *которое обращается в нуль на* Γ_1 *и* Γ_2, *если* $\lambda>0, \mu>0, \; p<0, \; \Delta_1=p^2-4q=0, \Delta_2=\lambda^2-4\mu>0,$ *по условиям*:

$$\begin{cases} \left\{ (x-a)^{-\frac{|p|}{2}} \left[\left(1+\frac{|p|}{2}\ln(x-a) \right) u(x,y) - \ln(x-a) D_x\left(u(x,y)\right) \right] \right\}_{x=a} = \mathrm{A}_1(y), \\ \left\{ (x-a)^{-\frac{|p|}{2}} \left[D_x\left(u(x,y)\right) - \frac{|p|}{2} u(x,y) \right] \right\}_{x=a} = \mathrm{A}_2(y), \end{cases}$$

где $\mathrm{A}_1(y), \mathrm{A}_2(y)$ *– заданные произвольные непрерывные функции.*

На основе равенств (3.2.3), (3.2.5) справедлива теорема:

Теорема 3.6.7. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.6.7. Т*огда задача* **К$_{3.6.7}$** *разрешима и её единственное решение выражается равенством*:

$$u(x,y) = (x-a)^{\frac{|p|}{2}} \left[\mathrm{A}_1(y) + \ln(x-a)\mathrm{A}_2(y) \right] + K^{(x,y)}_{p,\lambda,\mu}\left[f(x,y) \right]. \tag{3.6.7}$$

§3.7. Случай, когда корни характеристических уравнений вещественные, равные и комплексно-сопряжённые: $\Delta_1 = p^2 - 4q = 0$, $\Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu < 0$

Задача К$_{3.7.1}$. *Найти решение интегрального уравнения Вольтерра* (2.1.1) *из класса* $C(\overline{D})$, *которое обращается в нуль на* Γ_1 *и* Γ_2, *если* $p < 0$, $\lambda < 0$, $\Delta_1 = p^2 - 4q = 0$, $\Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu < 0$, *по условиям*:

$$\begin{cases} \left\{ (x-a)^{-\frac{|p|}{2}} \left[\left(1+\frac{|p|}{2}\ln(x-a) \right) u(x,y) - \ln(x-a) D_x\left(u(x,y)\right) \right] \right\}_{x=a} = \mathrm{A}_1(y), \\ \left\{ (x-a)^{-\frac{|p|}{2}} \left[D_x\left(u(x,y)\right) - \frac{|p|}{2} u(x,y) \right] \right\}_{x=a} = \mathrm{A}_2(y), \\ \left\{ e^{-\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)} \left(\frac{\lambda}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y) \right) + \frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y) \right) \right) u(x,y) + \sin\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y) \right) D_x\left(u(x,y)\right) \right\}_{y=b} = \mathrm{B}_1(x), \\ \left\{ e^{-\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)} \cos\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y) \right) D_x\left(u(x,y)\right) + \left(\frac{\lambda}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y) \right) - \frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y) \right) \right) u(x,y) \right\}_{y=b} = \mathrm{B}_2(x), \end{cases}$$

где $\mathrm{B}_1(x), \mathrm{B}_2(x), \mathrm{A}_1(y), \mathrm{A}_2(y)$ *– заданные произвольные непрерывные функции.*

На основе равенств (3.2.3), (3.2.5), (3.3.3), (3.3.5) справедлива теорема:

Теорема 3.7.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.7.1. Т*огда задача* **К$_{3.7.1}$** *разрешима и её единственное решение выражается равенством*:

$$u(x,y)=(x-a)^{\frac{|p|}{2}}\left[\mathrm{A}_1(y)+\ln(x-a)\mathrm{A}_2(y)\right]+e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\cos\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right)\mathrm{B}_1(x)+$$
$$+e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\sin\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right)\mathrm{B}_2(x)+E_{p,q,\lambda}^{(x,y)}\left(f(x,y)\right). \tag{3.7.1}$$

Задача К$_{3.7.2}$. *Найти решение интегрального уравнения Вольтерра* (2.1.1) *из класса* $C(\overline{D})$, *которое обращается в нуль на* Γ_1 *и* Γ_2, *если* $\lambda<0$, $p>0$, $\Delta_1=p^2-4q=0$, $\Delta_2=\lambda^2-4\mu<0$, *по условиям*:

$$\begin{cases}\left\{e^{-\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\left(\left(\frac{\lambda}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right)+\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right)\right)u(x,y)+\sin\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right)D_x\left(u(x,y)\right)\right\}_{y=b}=\mathrm{B}_1(x),\\ \left\{e^{-\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right)D_x\left(u(x,y)\right)+\left(\frac{\lambda}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right)-\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right)\right)u(x,y)\right)\right\}_{y=b}=\mathrm{B}_2(x),\end{cases}$$

где $\mathrm{B}_1(x),\mathrm{B}_2(x),$ *– заданные произвольные непрерывные функции.*

На основе равенств (3.3.3), (3.3.5) справедлива теорема:

Теорема 3.7.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.7.2. Т*огда задача* **К$_{3.7.2}$** *разрешима и её единственное решение выражается равенством*:

$$u(x,y)=e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\cos\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right)\mathrm{B}_1(x)+e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}\sin\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^\beta(y)\right)\mathrm{B}_2(x)+E_{p,q,\lambda}^{(x,y)}\left(f(x,y)\right). \tag{3.7.2}$$

Задача К$_{3.7.3}$. *Найти решение интегрального уравнения Вольтерра* (2.1.1) *из класса* $C(\overline{D})$, *которое обращается в нуль на* Γ_1 *и* Γ_2, *если* $\lambda>0$, $p<0$, $\Delta_1=p^2-4q=0$, $\Delta_2=\lambda^2-4\mu<0$, *по условиям*:

$$\begin{cases}\left\{(x-a)^{-\frac{|p|}{2}}\left[\left(1+\frac{|p|}{2}\ln(x-a)\right)u(x,y)-\ln(x-a)D_x\left(u(x,y)\right)\right]\right\}_{x=a}=\mathrm{A}_1(y),\\ \left\{(x-a)^{-\frac{|p|}{2}}\left[D_x\left(u(x,y)\right)-\frac{|p|}{2}u(x,y)\right]\right\}_{x=a}=\mathrm{A}_2(y),\end{cases}$$

где $\mathrm{A}_1(y),\mathrm{A}_2(y)$ *– заданные произвольные непрерывные функции.*

На основе равенств (3.2.3), (3.2.5) справедлива теорема:

Теорема 3.7.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.7.3. Т*огда задача* **К$_{3.7.3}$** *разрешима и её единственное решение выражается равенством*:

$$u(x,y)=(x-a)^{\frac{|p|}{2}}\left[\mathrm{A}_1(y)+\ln(x-a)\mathrm{A}_2(y)\right]+E_{p,q,\lambda}^{(x,y)}\left(f(x,y)\right). \tag{3.7.3}$$

§3.8. Случай, когда корни характеристических уравнений комплексно-сопряженные и вещественные разные: $\Delta_1 = p^2 - 4q < 0,\ \Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu > 0.$

Задача $К_{3.8.1}$. *Найти решение интегрального уравнения Вольтерра* (2.1.1) *из класса* $C(\overline{D})$, *которое обращается в нуль на* Γ_1 *и* Γ_2, *если* $p < 0$, $\lambda < 0, \mu > 0,\ \Delta_1 = p^2 - 4q < 0,\ \Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu > 0,$ *по условиям*:

$$\begin{cases} \left\{ (x-a)^{-\frac{|p|}{2}} \left[\left(\frac{|p|}{2} \sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2} \ln(x-a) \right) + \frac{\sqrt{4q-p^2}}{2} \cos\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2} \ln(x-a) \right) \right) u(x,y) - \sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2} \ln(x-a) \right) D_x\left(u(x,y)\right) \right] \right\}_{x=a} = \mathrm{A}_1(y), \\ \left\{ (x-a)^{-\frac{|p|}{2}} \left[\cos\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2} \ln(x-a) \right) D_x\left(u(x,y)\right) - \left(\frac{|p|}{2} \cos\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2} \ln(x-a) \right) - \frac{\sqrt{4q-p^2}}{2} \sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2} \ln(x-a) \right) \right) u(x,y) \right] \right\}_{x=a} = \mathrm{A}_2(y), \\ \left[e^{-\eta_1 \omega_b^\beta(y)} \left(\eta_2 u(x,y) - D_\beta^y u(x,y) \right) \right]_{y=b} = \mathrm{B}_1(x), \\ \left[e^{-\eta_2 \omega_b^\beta(y)} \left(-\eta_1 u(x,y) - D_\beta^y u(x,y) \right) \right]_{y=b} = \mathrm{B}_2(x), \end{cases}$$

где $\mathrm{B}_1(x), \mathrm{B}_2(x), \mathrm{A}_1(y), \mathrm{A}_2(y)$ – *заданные произвольные непрерывные функции*.

На основе равенств (3.3.3), (3.3.5) и свойств (3.1.6), (3.1.8) справедлива теорема:

Теорема 3.8.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.8.1. *Тогда задача* **$К_{3.8.1}$** *разрешима и её единственное решение выражается равенством*:

$$u(x,y) = (x-a)^{\frac{|p|}{2}} \left\{ \cos\left[\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2} \ln(x-a) \right] \mathrm{A}_1(y) + \sin\left[\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2} \ln(x-a) \right] \mathrm{A}_2(y) \right\} + \\ + e^{\eta_1 \omega_b^\beta(y)} \frac{\mathrm{B}_1(x)}{\eta_2 - \eta_1} + e^{\eta_2 \omega_b^\beta(y)} \frac{\mathrm{B}_2(x)}{\eta_2 - \eta_1} + K_{p,q,\lambda}\left[f(x,y) \right]. \tag{3.8.1}$$

Задача $К_{3.8.2}$. *Найти решение интегрального уравнения Вольтерра* (2.1.1) *из класса* $C(\overline{D})$, *которое обращается в нуль на* Γ_1 *и* Γ_2, *если* $\lambda < 0, \mu > 0,\ p > 0,\ \Delta_1 = p^2 - 4q < 0,\ \Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu > 0,$ *по условиям*:

$$\begin{cases} \left[e^{-\eta_1 \omega_b^\beta(y)} \left(\eta_2 u(x,y) - D_\beta^y u(x,y) \right) \right]_{y=b} = \mathrm{B}_1(x), \\ \left[e^{-\eta_2 \omega_b^\beta(y)} \left(-\eta_1 u(x,y) - D_\beta^y u(x,y) \right) \right]_{y=b} = \mathrm{B}_2(x), \end{cases}$$

где $\mathrm{B}_1(x), \mathrm{B}_2(x)$ – *заданные произвольные непрерывные функции.*

На основе свойств (3.1.6), (3.1.8) справедлива теорема:

Теорема 3.8.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.8.2. *Тогда задача* **$К_{3.8.2}$** *разрешима и её единственное решение выражается равенством*:

$$u(x,y)=e^{\eta_1\omega_b^\beta(y)}\frac{\mathrm{B}_1(x)}{\eta_2-\eta_1}+e^{\eta_2\omega_b^\beta(y)}\frac{\mathrm{B}_2(x)}{\eta_2-\eta_1}+K_{p,q,\lambda}\left[f(x,y)\right]. \tag{3.8.2}$$

Задача $K_{3.8.3}$. *Найти решение интегрального уравнения Вольтерра* (2.1.1) *из класса* $C(\overline{D})$, *которое обращается в нуль на* Γ_1 *и* Γ_2, *если* $\lambda>0, \mu<0,\ p<0,\ \Delta_1=p^2-4q<0,\ \Delta_2=\lambda^2-4\mu>0,$ *по условиям*:

$$\begin{cases}\left[e^{-\eta_3\omega_b^\beta(y)}u(x,y)\right]_{y=b}=\mathrm{B}_3(x),\\ \left\{(x-a)^{-\frac{|p|}{2}}\left[\left(\frac{|p|}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)+\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)\right)u(x,y)-\sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)D_x\left(u(x,y)\right)\right]\right\}_{x=a}=\mathrm{A}_1(y),\\ \left\{(x-a)^{-\frac{|p|}{2}}\left[\cos\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)D_x\left(u(x,y)\right)-\left(\frac{|p|}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)-\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)\right)u(x,y)\right]\right\}_{x=a}=\mathrm{A}_1(y),\end{cases}$$

где $\mathrm{B}_3(x), \mathrm{A}_1(y), \mathrm{A}_2(y)$ – *заданные произвольные непрерывные функции*.

На основе равенств (3.3.3), (3.3.5) справедлива теорема:

Теорема 3.8.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.8.3. Т*огда задача* **$K_{3.8.3}$** *разрешима и её единственное решение выражается равенством*:

$$u(x,y)=(x-a)^{\frac{|p|}{2}}\left\{\cos\left[\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right]\mathrm{A}_1(y)+\sin\left[\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right]\mathrm{A}_2(y)\right\}+e^{\eta_3\omega_b^\beta(y)}\frac{\mathrm{B}_3(x)}{\eta_2-\eta_1}+K_{p,q,\lambda}\left[f(x,y)\right]. \tag{3.8.3}$$

Задача $K_{3.8.4}$. *Найти решение интегрального уравнения Вольтерра* (2.1.1) *из класса* $C(\overline{D})$, *которое обращается в нуль на* Γ_1 *и* Γ_2, *если* $\lambda>0, \mu<0,\ p>0,\ \Delta_1=p^2-4q<0,\ \Delta_2=\lambda^2-4\mu>0,$ *по условиям*:

$$\left[e^{-\eta_3\omega_b^\beta(y)}u(x,y)\right]_{y=b}=\mathrm{B}_3(x),$$

где $\mathrm{B}_3(x)$ – *заданная произвольная непрерывная функция.*

На основе свойства (3.1.6) справедлива теорема:

Теорема 3.8.4. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.8.4. Т*огда задача* **$K_{3.8.4}$** *разрешима и её единственное решение выражается равенством*:

$$u(x,y)=e^{\eta_3\omega_b^\beta(y)}\mathrm{B}_3(x)+K_{p,q,\lambda}\left[f(x,y)\right]. \tag{3.8.4}$$

Задача К$_{3.8.5.}$ *Найти решение интегрального уравнения Вольтерра* (2.1.1) *из класса* $C(\overline{D})$, *которое обращается в нуль на* Γ_1 *и* Γ_2, *если* $\lambda < 0, \mu < 0,$ $p < 0,$ $\Delta_1 = p^2 - 4q < 0,$ $\Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu > 0,$ *по условиям*:

$$\begin{cases} \left\{ (x-a)^{-\frac{|p|}{2}} \left[\left(\frac{|p|}{2} \sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2} \ln(x-a) \right) + \frac{\sqrt{4q-p^2}}{2} \cos\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2} \ln(x-a) \right) \right) u(x,y) - \sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2} \ln(x-a) \right) D_x\left(u(x,y)\right) \right] \right\}_{x=a} = \mathrm{A}_1(y), \\ \left\{ (x-a)^{-\frac{|p|}{2}} \left[\cos\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2} \ln(x-a) \right) D_x\left(u(x,y)\right) - \left(\frac{|p|}{2} \cos\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2} \ln(x-a) \right) - \frac{\sqrt{4q-p^2}}{2} \sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2} \ln(x-a) \right) \right) u(x,y) \right] \right\}_{x=a} = \mathrm{A}_2(y), \\ \left[e^{-\eta_4 \omega_b^{\beta}(y)} u(x,y) \right]_{y=b} = \mathrm{B}_4(x), \end{cases}$$

где $\mathrm{B}_4(x), \mathrm{A}_1(y), \mathrm{A}_2(y)$ – *заданные произвольные непрерывные функции*.

На основе равенств (3.3.3), (3.3.5) и свойства (3.1.8) справедлива теорема:

Теорема 3.8.5. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.8.5. Т*огда задача* **К$_{3.8.5}$** *разрешима и её единственное решение выражается равенством*:

$$u(x,y) = (x-a)^{\frac{|p|}{2}} \left\{ \cos\left[\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2} \ln(x-a) \right] \mathrm{A}_1(y) + \sin\left[\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2} \ln(x-a) \right] \mathrm{A}_2(y) \right\} + \tag{3.8.5}$$
$$+ e^{\eta_4 \omega_b^{\beta}(y)} \mathrm{B}_4(x) + K_{p,q,\lambda}\left[f(x,y) \right].$$

Задача К$_{3.8.6.}$ *Найти решение интегрального уравнения Вольтерра* (2.1.1) *из класса* $C(\overline{D})$, *которое обращается в нуль на* Γ_1 *и* Γ_2, *если* $\lambda < 0, \mu < 0,$ $p > 0,$ $\Delta_1 = p^2 - 4q < 0,$ $\Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu > 0,$ *по условиям*:

$$\left[e^{-\eta_4 \omega_b^{\beta}(y)} u(x,y) \right]_{y=b} = \mathrm{B}_4(x),$$

где $\mathrm{B}_4(x)$ – *заданная произвольная непрерывная функция.*

На основе свойства (3.1.8) справедлива теорема:

Теорема 3.8.6. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.8.6. Т*огда задача* **К$_{3.8.6}$** *разрешима и её единственное решение выражается равенством*:

$$u(x,y) = e^{\eta_4 \omega_b^{\beta}(y)} \mathrm{B}_4(x) + K_{p,q,\lambda}\left[f(x,y) \right]. \tag{3.8.6}$$

Задача К$_{3.8.7}$. *Найти решение интегрального уравнения Вольтерра* (2.1.1) *из класса* $C(\overline{D})$, *которое обращается в нуль на* Γ_1 *и* Γ_2, *если* $\lambda > 0, \mu > 0,$ $p < 0,$ $\Delta_1 = p^2 - 4q < 0,$ $\Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu > 0,$ *по условиям*:

$$\begin{cases} \left\{(x-a)^{-\frac{|p|}{2}}\left[\left(\frac{|p|}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)+\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)\right)u(x,y)-\sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)D_x\left(u(x,y)\right)\right]\right\}_{x=a} = \mathrm{A}_1(y), \\ \left\{(x-a)^{-\frac{|p|}{2}}\left[\cos\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)D_x\left(u(x,y)\right)-\left(\frac{|p|}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)-\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)\right)u(x,y)\right]\right\}_{x=a} = \mathrm{A}_2(y), \end{cases}$$

где $\mathrm{A}_1(y), \mathrm{A}_2(y)$ – *заданные произвольные непрерывные функции.*

На основе равенств (3.3.3), (3.3.5) справедлива теорема:

Теорема 3.8.7. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.8.7. Т*огда задача* **К$_{3.8.7}$** *разрешима и её единственное решение выражается равенством*:

$$u(x,y) = (x-a)^{\frac{|p|}{2}}\left\{\cos\left[\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right]\mathrm{A}_1(y)+\sin\left[\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right]\mathrm{A}_2(y)\right\}+K_{p,q,\lambda}\left[f(x,y)\right]. \quad (3.8.7)$$

§3.9. Случай, когда корни характеристических уравнений комплексно-сопряженные и вещественные, равные: $\Delta_1 = p^2 - 4q < 0,$ $\Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu = 0$.

Задача К$_{3.9.1}$. *Найти решение интегрального уравнения Вольтерра* (2.1.1) *из класса* $C(\overline{D})$, *которое обращается в нуль на* Γ_1 *и* Γ_2, *если* $p < 0,$ $\lambda < 0,$ $\Delta_1 = p^2 - 4q < 0,$ $\Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu = 0$, *по условиям*:

$$\begin{cases} \left\{(x-a)^{-\frac{|p|}{2}}\left[\left(\frac{|p|}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)+\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)\right)u(x,y)-\sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)D_x\left(u(x,y)\right)\right]\right\}_{x=a} = \mathrm{A}_1(y), \\ \left\{(x-a)^{-\frac{|p|}{2}}\left[\cos\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)D_x\left(u(x,y)\right)-\left(\frac{|p|}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)-\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)\right)u(x,y)\right]\right\}_{x=a} = \mathrm{A}_2(y), \\ \left\{e^{-\frac{\lambda}{2}\omega_b^{\beta}(y)}\left[-\left(1+\frac{\lambda}{2}\omega_b^{\beta}(y)\right)u(x,y)-\omega_b^{\beta}(y)D_{\beta}^{y}\left(u(x,y)\right)\right]\right\}_{y=b} = \mathrm{B}_1(x), \\ \left\{e^{-\frac{\lambda}{2}\omega_b^{\beta}(y)}\left[\frac{\lambda}{2}u(x,y)+D_{\beta}^{y}\left(u(x,y)\right)\right]\right\}_{y=b} = \mathrm{B}_2(x), \end{cases}$$

где $\mathrm{B}_1(x), \mathrm{B}_2(x), \mathrm{A}_1(y), \mathrm{A}_2(y)$ – *заданные произвольные непрерывные функции*.

На основе равенств (3.3.3), (3.3.5), (3.2.3), (3.2.5) справедлива теорема:

Теорема 3.9.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.9.1. Т*огда задача* **К$_{3.9.1}$** *разрешима и её единственное решение выражается равенством*:

$$u(x,y)=(x-a)^{\frac{|p|}{2}}\left[\cos\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)\mathrm{A}_1(y)+\sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)\mathrm{A}_2(y)\right]+ \tag{3.9.1}$$
$$+e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^{\beta}(y)}\left[\mathrm{B}_1(x)+\omega_b^{\beta}(y)\mathrm{B}_2(x)\right]+E_{p,\lambda}^{(x,y)}[f(x,y)].$$

Задача К$_{3.9.2.}$ *Найти решение интегрального уравнения Вольтерра* (2.1.1) *из класса* $C(\overline{D})$, *которое обращается в нуль на* Γ_1 *и* Γ_2, *если* $p>0$, $\lambda<0,\ \Delta_1=p^2-4q<0,\ \Delta_2=\lambda^2-4\mu=0$, *по условиям*:

$$\begin{cases}\left\{e^{-\frac{\lambda}{2}\omega_b^{\beta}(y)}\left[-\left(1+\frac{\lambda}{2}\omega_b^{\beta}(y)\right)u(x,y)-\omega_b^{\beta}(y)D_{\beta}^{y}\left(u(x,y)\right)\right]\right\}_{y=b}=\mathrm{B}_1(x),\\ \left\{e^{-\frac{\lambda}{2}\omega_b^{\beta}(y)}\left[\frac{\lambda}{2}u(x,y)+D_{\beta}^{y}\left(u(x,y)\right)\right]\right\}_{y=b}=\mathrm{B}_2(x),\end{cases}$$

где $\mathrm{B}_1(x),\mathrm{B}_2(x)$ *– заданные произвольные непрерывные функции.*

На основе равенств (3.2.3), (3.2.5) справедлива теорема:

Теорема 3.9.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.9.2. Т*огда задача* **К$_{3.9.2}$** *разрешима и её единственное решение выражается равенством*:

$$u(x,y)=e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^{\beta}(y)}\left[\mathrm{B}_1(x)+\omega_b^{\beta}(y)\mathrm{B}_2(x)\right]+E_{p,\lambda}^{(x,y)}[f(x,y)]. \tag{3.9.2}$$

Задача К$_{3.9.3.}$ *Найти решение интегрального уравнения Вольтерра* (2.1.1) *из класса* $C(\overline{D})$, *которое обращается в нуль на* Γ_1 *и* Γ_2, *если* $\lambda>0$, $p<0,\ \ \Delta_1=p^2-4q<0,\ \Delta_2=\lambda^2-4\mu=0$, *по условиям*:

$$\begin{cases}\left\{(x-a)^{-\frac{|p|}{2}}\left[\left(\frac{|p|}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)+\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)\right)u(x,y)-\sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)D_x\left(u(x,y)\right)\right]\right\}_{x=a}=\mathrm{A}_1(y),\\ \left\{(x-a)^{-\frac{|p|}{2}}\left[\cos\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)D_x\left(u(x,y)\right)-\left(\frac{|p|}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)-\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)\right)u(x,y)\right]\right\}_{x=a}=\mathrm{A}_2(y),\end{cases}$$

где $\mathrm{A}_1(y),\mathrm{A}_2(y)$ *– заданные произвольные непрерывные функции.*

На основе равенств (3.3.3), (3.3.5) справедлива теорема:

Теорема 3.9.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.9.3. Т*огда задача* **К$_{3.9.3}$** *разрешима и её единственное решение выражается равенством*:

$$u(x,y)=(x-a)^{\frac{|p|}{2}}\left[\cos\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)\mathrm{A}_1(y)+\sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\ln(x-a)\right)\mathrm{A}_2(y)\right]+E_{p,\lambda}^{(x,y)}[f(x,y)]. \quad (3.9.3)$$

ГЛАВА 4

ИССЛЕДОВАНИЕ ДВУМЕРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА ВОЛЬТЕРРА С ГРАНИЧНЫМИ ОСОБОЙ И СИЛЬНО-ОСОБЫМИ ЛИНИЯМИ, КОГДА КОЭФФИЦИЕНТЫ УРАВНЕНИЯ НЕ СВЯЗАНЫ МЕЖДУ СОБОЙ

В настоящей главе изучается двумерное интегральное уравнение типа Вольтерра с граничными особыми и сильно-особыми линиями в случае, когда параметры уравнения не связаны между собой.

В данном случае решение ищется в виде обобщенного функционального и степенного ряда. В зависимости от корней характеристических уравнений и знака параметров уравнения получены явные решения двумерное интегральное уравнение типа Вольтерра с граничными особыми и сильно-особыми линиями в виде обобщенных функциональных и степенных рядов, содержащие произвольные постоянные, определены случаи, когда решение единственно.

§4.1. Нахождение решения двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра представимое в виде обобщенного функционального ряда по степеням функции $e^{-\omega_b^\beta(y)}$, когда коэффициенты уравнения не связаны между собой

Рассмотрим в прямоугольнике D двумерное интегральное уравнение (2.1.1):

$$u(x,y)+\int_a^x\left[p+q\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right]\frac{u(t,y)}{t-a}dt+\int_b^y\left[\lambda+\mu\left(\omega_b^\beta(s)-\omega_b^\beta(y)\right)\right]\frac{u(x,s)}{(s-b)^\beta}ds+$$
$$+\int_a^x\left[p_1+q_1\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right]\frac{dt}{t-a}\int_b^y\left[\lambda_1+\mu_1\left(\omega_b^\beta(s)-\omega_b^\beta(y)\right)\right]\frac{u(t,s)}{(s-b)^\beta}ds=f(x,y),$$

когда параметры уравнения (2.1.1) не связаны между собой. Решение интегрального уравнения (2.1.1) в случае, когда

$$p\neq p_1, q\neq q_1, \lambda\neq\lambda_1, \mu\neq\mu_1, \tag{4.1.1}$$

будем искать в виде обобщенного функционального ряда вида:

$$u(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)e^{-(n+\tau)\omega_b^\beta(y)},\ \tau>0\ . \tag{4.1.2}$$

Пусть правая часть интегрального уравнения (2.1.1) также разлагается в функциональный ряд вида:

$$f(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(x)e^{-(n+\tau)\omega_b^\beta(y)},\ \tau>0\ . \tag{4.1.3}$$

Подставляя значения функций $u(x,y)$, $f(x,y)$ из равенств (4.1.2) и (4.1.3) в интегральное уравнение (2.1.1), после некоторых преобразований получим интегральное уравнение вида:

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+\tau)\omega_b^\beta(y)} \times$$

$$\times\left\{\left(1+\frac{\lambda(n+\tau)+\mu}{(n+\tau)^2}\right)u_n(x)+\int_a^x\left[p+q\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right]+\left(\frac{\lambda_1}{n+\tau}+\frac{\mu_1}{(n+\tau)^2}\right)\left[p_1+q_1\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right]\frac{u_n(t)}{t-a}dt\right\}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)e^{-(n+\tau)\omega_b^\beta(y)}$$

В полученном уравнении приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $e^{-(n+\tau)\omega_b^\beta(y)}$, приходим к решению одномерного интегрального уравнения вида:

$$u_n(x)+\int_a^x\left[\frac{p(n+\tau)^2+p_1\lambda_1(n+\tau)+p_1\mu_1}{(n+\tau)^2+\lambda(n+\tau)+\mu}+\frac{q(n+\tau)^2+q_1\lambda_1(n+\tau)+q_1\mu_1}{(n+\tau)^2+\lambda(n+\tau)+\mu}\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right]\frac{u_n(t)}{t-a}dt=$$
$$=\frac{(n+\tau)^2}{(n+\tau)^2+\lambda(n+\tau)+\mu}f_n(x) \qquad (4.1.4)$$

Введем обозначения:

$$p_2=\frac{p(n+\tau)^2+p_1\lambda_1(n+\tau)+p_1\mu_1}{(n+\tau)^2+\lambda(n+\tau)+\mu},\ q_2=\frac{q(n+\tau)^2+q_1\lambda_1(n+\tau)+q_1\mu_1}{(n+\tau)^2+\lambda(n+\tau)+\mu},\quad f_n^1(x)=\frac{(n+\tau)^2}{(n+\tau)^2+\lambda(n+\tau)+\mu}f_n(x). \qquad (4.1.5)$$

Тогда интегральное уравнение (4.1.4) примет вид:

$$u_n(x)+\int_a^x\left[p_2+q_2\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right]\frac{u_n(t)}{t-a}dt=f_n^1(x) \quad n=0,1,2,3,\ldots \qquad (4.1.6)$$

Решение интегрального уравнения (4.1.6) будем искать в классе функций $u_n(x)\in\Gamma_1$, обращающихся в нуль при $x\to a$, с асимптотическим поведением:

$$u_n(x)=o[(x-a)^\varepsilon],\varepsilon>0,\ \text{при}\ \ x\to a,$$

Согласно (2.1.9), характеристическое уравнение для интегрального уравнения (4.1.6), имеет вид:

$$\gamma^2+p_2\gamma+q_2=0, \qquad (4.1.7)$$

В случае, когда корни характеристического уравнения (4.1.7) являются вещественными и разными: $p_2^2 - 4q_2 > 0$, $p_2 < 0$, $q_2 > 0$, функция $f_n^1(x) \in \Gamma_1$, в точке $x = a$ обращается в нуль с асимптотическим поведением:

$$f_n^1(x) = o[(x-a)^{\delta_{81}}], \delta_{81} > \gamma_1, \quad \text{при} \quad x \to a\,, \tag{4.1.8}$$

решение интегрального уравнения (4.1.6) на основе решение (2.1.14) имеет вид:

$$u_n(x) = (x-a)^{\gamma_1} c_{n_1} + (x-a)^{\gamma_2} c_{n_2} + K_{p_2,q_2}\left[f_n^1(x) \right] \tag{4.1.9}$$

где $$K_{p_2,q_2}\left[f_n^1(x) \right] = f_n^1(x) + \frac{1}{\sqrt{p_2^2 - 4q_2}} \int_a^x \left[(\gamma_2)^2 \left(\frac{x-a}{t-a} \right)^{\gamma_2} - (\gamma_1)^2 \left(\frac{x-a}{t-a} \right)^{\gamma_1} \right] \frac{f_n^1(x)}{t-a} dt,$$

$$\gamma_1 = \frac{-p_2 + \sqrt{p_2^2 - 4q_2}}{2} > 0, \ \gamma_2 = \frac{-p_2 - \sqrt{p_2^2 - 4q_2}}{2} > 0, \ (\gamma_1 - \gamma_2 > 0), \tag{4.1.10}$$

c_{n_1}, c_{n_2} – *произвольные постоянные.*

Подставляя значения $u_n(x)$ из равенства (4.1.9) в (4.1.2), решение интегрального уравнения (2.1.1) получим в виде:

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+\tau)\omega_b^\beta(y)} \left\{ (x-a)^{\gamma_1} c_{n_1} + (x-a)^{\gamma_2} c_{n_2} + K_{p_2,q_2}\left[f_n^1(x) \right] \right\} \tag{4.1.11}$$

Справедливо следующее утверждение:

Теорема 4.1.1. *Если в интегральном уравнении* (2.1.1) *выполняются условия:*

1. $p_2^2 - 4q_2 > 0$, $p_2 < 0$, $q_2 > 0$, *где параметры* p_2, q_2, γ_1, γ_2 *определены равенствами* (4.1.5) , (4.1.10).
2. $f(x,y) \in C(\overline{D})$ *и представима в виде равномерно-сходящего ряда вида (4.1.3).*
3. $f_n^1(x) \in \Gamma_1$, $f_n^1(a) = 0$ *с асимптотическим поведением* (4.1.8) *на* Γ_1,

Тогда однородное двумерное интегральное уравнение (2.1.1) *в классе функций, представимых в виде* (4.1.2), *имеет бесконечное число линейно-независимых решений вида:*

$$u_n^1(x,y)=(x-a)^{\gamma_1}e^{-(n+\tau)\omega_b^\beta(y)},$$

$$u_n^2(x,y)=(x-a)^{\gamma_2}e^{-(n+\tau)\omega_b^\beta(y)},\quad n=0,1,2,3,...$$

Неоднородное интегральное уравнение (2.1.1) *в классе функций, представимых в виде* (4.1.2), *всегда разрешимо и его решение выражается равенством* (4.1.11), *где* c_{n_1}, c_{n_2} – *произвольные постоянные, удовлетворяющие условиям*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|c_{n_1+1}|}{|c_{n_1}|}=c_1,\ e^{-\omega_b^\beta(b)}c_1<1,\ \lim_{n\to\infty}\frac{|c_{n_2+1}|}{|c_{n_2}|}=c_2,\ e^{-\omega_b^\beta(b)}c_2<1.$$

Следствие 4.1.1. *Пусть коэффициенты интегрального уравнения* (2.1.1) *удовлетворяют условиям теоремы* 4.1.1. *Тогда* $u(x,y)\in C(\overline{D})$ *и обращается в нуль с асимптотическими поведениями*:

$$u(x,y)=o[(x-a)^{\delta_{82}}],\delta_{82}>\gamma_2,x\to a,$$

$$u(x,y)=o[e^{-\tau\omega_b^\beta(y)}],\tau>2(\beta-1),y\to b.$$

Повторяя вышеприведенную схему нахождения решения интегрального уравнения (2.1.1), для других значений параметров интегрального уравнения получим следующие утверждения о разрешимости интегрального уравнения (2.1.1):

Теорема 4.1.2. *Если в интегральном уравнении* (2.1.1) *выполняются условия:*

1. $p_2^2-4q_2>0$, $p_2>0$, $q_2<0$, *где параметры* p_2, q_2, γ_1,γ_2 *определены равенствами* (4.1.5) , (4.1.10),
2. $f(x,y)\in C(\overline{D})$ *и представима в виде равномерно-сходящего ряда вида* (4.1.3),

3. $f_n^1(x) \in \Gamma_1$, $f_n^1(a) = 0$ *с асимптотическим поведением* (4.1.8) *на* Γ_1.

Тогда неоднородное интегральное уравнение (2.1.1) *в классе функций, представимых в виде* (4.1.2), *всегда разрешимо и его решение выражается равенством*:

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+\tau)\omega_b^\beta(y)} \left\{ (x-a)^{\gamma_1} c_{n_3} + K_{p_2,q_2}\left[f_n^1(x) \right] \right\}, \qquad (4.1.12)$$

$$\gamma_1 = \frac{-p_2 + \sqrt{p_2^2 - 4q_2}}{2} > 0, \ \gamma_2 = \frac{-p_2 - \sqrt{p_2^2 - 4q_2}}{2} < 0, \ (\gamma_1 - \gamma_2 > 0), \qquad (4.1.13)$$

c_{n_3} – *произвольная постоянная, удовлетворяющая условия*:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|c_{n_3+1}\right|}{\left|c_{n_3}\right|} = c_3, \ e^{-\omega_b^\beta(b)} c_3 < 1.$$

Следствие 4.1.2. *Пусть коэффициенты интегрального уравнения* (2.1.1) *удовлетворяют условиям теоремы* 4.1.2. *Тогда* $u(x,y) \in C(\overline{D})$ *и обращается в нуль с асимптотическими поведениями*:

$$u(x,y) = o[(x-a)^{\delta_{83}}], \delta_{83} > \gamma_1, x \to a,$$

$$u(x,y) = o[e^{-\tau\omega_b^\beta(y)}], \tau > 2(\beta - 1), y \to b.$$

Теорема 4.1.3. *Если в интегральном уравнении* (2.1.1) *выполняются условия:*

1. $p_2^2 - 4q_2 > 0$, $p_2 < 0$, $q_2 < 0$, *где параметры* p_2, q_2, γ_1, γ_2 *определены равенствами* (4.1.5) , (4.1.10),
2. $f(x,y) \in C(\overline{D})$ *и представима в виде равномерно-сходящего ряда вида* (4.1.3),
3. $f_n^1(x) \in \Gamma_1$, $f_n^1(a) = 0$ *с асимптотическим поведением* (4.1.8) *на* Γ_1,

Тогда неоднородное интегральное уравнение (2.1.1) *в классе функций, представимых в виде* (4.1.2), *всегда разрешимо и его решение выражается равенством*:

$$u(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+\tau)\omega_b^{\beta}(y)}\left\{(x-a)^{\gamma_1}c_{n_4}+K_{p_2,q_2}\left[f_n^1(x)\right]\right\} \quad (2.1.14)$$

$$\gamma_1=\frac{-p_2+\sqrt{p_2^2-4q_2}}{2}>0,\ \gamma_2=\frac{-p_2-\sqrt{p_2^2-4q_2}}{2}<0,\ (\gamma_1-\gamma_2>0), \quad (2.1.15)$$

c_{n_4} – *произвольная постоянная, удовлетворяющая условия*:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|c_{n_4+1}|}{|c_{n_4}|}=c_4,\ e^{-\omega_b^{\beta}(b)}c_4<1,$$

Следствие 4.1.3. *Пусть коэффициенты интегрального уравнения* (2.1.1) *удовлетворяют условиям теоремы* 4.1.3. *Тогда* $u(x,y)\in C(\overline{D})$ *и обращается в нуль с асимптотическими поведениями*:

$$u(x,y)=o[(x-a)^{\delta_{84}}],\delta_{84}>\gamma_1,x\to a,$$

$$u(x,y)=o[e^{-\tau\omega_b^{\beta}(y)}],\tau>2(\beta-1),y\to b.$$

Теорема 4.1.4. *Если в интегральном уравнении* (2.1.1) *выполняются условия:*

1. $p_2^2-4q_2>0$, $p_2>0$, $q_2>0$, *где параметры* $p_2,\ q_2,\ \gamma_1,\gamma_2$ *определены равенствами* (4.1.5) , (4.1.10),
2. $f(x,y)\in C(\overline{D})$ *и представима в виде равномерно-сходящего ряда вида* (4.1.3),
3. $f_n^1(x)\in\Gamma_1$, $f_n^1(a)=0$ *с асимптотическим поведением на* Γ_1:

$$f_n^1(x)=o[(x-a)^{\varepsilon}],\varepsilon>0,\ \text{при}\quad x\to a.$$

Тогда неоднородное интегральное уравнение (2.1.1) *в классе функций, представимых в виде* (4.1.2), *всегда разрешимо и его решение выражается равенством*:

$$u(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+\tau)\omega_b^{\beta}(y)}\left\{K_{p_2,q_2}\left[f_n^1(x)\right]\right\}, \quad (2.1.16)$$

$$\gamma_1 = \frac{-p_2 + \sqrt{p_2^2 - 4q_2}}{2} < 0, \quad \gamma_2 = \frac{-p_2 - \sqrt{p_2^2 - 4q_2}}{2} < 0, \quad (\gamma_1 - \gamma_2 > 0), \qquad (2.1.17)$$

Следствие 4.1.4. *Пусть коэффициенты интегрального уравнения* (2.1.1) *удовлетворяют условиям теоремы* 4.1.4. *Тогда* $u(x,y) \in C(\overline{D})$ *и обращается в нуль с асимптотическими поведениями*:

$$u(x,y) = o[(x-a)^{\varepsilon}], \varepsilon > 0, x \to a,$$

$$u(x,y) = o[e^{-\tau\omega_b^{\beta}(y)}], \tau > 2(\beta - 1), y \to b.$$

Теорема 4.1.5. *Если в интегральном уравнении* (2.1.1) *выполняются условия:*

1. $p_2^2 - 4q_2 = 0$, $p_2 < 0$, *где параметры* p_2, q_2, *определены равенствами* (4.1.5),
2. $f(x,y) \in C(\overline{D})$ *и представима в виде равномерно-сходящего ряда вида* (4.1.3),
3. $f_n^1(x) \in \Gamma_1$, $f_n^1(a) = 0$ *с асимптотическим поведением на* Γ_1:

   $$f_n^1(x) = o[(x-a)^{\delta_{85}}], \delta_{85} > \frac{|p|}{2}, \quad \text{при} \quad x \to a,$$

Тогда однородное двумерное интегральное уравнение (2.1.1) *в классе функций, представимых в виде* (4.1.2), *имеет бесконечное число линейно-независимых решений вида:*

$$u_n^1(x,y) = (x-a)^{-\frac{p_2}{2}} e^{-(n+\tau)\omega_b^{\beta}(y)},$$

$$u_n^2(x,y) = \ln(x-a)(x-a)^{-\frac{p_2}{2}} e^{-(n+\tau)\omega_b^{\beta}(y)}, \quad n = 0,1,2,3,\ldots$$

Неоднородное интегральное уравнение (2.1.1) *в классе функций, представимых в виде* (4.1.2), *всегда разрешимо и его решение выражается равенством:*

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+\tau)\omega_b^{\beta}(y)} \left\{ (x-a)^{\frac{|p_2|}{2}} \left[c_{n_5} + \ln(x-a) c_{n_6} \right] + M_{p_2}^{x}\left[f_n^1(x) \right] \right\}, \qquad (2.1.18)$$

где

$$M_{p_2}^{x}\left[f_n^1(x)\right]=(x-a)^{\frac{|p_2|}{2}}\left[c_{n_5}+\ln(x-a)c_{n_6}\right]+f_n^1(x)+\frac{p_2}{2}\int_a^x\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\frac{|p_2|}{2}}\left[2+\frac{p_2}{2}\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right]\frac{f_n^1(t)}{t-a}dt.$$

c_{n_5}, c_{n_6} *– произвольные постоянные, удовлетворяющие условию:*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|c_{n_5+1}\right|}{\left|c_{n_5}\right|}=c_5\,,\ e^{-\omega_b^\beta(b)}c_5<1,\ \lim_{n\to\infty}\frac{\left|c_{n_6+1}\right|}{\left|c_{n_6}\right|}=c_6\,,\ e^{-\omega_b^\beta(b)}c_6<1.$$

Следствие 4.1.5. *Пусть коэффициенты интегрального уравнения* (2.1.1) *удовлетворяют условиям теоремы* 4.1.5. *Тогда* $u(x,y)\in C(\overline{D})$ *и обращается в нуль с асимптотическими поведениями*:

$$u(x,y)=o[(x-a)^{\delta_{86}}],\delta_{86}>\frac{|p|}{2},x\to a,$$

$$u(x,y)=o[e^{-\tau\omega_b^\beta(y)}],\tau>2(\beta-1),y\to b.$$

Теорема 4.1.6. *Если в интегральном уравнении* (2.1.1) *выполняются условия:*

1. $p_2^2-4q_2=0$, $p_2>0$, *где параметры* p_2, q_2, *определены равенствами* (4.1.5),
2. $f(x,y)\in C(\overline{D})$ *и представима в виде равномерно-сходящего ряда вида* (4.1.3),
3. $f_n^1(x)\in\Gamma_1$, $f_n^1(a)=0$ *с асимптотическим поведением на* Γ_1:

   $f_n^1(x)=o[(x-a)^\varepsilon],\varepsilon>0,$ *при* $x\to a$,

Тогда неоднородное интегральное уравнение (2.1.1) *в классе функций, представимых в виде* (4.1.2), *всегда разрешимо и его решение выражается равенством:*

$$u(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-(n+\tau)\omega_b^\beta(y)}\left\{M_{p_2}^{x}\left[f_n^1(x)\right]\right\}. \tag{4.1.19}$$

Следствие 4.1.6. *Пусть коэффициенты интегрального уравнения* (2.1.1) *удовлетворяют условиям теоремы* 4.1.6. *Тогда* $u(x,y) \in C(\overline{D})$ *и обращается в нуль с асимптотическими поведениями*:

$$u(x,y) = o[(x-a)^{\varepsilon}], \varepsilon > 0, x \to a,$$

$$u(x,y) = o[e^{-\tau\omega_b^{\beta}(y)}], \tau > 2(\beta-1), y \to b.$$

Теорема 4.1.7. *Если в интегральном уравнении* (2.1.1) *выполняются условия:*

1. $p_2^2 - 4q_2 < 0$, $p_2 < 0$, *где параметры* p_2, q_2, *определены равенствами* (4.1.5),
2. $f(x,y) \in C(\overline{D})$ *и представима в виде равномерно-сходящего ряда вида* (4.1.3),
3. $f_n^1(x) \in \Gamma_1$, $f_n^1(a) = 0$ *с асимптотическим поведением на* Γ_1:

$$f_n^1(x) = o[(x-a)^{\delta_{87}}], \delta_{87} > \frac{|p|}{2}, \quad при \quad x \to a,$$

Тогда однородное двумерное интегральное уравнение (2.1.1) *в классе функций, представимых в виде* (4.1.2), *имеет бесконечное число линейно-независимых решений вида:*

$$u_n^1(x,y) = (x-a)^{\frac{|p_2|}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{4q_2 - p_2^2}}{2}\ln(x-a)\right) e^{-(n+\tau)\omega_b^{\beta}(y)},$$

$$u_n^2(x,y) = (x-a)^{-\frac{p_2}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{4q_2 - p_2^2}}{2}\ln(x-a)\right) e^{-(n+\tau)\omega_b^{\beta}(y)}, \quad n = 0,1,2,3,\ldots$$

Неоднородное интегральное уравнение (2.1.1) *в классе функций, представимых в виде* (4.1.2), *всегда разрешимо и его решение выражается равенством:*

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+\tau)\omega_b^{\beta}(y)} \left\{ (x-a)^{\frac{|p|}{2}} \left[\cos\left(\frac{\sqrt{4q_2 - p_2^2}}{2}\ln(x-a)\right) c_{n_7} + \sin\left(\frac{\sqrt{4q_2 - p_2^2}}{2}\ln(x-a)\right) c_{n_8} \right] + M_{p_2}^{x}\left[f_n^1(x)\right] \right\}, \quad (4.1.20)$$

где

$$M_{p_2}^{x}\left[f_n^1(x)\right]=f_n^1(x)+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{4q_2-p_2^2}}\int_a^x\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\frac{|p|}{2}}\left[(p_2^2-4q_2)\sin\left(\frac{\sqrt{4q_2-p_2^2}}{2}\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right)-p_2\sqrt{4q_2-p_2^2}\cos\left(\frac{\sqrt{4q_2-p_2^2}}{2}\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right)\right]\frac{f_n^1(t)}{t-a}dt$$

c_{n_7}, c_{n_8} – *произвольные постоянные, удовлетворяющие условию:*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|c_{n_7+1}|}{|c_{n_7}|}=c_7,\ e^{-\omega_b^\beta(b)}c_7<1,\ \lim_{n\to\infty}\frac{|c_{n_8+1}|}{|c_{n_8}|}=c_8,\ e^{-\omega_b^\beta(b)}c_8<1.$$

Следствие 4.1.7. *Пусть коэффициенты интегрального уравнения* (2.1.1) *удовлетворяют условиям теоремы* 4.1.7. *Тогда* $u(x,y)\in C(\overline{D})$ *и обращается в нуль с асимптотическими поведениями*:

$$u(x,y)=o[(x-a)^{\delta_{88}}],\delta_{88}>\frac{|p|}{2},x\to a,$$

$$u(x,y)=o[e^{-\tau\omega_b^\beta(y)}],\tau>2(\beta-1),y\to b.$$

Теорема 4.1.8. *Если в интегральном уравнении* (2.1.1) *выполняются условия:*

1. $p_2^2-4q_2<0$, $p_2>0$, *где параметры* p_2, q_2, *определены равенствами* (4.1.5),
2. $f(x,y)\in C(\overline{D})$ *и представима в виде равномерно-сходящего ряда вида* (4.1.3),
3. $f_n^1(x)\in\Gamma_1$, $f_n^1(a)=0$ *с асимптотическим поведением на* Γ_1:

   $f_n^1(x)=o[(x-a)^\varepsilon],\varepsilon>0,$ *при* $x\to a$,

Тогда неоднородное интегральное уравнение (2.1.1) *в классе функций, представимых в виде* (4.1.2), *всегда разрешимо и его решение выражается равенством:*

$$u(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-(n+\tau)\omega_b^\beta(y)}\left\{M_{p_2}^{x}\left[f_n^1(x)\right]\right\}. \tag{4.1.21}$$

Следствие 4.1.8. *Пусть коэффициенты интегрального уравнения* (2.1.1) *удовлетворяют условиям теоремы* 4.1.8. *Тогда* $u(x,y)\in C(\overline{D})$ *и обращается в нуль с асимптотическими поведениями*:

$$u(x,y)=o[(x-a)^{\varepsilon}],\varepsilon>0,x\to a,$$
$$u(x,y)=o[e^{-\tau\omega_b^{\beta}(y)}],\tau>2(\beta-1),y\to b.$$

§4.2. Нахождение решения двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра, представимое в виде обобщенного степенного ряда по степеням $(x-a)$, когда коэффициенты уравнения не связаны между собой

Теперь рассмотрим двумерное интегральное уравнение вида (2.1.1) в случае, когда $p\neq p_1, q\neq q_1, \lambda\neq\lambda_1, \mu\neq\mu_1$ и решение интегрального уравнения (2.1.1) будем искать в виде:

$$u(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(y)(x-a)^{n+\tau},\ \tau>0. \tag{4.2.1}$$

Также пусть правая часть интегрального уравнения (2.1.1) разлагается в ряд вида:

$$f(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(y)(x-a)^{n+\varepsilon},\ \varepsilon>0. \tag{4.2.2}$$

Подставим значения $u(x,y)$, $f(x,y)$ из (4.2.1) и (4.2.2) в интегральное уравнение (2.1.1), после некоторых преобразований получим:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(x-a)^{n+\varepsilon}[u_n(y)+\left(\frac{p(n+\tau)+q}{(n+\tau)^2}\right)+\int_b^y\left[\lambda+\mu\left(\omega_b^{\beta}(s)-\omega_b^{\beta}(y)\right)\right]\frac{u_n(s)}{(s-b)^{\beta}}ds+\left(\frac{p_1(n+\tau)+q_1}{(n+\tau)^2}\right)\int_b^y\left[\lambda_1+\mu_1\left(\omega_b^{\beta}(s)-\omega_b^{\beta}(y)\right)\right]\frac{u_n(s)}{(s-b)^{\beta}}ds]=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(y)(x-a)^{n+\varepsilon}$$

Откуда имеем:

$$\begin{gathered}\sum_{n=0}^{\infty}(x-a)^{n+\varepsilon}\times\\ \times\left\{\left(1+\frac{p(n+\tau)+q}{(n+\tau)^2}\right)u_n(y)+\int_b^y[\left[\lambda+\mu\left(\omega_b^{\beta}(s)-\omega_b^{\beta}(y)\right)\right]+\left(\frac{p_1(n+\tau)+q_1}{(n+\tau)^2}\right)\int_b^y\left[\lambda_1+\mu_1\left(\omega_b^{\beta}(s)-\omega_b^{\beta}(y)\right)\right]]\frac{u_n(s)}{(s-b)^{\beta}}ds\right\}=\\ =\sum_{n=0}^{\infty}f_n(y)(x-a)^{n+\varepsilon}\end{gathered} \tag{4.2.3}$$

Из равенства (4.2.3) приходим к решению одномерных интегральных уравнений вида:

$$u_n(y)+\int_b^y\left[\lambda_2+\mu_2\left(\omega_b^\beta(s)-\omega_b^\beta(y)\right)\right]\frac{u_n(s)}{(s-b)^\beta}ds=f_n^2(y),\quad n=0,1,2,3,\ldots \quad (4.2.4)$$

где:

$$\lambda_2=\frac{\lambda(n+\tau)^2+\lambda_1 p_1(n+\tau)+\lambda_1 q_1}{(n+\tau)^2+p(n+\tau)+q},\ \mu_2=\frac{\mu(n+\tau)^2+\mu_1 p_1(n+\tau)+\mu_1 q_1}{(n+\tau)^2+p(n+\tau)+q},\ f_n^1(y)=\frac{(n+\tau)^2}{(n+\tau)^2+p(n+\tau)+q}f_n(y). \quad (4.2.5)$$

Будем искать решение интегрального уравнения в классе $f_n^2(y)\in\Gamma_2$ обращающиеся в нуль при $y\to b$ с асимптотическим поведением:

$$u_n(y)=o[(y-b)^\nu],\nu>2(\beta-1),\ \text{при}\quad y\to b.$$

Согласно (2.1.18), характеристическое уравнение для интегрального уравнения (4.2.4), имеет вид:

$$\eta^2-\lambda_2\eta+\mu_2=0. \quad (4.2.6)$$

Если корни характеристического уравнения (4.2.6) являются вещественными и разными: $\lambda_2^2-4\mu_2>0$, $\lambda_2<0,\ \ \mu_2>0,\ \ f_n^2(y)\in\Gamma_2$, в точке $y=b$ обращается в нуль с асимптотическим поведением:

$$f_n^1(y)=o[e^{\eta_2\omega_b^\beta(y)}(y-b)^{\nu_1}],\nu_1>\beta-1\ \ \text{при}\quad y\to b, \quad (4.2.7)$$

решение интегрального уравнения (4.2.4) на основе решение (2.1.23) имеет вид:

$$u_n(y)=c_{n_3}e^{\eta_1\omega_b^\beta(y)}+c_{n_4}e^{\eta_2\omega_b^\beta(y)}+M_{\lambda_2,\mu_2}^{y}[f_n^2(y)]. \quad (4.2.8)$$

где

$$M_{\lambda_2,\mu_2}^{y}[f_n^2(y)]=f_n^2(y)+\frac{1}{\sqrt{\lambda_2^2-4\mu_2}}\int_b^y\left[(\eta_2)^2e^{\eta_2\left(\omega_b^\beta(y)-\omega_b^\beta(s)\right)}-(\eta_1)^2e^{\eta_1\left(\omega_b^\beta(y)-\omega_b^\beta(s)\right)}\right]\frac{f_n^2(s)}{(s-b)^\beta}ds, \quad (4.2.9)$$

$$\eta_1=\frac{\lambda_2+\sqrt{\lambda_2^2-4\mu_2}}{2}<0,\ \ \eta_2=\frac{\lambda_2-\sqrt{\lambda_2^2-4\mu_2}}{2}<0,\quad (\eta_1-\eta_2>0), \quad (4.2.10)$$

c_{n_3},c_{n_4} *− произвольные постоянные.*

Из равенства (4.2.8) подставляя значения $u_n(y)$ в равенство (4.2.1), получим решение интегрального уравнения (2.1.1) в виде:

$$u_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (x-a)^{n+\tau} \left\{ c_{n_3} e^{\eta_1 \omega_b^{\beta}(y)} + c_{n_4} e^{\eta_2 \omega_b^{\beta}(y)} + M_{\lambda_2,\mu_2}^{y} [f_n^2(y)] \right\}. \quad (4.2.11)$$

Теорема 4.2.1. *Если в интегральном уравнении* (2.1.1) *выполняются условия:*

1. $\lambda_2^2 - 4\mu_2 > 0$, $\lambda_2 < 0$, $\mu_2 > 0$, *где параметры* $\lambda_2, \mu_2, \eta_1, \eta_2$ *определены равенствами* (4.2.5), (4.2.10),
2. $f(x,y) \in C(\overline{D})$ *и представима в виде равномерно-сходящего ряда вида* (4.2.2),
3. $f_n^2(y) \in \Gamma_2$, $f_n^2(b) = 0$ *с асимптотическим поведением* (4.2.7) *на* Γ_2.

Тогда однородное двумерное интегральное уравнение (2.1.1) *в классе функций, представимых в виде* (4.2.1), *имеет бесконечное число линейно-независимых решений вида:*

$$u_n^1(x,y) = (x-a)^{n+\tau} e^{\eta_1 \omega_b^{\beta}(y)},$$

$$u_n^2(x,y) = (x-a)^{n+\tau} e^{\eta_2 \omega_b^{\beta}(y)}, \quad n = 0,1,2,3,\ldots$$

Неоднородное интегральное уравнение (2.1.1) *в классе функций, представимых в виде* (4.2.1), *всегда разрешимо и его решение выражается равенством* (4.2.11), *где* c_{n_3}, c_{n_4} *– произвольные постоянные, удовлетворяющие условию*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n_3+1}|}{|c_{n_3}|} = c_9,\ (a_0 - a)c_9 < 1,\ \lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n_4+1}|}{|c_{n_4}|} = c_{10},\ (a_0 - a)c_{10} < 1.$$

Следствие 4.2.1. *Пусть коэффициенты интегрального уравнения* (2.1.1) *удовлетворяют условиям теоремы* 4.2.1. *Тогда* $u(x,y) \in C(\overline{D})$ *и обращается в нуль с асимптотическими поведениями*:

$$u(x,y) = o[(x-a)^{\tau}], \tau > 0, x \to a,$$

$u(x,y)=o[(y-b)^{\nu_{174}}], \nu_{174}>2(\beta-1), y\to b.$

Теорема 4.2.2. *Если в интегральном уравнении* (2.1.1) *выполняются условия:*

1. $\lambda_2^2-4\mu_2>0$, $\lambda_2>0$, $\mu_2<0$, *где параметры* $\lambda_2,\mu_2,\eta_1,\eta_2$ *определены равенствами* (4.2.5) , (4.2.13),
2. $f(x,y)\in C(\overline{D})$ *и представима в виде равномерно-сходящего ряда вида* (4.2.2),
3. $f_n^2(y)\in\Gamma_2$, $f_n^2(b)=0$ *с асимптотическим поведением* (4.2.7) *на* Γ_2.

Тогда неоднородное интегральное уравнение (2.1.1) *в классе функций, представимых в виде* (4.2.1), *всегда разрешимо и его решение выражается равенством:*

$$u(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}(x-a)^{n+\tau}\left\{c_{n_5}e^{\eta_2\omega_b^{\beta}(y)}+M_{\lambda_2,\mu_2}^{y}[f_n^2(y)]\right\}, \tag{4.2.12}$$

$$\eta_1=\frac{\lambda_2+\sqrt{\lambda_2^2-4\mu_2}}{2}>0,\ \eta_2=\frac{\lambda_2-\sqrt{\lambda_2^2-4\mu_2}}{2}<0,\quad (\eta_1-\eta_2>0). \tag{4.2.13}$$

c_{n_5} *– произвольная постоянная, удовлетворяющая условия:*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|c_{n_5+1}|}{|c_{n_5}|}=c_{11},\ (a_0-a)c_{11}<1.$$

Следствие 4.2.2. *Пусть коэффициенты интегрального уравнения* (2.1.1) *удовлетворяют условиям теоремы* 4.2.2. *Тогда* $u(x,y)\in C(\overline{D})$ *и обращается в нуль с асимптотическими поведениями*:

$u(x,y)=o[(x-a)^{\tau}], \tau>0, x\to a,$

$u(x,y)=o[(y-b)^{\nu_{175}}], \nu_{175}>2(\beta-1), y\to b.$

Теорема 4.2.3. *Если в интегральном уравнении* (2.1.1) *выполняются условия:*

1. $\lambda_2^2 - 4\mu_2 > 0$, $\lambda_2 < 0$, $\mu_2 < 0$, *где параметры* $\lambda_2, \mu_2, \eta_1, \eta_2$ *определены равенствами* (4.2.5) , (4.2.13),
2. $f(x,y) \in C(\overline{D})$ *и представима в виде равномерно-сходящего ряда вида* (4.2.2),
3. $f_n^2(y) \in \Gamma_2$, $f_n^2(b) = 0$ *с асимптотическим поведением* (4.2.7) *на* Γ_2.

Тогда неоднородное интегральное уравнение (2.1.1) *в классе функций, представимых в виде* (4.2.1), *всегда разрешимо и его решение выражается равенством:*

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} (x-a)^{n+\tau} \left\{ c_{n_6} e^{\eta_2 \omega_b^{\beta}(y)} + M_{\lambda_2,\mu_2}^{y}[f_n^2(y)] \right\}, \qquad (4.2.14)$$

c_{n_6} – *произвольная постоянная, удовлетворяющие условия:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n_6+1}|}{|c_{n_6}|} = c_{12}, \ (a_0 - a)c_{12} < 1.$$

Следствие 4.2.3. *Пусть коэффициенты интегрального уравнения* (2.1.1) *удовлетворяют условиям теоремы* 4.2.3. *Тогда* $u(x,y) \in C(\overline{D})$ *и обращается в нуль с асимптотическими поведениями*:

$u(x,y) = o[(x-a)^{\tau}], \tau > 0, x \to a,$

$u(x,y) = o[(y-b)^{\nu_{176}}], \nu_{176} > 2(\beta - 1), y \to b.$

Теорема 4.2.4. *Если в интегральном уравнении* (2.1.1) *выполняются условия:*

1. $\lambda_2^2 - 4\mu_2 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\mu_2 > 0$, *где параметры* $\lambda_2, \mu_2, \eta_1, \eta_2$ *определены равенствами* (4.2.5) , (4.2.16),
2. $f(x,y) \in C(\overline{D})$ *и представима в виде равномерно-сходящего ряда вида* (4.2.2),
3. $f_n^2(y) \in \Gamma_2$, $f_n^2(b) = 0$ *с асимптотическим поведением на* Γ_2:

$$f_n^1(y) = o[(y-b)^{\nu_4}], \nu_4 > \beta - 1 \quad при \quad y \to b.$$

Тогда неоднородное интегральное уравнение (2.1.1) *в классе функций, представимых в виде* (4.2.1), *всегда разрешимо и его решение выражается равенством:*

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} (x-a)^{n+\tau} \left\{ M^{y}_{\lambda_2,\mu_2}[f_n^2(y)] \right\}, \qquad (4.2.15)$$

$$\eta_1 = \frac{\lambda_2 + \sqrt{\lambda_2^2 - 4\mu_2}}{2} > 0, \ \eta_2 = \frac{\lambda_2 - \sqrt{\lambda_2^2 - 4\mu_2}}{2} > 0, \quad (\eta_1 - \eta_2 > 0). \ (4.2.16)$$

Следствие 4.2.4. *Пусть коэффициенты интегрального уравнения* (2.1.1) *удовлетворяют условиям теоремы* 4.2.4. *Тогда* $u(x,y) \in C(\overline{D})$ *и обращается в нуль с асимптотическими поведениями*:

$$u(x,y) = o[(x-a)^{\tau}], \tau > 0, x \to a,$$

$$u(x,y) = o[(y-b)^{\nu_{177}}], \nu_{177} > 2(\beta - 1), y \to b.$$

Теорема 4.2.5. *Если в интегральном уравнении* (2.1.1) *выполняются условия:*

1. $\lambda_2^2 - 4\mu_2 = 0$, $\lambda_2 < 0$, *где параметры* λ_2, μ_2, *определены равенством* (4.2.5),
2. $f(x,y) \in C(\overline{D})$ *и представима в виде равномерно-сходящего ряда вида* (4.2.2),
3. $f_n^2(y) \in \Gamma_2$, $f_n^2(b) = 0$ *с асимптотическим поведением на* Γ_2:

$$f_n^1(y) = o[e^{\frac{\lambda_2}{2}\omega_b^{\beta}(y)}(y-b)^{\nu_5}], \nu_5 > \beta - 1 \quad при \quad y \to b.$$

Тогда однородное двумерное интегральное уравнение (2.1.1) *в классе функций, представимых в виде* (4.2.1), *имеет бесконечное число линейно-независимых решений вида:*

$$u_n^3(x,y) = (x-a)^{n+\tau}\omega_b^{\beta}(y)e^{\frac{\lambda_2}{2}\omega_b^{\beta}(y)}, \ n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Неоднородное решение интегральное уравнение (2.1.1) *в классе функций, представимых в виде* (4.2.1), *всегда разрешимо и его решение выражается равенством:*

$$u(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}(x-a)^{n+\tau}\{e^{\frac{\lambda_2}{2}\omega_b^{\beta}(y)}[c_{n_7}+\omega_b^{\beta}(y)c_{n_8}]+M_{\lambda_2}^{y}[f_n^2(y)]\}, \qquad (4.2.17)$$

где

$$M_{\lambda_2}^{y}[f_n^2(y)]=f_n^2(y)+\int_b^y e^{\frac{\lambda_2}{2}\left(\omega_b^{\beta}(y)-\omega_b^{\beta}(s)\right)}\left[\lambda_2+\frac{\lambda_2^2}{4}\left(\omega_b^{\beta}(y)-\omega_b^{\beta}(s)\right)\right]\frac{f_n^2(s)}{(s-b)^{\beta}}ds,$$

c_{n_7}, c_{n_8} – *произвольные постоянные, удовлетворяющие условию*:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|c_{n_7+1}|}{|c_{n_7}|}=c_{13},\ (a_0-a)c_{13}<1,\ \lim_{n\to\infty}\frac{|c_{n_8+1}|}{|c_{n_8}|}=c_{14},\ (a_0-a)c_{14}<1.$$

Следствие 4.2.5. *Пусть коэффициенты интегрального уравнения* (2.1.1) *удовлетворяют условиям теоремы* 4.2.5. *Тогда* $u(x,y)\in C(\overline{D})$ *и обращается в нуль с асимптотическими поведениями*:

$$u(x,y)=o[(x-a)^{\tau}],\tau>0,x\to a,$$

$$u(x,y)=o[(y-b)^{\nu_{178}}],\nu_{178}>2(\beta-1),y\to b.$$

Теорема 4.2.6. *Если в интегральном уравнении* (2.1.1) *выполняются условия:*

1. $\lambda_2^2-4\mu_2=0$, $\lambda_2>0$, *где параметры* λ_2,μ_2, *определены равенством* (4.2.5) ,
2. $f(x,y)\in C(\overline{D})$ *и представима в виде равномерно-сходящего ряда вида* (4.2.2),
3. $f_n^2(y)\in\Gamma_2$, $f_n^2(b)=0$ *с асимптотическим поведением на* Γ_2:

$$f_n^1(y) = o[(y-b)^{\nu_7}], \nu_7 > 2(\beta - 1) \quad при \quad y \to b.$$

Тогда решение неоднородного интегральное уравнение (2.1.1) *в классе функций, представимых в виде* (4.2.1), *всегда разрешимо и его решение выражается равенством:*

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} (x-a)^{n+\tau} \{M_{\lambda_2}^{y}[f_n^2(y)]\}. \qquad (4.2.18)$$

Следствие 4.2.6. *Пусть коэффициенты интегрального уравнения* (2.1.1) *удовлетворяют условиям теоремы* 4.2.6. *Тогда* $u(x, y) \in C(\overline{D})$ *и обращается в нуль с асимптотическими поведениями*:

$$u(x, y) = o[(x-a)^{\tau}], \tau > 0, x \to a,$$

$$u(x, y) = o[(y-b)^{\nu_{179}}], \nu_{179} > 2(\beta - 1), y \to b.$$

Теорема 4.2.7. *Если в интегральном уравнении* (2.1.1) *выполняются условия:*

1. $\lambda_2^2 - 4\mu_2 < 0$, $\lambda_2 < 0$, *где параметры* λ_2, μ_2, *определены равенством* (4.2.5),
2. $f(x, y) \in C(\overline{D})$ *и представима в виде равномерно-сходящего ряда вида* (4.2.2),
3. $f_n^2(y) \in \Gamma_2$, $f_n^2(b) = 0$ *с асимптотическим поведением на* Γ_2:

$$f_n^1(y) = o[e^{\frac{\lambda_2}{2}\omega_b^{\beta}(y)}(y-b)^{\nu_5}], \nu_5 > \beta - 1 \quad при \quad y \to b.$$

Тогда однородное двумерное интегральное уравнение (2.1.1) *в классе функций, представимых в виде* (4.2.1), *имеет бесконечное число линейно-независимых решений вида:*

$$u_n^4(x, y) = (x-a)^{n+\tau} e^{\frac{\lambda_2}{2}\omega_b^{\beta}(y)} \cos\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2}\omega_b^{\beta}(y)\right),$$

$$u_n^5(x, y) = (x-a)^{n+\tau} e^{\frac{\lambda_2}{2}\omega_b^{\beta}(y)} \sin\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2}\omega_b^{\beta}(y)\right), n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Неоднородное решение интегральное уравнение (2.1.1) *в классе функций, представимых в виде* (4.2.1), *всегда разрешимо и его решение выражается равенством:*

$$u(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}(x-a)^{n+\tau}\left\{e^{\frac{\lambda_2}{2}\omega_b^{\beta}(y)}\left[\cos\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^{\beta}(y)\right)c_{n_9}+\sin\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\omega_b^{\beta}(y)\right)c_{n_{10}}\right]+M_{\lambda_2}^{y}[f_n^2(y)]\right\}, \quad (4.2.19)$$

где

$$M_{\lambda_2}^{y}[f_n^2(y)]=f_n^2(y)+\frac{2}{\sqrt{4\mu_2-\lambda_2^2}}\int_b^y e^{\frac{\lambda_2}{2}(\omega_b^{\beta}(y)-\omega_b^{\beta}(s))}\times$$

$$\times\left[\left(\frac{\lambda_2^2-2\mu_2}{2}\right)\sin\left[\frac{\sqrt{4\mu_2-\lambda_2^2}}{2}\left(\omega_b^{\beta}(y)-\omega_b^{\beta}(s)\right)\right]+\frac{\lambda_2\sqrt{4\mu_2-\lambda_2^2}}{2}\cos\left[\frac{\sqrt{4\mu_2-\lambda_2^2}}{2}\left(\omega_b^{\beta}(y)-\omega_b^{\beta}(s)\right)\right]\right]\frac{f_n^2(s)}{(s-b)^{\beta}}ds.$$

$c_{n_9}, c_{n_{10}}$ *– произвольные постоянные, удовлетворяющие условию*:

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|c_{n_9+1}|}{|c_{n_9}|}=c_{14}$, $(a_0-a)c_{14}<1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|c_{n_{10}+1}|}{|c_{n_{10}}|}=c_{15}$, $(a_0-a)c_{15}<1$,

Следствие 4.2.7. *Пусть коэффициенты интегрального уравнения* (2.1.1) *удовлетворяют условиям теоремы* 4.2.7. *Тогда* $u(x,y)\in C(\overline{D})$ *и обращается в нуль с асимптотическими поведениями*:

$u(x,y)=o[(x-a)^{\tau}], \tau>0, x\to a,$

$u(x,y)=o[(y-b)^{\nu_{180}}], \nu_{180}>2(\beta-1), y\to b.$

Теорема 4.2.8. *Если в интегральном уравнении* (2.1.1) *выполняются условия:*

1. $\lambda_2^2-4\mu_2<0$, $\lambda_2>0$, *где параметры* λ_2, μ_2, *определены равенством* (4.2.5),
2. $f(x,y)\in C(\overline{D})$ *и представима в виде равномерно-сходящего ряда вида* (4.2.2),
3. $f_n^2(y)\in\Gamma_2$, $f_n^2(b)=0$ *с асимптотическим поведением на* Γ_2: $f_n^1(y)=o[(y-b)^{\nu_7}], \nu_7>\beta-1$ *при* $y\to b$.

Тогда неоднородное решение интегральное уравнение (2.1.1) *в классе функций, представимых в виде* (4.2.1), *всегда разрешимо и его решение выражается равенством:*

$$u(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}(x-a)^{n+\tau}\left\{M_{\lambda_2}^{y}[f_n^2(y)]\right\}. \tag{4.2.20}$$

Следствие 4.2.8. *Пусть коэффициенты интегрального уравнения* (2.1.1) *удовлетворяют условиям теоремы* 4.2.8. *Тогда* $u(x,y)\in C(\overline{D})$ *и обращается в нуль с асимптотическими поведениями*:

$$u(x,y)=o[(x-a)^{\tau}],\tau>0,x\to a,$$

$$u(x,y)=o[(y-b)^{\nu_{181}}],\nu_{181}>2(\beta-1),y\to b.$$

ОБСУЖДЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

В этом разделе мы кратко анализируем результаты, полученные в диссертационной работе.

В первой главе излагается краткий литературный обзор в области интегральных уравнений с регулярными ядрами, а также сингулярных интегральных уравнений типа Вольтерра.

В второй главе работы исследуется двумерное интегральное уравнение типа Вольтерра с граничными особым и сильно-особыми линиями вида

$$u(x,y)+\int_a^x\left[p+q\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right]\frac{u(t,y)}{t-a}dt+\int_b^y\left[\lambda+\mu\left(\omega_b^\beta(s)-\omega_b^\beta(y)\right)\right]\frac{u(x,s)}{(s-b)^\beta}ds+$$
$$+\int_a^x\left[p_1+q_1\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right]\frac{dt}{t-a}\int_b^y\left[\lambda_1+\mu_1\left(\omega_b^\beta(s)-\omega_b^\beta(y)\right)\right]\frac{u(t,s)}{(s-b)^\beta}ds=f(x,y). \quad (A.1)$$

когда коэффициенты уравнения связаны между собой особым образом.

Если параметры уравнения (A.1) связаны между собой равенствами

$$p=p_1, q=q_1, \lambda=\lambda_1, \mu=\mu_1, \quad (A.2)$$

тогда данное уравнение можно представить в виде произведения операторов вида:

$$\Pi_{\lambda,\mu}^y\left(T_{p,q}^x(u)\right)=f(x,y), \quad (A.3)$$

где

$$T_{p,q}^x(u)\equiv u(x,y)+\int_a^x\left[p+q\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right]\frac{u(t,y)}{t-a}dt=\psi(x,y), \quad (A.4)$$

$$\Pi_{\lambda,\mu}^y(\psi)\equiv\psi(x,y)+\int_b^y\left[\lambda+\mu\left(\omega_b^\beta(s)-\omega_b^\beta(y)\right)\right]\frac{\psi(x,s)}{(s-b)^\beta}ds=f(x,y). \quad (A.5)$$

Для интегральных уравнений (A.4) и (A.5) соответствующие характеристические уравнения имеют вид:

$$\gamma^2 + p\gamma + q = 0, \tag{A.6}$$

$$\eta^2 - \lambda\eta + \mu = 0. \tag{A.7}$$

В зависимости от знака параметров интегрального уравнения, когда корни характеристических уравнений (А.6) и (А.7) являются вещественными и разными, доказаны 16 теорем (от теоремы 2.1.1 до 2.1.16). Доказано, что решение интегрального уравнения (А.1) может содержать от одного до четырех произвольных функций. Также установлены случаи, когда решение интегрального уравнения (А.1) единственно.

В втором параграфе второй главы работы исследуется двумерное интегральное уравнение типа Вольтерра вида (А.1), когда корни характеристических уравнений (А.6) и (А.7) являются вещественными и равными.

В этом случае в зависимости от знака параметров и корни характеристических уравнений (А.6) и (А.7) доказаны 4 теорем (от теоремы 2.2.1 до 2.2.4). Доказано, что решение интегрального уравнения (А.1) может содержать от двух до четырех произвольных функцийя, также установлены случаи, когда решение единственно.

В третьем параграфе второй главы работы исследуется двумерное интегральное уравнение типа Вольтерра вида (А.1), когда корни характеристических уравнений (А.6) и (А.7) являются комплексно-сопряженными.

В этом случае в зависимости от знака параметров и корни характеристических уравнений (А.6) и (А.7) доказаны 4 теорем (от теоремы 2.3.1 до 2.3.4). Доказано, что решение интегрального уравнения (А.1) может содержать от двух до четырех произвольных функций, также установлены случаи, когда решение единственно.

В четвертом – девятом параграфах второй главы работы исследуется двумерное интегральное уравнение типа Вольтерра вида (А.1), когда корни характеристических уравнений (А.6) и (А.7) являются вещественными, разными и равными; вещественными, разными и комплексно-сопряженными; вещественными, равными и разными; вещественными, равными и комплексно-сопряженными; комплексно-сопряженными и вещественными разными а также комплексно-сопряженными и вещественными равными.

В данных случаях, в зависимости от знака параметров и корней характеристических уравнений (А.6) и (А.7) доказаны 40 теорем (от теоремы 2.4.1 до 2.9.4). Доказано, что решение интегрального уравнения (А.1) может содержать от одного до четырех произвольных функций. Также установлены случаи, когда решение единственно.

В третьей главе диссертации для двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра с граничными особыми и сильно-особыми линиями на основе полученных явных представлений решений, которые в зависимости от корней характеристических уравнений (А.6) и (А.7) и знака параметров уравнения могут содержать произвольные функции одной переменной, ставятся и решаются задачи типа Коши, когда условия заданы на особых линиях.

В этой главе получены 55 теорем (от теоремы 3.1.1 до 3.9.3).

В первом параграфе четвертой главы работы исследуется двумерное интегральное уравнение типа Вольтерра с граничными особыми и сильно-особыми линиями вида (А.1), когда параметры уравнения не связаны между собой.

Если параметры уравнения (А.1) не связаны между собой равенствами

$$p \neq p_1, q \neq q_1, \lambda \neq \lambda_1, \mu \neq \mu_1, \qquad (A.8)$$

тогда решение интегрального уравнения (A.1) ищется в виде:

$$u(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)e^{-(n+\tau)\omega_b^{\beta}(y)},\ \tau>0, \qquad (A.9)$$

в результате получим одномерное интегральное уравнение вида

$$u_n(x)+\int_a^x\left[p_2+q_2 ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right]\frac{u_n(t)}{t-a}dt=f_n^1(x). \qquad (A.10)$$

Характеристическое уравнение для интегрального уравнения (A.10), имеет вид:

$$\gamma^2+p_2\gamma+q_2=0. \qquad (A.11)$$

В зависимости от знака параметров и когда корни характеристического уравнения (A.11) являются вещественными и разными, вещественными и равными а также вещественными и комплексно-сопряженными, доказаны 8 теорем (от теоремы 4.1.1 до 4.1.8).

В втором параграфе четвертой главы работы исследуется двумерное интегральное уравнение типа Вольтерра с граничными особыми и сильно-особыми линиями вида (A.1), когда параметры уравнения не связаны между собой.

Решение двумерного интегрального уравнения (A.1) в случае, когда $p\neq p_1, q\neq q_1, \lambda\neq\lambda_1, \mu\neq\mu_1$ ищется в виде:

$$u(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(y)(x-a)^{n+\tau},\ \tau>0, \qquad (A.12)$$

и в результате получим одномерное интегральное уравнение

$$u_n(y)+\int_b^y\left[\lambda_2+\mu_2\left(\omega_b^{\beta}(s)-\omega_b^{\beta}(y)\right)\right]\frac{u_n(s)}{(s-b)^{\beta}}ds=f_n^2(y). \qquad (A.13)$$

Характеристическое уравнение для интегрального уравнения (А.13), имеет вид:

$$\eta^2 - \lambda_2 \eta + \mu_2 = 0. \qquad (А.14)$$

В зависимости от знака параметров и когда корни характеристического уравнения (А.11) являются вещественными и разными, вещественными и равными а также вещественными и комплексно-сопряженными, доказаны 8 теорем (от теоремы 4.2.1 до 4.2.8).

Следует отметить, что ранее одномерные интегральные уравнения типа Вольтерра (А.4) и (А.5) подробно исследованы в работах Н.Раджабова. И в нем найдены явные решения данных интегральных уравнений, которые могут содержать произвольные постоянные.

Отличие нашей научной работы состоит в том, что в предлагаемой работе изучаем ранее не изученное двумерное интегральное уравнение типа Вольтерра, с особыми линиями, являющимся продолжением исследований Н.Раджабова и Л.Н.Раджабовой. В зависимости от знака параметров и корней характеристических уравнений (А.6) и (А.7), получаем многообразие явных решений интегрального уравнения (А.1), содержащих произвольные функции. Также определены случаи, когда решение интегрального уравнения единственно.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты диссертационной работы

Основные научные результаты работы заключаются в следующем:

- получены явные представления многообразия решений двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра с особой и сильно-особой линиями для всех возможных значений корней характеристических уравнений, когда коэффициенты уравнения связаны между собой [1-A]-[4-A], [7-A], [9-A]-[15-A];
- поставлены и решены задачи типа Коши для двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра с особой и сильно-особой линиями для всех возможных значений корней характеристических уравнений, когда коэффициенты уравнения связаны между собой [6-A], [8-A], [19-A], [20-A];
- получены многообразия решений двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра с особой и сильно-особой линиями в виде обобщенного функционального и степенного рядов, когда коэффициенты уравнения не связаны между собой [5-A], [16-A], [17-A], [18-A].

РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПРАКТИЧЕСКОМУ ИСПОЛЬЗОВАНИЮ РЕЗУЛЬТАТОВ

Исследования, изложенные в диссертации, носят теоретический характер. Полученные результаты диссертационной работы могут быть использованы для дальнейшего развития теории многомерных интегральных уравнений типа Вольтерра с сингулярными и сверх-сингулярными ядрами, а также использоваться при решении различных прикладных задач.

Материалы данной диссертационной работы могут быть применены при изложении специальных курсов для студентов, магистров и докторантов вузов, обучающихся по специальности «Математика».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Список использованных источников

[1]. Abel N.H. Solution de problemes a Iaide integrals definies [Text] / N.H.Abel // Magazin Natur-vidensk – 1823. – Vol. 1. – PP. 55-68.

[2]. Carleman T. Abelsche integralgleichung mit konstanten Grenzen [Text] / T. Carleman // Math. Z. – 1922. – Bd. 15. – S.111-120.

[3]. Elliot D. Orthogonal polinomialle associated with singular integrai equations having a Couchy kernel [Text] / D.Elliot // SLAM J. Numer. Anal. –1982. – V. 13. – №6. – PP. 1041-1052.

[4]. Fredgolm I. Sur une classe di fonctionnelles equations problema di electro statica [Text] / I.Fredholm // Acta matematica. –1903. – Vol. 27. – PP. 365-390.

[5]. Gilbert D. Grundziige einer allgemeinen theorie der linearen integralgieichimgen [Text] / D.Gilbert // Leipzig. – Berlin. – 1912. – 320 p.

[6]. Khushvakhtov M.B. To the theory of non-model two-dimensional integral eguations of Volterra type with a strongly singular and weakly singular line on a strip [Text] \ L.N.Rajabova, M.B.Khushvakhtov \\ Bulletin of L.N.Gumilyov ENU. – Mathematics. Computer science. Mechanics series. – 2019.– №4(129). – PP. 67-72.

[7]. Multhopp H. Die Berechnung der Auftriebsverteilung [Text] / H.Multhopp // Luftfahrtforschung, 1938. – V. 15. – №4. – PP.153-169.

[8]. Rajabov N. Integral representation of the manifold solution for new class of the Volterra type integral equation with a boundary singularity in kernels for odd power [Text] / N.Rajabov // 10th international ISAAC Congres. University of Macau. – 2015. – PP. 56-57.

[9]. Rajabov N. Integral representation of the manifold solution for new class of the Volterra type integral equation with a boundary singularity in the case, when kernels contain logarithmic singularity and its power [Text] / N.

Rajabov //Journal of Mathematics and system science. – 2016. – No. 6. – PP. 23-37.

[10]. Rajabov N. Volterra type integral equation with super singular kernels [Text] / N.Rajabov // Abstracts of VI Congres of the Turkic World Mathematical society. – Astana, 2017. – No. 6. – PP. 220.

[11]. Rajabov N. An explicit to a class of a two dimensional Volterra type Integral Equation with week singular kernels [Text] / N.Rajabov, L.Rajabova // Conference materials IX–International Scientific Kravchuk Conference. – Keiv, 2002. – PP.171.

[12]. Rajabov N. On explicit solution to a class of a second kind complex integral equation with singular and super –singular kernels [Text] / N.Rajabov // Proceeding of the international Craz workshop «Functional Analytic and complex methods, their Interactions and applications to Partial Differential Equations». – Graz, Austria. – 2001. – PP. 313-329.

[13]. Rajabov N. About class complex two dimensional linear system integral equation with boundary fixed singular or super –singular kernels in half – plane [Text] / N.Rajabov // ISAAC Conference on Complex Analysis, Differential Equation and Related Topics. Yerevan, Armenia. – 2002. – PP. 51-52.

[14]. Rajabov N. On explicit Solution to a class of two Dimensional Volterra Type Linear Equation with Fixed Boundary Singular Kernels [Text] / N.Rajabov, L.Rajabova // Abstracts of Short Communications and Post Sessions, ICM-2002. – Beijing. – 2002. – PP.229.

[15]. Rajabov N. Volterra type integral equation with boundary and interior fixed singularity and super-singularity kernels and their application [Text] / N.Rajabov // Germany: LAP LAMBERT Academic Publishing. – 2011. – 282 p.

[16]. Rajabova L. On some two dimensional Volterra type linear integral equation with boundary super–singularity [Text] / L.Rajabova, M.Ronto, N.Rajabov // Mathematical Notes.– 2003. – Vol. 4.– No. 1.– PP. 65-76.

[17]. Rajabova L. About class, two dimensional linear Volterra type integral equation with fixed singular kernels [Text] / L.Rajabova, N.Rajabov // ISAAC conference on Complex Analisis, Differential Equations and Related Topics. Yerevan. Armenia, 2002.– PP. 5-53.

[18]. Rajabova L. Theory of class of two dimensional Volterra type integral equation with two super–singular lines [Text] / L.Rajabova // 6-th international ISAAC congress, Middle East Technical University.– Turkey, 2007.– PP. 35-36.

[19]. Rajabova L. Investigation one class of two dimensional conjugation integral equation with fixed singular kernels in connection with hyperbolic equation [Text] / L.Rajabova // Abstracts of the international conference «Inverse Problems: modeling an simulation ».– Turkey, 2008.– PP. 158-159.

[20]. Rajabova L. A study about one kind of two dimensional integral equation of Volterra type with two interior singular lines [Text] / L.Rajabova // Proseedings of the 7 th international ISAAC congress «Progress in analysis and its applications».– World Scientific, 2010.– PP. 96-104.

[21]. Saidov S. About new class of Volterra type integral equation with two boundary singularity in kernels [Text] / N.Rajabov, S.Saidov // Proceedings of the 2014 International conference on Pure mathematics(15-17 March). – Italy. –2014. – PP. 214-217.

[22]. Schmidt E. Zur theorie der linearen und nichtlinearen integralgleichungen. I Teil. Entwicklung willkurlichen Funcnionen nach system vorgeschriebener [Text] / E.Schmidt // Math. Annalen – 1907. – Vol. 63. – PP. 433-476.

[23]. Schmidt E. Zur theorie der linearen und nichtlinearen integralgleichungen. II Teil. Aufiosung der allgemeinen linearen integralgleichung [Text] / E.Schmidt // Math. Annalen – 1907. – Vol. 64. – PP. 161-174.

[24]. Voltera V. Sulla inversion degli integrali definiti [Text] / V.Voltera // Tip. della R. Accademia dei Lincei. – 1896. – Vol. 5. – PP. 177-185.

[25]. Voltera V. Sopra alcune questioni di inversioni di integrali definiti [Text] / V.Voltera // Annali di Matematica Pura ed Applicata. – 1897. – Vol. 25. – PP. 139-178.

[26]. Voltera V. Sopra un problema di electrostatica [Text] / V.Voltera // Nuovo Cimento. – 1884. – Vol. 16. – PP. 49-57.

[27]. Voltera V. Lecons sur les equations integrales et les equations integro-differentieles [Text] / V.Voltera // Gauthier Villars. – Paris. – 1913. – 180 p.

[28]. Voltera V. Theory of Functional and of integral and Integro-differential Equations [Text] / V.Voltera // Dover Publications.Ing. – New York. –1959. – 304 p.

[29]. Агачев Ю.Р. Кубатурный метод решения одного класса многомерных слабосингулярных интегральных уравнений [Текст] / Ю.Р.Агачев, Р.К. Губайдуллина // Изв. вузов. Матем. – 2009. – №12. – С.3-13.

[30]. Байков И.В. Приближенные методы решения сингулярных интегральных уравнений [Текст] / И.В.Байков. – Пенза.: Изд-во ПГУ, 2004. – 297 с.

[31]. Байков И.В. Об одном прямом методе решения сингулярных интегральных уравнений [Текст] / И.В.Байков // Журн. выч. мат. и метем. физики. – 1972. – Т. 122. – №6. – С.1381-1390.

[32]. Бильман Б.М. Об интегральных уравнениях с переменными пределами интегрирования, ядра которых имеют особенность типа однородной функции степени -1 [Текст] / Б.М.Бильман // В сб.: Дифференциальные и интегральные уравнения с сингулярными коэффициентами. – Душанбе, 1969. – С. 19-40.

[33]. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции [Текст] / И.Н.Векуа. – М.: Изд-во Физматгиз, 1959. – 672 с.

[34]. Габдулхаев Г.Б. Конечномерные аппроксимации сингулярных интегралов и прямые методы решения особых интегральных и интегро-

дифференциальных уравнений [Текст] / Г.Б.Габдулхаев // Итоги науки и техники. Мат. анализ. – 1980. – Т. 18. – №6. – С. 251-303.

[35]. Гахов Ф.Д. Краевые задачи [Текст] / Ф.Д.Гахов. – М.: Физматгиз, 1963. – 640 с.

[36]. Джангибеков Г. О некоторых двумерных сингулярных интегральных операторах [Текст] / Г.Джангибеков // Матем. Заметки. – 1989. – Т. 46. – №46. – С.91-93.

[37]. Джангибеков Г. О явном решении одного двумерного интегрального уравнения [Текст] / Г.Джангибеков, К.Арабзода // Вестник филиала московского государственного университета имени М.В.Ломоносова в г. Душанбе. Серия естественных наук. – 2017. – №(3)1. – С.19 - 40.

[38]. Джураев А.Д. Метод сингулярных интегральных уравнений [Текст] /А.Д. Джураев. М.: Наука, 1987. – 415 с.

[39]. Джураев А.Д. Об одном методе исследования сингулярных интегральных уравнений по ограниченной плоской областей [Текст] /А.Д.Джураев// Доклады АН Тадж. ССР. –1971. –Т. 197. –С. 1251-1254.

[40]. Джураев А.Д. О некоторых двумерных интегральных уравнениях по ограниченной области [Текст] / А.Д.Джураев // В кн.: Дифференциальные и интегральные уравнения. – Тблиси. – 1979. – С. 89-94.

[41]. Довгий С.А. Методы решения интегральных уравнений [Текст] / С.А. Довгий, И.К.Лифанов. – Киев.: Наукова думка, 2002. – 345 с.

[42]. Желток П.А. О численном решении характеристического сингулярного интегрального уравнения второго рода методом ортогональных многочленов [Текст] / П.А.Желток // Информационные технологии и системы 2016 (ИТС 2016): материалы международной научной конференции. (БГУИР. Минск. Беларусь. 26 октября 2016). – 2016. – С. 330-331.

[43]. Зарипов С.Б. К теории одного класса двумерного симметричного интегрального уравнения Вольтерровкого типа с одной граничной и

одной внутренней сверхсингулярной линиями [Текст] \ С.Б.Зарипов, Н.Раджабов \\ Доклады Академии каук Республики Таджикистан. – 2015. – Т. 58. №1.– С. 5-13.

[44]. Зарипов С.Б. К теории одного класса двумерного симметричного интегрального уравнения Вольтерровкого типа с одной граничной и одной внутренней сингулярной линиями [Текст] \ С.Б.Зарипов, Н.Раджабов \\ Доклады Академии каук Республики Таджикистан. – 2013. – Т. 56. №12.– С. 962-970.

[45]. Золотаревский В.А. Конечномерные методы решения сингулярных интегральных уравнения на замкнутных контурах интгегрирования [Текст] / В.А.Золотаревский. – Кишинев: Штиница,1991. – 136 с.

[46]. Золотаревский В.А. О приближенном методе решения сингулярных интегральных уравнений со сдвигом [Текст] / В.А.Золотаревский, В.Н.Сейчук. – Исследование операций и программирование. Кишинев: Штиница, 1982. – С. 55-59.

[47]. Корнейчук А.А. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов// В сб. Численные методы решения дифференциальных уравнений и квадратурные формулы [Текст] / А.А.Корнейчук // М.: наука. – 1964. – Т. 4. – №4. – С. 64-74.

[48]. Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения [Текст] / С.Г.Михлин. – М.: Физматгиз, 1962. – 254 с.

[49]. Михайлов Л.Г. Интегральные уравнения с ядром, однородным степени -1 [Текст] / Л.Г.Михайлов. – Душанбе, 1966. – 49 с.

[50]. Михайлов Л.Г. Новый класс особых интегральных уравнений и его применения к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами [Текст] / Л.Г.Михайлов. – Душанбе, 1963. – 183 с.

[51]. Михайлов Л.Г. О некоторых двумерных интегральных с однородными ядрами [Текст] / Л.Г. Михайлов // ДАН СССР. – 1970. – Т. 192. – №2. – С 272-275.

[52]. Михайлов Л.Г. Об интегральных уравнениях с сингулярно-однородными ядрами [Текст] / Л.Г.Михайлов. – Душанбе, 2015. – 52 с.

[53]. Мусаев Б.И. К вопросу обоснования метода механических квадратур для полного интегрального уравнения на отрезке [Текст] / Б.И.Мусаев. – Баку, 1998. – 22 с.

[54]. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения [Текст] / М.: Изд-во Наука, 1968. – 511 с.

[55]. Плещинский Н.Б. Сингулярные интегральные уравнения со сложной особеннотью в ядре [Текст] / Н.Б.Плещинский. – Казань.: Изд-во КФУ, 2018. – 160 с.

[56]. Пресдорф З. Некоторые классы сингулярных уравнений [Текст] / З.Пре сдорф. – М.: Мир, 1979. – 493 с.

[57]. Раджабов Н. Об одном классе модельного сверх – сингулярного интегрального уравнения, обобщающий одномерное интегральное уравнение Вольтерра с левой граничной сверхсингулярной точкой в ядре [Текст] / Н.Раджабов // Материалы III международной конференции «Проблемые дифференциальных уравнений анализа и алгебры».– Актобе, 2015. – С. 202 - 206.

[58]. Раджабов Н. Об одном классе модельного сингулярного интегрального уравнения, обобщающего одномерное интегральное уравнение Вольтерра с левой граничной сингулярной точкой в ядре [Текст] / Н. Раджабов // Вестник Таджикского нациального университета. – 2012. – №1. – С. 21-32.

[59]. Раджабов Н. Интегральные уравнения типа Вольтерра с фиксированными граничными и внутренними сингулярными и сверх-сингулярными ядрами и их приложения [Текст] / Н.Раджабов. – Душанбе, 2007. – 222 с.

[60]. Раджабов Н. Введение в теорию многомерных интегральных уравнений типа Вольтерра с фиксированными сингулярными и сверх-сингулярными ядрами и их приложении [Текст] / Н.Раджабов,

Л.Н.Раджабова // Germany: LAPLAMBET Academic Publishing, 2012. – 502 с.

[61]. Раджабов Н. Об одном интегральном уравнении Вольтерровского типа с сингулярным и сверхсигулярным ядром/ Н.Раджабов // Материалы конференции «Математическое моделирование и компютерные эксперименты ICMMCE-2000». – серия естественных наук. – 2000. – С. 57- 58.

[62]. Раджабов Н. К теории одного класса двумерного слабо-сингулярного интегрального уравнения типа Вольтерра на первом квадранте [Текст] / Н.Раджабов, Л.Н.Раджабова // Доклады Академии Наук Республики Таджикистан – 2014. –Т. 57. – №6. – С. 443-451.

[63]. Раджабов Н. Общие интегральные уравнения типов Вольтерра с левой и правой неподвижной сингулярной точкой в ядре. [Текст] / Н.Раджабов // Известия Академии наук Республики Таджикистан; Отд. физ.-мат., хим. и геологических наук. – 2001. – №1. – С. 3-19.

[64]. Раджабов Н. Интегральные уравнения вольтерровского типа с внутренней неподвижной сингулярной и сверхсингулярной точкой в ядре [Текст] / Н.Раджабов // Сборник трудов Международной научной конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения». – Самара, 2002. – С. 279-282.

[65]. Раджабов Н. Об одном интегральном уравнении вольтерровского типа [Текст] / Н.Раджабов //Доклады РАН. – 2002. –Т. 383. – №3. – С.314-317.

[66]. Раджабов Н. Исследование одного класса двумерного интегрального уравнения с фиксированными сингулярными ядрами, связанное с гиперболическим уравнением [Текст] / Н.Раджабов, Л.Н.Раджабова // Доклады РАН. – 2003. – Т. 391. – №1. – С. 20-22.

[67]. Раджабов Н. Явное решение одного класса двумерного немодельного интегрального уравнения Вольтерровского типа с двумя сингулярными линиями [Текст] / Н.Раджабов, Л.Н.Раджабова // Материалы

международной научной конференции «Актульные проблемы математики и её приложения» . – Худжанд, 2003. – С. 107-110.

[68]. Раджабов Н. Явное решение одного класса немодельного двумерного интегрального уравнения Вольтерровского типа с одной сверхсингулярной и одной сингулярной граничной линией [Текст] / Н.Раджабов, Л.Н.Раджабова // Труды Международной научной конференции по дифференциальным и интегральным уравнениям с сингулярными коэффициентами. – Душанбе, 2003. – С. 131-134.

[69]. Раджабов Н. Об одном классе двумерных линейных интегральных уравнений Вольтерровского типа с фиксированными граничными сингулярными ядрами [Текст] / Н.Раджабов, Л.Н.Раджабова // Материалы международной школы-конференции «Обратные задачи, теория и приложения». – Ханты–Мансийск. Россия. – 2002. – С. 67-69.

[70]. Раджабов Н. К теории одного класса сверхсингулярного интегрального уравнения Вольтерровского типа [Текст] / Н.Раджабов // Вестник ТНУ. – серия естественных наук. – 2017. – №1. – С.3-8.

[71]. Раджабова Л.Н. Некоторые случаи для одного класса линейных уравнении третьего порядка с сингулярной точкой [Текст] / Л.Н.Раджабова // Доклады Академии каук Республики Таджикистан. – 1999. – Т. 17. №4.– С. 41-49.

[72]. Раджабова Л.Н. Об одном случае для одного класса линейных уравнений третьего порядка с сингулярной точкой [Текст] / Л.Н.Раджабова // Тезисы докладов научно-теоретической конференции профессорско–преподавательского состава и студентов, посвященной 1100–летию государства Саманидов. – Душанбе, 1999. – С. 33-36.

[73]. Раджабова Л.Н. Интегральное представление для одного класса линейных уравнений с сверхсингулярной точкой [Текст] / Л.Н.Раджабова // Труды Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики»(МДОЗ МФ - 2000) – Орел, 2000. – С. 370-373.

[74]. Раджабова Л.Н. К теории дифференциального уравнения третьего порядка со сверхсингулярной точкой [Текст] / Л.Н.Раджабова // Тезиси докладов научной конференции «Некорректные и неклассические задачи математической физики и анализа». – Самарканд, 2000. – С. 72-75.

[75]. Раджабова Л.Н. Интегральные представления для одного случая дифференциального уравнения третьего порядка с сверхсингулярной точкой [Текст] / Л.Н.Раджабова // Тезисы докладов международной конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения». – Душанбе, 2002. – С. 73-74.

[76]. Раджабова Л.Н. Об одном случае дифференциального уравнения третьего порядка с сингулярной точкой [Текст] / Л.Н.Раджабова // Материалы международной научной конференции, посвященной 10-ой годовщине Независимости Республики Таджикистан и 80 –летию профессора М.А.Субхонкулова «Методы теории функций и их приложения». – Душанбе, 2000. – С. 35-36.

[77]. Раджабова Л.Н. К теории одного класса двумерного интегрального уравнения, когда ядро имеет граничные особые точки [Текст] / Л.Н. Раджабова // Материалы международной научно –практической конференции «16-я сессия Шурои Оли Республики Таджикистан (12 созыва) и её историческая значимость в развитии науки и образования». – Душанбе, 27-28 сентября 2002. – С. 186-187.

[78]. Раджабова Л.Н. Явное решение одного класса двумерного линейного интегрального уравнения Вольтерровского типа с двумя граничными сингулярными линиями [Текст] / Л.Н.Раджабова //Международная научная конференция «Дифференциальные уравнения и их приложения» . – Самара, 2002. – С. 286-288.

[79]. Раджабова Л.Н. Явное решение одного класса немодельного интегрального уравнения Вольтерровского типа с одной сингулярной и одной слабо–сингулярной линией [Текст] / Л.Н.Раджабова // Труды

международной конференции «Дифференциальные уравнения с частными производными и родственные проблемы анализа и информатики» . – Ташкент. – 16-19 ноября 2004. – Т. 4. – С. 78-80.

[80]. Раджабова Л.Н. «Об одном общем интегральном уравнении типа Вольтерра с одной сингулярной и одной сверхсингулярной линиями» [Текст] / Л.Н.Раджабова // Труды XII Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ-2005) . – Харьков -Херсон, 2005. – С. 303-306.

[81]. Раджабова Л.Н. Об одном общем интегральном уравнении типа Вольтерра с сингулярными линиями [Текст] / Л.Н.Раджабова // Труды Международной научно–теоретической конференции по качественным исследованиям дифференциальных уравнений и их приложении, посвященной 10 –летию РТСУ. – Душанбе. – 12-14 мая 2005. – С. 96-98.

[82]. Раджабова Л.Н. Об одном общем интегральном уравнении типа Вольтерра с одной сингулярной и одной сверхсингулярной линиями [Текст] / Л.Н.Раджабова // Материалы международной научной конференции «Дифференциальные и интегральные уравнения и смежные вопросы анализа». – Душанбе, 8 ноября 2005. – С. 153-156.

[83]. Раджабова Л.Н. Об одном общем интегральном уравнении типа Вольтерра со сверхсингулярными линиями [Текст] / Л.Н.Раджабова // Вестник национального университета. – Душанбе, 2005. – №2. – С. 116-123.

[84]. Раджабова Л.Н. Об одном классе гиперболического уравнения с сингулярными линиями [Текст] / Л.Н.Раджабова // Вестник национального университета. – Душанбе, 2006. – № 5. – С. 44-51.

[85]. Раджабова Л.Н. К теории одного класса гиперболического уравнения с сингулярными линиями [Текст] / Л.Н.Раджабова // Доклады Академии каук Республики Таджикистан. – 2006. – Т. 49. – № 8. – С. 710-717.

[86]. Раджабова Л.Н. Об одном классе модельного гиперболического уравнение с двумя граничными особенными линиями [Текст] / Л.Н.Раджабова // Материалы научной конференции «Математика и информационные технологии», посвященной 15–летию независимости Республики Таджикистан. – Душанбе, 27 октября 2006 . – С. 66-68.
[87]. Раджабова Л.Н. Об одном общим двухмерном интегральном уравнении типа Вольтерра с особенностью и сильной особенностью на границе области [Текст] / Л.Н.Раджабова // Тезисы международной конференции «Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения». – Новосибирск, 2007. – С. 458-459.
[88]. Раджабова Л.Н. Об одном общем двухмерном интегральном уравнении типа Вольтерра с особенностями на границе области [Текст] / Л.Н.Раджабова // Вестник Таджикского национального университета. – 2007. – №3(35). – С. 30-38.
[89]. Раджабова Л.Н. К теории одного класса общего двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра с особенностями на границе области [Текст] / Л.Н.Раджабова // Материалы международной научной конференции «Актуальные вопросы математического анализа, дифференциальных уравнений и информатики», посвященной 70-летию акад. АН РТ З.Д.Усманова. – Душанбе, 24-25 августа 2007. – С. 92-94.
[90]. Раджабова Л.Н. О некоторых случаях одного двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра с сильными особенностями на границе области [Текст] / Л.Н.Раджабова // Материалы международной научной конференции «Актуальные вопросы математического анализа, дифференциальных уравнений и информатики», посвященной 70-летию акад. АН РТ З.Д.Усманова. – Душанбе, 24-25 августа 2007. – С. 94-97.
[91]. Раджабова Л.Н. К теории одного класса двумерного сопряженного интегрального уравнение вольтеровского типа с граничным

фиксированными сингулярными ядрами [Текст] / Л.Н.Раджабова // Труды международной научной конференции «Дифференциальные уравнение и смежные проблемы» . – Стерлитамак, 24-28 июня 2008. – Т. 1. – С. 164-168.

[92]. Расолько Г.А. Численое решение некоторых сингулярных интегральных уравнений с ядрами Коши методом ортогональных многочленов [Текст] / Г.А.Расолько. – Минск.: Изд-во БГУ, 2017. – 239 с.

[93]. Саидов С. Интегральные представления многообразия решения для одного класса обобщённого интегрального уравнения Вольтерровкого типа с двумя граничными сингулярными точками [Текст] \С.Саидов, Н. Раджабов \\ Доклады Академии каук Республики Таджикистан. – 2015. – Т. 58. №4.– С. 267-272.

[94]. Саидов С. Интегральные представления многообразия решения для одного класса обобщённого интегрального уравнения Вольтерровкого типа с двумя граничными сингулярными точками [Текст] \ С.Саидов, Н.Раджабов \\ Доклады Академии каук Республики Таджикистан. – 2012. – Т. 55. №7.– С. 519-525.

[95]. Саидов С. Одномерное интегральное уравнение Вольтерровкого типа с двумя граничными сингулярными точками [Текст] \С.Саидов, Н.Раджабов \\ Вестник Таджикского национального университета. – 2012. – №1/3. – С. 36-42.

[96]. Саидов С. Общий случай сингулярного интегрального уравнения Вольтерровкого типа с логарифмической особенностью [Текст] \ С.Саидов \\ Вестник Таджикского национального университета. – 2015. – №1/1(156). – С. 5-8.

[97]. Саидов С. Граничные задачи для одного класса интегральных уравнений типа Вольтерра с двумя граничными фиксированными сингулярными точками [Текст] \ С.Саидов, Н.Раджабов, Л.Н.Раджабова

\\ Вестник Таджикского национального университета. – 2016. – №1/2(196). – С. 32-38.

[98]. Саидов С. К теории одного класса интегральных уравнений двумя граничными сингулярными точками [Текст] \ С.Саидов \\ Вестник Таджикского национального университета. – 2017. – №1/1. – С. 31-34.

[99]. Саидов С. Интегралные представления и граничные задачи для одного класса интегральных уравнений типа Вольтерра с двумя граничными сингулярными точками [Текст] \ С.Саидов, Н.Раджабов, Л.Н.Раджабова \\ Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математики и их приложения», посвященной 70-летию образования ТНУ и 80 – летию АН РТ, д.ф.м.-н, профессора Раджабов Н (25-26 сентября 2018 г.). –Душанбе. – 2018– С. 175-180.

[100]. Саидов С. К теории одного класса одномерного интегрального уравнения Вольтерровского типа с двумя граничными сингулярными точками [Текст] \ С.Саидов, Н.Раджабов \\ Труды всероссийской научной конференции с международном участием «Дифференциальные уравнения и их приложения», посвященной 70-летию образования ТНУ и 80 – летию АН РТ, д.ф.м.-н, профессора Раджабов Н (27-30 июня 2011 г.). –Стерлитамак. – 2011– С. 72-74.

[101]. Саидов С. К теории одного класса одномерного модельного интегрального уравнения Вольтерровского типа с двумя граничными сингулярными точками [Текст] \ С.Саидов, Н.Раджабов \\ Материалы XI школы молодых учёных «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы современного анализа и информатики». – Терскол. – 2013– С. 55-58.

[102]. Саникидзе Д.Г. О некоторых линейных процессах аппроксиматции сингулярных интегралов в смысле главного значения [Текст] / Д.Г. Саникидзе // Тезисы докл. третьей научной сессии института прикл. мат. Тбилисского государственного университета. – 1971. – С.50.

[103]. Саникидзе Д.Г. О порядке приближения некоторых сингулярных операторов квадратурными суммами [Текст] / Д.Г.Саникидзе // Изв. АН. Арм ССР. сер.мат-ка. – 1970. – Т. 5. – №4. – С. 371-384.

[104]. Саникидзе Д.Г. Метод свободных параметров в приближенном вычислении интегралов типа Коши [Текст] / Д.Г.Саникидзе, К.Р.Нинидзе // Тр. X международного симпозимума. Харков. Херсон. – 2011. – С. 299-302.

[105]. Сейчук В.Н. On direct methods of solving nonlinear singular integral equations and theirs sistems given jn closed smooth contours [Text] / В.Н.Сейчук // Тр. IX международного симпозимума. «МДОЗМФ-2000». Орел. – 2000. – С. 406-409.

[106]. Солдатов А.П. Характеристическое сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши в исключительном случае [Текст] / А.П. Солдатов // Научные ведомости БГУ. – Серия математика-физика, 2011. – №17(112). – С.1-7.

[107]. Солдатов А.П. Сингулярные интегральные уравнения неклассического типа на кусочно гладкой кривой [Текст] / А.П.Солдатов// Математические заметки СВФУ. – 2022. – Т. 29. – №4. – С.37-61.

[108]. Тихоненко Н.Я. Методы приближенного решения сингулярных интегральных уравнений на вещественной оси и уравнений типа свертки [Текст] / Н.Я.Тихоненко // Тр. IX международного симпозимума. «МДОЗМФ-2000». Орел. – 2000. – С. 440-444.

[109]. Хубжеты Ш.С. Численное решение гиперсингулярных интегральных уравнений первого рода [Текст] / Ш.С.Хубжеты// Владикавказский математический жуарнал. – 2020. – Т. 22. – №1. – С.85-92.

[110]. Хушвактов М.Б. К теории особых двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с особой и слабо-особой линей на полосе [Текст] \ М.Б. Хушвахтов, Л.Н.Раджабова \\ Вестник Таджикского национального университета. – 2017. – №1/3. – С. 3-5.

[111]. Хушвахтов М.Б. К теории особых двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с особой и слабо-особой линей на полосе вслучае, когда параметры уравнения не связаны между собой [Текст] \ М.Б.Хушвахтов, Л.Н.Раджабова \\ Доклады Академии каук Республики Таджикистан. – 2018. – Т. 61. №4.– С. 331-337.

[112]. Хушвахтов М.Б. О некоторых случаях двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с особой и слабо-особой линей на полосе технического университета. – 2019. – №1. – С. 44-49.

[113]. Хушвахтов М.Б. О некоторых случаях немодельных двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с особой и слабо-особой линей на полосе [Текст] \ М.Б.Хушвахтов, Л.Н.Раджабова \\ Доклады Академии каук Республики Таджикистан. – 2019. – Т. 62. №9-10.– С. 533-540.

[114]. Хушвахтов М.Б. Граничные задачи для двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с особой и слабо-особой линей на полосе [Текст] \ М.Б.Хушвахтов, Л.Н.Раджабова \\ Вестник Таджикского технического университета. – 2019. – №2. – С. 20-24.

[115]. Хушвахтов М.Б. К теории немодельных двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с особой и слабо-особой линей на полосе [Текст] \ М.Б.Хушвахтов \\ Вестник Таджикского технического университета. – 2019. – №3. – С. 19-23.

[116]. Шешко М.А. Сингулярные интегралные уравнения с ядром Коши и Гильберта и их приближенное решение [Текст] / М.А.Шешко // Люблин. Научное общество католического университета в Люблине. – 2003. – 288 с.

[117]. Шукурова Г.Н. К теории симметричных интегральных уравнений типа Вольтерра с особенностью и логарифмической особенностью в ядре [Текст] \ Г.Н.Шукурова, Л.Н.Раджабова \\ Доклады Академии каук Республики Таджикистан. – 2017. – Т. 60. №3-4.– С. 126-131.

[118]. Шукурова Г.Н. Задача типа Коши для симметричного интегрального уравнения типа Вольтерра с особенностью и логарифмической особенностью [Текст] \ Г.Н.Шукурова, Л.Н.Раджабова \\ Доклады Академии каук Республики Таджикистан. – 2017. – Т.60. №5-6.– С.212-217.

[119]. Шукурова Г.Н. О исследовании симметричного интегрального уравнения типа Вольтерра с сингулярной и логарифмической особенностью для произвольных функций в ядре [Текст] \ Г.Н.Шукурова, Л.Н.Раджабова \\ Вестник Таджикского национального университета. –2017.–№1/4. – С.6-10.

[120]. Шукурова Г.Н. О некоторых случаях симметричных интегральных уравнений типа Вольтерра с особенностью и логарифмической особенностью в ядре [Текст] \ Г.Н.Шукурова, Л.Н.Раджабова \\ Вестник Таджикского национального университета. – 2018. – №1/4. – С. 18-27.

[121]. Шукурова Г.Н. О некоторых случаях симметричных интегральных уравнений типа Вольтерра с особенностью и логарифмической особенностью в ядре [Текст] \ Г.Н.Шукурова, Л.Н.Раджабова \\ Доклады Академии каук Республики Таджикистан. – 2018. – Т. 61. №3.– С. 231-240.

[122]. Шукурова Г.Н. О некоторых случаях симметричных двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с особенностью и логарифмической особенностью в ядре [Текст] \ Л.Н.Раджабова, Г.Н.Шукурова \\ Вестник Таджикского национального университета. – 2018. – №4. – С. 5-9.

[123]. Шукурова Г.Н. Граничные задачи для симметричного интегрального уравнения типа Вольтерра с особенностью и логарифмической особенностью по одному переменному и особенностью по второму переменному [Текст] \ Г.Н.Шукурова \\ Вестник Таджикского национального университета. – 2019. – №4. – С. 5-14.

[124]. Шукурова Г.Н. К теории одного класса симметричного интегрального уравнения типа Вольтерра с внутренней сингулярной и логарифмической особенностью [Текст] \ Г.Н.Шукурова \\ Вестник Таджикского технического университета. – 2015. – №3(31). – С. 10-13.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Статьи, опубликованные в рецензируемых журналах, рекомендованных ВАК при Президенте Республики Таджикистан:

[1-А]. Ахмадов Ф.М. К теории двумерных интегральных уранений типа Вольтерра с граничными особой и сильно-особыми линиями, когда корни характеристических уравнений вещественные и разные [Текст] / Л.Н.Раджабова., Ф.М.Ахмадов // Вестник ТНУ. Серия естественных наук. – 2021. – №1. – С.78-89.

[2-А]. Ахмадов Ф.М. О некоторых случаях решения двумерных интегральных уранений типа Вольтерра с граничной особой и сильно-особой линиями [Текст] / Л.Н.Раджабова., Ф.М.Ахмадов // Доклады НАН Таджикистана. – 2021. – Т. 64. – №5-6. – С. 283-290.

[3-А]. Ахмадов Ф.М. Явные решения двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра с граничными особыми линиями, когда корни характеристических уравнений комплексно-сопряженные [Текст] / Ф.М.Ахмадов // Вестник ТНУ. Серия естественных наук. – 2021. – №4. – С.119-128.

[4-А]. Ахмадов Ф.М. О некоторых случаях решения двумерного интегрального уранения типа Вольтерра с граничной особой и сильно-особой линиями, когда корни характеристических уравнений вещественные, разные и комплексно-сопряженные [Текст] / Ф.М.Ахмадов // Доклады НАН Таджикистана. – 2022. – Т.65. – №5-6. – С.314-324.

[5-А]. Ахмадов Ф.М. О некоторых случаях двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра с граничными особой и сильно−особой линиями, когда параметры уравнения не связаны между собой [Текст] / Ф.М.Ахмадов // Известия НАН Таджикистана. – 2023. – №2(191). – С.18-26.

[6-А]. Ахмадов Ф.М. Задачи типа Коши для двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра с граничными особыми и сильно-особыми линиями [Текст] / Л.Н.Раджабова., Ф.М.Ахмадов // Доклады НАН Таджикистана. – 2023. – Т. 66. – №3-4. – С.178-186.

3.Статьи, опубликованные в других журналах, изданиях и сборниках:

[7-А]. Ахмадов Ф.М. Явные решения двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра с граничной особой и сильно-особой линиями, когда корни характеристических уравнений вещественные, разные и равные [Текст] / Л.Н.Раджабова., Ф.М.Ахмадов // Bulletin of L.N.Gumilyov ENU. – Mathematics. Computer science. Mechanics series. – 2021. – Vol. 137. – №4. – P. 6-13.

[8-А]. Akhmadov F.M. Solution of a Cauchy type problem for an integral equation of Volterra type with singular kernels, when the roots of the characteristic equations are complex conjugate [Text] / L.N.Rajabova, F.M.Akhmadov// Bulletin of L.N.Gumilyov ENU. – Mathematics. Computer science. Mechanics series. – 2024. – Vol. 146. – No1. – PP. 27-35.

[9-А]. Ахмадов Ф.М. О явных решениях двумерных интегральных уранений типа Вольтерра с граничной особой и сильно-особыми линиями, когда корни характеристических уравнений вещественные и равные [Текст] / Л.Н.Раджабова., Ф.М.Ахмадов, // Материалы международной научной конференции “Современные проблемы математики и физики”.– Стерлитамак. – 2021. – Т.1. – С.91- 96.

3. Материалы конференций, тезисы докладов:

[10-А]. Ахмадов Ф.М. О некоторых случаях решения двумерного интегрального уранения типа Вольтерра с граничными особыми линиями, когда корни характеристических уравнений вещественные и равные [Текст] / Л.Н.Раджабова., Ф.М.Ахмадов // Материалы международной конференции "Актуальные проблемы современной математики". – Душанбе. – 2021. – С.29-32.

[11-А]. Ахмадов Ф.М. О некоторых случаях решения двумерного интегрального уравнения типа вольтерра с граничными особыми линиями, когда корни характеристических уравнений вещественные и разные [Текст] / Ф.М.Ахмадов // Материалы международной конференции "Актуальные проблемы современной математики". – Душанбе. – 2021. – С.194-198.

[12-А]. Ахмадов Ф.М. Некоторых случаях решения двумерного интегрального уравнения типа вольтерра с граничными особыми линиями, когда корни характеристических уравнений вещественные и равны [Текст] / Л.Н.Раджабова, Ф.М.Ахмадов // Материалы "Современные проблемы прикладной математики и их роль в формировании технического мировоззрения общества". – Худжанд. – 2021. – С.148-150.

[13-А]. Ахмадов Ф.М. Некоторых случаях решения двумерного интегрального уравнения типа вольтерра с граничными особыми линиями, когда корни характеристических уравнений вещественные и равные [Текст] / Ф.М.Ахмадов // Материалы республиканской научно-практической конференции "Краевые задачи для некоторых классов дифференциальных уравнений". – Душанбе. – 2021. – С.9-11.

[14-А]. Ахмадов Ф.М. О некоторых случаях решения двумерного интегрального уранения типа Вольтерра с граничной особой и сильно-особой линиями, когда корни характеристических уравнений вещественные, равные и разные [Текст] / Л.Н.Раджабова., Ф.М.Ахмадов // Материалы международная конференция “Современные проблемы теории чисел и математического анализа”, посвящённая восьмидесятилетиию со дня рождения доктора физико-математических наук, профессора Исмоилова Додожона. – Душанбе. – 2022. – С.40-43.

[15-А]. Ахмадов Ф.М. Некоторых случаях решения двумерного интегрального уравнения типа вольтерра с граничными особыми линиями, когда корни характеристических уравнений вещественные и разные [Текст] / Ф.М.Ахмадов // Материалы научно-теретической конференции преподователей и студентов университета на тему “Основные направления обеспечения ускоренной индустриализации экономики в контексте стратегических целей Республики таджикистан”, “Посвящённой обявлению 2022-2026 годов годами развития промышленности”.– Душанбе. ДБССТ. – (29-30-уми апрели с 2022) . – С.521-523.

[16-А]. Ахмадов Ф.М. К теории двумерных интегральных уранений типа Вольтерра с граничными особыми и сильно-особыми линиями, когда параметры уравнения не связаны между собой [Текст] / Л.Н.Раджабова, Ф.М.Ахмадов // Материалы международная конференция “Современные проблемы математического анализа и теории функции”, посвящённая 70-летию академика НАН Таджикистана, доктора физико-математических наук, профессора Шабозова Мирганда Шабозовича. – Душанбе. – 2022. –С.309-311.

[17-А]. Ахмадов Ф.М. О явных решениях двумерного интегрального уравнения типа вольтерра с граничными особой и сильно−особой линиями, когда параметры уравнения не связаны между собой [Текст] / Л.Н.Раджабова, Ф.М.Ахмадов // Материалы международной научно-практической конференции, “Современные проблемы математики и её приложения”, посвящённой 20-летию развития естественных, точных и математических наук 2020 – 2040 годы.– Душанбе. – ДМТ – 20-21 октября. – 2022. – С.176-179.

[18-А]. Ахмадов Ф.М. О явных решениях двумерного интегрального уравнения типа вольтерра с граничными особой и сильно−особой линиями, когда параметры уравнения не связаны между собой [Текст] / Л.Н.Раджабова, Ф.М.Ахмадов // Материалы международную научную конференцию, “Комплексный анализ и его приложения”, посвящённую двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических наук в сфере образования и науки (2020 – 2040).– Бохтар. – 19 ноября. – 2022. – С.156-159.

[19-А]. Ахмадов Ф.М. О решении задачи типа коши для двумерного интегрального уравнения Вольтерра с особыми линиями [Текст] / Л.Н.Раджабова, Ф.М.Ахмадов // Материалы международная конференция “Современные проблемы математика”, посвящённая 50-летию Института математики им. А.Джураева Национальной академии наук Таджикистана. – Душанбе. – 2023. – С.176-178.

[20-А]. Ахмадов Ф.М. Задача типа Коши для двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра с особыми линиями, когда корни характеристических уравнений вещественные и равные [Текст] / Л.Н.Раджабова, Ф.М.Ахмадов // Материалы международную научно-практическую “Современные проблемы математики и её приложения”, посвящёную 85-летию академика НАНТ, доктора физико-математических наук, профессор Раджабова Н. – Душанбе. – ДМТ – 05 октября.– 2023. – С. 154-157.