Министерство образования и науки
Республики Таджикистан
Таджикский национальный университет

УДК 517.5

На правах рукописи

Алаа Сайфулрахмон Курайши

ВЕРХНИЕ ГРАНИ СРЕДНЕКВАДРАТИЧНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ

Д И С С Е Р Т А Ц И Я
на соискание ученой степени доктора философии (PhD)
– доктор по специальности 6D060100 – Математика: 6D060101
– Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Научный руководитель:
академик Национальной академии
наук Таджикистана,
доктор физико-математических наук
профессор Шабозов М.Ш.

Д У Ш А Н Б Е – 2022

Оглавление

Обозначения

$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел

$\mathbb{Z}_+$ — множество целых неотрицательных чисел

$\mathbb{R}$ — множество действительных чисел

$\mathbb{R}_+$ — множество положительных чисел

$\mathbb{T} := [-\pi, \pi]$ — одномерный тор

$L_2 := L_2(\mathbb{T}) = L_2[0, 2\pi]$ — пространство измеримых по Лебегу суммируемых с квадратом 2π-периодических функций

$\mathcal{T}_{2n-1}$ — подпространство тригонометрических полиномов порядка $n-1$

$E_{n-1}(f)_2$ — величина наилучшего приближения функции $f \in L_2(\mathbb{T})$

$\Delta_h^m f(x)$ — разность m-го порядка функции f в точке x с шагом h

$\omega_m(f, \delta)_2$ — модуль непрерывности m-го порядка функции $f \in L_2(\mathbb{T})$

$F_h f(x)$ — оператор обобщенного сдвига

$\Omega_m(f; t)_2$ — обобщённый модуль непрерывности m-го порядка в L_2

$\widetilde{\omega}_{2m-1}(f^{(r)}, t)$ — неклассический модуль непрерывности

sup — точная верхняя грань

inf — точная нижняя грань

supvrai — существенная верхняя гарнь

$a_k(f),\ b_k(f)$ — косинус- и синус-коэффициенты Фурье

Введение

Актуальность темы исследования. В диссертации исследуются экстремальные задачи отыскания верхней грани наилучшего совместного приближения функций и их промежуточных производных на некоторых классах функций, задаваемых обобщёнными модулями непрерывности. В частности, исследуются наилучшие методы приближения классов функций, вычисляются точные константы в неравенствах типа Джексона-Стечнкина с обобщёнными модулями непрерывности, находятся точные значения наилучшего совместного приближения некоторых классов функций.

Получение точных констант, а в более общем виде – точные решения экстремальных задач, играет важную роль в теории приближений, так как чаще всего каждая новая точно решённая экстремальная задача приводит к некоторому новому методу решения.

В некоторых экстремальных задачах теории приближения функций точные неравенства типа Джексона-Стечкина позволяют установить новые связи между конструктивными и структурными свойствами функций. Поэтому известное неравенство Джексона-Стечкина, содержащее оценки величины наилучшего приближения функций полиномами посредством модулей непрерывности высших порядков произвольной производной (см., например, монографии Н.И.Ахиезер [7], В.К.Дзядик [34], Н.П.Корнейчук [53, 55], И.П.Натансон [70], А.И.Степанец [85], А.Ф.Тиман [94], В.М.Тихомиров [96]) интенсивно изучались с целью его оптимизации (Н.П.Корнейчук [48–52], Н.И.Черных [104, 105], А.А.Лигун [61, 62, 64–67], В.В.Жук [39, 40], Л.В.Тайков [91, 92], С.Б.Вакарчук [15, 16, 18–20], М.Ш.Шабозов [107–109], Г.А.Юсупов [124, 126] и многие другие). Подобные экстремальные задачи решаются во всех трёх глав данной диссертационной работы.

Актуальность и *целесообразность* настоящей диссертационной работы определяются тем, что в ней найдены точные константы в неравенствах типа Джексона-Стечкина между величиною наилучшего совместного приближения функций и различными обобщёнными модулями непрерывности как периодических функций, так и функции определённой на все оси.

Точные константы в неравенствах Джексона и Джексона-Стечкина в различных пространствах функций изучались многими математиками. Краткое описание некоторых из этих результатов и дополнительные библиографические сведения содержатся в работах [24, 117, 120].

Степень научной разработанности изучаемой проблемы. Существенный вклад в задаче приближения периодических функций тригонометрическими полиномами и вопросами нахождения точных констант в неравенствах Джексона принадлежит крупнейшими учёнными, такими как С.Б.Стечкин [87], Н.П.Корнейчук [48, 50–52, 54], В.И.Бердышев [12], В.К.Дзядык [34], Н.И.Черных [104, 105], Л.В.Тайков [91, 92], А.А.Лигун [64–67], Н.Айнуллоев [6] и многими другими. В последнее время весомый вклад в этом направление внесли В.А.Абилов, Ф.В.Абилова [3], С.Б.Вакарчук [15, 16, 18–20], М.Ш.Шабозов с учениками [112, 113, 115–117, 120, 121], Г.А.Юсупов [124, 126], Н.Ф.Олифтаев

[71, 72], К.К.Палавонов [73, 74] и другие.

Связь работы с научными программами (проектами), темами. Диссертационная работа выполнена в рамках реализации перспективного плана научно-исследовательских работ кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений Таджикского национального университета на 2017-2022 гг. по теме "Теория аппроксимации функций".

Общая характеристика работы

Цель исследования. Основной целью диссертационной работы заключается в решении экстремальных задач связанные с отысканием точной значении верхней грани наилучшей совместной приближении функции и её промежуточных производных тригонометрическими и алгебраическими полиномами как на конечном, так и на всей оси.

Задачи исследования. В соответствие с поставленной цели выделяются следующие задачи:

- найти точные значения верхних граней наилучших совместных среднеквадратичных полиномиальных приближений некоторых классов дифференцируемых периодических функций, характеризующихся обобщённым модулем непрерывности, порождённым конкретным оператором сдвига;
- найти точное неравенство типа Джексона-Стечкина для наилучшего совместного приближения посредством $\mathscr{K}$-функционала Петре;
- найти точную константу в неравенстве Джексона-Стечкина для наилучших совместных среднеквадратичных полиномиальных приближений с неклассическим модулем непрерывности;
- найти верхняя грань наилучшего совместного приближения в среднем некоторых классов функций, задаваемых неклассическим модулем непрерывности;
- найти верхние грани наилучшего совместного полиномиального приближения классов функций в среднем на вещественной оси $\mathbb{R} := (-\infty, +\infty)$ с

весом Чебышева-Эрмита, определяемые обобщённым модулем непрерывности.

Объект исследования. Объектом исследования является различные экстремальные задачи связанные с наилучшим совместном приближением функций и их производных тригонометрическими и алгебраическими полиномами, как на периоде, так и на всей оси в гильбертовых пространствах.

Предмет исследования. Предметом исследования являются получение точных неравенствах типа Джексона-Стечкина между наилучшей совместной приближении функций и её промежуточных производных и обобщёнными модулями непрерывности.

Научная новизна исследований. В диссертации получены следующие основные результаты:

- найдено значение точной верхней грани наилучших совместных среднеквадратичных полиномиальных приближений некоторых классов дифференцируемых периодических функций, характеризующиеся обобщённым модулем непрерывности, порождённым конкретным оператором сдвига;
- найдена точное неравенство типа Джексона-Стечкина для наилучшего совместного приближения посредством $\mathscr{K}$-функционала Петре;
- найдена точная константа в неравенстве Джексона-Стечкина для наилучших совместных среднеквадратичных полиномиальных приближений с неклассическим модулем непрерывности;
- найдена верхняя грань наилучшего совместного приближения некоторых

классов функций, задаваемых неклассическим модулем непрерывности;

- найдены верхние грани наилучшего совместного полиномиального приближения классов функций в среднем на вещественной оси $\mathbb{R} := (-\infty, +\infty)$ с весом Чебышева-Эрмита, определяемые обобщённым модулем непрерывности.

Теоретическая и научно-практическая значимость работы. Работа носит теоретический характер. Результаты диссертационной работы и методы их доказательств можно применять в экстремальных задачах теории приближения функций многих переменных, как в конечной области, так и во всей плоскости.

Положения, выносимые на защиту:

- теоремы о точном значении верхней грани наилучших совместных среднеквадратичных полиномиальных приближениях некоторых классов дифференцируемых периодических функций, характеризуемых обобщёнными модулями непрерывности, порождёнными конкретным оператором сдвига;
- теоремы о точном неравенстве типа Джексона-Стечкина для наилучшего совместного приближения посредством $\mathscr{K}$-функционала Петре;
- теоремы о точных константах в неравенстве Джексона-Стечкина для наилучших совместных среднеквадратичных полиномиальных приближений с неклассическим модулем непрерывности;
- теоремы о точной верхней грани наилучших совместных приближениях некоторых классов функций, задаваемых неклассическим модулем непре-

рывности;

- теоремы о нахождении верхней грани наилучшего совместного полиномиального приближения классов функций в среднем на вещественной оси $\mathbb{R} := (-\infty, +\infty)$ с весом Чебышева-Эрмита, определяемые обобщённым модулем непрерывности.

Степень достоверности результатов. Достоверность научных результатов диссертационной работы обеспечивается строгими математическими доказательствами всех утверждений, приведённых в диссертации, подтверждается исследованиями других авторов.

Соответствия диссертации паспорту научной специальности (формуле и области исследования). Диссертационная работа выполнена по специальности 6D060101 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ и является разделом математического анализа указанной в пункте III параграфа 3 паспорта научной специальности.

Личный вклад соискателя ученой степени. Задача исследования и выбор метода доказательств сформулированы научным руководителем работы, оказывающий также консультативное содействие. Основные результаты диссертационной работы, перечисленные в разделе “Научная новизна” получены лично автором.

Апробация результатов диссертации. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на:

- семинарах кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений Таджикского национального университета под рукодводством академика НАН Таджикистана, профессора М.Ш.Шабозова (Душанбе, 2019-2022 гг.);

- международной научной конференции “Теория приближения и её применение” (Днепро, Украина, 16-19 сентября 2020 г.);
- республиканской научно-практической конференции “Современные проблемы теории дифференциальных уравнений” (Душанбе, 26 сентября 2020 г.);
- республиканской научно-практической конференции “Краевые задачи для некоторых классов дифференциальных уравнений”, (Душанбе, 4 декабря 2021 г.).

Публикации по теме диссертации. Результаты исследований автора по теме диссертационной работы опубликованы в 7 научных работах, из них 4 статьи опубликованы в изданиях, входящих в действующий перечень ВАК Республики Таджикистан, а 3 в трудах международных конференций.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, списка цитированной литературы из 133 наименования, занимает 141 страницы машинописного текста и набрана на LaTeX. Для удобства в диссертации применена сквозная нумерация теорем, лемм, следствий и формул. Они имеют тройную нумерацию, в которой первая цифра совпадает с номером главы, вторая указывает на номер параграфа, а третья на порядковый номер теорем, лемм, следствий или формулы в данном параграфе.

ГЛАВА 1. Анализ литературы по неравенству Джексона-Стечкина между величинами наилучшего приближения функции и некоторых характеристик её гладкости

В этой главе излагается анализ изученной литературы по теме диссертационной работы, приводятся основы теоретико-методологического исследования, анализ существующих проблем и полученных результатов, а также нерешенные задачи по теме диссертационной работы.

В некоторых задачах теории приближения функций точные неравенства позволяют установить новые связи между конструктивными и структурными свойствами функций. Поэтому известное неравенство Джексона-Стечкина, содержащее оценки величины наилучшего приближения функции полиномами посредством модуля непрерывности высших порядков её произвольной производной интенсивно изучалось с целью его оптимизации в работах С.Б. Стечкина [86, 87], Н.П. Корнейчука [48–54], Н.И. Черных [104, 105], В.И. Бердышева [12], А.А. Лигуна [65–68], В.В. Жук [39, 40], В.И. Иванова и О.И. Смирнова [43], А.Г. Бабенко [8], С.Н. Васильева [28, 29], С.Б. Вакарчука и В.И. Забутной [22–24], М.Ш. Шабозова [106], М.Ш. Шабозова и Г.А. Юсупова [120], С.Б. Вакарчука [15, 16], М.Ш. Шабозова и А.А. Шабозовой [117], Г.А. Юсупова [124] и многими другими.

Анализ этих и некоторых других работ дан в первом и втором параграфе.

Там же указаны нерешенные задачи по данной тематике и отмечается, что некоторые экстремальные задачи, связанные с содержанием этих работ решены во второй, третьей и четвертой главы данной диссертационной работы.

§ 1.1. Краткий исторический обзор отыскания точных констант в неравенстве Джексона-Стечкина в различных нормированных пространствах

В теории приближения функций принято выделять аппроксимативные свойства функции, определяемые скоростью её приближения, и структурные гладкостные свойства функции, отражающее её внутренние свойства. Под прямыми теоремами понимают неравенства, в которых аппроксимативные свойства функции оцениваются через ее структурные свойства. В нашем случае аппроксимативные свойства функции охарактеризованы величиной наилучшего приближения или скоростью приближения к нулю линейными методами, а структурные свойства – её модулями непрерывности произвольных порядков.

Приведем общее определение модуля непрерывности произвольной функции f принадлежащей гильбертовому пространству $L_2 := L_2[0, 2\pi]$.

Всюду далее под $\omega_m(f,t)\,(m \in \mathbb{N}; t \geq 0)$ понимаем модуль непрерывности m-го порядка функции $f \in L_2$, которая определяется равенством

$$\omega_m(f,t) := \sup\left\{\|\Delta_h^m f\| : \, |h| \leq t\right\}, \tag{1.1.1}$$

где

$$\Delta_h^m f(x) := \sum_{j=0}^{m} (-1)^{m-j} \binom{m}{j} f(x+jh)$$

конечная разность m-го порядка функции f в точке x с шагом h.

Через $L_2^{(r)}\,(r \in \mathbb{N})$ обозначим множество функций $f \in L_2$, у которых производные $(r-1)$-го порядка абсолютно непрерывны, а производные r-го порядка

$f^{(r)}$ принадлежать пространству L_2 $(f^{(r)} \in L_2)$.

Среди экстремальных задач теории приближений функций одной из важнейших является задача вычисления точных констант в неравенствах Джексона-Стечкина следующего вида

$$E_{n-1}(f) \le \chi n^{-r} \omega_m(f^{(r)}, \tau/n) \ \ (r \in \mathbb{Z}_+;\, n, m \in \mathbb{N}; \tau > 0)$$

на классах $L_2^r(L_2^0 \equiv L_2)$, где χ – константа. Эту задачу в разное время исследовали Н.П. Корнейчук [48, 54], Н.И. Черных [104, 105], Л.В. Тайков [91, 92], А.А. Лигун [65–68], В.А. Юдин [125], В.И. Иванов и О.И. Смирнов [43], А.Г. Бабенко [8], С.Н. Васильев [28, 29], С.Б. Вакарчук [15, 16], М.Ш. Шабозов [106], М.Ш. Шабозов и Г.А. Юусупов [120], Г.А.Юсупов [124] и многие другие.

При написании истории этого вопроса и анализа существующих работ по данной тематике автор использовала работу В.И. Иванова [44].

Отметим, что исторически первая прямая теорема о скорости сходимости к нулю величины наилучшего приближения тригонометрическими полиномами была доказана американским математиком Д. Джексоном [35] в 1911 г.

Теорема Джексона [35]. *Для любой функции $f \in C(\mathbb{T})$ выполняется неравенство*

$$E_n(f)_\infty \le c\,\omega\left(\frac{\pi}{n}, f\right)_\infty . \qquad (1.1.2)$$

Неравенство подобного типа с первым модулем непрерывности принято называть неравенствами Джексона. В 1937 г. в работе Е. Кваде [79] неравенство Джексона (1.1.2) было распространено на пространства $L_p(\mathbb{T})$, $1 \le p < \infty$.

Теорема Кваде [79]. *Для любой функции* $f \in L_p(\mathbb{T})$, $1 \le p < \infty$ *выполняется неравенство*

$$E_n(f)_p \le c\,\omega\left(\frac{\pi}{n}, f\right)_p, \quad (1 \le p < \infty). \tag{1.1.3}$$

Для доказательства (1.1.2) Д. Джексон использовал линейный метод приближения, которую в литературу называют методом Джексона:

$$J_m(t) := J_{m,2}(x,f) = (f * J_{m,2})(x) \in T_{n-1},$$

где

$$J_{m,2}(t) = c_m\left(\frac{\sin(mt/2)}{\sin(t/2)}\right)^4, \quad \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}} J_{m,2}(t)dt = 1, \quad m = \left[\frac{n+1}{2}\right],$$

— ядро Джексона. Фактически Джексон доказал, что для любой функции $f \in L_p(\mathbb{T})$, $1 \le p < \infty$, справедлива оценка

$$\|f(x) - J_{m,2}(x,f)\|_p \le c\,\omega\left(\frac{\pi}{n}, f\right)_p,$$

из которой вытекают неравенства (1.1.2), (1.1.3). Здесь и далее $c = c(m)$ – некоторая константа, зависящая от числа m, $m \in \mathbb{N}$.

В 1945 г. А. Зигмунд [41] установил, что если $\omega_2(\delta, f)_\infty = O(\delta)$, то $E_n(f)_\infty = O(1/n)$. В общем случае прямую теорему со вторым модулем непрерывности опубликовал в 1947 г. Н.И. Ахиезер в монографии [7].

Теорема Ахиезера [7]. *Для любой функции* $f \in L_p(\mathbb{T})$, $1 \le p < \infty$, *выполняется неравенство*

$$E_n(f)_p \le c\,\omega_2\left(\frac{\pi}{n}, f\right)_p. \tag{1.1.4}$$

Неравенство (1.1.4) можно также доказать с помощью метода Джексона.

В 1947 г. С.Н. Бернштейн [13] установил, что если $\omega_k(\delta, f)_\infty = O(\delta^\alpha)$, $0 < \alpha \le k$, то $E_n(f)_\infty = O(1/n^\alpha)$. Таким образом, возникла твердая уверенность в том, что неравенство (1.1.4) справедливо и для модулей непрерывности произвольного порядка. Основная трудность этого обобщения состояла в том, что метод Джексона, будучи положительным, не может приближать неотрицательные функции со скоростью большей, чем $O(1/n^2)$, в то время как модуль непрерывности $\omega_k(\pi/n, f)_p$ может стремиться к нулю с большой скоростью. Позже Р.М. Тригуб полностью охарактеризовал аппроксимативные возможности метода Джексона, доказав неравенство [97]:

$$\|f(x) - J_{m,2}(x, f)\|_p \asymp \omega_2\left(\frac{\pi}{n}, f\right)_p, \quad 1 \le p \le \infty.$$

Возникшую трудность смог преодолеть С.Б. Стечкин в 1947 г., работая над кандидатской диссертацией “О порядке наилучших приближений непрерывных функций”, защищенной им в 1948 г. Ему удалось построить необходимый метод приближения. Его называют методом Стечкина. Хотя С.Б. Стечкин доказывает неравенство (1.1.4) для модуля непрерывности произвольного порядка в пространстве непрерывных функций, но его рассуждения справедливы и для пространств $L_p(\mathbb{T})$, $1 \le p < \infty$, поэтому сформулируем нужное утверждение с наибольшей полнотой.

Теорема Стечкина (1951). *Для любой функции $f \in L_p(\mathbb{T})$, $1 \le p < \infty$,*

$k \geq 3$ *выполняется неравенство*

$$E_n(f)_p \leq c_k\,\omega_k\left(\frac{\pi}{n}, f\right)_p. \tag{1.1.5}$$

Неравенства типа (1.1.5) с модулем непрерывности произвольного порядка принято называть неравенствами Джексона-Стечкина. Неравенство (1.1.5) при $p = \infty$ было опубликовано С.Б. Стечкиным без доказательства в 1949 г. в работе [86] и с полным доказательством — в 1951 г. в работе [87]. При этом возникала задача распространения неравенства (1.1.5) для случая $0 < p < 1$.

Неравенства (1.1.3) на пространства $L_p(\mathbb{T})$, $0 < p < 1$ распространил В.И. Иванов [44]. Над аналогичной задачей параллельно работали одесские математики Э.А. Стораженко, В.Г. Кротов и П. Освальд. В 1975 г. вышли работы [42] и [88], в которых независимо доказано следующее утверждение.

Теорема (В.И. Иванов [44], Э.Г. Стораженко и др [88]). *Для любой функции* $f \in L_p(\mathbb{T})$, $0 < p < 1$, *выполняется неравенство*

$$E_n(f)_p \leq c_k\,\omega\left(\frac{\pi}{n}, f\right)_p. \tag{1.1.6}$$

Для доказательства (1.1.6) было использовано промежуточное приближение кусочно-постоянными функциями. Полный аналог неравенства Джексона-Стечкина в пространствах $L_p(\mathbb{T})$, $0 < p < 1$ получен Э.А. Стороженко и П. Освальдом [89] в 1978 г. Они использовали промежуточное приближение кусочно-многочленными функциями и опирались на установленное ими обобщение теоремы Уитни для пространств $L_p(\mathbb{T})$, $0 < p < 1$.

Теорема Э.А. Стороженко и П. Освальд [89]. *Для любой функции* $f \in$

$L_p(\mathbb{T})$, $0 < p < 1,\ k \geq 2$ *выполняется неравенство*

$$E_n(f)_p \leq c_{p,k}\,\omega_k\left(\frac{\pi}{n}, f\right)_p. \tag{1.1.7}$$

Таким образом, прямые теоремы для наилучших приближений периодических функций и модулей непрерывности произвольного порядка были установлены с максимальной полнотой. Но здесь сразу возникла экстремальная задача о величине константы в неравенстве Джексона-Стечкина (1.1.5) $(1 \leq p \leq \infty)$. Обозначим через

$$\chi_{p,q}(n,\delta) = \sup_{f\in L_p(\mathbb{T})} \frac{E_n(f)_p}{\omega_k(\delta, f)_p} \quad (1 \leq p \leq \infty,\ 0 < \delta \leq \pi)$$

— точная константа в неравенстве Джексона-Стечкина вида

$$E_n(f)_p \leq \chi(n,\delta,p,k)\omega_k(\delta, f)_p. \tag{1.1.8}$$

Назовем ее константой Джексона-Стечкина. Она является функцией многих параметров, и ее вычисление – достаточно сложная задача. С.Б. Стечкин, в частности, интересовался зависимостью этой константы от порядка модуля непрерывности.

Сформулируем общую задачу отыскания точного значения констант в неравенствах Джексона-Стечкина (1.1.5) и (1.1.8).

Приведём краткий исторический обзор полученных результатов в этом направлении исследования.

Пусть X есть пространство $C(\mathbb{T})$ или $L_p(\mathbb{T})$, $(1 \leq p < \infty)$, а $X^{(r)}$ есть $C^{(r)}(\mathbb{T})$ или $L_p^{(r)}$ $(X^0 = X)$, то есть $X^{(r)}$ – множество r-х 2π-периодических интегралов от $f \in X$. Требуется в неравенстве Джексона-Стечкина вида

$$E_{n-1}(f)_X \leq \frac{\chi_r}{n^r}\omega_m\left(f^{(r)}, \frac{\gamma\pi}{n}\right)_X, \ \gamma \in (0,2]$$

указать наименьшую из возможных констант χ_r. Очевидно, что наименьшая (наилучшая) константа может зависеть как от пространства X, так и от числа $m, n \in \mathbb{N}$ и $r \in \mathbb{Z}_+$. Поэтому обозначим ее через $\chi_{n,m,r}(X,\gamma)$. Задача состоит в отыскании констант

$$\chi_{n,m,r}(X,\gamma) = \sup\left\{\frac{n^r E_{n-1}(f)_X}{\omega_m(f^{(r)}, \gamma\pi/n)} : f \in X^r, \ f \not\equiv const\right\},$$

где X есть $C(\mathbb{T})$ или $L_p(\mathbb{T})$ $(1 \leq p < \infty)$, $\gamma \in (0,2)$.

Первый результат в 1962 г. получил Н.П. Корнейчук [48]. Он доказал, что

$$1 - 1/(2n) < \chi_{n,1,0}(C,\pi) < 1$$

и на тех же идеях доказал более общий результат в работе [54]:

$$\frac{k+1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n}\right) \leq \chi_{n,1,0}\left(C, \frac{\pi}{k}\right) \leq \frac{k+1}{2}, \ n, k \in \mathbb{N}.$$

В 1967 г. Н.И. Черных [104] получил следующие результаты в пространстве L_2:

$$\chi_{n,1,0}\left(L_2, \pi/n\right) = 1/\sqrt{2}, \ n \in \mathbb{N};$$

$$\chi_{n,m,0}\left(L_2, 2\pi/n\right) = \left(C_{2m}^m\right)^{-1/2}, \ m, n \in \mathbb{N}, \ n > m.$$

Затем в 1973 г. А.А. Лигун [62] доказал, что для нечетных $r = 2j-1, \ j \in \mathbb{N}$ справедливо равенство

$$\chi_{n,1,2j-1}\left(C, \pi/n\right) = \chi_{n,1,2j-1}(L, \pi/n) = \mathscr{K}_r/2, \ n, j \in \mathbb{N},$$

где

$$\mathscr{K}_r := \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k(r+1)}}{(2k+1)^{r+1}},\ r\in\mathbb{Z}_+$$

– константа Фавара. Что же касается пространства $L_p(\mathbb{T})$, то известен следующий результат:

$$\chi_{n,1,0}(L_p,\delta)=2^{(1-p)/p},\ (1<p\le 2),\ \delta\ge\theta\pi/n,\ \theta\ge 1,8.$$

В этом равенстве соответствующую оценку сверху установил Н.И. Черных [105], а оценку снизу – В.И. Бердышев [12]. На самом деле В.И. Бердышевым [12] получена оценка снизу при всех $1\le p<\infty$:

$$\chi_{n,1,0}(L_p,\delta)\ge\max\{2^{(1-p)/p},2^{-1/p}\},\ n\in\mathbb{N},\ \delta>0.$$

Что же касается случая L_p $(0<p<1)$, то здесь задача нахождении точной константы в неравенстве Джексона-Стечкина до сих пор не решена.

§ 1.2. Анализ работ, использующих неравенство типа Джексона-Стечкина для усредненных с весом значений модулей непрерывности

Условимся под весовой функцией на отрезке $[0, h]$ понимать неотрицательную суммируемую функцию $\varphi(t)$, не эквивалентную нулю на этом же отрезке.

В связи с отысканием точных констант в неравенствах типа Джексона-Стечкина Н.И. Черных отмечал, что поскольку функционал

$$\left(\frac{n}{2}\int\limits_0^{\pi/n}\omega_1^2(f,t)\sin ntdt\right)^{1/2}$$

меньше джексоновского функционала $\omega_1(f, \pi/n)(f \neq const)$ то, по-видимому, он более естественен для характеристики величин наилучших полиномиальных приближений $E_{n-1}(f)$ периодических функций f в L_2. Учитывая это замечание А.А. Лигун в работе [63] рассмотрел вопрос отыскания точного значения следующей экстремальной характеристику

$$\sup\left\{\frac{E_{n-1}^2(f)}{\int\limits_0^h \omega_m^2(f^{(r)},t)\varphi(t)dt}:\ f\in L_2^r,\ f\neq const\right\},$$

где $m, n \in \mathbb{N}$; $r \in \mathbb{Z}_+$; $0 < h \leq \pi/n$; φ – весовая на отрезке $[0, h]$ функция. В частности, было показано, что имеет место двойное неравенство

$$\frac{1}{B_{n,h}^{r,m}(\varphi)} \leq \sup_{\substack{f\in L_2^r\\ f\neq const}} \frac{E_{n-1}^2(f)}{\int\limits_0^h \omega_m^2(f^{(r)},t)\varphi(t)dt} \leq \frac{1}{\inf\limits_{n\leq k<\infty} B_{k,h}^{r,m}(\varphi)}$$

где

$$B_{k,h}^{r,m}(\varphi) := 2^k k^{2r} \int\limits_0^h (1-\cos kt)^m \varphi(t)dt.$$

С целью обобщения указанного результата А.А. Лигуна [63], М.Ш. Шабозов и Г.А. Юсупов в работе [118] рассмотрели экстремальную характеристику вида

$$\chi_{m,n,r,p,s}(\varphi,h) := \sup\left\{\frac{E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h \omega_m^p(f^{(r)},t)\varphi(t)dt\right)^s} : \ \ f\in L_2^r,\ f\not\equiv const\right\},$$

где $m,n\in\mathbb{N}$; $r\in\mathbb{Z}_+$; p,s – положительные числа; $0<h\leq\pi/n$, а функция φ удовлетворяет требованиям, сформулированным выше в двойном неравенстве, полученном А.А. Лигуном. В [118] была показана справедливость соотношения

$$\left\{\mathcal{A}_{n,h,p}^{r,m}(\varphi)\right\}^{-1} \leq \chi_{m,n,r,p,1/p}(\varphi,h) \leq \left\{\inf_{n\leq k<\infty} \mathcal{A}_{k,h,p}^{r,m}(\varphi)\right\}^{-1}, \qquad (1.2.1)$$

где $0<p\leq 2$; $0<h\leq\pi/n$ и

$$\mathcal{A}_{k,h,p}^{r,m}(\varphi) := 2^{m/2}\left(k^{rp}\int\limits_0^h (1-\cos kt)^{mp/2}\varphi(t)dt\right)^{1/p}.$$

Для некоторых конкретных весовых функций $\varphi(t)$ и значений p неравенство (1.2.1) обращается в равенство.

При решении ряда задач теории аппроксимации функций действительного переменного часто используют различные модификации классического определения модуля непрерывности (см., например, [2, 3, 15, 22, 37, 47, 84]). Во многих случаях это продиктовано специфическими условиями рассматриваемых задач и позволяет получать результаты, раскрывающие содержательную сущность исследуемых проблем. Так, например, при аппроксимации непериодических функций алгебраическими полиномами М.К. Потаповым и его учениками были предложены различные модификации классического определения модуля непрерывности, использующие вместо оператора сдвига $T_h f(x) = f(x+h)$ различные усредняющие операторы (см., например, [76]).

В случае аппроксимации 2π-периодических функций вместо оператора сдвига $T_h f(x) = f(x+t)$ В.А. Абиловым и Ф.В. Абиловой была использована функция Стеклова $S_h(f)$ [3]. Следует отметить, что в теории аппроксимации функция $S_h(f)$ была применена самим Стекловым. Аналогичный подход был применен В. Кокилашвили и Я.Е. Уилдириром в работе [47]. Дальнейшее развитие результаты [3] получили в работах [22–24, 121]. Изложим идею использования оператора $S_h(f)$.

Для произвольного элемента $f \in L_2$ запишем функцию оператора Стеклова

$$S_h(f,x) = \frac{1}{2h}\int\limits_{x-h}^{x+h} f(\tau)d\tau, \qquad h > 0,$$

полагая при этом $S_{h,i}(f) := S_h(S_{h,i-1}(f))$, где $i \in \mathbb{N}$ и $S_{h,0}(f) \equiv f$. Обозначив через $\mathbb{I}$ единичный оператор в пространстве L_2, определим согласно [3] конечные разности первого и высших порядков

$$\widetilde{\Delta}_h^1(f,x) := S_h(f,x) - f(x) = (S_h - \mathbb{I})(f,x),$$

$$\widetilde{\Delta}_h^k := \widetilde{\Delta}_h^1(\widetilde{\Delta}_h^{k-1}(f),x) = (S_h - \mathbb{I})^k(f,x) = \sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}S_{h,i}(f,x),$$

где $k = 2, 2, \ldots$. Используя указанные обозначения, рассмотрим введенную в [3] характеристику гладкости функции $f \in L_2$

$$\Omega_m(f,t) := \sup\left\{\|\widetilde{\Delta}_h^m(f)\| : 0 < h \le t\right\}, \tag{1.2.2}$$

которую назовем *специальным модулем* непрерывности m-го порядка.

Всюду далее полагаем $\operatorname{sinc} t := \sin t/t$. Простыми вычислениями легко найти явный вид формулы (1.2.2):

$$\Omega_m(f,t) := \sup\left\{\left(\sum_{k=1}^{\infty}(1-\operatorname{sinc} kh)^{2m}\rho_k^2(f)\right)^{1/2} : 0 < h \le t\right\}. \tag{1.2.3}$$

С.Б. Вакарчук и В.И. Забутная доказали две теоремы:

Первая теорема С.Б. Вакарчука, В.И. Забутной [23]. *Пусть $n, m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$. Тогда для любого числа $0 < t \le 3\pi/4$ справедливо равенство*

$$\sup\left\{\frac{n^r E_{n-1}(f)}{\Omega_m(f^{(r)}, t/n)} : f \in L_2^r, f \not\equiv \text{const}\right\} = (1-\operatorname{sinc} t)^{-k} \tag{1.2.4}$$

Вторая теорема С.Б. Вакарчука, В.И. Забутной [23]. *Пусть* $n, m \in \mathbb{N}$, $0 < p \leq 2$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < h \leq \pi/n$, $\varphi(t)$ *— весовая на отрезке* $[0, h]$ *функция. Тогда справедливы равенства*

$$\frac{1}{\gamma_{n,m,r,p}(\varphi, h)} \leq \chi_{n,m,r,p,1/p}(\varphi, h) \leq \frac{1}{\inf\limits_{n \leq k < \infty} \gamma_{m,k,r,p}(\varphi, h)}, \tag{1.2.5}$$

где

$$\gamma_{m,k,r,p}(\varphi, h) := \left\{ m^{rp} \int\limits_0^h (1 - sinc\, mt)^{pm} \varphi(t) dt \right\}^{1/p}.$$

Следует отметить, что приведённые результаты обобщены в работе М.Ш. Шабозова и А.А. Шабозовой [117], где во первых, общий результат получен при всех $0 < p \leq \infty$, а во вторых вместо неравенства (1.2.5) доказано точное равенство.

Теорема М.Ш. Шабозов, А.А. Шабозова [117]. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N}$, $0 < p \leq \infty$, $s, r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < h \leq 3\pi/(4n)$. *Тогда имеет место равенство*

$$\chi_{n,m,r,p}(\varphi, h) = \left(n^{rp} \int\limits_0^h (1 - \operatorname{sinc} t)^{mp} \varphi(t) dt \right)^{-1/p}.$$

При решении некоторых экстремальных задач теории аппроксимации функций в L_2 вместо модулей непрерывности m-го порядка (1.1.1) и (1.2.3) С.Б. Вакарчуком, В.И. Забутной и М.Ш. Шабозовым [15, 25, 110] использовалась усреднённая характеристика гладкости следующего вида

$$\Omega_m(f,t) := \left\{ \frac{1}{t^m} \int\limits_0^t \cdots \int\limits_0^t \|\Delta_{\overline{h}}^m f\|^2 dh_1 \cdots dh_m \right\}, \tag{1.2.6}$$

где $t > 0$; $\overline{h} := (h_1, \ldots, h_m)$; $\Delta_{\overline{h}}^m := \Delta_{h_1}^1 \circ \Delta_{h_2}^1 \circ \cdots \circ \Delta_{h_m}^1$; $\Delta_{h_j}^1 f(x) := f(x+h_j) - f(x)$, $j = \overline{1,m}$. Напомним, что в ходе исследования важных вопросов конструктивной теории функций в метрическом пространстве L_p $(0 < p < 1)$ подобного рода усреднения характеристики гладкости функций рассматривались К.В. Руновским [81] и Э.А. Стораженко, В. Кротовым, П. Освальдом [88].

Свойства характеристики гладкости (1.2.6) полностью изучены в работе [110]. Разумеется, представляет определённый интерес изучение экстремальной характеристики

$$\mathscr{K}_{m,n,r,p}(\varphi; h) = \sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f \neq const}} \frac{E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(f^{(r)}, t)\varphi(t)dt \right)^{1/p}},$$

где $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$; $0 < p \le 2$, $0 < h \le \pi/n$, $\varphi(t)$ – весовая на $[0, h]$ функция.

Следующая теорема является своеобразным распространением основного результата М.Ш. Шабозова и Г.А. Юсупова из работы [120].

Теорема Шабозова-Вакарчука-Забутной [110]. *Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < p \le 2$; $0 < h \le 3\pi/(4n)$, $\varphi(t)$ – весовая на $[0, h]$ функция. Тогда справедливо равенство*

$$\mathscr{K}_{m,n,r,p}(\varphi; h) = \left\{ \inf_{n \le k < \infty} \mathcal{B}_{k,h,p}^{r,m}(\varphi) \right\}^{-1}, \tag{1.2.7}$$

где

$$\mathcal{B}_{k,h,p}^{r,m}(\varphi) := 2^{m/2}\left\{k^{rp}\int\limits_0^h (1-\sin kt)^{mp/2}\varphi(t)dt\right\}^{1/p}.$$

Рассмотрим некоторые следствия, вытекающие из приведенной теоремы.

Следствие 1. *Пусть* $0 < h \leq 3\pi/(4n)$ *и выполнены все требования теоремы. Тогда имеет место следующее равенство*

$$\mathscr{K}_{m,n,r,p}(\varphi; h) = \left\{\mathcal{B}_{n,h,p}^{r,m}(\varphi)\right\}^{-1}.$$

Введем обозначение $Si(\tau) := \int\limits_0^\tau \operatorname{sinc} t dt$ – интегральный синус и доопределим функцию $\Omega_m(t)$ в точке $t = 0$, полагая $\Omega_m(0) = 0$, где $f \in L_2$.

Следствие 2. *Пусть* $0 < \tau \leq 3\pi/(4n)$; $m, n \in \mathbb{N}$; $\beta(\tau) := (Si(\tau) - \sin\tau)/(\tau - \sin\tau)$; $\eta(p) := (1 + mp/2)^{1/p}$. *Если при некотором фиксированном значении* $p \in (0, 2]$ *для элемента* $f \in L_2^{(r)} (r \in \mathbb{Z}_+)$ *функция* $\Omega_m^p(f^{(r)})$ *является выпуклой вверх на сегменте* $[0, 3\pi/(4n)]$, *то величина наилучшего приближения функции* f *удовлетворяет неравенству*

$$E_{n-1}(f) \leq \frac{\eta(p)}{n^r}(2(1-\operatorname{sinc}\tau))^{-m/2}\Omega_m\left(f^{(r)}, \tau\beta(\tau)/n\right).$$

Если же функция $\Omega_m^p(f^{(r)})$ *при любом значении* p *из отрезка* $[p_*, p^*] \subset (0, 2]$ *выпуклая вверх на сегменте* $[0, 3\pi/(4n)]$, *то*

$$E_{n-1}(f) \leq \frac{\eta(p^*)}{n^r}(2(1-\operatorname{sinc}\tau))^{-m/2}\Omega_m\left(f^{(r)}, \tau\beta(\tau)/n\right).$$

Следствие 3. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N}$; $r \in \mathbb{Z}_+$; $0 < p \leq 2$; q *– неотрицательная, измеримая, суммируемая на отрезке* $[0, a] (0 < a \leq \pi)$ *функция, не эквива-*

лентная нулю. Тогда справедливы неравенства

$$\left\{\Phi_{m,r,p}(a,q,1)\right\}^{-1/p} \le \sup_{\substack{f\in L_2^r\\ f\not\equiv const}} \frac{2^{m/2}n^r E_{n-1}(f)}{\left\{\int\limits_0^a \Omega_m^p(f^{(r)},t/n)q(t)dt\right\}^{1/p}} \le$$

$$\le \left\{\inf_{x\ge 1}\Phi_{m,r,p}(a,q,x)\right\}^{-1/p},$$

где

$$\Phi_{m,r,p}(a,q,x) = x^{rp}\int\limits_0^a (1-\operatorname{sinc} xt)^{mp/2} q(t)dt.$$

При этом, если функция q такова, что $\inf\limits_{x\ge 1}\Phi_{m,r,p}(a,q,x) = \Phi_{m,r,p}(a,q,1)$, то имеет место равенство

$$\sup_{\substack{f\in L_2^r\\ f\not\equiv \mathrm{const}}} \frac{2^{m/2}n^r E_{n-1}(f)}{\left\{\int\limits_0^a \Omega_m^p(f^{(r)},t/n)q(t)dt\right\}^{1/p}} = \left\{\Phi_{m,r,p}(a,q,1)\right\}^{-1/p}.$$

Следствие 4. *Пусть $m,n\in\mathbb{N}$; $r\in\mathbb{Z}_+$; $0<p\le 2$; функция $q(t) = t^{rp-1}q_1(t)$ – неотрицательная, измеримая, суммируемая на $[0,a]$, где $0<a\le\pi$; q_1 – невозрастающая, не эквивалентная нулю функция. Тогда имеет место равенство*

$$\inf_{x\ge 1}\Phi_{m,r,p}\left(a,t^{rp-1}q_1(t),x\right) = \Phi_{m,r,p}\left(a,t^{rp-1}q_1(t),1\right)$$

и справедлива формула

$$\sup_{\substack{f\in L_2^r\\ f\not\equiv \mathrm{const}}} \frac{2^{m/2}n^r E_{n-1}(f)}{\left\{\int\limits_0^a \Omega_m^p\left(f^{(r)},t/n\right) t^{rp-1}q_1(t)dt\right\}^{1/p}} = \left\{\Phi_{m,r,p}(a,t^{rp-1}q_1(t),1)\right\}^{-1/p}.$$

В заключении этого параграфа отметим, что во всех вышеприведенных теоремах экстремальные задачи между величиною наилучшего приближения функций и усредненных значений различных модулей непрерывности производных функций решены в пространстве $L_p := L_p[0, 2\pi]$ только для случая $p \in (0, 2]$. Естественно, возникает более общая задача: Распространить утверждения приведенных выше теорем для обобщенных модулей гладкости в пространстве $L_p := L_p[0, 2\pi]$ при всех значениях $p \in (0, +\infty]$. Решению поставленной задачи посвящены вторая и четвертая глава данной диссертационной работы.

§ 1.3. Анализ неравенств типа Джексона-Стечкина для обобщенных модулей непрерывности, построенных на базе операторов обобщённого сдвига в $L_p\,(0 < p \leq 2)$

Выше в первом параграфе данной главы мы отметили, что в классической теории приближения функций на конечном отрезке $[a, b]$, на прямой $\mathbb{R} := (-\infty, +\infty)$ центральную роль играет оператор сдвига

$$T_h f(x) = f(x + h), \ \ x, h \in \mathbb{R}.$$

Так, например, оператором сдвига является оператор дифференцирования, преобразование Фурье представляет собой разложение по собственным функциям оператора сдвига. Оператор сдвига используется для построения модулей непрерывности и гладкости, которые являются основными элементами прямых и обратных теорем теории приближения. Различные обобщения операторов сдвига позволяют сформулировать естественные аналоги задач теории приближения. Многие задачи теории приближения такого вида рассмотрены в работах С.З. Рафальсона [80], В.А. Абилова и Ф.В. Абилова [4], С.Б. Вакарчука [20], С.Б. Вакарчука и А.В. Швачко [26], К. Тухлиева и А.М. Маликова [99]. В перечисленных работах для построении обобщенного модуля непрерывности используются операторы сдвига определённого вида. Так, для произвольной функции $f \in L_{2,\rho}^{(r)}$, где $L_{2,\rho}^{(r)} := L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})$ – множество функций f суммируемых с квадратом и весом $\rho(x) = e^{-x^2}$ на всей оси $\mathbb{R} := (-\infty, +\infty)$, имеющих абсолютно-непрерывные производные $(r - 1)$-го порядка на любом конечном интервале и производную r-го порядка $f^{(r)} \in L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ в работах В.А. Абилова и

Ф.В. Абилова [4], С.З. Рафальсона [80] и С.Б.Вакарчука [20] введён в рассмотрении следующего вида оператора обобщённого сдвига

$$T_hf(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_R f\left(x\sqrt{1-h^2}+hy\right)e^{-y^2}dy,\ |h|\leq 1.$$

Как и в классическом случае, в этих работах определяются разности первого и высших порядков следующими равенствами

$$\Delta_hf(x)=T_hf(x)-f(x)=(T_h-\mathbb{I})f(x),$$

$$\Delta_h^mf(x)=(T_h-\mathbb{I})^mf(x)=\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k}T_h^kf(x),$$

где $T_h^0f(x)=f(x)$, $T_h^kf(x)=T_h(T_h^{k-1}f(x))\,(k=\overline{1,m};m\in\mathbb{N})$ и $\mathbb{I}$ – единичный оператор в пространстве $L_{2,\rho}$.

Величину

$$\Omega_m(f,t)_{2,\rho}:=\sup\left\{\|\Delta_h^mf(\cdot)\|_{2,\rho}:\ 0<h\leq t\right\} \tag{1.3.1}$$

назовем обобщенным модулем непрерывности m-го порядка функции $f\in L_{2,\rho}$. Простые вычисления приводят к равенству

$$\Omega_m(f,t):=\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-(1-t^2)^{k/2}\right)c_k^2(f)\right\}^{1/2}.$$

Хорошо известно, что любая функция $f\in L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ разлагается в ряд Фурье по полиномам Эрмита

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(f)H_k(x),\ \ H_k(x):=\frac{(-1)^k}{\sqrt{k!2^k\sqrt{\pi}}}e^{x^2}\frac{d^k}{dx^k}(e^{-x^2}),$$

$$c_k(f) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-x^2} f(x) H_k(x) dx.$$

Кроме того, если $\mathscr{P}_n$ – множество всех полиномов степени не более n, то как известно

$$E_{n-1}(f)_{2,\rho} := \inf\left\{\|f - p_{n-1}\|_{2,\rho} : \, p_{n-1} \in \mathscr{P}_{n-1}\right\} =$$

$$= \|f - S_{n-1}(f)\|_{2,\rho} = \left\{\sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f)\right\}^{1/2}.$$

С.Б. Вакарчук [17] доказал, что для произвольной функции $f \in L_{2,\rho}^{(r)}$ справедливо равенство

$$\sup_{f \in L_{2,\rho}^{(r)}} \frac{E_{n-1}(f)_{2,\rho}}{E_{n-r-1}(f^{(r)})_{2,\rho}} = \frac{1}{\sqrt{2^r n(n-1)\cdots(n-r+1)}}. \qquad (1.3.2)$$

Он также изучил связь между наилучшим среднеквадратическим приближением $E_{n-1}(f)_{2,\rho}$ и усредненным с заданным весом $\varphi(t)$ значением модуля непрерывности $\Omega_m^p\left(f^{(r)}, t\right)_{2,\rho}$ в виде конечного интеграла

$$\int\limits_0^h \Omega_m^p\left(f^{(r)}, t\right)_{2,\rho} \varphi(t) dt,$$

где $0 < p \leq 2$ и $h \in (0, 1)$.

Основными результатом С.Б. Вакарчука [17] является следующая теорема

Теорема (С.Б. Вакарчука [17]) *Пусть* $n, m, r \in \mathbb{N}$, $n \geq r, 0 < p \leq 2$, $0 < h \leq 1$, $\varphi(t)$ – *весовая на отрезке* $[0, h]$ *функция. Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{\substack{f\in L_{2,\rho}^{(r)}\\ f\neq\mathscr{P}_r}} \frac{\sqrt{2^r\alpha_{n,r}}E_n(f)_{2,\rho}}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p\left(f^{(r)},t\right)_{2,\rho}\varphi(t)dt\right)^{1/p}} = \tag{1.3.3}$$

$$= \left(\int\limits_0^h \left(1-(1-t^2)^{(n-r+1)/2}\right)^{mp}\varphi(t)dt\right)^{-1/p},$$

где, ради краткости, обозначено

$$\alpha_{n,r} := n(n-1)\cdots(n-r+1),\ n\geq r, n, r\in\mathbb{N}.$$

Из этой теоремы, в частности, при $r=0, \varphi(t)=t, p=1/m, h:=\sqrt{2/(n+3)}$ в качестве следствия получаем

$$\sup_{\substack{f\in L_{2,\rho}(\mathbb{R})\\ f\neq\mathrm{const}}} \frac{E_n(f)_{2,\rho}}{\left((n+1)\int\limits_0^{\sqrt{2/(n+3)}} t\Omega_m^{1/m}(f,t)_{2,\rho}dt\right)^m} =$$

$$= \left(1-\frac{2}{n+3}\right)^{-m(n+3)/2} \overrightarrow{n\to\infty}\ e^m.$$

Поскольку для произвольной функции $f\in L_{2,\rho}^{(r)}$, $r\geq 2, r\in\mathbb{N}$, все её промежуточные производные $f^{(s)}$, $s=1,2,\ldots,r-1$, также принадлежат пространству $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$, то определенный интерес представляет изучение поведения величины $E_{n-s-1}(f^{(s)})$ на некоторых классах функций $\mathfrak{M}^{(r)}\subset L_{2,\rho}^{(r)}$ или на самом классе $L_{2,\rho}^{(r)}$. Эта задача называется экстремальной задачей вычисления точной верхней грани наилучшего совместного приближения функций и их промежуточных производных класса $\mathfrak{M}^{(r)}$ в пространстве $L_{2,\rho}$. Сформулированная задача в литературе мало изучена. Полное решение этой задачи в пространстве $L_{2,\rho}^{(r)}$, где модуль непрерывности задаётся в L_p-норме при всех $p \in (0, +\infty)$ дано в четвертой главе настоящей диссертации.

ГЛАВА 2. Точные верхние грани среднеквадратичных приближений некоторых классов периодических дифференцируемых функций в пространстве L_2

В этой главе найдены точные значения верхних граней наилучших среднеквадратичных приближений некоторых классов периодических дифференцируемых функций тригонометрическими полиномами, характеризующимися обобщённым модулем непрерывности, порождённым конкретным оператором обобщённого сдвига в пространстве $L_2 := L_2[0, 2\pi]$. Получены точные неравенства типа Джексона-Стечкина как для наилучшего совместного приближения функций, так и для $\mathscr{K}$-функционалов на классах $L_2^{(r)},\ r \in \mathbb{Z}_+$.

Приводимые в этой главе результаты опираются на некотором обобщённом модуле непрерывности, который порождается оператором сдвига, ядро которого является ядром Пуассона, имеет простые свойства и сохраняет коэффициенты Фурье в основном представлении. Этот обобщённый модуль введен в работе М.К.Керимова и Э.В.Селимханова [46], где были получены некоторые асимптотически точные оценки. Отметим, что в работе [46] не были рассмотрены экстремальные задачи типа отыскание констант в неравенстве Джексона-Стечкина, а также не рассмотрены экстремальные задачи связанные с наилучшим приближением функций и их промежуточных производных.

Данная глава продолжает указанную тематику и является дальнейшим обобщением и развитием идей, изложенных в работах [3, 23, 121]. Здесь найдены точные значения верхних граней наилучших среднеквадратичных совместных приближений некоторых классов периодических дифференцируемых функций в пространстве $L_2 := L_2[0, 2\pi]$, характеризующихся обобщённым модулем непрерывности, порождённым конкретным оператором сдвига.

Изложенные в этой главе результаты опубликованы в работах [3-А, 5-А].

§ 2.1. Необходимые понятия и определения, используемые в дальнейшем. Общие факты

Хорошо известно, что при аппроксимации 2π-периодических функций тригонометрическими полиномами важную роль играет обычный оператор сдвига $T_h f(x) := f(x+h),\ x, h \in \mathbb{R}$ и определяемые с его помощью классические модули непрерывности различных порядков. В последнее время при решении ряда экстремальных задач теории аппроксимации функций часто используются различные модификации классических модулей непрерывности, порождённых обобщёнными операторами сдвига (см., например, [3, 23, 84, 121] и приведенную в них литературу). Это связано с тем, что многие задачи гармонического анализа можно решать, используя различные операторы обобщённого сдвига вместо обычного оператора сдвига [45, 77]. Операторы сдвига обладают многими замечательными свойствами, например, преобразование Фурье представляет собой разложение по собственным функциям оператора сдвига посредством оператора сдвига определяется свёртка функций и т.д.

В дальнейшем символами $\mathbb{N}, \mathbb{Z}_+, \mathbb{R}_+, \mathbb{R}$ обозначим множество натуральных, целых неотрицательных, положительных, вещественных чисел.

Пусть $L_2 := L_2[0, 2\pi]$ — пространство измеримых по Лебегу суммируемых с квадратом 2π-периодических функций с конечной нормой

$$\|f\|_2 := \|f\|_{L_2} = \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2};$$

$\mathcal{T}_{2n-1}$ — пространство действительных тригонометрических полиномов порядка

$\leq n-1$. Хорошо известно, что для произвольной функции $f \in L_2$, имеющей разложение в ряд Фурье

$$f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx\Big), \tag{2.1.1}$$

где $a_k(f),\ b_k(f)$ – косинус- и синус-коэффициенты Фурье, величина её наилучшего приближения в метрике L_2 подпространством $\mathcal{T}_{2n-1}$ равна

$$E_{n-1}(f)_2 := \inf\big\{\|f - T_{n-1}\|_2 : T_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}\big\} =$$

$$= \big\|f - S_{n-1}(f)\big\|_2 = \left\{\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2(f)\right\}^{1/2}, \tag{2.1.2}$$

где

$$S_{n-1}(f,x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}\Big(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx\Big)$$

— частная сумма порядка $(n-1)$ ряда Фурье функции f, а

$$\rho_k^2(f) := a_k^2(f) + b_k^2(f),\ k \in \mathbb{N}.$$

Введём в рассмотрение функцию

$$T(x,y;h) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in(x-y)} \cdot h^{|n|},\ 0 < h < 1, \tag{2.1.3}$$

которая играет важную роль при решении некоторых задач математической физики (см, напр., [30, с.420]).

Функция (2.1.3) естественным образом возникает при решении ряда задач классического анализа. Так, например, функция $T(x,y;h)$ определяется равенством

$$T(x,y;h) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\Big\{e^{ik(x-y)} + e^{-ik(x-y)}\Big\}h^k =$$

$$= 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\left(e^{ik(x-y)} + e^{-ik(x-y)}\right)\Big/2\right\}h^k =$$

$$= 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} h^k \cos k(x-y) = \frac{1-h^2}{1-2h\cos(x-y)+h^2}.$$

Таким образом, функция (2.1.3) представима в виде ядра Пуассона

$$T(x,y;h) = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} h^k \cos k(x-y) =$$

$$= \frac{1-h^2}{1-2h\cos(x-y)+h^2} \tag{2.1.4}$$

и связана с интегралом Пуассона соотношением [30, с.441]

$$U(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cdot\frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-\varphi)+r^2}dt,$$

являющимся решением внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в единичном круге. Отметим также, что функция (2.1.4) встречается в теории суммирования тригонометрических рядов методом Пуассона [9, с.152-154]. Таким образом, функция $T(x,y;h)$ играет важную роль в различных вопросах математики. В пространстве L_2 определим оператор

$$F_h f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)T(x,t;1-h)dt, \tag{2.1.5}$$

который назовём оператором обобщенного сдвига. Легко проверить, что оператор (2.1.5) обладает следующими простыми свойствами:

1. $F_h(\alpha f + \beta g) = \alpha F_h(f) + \beta F_h(g), \alpha, \beta \in \mathbb{R};$

2. $\|F_h\| \leq \|f\|_2$;   3. $\|F_h f - f\|_2 \to 0, h \to 0+$;

4. $F_h(\cos nx) = (1-h)^n \cos nx$, $F_h(\sin nx) = (1-h)^n \sin nx$, где $0 < h < 1$.

Приводим доказательство основных свойств оператора $F_h f(x)$. Свойство 1 очевидно, так как

$$F_h(\alpha f + \beta g) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \Big(\alpha f(t) + \beta g(t)\Big) T(x,t;1-h)dt =$$

$$= \frac{\alpha}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)T(x,t;1-h)dt + \frac{\beta}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} g(t)T(x,t;1-h)dt =$$

$$= \alpha F_h(f) + \beta F_h(g), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Доказательство свойства 2. Применяя обобщённое неравенство Минковского, имеем

$$\Big\|F_h f(x)\Big\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \big|F_h f(x)\big|^2 dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)T(x,t;1-h)dt\right|^2 dx \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \big|f(t)\big|^2 \cdot \left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \big|T(x,t;1-h)\big|^2 dx\right\} dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \big|f(t)\big|^2 \cdot 1\, dt = \|f\|^2,$$

откуда и следует свойство 2.

Свойство 3 является содержанием теоремы Лебега. Докажем, свойство 4 для функции $f(x) = \cos nx$. Имеем:

$$F_h(\cos nx) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos nt \Big|T(x,t;1-h)\Big|^2 dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos nt \left\{1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \cos k(x-t)(1-h)^n\right\} dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\pi}^{\pi} \cos nt \left\{1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \Big(\cos kx \cos kt + \sin kx \sin kt\Big) \cdot (1-h)^n\right\} dt =$$

$$= \Big(1-h\Big)^n \cdot \cos nx, \quad 0 < h < 1.$$

Аналогичным образом доказывается это свойство для функции $f(x) = \sin nx$.

Пусть $f \in L_2$. Определим, как и в классическом анализе, конечные разности первого и высших порядков функции f равенствами

$$\Delta_h f(x) = F_h f(x) - f(x) = (F_h - E)f(x), \tag{2.1.6}$$

$$\Delta_h^m f(x) = \Delta_h(\Delta_h^{m-1} f(x)) = (F_h - E)^m f(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} F_h^k f(x), \tag{2.1.7}$$

где $F_h^0 f(x) = Ef(x) = f(x)$, $F_h^k f(x) = F_h(F_h^{k-1} f(x))$, $k = \overline{1,m}$; E — единичный оператор в пространстве L_2. Величину

$$\Omega_m(f;t)_2 = \sup\Big\{\|\Delta_h^m f(\cdot)\|_2 : 0 < h \le t\Big\} \tag{2.1.8}$$

будем называть обобщённым модулем непрерывности m-го порядка функции $f \in L_2$. В силу свойства 4 оператора $F_h(f)$ элементарно можно вычислить, что для произвольной функции $f \in L_2$ имеют место равенства

$$a_n(F_hf) = (1-h)^n a_n(f),\ b_n(F_hf) = (1-h)^n b_n(f),$$

пользуясь которыми для оператора (2.1.5) находим следующее разложение в ряд Фурье

$$F_hf(x) = \frac{1}{2}a_0\big(F_hf\big) + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(a_k(F_hf)\cos kx + b_k(F_hf)\sin kx\Big) =$$

$$= \frac{1}{2}a_0(f) + \sum_{k=1}^{\infty}(1-h)^k\Big(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx\Big). \qquad (2.1.9)$$

Следовательно, для разности первого порядка в силу (2.1.6) и (2.1.9) имеем

$$\Delta_hf(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\Big[(1-h)^k - 1\Big]\Big(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx\Big) \qquad (2.1.10)$$

и далее, применяя метод математической индукции, для произвольной $m \in \mathbb{N}$ с учетом (2.1.10) запишем

$$\Delta_h^m f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\Big[(1-h)^k - 1\Big]^m\Big(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx\Big). \qquad (2.1.11)$$

Отсюда, применяя равенство Парсеваля, в силу того, что $h \in (0,1]$, находим

$$\Big\|\Delta_h^m f\Big\|_2^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\Big[1-(1-h)^k\Big]^{2m}\rho_k^2(f),\ 0 < h \le t,$$

и в виду (2.1.8) будем иметь

$$\Omega_m^2(f;t)_2 = \sum_{k=1}^{\infty}\Big[1-(1-t)^k\Big]^{2m}\rho_k^2(f),\ 0 < t < 1. \qquad (2.1.12)$$

Далее, как обычно, $C^{(r)} := C^{(r)}[0, 2\pi]$ ($C^{(0)} := C[0, 2\pi]$, $r \in \mathbb{N}$) — множество r раз непрерывно дифференцируемых на всей оси 2π-периодических функций; $L_2^{(r)} := L_2^{(r)}[0, 2\pi]$ ($L_2^{(0)} := L_2[0, 2\pi]$, $r \in \mathbb{N}$) — совокупность заданных на всей оси функций f периода 2π, у которых производная $f^{(r-1)}$, $r \in \mathbb{N}$ локально абсолютно непрерывна на $[0, 2\pi]$, а производная r-го порядка $f^{(r)} \in L_2$.

Если $f \in C^{(r)} (r \in \mathbb{N})$, то r-кратным интегрированием по частям получаем

$$\left|a_k(f)\right| = \frac{1}{\pi}\left|\int\limits_0^{2\pi} f(t)\cos ktdt\right| = \begin{cases} k^{-r}\left|b_k(f^{(r)})\right|, k \in \mathbb{N}, r = 1, 3, 5, \dots \\ \\ k^{-r}|a_k(f^{(r)})|, k \in \mathbb{N}, r = 2, 4, 6, \dots \end{cases},$$

$$\left|b_k(f)\right| = \frac{1}{\pi}\left|\int\limits_0^{2\pi} f(t)\sin ktdt\right| = \begin{cases} k^{-r}\left|a_k(f^{(r)})\right|, k \in \mathbb{N}, r = 1, 3, 5, \dots \\ \\ k^{-r}|b_k(f^{(r)})|, k \in \mathbb{N}, r = 2, 4, 6, \dots \end{cases}.$$

Из этих равенств следует, что

$$\rho_k^2(f^{(r)}) := a_k^2(f^{(r)}) + b_k^2(f^{(r)}) = k^{2r}\left(a_k^2(f) + b_k^2(f)\right) = k^{2r}\rho_k^2(f). \qquad (2.1.13)$$

Учитывая (2.1.13), из соотношения (2.1.12) получаем

$$\Omega_m^2(f^{(r)}; t)_2 = \sum_{k=1}^{\infty}\Big[1-(1-t)^k\Big]^{2m}\rho_k^2(f^{(r)}) = \sum_{k=1}^{\infty}\Big[1-(1-t)^k\Big]^{2m}k^{2r}\rho_k^2(f). \quad (2.1.14)$$

Формула (2.1.14) в дальнейшем используется как основной инструмент нашего исследования.

§ 2.2. Неравенство Джексона-Стечкина для наилучшего совместного приближения функций и их производных

Хорошо известно, что для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ все её промежуточные производные $f^{(\nu)}$ $(\nu = \overline{1, r-1})$ принадлежат пространству L_2, а потому определённый интерес представляет изучение поведения величин $E_{n-1}\big(f^{(\nu)}\big)_2, (\nu = \overline{0, r})$ на классе $L_2^{(r)}$ или на некотором подклассе функций $\mathfrak{M}^{(r)} \subset L_2^{(r)}$. Имеет место следующее утверждение

Теорема 2.2.1. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N}$, $r, \nu \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq \nu$, $\nu = \overline{0, r}$. *Тогда справедлива оценка*

$$E_{n-1}\big(f^{(\nu)}\big)_2 \leq \Big[1 - (1-t)^n\Big]^{-m} \cdot n^{-(r-\nu)} \Omega_m\big(f^{(r)}, t\big)_2. \tag{2.2.1}$$

При каждом фиксированном $n \in \mathbb{N}$ *константа в правой части неравенства (2.2.1) уменьшена быть не может.*

Доказательство. Легко доказать, что при всех $\nu = \overline{0, r}$ имеет место соотношение

$$E_{n-1}^2\big(f^{(\nu)}\big)_2 = \sum_{k=n}^{\infty} k^{2\nu} \rho_k^2(f). \tag{2.2.2}$$

Далее, учитывая, что при любых $k \geq n$, $k, n \in \mathbb{N}$ справедливы неравенства

$$\Big[1 - (1-t)^k\Big]^m \geq \Big[1 - (1-t)^n\Big]^m, \ 0 < t < 1,$$

из соотношения (2.1.14) с учетом (2.2.2) получаем

$$\Omega_m^2(f^{(r)}; t)_2 = \sum_{k=n}^{\infty} \Big[1 - (1-t)^k\Big]^{2m} k^{2(r-\nu)} \cdot k^{2\nu} \rho_k^2(f) \geq$$

$$\geq \left[1-(1-t)^n\right]^{2m} n^{2(r-\nu)} \sum_{k=n}^{\infty} k^{2\nu} \rho_k^2(f) =$$

$$= \left[1-(1-t)^n\right]^{2m} n^{2(r-\nu)} \cdot E_{n-1}^2\big(f^{(\nu)}\big)_2,$$

откуда и следует неравенство (2.2.1). Чтобы доказать неулучшаемость (2.2.1), достаточно убедиться, что для функции $f_0(x) = \cos nx \in L_2^{(r)}$, для которой в силу (2.2.1) и (2.1.14) имеют место равенства

$$E_{n-1}\big(f_0^{(\nu)}\big)_2 = n^\nu,\ \Omega_m(f_0^{(r)}, t)_2 = \Big[1-(1-t)^n\Big]^m \cdot n^r, \tag{2.2.3}$$

получаем

$$E_{n-1}\big(f_0^{(\nu)}\big)_2 = n^\nu = \Big[1-(1-t)^n\Big]^{-m} n^{-(r-\nu)} \Omega_m\big(f_0^{(r)}, t\big)_2.$$

Теорема 2.2.1 доказана.

Замечание 2.2.1. *Заметим, что из неравенства (2.2.1) при $r = \nu = 0$ вытекает неравенство*

$$E_{n-1}(f)_2 \leq \left[1-(1-t)^n\right]^{-m} \Omega_m(f,t)_2, \tag{2.2.4}$$

которое верно при каждом $m \in \mathbb{N}$, только при условии, что n и t должны быть связаны таким образом, что при $n \to \infty$ числа $t = t_n$ должны стремиться к нулю.

В противном случае, зафиксировав t и устремив $n \to \infty$, приходим к верному, но грубому неравенству $0 < \Omega_m(f,t)_2$, а значит при фиксированном $t \in (0,1)$ и больших (фиксированных) n неравенство (2.2.4) также будет грубым. Приводим уточнение неравенства (2.2.4).

Теорема 2.2.2. *Для произвольной функции* $f \in L_2$ *при любых* $m, n \in \mathbb{N}$ *и* $\alpha \in (0,1)$ *имеет место неравенство*

$$E_{n-1}(f)_2 \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha^m}} \cdot \Omega_m\big(f, t_n(\alpha)\big), \tag{2.2.5}$$

где $t_n(\alpha) = 1 - \sqrt[n]{1-\sqrt{\alpha}}$. *Неравенство (2.2.5) обращается в равенство для функции* $f_0(x) = \cos nx \in L_2$ *при любых* $n \in \mathbb{N}$ *и* $\alpha \in (0,1)$.

Доказательство теоремы 2.2.2 в ключевых моментах повторяет схему рассуждения теоремы 3 работы [83], а потому по понятным причинам здесь не приводится.

Всюду далее, в соотношениях общего характера при вычислении верхней грани по всем функциям $f \in L_2^{(r)}$, подразумевается, что $f \neq const$.

Из теоремы 2.2.1 вытекает

Следствие 2.2.1. *В условиях теоремы 2.2.1 справедливо равенство*

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^{r-\nu} E_{n-1}\big(f^{(\nu)}\big)_2}{\Omega_m\big(f^{(r)}, t\big)_2} = \big[1-(1-t)^n\big]^{-m}. \tag{2.2.6}$$

Более того, при любых $\nu = \overline{0,r}$, $r, \nu \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq \nu$, $t = 1/n$, *и* $m, n \in \mathbb{N}$

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^{r-\nu} E_{n-1}\big(f^{(\nu)}\big)_2}{\Omega_m\left(f^{(r)}, \dfrac{1}{n}\right)_2} =$$

$$= \sup_{n \in \mathbb{N}} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right]^{-m} = \big(1-e^{-1}\big)^{-m}.$$

Доказательство. В самом деле, из неравенства (2.2.1) для величины, стоящей в левой части (2.2.6), получаем оценку сверху

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^{r-\nu} E_{n-1}\big(f^{(\nu)}\big)_2}{\Omega_m\big(f^{(r)}, t\big)_2} \leq \big[1-(1-t)^n\big]^{-m}. \tag{2.2.7}$$

С другой стороны, пользуясь равенствами (2.2.3), запишем оценку снизу

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^{r-\nu} E_{n-1}\big(f^{(\nu)}\big)_2}{\Omega_m\big(f^{(r)}, t\big)_2} \geq \frac{n^{r-\nu} E_{n-1}\big(f_0^{(\nu)}\big)}{\Omega_m\big(f_0^{(r)}, t\big)_2} = \big[1 - (1-t)^n\big]^{-m}. \qquad (2.2.8)$$

Сопоставляя оценку сверху (2.2.7) с оценкой снизу (2.2.8), получаем требуемое равенство (2.2.6). Следствие 2.2.1 доказано.

§ 2.3. Наилучшее совместное приближение функций и их производных для усреднённого значения обобщённого модуля непрерывности

Прежде чем привести наши результаты для совместного приближения функций и их производных, отметим, что рассмотренные ниже задачи для наилучшей приближений функций тригонометрическими полиномами, рассмотрены, например, в работах [14, 38, 43, 63, 68, 93, 98, 101, 119, 123, 125].

Условимся под весовой функцией на отрезке $[0, h]$ понимать неотрицательную суммируемую функцию φ, не эквивалентную нулю на этом отрезке.

Теорема 2.3.1. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N}$, $r, \nu \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq \nu$, $0 < h < 1$, $0 < p \leq \infty$, $\varphi(t)$ *— весовая на* $[0, h]$ *функция. Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^{r-\nu} E_{n-1}\big(f^{(\nu)}\big)_2}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p\big(f^{(r)}, t\big)_2 \varphi(t) dt\right)^{1/p}} =$$

$$= \left(\int\limits_0^h \big[1 - (1-t)^n\big]^{mp} \varphi(t) dt\right)^{-1/p}. \tag{2.3.1}$$

Доказательство. Прежде чем доказывать равенство (2.3.1), отметим, что для параметра p, удовлетворяющего условию $0 < p \leq \infty$, функционал $\left\|\Omega_m(f^{(r)})\varphi^{1/p}\right\|_p$ в знаменателе дроби в левой части (2.3.1) определён соотношением

$$\|\Omega_m(f^{(r)})\varphi^{1/p}\|_p :=$$

$$:= \begin{cases} \left(\int\limits_0^h \Omega_m^p \big(f^{(r)}, t\big)_2 \varphi(t) dt \right)^{1/p}, & \text{если } 0 < p < \infty, \\ supvrai \Big\{ \Omega_m \big(f^{(r)}, t\big)_2 : 0 < t \leq h \Big\}, & \text{если } p = \infty. \end{cases}$$

При этом указанный функционал при $1 \leq p \leq \infty$ является нормой. Переходим теперь к доказательству равенства (2.3.1). С этой целью неравенство (2.2.1) запишем в виде

$$\Omega_m \big(f^{(r)}, t\big)_2 \geq \big[1 - (1-t)^n\big]^m n^{r-\nu} E_{n-1}\big(f^{(\nu)}\big)_2, \ \nu = \overline{0, r}$$

и возведём в степень $p \, (0 < p \leq \infty)$, затем умножим на весовую функцию φ и проинтегрируем по переменному t от 0 до h, где $0 < h < 1$. В итоге после возведения в степень $1/p$ $(0 < p \leq \infty)$ полученного неравенства приходим к соотношению

$$\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p \big(f^{(r)}, t\big)_2 \varphi(t) dt \right)^{1/p} \geq$$

$$\geq n^{r-\nu} E_{n-1}\big(f^{(\nu)}\big)_2 \cdot \left(\int\limits_0^h \big[1 - (1-t)^n\big]^{mp} \varphi(t) dt \right)^{1/p}.$$

Последнее неравенство верно для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ и в силу этого для величины, расположенной в левой части равенства (2.3.1), будем иметь оценку сверху

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^{r-\nu} E_{n-1}\big(f^{(\nu)}\big)_2}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p \big(f^{(r)}, t\big)_2 \varphi(t) dt \right)^{1/p}} \leq$$

$$\leq \left(\int\limits_0^h \bigl[1-(1-t)^n\bigr]^{mp}\varphi(t)dt\right)^{-1/p}. \qquad (2.3.2)$$

Для получения аналогичной оценки снизу для ранее рассмотренной нами функции $f_0(x)=\cos nx \in L_2^{(r)}$, для которой имеют место равенства (2.2.3), запишем

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{n^{r-\nu}E_{n-1}\bigl(f^{(\nu)}\bigr)_2}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p\bigl(f^{(r)},t\bigr)_2\varphi(t)dt\right)^{1/p}} \geq$$

$$\geq \frac{n^{r-\nu}E_{n-1}\bigl(f_0^{(\nu)}\bigr)_2}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p\bigl(f_0^{(r)},t\bigr)_2\varphi(t)dt\right)^{1/p}} = \left(\int\limits_0^h \bigl[1-(1-t)^n\bigr]^{mp}\varphi(t)dt\right)^{-1/p}. \qquad (2.3.3)$$

Требуемое равенство (2.3.1) вытекает из сопоставления оценки сверху (2.3.2) с оценкой снизу (2.3.3), чем и завершаем доказательство теоремы 2.3.1.

Из теоремы 2.3.1 вытекает ряд следствий.

Следствие 2.3.1. *В утверждении теоремы 2.3.1 при* $p=1/m,\ m\in\mathbb{N},\ \varphi(t)\equiv 1$ *справедливо равенство*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{n^{r-\nu}E_{n-1}\bigl(f^{(\nu)}\bigr)_2}{\left((n+1)\int\limits_0^h \Omega_m^{1/m}\bigl(f^{(r)},t\bigr)_2dt\right)^m} = \bigl[(n+1)h-1+(1-h)^{n+1}\bigr]^{-m}. \quad (2.3.4)$$

В частности, полагая $h=1/(n+1)$, *из (2.3.4) получаем*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{n^{r-\nu}E_{n-1}\bigl(f^{(\nu)}\bigr)_2}{\left((n+1)\int\limits_0^{1/(n+1)} \Omega_m^{1/m}\bigl(f^{(r)},t\bigr)_2dt\right)^m} = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-m(n+1)},$$

откуда

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{n^{r-\nu}E_{n-1}\big(f^{(\nu)}\big)_2}{\left((n+1)\displaystyle\int\limits_0^{1/(n+1)}\Omega_m^{1/m}\big(f^{(r)},t\big)_2dt\right)^m}=e^m.$$

Следствие 2.3.2. *Если в условиях теоремы 2.3.1 полагать* $\varphi(t)=n(1-t)^{n-1}$, $0<t<1$, *то имеем*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{n^{r-\nu}E_{n-1}\big(f^{(\nu)}\big)_2}{\left(n\displaystyle\int\limits_0^{h}\Omega_m^{p}\big(f^{(r)},t\big)_2(1-t)^{n-1}dt\right)^{1/p}}=$$

$$=\left\{\frac{mp+1}{\big[1-(1-h)^n\big]^{mp+1}}\right\}^{1/p}. \tag{2.3.5}$$

В частности, полагая $p=1/m,\ h=1/n,\ m,n\in\mathbb{N}$, *из (2.3.5) получаем*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{n^{r-\nu}E_{n-1}\big(f^{(\nu)}\big)_2}{\left(n\displaystyle\int\limits_0^{1/n}\Omega_m^{1/m}\big(f^{(r)},t\big)_2(1-t)^{n-1}dt\right)^m}=$$

$$=\sup_{n\in\mathbb{N}}\left\{\frac{2}{\big[1-(1-1/n)^n\big]^2}\right\}^m=\frac{2^m}{(1-e^{-1})^{2m}}.$$

§ 2.4. Совместное приближение класса функций $W^{(r)}_{p,m}(h)$

Символом $W^{(r)}_{p,m}\big(h\big) := W^{(r)}_{p}\big(\Omega_m;\varphi,h\big)$, $r\in\mathbb{Z}_+,\ 0<p\le\infty,\ \ \varphi$ — весовая на $[0,h],\ 0<h<1$ функция обозначим класс функций $f\in L^{(r)}_2$, для которых при любом $h\in(0,1)$ имеет место неравенство

$$\int\limits_0^h \Omega^p_m\big(f^{(r)},t\big)_2\varphi(t)dt\le 1.$$

Требуется найти значение величины

$$\mathscr{E}^{(\nu)}_{n-1}\Big(W^{(r)}_{p,m}\big(h\big)\Big)_2 := \sup\Big\{E_{n-1}\big(f^{(\nu)}\big)_2 : f\in W^{(r)}_{p,m}\big(h\big)\Big\}. \tag{2.4.1}$$

Теорема 2.4.1. *Пусть* $m,n\in\mathbb{N},\ r,\nu\in\mathbb{Z}_+,\ n>r\ge\nu,\ 0<p\le\infty,\ h\in(0,1)$, φ — *весовая на отрезке* $[0,h]$ *функция. Тогда имеет место равенство*

$$\mathscr{E}^{(\nu)}_{n-1}\Big(W^{(r)}_{p,m}\big(h\big)\Big)_2 = \frac{n^{-(r-\nu)}}{\left(\int\limits_0^h\big[1-(1-t)^n\big]^{mp}\varphi(t)dt\right)^{1/p}}. \tag{2.4.2}$$

Доказательство. Из неравенства (2.3.2) для произвольной функции $f\in L^{(r)}_2$ при любых $m,n\in\mathbb{N},\ r,\nu\in\mathbb{Z}_+,\ 0<p\le\infty$ вытекает

$$E_{n-1}\big(f^{(\nu)}\big)_2\le\frac{1}{n^{r-\nu}}\cdot\frac{\left(\int\limits_0^h\Omega^p_m\big(f^{(r)},t\big)_2\varphi(t)dt\right)^{1/p}}{\left(\int\limits_0^h\big[1-(1-t)^n\big]^{mp}\varphi(t)dt\right)^{1/p}},$$

откуда в предположении $f\in W^{(r)}_{p,m}\big(h\big)$ сразу получаем оценку сверху

$$\mathscr{E}^{(\nu)}_{n-1}\Big(W^{(r)}_{p,m}\big(h\big)\Big)_2 \le \frac{n^{-(r-\nu)}}{\left(\int\limits_0^h\big[1-(1-t)^n\big]^{mp}\varphi(t)dt\right)^{1/p}}. \tag{2.4.3}$$

Чтобы получить аналогичную оценку снизу для величины (2.2.7), вводим в рассмотрение функцию

$$g(x) = n^{-r} \cdot \left(\int\limits_0^h \big[1-(1-t)^n\big]^{mp} \varphi(t)dt \right)^{-1/p} \cdot \cos nx,$$

для которой в силу равенств (2.1.14) и (2.2.2) имеем

$$\Omega_m\big(g^{(r)}, t\big)_2 = \frac{\big[1-(1-t)^n\big]^m}{\left(\int\limits_0^h \big[1-(1-t)^n\big]^{mp} \varphi(t)dt \right)^{1/p}}, \tag{2.4.4}$$

$$E_{n-1}\big(g^{(\nu)}\big)_2 = \frac{n^{-(r-\nu)}}{\left(\int\limits_0^h \big[1-(1-t)^n\big]^{mp} \varphi(t)dt \right)^{1/p}}. \tag{2.4.5}$$

Поскольку в силу (2.4.4)

$$\int\limits_0^h \Omega_m^p\big(g^{(r)}, t\big)_2 \varphi(t)dt = 1,$$

то полученное равенство означает, что функция g принадлежит классу $W_{p,m}^{(r)}\big(h\big)$, а потому, учитывая равенство (2.4.5), запишем оценку снизу

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(\nu)}\Big(W_{p,m}^{(r)}\big(h\big)\Big)_2 \geq$$

$$\geq E_{n-1}\big(g^{(\nu)}\big)_2 = n^{-(r-\nu)} \left(\int\limits_0^h \big[1-(1-t)^n\big]^{mp} \varphi(t)dt \right)^{-1/p}. \tag{2.4.6}$$

Требуемое равенство (2.4.2) получаем из сопоставления оценки сверху (2.4.3) с оценкой снизу (2.4.6), чем и завершаем доказательство теоремы 2.4.1.

Следствие 2.4.1. *В условиях теоремы 2.4.1 при* $p = 1/m$, $m, n \in \mathbb{N}$, $h = 1/(n+1)$ *и* $\varphi(t) \equiv 1$ *получаем*

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(\nu)}\left(W_{1/m,m}^{(r)}\Big(\frac{1}{n+1}\Big)\right)_2 = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{-m(n+1)} \cdot n^{-(r-\nu)}.$$

§ 2.5. Применение $\mathscr{K}$-функционала

В этом пункте мы излагаем некоторые точные результаты, связывающие величины наилучших приближений $E_{n-1}(f)$ функций $f \in L_2^{(r)}$ с $\mathscr{K}$-функционалом Петре. Основные свойства $\mathscr{K}$-функционала и некоторые его применения приведены в монографии [11] и в статье [?]. В последнее время при решении экстремальных задач теории приближения посредством $\mathscr{K}$-функционала Петре найдены точные результаты (см., например, [27, 114]). Определим $\mathscr{K}$-функционал, построенный по двум пространствам L_2 и $L_2^{(m)}$, $m \in \mathbb{N}$:

$$\mathscr{K}(f, t^m) := \mathscr{K}\left(f, t^m; L_2, L_2^{(m)}\right) = \inf\left\{\|f - g\| + t^m\|g^{(m)}\|\right\} \qquad (2.5.1)$$

где $m \in \mathbb{N}$, $0 < t < 1$.

Отметим, что в цитированных выше работах доказывается эквивалентность $\mathscr{K}$-функционала и введенных там модулей непрерывности m-го порядка. В нашем случае эквивалентность $\mathscr{K}$-функционала (2.5.1) и обобщённого модуля непрерывности m-го порядка (2.1.4) устанавливает следующее утверждение

Теорема 2.5.1. *Для произвольной функции $f \in L_2$ при любом $t \in (0, 1)$ выполняются неравенства*

$$c_1\,\Omega_m(f, t) \le \mathscr{K}(f, t^m) \le c_2\,\Omega_m(f, t), \qquad (2.5.2)$$

где константы c_1 и c_2 зависят только от числа $m \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что $\mathscr{K}$-функционал $\mathscr{K}(f, t^m)$ не убывает по аргументу t и очевидно, что для любого $n \in \mathbb{N}$

$$\mathscr{K}\left(f,(nt)^m\right) \leq n^m \mathscr{K}(f,t^m). \tag{2.5.3}$$

В силу того факта, что $\Omega_m(f,t)$ не убывает по t, с учётом неравенства (2.5.3) и соотношение (2.5.2) достаточно доказать для числовой последовательности $t_n = 1/n,\ n \in\ \mathbb{N}$. Заметим, что при любых $k, n \in \mathbb{N}$

$$1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^k \leq \frac{k}{n}, \tag{2.5.4}$$

$$1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^k \asymp \frac{k}{n}. \tag{2.5.5}$$

Учитывая соотношения (2.5.4) и (2.5.5) для произвольной $g \in L_2^{(m)}$, $m \in \mathbb{N}$, имеем

$$\Omega_m\left(g,\frac{1}{n}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^k\right]^{2m}\rho_k^2(g) \lesssim \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k}{n}\right)^{2m}\cdot\rho_k^2(g) =$$

$$= \frac{1}{n^{2m}}\sum_{k=1}^{\infty}k^{2m}\rho_k^2(g) = \frac{1}{n^{2m}}\left\|g^{(m)}\right\|^2.$$

Поэтому для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ имеем:

$$\Omega_m\left(f,\,\frac{1}{n}\right) \leq \Omega_m\left(f-g,\,\frac{1}{n}\right) + \Omega_m\left(g,\,\frac{1}{n}\right) \lesssim$$

$$\lesssim \|f-g\| + \frac{1}{n^m}\left\|g^{(m)}\right\|.$$

Отсюда, переходя к нижней грани по всем функциям $g \in L_2^{(m)}$, имеем:

$$\Omega_m\left(f,\,\frac{1}{n}\right) \lesssim \mathscr{K}\left(f,\,\frac{1}{n^m}\right). \tag{2.5.6}$$

С другой стороны, для частичной суммы $S_{n-1}(f,x)$ ряда Фурье справедливы соотношения

$$\left\|\mathcal{D}^m\big(S_{n-1}(f)\big)\right\| \lesssim n^m\Omega_m\left(S_{n-1}(f),\,\frac{1}{n}\right) \lesssim n^m\Omega_m\left(f,\,\frac{1}{n}\right),$$

откуда сразу получаем

$$\mathscr{K}\left(f,\,\frac{1}{n^m}\right) \lesssim \|f - S_{n-1}(f)\| +$$

$$+n^{-m}\left\|\mathcal{D}^m\big(S_{n-1}(f)\big)\right\| \lesssim \Omega_m\left(f,\,\frac{1}{n}\right). \tag{2.5.7}$$

Из (2.5.6) и (2.5.7) в силу непрерывности $\Omega_m(f,t)$ следует утверждение теоремы 2.5.1. Из доказанной теоремы вытекает, в частности , что $\lim\limits_{t\to 0+0}\mathscr{K}\left(f,t^m\right) = 0$. Имеет место следующий основной результат для $\mathscr{K}$-функционала (2.5.1).

Теорема 2.5.2. *Пусть* $m,n\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$. *Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{n^r\cdot E_{n-1}(f)}{\mathscr{K}\left(f^{(r)},1/n^m\right)} = 1. \tag{2.5.8}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что для произвольной функции $f\in L_2^{(r)}$ с учётом формулы (2.1.1) и (2.2.2) имеем:

$$E_{n-1}^2(f) = \sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2(f) \le \sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{k}{n}\right)^{2r}\cdot\rho_k^2(f) = \frac{1}{n^{2r}}\sum_{k=n}^{\infty}k^{2r}\rho_k^2(f) =$$

$$= \frac{1}{n^{2r}}\left\|f^{(r)}\right\|^2 \le \frac{1}{n^{2r}}\left\|f^{(r)} - S_{n-1}(g)\right\|^2. \tag{2.5.9}$$

В силу равенств (2.2.2) для произвольной $g\in L_2^{(m)}$

$$\left\|g - S_{n-1}(g)\right\| = E_{n-1}(g) \le \frac{1}{n^m}E_{n-1}\left(g^{(m)}\right) \le \frac{1}{n^m}\left\|g^{(m)}\right\|. \tag{2.5.10}$$

Учитывая (2.5.10), из (2.5.9) получаем

$$E_{n-1}(f) \leq \frac{1}{n^{2r}}\left\{\left\|f^{(r)} - g)\right\| + \left\|g - S_{n-1}(g)\right\|\right\} \leq$$

$$\leq \frac{1}{n^{2r}}\left\{\left\|f^{(r)} - g)\right\| + \frac{1}{n^m}\left\|g^{(m)}\right\|\right\}. \tag{2.5.11}$$

Переходя в обеих частях неравенства (2.5.11) к нижней грани по всем функциям $g \in L_2^{(m)}$, с учётом определения $\mathscr{K}$-функционала, будем иметь

$$E_{n-1}(f) \leq \frac{1}{n^r}\mathscr{K}\left(f^{(r)}, \frac{1}{n^m}\right),$$

откуда сразу следует оценка сверху

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^r \cdot E_{n-1}(f)}{\mathscr{K}\left(f^{(r)}, n^{-m}\right)} \leq 1. \tag{2.5.12}$$

С целью получения оценки снизу величины, стоящей в левой части (2.5.8), в равенстве (2.5.1), сначала полагая $f(x) := T_n(x)$, где $T_n(x) \in \mathscr{T}_{2n-1}$, получаем

$$\mathscr{K}_m\left(T_n, t^m\right) \leq \|T_n\|. \tag{2.5.13}$$

Так как функция $g(t) := T_n(t)$ также принадлежит классу $L_2^{(m)}$, то из (2.5.1) также следует оценка

$$\mathscr{K}_m\left(T_n, t^m\right) \leq t^m \left\|T_n^{(m)}\right\|. \tag{2.5.14}$$

Таким образом, для произвольного полинома $T_n(t) \in \mathscr{T}_{2n+1}$ из двух последних неравенств вытекает, что

$$\mathscr{K}_m\left(T_n, t^m\right) \leq \min\left\{\left\|T_n\right\|; t^m \left\|T_n^{(m)}\right\|\right\} \ 0 < t \leq 1.$$

Рассмотрим снова ту же функцию $f_0(x) = \cos nx$, использованную нами при доказательство теоремы 2.5.1. Так как

$$f_0^{(r+m)} = n^{r+m} \cos\left(nx + \frac{(r+m)\pi}{2}\right),$$

то в силу неравенства (2.5.14) будем иметь

$$\mathscr{K}\left(f_0^{(r)}, n^{-m}\right) \le n^{-m} \left\| f_0^{(r+m)} \right\| = n^{-m} n^{r+m} = n^r.$$

Используя полученное неравенство и тот факт, что $E_{n-1}(f_0) \equiv 1$, имеем:

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^r \cdot E_{n-1}(f)}{\mathscr{K}_m\left(f^{(r)}, n^{-m}\right)} \ge \frac{n^r \cdot E_{n-1}(f_0)}{\mathscr{K}_m\left(f^{(r)}, n^{-m}\right)} \ge 1. \tag{2.5.15}$$

Требуемое равенство (2.5.8) получаем из сопоставления оценки сверху (2.5.14) с оценкой снизу (2.5.15), чем и завершаем доказательство теоремы 2.5.2.

Следствие 2.5.1. *В условиях теоремы 2.5.2, при любых* $m, n \in \mathbb{N}$, *справедливо равенство*

$$\sup_{f \in L_2} \frac{E_{n-1}(f)}{\mathscr{K}_m\big(f, n^{-m}\big)} = 1. \tag{2.5.16}$$

ГЛАВА 3. Неравенства между наилучшими полиномиальными приближениями и неклассическим модулем непрерывности в пространстве L_2

В этой главе получена оценка величины наилучшего среднеквадратичного приближения $E_{n-1}(f)$ произвольной комплекснозначной 2π-периодической функции $f \in L_2^{(r)}$ подпространством $\mathscr{T}_{2n-1}$ тригонометрических полиномов порядка не выше $n-1$ и усреднённым значением неклассического модуля непрерывности $\widetilde{\omega}_{2m-1}(f^{(r)}, t)$ производной $f^{(r)} \in L_2$ с произвольным весом $q(t)$ в пространстве L_2. Указанный неклассический модуль непрерывности $\widetilde{\omega}_{2m-1}(f^{(r)}, t)$ порождён конечно-разностным оператором порядка $2m-1$ с постоянными знакочередующимися коэффициентами, равными по модулю единице. Доказано двустороннее неравенство

$$\Big\{J_{n,m,r,p}(q,h)\Big\}^{-1} \le$$

$$\le \sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\neq const}} \frac{E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h \widetilde{\omega}_{2m-1}^p(f^{(r)}, t)q(t)dt\right)^{1/p}} \le \Big\{\inf_{n\le k<\infty} J_{k,m,r,p}(q,h)\Big\}^{-1},$$

где

$$J_{k,m,r,p}(q,h) := \left(k^{rp}\int\limits_0^h \mathscr{P}_m^{p/2}(kt)q(t)dt\right)^{1/p},$$

$$\mathscr{P}_m(kt) := 2m - 2\sum_{l=1}^{m-1}(-1)^{l+1}(2m-l)\cos lkt,$$

$m, k, n \in \mathbb{N},\ m \geq 2,\ r \in \mathbb{Z}_+,\ 0 < p \leq 2,\ h \in (0, 2\pi/n]$. Для некоторых конкретных значений указанных параметров и весовых функций q полученное двустороннее неравенство обращается в равенство. Изложенные в этой главе результаты опубликованы в работах [1-A, 2-A, 5-A, 6-A].

§ 3.1. Вспомогательные утверждения и двустороннее неравенство для характеристик гладкости $\widetilde{\omega}_{2m-1}$ функций $f \in L_2^{(r)}$

В последнее время при решении ряда экстремальных задач теории аппроксимации функций как в действительной, так и в комплексной области часто используют различные модификации классического модуля непрерывности (см., например, [3, 5, 8, 10, 18, 23, 28, 29, 32, 37, 56–60, 75, 76, 81, 82, 84, 114, 116, 121] и литературу, приведённую в них). При этом для определения характеристик гладкости рассматриваются различные способы осреднения конечных разностей, основанные на применении конкретных сглаживающих операторов, например оператора Стеклова [3, 23, 114, 121], вместо обычного оператора сдвига $T_h(f, x) := f(x+h),\ x, h \in \mathbb{R}$. Оператор сдвига $T_h(f)$ используется для построения классических модулей непрерывности и гладкости, которые являются основными элементами прямых и обратных теорем теории приближения. Различные обобщения операторов сдвига позволяют сформулировать естественные задачи теории приближения. Другими обобщениями операторов сдвига являются так называемые „Операторы обобщенного сдвига", различные приложения которых приведены в монографии [60] и работах [76, 82]. Указанные операторы и построенные по ним обобщённые модули гладкости могут быть лучше приспособлены для изучения структурных связей между гладкостными свойствами функции в весовых функциональных пространствах, чем обычные модули гладкости. Некоторые результаты такого типа с использованием обобщённого сдвига можно найти, например, в [5, 23, 114] и в источниках, указанных в этих работах.

Сравнительно недавно в пространстве L_2 стали изучаться неравенства Джексона-Стечкина с обобщёнными модулями непрерывности, как конечно-разностными операторами с переменными коэффициентами [8], так и бесконечно-разностными операторами с постоянными коэффициентами [28, 29]. Кроме того, в работе [56] использовалась задача отыскания точных констант в неравенстве типа Джексона-Стечкина для обобщённого модуля непрерывности Бомана-Шапиро, а в [10, 116] найдены точные константы в аналогичном неравенстве между наилучшим L_2-приближением 2π-периодической функции $f \in L_2$ тригонометрическими полиномами порядка не выше $n-1$ и усреднённым с заданным весом неклассическим модулем непрерывности $\widetilde{\omega}_{2m-1}(f^{(r)}, t)$, введённым А.Г.Бабенко в [8]. Здесь мы продолжим исследование в этом направлении и докажем ряд точных неравенств между величиной наилучшего приближения $E_{n-1}(f)$ и усреднённой с произвольным весом q значением модуля непрерывности $\widetilde{\omega}_{2m-1}(f^{(r)}, t)$ функции $f \in L_2^{(r)}$, пользуясь идеей и схемой рассуждения работ [8, 10, 114, 116].

Введём нужные нам в дальнейшем обозначения и определения: символами $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{C}$ будем обозначать соответственно множество натуральных, целых неотрицательных, целых, вещественных, положительных и комплексных чисел; $L_2 := L_2[0, 2\pi]$ — пространство 2π-периодических комплекснозначных измеримых функций f, квадрат модуля которых суммируем на периоде $\mathbb{T} :=$

$\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}) = [0, 2\pi]$, с конечной нормой

$$\|f\| := \|f\|_{L_2} := \left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2};$$

$L_2^{(r)}$ ($r \in \mathbb{Z}_+$; $L_2^{(0)} \equiv L_2$) — множество функций f, у которых производные (r–1)-го порядка $f^{(r-1)}$ абсолютно непрерывны на $\mathbb{T}$, а производные r-го порядка $f^{(r)}$ принадлежат L_2;

$$\mathscr{T}_{2n-1} := \left\{T_{n-1}:\ T_{n-1}(x) = \sum_{|k|\le n-1} a_k e^{ikx},\ a_k \in \mathbb{C}\right\}$$

— подпространство тригонометрических полиномов порядка не выше $n-1$ с комплексными коэффициентами;

$$E_{n-1}(f) := E(f, \mathscr{T}_{2n-1}) = \inf\left\{\|f - T_{n-1}\|:\ T_{n-1} \in \mathscr{T}_{2n-1}\right\} \tag{3.1.1}$$

— величина наилучшего приближения функции $f \in L_2$ элементами T_{n-1} подпространства $\mathscr{T}_{2n-1}$.

Хорошо известно, что среди всех тригонометрических многочленов $T_{n-1} \in \mathscr{T}_{2n-1}$ точную нижнюю грань в правой части равенства (3.1.1) реализует частная сумма [8, 10]

$$S_{n-1}(f, x) = \sum_{|k|\le n-1} c_k(f) e^{ikx}$$

порядка $n-1$ ряда Фурье

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f) e^{ikx},$$

где

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx, \quad k \in \mathbb{Z}$$

— коэффициенты Фурье функции $f \in L_2$. При этом

$$E_{n-1}(f) = \left(2\sum_{|k|\geq n}\left|c_k(f)\right|^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2(f)\right)^{1/2}, \tag{3.1.2}$$

где положено

$$\rho_k^2(f) := 2\Big(\left|c_k(f)\right|^2 + \left|c_{-k}(f)\right|^2\Big),\ k \geq n,\ k, n \in \mathbb{N}.$$

Зафиксируем число $m \in \mathbb{N}$ и, следуя [8], введём разностный оператор

$$\widetilde{\Delta}_h^{2m-1} f(x) = \sum_{\nu=0}^{2m-1}(-1)^{\nu+1} f(x+\nu t), \tag{3.1.3}$$

действующий из L_2 в L_2. Определим соответствующий модуль непрерывности функции $f \in L_2$:

$$\widetilde{\omega}_{2m-1}(f^{(r)}, t) := \sup\left\{\left\|\widetilde{\Delta}_h^{2m-1} f\right\| :\ |h| \leq t\right\}, \quad t > 0. \tag{3.1.4}$$

Отметим, что при $m = 1$ модуль непрерывности (3.1.4) совпадает с классическим модулем непрерывности первого порядка $\omega(f, t)$ при всех $f \in L_2$ и $t \geq 0$, а потому далее будем считать, что $m \geq 2$. Следует отметить, что вопросы наилучшего среднеквадратичного приближения функций $f \in L_2$ тригонометрическими полиномами с привлечением неклассического модуля непрерывности (3.1.4) ранее рассматривались в работах А.Г.Бабенко [8], Н.А.Барабошкиной [10], М.Ш.Шабозова и А.Ф.Фарозовой [116].

§ 3.2. Точная константа в неравенстве Джексона-Стечкина

Напомним, что под неравенствами Джексона – Стечкина понимают неравенства, в которых величины наилучших приближений функций конечномерными подпространствами в заданном нормированном пространстве оцениваются через модули непрерывности самих функций или их производных.

Далее под весовой функцией на отрезке $[0, h]$ будем понимать любую неотрицательную суммируемую функцию q, не эквивалентную нулю на этом же отрезке. В соотношениях общего характера при вычислении верхней грани по всем функциям $f \in L_2^{(r)}$ всегда подразумевается, что $f \neq const$.

Для $m, n, r \in \mathbb{N}$, $p \in (0, \infty]$, $0 < t \leq h$, $h \in (0, 2\pi/n]$, q — весовая на $[0, h]$ функция, введём в рассмотрение следующую экстремальную аппроксимационную характеристику

$$\chi_{n,m,r,p}(q, h) = \sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h \widetilde{\omega}_{2m-1}^p(f^{(r)}, t) q(t) dt\right)^{1/p}}, \qquad (3.2.1)$$

для которой имеет место следующая общая

Теорема 3.2.1. *Пусть* $m, n, r \in \mathbb{N}$, $0 < p \leq 2$, $h \in (0, 2\pi/n]$, q *— весовая на* $[0, h]$ *функция. Тогда справедливы неравенства*

$$\left\{J_{n,m,r,p}(q, h)\right\}^{-1} \leq \chi_{n,m,r,p}(q, h) \leq \left\{\inf_{n \leq k < \infty} J_{k,m,r,p}(q, h)\right\}^{-1}, \qquad (3.2.2)$$

где

$$J_{k,m,r,p}(q, h) := \left(k^{rp} \int\limits_0^h \mathscr{P}_m^{p/2}(kt) q(t) dt\right)^{1/p}, \qquad (3.2.3)$$

$$\mathscr{P}_m(kt) := \frac{1-\cos 2mkt}{1+\cos kt} =$$

$$= 2m - 2\sum_{l=1}^{2m-1}(-1)^{l+1}(2m-l)\cos{(2m-l)kt}. \tag{3.2.4}$$

Доказательство. В [10] для произвольной функции $f \in L_2$ доказано неравенство

$$\left\|\widetilde{\Delta}_h^{2m-1}f\right\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\rho_k^2(f)\mathscr{P}_m(kh), \quad h \in \mathbb{R}, \tag{3.2.5}$$

где $\mathscr{P}_m$ определено равенством (3.2.4). Из (3.2.5) для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$, учитывая равенство

$$\rho_k^2(f^{(r)}) = k^{2r}\rho_k^2(f),\ k, r \in \mathbb{N},$$

запишем

$$\left\|\widetilde{\Delta}_h^{2m-1}f^{(r)}\right\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\rho_k^2(f^{(r)})\mathscr{P}_m(kh) = \sum_{k=1}^{\infty}k^{2r}\rho_k^2(f)\mathscr{P}_m(kh). \tag{3.2.6}$$

Далее, сгруппировав косинусы с чётными и нечётными коэффициентами l в правой части (3.2.4), подобно [10, 116] и заметив, что сумма в (3.2.4) не изменится, если суммирование по l производить от 1 до m, представим (3.2.4) в виде

$$\mathscr{P}_m(kt) = 2m - 2\sum_{l=1}^{m}\big[(2m-2l+1)\cos{(2l-1)kt} - 2(m-l)\cos 2lkt\big]. \tag{3.2.7}$$

Теперь, воспользуясь схемой рассуждений [120, теорема 1], рассмотрим один упрощённый вариант неравенства Минковского [78, с.104]

$$\left\{\int_0^h\left(\sum_{k=n}^{\infty}|\widetilde{f}_k(t)|^2\right)^{p/2}dt\right\}^{1/p} \geq \left\{\sum_{k=n}^{\infty}\left(\int_0^h|\widetilde{f}_k(t)|^p dt\right)^{2/p}\right\}^{1/2}, \tag{3.2.8}$$

верного для $0 < p \le 2$ и произвольного $h \in \mathbb{R}_+$. Полагая в обеих частях неравенства (3.2.8) $\widetilde{f_k} := f_k\, q^{1/p}$, где $k = n, n+1, \ldots$, получаем

$$\left\{\int\limits_0^h \left(\sum_{k=n}^{\infty} |f_k(t)|^2\right)^{p/2} q(t)dt\right\}^{1/p} \ge \left\{\sum_{k=n}^{\infty}\left(\int\limits_0^h |f_k(t)|^p\, q(t)dt\right)^{2/p}\right\}^{1/2}.$$

Применив последнее неравенство с учётом (3.2.6) для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$, запишем

$$\left\{\int\limits_0^h \widetilde{\omega}_{2m-1}^p(f^{(r)},t)q(t)dt\right\}^{1/p} \ge$$

$$\ge \left\{\int\limits_0^h \left(\sum_{k=n}^{\infty} k^{2r}\rho_k^2(f)\mathscr{P}_m(kt)\right) q(t)dt\right\}^{1/p} \ge$$

$$\ge \left\{\sum_{k=n}^{\infty}\left(k^{rp}\rho_k^p(f)\int\limits_0^h \mathscr{P}_m^{p/2}(t)q(t)dt\right)^{2/p}\right\}^{1/2} =$$

$$= \left\{\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2(f)\left(k^{rp}\int\limits_0^h \mathscr{P}_m^{p/2}(kt)q(t)dt\right)^{2/p}\right\}^{1/2} =$$

$$= \left\{\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2(f)J_{k,m,r,p}(q,h)\right\}^{1/2} \ge \inf_{n\le k<\infty}\Big\{J_{k,m,r,p}(q,h)\Big\}E_{n-1}(f).$$

Отсюда сразу следует оценка сверху величины (3.2.1):

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h \widetilde{\omega}_{2m-1}^p(f^{(r)},t)q(t)dt\right)^{1/p}} \le \frac{1}{\inf\limits_{n\le k<\infty} J_{k,m,r,p}(q,h)}. \qquad (3.2.9)$$

С целью получения оценки снизу экстремальной характеристики, стоящей в левой части неравенства (3.2.9), введём в рассмотрение комплекснозначную функцию $f_0(x) := e^{inx}$, очевидно принадлежащую классу $L_2^{(r)}$. В силу формул (3.1.2) и (3.2.6) для f_0 имеем

$$E_{n-1}(f_0) = 1, \quad \widetilde{\omega}_{2m-1}^2(f_0^{(r)}, t) = n^{2r}\mathscr{P}_m(nt).$$

Следовательно,

$$\chi_{n,m,r,p}(q,h) \geq \frac{E_{n-1}(f_0)}{\left(\int\limits_0^h \widetilde{\omega}_{2m-1}^p(f_0^{(r)}, t)q(t)dt\right)^{1/p}} =$$

$$= \left(n^{rp}\int\limits_0^h \mathscr{P}_m^{p/2}(nt)q(t)dt\right)^{-1/p} = \frac{1}{J_{n,m,r,p}(q,h)}. \qquad (3.2.10)$$

Требуемое двойное неравенство (3.2.2) следует из сопоставления оценки сверху (3.2.9) и снизу (3.2.10), чем и завершаем доказательство теоремы 3.2.1.

Из хода рассуждений теоремы 3.2.1 очевидно, что на точность неравенства (3.2.2) можно рассчитывать только лишь тогда, когда выполняется равенство

$$\inf_{n\leq k<\infty} J_{k,m,r,p}(q,h) = J_{n,m,r,p}(q,h). \qquad (3.2.11)$$

Рассмотрим в каких ситуациях возможно равенство (3.2.11). Одна из таких возможностей содержится в следующей теореме

Теорема 3.2.2. *Пусть* $m, n, r \in \mathbb{N}$, $1/r \leq p \leq 2$, $h \in (0, 2\pi/n]$ — *произвольное число, весовая функция* $q \equiv 1$. *Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h\widetilde{\omega}_{2m-1}^p(f^{(r)},t)dt\right)^{1/p}}=\frac{1}{J_{n,m,r,p}(1,h)}. \tag{3.2.12}$$

Доказательство. Исходя из формулы (3.2.3), для установления справедливости равенства

$$\inf_{n\le k<\infty}J_{k,m,r,p}(1,h)=J_{n,m,r,p}(1,h) \tag{3.2.13}$$

достаточно доказать, что функция

$$g(x):=x^{rp}\int\limits_0^h\mathscr{P}_m^{p/2}(xt)dt$$

является неубывающей на множестве точек $x\ge n$. Вычислим производную функции $g(x)$. Имеем

$$g'(x)=rpx^{rp-1}\int\limits_0^h\mathscr{P}_m^{p/2}(xt)dt+x^{rp}\int\limits_0^h\frac{d}{dx}\mathscr{P}_m^{p/2}(xt)dt. \tag{3.2.14}$$

Учитывая формулу (3.2.5), непосредственным вычислением убедимся в справедливости тождества

$$\frac{d}{dx}\mathscr{P}_m^{p/2}(xt)=\frac{t}{x}\cdot\frac{d}{dt}\mathscr{P}_m^{p/2}(xt). \tag{3.2.15}$$

Пользуясь (3.2.15), формулу (3.2.14) запишем в виде

$$g'(x)=x^{rp-1}\left\{rp\int\limits_0^h\mathscr{P}_m^{p/2}(xt)dt+\int\limits_0^h t\frac{d}{dt}\mathscr{P}_m^{p/2}(xt)dt\right\}. \tag{3.2.16}$$

Применив метод интегрирования по частям ко второму интегралу в правой части (3.2.16), получаем

$$g'(x) = x^{rp-1}\left\{h\,\mathscr{P}_m^{p/2}(xh) + (rp-1)\int\limits_0^h \mathscr{P}_m^{p/2}(xt)dt\right\}. \qquad (3.2.17)$$

Теперь заметим, что в силу формулы (3.2.5) функция $\mathscr{P}_m$ является неотрицательной на множестве $\mathbb{R}_+$ при $1/r \le p \le 2$, а потому из (3.2.17) следует, что $g'(x) \ge 0$. Следовательно,

$$\inf\left\{g(x):\ n \le x < \infty\right\} = g(n),$$

а это равносильно равенству (3.2.13), и этим теорема 3.2.2 доказана.

Так как

$$J_{n,m,r,p}(1,h) = \left(n^{rp}\int\limits_0^h \mathscr{P}_m^{p/2}(nt)dt\right)^{1/p},$$

то равенство (3.2.12) можно записать в виде

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{n^r E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h \widetilde{\omega}_{2m-1}^p(f^{(r)},t)dt\right)^{1/p}} = \frac{1}{\left(\int\limits_0^h \mathscr{P}_m^{p/2}(nt)dt\right)^{1/p}}. \qquad (3.2.18)$$

Используя формулы (3.2.4) и равенство (3.2.18), получаем

Следствие 3.2.1. *В условиях теоремы 3.2.2 при $h = \pi/n$ и $p = 2$ справедливо равенство*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{n^r E_{n-1}(f)}{\left(\frac{n}{\pi}\int\limits_0^{\pi/n} \widetilde{\omega}_{2m-1}^2(f^{(r)},t)dt\right)^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{2m}}. \qquad (3.2.19)$$

Доказательство. В самом деле, в этом случае достаточно вычислить интеграл в знаменателе дроби правой части (3.2.18) при $h = \pi/n$ и $p = 2$. Учитывая представление (2.2.7), имеем

$$\left(\frac{n}{\pi}\int\limits_0^{\pi/n}\mathscr{P}_m^{p/2}(nt)dt\right)^{1/2} =$$

$$= \left(\frac{n}{\pi}\int\limits_0^{\pi/n}\Bigg\{2m - 2\sum_{l=1}^{m}\big[(2m-2l+1)\cos(2l-1)nt-$$

$$-2(m-l)\cos 2lnt\big]\Bigg\}dt\right)^{1/2} = \sqrt{2m},$$

откуда немедленно следует равенство (3.2.19). Непосредственной проверкой можно убедиться, что результат (3.2.19) имеет место и в случае $r = 0$.

§ 3.3. Связь теоремы 3.2.2 с поведением точных констант в неравенствах Джексона-Стечкина на классе $L_2^{(r)},\ r \in \mathbb{N}$

Рассмотрим связь результата теоремы 3.2.2 с задачей отыскания точной константы в неравенстве Джексона-Стечкина для 2π-периодических комплекснозначных функций $f \in L_2^{(r)},\ r \in \mathbb{Z}_+$. Полагая

$$K_{n,r}\big(\widetilde{\omega}_{2m-1}, t\big) = \sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^r E_{n-1}(f)}{\widetilde{\omega}_{2m-1}^2(f^{(r)}, t/n)}, \tag{3.3.1}$$

$m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+,\ f \in L_2^{(r)}$ $(L_2^{(0)} \equiv L_2)$, $t > 0$. При $r = 0$ положим

$$K_n\big(\widetilde{\omega}_{2m-1}, t\big) = K_{n,0}\big(\widetilde{\omega}_{2m-1}, t\big).$$

Отметим, что при $r = 0$ экстремальная характеристика (3.3.1) ранее изучалась в работах А.Г.Бабенко [8], Н.А.Барабошкиной [10], М.Ш.Шабозова и А.Д.Фарозовой [116].

В [10] доказана оценка сверху

$$K_n\Big(\widetilde{\omega}_{2m-1}, \frac{2\pi}{n}\Big) \le \frac{1}{\sqrt{2m}}, \quad m \ge 2,\ n \in \mathbb{N},$$

а из результата работы [8, теорема 1] следует, что

$$K_n\Big(\widetilde{\omega}_{2m-1}, \frac{t}{n}\Big) \ge \frac{1}{\sqrt{2m}}, \quad 0 < t \le 2\pi,\ n \ge 2m. \tag{3.3.2}$$

Теорема 3.3.1. *При любых $n, m \in \mathbb{N},\ m \ge 2$ справедливо равенство*

$$K_n\Big(\widetilde{\omega}_{2m-1}, \frac{\pi}{n}\Big) = \frac{1}{\sqrt{2m}}. \tag{3.3.3}$$

Доказательство. Действительно, с одной стороны, из равенства (3.2.19) для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$, учитывая, что модуль непрерывности

$\widetilde{\omega}^2_{2m-1}(f^{(r)}, t)$ является неубывающим по t, будем иметь

$$E_{n-1}(f) \leq \frac{1}{\sqrt{2m}} \cdot \frac{1}{n^r} \left(\frac{n}{\pi} \int\limits_0^{\pi/n} \widetilde{\omega}^2_{2m-1}(f^{(r)}, t) dt \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{2m}} \cdot \frac{1}{n^r} \widetilde{\omega}_{2m-1}\Big(f^{(r)}, \frac{\pi}{n}\Big), \tag{3.3.4}$$

откуда при всех $n, m \in \mathbb{N},\ m \geq 2,\ r \in \mathbb{Z}_+$ получаем оценку сверху

$$K_{n,r}\Big(\widetilde{\omega}_{2m-1}, \frac{\pi}{n}\Big) \leq \frac{1}{\sqrt{2m}}. \tag{3.3.5}$$

С другой стороны, из оценки снизу (3.3.2) имеем

$$K_n\Big(\widetilde{\omega}_{2m-1}, \frac{\pi}{n}\Big) \geq \frac{1}{\sqrt{2m}}. \tag{3.3.6}$$

Сравнивая неравенства (3.3.5) (при $r = 0$) и (3.3.6), получаем требуемое равенство (3.3.3). Теорема 3.3.1 доказана.

§ 3.4. Двустороннее неравенство типа Джексона-Стечкина для осредненной с весом характеристики гладкости $\widetilde{\omega}_{2m-1}$ на классе $L_2^{(r)},\ r \in \mathbb{N}$

Пусть $h_* := a/n$, где $a \in (0, 2\pi]$ — произвольное число, $q_*(t) := \mu(nt)$. Тогда для произвольной $k \geq n$ запишем

$$J_{k,m,r,p}(q_*, h_*) = \left(k^{rp} \int\limits_0^{h_*} \mathscr{P}_m^{p/2}(kt)\mu(nt)dt \right)^{1/p} =$$

$$= \left(k^{rp} \int\limits_0^{a/n} \mathscr{P}_m^{p/2}(kt)\mu(nt)dt \right)^{1/p} =$$

$$= n^{r-1/p} \left\{ \left(\frac{k}{n}\right)^{rp} \int\limits_0^{a} \mathscr{P}_m^{p/2}\left(\frac{k}{n}t\right)\mu(t)dt \right\}^{1/p}. \tag{3.4.1}$$

Из (3.4.1) получаем

$$\inf_{n \leq k < \infty} J_{k,m,r,p}\left(q_*, \frac{a}{n}\right) \geq$$

$$\geq n^{r-1/p} \inf_{x \geq 1} \left\{ x^{rp} \int\limits_0^{a} \mathscr{P}_m^{p/2}(xt)\mu(t)dt \right\}^{1/p}. \tag{3.4.2}$$

Теперь, учитывая соотношения (3.4.1) и (3.4.2) и двустороннее неравенство (3.2.2), приходим к следующему утверждению

Теорема 3.4.1. *Пусть $m, n, r \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, $0 < p \leq 2$, $a \in (0, 2\pi]$ – произвольное число, q — весовая на отрезке $[0, a]$ функция. Тогда справедливы неравенства*

$$\left\{ \mathscr{M}_{m,r,p}(a, \mu, 1) \right\}^{-1/p} \leq$$

$$\le \sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{n^r E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^a \widetilde{\omega}_{2m-1}^p(f^{(r)}, t/n)\mu(t)dt\right)^{1/p}} \le$$

$$\le \left\{\inf_{x\ge 1} \mathscr{M}_{m,r,p}(a,\mu,x)\right\}^{-1/p}, \tag{3.4.3}$$

где

$$\mathscr{M}_{m,r,p}(a,\mu,x) = x^{rp}\int\limits_0^a \mathscr{P}_m^{p/2}(xt)\mu(t)dt, \tag{3.4.4}$$

причём, если функция μ *удовлетворяет условию*

$$\inf_{x\ge 1} \mathscr{M}_{m,r,p}(a,\mu,x) = \mathscr{M}_{m,r,p}(a,\mu,1), \tag{3.4.5}$$

то справедливо равенство

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{n^r E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^a \widetilde{\omega}_{2m-1}^p(f^{(r)}, t/n)\mu(t)dt\right)^{1/p}} = \frac{1}{\left\{\mathscr{M}_{m,r,p}(a,\mu,1)\right\}^{1/p}}. \tag{3.4.6}$$

Выясним условие, при выполнение которого имеет место равенство (3.4.5).

Следствие 3.4.1. *Пусть* $m,n,r \in \mathbb{N}$, $0 < p \le 2$, $a \in (0, 2\pi]$, $\mu(t) = t^{rp-1}\mu_1(t)$, *где* μ_1 *— невозрастающая весовая на отрезке* $[0,a]$ *функция. Тогда для функции* μ *имеет место условие* (3.4.5) *и, следовательно, выполняется равенство* (3.4.6).

Доказательство. Следуя ходу рассуждений [120, следствие 1], введём вспомогательную функцию

$$\mu_2(t) := \begin{cases} \mu_1(t), & \text{если } \ 0 \le t \le a, \\ \mu_1(a), & \text{если } \ a \le t < \infty. \end{cases}$$

При любых значениях $x \in [1, \infty)$, учитывая (3.4.4), запишем

$$\mathscr{M}_{m,r,p}(a, t^{rp-1}\mu_1, x) = x^{rp} \int\limits_0^a \mathscr{P}_m^{p/2}(xt) t^{rp-1} \mu_1(t) dt =$$

$$= \int\limits_0^{ax} \mathscr{P}_m^{p/2}(t) t^{rp-1} \mu_2(t/x) dt \geq \int\limits_0^{ax} \mathscr{P}_m^{p/2}(t) t^{rp-1} \mu_2(t) dt \geq$$

$$\geq \int\limits_0^a \mathscr{P}_m^{p/2}(t) \mu_1(t) dt = \mathscr{M}_{m,r,p}(a, t^{rp-1}\mu_1, 1).$$

Таким образом, условие (3.4.5) имеет место, а потому

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^r E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^a \widetilde{\omega}_{2m-1}^p (f^{(r)}, t/n) t^{rp-1} \mu_1(t) dt \right)^{1/p}} =$$

$$= \frac{1}{\left\{ \mathscr{M}_{m,r,p}(a, t^{rp-1}\mu_1(t), 1) \right\}^{1/p}},$$

чем и завершаем доказательство следствия 3.4.1.

Следствие 3.4.2. *Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $a \in (0, 2\pi]$, μ — дифференцируемая в каждой точке интервала $(0, a]$ весовая функция, удовлетворяющая при некоторых $r \in \mathbb{N}$ и $0 < p \leq 2$ условию*

$$(rp - 1)\mu(t) - t\mu'(t) \geq 0 \qquad (3.4.7)$$

для любого $t \in (0, a]$ и такая, что $\lim\limits_{t \to 0+0} \mu(t) \cdot t = 0$. Тогда для этих значений r, p и функция μ имеет место соотношение (3.4.5) и, следовательно, равенство (3.4.6).

Доказательство. Положим

$$\mathscr{F}(x) := \mathscr{M}_{m,r,p}(a,\mu,x), \quad 1 \le p < \infty$$

и, учитывая соотношение (3.4.4), вычислим её производную

$$\frac{d\mathscr{F}}{dx} = x^{rp-1}\left\{ rp\int\limits_0^a \mathscr{P}_m^{p/2}(xt)\mu(t)dt + \int\limits_0^a \mu(t)t\frac{\partial}{\partial t}\mathscr{P}_m^{p/2}(xt)dt \right\}. \qquad (3.4.8)$$

Так как согласно формулировке следствия 3.4.2

$$\lim_{t\to 0+0} \mu(t)\cdot t = 0,$$

то ясно, что

$$\lim_{t\to 0+0} \mu(t)\cdot t\mathscr{P}_m^{p/2}(xt) = 0.$$

Учитывая это обстоятельство, после выполнения интегрирования по частям во втором интеграле в правой части равенства (3.4.8) имеем

$$\frac{d\mathscr{F}}{dx} =$$

$$= x^{rp-1}\left\{ \mathscr{P}_m(ax)\mu(a)a + \int\limits_0^a \mathscr{P}_m^{p/2}(xt)\big[(rp-1)\mu(t) - t\mu'(t)\big]dt \right\}. \qquad (3.4.9)$$

В силу неравенства (3.4.7) и неотрицательности функций $\mathscr{P}_m$ и μ, из (3.4.9) вытекает, что $d\mathscr{F}/dx \ge 0$. Таким образом, функция $\mathscr{F}$ при указанных значениях r, p и μ на множестве $1 \le x < \infty$ является неубывающей. Это означает, что имеет место равенство (3.4.5) и вместе с ним (3.4.6), чем и завершаем доказательство следствия 3.4.2.

Применим следствие 3.4.2 при использовании конкретных весовых функций:

1) пусть $0 < a \leq \pi$. Рассмотрим в качестве весовой функции $\mu(t) := \sin^{\gamma} t$, использованной Н.Айнуллоевым [6]. Полагаем $m, r \in \mathbb{N}$, $0 < p \leq 2$, $\gamma \in \mathbb{R}_{+}$, $0 < \gamma \leq rp - 1$. Тогда при всех $0 < t \leq \pi$ имеем

$$(rp-1)\mu(t) - t\mu'(t) = t\sin^{\gamma-1} t\left[(rp-1)\frac{\sin t}{t} - \gamma\cos t\right] \geq 0,$$

поскольку $rp - 1 \geq \gamma$ и $(\sin t)/t \geq \cos t$ при всех $t \in (0, \pi]$.

В случае $\gamma = 1$, $\mu(t) = \sin t$, $p = 2$, при всех $r \in \mathbb{Z}_{+}$ в [116, теорема 2, случай $\nu = 0$] доказано, что

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^r E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^{\pi} \widetilde{\omega}_{2m-1}(f^{(r)}, t/n)\sin t dt\right)^{1/2}} = \chi_m, \tag{3.4.10}$$

где константа χ_m в правой части (3.4.10) определена равенством

$$\chi_m := \left(2m - \sum_{l=1}^{m-1} \frac{2l}{4(m-l)^2 - 1}\right)^{-1/2};$$

2) пусть $0 < a \leq \pi$, $\mu(t) := \sin(t/2) + (1/2)\sin t$ — весовая функция, использованная в работе [104]. Полагаем $m, r \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, $2/r \leq p \leq 2$, $r \geq 2$. Тогда при всех $t \in (0, \pi]$ получаем

$$(rp-1)\mu(t) - t\mu'(t) =$$

$$= (rp-1)\big[\sin(t/2) + (1/2)\sin t\big] - (t/2)\big[\cos(t/2) + \cos t\big] =$$

$$= (t/2)\left\{\left[(rp-1)\frac{\sin(t/2)}{(t/2)} - \cos(t/2)\right] + \left[(rp-1)\frac{\sin t}{t} - \cos t\right]\right\} \geq 0,$$

поскольку в этом случае $rp-1>1$ и при всех $t\in(0,\pi]$ имеем

$$\frac{\sin(t/2)}{(t/2)}\ge\cos(t/2),\quad \frac{\sin t}{t}\ge\cos t.$$

В частности, полагая в (3.4.6) $a=\pi$, $p=2$, получаем

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{n^rE_{n-1}(f)}{\left(\frac{1}{3}\int\limits_0^\pi\widetilde{\omega}_{2m-1}^2(f^{(r)},t/n)\Big(\sin\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\sin t\Big)dt\right)^{1/2}}=\mathscr{K}_m, \tag{3.4.11}$$

где

$$\mathscr{K}_m:=\left\{\left[2m-\sum_{l=1}^{m-1}\frac{2l(8(m-l)^2-1)}{(4(m-l)^2-1)(16(m-l)^2-1)}\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{4}{3}\sum_{l=0}^{m-1}\frac{2l+1}{(4(m-l)-1)(4(m-l)-3)}\right\}. \tag{3.4.12}$$

В самом деле, для справедливости равенства (3.4.11) в силу (3.4.5) и (3.4.6) достаточно вычислить интеграл (3.4.4) при

$$p=2,\ a=\pi,\ x=1,\ \mu(t)=\sin\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\sin t.$$

Имеем

$$\mathscr{M}_{m,r,2}(\pi,\mu,1)=\int\limits_0^\pi\mathscr{P}_m(t)\left(\sin\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\sin t\right)dt. \tag{3.4.13}$$

Полагаем

$$\widehat{\varphi}(\nu)=\int\limits_0^\pi\mu(t)\cos\nu t dt=\int\limits_0^\pi\left\{\sin\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\sin t\right\}\cos\nu t dt,\quad \nu\in\mathbb{Z}_+. \tag{3.4.14}$$

Заметим, что $\widehat{\varphi}(0)=3$ и при всех $l=1,2,\cdots,m$

$$\widehat{\varphi}(2l-1)=-\frac{2}{(4l-1)(4l-3)},\quad \widehat{\varphi}(2l)=-\frac{1}{4l^2-1}-\frac{2}{16l^2-1}. \tag{3.4.15}$$

Учитывая соотношения (3.4.13) – (3.4.15) и вид функции $\mathscr{P}_m$, из (2.2.7), запишем

$$\mathscr{M}_{m,r,2}(\pi,\mu,1)=\int\limits_0^{\pi}\mathscr{P}_m(t)\left(\sin\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\sin t\right)dt=$$

$$=\int\limits_0^{\pi}\left\{2m-2\sum_{l=1}^{m}\left[(2m-2l+1)\cos\left(2l-1\right)t-2(m-l)\cos 2lt\right]\right\}\mu(t)dt=$$

$$=2m\widehat{\varphi}(0)-2\sum_{l=1}^{m}\left[(2m-2l+1)\varphi(2l-1)-2(m-l)\varphi(2l)\right]=$$

$$=2m\widehat{\varphi}(0)-2\sum_{l=1}^{m}\frac{(m-l)(24l^2-3)}{(4l^2-1)(16l^2-1)}+4\sum_{l=1}^{m}\frac{2(m-l)+1}{(4l-1)(4l-3)}=$$

$$=3\left\{\left[2m-\sum_{l=1}^{m-1}\frac{2l(8(m-l)^2-1)}{\big(4(m-l)^2-1\big)\big(16(m-l)^2-1\big)}\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{4}{3}\sum_{l=0}^{m-1}\frac{2l+1}{\big(4(m-l)-1\big)\big(4(m-l)-3\big)}\right\}. \tag{3.4.16}$$

Из (3.4.16) в силу (3.4.13) сразу получаем равенство (3.4.11).

§ 3.5. Верхние грани наилучшего совместного приближения $E_{n-1}(f^{(\nu)})$ функций и их последовательности производных на некоторых классах функций из L_2

Поскольку для комплекснозначной функции $f \in L_2$ её промежуточные производные $f^{(\nu)},\ \nu = 1, 2, \ldots, r-1,\ r \geq 2,\ r \in \mathbb{N}$ принадлежат пространству L_2, то определённый интерес представляет изучение поведения наилучшего совместного приближения функций и их последовательных производных

$$E_{n-1}(f^{(\nu)}) = \inf\Big\{\big\|f^{(\nu)} - T_{n-1}(f^{(\nu)})\big\| :\ T_{n-1} \in \mathscr{T}_{2n-1}\Big\} \tag{3.5.1}$$

на классе $L_2^{(r)}$ $(r \in \mathbb{N}, L_2^{(0)} = L_2)$ или на некотором подклассе функций $\mathfrak{M}^{(r)} \subset L_2^{(r)}$. Несложным вычислением можно доказать, что для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ имеет место равенство

$$E_{n-1}(f^{(\nu)}) = \big\|f^{(\nu)} - S_{n-1}(f^{(\nu)})\big\| = \left\{\sum_{k=n}^{\infty} k^{2\nu}\rho_k^2(f)\right\}^{1/2}, \tag{3.5.2}$$

где $S_{n-1}(f^{(\nu)})$ — частная сумма порядка $n-1$ ряда Фурье производной $f^{(\nu)}$ $(\nu = \overline{0, r})$. Если $\mathfrak{M}^{(r)}$ — некоторый подкласс класса $L_2^{(r)}$, то требуется найти верхнюю грань

$$E_{n-1}^{(\nu)}(\mathfrak{M}^{(r)}) := \sup\Big\{E_{n-1}(f^{(\nu)}) :\ f \in \mathfrak{M}^{(r)}\Big\}. \tag{3.5.3}$$

Теорема 3.5.1. *Пусть $m, n, r \in \mathbb{N}$, $\nu \in \mathbb{Z}_+$, $r \in \nu$, $1/r < p \leq 2$, $h \in (0, 2\pi/n]$. Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^{r-\nu}E_{n-1}(f^{(\nu)})}{\left(\int\limits_0^h \widetilde{\omega}_{2m-1}^p(f^{(r)}, t)dt\right)^{1/p}} = \frac{1}{\left(\int\limits_0^h \mathscr{P}_m^{p/2}(nt)dt\right)^{1/p}}. \tag{3.5.4}$$

В частности, из (3.5.4) *при* $h=\pi/n$ *и* $p=2$, *при всех* $\nu\in[0,r]$ *имеем*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{n^{r-\nu}E_{n-1}(f^{(\nu)})}{\left(\dfrac{n}{\pi}\displaystyle\int\limits_0^{\pi/n}\widetilde{\omega}_{2m-1}^2(f^{(r)},t)dt\right)^{1/2}}=\frac{1}{\sqrt{2m}}.$$

Доказательство. Равенство (3.5.4) при $r\in\mathbb{N}$ и $\nu=0$ совпадает с равенством (3.2.18). Положим $f^{(\nu)}=g$. Теперь заметим, что если $f\in L_2^{(r)}$, то из равенства $f^{(r)}=g^{(r-\nu)}$ следует, что $g\in L_2^{(r-\nu)}$, а потому, учитывая равенство (3.2.18), будем иметь

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{n^{r-\nu}E_{n-1}(f^{(\nu)})}{\left(\displaystyle\int\limits_0^{h}\widetilde{\omega}_{2m-1}^p(f^{(r)},t)dt\right)^{1/p}}=$$

$$=\sup_{g\in L_2^{(r-\nu)}}\frac{n^{r-\nu}E_{n-1}(g)}{\left(\displaystyle\int\limits_0^{h}\widetilde{\omega}_{2m-1}^p(g^{(r-\nu)},t)dt\right)^{1/p}}=\left(\int\limits_0^{h}\mathscr{P}_m^{p/2}(nt)dt\right)^{1/p},$$

откуда и следует равенство (3.5.4).

Для заданных $n,m,r\in\mathbb{N}$, $\nu\in\mathbb{Z}_+$, $r\geq\nu$, $1/r\leq p\leq 2$, $h\in(0,2\pi/n]$ через $W_{p,m}^{(r)}(h):=W_p^{(r)}(\widetilde{\omega}_{2m-1},h)$ обозначим класс функций $f\in L_2^{(r)}$, удовлетворяющих условию

$$\int\limits_0^{h}\widetilde{\omega}_{2m-1}^p(f^{(r)},t)dt\leq 1.$$

Вычислим значение величины (3.5.3), полагая $\mathfrak{M}^{(r)}:=W_{p,m}^{(r)}(h)$.

Теорема 3.5.2. *Справедливо равенство*

$$E_{n-1}^{(\nu)}(W_{p,m}^{(r)}(h)) = n^{-(r-\nu)}\left(\int\limits_0^h \mathscr{P}_m^{p/2}(nt)dt\right)^{-1/p}. \qquad (3.5.5)$$

Доказательство. Из равенства (3.5.4) при любых $m, n, r \in \mathbb{N}$, $\nu \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq \nu$, $1/r < p \leq 2$, $h \in (0, 2\pi/n]$ и произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ вытекает неравенство

$$E_{n-1}(f^{(\nu)}) \leq \frac{1}{n^{r-\nu}} \cdot \frac{\left(\int\limits_0^h \widetilde{\omega}_{2m-1}^p(f^{(r)}, t)dt\right)^{1/p}}{\left(\int\limits_0^h \mathscr{P}_m^{p/2}(nt)dt\right)^{1/p}}. \qquad (3.5.6)$$

Если функция $f \in L_2^{(r)}$ принадлежит также классу $W_{p,m}^{(r)}(h)$, то из (3.5.6) получаем

$$E_{n-1}(f^{(\nu)}) \leq n^{-(r-\nu)}\left(\int\limits_0^h \mathscr{P}_m^{p/2}(nt)dt\right)^{-1/p},$$

откуда сразу следует оценка сверху величины, стоящей в левой части равенства (3.5.5)

$$E_{n-1}(W_{p,m}^{(r)}(h)) \leq n^{-(r-\nu)}\left(\int\limits_0^h \mathscr{P}_m^{p/2}(nt)dt\right)^{-1/p}. \qquad (3.5.7)$$

Для получения оценки снизу указанной величины введём в рассмотрение комплекснозначную функцию

$$f_1(x) = n^{-r}\left(\int\limits_0^h \mathscr{P}_m^{p/2}(nt)dt\right)^{-1/p} e^{inx}.$$

Дифференцируя функцию f_1 последовательно ν-раз, получаем

$$f_1^{\nu}(x) = i^{\nu} n^{-(r-\nu)}\left(\int\limits_0^h \mathscr{P}_m^{p/2}(nt)dt\right)^{-1/p} e^{inx}.$$

Отсюда, в силу (3.5.2), запишем

$$E_{n-1}(f_1^{\nu}) = n^{-(r-\nu)} \left(\int\limits_0^h \mathscr{P}_m^{p/2}(nt)dt\right)^{-1/p}. \tag{3.5.8}$$

Из равенства (3.2.6) с учётом (3.1.4) имеем

$$\widetilde{\omega}_{2m-1}^2(f_1^{(r)}, \tau) = \mathscr{P}_m(nt) \left(\int\limits_0^h \mathscr{P}_m^{p/2}(nt)dt\right)^{-2/p}.$$

Пользуясь этим равенством и учитывая определение класса $W_{p,m}^{(r)}(h)$, получаем

$$\int\limits_0^h \widetilde{\omega}_{2m-1}^p(f_1^{(r)}, \tau)d\tau = \left(\int\limits_0^h \mathscr{P}_m^{p/2}(nt)dt\right)\left(\int\limits_0^h \mathscr{P}_m^{p/2}(nt)dt\right)^{-1} = 1.$$

Последнее равенство означает, что функция $f_1 \in W_{p,m}^{(r)}(h)$. Следовательно,

$$E_{n-1}^{(\nu)}(W_{p,m}^{(r)}(h)) \geq E_{n-1}(f_1^{(\nu)}) = n^{-(r-\nu)} \left(\int\limits_0^h \mathscr{P}_m^{p/2}(nt)dt\right)^{-1/p}. \tag{3.5.9}$$

Сопоставляя неравенства (3.5.7) и (3.5.9) получаем требуемое равенство (3.5.5). Теорема 3.5.2 доказана.

Следствие 3.5.1. *В условиях теоремы 3.5.2 при $p = 2$ и $h = \pi/n$ имеет место равенство*

$$E_{n-1}^{(\nu)}\left(W_{2,m}^{(r)}\left(\frac{\pi}{n}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{2m}} \cdot \frac{1}{n^{r-\nu-1/2}}.$$

ГЛАВА 4. О совместном приближении функций и их производных в среднем на вещественной оси алгебраическими полиномами с весом Чебышева-Эрмита

В этой главе рассматривается экстремальная задача о наилучшем совместном приближении функций, интегрируемых с квадратом на всей оси алгебраическими полиномами с весом Чебышева-Эрмита $\rho(x) = e^{-x^2}$. Доказаны некоторые точные неравенства типа Джексона-Стечкина на множествах функций $L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})$ ($r \in \mathbb{Z}_+,\ \mathbb{R} := (-\infty, +\infty)$), связывающих величины $E_{n-s-1}(f^{(s)})_2$ — наилучших совместных приближений сверху через усреднённые значения обобщённых модулей непрерывности m-го порядка производной r-го порядка $f^{(r)} \in L_{2,\rho}(\mathbb{R})$. Отметим, что приближение функций в среднем на всей оси с весом Чебышева-Эрмита ранее исследовалось в работах В.А.Абилова [1], С.З.Рафальсона [80], Г.Фройда [102], В.М.Фёдорова [103], H.N.Mashkar [69], Z.Ditzian и V.Totik [36], С.Б.Вакарчука [17], К.Тухлиева и А.М.Туйчиева [100], В.А.Абилова и Ф.В.Абилова [4], С.Б.Вакарчука и М.Б.Вакарчука [21], С.Б.Вакарчука и А.В.Швачко [26]. Отметим, что в перечисленных работах экстремальные задачи нахождения точных значений наилучших приближений на классах функций, связанных с отысканием значений n-поперечников, рассматривались в работах С.Б.Вакарчука [17], С.Б.Вакарчука и М.Б.Вакарчука [21], К.Тухлиева и А.М.Туйчиева [100], С.Б.Вакарчука и А.В.Швачко [26]. Что же касается других работ, то в них найдены только порядковые оценки.

Здесь исследуется более общая задача о совместном приближении функции $f \in L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ и её последовательности производных $f^{(s)} \in L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ $(s = 0, 1, \ldots, r)$ суммами Фурье-Эрмита и их соответствующими производными, причём все полученные результаты на классах функций являются точными. Именно из теорем, где получены точные результаты, непосредственно и естественно возникают классы функций, для которых решаются экстремальные задачи совместного приближения функций и их промежуточных производных. Отметим, что для разложения функций по многочленам Фурье-Эрмита, где изучается наилучшее среднеквадратическое совместное приближение функций и их промежуточных приближений суммами Фурье-Эрмита в литературе ранее не изучалась и здесь приводится впервые. Из полученных результатов, в частности, вытекают известные результаты С.Б.Вакарчука и М.Б.Вакарчука [21] и недавно опубликованные результаты К.Тухлиева и А.М.Туйчиева [100].

Изложенные в этой главе результаты опубликованы в работах [4-А, 7-А].

§ 4.1. Наилучшее приближение функции $f \in L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ конечными суммами Фурье-Эрмита

Пусть $L_2(\mathbb{R})$ — пространство измеримых вещественных функций, суммируемых с квадратом модуля на всей оси $\mathbb{R} := (-\infty, +\infty)$. Символом $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$, где $\rho(x) = e^{-x^2}$, обозначим множество функций f таких, для которых

$$\|f\|_{2,\rho} := \|f\|_{L_{2,\rho}(\mathbb{R})} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \rho(x)|f(x)|^2 dx\right)^{1/2} \leq \infty.$$

В работах В.А.Абилова [2] и С.Б.Вакарчука [17] решены некоторые экстремальные задачи теории приближения функций алгебраическими полиномами в среднем на всей оси с весом Чебышева-Эрмита ρ. В [17] для некоторых классов функций, определенных модулями непрерывности m-го порядка и $\mathscr{K}$-функционалами, зависящими от r-х производных $f^{(r)}$, вычислены значения различных n-поперечников, а также приведен обстоятельный обзор литературы по данной тематике. В этой главе мы продолжим указанную тематику в пространстве $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ и докажем ряд точных неравенств типа Джексона-Стечкина для наилучших совместных приближений функций и ее промежуточных производных $f^{(\nu)},\ \nu = 1, 2, \ldots, r-1$ $(r \geq 2,\ r \in \mathbb{N})$.

Введем необходимые понятия и определения, нужные нам в дальнейшем. Пусть $\mathscr{P}_n$ — подпространство алгебраических полиномов степени, не более n. Равенством

$$E_{n-1}(f)_{2,\rho} := \inf\{\|f - p_{n-1}\|_{2,\rho} : p_{n-1} \in \mathscr{P}_{n-1}\}$$

определим величину наилучшего полиномиального приближения функции $f \in$

$L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ элементами подпространства $\mathscr{P}_{n-1}$.

Пусть $\{H_n(x)\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ — ортонормированная на вещественной оси $\mathbb{R}$ с весом ρ система многочленов Эрмита [90, стр. 170]

$$H_n(x) := \frac{(-1)^n}{\sqrt{n!2^n\sqrt{\pi}}} e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\big(e^{-x^2}\big). \tag{4.1.1}$$

Хорошо известно [90, стр. 193-194], что любую функцию $f \in L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ можно разложить в ряд Фурье по полиномам Эрмита

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) H_k(x), \tag{4.1.2}$$

где

$$c_k(f) = \int\limits_{\mathbb{R}} \rho(t) f(t) H_k(t) dt, \quad k \in \mathbb{Z}_+ \tag{4.1.3}$$

— коэффициенты Фурье-Эрмита функции f, а знак равенства в (4.1.2) понимается в смысле сходимости в пространстве $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$. Пусть

$$S_{n-1}(f, x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(f) H_k(x).$$

Тогда, как известно [2, стр. 25-26],

$$E_{n-1}(f) := \|f - S_{n-1}(f)\|_{2,\rho} = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f) \right\}^{1/2}. \tag{4.1.4}$$

Обозначим через $L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})$ $(r \in \mathbb{N},\ L_{2,\rho}^{(0)}(\mathbb{R}) \equiv L_{2,\rho}(\mathbb{R}))$ — множество функций $f \in L_{2,\rho}(\mathbb{R})$, у которых производные $(r-1)$-го порядка $f^{(r-1)}$ абсолютно непрерывны на любом конечном интервале, а производные r-го порядка принадлежат пространству $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$.

В дальнейшем отношение $0/0$ считаем равным 0 и полагаем

$$\alpha_{n,r} := n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) =$$

$$= n!/(n-r)!,\ n \geq r,\ n \in \mathbb{N},\ r \in \mathbb{Z}_+.$$

Так как для произвольной функции $f \in L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})$ при любом $s = 0, 1, \ldots, r$ имеет место разложение s-й производной в ряд Фурье-Эрмита [80]

$$f^{(s)}(x) = \sum_{k=s}^{\infty} \sqrt{2^s \alpha_{k,s}}\, c_k(f) H_{k-s}(x), \tag{4.1.5}$$

то, исходя из формул (4.1.4) и (4.1.5), для произвольного натурального $n > r \geq s,\ \ r, s \in \mathbb{Z}_+$ значение величины наилучшего приближения функции $f^{(s)} \in L_{2,\rho}^{(s)}(\mathbb{R})$ элементами подпространства $\mathscr{P}_{n-s-1}$, имеем

$$E_{n-s-1}(f^{(s)})_{2,\rho} = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} 2^s\, \alpha_{n,s}\, c_k^2(f) \right\}^{1/2}. \tag{4.1.6}$$

Имеет место следующая

Теорема 4.1.1. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $n > r \geq s$. *Тогда справедливо неравенство*

$$E_{n-s-1}\big(f^{(s)}\big)_{2,\rho} \leq \left(\frac{1}{2^{r-s}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \right)^{1/2} E_{n-r-1}\big(f^{(r)}\big)_{2,\rho}. \tag{4.1.7}$$

Существует функция $f_0 \in L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})$, *для которой в неравенстве (4.1.7) имеет место знак равенства.*

Доказательство. Пользуясь равенством (4.1.6), для любой функции $f \in L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})$ при любых $n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $n > r \geq s$ имеем:

$$E_{n-s-1}^2(f^{(s)})_{2,\rho} = \sum_{k=n}^{\infty} 2^s\, \alpha_{k,s}\, c_k^2(f) =$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{2^s\, \alpha_{k,s}}{2^r\, \alpha_{k,r}} \cdot 2^r\, \alpha_{k,r}\, c_k^2(f) \leq \frac{1}{2^{r-s}} \max_{k \geq n} \frac{\alpha_{k,s}}{\alpha_{k,r}} \sum_{k=n}^{\infty} 2^r\, \alpha_{k,r}\, c_k^2(f) =$$

$$= \frac{1}{2^{r-s}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot E^2_{n-r-1}(f^{(r)})_{2,\rho}. \tag{4.1.8}$$

Здесь пользовались тем, что

$$\max_{k\geq n} \frac{\alpha_{k,s}}{\alpha_{k,r}} = \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}, \quad n > r \geq s. \tag{4.1.9}$$

В самом деле, согласно определению чисел $\alpha_{k,s}$ и $\alpha_{k,r}$, имеем:

$$\alpha_{k,s} := k(k-1)(k-2)\cdots(k-s+1), \quad k \geq s, \ k, s \in \mathbb{N},$$

$$\alpha_{k,r} := k(k-1)(k-2)\cdots(k-r+1) =$$

$$= \underbrace{k(k-1)(k-2)\cdots(k-s+1)} \cdot \underbrace{(k-s)\cdots(k-s-(r-s)+1)} =$$

$$= \alpha_{k,s} \cdot \alpha_{k-s,r-s}, \quad k > r \geq s, \ k, r \in \mathbb{N}, \ s \in \mathbb{Z}_+,$$

а потому запишем

$$\frac{\alpha_{k,s}}{\alpha_{k,r}} = \frac{\alpha_{k,s}}{\alpha_{k,s} \cdot \alpha_{k-s,r-s}} =$$

$$= \frac{1}{\alpha_{k-s,r-s}} = \frac{1}{(k-s)\cdots[(k-s)-(r-s)+1]},$$

откуда получаем

$$\max_{k\geq n} \frac{\alpha_{k,s}}{\alpha_{k,r}} = \max_{k\geq n} \frac{1}{\alpha_{k-s,r-s}} = \frac{1}{\alpha_{n-s,r-s}} = \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,s} \cdot \alpha_{n-s,r-s}} = \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}$$

и тем самим равенство (4.1.9) и неравенство (4.1.8) доказаны. Из (4.1.8) сразу следует неравенство (4.1.7). Покажем точность неравенства (4.1.7) для функции $f_0 \in H_n(x) \in L^{(r)}_{2,\rho}(\mathbb{R})$. В силу (4.1.6) при любом $s = 0, 1, \ldots, r$ имеем

$$E_{n-s-1}(f_0^{(s)})_{2,\rho} = \sqrt{2^s \, \alpha_{n,s}}\,, \tag{4.1.10}$$

а потому, пользуясь (4.1.10), запишем

$$E_{n-s-1}(f_0^{(s)})_{2,\rho} = \sqrt{\frac{2^s}{2^r} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}} \cdot \sqrt{2^r \alpha_{n,r}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2^{r-s}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}} \cdot E_{n-r-1}(f_0^{(r)})_{2,\rho}, \qquad (4.1.11)$$

и тем самым теорема 4.1.1 доказана.

Из теоремы 4.1.1 вытекает

Следствие 4.1.1. *В условиях теоремы 4.1.1 имеет место равенство*

$$\sup_{f \in L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})} \frac{E_{n-s-1}\big(f^{(s)}\big)_{2,\rho}}{E_{n-r-1}\big(f^{(r)}\big)_{2,\rho}} = \sqrt{\frac{1}{2^{r-s}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}}. \qquad (4.1.12)$$

Доказательство. В самом деле, с одной стороны, из неравенства (4.1.7) сразу вытекает оценка сверху величины, стоящей в левой части равенства (4.1.12)

$$\sup_{f \in L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})} \frac{E_{n-s-1}\big(f^{(s)}\big)_{2,\rho}}{E_{n-r-1}\big(f^{(r)}\big)_{2,\rho}} \le \sqrt{\frac{1}{2^{r-s}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}}, \qquad (4.1.13)$$

а с другой стороны, для получения оценки снизу указанной величины, учитывая равенство (4.1.11), имеем

$$\sup_{f \in L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})} \frac{E_{n-s-1}\big(f^{(s)}\big)_{2,\rho}}{E_{n-r-1}\big(f^{(r)}\big)_{2,\rho}} \ge \frac{E_{n-s-1}\big(f_0^{(s)}\big)_{2,\rho}}{E_{n-r-1}\big(f_0^{(r)}\big)_{2,\rho}} = \sqrt{\frac{1}{2^{r-s}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}}. \qquad (4.1.14)$$

Требуемое равенство (4.1.12) следует из сравнения неравенств (4.1.13) и (4.1.14). Следствие 4.1.1 доказано.

Пусть $\mathfrak{M}^{(r)}$ $(r \in \mathbb{Z}_+)$ — некоторый класс функций $f \in L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})$. Требуется найти величину

$$\mathcal{E}_{n-s-1}(\mathfrak{M}^{(r)})_{2,\rho} := \sup\left\{E_{n-s-1}(f^{(s)})_{2,\rho} : f \in \mathfrak{M}^{(r)}\right\}. \tag{4.1.15}$$

Через $W^{(r)}L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ обозначим класс функций $f \in L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})$, у которых $\|f^{(r)}\|_{2,\rho} \le 1$. Справедлива следующая

Теорема 4.1.2. *Пусть* $n \in \mathbb{N},\ r, s \in \mathbb{Z}_+,\ n > r \ge s$. *Тогда*

$$\mathcal{E}_{n-s-1}\big(W^{(r)}L_{2,\rho}(\mathbb{R})\big) = \sqrt{\frac{1}{2^{r-s}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}}. \tag{4.1.16}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что для произвольной функции $f \in W^{(r)}L_{2,\rho}(\mathbb{R})$, согласно определению класса $W^{(r)}L_{2,\rho}(\mathbb{R})$, имеем:

$$E_{n-r-1}(f^{(r)})_{2,\rho} \le \left\|f^{(r)}\right\|_{2,\rho} \le 1. \tag{4.1.17}$$

Учитывая соотношение (4.1.17), из неравенства (4.1.7) для любой функции $f \in W^{(r)}L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ получаем:

$$E_{n-s-1}\big(f^{(s)}\big)_{2,\rho} \le$$

$$\le \left(\frac{1}{2^{r-s}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}\right)^{1/2} E_{n-r-1}\big(f^{(r)}\big)_{2,\rho} \le \left(\frac{1}{2^{r-s}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}\right)^{1/2},$$

откуда сразу следует оценка сверху величины, стоящей в левой части равенства (4.1.16)

$$\mathcal{E}_{n-s-1}\big(W^{(r)}L_{2,\rho}(\mathbb{R})\big) \le \left(\frac{1}{2^{r-s}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}\right)^{1/2}. \tag{4.1.18}$$

С другой стороны, для функции

$$g_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2^r\,\alpha_{n,r}}} H_n(x) \tag{4.1.19}$$

при любом $s=0,1,\ldots,r$ имеем

$$g_0^{(s)}(x)=\sqrt{\frac{1}{2^{r-s}}\cdot\frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}}\cdot H_{n-s}(x), \tag{4.1.20}$$

из которого также следует, что

$$g_0^{(r)}(x)=H_{n-r}(x),\quad \|g_0^{(r)}\|_{2,\rho}=1.$$

Последнее равенство означает, что $g_0\in W^{(r)}L_{2,\rho}(\mathbb{R})$, и так как в силу (4.1.20)

$$E_{n-s-1}\big(g_0^{(s)}\big)_{2,\rho}=\sqrt{\frac{1}{2^{r-s}}\cdot\frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}}, \tag{4.1.21}$$

то имеет место оценка снизу

$$\mathcal{E}_{n-s-1}\big(W^{(r)}L_{2,\rho}(\mathbb{R})\big)\ge E_{n-s-1}\big(g_0^{(s)}\big)=\sqrt{\frac{1}{2^{r-s}}\cdot\frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}}. \tag{4.1.22}$$

Из сопоставления неравенств (4.1.18) и (4.1.22) получаем требуемое равенство (4.1.16), чем и завершаем доказательство теоремы 4.1.2 .

Теорема 4.1.3. *При любых $n\in\mathbb{N}$, $r,s\in\mathbb{Z}_+$, $n>r\ge s$ имеет место равенство*

$$\sup\left\{\frac{E_{n-s-1}(f^{(s)})_{2,\rho}}{\big(E_{n-1}(f)_{2,\rho}\big)^{1-s/r}}:f\in W^{(r)}L_{2,\rho}(\mathbb{R})\right\}=\left(\frac{\alpha_{n,s}}{(\alpha_{n,r})^{s/r}}\right)^{1/2}. \tag{4.1.23}$$

Доказательство. В [17] для произвольной функции $f\in L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})$ доказано неравенство типа Колмогорова (см., неравенство (69) в [17, с. 682]), которое в наших обозначениях имеет следующий вид:

$$E_{n-s-1}(f^{(s)})_{2,\rho}\le$$

$$\leq \left(\frac{\alpha_{n,s}}{(\alpha_{n,r})^{s/r}}\right)^{1/2} \left\{E_{n-1}(f)_{2,\rho}\right\}^{1-s/r} \left\{E_{n-r-1}(f^{(r)})\right\}^{s/r}. \tag{4.1.24}$$

Если в неравенстве (4.1.24) предполагать, что функция $f \in W^{(r)}L_{2,\rho}(\mathbb{R})$, то получаем

$$E_{n-s-1}(f^{(s)})_{2,\rho} \leq \left(\frac{\alpha_{n,s}}{(\alpha_{n,r})^{s/r}}\right)^{1/2} \cdot \left(E_{n-1}(f)_{2,\rho}\right)^{1-s/r},$$

откуда сразу следует оценка сверху экстремальной характеристики, стоящей в левой части равенства (4.1.23):

$$\sup\left\{\frac{E_{n-s-1}(f^{(s)})_{2,\rho}}{\left(E_{n-1}(f)_{2,\rho}\right)^{1-s/r}} : f \in W^{(r)}L_{2,\rho}(\mathbb{R})\right\} \leq \left(\frac{\alpha_{n,s}}{(\alpha_{n,r})^{s/r}}\right)^{1/2}. \tag{4.1.25}$$

Соответствующая оценка снизу достигается для функции $g_0 \in W^{(r)}L_{2,\rho}(\mathbb{R})$, определенной равенством (4.1.19) и для которой при всех $s = 0, 1, \ldots, r$ имеет место равенство (4.1.21), причем

$$E_{n-1}(g_0)_{2,\rho} = \frac{1}{\sqrt{2^r \alpha_{n,r}}}.$$

Пользуясь указанными равенствами запишем оценка снизу

$$\sup\left\{\frac{E_{n-s-1}(f^{(s)})_{2,\rho}}{\left(E_{n-1}(f)_{2,\rho}\right)^{1-s/r}} : f \in W^{(r)}L_{2,\rho}(\mathbb{R})\right\} \geq$$

$$\geq \frac{E_{n-s-1}(g_0^{(s)})_{2,\rho}}{\left(E_{n-1}(g_0)_{2,\rho}\right)^{1-s/r}} =$$

$$= \left(\frac{\alpha_{n,s}}{2^{r-s}\alpha_{n,r}}\right)^{1/2} \cdot \left(2^r \cdot \alpha_{n,r}\right)^{(1-s/r)/2} = \left(\frac{\alpha_{n,s}}{(\alpha_{n,r})^{s/r}}\right)^{1/2}. \tag{4.1.26}$$

Равенство (4.1.23) следует из сравнения оценок сверху (4.1.25) и снизу (4.1.26). Теорема 4.1.3 доказана.

В заключение этого параграфа отметим, что впервые экстремальная характеристика аналогичной характеристики, стоящей в левой части равенства (4.1.23), была рассмотрена С.Б.Вакарчуком [17], а затем для двумерного случая обобщена М.Ш.Шабозовым и О.А.Джурахоновым [111].

§ 4.2. Неравенства типа Джексона-Стечкина для обобщённого модуля непрерывности в $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$

Хорошо известно, что в экстремальных задачах аппроксимации 2π-периодических функций тригонометрическими полиномами ведущую роль играет обычный оператор сдвига $\tau_h f(x) = f(x+h)$ и определяемые с его помощью классические модули непрерывности различных порядков. В аналогичных задачах, связанных с аппроксимацией непериодических функций, основную роль играют операторы обобщенного сдвига и порожденные ими обобщенные модули непрерывности. В данной параграфе операторы обобщенного сдвига применяются в экстремальных задачах приближения функций суммами Фурье-Эрмита в пространстве $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$, в частности устанавливается точное неравенство типа Джексона-Стечкина между наилучшим совместным приближением функций и их промежуточными производными $E_{n-s-1}(f^{(s)})_{2,\rho}$ и обобщенным модулем непрерывности $\widetilde{\omega}_m(f^{(r)}, t)_{2,\rho}$.

В пространстве $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ введем в рассмотрение оператор [80]:

$$F_h f(x) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} f(x\sqrt{1-h^2} + ht)dt \quad (0 < h < 1), \tag{4.2.1}$$

который называется оператором обобщенного сдвига. Оператор $F_h : L_2 \to L_2$ обладает следующими свойствами (см., [31, с. 557]):

1. $F_h(\lambda f + \mu g) = \lambda F_h(f) + \mu F_h(g), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ f, g \in L_{2,\rho}(\mathbb{R})$;

2. $F_0 f(x) = f(x)$;

3. $\|F_h f\| \le \|f\|$;

4. $\|F_h f - f\| \to 0, h \to 0+$;

5. $F_h H_n(x) = (1-h^2)^{n/2} H_n(x)$.

Учитывая функцию (4.2.1), введем аналоги конечных разностей первого и высших порядков равенствами

$$\Delta_h^1 f(x) := F_h f(x) - f(x) = (F_h - \mathbb{I}) f(x), \tag{4.2.2}$$

$$\Delta_h^m f(x) := \Delta_h^1 (\Delta_h^{m-1} f(x)) =$$

$$= (F_h - \mathbb{I})^m f(x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} F_h^k f(x),$$

где $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, $F_h^k := F_h^1(F_h^{k-1})$, $F_h^1 = F_h$, $F_h^0 := \mathbb{I}$, $\mathbb{I}$ – единичный оператор в пространстве $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$.

Для оператора (4.2.1) в [80] доказано следующее разложение

$$F_h f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f)(1-h^2)^{k/2} H_k(x), \tag{4.2.3}$$

где знак равенства понимается в ранее указанном смысле. Пользуясь равенством (4.2.3) с учетом формул (4.1.2) и (4.2.2) в смысле сходимости в $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$, запишем

$$\Delta_h^1 f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f)\big((1-t^2)^{k/2} - 1\big) H_k(x).$$

Далее, учитывая последнее равенство, методом математической индукции для любого $m \in \mathbb{N}$ получаем

$$\Delta_h^m f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f)\big((1-h^2)^{k/2} - 1\big)^m H_k(x),$$

из которого применением равенства Парсеваля имеем

$$\big\|\Delta_h^m f\big\|_{2,\rho}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2(f)\big(1-(1-h^2)^{k/2}\big)^{2m}. \tag{4.2.4}$$

Равенством

$$\widetilde{\omega}_m(f,t)_{2,\rho} := \sup\Big\{\big\|\Delta_h^m f\big\|_{2,\rho} : |h| \le t\Big\}, \tag{4.2.5}$$

где $0 < t \le 1$ определим обобщенный модуль непрерывности m-го ($m \in \mathbb{N}$) порядка функции $f \in L_{2,\rho}(\mathbb{R})$. Очевидно, что с учетом (4.2.4) характеристику гладкости (4.2.5) можно записать в явном виде

$$\widetilde{\omega}_m^2(f,t)_{2,\rho} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2(f)\big(1-(1-t^2)^{k/2}\big)^{2m}. \tag{4.2.6}$$

Так как, в силу (4.1.5), для произвольной функции $f \in L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})$

$$c_k(f^{(r)}) = \sqrt{2^r\,\alpha_{k,r}}\,c_k(f), \quad k = r, r+1, \dots ,$$

то из (4.2.6) получаем

$$\widetilde{\omega}_m^2(f^{(r)},t)_{2,\rho} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\Big(f^{(r)}\Big)\Big(1-\big(1-t^2\big)^{k/2}\Big)^{2m} =$$

$$= \sum_{k=r}^{\infty} 2^r\,\alpha_{k,r}\,c_k^2(f)\Big(1-\big(1-t^2\big)^{k/2}\Big)^{2m}. \tag{4.2.7}$$

Имеет место следующее утверждение

Теорема 4.2.1. *Пусть* $n \in \mathbb{N},\ r, s \in \mathbb{Z}_+,\ n > r \ge s$. *Тогда имеет место следующее неравенство типа Джексона-Стечкина для наилучшего совместного приближения функции* $f \in L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})$*:*

$$E_{n-s-1}(f^{(s)})_{2,\rho} \le$$

$$\le \sqrt{\frac{1}{2^{r-s}}\cdot\frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}}\cdot\Big(1-\big(1-t^2\big)^{(n-r)/2}\Big)^{-m}\,\widetilde{\omega}_m(f^{(r)},t)_{2,\rho}. \tag{4.2.8}$$

Неравенство (4.2.8) точное в том смысле, что существует функция $f_0 \in L_{2,\rho}(\mathbb{R})$*, для которой оно обращается в равенство.*

Доказательство. В [17] для произвольной функции $f \in L_{2,\rho}^{(r)}$ при любых $m \in \mathbb{N},\ r \in \mathbb{Z}_+,\ n > r$ доказано неравенство

$$E_{n-r-1}(f^{(r)})_{2,\rho} \leq \Big(1 - \big(1 - t^2\big)^{(n-r)/2}\Big)^{-m} \widetilde{\omega}_m(f^{(r)}, t)_{2,\rho}. \tag{4.2.9}$$

Пользуясь неравенством (4.1.7) и учитывая (4.2.9), при любом $s = 0, 1, 2, \ldots, r-1$ получаем

$$E_{n-s-1}(f^{(s)})_{2,\rho} \leq \sqrt{\frac{1}{2^{r-s}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}} \cdot E_{n-r-1}\big(f^{(r)}\big)_{2,\rho} \leq$$

$$\leq \sqrt{\frac{1}{2^{r-s}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}} \cdot \Big(1 - \big(1 - t^2\big)^{(n-r)/2}\Big)^{-m} \widetilde{\omega}_m(f^{(r)}, t)_{2,\rho},$$

и неравенство (4.2.8) доказано. Точность неравенства (4.2.8) проверяется на ранее рассмотренной нами функции $f_0(x) = H_n(x) \in L_{2,\rho}(\mathbb{R})$, для которой, кроме равенства (4.1.10), в силу (4.2.7) также верно соотношение

$$\widetilde{\omega}_m(f_0^{(r)}, t)_{2,\rho} \equiv \sqrt{2^r\,\alpha_{n,r}} \cdot \Big(1 - \big(1 - t^2\big)^{(n-r)/2}\Big)^{m}. \tag{4.2.10}$$

Теперь, пользуясь равенством (4.1.10) и учитывая (4.2.10), имеем

$$E_{n-s-1}(f_0^{(s)})_{2,\rho} = \sqrt{2^s\,\alpha_{n,s}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2^{r-s}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}} \cdot \Big(1 - \big(1 - t^2\big)^{(n-r)/2}\Big)^{-m} \sqrt{2^r\,\alpha_{n,r}} \Big(1 - \big(1 - t^2\big)^{(n-r)/2}\Big)^{m} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2^{r-s}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}} \cdot \Big(1 - \big(1 - t^2\big)^{(n-r)/2}\Big)^{-m} \widetilde{\omega}_m(f_0^{(r)}, t)_{2,\rho}, \quad 0 < t \leq 1.$$

Этим точность неравенства типа Джексона-Стечкина (4.2.8) установлена и тем самым теорема 4.2.1 доказана.

Следствие 4.2.1. *В условиях теоремы 4.2.1 справедливо равенство*

$$\sup_{f \in L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})} \frac{\sqrt{2^{r-s}\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s}} \cdot E_{n-s-1}(f^{(s)})_{2,\rho}}{\widetilde{\omega}_m(f^{(r)}, t)_{2,\rho}} =$$

$$= \frac{1}{\Big(1 - \big(1 - t^2\big)^{(n-r)/2}\Big)^m}. \tag{4.2.11}$$

В частности, полагая в (4.2.11) $t = \sqrt{2/(n-r)}$, $n > r$, $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, *получаем*

$$\sup_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n > r}} \sup_{f \in L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})} \frac{\sqrt{2^{r-s}\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s}} \cdot E_{n-s-1}(f^{(s)})_{2,\rho}}{\widetilde{\omega}_m\Big(f^{(r)}, \sqrt{2/(n-r)}\Big)_{2,\rho}} =$$

$$= \sup_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n > r}} \left(1 - \left(1 - \frac{2}{n-r}\right)^{(n-r)/2}\right)^{-m} = \big(1 - e^{-1}\big)^{-m}.$$

Условимся под весовой функцией φ на отрезке $[0, h]$ понимать неотрицательную суммируемую функцию, не эквивалентную нулю на этом же отрезке.

Теорема 4.2.2. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $n > r \geq s$, $0 < p \leq \infty$, $h \in (0, 1]$, φ *– весовая на отрезке* $[0, h]$ *функция. Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f\in L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})}\frac{\sqrt{2^{r-s}\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s}}\cdot E_{n-s-1}(f^{(s)})_{2,\rho}}{\left(\int\limits_0^h \widetilde{\omega}_m^p(f^{(r)},t)_{2,\rho}\,\varphi(t)dt\right)^{1/p}}=$$

$$=\left(\int\limits_0^h\left(1-\left(1-t^2\right)^{(n-r)/2}\right)^{mp}\varphi(t)dt\right)^{-1/p}. \qquad (4.2.12)$$

Доказательство. В самом деле, из неравенства (4.2.8) для любой функции $f\in L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})$ получаем

$$\widetilde{\omega}_m(f^{(r)},t)_{2,\rho}\geq$$

$$\geq\sqrt{2^{r-s}\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s}}\cdot E_{n-s-1}(f^{(s)})_{2,\rho}\left(1-\left(1-t^2\right)^{(n-r)/2}\right)^m. \qquad (4.2.13)$$

Возведем обе части неравенства (4.2.13) в степень p $(0<p\leq\infty)$, умножим на весовую функцию φ и проинтегрируем по t от $t=0$ до $t=h$, затем, возведя снова обе части полученного соотношения в степень $1/p$ $(0<p\leq\infty)$, в итоге получим

$$\left(\int\limits_0^h \widetilde{\omega}_m^p(f^{(r)},t)_{2,\rho}\,\varphi(t)dt\right)^{1/p}\geq$$

$$\geq\sqrt{2^{r-s}\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s}}\cdot E_{n-s-1}(f^{(s)})_{2,\rho}\times$$

$$\times\left(\int\limits_0^h\left(1-\left(1-t^2\right)^{(n-r)/2}\right)^{mp}\varphi(t)dt\right)^{1/p}.$$

Так как полученное неравенство верно для любой функции $f\in L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})$, то из него получаем оценку сверху для экстремальной характеристики, стоящей в левой части неравенства (4.1.17):

$$\sup_{f\in L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})}\frac{\sqrt{2^{r-s}\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s}}\cdot E_{n-s-1}(f^{(s)})_{2,\rho}}{\left(\int\limits_0^h \widetilde{\omega}_m^p(f^{(r)},t)_{2,\rho}\,\varphi(t)dt\right)^{1/p}}\leq$$

$$\leq\left(\int\limits_0^h\left(1-\left(1-t^2\right)^{(n-r)/2}\right)^{mp}\varphi(t)dt\right)^{-1/p}. \qquad (4.2.14)$$

С другой стороны, для рассмотренной нами в конце доказательства теоремы 4.2.1 функция $f_0(x)=H_n(x)\in L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})$, для которой справедливы равенства (4.1.10) и (4.2.10), получаем

$$\sup_{f\in L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})}\frac{\sqrt{2^{r-s}\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s}}\cdot E_{n-s-1}(f^{(s)})_{2,\rho}}{\left(\int\limits_0^h \widetilde{\omega}_m^p(f^{(r)},t)_{2,\rho}\,\varphi(t)dt\right)^{1/p}}\geq$$

$$\geq\frac{\sqrt{2^{r-s}\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s}}\cdot E_{n-s-1}(f_0^{(s)})_{2,\rho}}{\left(\int\limits_0^h \widetilde{\omega}_m^p(f_0^{(r)},t)_{2,\rho}\,\varphi(t)dt\right)^{1/p}}=$$

$$=\left(\int\limits_0^h\left(1-\left(1-t^2\right)^{(n-r)/2}\right)^{mp}\varphi(t)dt\right)^{-1/p}. \qquad (4.2.15)$$

Очевидно, что требуемое равенство (4.2.12) следует из сопоставления соотношений (4.2.14) и (4.2.15), чем и завершается доказательство теоремы 4.2.2.

Следствие 4.2.2. *Пусть* $m,n\in\mathbb{N}$, $r,s\in\mathbb{Z}_+$, $n>r\geq s$, $n-r\geq 2$, $\varphi(t):=(n-r)t(1-t^2)^{(n-r)/2-1}$, $0\leq t\leq h$, $h\in(0,1]$. *Тогда имеет место* *равенство*

$$\sup_{f\in L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})}\frac{\sqrt{2^{r-s}\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s}}\cdot E_{n-s-1}(f^{(s)})_{2,\rho}}{\left((n-r)\int\limits_0^h \widetilde{\omega}_m^p(f^{(r)},t)_{2,\rho}\,t(1-t^2)^{(n-r)/2-1}dt\right)^{1/p}}=$$

$$=\frac{(mp+1)^{1/p}}{\Big(1-\big(1-h^2\big)^{(n-r)/2}\Big)^{m+1/p}}. \qquad (4.2.16)$$

В частности, полагая в (4.2.16) $h=\sqrt{2/(n-r)}$ *и переходя к верхней грани по всем* $n\in\mathbb{N}$ $(n>r)$, *в обеих частях получаем*

$$\sup_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n>r}}\sup_{f\in L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})}\frac{\sqrt{2^{r-s}\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s}}\cdot E_{n-s-1}(f^{(s)})_{2,\rho}}{\left((n-r)\int\limits_0^{\sqrt{2/(n-r)}} \widetilde{\omega}_m^p(f^{(r)},t)_{2,\rho}\,t(1-t^2)^{(n-r)/2-1}dt\right)^{1/p}}=$$

$$=\sup_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n>r}}\frac{(mp+1)^{1/p}}{\left(1-\left(1-\dfrac{2}{n-r}\right)^{(n-r)/2}\right)^{m+1/p}}=\frac{(mp+1)^{1/p}}{(1-e^{-1})^{m+1/p}}. \qquad (4.2.17)$$

В свою очередь, полагая в (4.2.17) $p=1/m,\ m\in\mathbb{N}$, *имеем*

$$\sup_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n>r}}\frac{\sqrt{2^{r-s}\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s}}\cdot E_{n-s-1}(f^{(s)})_{2,\rho}}{\left((n-r)\int\limits_0^{\sqrt{2/(n-r)}} \widetilde{\omega}_m^{1/m}(f^{(r)},t)_{2,\rho}\,t(1-t^2)^{(n-r)/2-1}dt\right)^{m}}=\frac{2^m}{(1-e^{-1})^{2m}}.$$

В завершении этого параграфа отметим, что теорема 4.2.2 при $s=0$ и следствие 4.2.2 в случае $s=0$, $p=1/m$, $m\in\mathbb{N}$, ранее были получены в работе С.Б.Вакарчука [17].

§ 4.3. Решение экстремальной задачи (4.1.15) для класса функций $HW_{2,\rho}^{r,p}(\widetilde{\omega}_m,\varphi)$, $0<p\leq\infty$

Пусть $H\in(0,1]$; $p\in(0,+\infty]$, $m,n\in\mathbb{N}$, $r,s\in\mathbb{Z}_+$, $n>r\geq s$, φ – весовая на отрезке $[0,h]$ функция. Обозначим через $HW_{2,\rho}^{r,p}(\widetilde{\omega}_m,\varphi)$ класс, состоящий из функций $f\in L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})$, у которых производные r-го порядка $f^{(r)}$ удовлетворяют условию

$$\int\limits_0^H \widetilde{\omega}_m(f^{(r)},t)_{2,\rho}\,\varphi(t)dt\leq 1.$$

В следующей теореме приводим решение экстремальной задачи (4.1.15) в случае когда $\mathfrak{M}^{(r)}=HW_{2,\rho}^{r,p}(\widetilde{\omega}_m,\varphi)$.

Теорема 4.3.1. *Справедливо равенство*

$$\mathcal{E}_{n-s-1}\Big(HW_{2,\rho}^{r,p}(\widetilde{\omega}_m,\varphi)\Big):=$$

$$:=\sup\Big\{E_{n-s-1}(f^{(s)})_{2,\rho}: f\in HW_{2,\rho}^{r,p}(\widetilde{\omega}_m,\varphi)\Big\}=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{2^{r-s}}\cdot\frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}}\cdot\left\{\int\limits_0^H\Big(1-\big(1-t^2\big)^{(n-r)/2}\Big)^{mp}\varphi(t)dt\right\}^{-1/p}. \tag{4.3.1}$$

Доказательство. Для получения оценки сверху экстремальной величины, стоящей в левой части равенства (4.3.1), заметим, что из неравенства (4.2.14) для произвольной функции $f\in HW_{2,\rho}^{r,p}(\widetilde{\omega}_m,\varphi)$ получаем

$$E_{n-s-1}\big(f^{(s)}\big)_{2,\rho}\leq$$

$$\leq\sqrt{\frac{1}{2^{r-s}}\cdot\frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}}\cdot\left\{\int\limits_0^H\Big(1-\big(1-t^2\big)^{(n-r)/2}\Big)^{mp}\varphi(t)dt\right\}^{-1/p},$$

откуда сразу следует, что

$$\mathcal{E}_{n-s-1}\Big(HW_{2,\rho}^{r,p}(\widetilde{\omega}_m,\varphi)\Big) \le$$

$$\le \sqrt{\frac{1}{2^{r-s}}\cdot\frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}}\cdot\left\{\int\limits_0^H \Big(1-\big(1-t^2\big)^{(n-r)/2}\Big)^{mp}\varphi(t)dt\right\}^{-1/p}. \qquad (4.3.2)$$

Чтобы получить оценку снизу указанной выше величины, записанной в левой части неравенства (4.3.2), введем в рассмотрение функцию

$$f_1(x)=\frac{1}{\sqrt{2^r\,\alpha_{n,r}}}\cdot\frac{H_n(x)}{\left(\int\limits_0^H \Big(1-\big(1-t^2\big)^{(n-r)/2}\Big)^{mp}\varphi(t)dt\right)^{1/p}},$$

где $H_n(x)$ — многочлен Эрмита степени n определённой формулой (4.1.1).

Для этой функции в силу равенств (4.1.5), (4.1.6) и (4.2.7) имеем

$$f_1^{(s)}(x)=\sqrt{\frac{1}{2^{r-s}}\cdot\frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}}\times$$

$$\times\frac{H_{n-s}(x)}{\left(\int\limits_0^H \Big(1-\big(1-t^2\big)^{(n-r)/2}\Big)^{mp}\varphi(t)dt\right)^{1/p}},\quad s=0,1,\ldots,r;$$

$$E_{n-s-1}\big(f^{(s)}\big)_{2,\rho}=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{2^{r-s}}\cdot\frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}}\cdot\left\{\int\limits_0^H \Big(1-\big(1-t^2\big)^{(n-r)/2}\Big)^{mp}\varphi(t)dt\right\}^{-1/p}; \qquad (4.3.3)$$

$$\widetilde{\omega}_m\left(f_1^{(r)},t\right)_{2,\rho}=\frac{\left(1-\left(1-t^2\right)^{(n-r)/2}\right)^m}{\left(\int\limits_0^H\left(1-\left(1-t^2\right)^{(n-r)/2}\right)^{mp}\varphi(t)dt\right)^{1/p}};$$

$$\int\limits_0^H\widetilde{\omega}_m^p\left(f_1^{(r)},t\right)_{2,\rho}\varphi(t)dt=1.$$

Последнее равенство означает, что функция $f_1\in HW_{2,\rho}^{r,p}(\widetilde{\omega}_m,\varphi)$, а потому, учитывая равенство (4.3.3), запишем оценку снизу

$$\mathcal{E}_{n-s-1}\Big(HW_{2,\rho}^{r,p}(\widetilde{\omega}_m,\varphi)\Big)\geq$$

$$\geq\sqrt{\frac{1}{2^{r-s}}\cdot\frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}}\cdot\left\{\int\limits_0^H\left(1-\left(1-t^2\right)^{(n-r)/2}\right)^{mp}\varphi(t)dt\right\}^{-1/p}. \qquad (4.3.4)$$

Очевидно, что из сопоставления оценки сверху (4.3.2) с оценкой снизу (4.3.4) следует равенство (4.3.1) и таким образом теорема 4.3.1 доказана.

Из доказанной теоремы 4.3.1 вытекает ряд следствий

Следствие 4.3.1. *Пусть* $m,n\in\mathbb{N}$, $r,s\in\mathbb{Z}_+$, $n>r\geq s$, $n-r\geq 2$, $\varphi_0(t):=(n-r)t(1-t^2)^{(n-r)/2-1}$, $0\leq t\leq h$, $h\in(0,1]$. *Тогда имеет место равенство*

$$\mathcal{E}_{n-s-1}\Big(HW_{2,\rho}^{r,p}(\widetilde{\omega}_m,\varphi_0)\Big)=\frac{(mp+1)^{1/p}}{\Big(1-(1-H^2)^{(n-r)/2}\Big)^{m+1/p}}. \qquad (4.3.5)$$

В частности, полагая в (4.3.5) $H:=\sqrt{2/(n-r)}$ *и переходя к верхней* *грани по всем* $n \in \mathbb{N}$ $(n > r)$, *в обеих частях получаем*

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{E}_{n-s-1}\Big(HW^{r,p}_{2,\rho}(\widetilde{\omega}_m, \varphi_0)\Big) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(mp+1)^{1/p}}{\left(1-\left(1-\dfrac{2}{n-r}\right)^{(n-r)/2}\right)^{m+1/p}} = \frac{(mp+1)^{1/p}}{(1-e^{-1})^{m+1/p}}. \qquad (4.3.6)$$

В свою очередь, полагая в (4.3.6) $p = 1/m$, $m \in \mathbb{N}$, *имеем*

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{E}_{n-s-1}\Big(HW^{r,1/m}_{2,\rho}(\widetilde{\omega}_m, \varphi_0)\Big) = \frac{2^m}{(1-e^{-1})^{2m}}.$$

Обсуждение полученных результатов

Основным результатом диссертационной работы являются теоремы 2.2.1-2.5.2, 3.2.1, 3.2.2, 3.3.1, 3.4.1, 3.5.1, 3.5.2, 4.1.1, 4.1.2, 4.1.3, 4.2.1.

Результаты второй главы являются своеобразными обобщениями работы М.К.Керимова и В.Э.Селимханова [46] где исследуется вопрос получения точных или асимптотически точных оценок скорости сходимости рядов Фурье для функций одной переменной в пространстве $L_2[0, 2\pi]$. Следует отметить, что в [46] получены порядковые оценки некоторых классов функций как для прямых теорем теории приближений тригонометрическими полиномами, так и для обратных теорем. Существенным отличим полученным в первой главе результатов автора диссертационной работы от результатов упоминавшей работы М.К.Керимова и В.Э.Селимханова [46] является тот факт, что все теоремы 2.2.1, 2.2.2, 2.3.1, 2.4.1, 2.5.1, 2.5.2 являются точными и окончательными, в том смысле, что в каждом конкретном случае указывается экстремальная функция из исследуемого класса, на которой реализуется верхняя грань среднеквадратического наилучшего приближения всего класса функций. При получении точного значения верхней грани наилучшего приближения используется метод Н.П.Корнейчука [53] об экстремальных значениях функционалов и наилучшего приближения на классах периодических функций. Отметим также, что при построении (явной конструкции) обобщённого модуля непрерывности высших порядков используется обобщённый оператор сдвига, ядром которого является известное ядро Пуассона, связанное с интегралом Пуассона равенством

$$U(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(t)\,\frac{1-r^2}{1-2r\,\cos(t-\varphi)+r^2}dt$$

являющимся решением внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в единичном круге, а именно, требуется найти гармоническую в единичном круге $|z|<1$ и непрерывную на границе круга $|z|=1$ функцию $u(z)$, которая на границе принимает заданные непрерывные значения

$$\Delta u:=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u(x,y)=0,\quad u(\rho,t)\Big|_{\rho=1}:=u\big(\rho e^{it}\big)\Big|_{\rho=1}=f(t).$$

В теореме 2.2.1 утверждается, что при любых $m,n\in\mathbb{N}$, $r,\nu\in\mathbb{Z}_+$, $r\geq\nu$, $\nu=\overline{0,r}$, $t\in(0,1)$ справедливо неулучшаемое неравенство между наилучшим совместным приближением функции и её производных $E_{n-1}(f^{(\nu)})_2$ $(\nu=\overline{1,r})$ и обобщённым модулем непрерывности r-й производной $\Omega_m(f^{(r)},t)_2$:

$$E_{n-1}(f^{(\nu)})_2\leq\Big[1-(1-t)^n\Big]^{-m}\cdot n^{-(r-\nu)}\Omega_m(f^{(r)},t)_2,$$

причём при каждом фиксированном $n\in\mathbb{N}$ константа в правой части неравенство уменьшена быть не может. Из этого утверждения следуют много ранее полученные результаты. Полученное неравенство при $\nu=0$ содержит результаты М.К. Керимова и Э.В. Селимханова [46].

Одним из основных результатов первой главы является теорема 2.3.1 в которой утверждается: при любых $m,n\in\mathbb{N}$, $r,\nu\in\mathbb{Z}_+$, $r\geq\nu$, $h\in(0,1)$, $0<p\leq\infty$

и $\varphi(t)$ весовая на $[0,h]$ функция справедливо равенство

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{n^{r-\nu}E_{n-1}(f^{(\nu)})_2}{\left(\int\limits_0^h\Omega_m^p(f^{(r)},t)_2\varphi(t)dt\right)^{1/p}}=$$

$$=\left(\int\limits_0^h\bigl[1-(1-t)^n\bigr]^{mp}\varphi(t)dt\right)^{-1/p}.$$

Приведенные следствия 2.3.1, 2.3.2 содержат при значении весовой функции $\varphi(t)=1$ и $\varphi(t)=n(1-t)^{n-1}$, $0<t<1$ точные неравенства типа Джексона-Стечкина для величины совместного приближения функций и её промежуточных производных $E_{n-1}(f^{(\nu)})$ с явными константами.

В теореме 2.4.1 решается задача отыскания точной верхней грани наилучшего совместного приближения класса $W_{p,m}^{(r)}(h)$ в пространстве L_2.

В теореме 2.5.2 утверждается, что при любых $m,n\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$ справедливо равенство

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{n^rE_{n-1}(f)}{\mathscr{K}(f^{(r)},1/n^m)}=1,$$

где $\mathscr{K}(f^{(r)},t)$ — $\mathscr{K}$-функционал Петре. При этом указывается экстремальная функция $f_0\in L_2^{(r)}$, для которой реализуется верхняя грань в полученном соотношении. Как следствие из полученного соотношения и теоремы 2.2.1 вытекает слабая эквивалентность $\mathscr{K}$-функционала Петре и обобщённого модуля непрерывности $\Omega_m(f,t)$:

$$\mathscr{K}(f,t^m)\sim\Omega_m(f,t).$$

В третьей главе диссертации исследуется вопрос об отыскании точных неравенств типа Джексона-Стечкина между наилучшими полиномиальными приближениями функций и неклассическим модулем непрерывности в L_2.

В теоремах 3.2.1, 3.2.2, следствие 3.2.1, получены точные оценки величины наилучшего среднеквадратического приближения $E_{n-1}(f)$ произвольной комплекснозначной 2π-периодической дифференцируемой функций $f \in L_2^{(r)}$ подпространством $\mathcal{T}_{2n-1}$ тригонометрических полиномов порядка не выше $n-1$ и усреднённым значением неклассического модуля непрерывности $\widetilde{\omega}_{2m-1}(f^{(r)}, t)$ производной $f^{(r)} \in L_2$ с произвольным весом $\varphi(t)$. Неклассический модуль непрерывности порождён конечно-разностным оператором порядка $2m-1$ с постоянными знакочередующимся коэффициентами, равными по модулю единице. Указанный неклассический модуль непрерывности впервые рассмотрел А.Г. Бабенко [8]. Неравенство Джексона для неклассического модуля непрерывности исследовал Н.А. Барабошкина [10], а ряд экстремальных задач решили М.Ш. Шабозов и А.Д. Фарозова [116].

Во втором параграфе третьей главы доказываются весьма общие утверждения в L_p-норме $(1/r \le p \le 2)$ в виде теорем 3.2.1 и 3.2.2. Пользуясь результатом теоремы 3.2.2 в третьем параграфе устанавливается связь между результатом теоремы 3.2.2 и экстремальной задачей отыскания точной константы в неравенстве Джексона-Стечкина произвольной 2π-периодической комплекснозначной функции $f \in L_2^{(r)},\ r \in \mathbb{Z}$. Положим

$$\mathscr{K}_{n,r}(\widetilde{\omega}_{2m-1}, t) = \sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^r E_{n-1}(f)_2}{\widetilde{\omega}^2_{2m-1}(f^{(r)}, t/n)},$$

где $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$. При $r = 0$ полагаем

$$\mathscr{K}_n(\widetilde{\omega}_{2m-1}, t) = \mathscr{K}_{n,0}(\widetilde{\omega}_{2m-1}, t).$$

Этот случай ранее изучался в работах А.Г. Бабенко [8], Н.А. Барабошкиной [10], М.Ш. Шабозова и А.Д. Фарозовой [116].

В третьем параграфе третьей главы (теорема 3.3.1) доказывается, что при любых $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$ справедливо равенство

$$\mathscr{K}_n\left(\widetilde{\omega}_{2m-1}, \frac{\pi}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{2m}}.$$

Последнее равенство означает, что точная константа в неравенстве типа Джексона-Стечкина

$$E_{n-1}(f) \leq \frac{\mathscr{K}_m}{n^r}\, \widetilde{\omega}_{2m-1}(f^{(r)}, t/n),$$

$\mathscr{K} = 1/\sqrt{2m}$. Для сравнения укажем, что в неравенстве типа Джексона-Стечкина

$$E_{n-1}(f) \leq \frac{\mathscr{K}'_m}{n^r}\, \omega_m(f^{(r)}, t/n),$$

где $\omega_m(g, t)$ — классический модуль непрерывности m-го порядка функции g в точке t точная константа равна

$$\mathscr{K}'_m = \mathscr{K}'_m\left(\omega_m, \frac{2\pi}{n}\right) = \left(C_{2m}^m\right)^{-1/2},\ m, n \in \mathbb{N},\ n > m.$$

В четвёртом параграфе третьей главы (теорема 3.4.1) приводится обобщение известного неравенства М.Ш. Шабозова и Г.А. Юсупова [120] доказанного для классического модуля непрерывности m-го порядка в пространстве L_2 на случай неклассического модуля непрерывности. Из теоремы 3.4.1 вытекают различные следствия для известных весовых функций, например, $\varphi(t) = \sin nt$, $\varphi(t) = \sin^\gamma nt$, ранее использованной Н.И. Черных [105] и Н. Айнуллоевым [6]. Попутно в качестве следствия получается результат М.Ш. Шабозова и А.Д. Фарозовой [116].

В заключительном пятом параграфе третьей главы решаются экстремальные задачи, связанные с наилучшим совместным полиномиальным приближением дифференцируемых периодических классов функций, принадлежащих пространству L_2. Задача совместного приближения периодических дифференцируемых функций тригонометрическими полиномами в 1960 г. была рассмотрена А.Л. Гаркави [33] в равномерной метрике. Затем в том же году А.Ф. Тиман [95] рассмотрел указанную задачу для классов функций, определённых на всей оси. Указанная экстремальная задача в теории приближения функций мало изучена, и известные нам работы не содержат точных решений. Здесь рассмотрена следующая экстремальная задача: пусть $\mathfrak{M}^{(r)}$ — некоторый класс функций из $L_2^{(r)}$. Требуется найти точное значение величины:

$$E_{n-1}^{(s)}(\mathfrak{M}^{(r)}) := \sup\left\{E_{n-1}(f^{(s)}) : f \in \mathfrak{M}^{(r)}\right\}. \tag{5.0.1}$$

Следует отметить, что точные значение величины (5.0.1) для некоторых классов периодических функций, задаваемых конкретным мажорантом Φ, удовлетворяющих некоторым ограничением, найдено в работе С.Б. Вакарчука и В.И. Забутной [22]. Точные значения верхних граней наилучших совместных приближений функции и её промежуточных производных комплексными алгебраическими полиномами и их соответствующими производными на некоторых классах функций, аналитических в единичном круге, принадлежащих пространству Харди H_2, найдены в работе М.Ш. Шабозова, Г.А. Юсупова и Дж.Дж. Заргарова [122]. Для класса $W_{p,m}^{(r)}(h) := W_p^{(r)}(\widetilde{\omega}_{2m-1}, h)$ функций $f \in L_2^{(r)}$ удовлетворяющих условию

$$\int\limits_0^h \widetilde{\omega}_{2m-1}^p(f^{(r)}, t)dt \le 1$$

значение величины (5.0.1) найдено в пятом параграфе, а именно доказано, что для заданных $m, n, r \in \mathbb{N}$, $\nu \in \mathbb{Z}_+$, $r \ge \nu$, $1/r \le p \le 2$, $h \in (0, 2\pi/n]$ справедливо равенство

$$E_{n-1}^{(\nu)}\Big(W_{p,m}^r(h)\Big) = n^{-(r-\nu)} \left(\int\limits_0^h \mathscr{P}_m^{p/2}(nt)dt\right)^{-1/p},$$

где $\mathscr{P}(nt)$ определено равенством (3.2.7). Отсюда при $h = \pi/n$ и $p = 2$ следует равенство

$$E_{n-1}^{(\nu)}\left(W_{p,m}^{(r)}\Big(\frac{\pi}{n}\Big)\right) = \frac{1}{\sqrt{2m}} \cdot \frac{1}{n^{r-\nu-1/2}}.$$

В четвертой главе решается экстремальная задача о наилучшем совместном приближении функций, интегрируемых с квадратом на всей оси $\mathbb{R} := (-\infty, +\infty)$ алгебраическими полиномами с весом Чебышева-Эрмита $\rho(x) =$

$\exp\{-x^2\}$. Этой проблематике в разное время занимались многие исследователи, список которых приведено в начало четвёртой главы, однако точные значения верхних граней наилучших совместных приближений в пространстве $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ для простейших классов функций не были найдены. Ценность результатов четвертой главы заключается в том, что именно в этой главе для некоторых классов функций величину (5.0.1) удалось точно вычислить.

В теореме 4.1.1 доказано, что при любых $n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $n > r \geq s$ справедливо неравенство

$$E_{n-s-1}(f^{(s)})_{2,\rho} \leq \left(\frac{1}{2^{r-s}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}\right)^{1/2} E_{n-r-1}(f^{(r)})_{2,\rho}. \tag{5.0.2}$$

Существует функция $f_0 \in L^{(r)}_{2,\rho}$, для которой в неравенстве (5.0.2) имеет место знак равенства. Отметим, что при $s = 0$ из неравенства (5.0.2) следует соотношение

$$E_{n-1}(f)_{2,\rho} \leq \frac{1}{\sqrt{2^r\,\alpha_{n,r}}} \cdot E_{n-r-1}(f^{(r)})_{2,\rho}.$$

Этот результат ранее было получен С.Б. Вакарчуком [17]. Если через $W^{(r)}L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ обозначить класс функций $f \in L^{(r)}_{2,\rho}(\mathbb{R})$, у которых $\|f^{(r)}\|_{2,\rho} \leq 1$, то пользуясь соотношением (5.0.2) в теореме 4.1.2 доказано, что

$$\mathcal{E}_{n-s-1}\Big(W^{(r)}L_{2,\rho}(\mathbb{R})\Big) =$$

$$= \sup\left\{E_{n-s-1}(f^{(s)})_{2,\rho} : f \in W^{(r)}L_{2,\rho}(\mathbb{R})\right\} = \sqrt{\frac{1}{2^{r-s}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}}, \tag{5.0.3}$$

причём существует функция $g_0 \in W^{(r)}L_{2,\rho}(\mathbb{R})$, для которой верхняя грань в соотношении (5.0.3) реализуется. При $s = 0$ соотношение (5.0.3) ранее было получено в работе К. Тухлиева и А.М. Маликова [99].

Наиболее значительным результатом третьего параграфа четвертой главы является теорема 4.1.3 в которой утверждается, что при любых $n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $n > r \geq s$ имеет место равенство

$$\sup\left\{\frac{E_{n-s-1}(f^{(s)})_{2,\rho}}{\left(E_{n-1}(f)_{2,\rho}\right)^{1-s/r}} : f \in W^{(r)}L_{2,\rho}(\mathbb{R})\right\} = \left(\frac{\alpha_{n,s}}{(\alpha_{n,r})^{s/r}}\right)^{1/2}. \qquad (5.0.4)$$

Здесь следует отметить, что впервые экстремальная характеристика типа характеристики стоящей в левой части равенства (5.0.4) была рассмотрена С.Б. Вакарчуком [17], а затем для приближения функций двух переменных обобщена в работе М.Ш. Шабозова и О.А. Джурахонова [111].

Во втором параграфе четвертой главы изучаются различные неравенства типа Джексона-Стечкина для обобщённого модуля непрерывности в $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$. Здесь исходя из конкретного оператора сдвига строится обобщённый модуль непрерывности m-го порядка

$$\widetilde{\omega}_m^2(f,t)_{2,\rho} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2(f)\left(1-(1-t^2)^{k/2}\right)^{2m},$$

где $c_k(f)$ — коэффициенты Фурье-Эрмита:

$$c_k(f) = \int\limits_{\mathbb{R}} \rho(t)f(t)H_k(t)dt, \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

$H_k(t)$ — полином Эрмита k-й степени.

В теореме 4.2.1 доказывается, что если $n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $n > r \geq s$, то наилучшей совместной приближения функции $f \in L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})$ имеет место следующее неравенство типа Джексона-Стечкина

$$E_{n-s-1}(f^{(s)})_{2,\rho} \le$$

$$\le \sqrt{\frac{1}{2^{r-s}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}} \cdot \left(1-(1-t^2)^{(n-r)/2}\right)^{-m} \widetilde{\omega}_m(f^{(r)},t)_{2,\rho}\,. \qquad (5.0.5)$$

Неравенство вида (5.0.5) при $s=0$ ранее было доказано С.Б. Вакарчуком [17]. Из (5.0.5) сразу следует экстремальное соотношение

$$\sup_{f\in L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})} \frac{\sqrt{2^{r-s}\,\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s}} \cdot E_{n-s-1}(f^{(s)})_{2,\rho}}{\widetilde{\omega}_m(f^{(r)},t)_{2,\rho}} =$$

$$= \left(1-(1-t^2)^{(n-r)/2}\right)^{-m},$$

которое в случае обычное приближение получено в работе К.Тухлиева и А.М. Маликова [99]. Заметим, что асимптотически точные равенства ранее были получены в работах С.З. Рафальсона [80], В.А. Абилова, Ф.В. Абилова и М.К. Керимова [5]. В случае усреднённого с произвольным весом значения модуля непрерывности более общий результат получен в теореме 4.2.2, а именно доказано, что если $m,n\in\mathbb{N}$, $r,s\in\mathbb{Z}_+$, $n>r\ge s$, $0<p\le\infty$, $h\in(0,1]$, φ — весовая на отрезке $[0,h]$ функция, то справедливо равенство

$$\sup_{f\in L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})} \frac{\sqrt{2^{r-s}\,\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s}} \cdot E_{n-s-1}(f^{(s)})_{2,\rho}}{\left(\int\limits_0^h \omega_m^p(f^{(r)},t)_{2,\rho}\varphi(t)dt\right)^{1/p}} =$$

$$
= \left(\int\limits_0^h \left(1 - (1-t^2)^{(n-r)/2}\right)^{mp} \varphi(t) dt \right)^{-1/p}. \tag{5.0.6}
$$

Из соотношения (5.0.6) при $s = 0$ и $0 < p \le 2$ получаем результат С.Б.Вакарчука [17], $s = 0$, $p = 1/m$, $\varphi(t) \equiv 1$ получаем результат К. Тухлиева и А.М. Маликова [99], $s = 0$, $p = 2$, $\varphi(t) = 1$ результат В.А. Абилова, Ф.В. Абилова и М.К. Керимова [5]. Кроме того из (5.0.6) в частности в частности, при

$$
\varphi(t) := (n-r)\big(1-t^2\big)^{(n-r)/2-1},\ 0 < t < h,\ h \in (0,1)
$$

следует равенство

$$
\sup_{f \in L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})} \frac{\sqrt{2^{r-s}\,\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s}} \cdot E_{n-s-1}(f^{(s)})_{2,\rho}}{\left((n-r) \int\limits_0^h \widetilde{\omega}_m^p(f^{(r)}, t)_{2,\rho} \cdot t\big(1-t^2\big)^{(n-r)/2-1} dt \right)^{1/p}} =
$$

$$
= \frac{(mp+1)^{1/p}}{\left(1 - \big(1-h^2\big)^{(n-r)/2}\right)^{m+1/p}}. \tag{5.0.7}
$$

Из этого равенства при значение $h = \sqrt{2/(n-r)}$, $p = 1/m$, $m \in \mathbb{N}$ получаем

$$
\sup_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n > r}} \frac{\sqrt{2^{r-s}\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s}} \cdot E_{n-s-1}(f^{(s)})_{2,\rho}}{\left((n-r) \int\limits_0^{\sqrt{2/(n-r)}} \widetilde{\omega}_m^{1/m}(f^{(r)}, t)_{2,\rho}\, t(1-t^2)^{(n-r)/2-1} dt \right)^m} = \frac{2^m}{(1-e^{-1})^{2m}}.
$$

Полученное равенство является своеобразным обобщением известного результата С.Б. Вакарчука [17]. Приведённый здесь результат теоремы 4.2.2 позволяет для класса $HW_{2,\rho}^{rp}(\widetilde{\omega}_m, \varphi)$ функций $f \in L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})$, удовлетворяющих неравенству

$$\int\limits_0^H \widetilde{\omega}_m(f^{(r)}, t)_{2,\rho}\varphi(t)dt \le 1,$$

доказать равенство

$$\mathcal{E}_{n-s-1}\Big(HW_{2,\rho}^{r,p}(\widetilde{\omega}_m, \varphi)\Big) =$$

$$= \sup\Big\{E_{n-s-1}(f^{(s)})_{2,\rho} : f \in HW_{2,\rho}^{r,p}(\widetilde{\omega}_m, \varphi)\Big\} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2^{r-s}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}} \cdot \left\{\int\limits_0^H \Big(1 - \big(1 - t^2\big)^{(n-r)/2}\Big)^{mp} \varphi(t)dt\right\}^{-1/p}.$$

Из этого равенства вытекает, что при $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $n > r \ge s$, $n - r \ge 2$, $\varphi_0(t) := (n-r)t(1-t^2)^{(n-r)/2-t}$, $0 < t \le h$, $h \in (0,1)$ имеет место равенство

$$\mathcal{E}_{n-s-1}\Big(HW_{2,\rho}^{r,p}(\widetilde{\omega}_m, \varphi_0)\Big) = \frac{(mp+1)^{1/p}}{\Big(1 - (1 - H^2)^{(n-r)/2}\Big)^{m+1/p}},$$

и, в частности, полагая $H := \sqrt{2/(n-r)}$ и переходя к пределу при $n \to \infty$ получаем

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{E}_{n-s-1}\Big(HW_{2,\rho}^{r,p}(\widetilde{\omega}_m, \varphi_0)\Big) = \frac{(mp+1)^{1/p}}{\big(1 - e^{-1}\big)^{m+1/p}}.$$

Отсюда при $p = 1/m$, $m \in \mathbb{N}$ имеем

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{E}_{n-s-1}\Big(HW_{2,\rho}^{r,p}(\widetilde{\omega}_m, \varphi_0)\Big) = \frac{2^m}{\big(1 - e^{-1}\big)^{2m}}.$$

Выводы

Основные научные результаты диссертационной работы заключаются в следующем:

- найдено точной значение верхних граней наилучших совместных приближений некоторых классов дифференцируемых периодических функций, характеризующихся обобщённым модулем непрерывности, порождённым конкретным оператором сдвига [1-A, 2-A, 5-A, 6-A];
- найдено точное неравенство Джексона-Стечкина для наилучшего совместного приближения посредством $\mathscr{K}$-функционала Петре [3-A, 6-A];
- найдена точная константа в неравенстве Джексона-Стечкина для наилучших совместных среднеквадратичных полиномиальных приближений с неклассическим модулем непрерывности [1-A, 2-A, 5-A];
- найдена верхняя грань наилучшего совместного приближения некоторых классов функций, задаваемых неклассическим модулем непрерывности [1-A, 2-A, 5-A, 6-A];
- найдены верхние грани наилучшего совместного полиномиального приближения классов функций в среднем на вещественной оси $\mathbb{R} := (-\infty, +\infty)$ с весом Чебышева-Эрмита, определяемые обобщённым модулем непрерывности [4-A, 7-A].

Рекомендации по практическому использованию результатов.

Полученные в диссертационной работе результаты имеют теоретическое значение и могут быть применены при нахождении точных верхних граней наилучших полиномиальных приближений классов функций многих переменных. Главы диссертации в отдельности могут быть использованы при чтении специальных курсов для студентов старших курсов учебных заведений по специальности “Математика” и “Прикладная математика” высших учебных заведений.

Список литературы

А) Список использованных источников

[1] Абилов В.А. О порядке приближения непрерывных функций арифметическими средними частных сумм ряда Фурье-Эрмита // Изв. вузов. Математика. – 1972. – №3. – С.3–9.

[2] Абилов В.А. Оценка поперечника одного класса функций в пространстве L_2 // Матем. заметки. – 1992. – Т.52. – №1. – С.3–8.

[3] Абилов В.А., Абилова Ф.В. Некоторые вопросы приближения 2π-периодических функций суммами Фурье в пространстве $L_2(2\pi)$ // Матем. заметки. – 2004. – Т. 76. – № 6. – С. 803–811.

[4] Абилов В.А., Абилова Ф.В. Некоторые вопросы приближения функций суммами Фурье-Эрмита в пространстве $L_2(\mathbb{R}; e^{-x^2})$ // Изв. вузов. Математика. – 2006. – №1. – С.3–12.

[5] Абилов В.А., Абилова Ф.В., Керимов М.К. Точные оценки скорости сходимости рядов Фурье по ортогональным многочленам в пространстве $L_2((a,b),p(x))$ // ЖВММФ. – 2009. – Т.49. – №6. – С.966–980.

[6] Айнуллоев Н. Наилучшее приближение некоторых классов дифференцируемых функций в L_2 // Применение функционального анализа в теории приближений. Сборник научных трудов: Калининский госуниверситет. – 1986. – С.3–10.

[7] Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации // М. Наука. – 1965.

[8] Бабенко А.Г. О неравенстве Джексона–Стечкина для наилучших L^2-приближений функций тригонометрическими полиномами // Тр. ИММ УрО РАН. – 2001. – Т.7. – №1. – С.30–46.

[9] Бари Н.К. Тригонометрические ряды // М.: Физматиз. – 1961. – 933 С.

[10] Барабошкина Н.А. Неравенство Джексона–Стечкина с неклассическим модулем непрерывности // Тр. ИММ УрО РАН. – 2001. – Т.7. – №1. – С.62–66.

[11] Берг Й., Лефстрём Й. Интерполяционные пространства. Введение // М.: Мир. – 1980. – 264 С.

[12] Бердышев В.И. О теореме Джексона в L_p // Тр. МИАН СССР. – 1976. – Т.88. – С.3–16.

[13] Бернштейн С.Н. О свойствах однородных функциональных классов // Докл. АН СССР. – 1947. – Т.57. – №2. – С.111–114.

[14] Вакарчук С. Б., Щитов А. Н. Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 и поперечники некоторых классов функции // Укр. матем. журн. – 2004. – Т.56. – №11. – С.1458–1466.

[15] Вакарчук С.Б. Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников функциональных классов из L_2 // Матем. заметки. – 2005. – Т.78. – №5. – С. 792–796.

[16] Вакарчук С.Б. Неравенство типа Джексона и поперечники классов функций в L_2 // Матем. заметки. – 2006. – Т.80. – №1. – С. 11–18.

[17] Вакарчук С.Б. Приближение функций в среднем на вещественной оси алгебраическими полиномами с весом Чебышева-Эрмита и поперечники

функциональных классов // Матем. заметки. – 2014. – Т.95. – №5. – С.666–684.

[18] Вакарчук С.Б. Обобщённые характеристики гладкости в неравенствах типа Джексона и поперечники классов функций в L_2 // Матем. заметки. – 2015. – Т.98. – №4. – С.511–529.

[19] Вакарчук С.Б. О наилучшем полиномиальном приближении 2π-периодических функций в пространстве L_2 // Вісник Дніпропетровського університету. серия: Математика. – 2015. – Вып. 20. – С.19–24.

[20] Вакарчук С.Б. Неравенства типа Джексона с обобщенным модулем непрерывности и точные значения n-поперечников классов (φ, β)-дифференцируемых функций в L_2. I // Укр. матем. журнал. – 2016. – Т.68. – №6. – С.723–745.

[21] Вакарчук С.Б., Вакарчук М.Б. О приближении функций алгебраическими полиномами в среднем на вещественной оси с весом Чебышева-Эрмита // Вісник Дніпропетровского университету. Серія математика. – 2011. – Т.19(6/1). – С.28–31.

[22] Вакарчук С.Б., Забутная В.И. Точное неравенство типа Джексона-Стечкина в L_2 и поперечники функциональных классов // Матем. заметки. – 2009. – Т.86. – №3. – С.328–336.

[23] Вакарчук С.Б., Забутная В.И. Неравенства типа Джексона-Стечкина для специальных модулей непрерывности и поперечники функциональных

классов в пространстве L_2 // Матем. заметки. – 2012. – Т.92. – №4. С.497–514.

[24] Вакарчук С.Б., Забутная В.И. Неравенства между наилучшими полиномиальными приближениями и некоторыми характеристиками гладкости в пространстве L_2 и поперечники классов функций // Матем. заметки. – 2016. – Т.99. – №2. – С.215–238.

[25] Vakarchuk S.B., Zabutna V.I. Widths of functional classes from L_2 and exact constants in Jackson type inequalities // East J. Approximation. – 2008. – V.14. – №4. – PP.411–421.

[26] Вакарчук С.Б., Швачко А.В. О наилучшем приближении в среднем с весом Чебышева-Эрмита алгебраическими полиномами на всей вещественной оси // Збірник праць Інституту математики НАН Украіни. – 2013. – Т.10. – №1. – С.28–38.

[27] Вакарчук С.Б., Швачко А.В. О наилучшей аппроксимации в среднем алгебраическими полиномами с весом и точных значениях поперечников классов функций // Укр. мат. журн. – 2013. – Т.65. – №12. – С.1604–1621.

[28] Васильев С.Н. Неравенство Джексона–Стечкина в $L_2[-\pi,\pi]$ // Труды Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2001. – Т.7. – №1. – С.75–84.

[29] Васильев С.Н. Точное неравенство Джексона-Стечкина в $L^2[-\pi,\pi]$ для наилучших приближений тригонометрическими полиномами // Электрон. журн. „Исследовано в России". – 2002. – С.1577–1586.

[30] Владимиров В.С. Уравнение математической физики // М. Наука. – 1976.

[31] Виленкин Н.Я. Специальные функции и теория представления групп // М.: Наука. – 1965. – 588 С.

[32] Vakarchuk S.B., Shabozov M.Sh., Zabutnaya V.I. Structural characteristics of functions from L_2 and the exact values of widths of some functional classes // Journal of Mathematical Sciences. – 2015. – V.206. – №1. – PP.97–114.

[33] Гаркави А.Л. О совместном приближении периодических функции и ее производных тригонометрическими полиномами // Изв. АН СССР. сер. матем. – 1960. – Т.24. – №1. – С.103–128.

[34] Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами // М.: Наука. – 1977.

[35] Jackson D. Über die Genauigkeit der Annaheruny stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen gegebenen Frades und trigonometrischen Summen gegebenen Ordnung // Dissertation. Göttingen. – 1911.

[36] Ditzian Z., Totik V. $\mathscr{K}$ – functionals and best polynomial approximation in weighted $L^p(\mathbb{R})$ // J. Approx. Theory. – 1986. – V.46. – №1. – PP.38–41.

[37] Ditzian Z., Totik V. Moduli of Smoothness // Springer Ser. Comput. Math., 9 Springer. New York. – 1987. – 228 p.

[38] Есмаганбетов М.Г. Поперечники классов из $L_2[0, 2\pi]$ и минимизация точных констант в неравенствах типа Джексона // Матем. заметки. – 1999. – Т.65. – №6. – С.816–820.

[39] Жук В.В. О некоторых точных неравенствах между наилучшими приближениями и модулями непрерывности // Сиб. матем. журнал. – 1971. – Т.12.

– №6. – С.1283–1291.

[40] Жук В.В. Некоторые точные неравенства между равномерными приближениями периодических функций // ДАН СССР. – 1971. – Т.201. – №2. – С.263–265.

[41] Zygmund A. Smooth functions // Duke Math. J. – 1945. – V.12. – P.47–76.

[42] Иванов В.И. Прямые и обратные теоремы теории приближений в метрике L_p для $0 < p < 1$ // Матем. заметки. – 1975. – Т.18. – №5. – С.641–658.

[43] Иванов В.И., Смирнов О.И. Константы Джексона и константы Юнга в пространствах L_p // ТулГУ. – 1995.

[44] Иванов В.И. Прямые и обратные теоремы теории приближений периодических функций в работах С.Б.Стечкина и их развитие // Тр. ИММ УрО РАН. – 2010. – Т.16. – №4. – С.5–15.

[45] Иванов А.В., Иванов В.И. Теория Данкля и теорема Джексона в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$ со степенным весом // Тр. ИММ УрО РАН. – 2010. – Т.16. – №4. – С.180–192.

[46] Керимов М.К., Селимханов Э.В. О точных оценках скорости сходимости рядов Фурье для функции одной переменной в пространстве $L_2[-\pi, \pi]$ // ЖВМ и МФ. 2016. – Т.56. – №5. – С.730–741.

[47] Kokilashvili K., Y.E.Yildirir. On the approximation in weighted Lebesgue spaces // Proc. A. Razmadze Math. Ist. – 2007. – V.143. – P.103–113.

[48] Корнейчук Н.П. Точная константа в неравенстве Джексона о наилучшем равномерном приближении непрерывных периодических функций // ДАН СССР. – 1962. – Т.145. – №3. – С.514–516.

[49] Корнейчук Н.П. О наилучшем приближении непрерывных функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1963. – Т.27. – С.29–44.

[50] Корнейчук Н.П. Точное значение наилучших приближений и поперечников некоторых классов функций// ДАН СССР. – 1963. – Т.150. – С.1218–1220.

[51] Корнейчук Н.П. Точные значения норм дифференцируемых периодических функций в метрике L_2 // Матем. заметки. – 1967. – Т.2. №6. – С.569–576.

[52] Корнейчук Н.П. Экстремальные значения функционалов и наилучшее приближение на классах периодических функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1971. – Т.35. №1. – С.93–124.

[53] Корнейчук Н.П. Экстремальные задачи теории приближения // М.: Наука. – 1976.

[54] Корнейчук Н.П. О точной константе в неравенстве Джексона для непрерывных периодических функций // Матем. заметки. – 1982. – Т.32. – №5. – С.669–674.

[55] Корнейчук Н.П. Лигун А.А. Доронин В.Г. Аппроксимация с ограничением // Киев: Наука. думка. – 1982.

[56] Козко А.И., Рождественский А.В. О неравенстве Джексона в L_2 с обобщенным модулем непрерывности // Матем. заметки. – 2003. – Т.73. – №5. – С.783–788.

[57] Kokilashvili V., Yildirir Y. E. On the approximation in weighted Lebesgue space // Proc. A. Razmadze Math. Inst. – 2007. – V.143. – pp.103–113.

[58] Kokilashvili V., Samko S. A refined inverse inequality of approximation in weighted variable exponent Lebesgue space. // Proc. A. Razmadze Math. Inst. – 2009. – V.151. – pp.134–138.

[59] Lebesgue H. Sur la representation trigonometrique approchee des fonctions satisfaisant a une condition de Lipschitz // Bull. S. V. F. – 1910. – V.38. – pp.184–210.

[60] Левитан Б.М. Теория операторов обобщённого сдвига. – М.: Наука. – 1973. – 312 С.

[61] Лигун А.А. Точные неравенства для верхних граней полунорм на классах периодических функций // Матем. заметки. – 1973. – Т.13. – №5. – С.647–654.

[62] Лигун А.А. О точных константах приближения дифференцируемых периодических функций // Матем. заметки. – 1973. – Т.14. – №1. – С.21–30.

[63] Лигун А. А. Некоторые неравенства между наилучшими приближениями и модулями непрерывности в пространстве L_2 // Матем. заметки. – 1978. – Т.24. – №6. – С.785–792.

[64] Лигун А.А. О неравенствах между нормами производных периодических функций // Матем. заметки. – 1983. – Т.33. – №3. – С.385–391.

[65] Лигун А.А. О константах в теореме Джексона // Матем. заметки. – 1985. – Т.37. – №3. – С.326–336.

[66] Лигун А.А. О точных константах в неравенствах типа Джексона // Матем. заметки. – 1985. – Т.38. – №5. – С.248–256.

[67] Лигун А.А. О точных константах в неравенствах типа Джексона // ДАН СССР. – 1985. – Т.283. – №1. – С.33–37.

[68] Лигун А. А. Точные неравенства типа Джексона для периодических функции в пространстве L_2. Матем. заметки. – 1988. – Т.43. – №6. – С.757–769.

[69] Mashkar H.N. Weighted polynomial approximation // J. Approx. Theory. – 1986. – V.46. – №1. – PP.100–110.

[70] Натансон И.П. Конструктивная теория функций // М.: Гостехиздат. – 1949.

[71] Олифтаев Н.Ф. О значениях некоторых классов периодических дифференцируемых функций в пространстве L_2 // Изв. АН РТ. Отд. физ-мат., хим., геол. и техн. н. – 2013. – №1(150). – С.21–31.

[72] Олифтаев Н.Ф. Неравенства Джексона для τ-модулей гладкости и значения поперечников в L_2 // ДАН РТ. – 2015. – Т.57. – №12. – С.830–836.

[73] Палавонов К.К. О наилучшем приближении периодических функций и значениях поперечников функциональных классов в L_2 // Изв. АН РТ. Отд. физ-мат., хим., геол. и техн. н. – 2013. №2(151). – С.40–50.

[74] Палавонов К.К. Приближение функций в $L_2[0, 2\pi]$ и значение поперечников некоторых классов функций // ДАН РТ. – 2014. – Т.57. №6. – С.452–458.

[75] Пустовойтов Н.Н. Оценка наилучших приближений периодических функций тригонометрическими полиномами через усреднённые разности и многомерная теорема Джексона // Матем. сборник. – 1997. – Т.188. – №10. – С.95–108.

[76] Потапов М.К. О применении одного оператора обобщённого сдвига в теории приближений // Вестник Московского ун-та. Серия 1. Матем. мех. – 1998. – №3. – С.38–48.

[77] Платонов С.С. Гармонический анализ Бесселя и приближение функций на полупрямой // Изв. РАН. Сер. мат. – 2007. – Т.71. – Вып.5. – С.149–196.

[78] Pinkus A. n-Widths in Approximation Theory. — Berlin: Springer-Verlag. Heidelberg. New York. Tokyo. – 1985. – 252 P.

[79] Quade E.S. Trigonometric approximation in the mean // Duke Math. J. – 1973. – V.3. – PP. 529–543.

[80] Рафальсон С.З. О приближении функций в среднем суммами Фурье-Эрмита // Изв. вузов. Математика. – 1968. – №7. – С.78–84.

[81] Руновский К.В. О приближении семействами линейных полиномиальных операторов в пространствах $L_p, 0 < p < 1$ // Матем. сборник. – 1994. – Т.185. – №8. – С.81–102.

[82] Руновский К.В. Приближение средними Фурье и обобщенные модули гладкости // Матем. заметки. – 2016. – Т.99. – №4. – С.574–587.

[83] Саидусайнов М.С. Анализ одной теоремы о неравенстве Джексона-Стечкина в пространстве Бергмана B_2 // Тр. ИММ УрО РАН. – 2018. – Т. 24. – № 4. – С.217-224.

[84] Сендов Б., Попов В. Усредненные модули гладкости // М.: Мир. – 1988 г.

[85] Степанец А.И. Равномерные приближения тригонометрическими полиномами // Киев: Наука. думка. – 1981.

[86] Стечкин С.Б. О порядке наилучших приближений непрерывных функций // Докл. СССР. – 1949. – Т.65. – №2. – С.135–137.

[87] Стечкин С.Б. О порядке наилучших приближений непрерывных функций // Изв. АН. СССР. сер. мат. – 1951. – Т.15. – №3. – С.219–242.

[88] Стороженко Э.А., Кротов В.Г., Освальд П. Прямые и обратные теоремы типа Джексона в пространствах $L_p,\ 0 < p < 1$ // Матем. сб. – 1975. – Т.98. №3. – С.395–415.

[89] Стороженко Э.А., Освальд П. Теоремы Джексона в $L_p(\mathbb{R}^k)$ $0 < p < 1$ // Сиб. матем. журнал. – 1978. 1975. – Т.19. – №4. – С.888–901.

[90] Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены // М.: Наука. – 1979. – 416 С.

[91] Тайков Л.В. Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности функций из L_2 // Матем. заметки. – 1976. – Т.20. – №3. – С. 433–438.

[92] Тайков Л.В. Структурные и конструктивные характеристики функций из L_2 // Матем. заметки. – 1979. – Т.25. – №2. – С.217–223.

[93] Темурбекова С.Д. Неравенство типа Джексона-Стечкина для обобщенных модулей непрерывности и поперечники некоторых функциональных классов функций в пространстве L_2 // ДАН Республики Таджикистан. – 2013. – Т.56. – №4. – С. 273–278.

[94] Тиман А.Ф. Теория приближения функций действительного переменного // М.: Физматиз. – 1960.

[95] Тиман А.Ф. К вопросу об одновременной аппроксимации функций и их производных на всей числовой оси // Изв. АН СССР. сер. матем. – 1960. – Т.24. – №3. – С.421–430.

[96] Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений // М.: Издательство МГУ. – 1976.

[97] Тригуб Р.М. Конструктивные характеристики некоторых классов функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1965. – Т.29. – №3. – С.615–630.

[98] Тухлиев К. О наилучшем полиномиальном приближении периодических функций в L_2 и поперечники некоторых классов функций // ДАН РТ. – 2013. – Т.56. – №7. – С.515–520.

[99] Тухлиев К., Маликов А.М. О приближении функций в среднем на всей оси алгебраическими полиномами с весом Чебышёва-Эрмита // ДАН РТ. – 2016. – Т.59. – №7-8. – С.282–289.

[100] Тухлиев К., Туйчиев А.М. Среднеквадратическое приближение функций на всей оси с весом Чебышева-Эрмита алгебраическими полиномами // Тр. ИММ УрО РАН. – 2020. – Т.26. – №2. – С.270–277.

[101] Foucart S., Kryakin Yu, Shadrin A. On the exact constant in the Jackson-Stechkin inequality for the uniform metric // Constr. Approx. – 2009. – T.29. – pp.157–179.

[102] Фройд Г. Об аппроксимации с весом алгебраическими многочленами на действительной оси // ДАН СССР. – 1970. – Т.191. – №2. – С.293–294.

[103] Федоров В.М. Приближение алгебраическими многочленами с весом Чебышева-Эрмита // Изв. вузов. Математика. – 1984. – №6. – С.55–63.

[104] Черных Н.И. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 // Матем. заметки. – 1967. – Т.2. – №5. – С.513–522.

[105] Черных Н.И. Неравенство Джексона в $L_p(0, 2\pi)$ с точной константой // Тр. МИАН. – 1992. – Т.198. – С.232–241.

[106] Шабозов М.Ш. Поперечники некоторых классов периодических дифференцируемых функций в пространстве $L_2[0, 2\pi]$ // Матем. заметки. – 2010. – Т.87. – №4. – С.616–623.

[107] Шабозов М.Ш. Точные неравенства типа Джексона-Стечкина для 2π-периодических функций в L_2 и поперечники некоторых классов функций // Укр. матем. журнал. – 2011. – Т.63. – №10. – С.1040–1048.

[108] Shabozov M.Sh. Exact Jackson-Stechkin-type inequalities for 2π-periodic functions in L_2 and widths of some classes of functions // Ukr. Math. J. – 2012. – V.63:10. – PP.1633–1639.

[109] Шабозов М.Ш. Некоторые вопросы аппроксимации периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 // Чебышевский сб. – 2019. – Т.20. – №4. – С.385–398.

[110] Шабозов М.Ш., Вакарчук С.Б., Забутная В.И. Точные неравенства типа Джексона-Стечкина для периодических функций в L_2 и значения поперечников классов функций // ДАН России – 2013. – Т.451. – №6. – С.625–628.

[111] Шабозов М.Ш., Джурахонов О. Приближение в среднем некоторых классов функций двух переменных суммами Фурье-Чебышева // Тр. ИММ УрО РАН. – 2020. – Т.26. – №4. – С.268–278.

[112] Шабозов М.Ш., Палавонов К.К. Точные константы в неравенствах типа Джексона-Стечкина и поперечники классов функций в L_2 // ДАН РТ. – 2011. – Т.54. – №10. – С.793–800.

[113] Shabozov M.Sh. Palavonov K.K. Exact values of widths of certain classes of periodic differentiable functions in the space $L_2[0, 2\pi]$ // Analysis Mathematica. – 2015. – V.41. – PP.103–115.

[114] Шабозов М.Ш., Саидусайнов М.С. Среднеквадратическое приближение функций комплексного переменного суммами Фурье по ортогональным системам // Тр. ИММ УрО РАН. – 2019. – Т.25. – №2. – С.258–272.

[115] Шабозов М.Ш., Тухлиев К. Неравенства Джексона-Стечкина с обобщенными модулями непрерывности и поперечники некоторых классов функций // Тр. ИММ УрО РАН. – 2015. – Т.21. – №4. – С.292–308.

[116] Шабозов М.Ш., Фарозова А.Д. Точное неравенство Джексона–Стечкина с неклассическим модулем непрерывности // Тр. ИММ УрО РАН. – 2016. – Т.2. – №4. – С.311–319.

[117] Шабозов М.Ш., Шабозова А.А. Некоторые точные неравенства типа Джексона-Стечкина для периодических дифферецируемых в смысле Вейля функций в L_2 // Тр. ИММ УрО РАН. – 2019. – Т.25. – №4. – С.255–264.

[118] Шабозов М.Ш., Юсупов Г. А. Некоторые неравенства между наилучши-

ми приближениями и модулями непрерывности в пространстве L_2 и их применение // Изв. АН Респ. Тадж., отдел. физ.-мат., хим., геолог. и техн. наук. – 2008. – №4. – С.7–19.

[119] Шабозов М.Ш., Юсупов Г. А. Неравенства между наилучшими приближениями и усреднениями модулей непрерывности в пространстве L_2 // ДАН России. – 2010. – Т.435. – №2. – С.178–181.

[120] Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 некоторых классов 2π-периодических функций и точные значения их поперечников // Матем. заметки. – 2011. – Т.90. – №5. – С.764–775.

[121] Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников некоторых классов функций в L_2 // Сиб. матем. журн. – 2011. – Т. 52. – № 6. – С. 1414–1427.

[122] Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А., Заргаров Дж.Дж. О наилучшей совместной полиномиальной аппроксимации функций и их производных в пространстве Харди // Тр. ИММ УрО РАН. – 2021. – Т.27. – №4. – С.239–254.

[123] Шалаев В.В. О поперечниках в L_2 классов дифференцируемых функции, определяемых модулями непрерывности высших порядков // Укр. матем. журн. – 1991. – Т.43. – №1. – С.125–129.

[124] Юсупов Г.А. Точные неравенства типа Джексона-Стечкина и поперечники функциональных классов в l_2 // Известия тульского государственного университета. Естественные науки. – 2012. – №2. – С.124–135.

[125] Юдин В. А. Диофантовы приближения в экстремальных задачах // ДАН СССР. – 1980. – Т.1. – №251. – С.54–57.

[126] Yusupov G.A. Jackson's-Stechkin's Inequality and the values of Widths for some Classes of Functions from L_2 // Anal. Math. – 2014. – V.40:1. – PP.69–81.

Б) РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. В журналах, входящих в перечень ВАК при Президенте Республики Таджикистан и ВАК Российской Федерации

[1-А] Алаа С.К. Некоторые точные неравенства между наилучшими приближениями и неклассическим модулем непрерывности в L_2 [Текст] / С.К.Алаа // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. – 2020. – Т.63. – №3-4. – С.139–145.

[2-А] Алаа С.К. Некоторые неравенства типа Джексона-Стечкина, связанные с неклассическим модулем непрерывности высшего порядка в L_2 [Текст] / М.Ш.Шабозов, С.К.Алаа // Доклады Национальной академии наук Таджикистана. – 2021. – Т.64. – №1-2. – С.18–19.

[3-А] Алаа С.К. О точных верхних гранях среднеквадратичных приближений некоторых классов периодических дифференцируемых функций в пространстве L_2 [Текст] / М.Ш.Шабозов, С.К.Алаа // Доклады Национальной академии наук Таджикистана. – 2021. – Т.64. – №3-4. – С.142–149.

[4-А] Алаа С.К. О совместном приближении функций и ее производных в среднем на вещественной оси алгебраическими полиномами с весом Чебышева-

Эрмита [Текст] / М.Ш.Шабозов, С.К.Алаа // Доклады Национальной академии наук Таджикистана. – 2021. – Т.64. – №5-6. – С.249–261.

2. В других изданиях:

[5-А] Алаа С.К. Неравенства между наилучшим приближением и неклассическим модулем непрерывности в пространстве L_2 [Текст] / М. Ш. Шабозов, С.К. Алаа // Міжнародна наукова конференція „*Теорія наближень і її застосування*", присевячена 100-річчю з дня народження М.П.Корнейчука (Дніпро, Украіна, 16-19 вересня 2020 г.). – С.68–70.

[6-А] Алаа С.К. Некоторые точные неравенства между наилучшими приближениями и неклассическим модулем непрерывности в L_2 [Текст] / С.К. Алаа // Материалы республиканской научно-практической конференции „*Современные проблемы теории дифференциальных уравнений*", посвященной 80-летию профессора М.Исмати и 20-летию развития естественных, точных и математических наук. (Душанбе, 26 сентября 2020 г.). – С.248–252.

[7-А] Алаа С.К. О совместном приближении функций и ее производных в среднем на вещественной оси с весом Чебышева-Эрмита [Текст] / М. Ш. Шабозов, С.К. Алаа // Материалы республиканской научно-практической конференции „*Краевые задачи для некоторых классов дифференциальных уравнений*". (Душанбе, 4 декабря 2021 г.). – С.108–113.