Министерство образования и наука Республики Таджикистан
ГОУ "Худжанский государственный университет
имени академика Бободжана Гафурова"

УДК-517.968.2 На правах рукописи

Бобоев Элмурод Дустович

НЕКОТОРЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Диссертация
на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук
01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Научные руководители: доктор физико–математических наук, профессор Мухсинов Абдулкосим; доктор физико–математических наук, профессор Джангибеков Гулходжа

Худжанд – 2022

Содержание

Введение……..4

Общая характеристика работы……..6

Обзор результатов по теории граничных задач для дифференциальных уравнений с частными производными ……..10

Глава 1. Задачи Дирихле и Неймана для эллиптических систем второго порядка с разрывными коэффициентами..... 28

§ 1.1. Основные краевые задачи для общих эллиптических систем дифферен-циальных уравнений с разрывными коэффициентами на плоскости 28

1.1.1. История вопроса..... 28

1.1.2. Гомотопическая классификация 30

1.1.3. Основные результаты 34

§ 1.2. Основные краевые задачи для одной частной эллиптической системы дифференциальных уравнений с разрывным коэффициентом ….35

1.2.1. Первая основная задача..... 35

1.2.2. Приведение к сингулярным интегральным уравнениям 37

1.2.3. Основные результаты 39

§ 1.3. Задача линейного сопряжения решений обобщенной системы Коши – Римана с сингулярными коэффициентами……..40

1.3.1. Постановка задачи 41

1.3.2. Эквивалентность задачи (1.25),(1.26) некоторым двумерным сингулярным интегральным уравнениям..... 43

1.3.3. Исследование модельного интегрального уравнения……..48

1.3.4. Формулировка результатов для задачи сопряжение (1.25),(1.26)....54

2 Формула представления решений начально-краевой задачи для одного параболического уравнения с сингулярным коэффициентом 56

§2.4. Одномерный случай.....56

2.4.1. Случай 1. $(\boldsymbol{\lambda = -k^2 < 0})$..... 57

2.4.2. Случай 2. $(\boldsymbol{\lambda = 0})$. 58

2.4.3. Случай 3. $(\boldsymbol{\lambda = k^2 > 0})$..... 58

2.4.4. Основной результат 61

§ 2.5. Формула представления в многомерном случае.....62

2.5.1. Постановка задачи 62

2.5.2. Метод разделения переменных 63

2.5.3. Основной результат 70

Обсуждение полученных результатов 70

Заключение..... 84

Список литературы 85

Введение

Актуальность темы исследования. Вырождающиеся краевые задачи впервые были рассмотрены М. В. Келдышем в основополагающей работе [1] (см. также [2]). Им были рассмотрены уравнения эллиптического типа, вида

$$y^n \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x,y)u = 0$$

в области, лежащей в полуплоскости $y > 0$ и примыкающей к оси x. М.В. Кельдыш показал, как правильно ставить для этого уравнения первую краевую задачу, чтобы получить единственное ограниченное решение. Работа М. В. Келдыша стимулировала дальнейшие многочисленные исследования в указанном им направлении. В монографии А. В. Бицадзе [3],[4] была сформулирована проблема постановки общих весовых граничных условий для вырождающихся уравнений. Исследованию свойств решений многих уравнений и задач с различными вырождениями посвящено большое число важных работ А.М. Ильина [5], В.П. Глушко [6],[7], И.А. Киприянова [8] – [10], В.В. Катрахова [11], В.В. Крехивского [12], М.И. Матийчука [13]–[15] и др.

Значительный вклад в развитие теории эллиптических сингулярных дифференциальных уравнений внес академик Л.Г. Михайлов [16] – [19]. Им в 1959 г. было начато изучение сингулярного дифференциального уравнения

$$\Delta u + \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k(x)}{|x|} u'_{x_k} + \frac{c(x)}{|x|^2} u = 0.$$

Следуя классическому методу объемных потенциалов, он приходит к многомерным интегральным уравнениям с однородными ядрами. Л.Г.Михайлов показал, что при условиях малости коэффициентов эти интегральные уравнения однозначно разрешимы. Это в свою очередь позволяет получить утверждения о разрешимости основных граничных задач

Гилберта и задачи линейного сопряжения для обобщенных аналитических функций.

Степень разработанности темы исследования. Дальнейшее развитие теории сингулярных эллиптических уравнений нашли отражение в работах учеников Л.Г. Михайлова: А.И. Ачильдиева [20]–[22], Н.Р. Раджабова [23]–[27], З.Д. Усманова [28] – [32], М. Турсунова [33], А. Мухсинова [34] – [37], а также Г. Джангибекова [38]–[42] и его учеников Г. Худжаназаровой, М. Зарифбекова, Д.М. Одинабекова [42] – [47].

В случае систем уравнений с двумя независимыми переменными благодаря применению метода функции комплексного переменного, путем перехода к системам сингулярных интегральных уравнений по ограниченной области удается исследовать различные краевые задачи для общих эллиптических систем уравнений на плоскости И.Н. Векуа [56]–[58], Б.В. Боярскому [59] – [63], А.Д. Джураеву [76], В.Н. Монахову [77], Г. Джангибекову [38]–[42].

Данная диссертационная работа посвящена исследованию вопроса разрешимости основных краевых задач для эллиптических систем дифференциальных уравнений, а также получение представления решений некоторых параболических уравнений с сингулярными коэффициентами на плоскости.

Связь работы с научными программами (проектами), темами. Данное диссертационное исследование выполнено в рамках реализации перспективного плана научно-исследовательской работы кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений механико - математического факультета Таджикского национального университета на 2011-2015 гг. и 2016-2020 гг. по теме "Аналитическое исследование, качественный анализ и численное решение задач прикладной математики и механики" (Научный руководитель: д.ф.–м.н., академик Илолов М.).

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ИССЛЕДОВАНИЯ

Цель исследования. Целью диссертационной работы является исследование вопроса разрешимости основных краевых задач для эллиптических систем дифференциальных уравнений, а также получение представления решений некоторых параболических уравнений с сингулярными коэффициентами на плоскости.

Объекты исследования– эллиптические и параболические системы второго порядка с сингулярными коэффициентами.

Предмет исследования. Задача Дирихле, Неймана и задача Гильберта для рассматриваемых уравнений.

Методы исследования. Применяемые в диссертации методы основан на элементах функционального анализа и теории функций комплексных переменных, а также методе сингулярных интегральных уравнений.

Научная новизна исследования. Результаты, выносимые на защиту, являются новыми и заключаются в следующем:

- найдены эффективные необходимые и достаточные условия нетеровости и формулы для подсчета индекса задачи Дирихле и Неймана для эллиптических систем второго порядка с двумя неизвестными функциями от двух независимых переменных с разрывными коэффициентами на плоскости;
- доказана теорема разрешимости задачи линейного сопряжения для обобщённой системы Коши – Римана с сингулярными коэффициентами в весовом пространстве Лебега $L^p_{\beta-1-2/p}(D^+) \cap W^1(D^+)$, где $2 < p < \infty, 0 < \beta < 1$ и получена формула для подсчета индекса;
- дана формула представления решений начально – краевой задачи для одного параболического уравнения с сингулярными коэффициентами.
- дана формула представления решений начально – краевой задачи для многомерного параболического уравнения с сингулярными коэффициентами.

Теоретическая и практическая значимость работы. Результаты, полученные в диссертации, носят теоретический характер. Они могут послужить основой для дальнейших теоретических исследований в теории краевых задач для уравнений с частными производными. Практическая ценность работы определяется прикладной значимостью сингулярных дифференциальных уравнений в решении прикладных задач механики и других разделов физики.

Положения, выносимые на защиту:

1) Теоремы о необходимых и достаточных условий нётеровости и формулы для подсчета индекса задачи Дирихле и Неймана для систем дифференциальных уравнений второго порядка с двумя неизвестными функциями от двух независимых переменных с сингулярными коэффициентами;

2) Теоремы о необходимых и достаточных условий нётеровости и формулы для подсчета индекса задачи Дирихле и Неймана для систем дифференциальных уравнений второго порядка с двумя неизвестными функциями от двух независимых переменных с непрерывными коэффициентами;

3) Теорема о картине разрешимости задачи Дирихле для модельной системы дифференциальных уравнений второго порядка;

4) Теоремы о разрешимости задачи сопряжения для дифференциальных уравнений первого порядка с сингулярными коэффициентами;

5) Теорема о формуле представления решений начально-краевой задачи для одного параболического уравнения с сингулярным коэффициентом в одномерном случае.

6) Теорема о формуле представления решений в многомерном случае.

Степень достоверности результатов провед исследований. Достоверность результатов диссертационной работы обеспечивается строгими математическими доказательствами всех утверждений, привед в

диссертации и подтверждается исследованиями других авторов в данной области.

Соответствие диссертации паспорту научной специальности. Диссертационная работа выполнена по специальности 01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление и полностью соответствует её формуле (дифференциальные уравнения с частными производными) и двум пунктам области исследования (12. Начально-краевые и спектральные задачи для дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений; 13. Дифференциальные уравнения и системы дифференциальных уравнений в задачах оптимального управления и вариационного исчисления). Диссертацию можно считать разделом математической физики (смежная специальность 01.01.03 – Математическая физика).

Личный вклад соискателя уч степени. Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Все представленные в диссертации результаты получены лично автором. Работы [3], [5] опубликованы в соавторстве с научным руководителем Г. Джангибековым, а работы [1], [2] опубликованы в соавторстве с научным руководителем А. Мухсиновым, которым принадлежат постановка задач и общее руководство, а диссертанту– доказательство основных результатов.

Апробации результатов диссертации. Основные результаты работы докладывались автором и обсуждались на семинарах кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений Таджикского национального университета. Результаты диссертации были представлены в ходе выступлений на следующих конференциях:

- международной научной конференции ”Сингулярные интегральные уравнения и дифференциальные уравнения с сингулярными коэффициентами”, посвященной 70 – летию доктора физико-математических

наук, профессора Г.Джангибекова (Душанбе, 30 – 31 января 2020 г.)

- международной научной конференции "Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений", посвященной 70 – летию академика НАНТ, доктора физико-математических наук, профессора К.Х.Бойматова (Душанбе, 25 – 26 декабря 2020 г.);
- Республиканской научно-практической конференции "Развитие естественных, точных и математическых наук: способы применения их результатов в производстве" (Худжанд, 26 февраля 2021 г.);
- "Устойчивые шаги развития национальной промышленности", посвященной 15-летию Горно-металлургического института Таджикистана. (Бустон, 24 апреля 2021 г.);
- Республиканской научно-практической конференции "Современные проблемы прикладной математики и их роль в формировании технического мировоззрения общества" (ГОУ Худжандский государственный университет им. ак. Б. Гафурова, Худжанд, 29 – 30 ноября 2021 г.);

Публикации по теме диссертации. Основные результаты диссертации опубликованы в 10 работах. Из них 5 статей опубликованы в изданиях, входящих в действующий Перечень ВАК при Президенте РТ, а 2 статьи–в материалах международных конференций.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения и двух глав, разбитых на пять параграфов, и составляет 99 страницы машинописного текста. Список цитированной литературы состоит из 125 наименований. Работа набрана на LaTeX и в ней для удобства применена сквозная нумерация теорем, лемм и формул. Они имеют двойную нумерацию, в которой первая цифра совпадает с номером главы, вторая указывает на порядковый номер теорем, лемм или формул в данном параграфе.

ОБЗОР РЕЗУЛЬТАТОВ ПО ТЕОРИИ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

1. Обзор результатов по теории задач Дирихле и Неймана для эллиптических систем уравнений второго порядка

Классический метод потенциалов объемного, простого и двойного слоя и методы теории функций комплексного переменного, где аналогичную потенциалам роль играет интеграл типа Коши, позволяют сводить краевые задачи математической физики к интегральным уравнениям (см. например: И.Г. Петровский [48], В.С. Владимиров [49], С.Г. Михлин [50], М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат [51], Ю.В. Сидоров, М.В. Федорюк, М.И. Шабунин [52]). Краевая задача, состоящая из двух частей, уравнения и краевого условия, сводится к одному интегральному уравнению, которое чаще всего, полностью эквивалентно исходной задаче.

В связи с расширением круга уравнений и краевых условий получаются новые типы интегральных уравнений. Так, после уравнений для задач Дирихле, Неймана и других, появились сингулярные интегральные уравнения, хорошо описывающие различные задачи плоской теории упругости и гидродинамики.

Широкий класс стационарных физических задач сводится к отысканию гармонических функций, удовлетворяющих некоторым граничным условиям [48]– [63]. Самое простое и важное из эллиптических уравнений – уравнение Лапласа – имеет вид

$$\Delta u = 0, \tag{1}$$

где $u(x, y)$, – действительная функция, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа. Пусть на границе Γ ограниченной области D задана непрерывная функция $u_0(x, y)$. Классическая задача Дирихле для уравнения Лапласа состоит в

следующем:

найти функцию $u(x,y)$, *гармоническую в области* D, *непрерывную вплоть до границы* Γ *и принимающую на* Γ *значения* $u_0(x,y)$:

$$u|_{(x,y)\in\Gamma} = u_0(x,y). \tag{2}$$

Решение классической задачи Дирихле (1), (2) существует и единственно. Доказательство существования решения содержится в [48]– [53]. Единственность решения вытекает из принципа максимума и минимума для гармонических функций.

В приложениях условие непрерывности граничных значений $u_0(x,y)$ является слишком стеснительным и приходится рассматривать обобщенную задачу Дирихле:

на границе Γ *области* D *задана функция* $u_0(x,y)$, *непрерывная всюду, кроме конечного числа точек* (x_k, y_k) $k = 1,2,\dots n$, *где она имеет конечное число точек разрыва первого рода. Необходима найти гармоническую и ограниченную в области* D *функцию* $u(x,y)$, *принимающую значения* $u_0(x,y$ *во всех точках непрерывности этой функции.*

Решение обобщёной задачи Дирихле существует и единственно [48]–[52].

В конечной односвязной двумерной области D с границей Г рассмотрим общую систему действительных уравнений второго порядка:

$$\sum_{j=0}^{2} a_j(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^j \partial y^{2-j}} + b_1(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} +$$

$$+b_2(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + b_0(x,y)u = g(x,y), \tag{3}$$

где $a_j(x,y), b_j(x,y)$ $(j = 0,1,2)$ – квадратные матрицы размера $2\times 2, u = (u_1, u_2)$ – неизвестная вектор-функция переменных x и y; $g = (g_1, g_2)$ –

заданная вектор-функция.

Оператор из левой части (3) называется эллиптическим в $\overline{D}$, если в любой точке $(x, y) \in \overline{D}$ выполняется условие:

$$det \sum_{j=0}^{2} a_j(x, y)\xi^j \neq 0 \tag{4}$$

для любого действительного параметра.

Для уравнений (3) задача Дирихле ставится следующим образом: в области D с границей Γ требуется найти регулярное решение уравнения (3) принадлежащее классу C_D) и удовлетворяющее граничному условию:

$$u|_{\Gamma} = q(x, y), \tag{5}$$

где $g(x, y)$ – заданный на Γ вектор класса $C'_{\alpha}(\Gamma)$.

Из работы Вишика М.И.[53] следует, что, если система (3) сильно эллиптическая, то задача Дирихле для сопряженной системы образует фредгольмову пару граничных задач. Для общих эллиптических систем это утверждение, вообще говоря, не имеет места. Как показывают примеры Бицадзе А.В.[3],[4], однородная задача (3),(5) для эллиптических системя:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = 0,$$

$$2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = 0$$

может допускать бесконечное число линейно - независимых решений.

Для достаточно широкого класса эллиптических систем задача (3),(5) и более общие граничные задачи изучены в работах Векуа И.Н. [56]–[58] Вишика М.И.[53], Бицадзе А.В. [54], [55] Боярского Б. [59]–[63]. Задачи, рассмотренные в этих работах, приведены к эквивалентному интегральному

уравнению нормального типа, доказана нетеровость этих задач и подсчитан индекс. В работе Лопатинского Я. Б. [73] получено условие на коэффициенты системы (3), которое является достаточным условием нетеровости задачи (3),(5). Эллиптические системы, удовлетворяющие этому условию, образуют более широкий класс, чем системы, рассмотренные в работах [48]–[51]. Для односвязной области задача (3),(5) рассмотрена в работе [73]. В этой работе задача (3),(5) не приведена к эквивалентному интегральному уравнению, однако при выполнении указанного условия доказана нетеровость этой задачи и получена формула для индекса.

Исследованию задачи (3),(5) также посвящены работы Шапиро З.Я. [66], [67], Товмасяна [68],69, Золотар Е.В. [70], Вольперта А.И. [71],[72], Боярского Б. [58]–[61], Джураева А. [76], Монахова В.Н.[77], Джангибекова Г. [38]–[42].

Тесная связь между теорией эллиптических дифференциальных уравнений и теорией функций комплексного переменного стала очевидно на примере уравнения Лапласа. Это – классическое направление в теории функций, восходящий к работам Эйлера и особенно Римана. Однако в последнее время усиливается внимание к связям теории функций и более общим уравнениям с частными производными, вида (3).

В работах [56]–[58] И. Н. Векуа был предложен новый метод исследования систем уравнений в частных производных эллиптического типа, основанный на использовании свойств одного двойного сингулярного интеграла. В работах Б.Боярского [59]–[63] разрабатывался указанный метод применительно к уравнениям общего вида (3). В основе всех рассуждений автора лежит одно неравенство из работ Кальдерона А.Р. и Зигмунда А. [64],[65]. Это неравенство позволяет, в отличие от того как это обычно делается, проводить многие рассуждения в пространстве $Lp(D)\ p > 2$, что коренным образом упрощает доказательства и приводит к более точным результатам.

Общие краевые задачи для уравнений и систем с двумя независимыми переменными исследовались многими математиками. Наиболее полные результаты в этой области были получены И. Н. Векуа [56]–[58]. Для достаточно широкого класса эллиптических систем задача (1)–(2) и более общие граничные задачи, изучены в работах Шапиро З.Я. [66],[67], Товмасяна Н.Е. [68],[69], Золотар Е.В.[70], Вольперта А.И. [71],[72]. Задачи, рассмотренные в этих работах, приведены к эквивалентному интегральному уравнению нормального типа, доказана нетеровость этих задач и подсчитан индекс. В работе Я. Б. Лопатинского [73], получено условие на коэффициенты системы (3), которая является достаточным условием нетеровости задачи (3)–(5).

Вводя комплексную функцию $\omega(z) = u_1(x,y) + iu_2(x,y), z = x + iy$, умножая одно из уравнений (3) на мнимую единицу i и складывая с другим, запишем систему (3) в виде

$$\begin{aligned} & a(z)\omega_{z\overline{z}} + b(z)\overline{\omega}_{\overline{z}z} + c(z)\omega_{zz} + d(z)\overline{\omega}_{\overline{z}\overline{z}} + \\ + \quad & e(z)\omega_{\overline{z}\overline{z}} + h(z)\overline{\omega}_{zz} + a_1(z)\omega_{\overline{z}} + b_1(z)\overline{\omega}_{\overline{z}} + \\ + \quad & c_1(z)\omega_z + d_1(z)\overline{\omega}_{\overline{z}} + e_1(z)\omega + h_1\overline{\omega} = g(z), \end{aligned} \tag{6}$$

где $g(z) = g_1(z) + ig_2(z)$,

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right), \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Будем считать, что коэффициенты уравнения (6) являются непрерывными функциями в $\overline{D}$, а $g(z \in L^p(D), 2 < p < \infty)$. Уравнение (6) является комплексной записью системы двух уравнений эллиптического типа (3).

По главной части системы (6), Боярский Б. [59],[60] построил матричный полином

$$F_z(t) = \begin{pmatrix} a(z) + c(z)\overline{t} + e(z)t & b(z) + d(z)t + h(z)\overline{t} \\ \overline{b(z)} + \overline{d(z)}\overline{t} + \overline{h(z)}t & \overline{a(z)} + \overline{c(z)}t + \overline{e(z)}\overline{t} \end{pmatrix},$$

где $|t| = 1, z \in \overline{D}$. Эллиптичность системы (6) означает, что для всех $\varphi: 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ выполнено неравенство

$$detF_z(e^{2i\varphi}) \neq 0.$$

Без ограничения общности предполагается, что $D = \{z: |z| \leq 1$ и

$$detF_z(t) = |\alpha_z(t)|^2 - |\beta_z(t)|^2 > 0,$$

где $\alpha_z(t)$ – есть комплексный невырождающийся полином степени 2. Поскольку корни полинома $\alpha_z(t) = 0$ не лежат на окружности $|t| = 1$, то в зависимости от расположения корней уравнения

$$\alpha_z(t) = 0$$

полином $F_z(t)$ разбивается на три гомотопических класса ε_j $(j = 1,2,3)$ – три компонента связности. Система уравнений $\Delta u_i = 0, i = 1,2$, например, будет принадлежать классу ε_2.

Б.Боярский в работах [60],[61] при исследовании основных краевых задач Дирихле $\omega|_\Gamma = 0$ и задачи Неймана $\frac{\partial\omega}{\partial n}|_\Gamma = 0$ для системы (6) в гомотопическом классе ε_2 и принадлежашее пространству $W_p^2(D), p > 2$, искомое решение $\omega(z)$ представляет в виде:

$$\omega(z) = \iint_D G(z,\zeta)f(\zeta)ds_\zeta, G(z,\zeta) = \frac{2}{\pi}\ln\left|\frac{\zeta - z}{1 - z\overline{\zeta}}\right|,$$

где $G(z,\zeta)$ – функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа в единичном круге. Тогда эти задачи эквивалентным образом сводятся к решению двумерных сингулярных интегральных уравнений:

$$f(z)+\alpha(z)(S_1f)(z)+\beta(z)(S_2f)(z)+$$
$$+\gamma(z)(\overline{S_1f})(z)+\delta(z)(\overline{S_2f})(z)+T=q(z), \qquad (7)$$

причем, коэффициенты удовлетворяют условию равномерной эллиптичности:

$$|\alpha(z)|+|\beta(z)|+|\gamma(z)|+|\delta(z)|\le q_0<1, \qquad (8)$$

а сингулярные интегралы S_1 и S_2 определяются по формулам:

$$(S_1f)(z)=-\frac{1}{\pi}\iint_D\left(\frac{1}{(\zeta-z)^2}-\frac{\overline{\zeta}^2}{(1-z\overline{\zeta})^2}\right)f(\zeta)ds_\zeta,$$

$$(S_2f)(z)=-\frac{1}{\pi}\iint_D\left(\frac{1}{(\overline{\zeta}-\overline{z})^2}-\frac{\zeta^2}{(1-\overline{z}\zeta)^2}\right)f(\zeta)ds_\zeta,$$

T – вполне непрерывный оператор. Сингулярные операторы существуют почти всюду для всякой функции $f(z)\in L_p(D)$ $p>2$, причем $||S_1||_{L_2(D)}=1$, а $||S_1||_{L_p(D)}\to 1$ при $p\to 2$.

Таким образом, в силу условия (8) к интегральному уравнению (7), применим принцип сжатых отображений и для задачи Дирихле для уравнения (3) имеет место

Теорема (Боярского Б.). *Задача Дирихле для любой системы (3) из гомотопического класса ε_2 Фредгольмова, т.е. однородная задача допускает конечное число l линейно-независимых решений а неоднородная задача разрешима при выполнении l условий разрешимости.*

Такая же теорема имеет место для задачи Неймана для системы (3).

Отметим, что задача Дирихле и Неймана для двух других гомотопических классов ε_1 и ε_3, в работах Б. Боярского не рассмотрены.

В монографии А. Джураева [76] такие же результаты получены для задачи Дирихле и Неймана для гомотопического класса ε_2 системы (3) в случае,

когда область D многосвязна.

В монографии В.И.Монахова [77] изучаются некоторые нелинейные задачи для систем уравнений в частных производных эллиптического типа со свободными границами.

В работе Г. Джангибекова [38]–[40] в пространствах $W_p^2(D), 2 < p < \infty$ рассматриваются все три гомотопические классы ε_j $(j = 1,2,3)$ задачи Дирихле и Неймана, которые, соответственно, описываются тремя неравенствами над коэффициентами системы (6). В соответствии с этим основные краевые задачи, т.е задачи Дирихле и Неймана для системы (6) приводятся к трем разным двумерным сингулярным интегральным уравнениям по ограниченной области D, для которых получены эффективные необходимые и достаточные условия нетеровости и формулы для подсчета индекса:

Теорема (Джангибекова Г.). *Для того,чтобы задача Дирихле* $u|_\Gamma = 0$ *для эллиптической системы (3) в классе* $W_p^2(D), 2 < p < \infty$ *была нетеровой, необходимо и достаточно выполнение одного из следующих (исключающих друг друга) условий*

$$|\Delta_1(z)| > M(z) + \sqrt{M^2(z) + |\mu_1(z)|^2 - |\lambda_1(z)|^2 - |\mu_3(z)|^2 - |\lambda_3(z)|^2}, \quad \text{для } \forall z \in \overline{D}, \tag{9}$$

$$|\Delta_2(z)| > M(z) + \sqrt{M^2(z) + |\mu_1(z)|^2 - |\lambda_1(z)|^2 - |\mu_2(z)|^2 + |\lambda_2(z)|^2}, \quad \mu_1(t) \neq 0 \text{ для } \forall z \in \overline{D}, \forall t \in \Gamma, \tag{10}$$

$$|\Delta_3(z)| > M(z) + \sqrt{M^2(z) + |\mu_3(z)|^2 - |\lambda_3(z)|^2 - |\mu_2(z)|^2 + |\lambda_2(z)|^2}, \quad \mu_3(t) \neq 0 \text{ для } \forall z \in \overline{D}, \forall t \in \Gamma. \tag{11}$$

При этом, если выполнено (9),то задача фредгольмова (т.е. её индекс равен нулю); если выполнено (10), то индекс задачи равен

$$\varkappa = 2Ind_{\Gamma}\omega_1(t);$$

если выполнено (11), то индекс задачи равен:

$$\varkappa = 2Ind_{\Gamma}\omega_3(t),$$

где

$$\Delta_1(z) = |a(z)|^2 - |b(z)|^2,\ \lambda_1(z) = \overline{a(z)}c(z) - b(z)\overline{d(z)},$$

$$\lambda_2(z) = \overline{h(z)}c(z) - e(z)\overline{d(z)}, \Delta_2(z) = |c(z)|^2 - |d(z)|^2,$$

$$\mu_1(z) = a(z)\overline{d(z)} - \overline{b(z)}c(z),\ \mu_2(z) = h(z)\overline{d(z)} - \overline{e(z)}c(z),$$

$$\Delta_3(z) = |e(z)|^2 - |h(z)|^2,\ \lambda_3(z) = \overline{a(z)}e(z) - b(z)\overline{h(z)},$$

$$\mu_3(z) = a(z)\overline{h(z)} - \overline{b(z)}e(z),$$

$$M(z) = max_{|t|=1}Re\{\mu_2(z)t^2 - (\lambda_2(z) + \overline{\lambda_3(z)})t\}.$$

Аналогичный результат имеет место для задачи Неймана для системы (3).

Следствие. Из результатов теорем следует, что краевые задачи Дирихле и Неймана для известного уравнения А.В. Бицадзе (см.напр. [55], гл. 2, § 1)

$$\omega_{\overline{z}\overline{z}} = g(z)$$

не нётеровы по той причине, что в этой системе (6) функции $a(z), b(z), c(z), d(z), h(z)$ тождественно равны нулю в замкнутой области $\overline{D}$, вследствии чего, граничное условие нётеровости (11):

$$\mu_3(t) = a(t)\overline{h(t)} - \overline{b(t)}e(t) \neq 0$$

для всех $t \in \Gamma$ нарушается.

В работе Джангибекова Г., Зарифбекова М. [74], в единичном круге $D = \{z: |z| < 1\}$ рассматривается следующая эллиптическая система с сингулярными коэффициентами

$$a(z)\frac{\partial^2\omega}{\partial z\partial\overline{z}} + b(z)e^{2i\varphi}\frac{\partial^2\overline{\omega}}{\partial z^2} + \frac{a_1(z)}{z}\frac{\partial\omega}{\partial\overline{z}} + \frac{b_1(z)}{\overline{z}}\frac{\partial\overline{\omega}}{\partial z} + c_1(z)\frac{\partial\omega}{\partial z} + \\ + d_1(z)\frac{\partial\overline{\omega}}{\partial\overline{z}} + e_1(z)\omega + h_1(z)\overline{\omega} = g(z), \quad (12)$$

где $z = x + iy, \omega = u(x,y) + iv(x,y)$, формальные производные по z и по $\overline{z} = x - iy$ определяются по формулам:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \frac{\partial}{\partial\overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

$\varphi = \arg z$, коэффициенты $a(z), b(z)$ и т.д. считаются непрерывными функциями в $\overline{D}$, а $g(z) \in L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$ $(2 < p < \infty, 0 < \beta < 1)$:

$$L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D) = \{f(z): f(z) =$$

$$= |z|^{\beta-\frac{2}{p}}F(z) \in L^p(D), ||f||_{L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)} = ||F||_{L_p(D)}\}.$$

Как видно из (12), коэффициент при производной $\frac{\partial^2\overline{\omega}}{\partial z^2}$ в точке $z = 0$ по всем лучам, выходящим из начала координат, имеет разные пределы, а коэффициенты при первых производных $\frac{\partial\omega}{\partial\overline{z}}, \frac{\partial\overline{\omega}}{\partial z}$, имеют сингулярную особенность первого порядка.

Задача Дирихле. Найти непрерывные решения $\omega(z)$ системы (12) в области D из класса $L^p_{\beta-1-\frac{2}{p}}(D) \cap W^2(D\backslash 0), (2 < p < \infty, 0 < \beta < 1)$, удовлетворяющие на границе Γ условию

$$\omega(t)|_{\Gamma} = 0. \qquad (13)$$

Это означает, что функция $\omega(z)$ имеет в $D\backslash 0$ обобщенные производные $\frac{\partial^k \omega}{\partial z^{k-l}\partial \bar{z}^l}$ $(k = 1,2;\ l = 0,1,2)$ и $|z|^{\beta-1-\frac{2}{p}}\omega(z) \in L^p(D)$ при $2 < p < \infty,\ 0 < \beta < 1$.

Теорема. *Для того чтобы задача (12), (13) была нетеровой в классе* $L^p_{\beta-1-\frac{2}{p}}(D) \cap W^2(D\backslash 0), (2 < p < \infty, 0 < \beta < 1)$, *необходимо и достаточно выполнение условий:*

a) $|a(z)| \neq |b(z)|$ при $z \in \overline{D}, a(t) \neq 0$ при $t \in \Gamma$,

b) $\mathcal{G}_k(x;\beta) \neq 0, -\infty < x < \infty, k = 0,1,\cdots,N_0$,

причем индекс задачи (12), (13) равен:

$$\varkappa = -\{2Ind_{\Gamma}a(t) + 2\sum_{k=1}^{N_0} \underset{-\infty<x<\infty}{Ind}\mathcal{G}_k(x;\beta) + \underset{-\infty<x<\infty}{Ind}\mathcal{G}_0(x;\beta)\},$$

где здесь

$$\mathcal{G}_k(x;\beta) = \\ = 1 - 4\frac{|\nu|^2 - |\lambda-\mu|^2 + (\beta - ix)(|\lambda|^2 - Re(\bar{\lambda}\mu - \nu)) - ikIm(\bar{\lambda}\mu - \nu)}{(1-|\lambda|^2)(k^2 - (\beta - ix)^2)}.$$

2. Обзор результатов по теории задач линейного сопряжения решений обобщенной системы Коши – Римана с

сингулярными коэффициентами

В этом пункте речь идет о нахождении функции $\varphi^+(z)$ и $\varphi^-(z)$ в областях G^+ и G^-, непрерывных вплоть до контура Г, где они сопряжены условием

$$\varphi^{+}(t) = a(t)\varphi^{-}(t) + b(t)\overline{\varphi^{-}(t)} + g(t), \varphi(\infty) = 0, t \in \Gamma. \quad (14)$$

Здесь через G^{+} обозначена ограниченная область комплексной плоскости z, Γ – её граница, а G^{-} - дополнение $G^{+} \cup \Gamma$ до полной плоскости. При $b(t) \equiv 0$ получаем известную задачу Римана, в общем виде изученную Ф.Д.Гаховым [78], её разрешимость определяется индексом

$$\varkappa = Ind_{\Gamma} a(t) = \frac{1}{2\pi}[\arg a(t)]|_{\Gamma};$$

если $\varkappa \geq 0$, то задача безусловно разрешима и однородная имеет $\varkappa$ линейно-независимых решений над полем вещественных чисел; если же $\varkappa < 0$, то однородная имеет только нулевое решение, а для разрешимости неоднородной необходимо и достаточно выполнение $|\varkappa|$ комплексных или $2|\varkappa|$ вещественных условиий ортогональности на $g(t)$.

Фундаментальное значение задачи (14) состоит в том, что не задача Римана $(b(t) \equiv 0)$, а именно (14) является общим линейным условием сопряжения. После постановки её А.И.Маркушевичем в 1946 г.[90] и установления теорем Нетера И.Н.Векуа в 1952 г.[91] первые точные результаты при $|a(t)| > |b(t)|$ были найдены Б.Боярским [61], но из-за неестественности метода, ему пришлось наложить излишне жесткие ограничения на коэффициенты.

Первые исследования краевой задачи (1.23) для обобщенной системы Коши-Римана в регулярном случае принадлежат Л.Г.Михайлову [16] – [18]. Он, использовав взаимно однозначное соответствие между решением обобщенной системы Коши-Римана и аналитическими функциями, свел рассматриваемую задачу к аналогичной задаче в классе аналитических функций, а также, используя другой подход, получил точные результаты для нескольких различных случаев. Б.М.Боярский [58] – [62] использовав представления решений задачи через интеграл типа Коши с вещественной

плотностью, получил первые точные результаты при $|a(t)| > |b(t)|$. При этом, им были наложены более жесткие ограничения на коэффициент $a(t)$.

Теорема (Михайлова Л.Г.) *Пусть в (14)* $a(t)$ *непрерывна,* $a(t) \neq 0, \varkappa = ind_{\Gamma} a(t), b(t)$ *ограничена и измерима и* $g(t) \in L_p(\Gamma), p > 1$. *Рассматриваются решения, представимые интегралом Коши и* $\varphi^+(t) \in L_p(\Gamma)$. *Пусть:*

$$Sup_{t\in\Gamma}\left|\frac{b(t)}{a(t)}\right| < \frac{2}{1+S_p},$$

где S_p – норма в L_p сингулярного оператора:

$$(S\mu)(t) = \frac{1}{\pi}\int_{\Gamma}\frac{\mu(\tau)}{\tau - t}d\tau.$$

Тогда при $\varkappa > 0$ однородная задача имеет $2\varkappa$ линейно независимых решения, а неоднородная – безусловно разрешима. При $\varkappa = 0$, задача имеет и притом, единственное решение, нулевое для однородной. При $\varkappa < 0$, однородная задача не имеет решений, отличных от нулевого, а для разрешимости неоднородной, необходимо и достаточно $2|\varkappa|$ вещественных или $|\varkappa|$ комплексных условий на $g(t)$.

Задача (14) для решений обобщенной системы Коши-Римана с сингулярными коэффициентами, то есть для уравнения:

$$\varphi_{\overline{z}} + \frac{c(z)}{|z|}\varphi + \frac{d(z)}{|z|}\overline{\varphi} = 0, \qquad (15)$$

изучена Л.Г.Михайловым [16]–[18] при помощи формулы, устанавливающей соответствие между решением (15) и множеством аналитических функций при определенных условиях малости коэффициентов $c(z)$ и $d(z)$ в особой точке, причем оказалось, что тогда для задачи сопряжения сохраняются все теоремы регулярного случая. Впоследствии эти

исследования были продолжены при иных условиях малости З.Д. Усмановым (см.[28] – [32]) и библиографию к ней.

В работах Г.Джангибекова [75],[40] рассматривается задача линейного сопряжения:

$$\varphi^{+}(t) = \alpha_0(t)\varphi^{-}(t) + \beta_0(t)\overline{\varphi^{-}(t)}, t \in \Gamma, \tag{16}$$

решений эллиптических систем дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} &\varphi_{\overline{z}} - q(z)\varphi_z + \frac{\gamma_1(z)}{\overline{z}}\varphi + \frac{\gamma_2(z)}{\overline{z}}\overline{\varphi} = g(z), z \in D^{+}, \varphi \in \mathfrak{M}\mathfrak{D}^{+}, \\ &\varphi_{\overline{z}} = 0, z \in D^{-}, |\varphi(z)| \leq C|z|^{n-1-\varkappa} \text{ при } |z| \to \infty. \end{aligned} \tag{17}$$

с коэффициентами, имеющими особенность первого порядка, где $\gamma_j(z)$ – измеримые ограниченные в $\overline{D}^{+}$ функции, имеющие пределы $\lim_{z\to 0}\gamma_j(z) = \gamma_j(0, j = 1,2, q(z))$ непрерывна в $\overline{D}^{+}$, причем $|q(z)| < 1, z \in \overline{D}^{+}$, $q(0) = 0, g(z) \in L^{p}_{\beta-n+1-2/p}(D^{+})$, функции $\alpha_0(t)$ и $\beta_0(t)$ на Γ удовлетворяют условию

$$|\alpha_0(t)| \neq |\beta_0(t)|, \tag{18}$$

а $\alpha_0(t)\cdot t^{-\varkappa}, \beta_0(t)\cdot t^{-\varkappa}$ принадлежат классу $SW^{1}_{p}(\Gamma), p > 2$ (см.[77]) с сохранением условия (3), т.е. их соответствующие продолжения $\alpha(z), \beta(z)$ внутри области D^{+} принадлежат $W^{1}_{p}(D^{+}), p > 2$, и удовлетворяют неравенству $|a(z)| \neq |\beta(z)|, z \in \overline{D}^{+}$, где

$$\varkappa = \begin{cases} Ind_{\Gamma}\alpha_0(t), \text{если } |\mathrm{a(t)}| > |\beta(\mathrm{t})|; \\ -Ind_{\Gamma}\beta_0(t), \text{если } |\mathrm{a(t)}| < |\beta(\mathrm{t})|. \end{cases}$$

Поставленная задача эквивалентным образом редуцируется к двумерным сингулярным интегральным уравнениям с разрывными коэффициентами по ограниченной области D, причем эти уравнения содержат также интегральные операторы с фиксированными особенностями в ядре.

3. Обзор результатов по представлению решений начально-краевых задач для параболических уравнений с сингулярными коэффициентами

Разработки по проблеме дифференциальных уравнений с сингулярными коэффициентами были начаты еще в 1957 – 1963 годах академиком Л.Г. Михайловым в Академии наук Таджикской ССР [16]. Им было начато изучение уравнения:

$$\Delta u + \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k(x)}{|x|} u'_{x_k} + \frac{c(x)}{|x|^2} u = 0. \qquad (19)$$

Следуя классическому методу объемных потенциалов, Л.Г.Михайлов приходит к интегральному уравнению $\varphi = K\varphi + f$, где оператор K не является вполне непрерывным оператором. Такие операторы образуют новый класс особых (нефредгольмовых) интегральных уравнений, специально изучавшихся Л.Г. Михайловым [16] . Он показал, что, если величины $\sup_D |b_k(x)|, \sup_D |c(x)(x)|$, либо $b_k(0), c(0)$, в случае непрерывности $b_k(x), c(x)$ вместе с числом β, подчинены некоторым условиям малости, то в сингулярных классах C_β, M_β имеют место утверждения о существовании многообразия решений и разрешимости краевых задач. Актуальной оставалась задача изучения уравнений без условий малости и в обычных классах.

Краевые задачи для уравнения (19) при $c(x) \leq 0$ были исследованы в работах А. И. Ачильдиева (см., напр. [18] – [20]). В его работах рассмотрены свойства регулярных решений вырождающихся уравнений, связанных с принципом максимума и доказаны теоремы существования смешанной задачи.

В работах З.Д. Усманова (см., напр. [28]–[32]) по теории обобщенной системы Коши-Римана с сингулярной точкой, был разработан метод интегральных уравнений с вполне непрерывным оператором, посредством

которого, при условиях малости величины или же области, устанавливалось взаимно однозначное соответствие между непрерывными решениями обобщенной системы Коши-Римана с сингулярной точкой и вспомогательной модельной системой. В таких ограничениях построена теория решений обобщенной системы Коши–Римана с сингулярной точкой. Таким же методом [30] рассматривается специальный случай обобщенной системы Коши-Римана с точечной особенностью выше первого порядка в коэффициенте.

В работе М. Турсунова [33] в классе функций, удовлетворяюших в нуле условиям типа излучения, рассматривались краевые задачи Дирихле и Неймана для уравнения (19) в случае, когда $n = 0, b_k(x) \equiv 0, c(0) = 0$ и особенность коэффициента выше первого порядка.

В работах А. Мухсинова [34]–[37] рассматриваются следующие уравнения:

$$-r^2 \triangle U(x) + q^2 U(x) = f(x) \tag{20}$$

$$-z^2 \triangle U(x) + q^2 U(x) = f(x, z) \tag{21}$$

где $\triangle$ - мерный оператор Лапласа. Уравнение (1) называется уравнением с сингулярной точкой, уравнение (2) – с сингулярной линией, уравнение (3) с сингулярной плоскостью, а уравнение (4) с сингулярным основанием и осью цилиндра.

Поскольку после работы М. В. Келдыша 1951 г. [1],[2] и монографий М. М. Смирнова [97]–[99] , А. В. Бицадзе [3],[4] получили известность различные вырождающиеся дифференциальные уравнения в частных производных эллиптического типа, то необходимо сказать следующее: хотя уравнения (20), (21) тоже относятся к вырождающимся уравнениям эллиптического типа, но они существенно отличаются от указанных только что; в уравнениях (20), (21) происходит вырождение порядка уравнения (а не типа), и притом во внутренней точке области, а не на границе. Поэтому естественно, Л. Г.

Михайлов назвал их уравнениями с сингулярными коэффициентами. Интересные результаты в теории вырождающихся эллиптических систем и уравнений с сингулярными линиями получены в работах Н. Р. Раджабова (см., напр. [23]–[27]), А. И. Янушаускаса [100] и др. В работах Н.Р. Раджабова да интегральное представление многообразия решений ряда уравнений в частных производных высшего порядка с сингулярными поверхностями, через решение дифференциальных уравнений высшего порядка с регулярными коэффициентами. Эти представления используются при решении основных краевых задач и задач типа Рикье. Данный метод применяется для решения осесимметрической задачи гидродинамики.

Проблемы суммируемости и сходимости разложений по собственным функциям дифференциальных операторов давно привлекают внимание математиков и физиков, этим проблемам посвящено достаточно много работ (см., напр. Березанкого Ю.М. [101], Никольского С.М. [102]). Их бурное развитие связано с работами О.А.Ладыженской [103]–[107], Олейник [08] Б.М.Левитана [109], Миранда К. [110], Соболева С.Л. [111], Тихонова А.Н. [112], Ильина А.М. [5], [113], Ильина В.А., [114]–[116], Ю.М.Березанского [101], И.К.Кенджаева [117], М. Исматова [118], [119] и других.

Установлению абсолютной сходимости посвящены, связанные с обоснованием метода Фурье, работы О.А. Ладыженской, которые явились первыми в этом направлении. В этих работах абсолютная и равномерная сходимость рядов Фурье устанавливается в классах С.Л. Соболева. Среди вышеупомянутых авторов, самые точные и окончательные условия равномерной сходимости рядов Фурье установлены В. А. Ильиным и его учеником И. К. Кенджаевым [106]. Проблемам абсолютной и равномерной сходимости разложений по собственным функциям различных самосопряженных и несамосопряженных смешанных задач математической физики, обоснованию метода Фурье и корректной разрешимости таких задач, посвящены работы М. Исматова [107],[108]. Хотя проблемам суммируемости

и сходимости разложений по собственным функциям дифференциальных операторов посвящено достаточно много работ, однако исследованию этих проблем для вырождающихся (сингулярных) дифференциальных операторов, посвящено сравнительно мало работ и эти проблемы далеки от своего разрешения. Сюда могут быть отнесены, рассматриваемые в работах Мухсинова [34]–[37] задачи: построение многообразия решений, о разрешимости краевых задач для некоторых многомерных вырождающихся (сингулярных) уравнений в частных производных эллиптического типа.

ГЛАВА 1. ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ И НЕЙМАНА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

§ 1.1. Основные краевые задачи для общих эллиптических систем дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами на плоскости

1.1.1. История вопроса

В этой главе исследуются основные краевые задачи для некоторых эллиптических систем двух уравнений с двумя независимыми переменными в ограниченной односвязной области, D – комплексной плоскости z, ограниченная простой замкнутой кривой Ляпунова Γ; $\overline{D} = D \cup \Gamma$ и содержащая внутри точку $z = 0$. Ранее в работе [59] для сильно эллиптических систем дифференциальных уравнений второго порядка задача Дирихле методом интегральных уравнений была изучена Б.В.Боярским. Этим же методом, была изучена сильно эллиптическая система высокого порядка в монографии А.Джураева [76]. В работах [38], [39] Джангибекова Г. были изучены задачи Дирихле и Неймана для общих эллиптических систем уравнений второго порядка с двумя функциями от двух переменных с непрерывными коэффициентами при старших производных. Показано, что указанные краевые задачи не всегда обладают "фредгольмовыми" свойствами. В предположении непрерывности коэффициентов системы при старших производных были установлены необходимые и достаточные условия нётеровости и даны формулы для вычисления индекса указанных задач в пространстве Соболева $W_p^2(D), 2 < p < \infty$. Рассмотрим следующую эллиптическую систему уравнений второго порядка на плоскости, комплексная запись которой, имеет вид

$$
\begin{aligned}
& a(z)W_{z\overline{z}} + b(z)\overline{W}_{\overline{z}z} + c(z)(\overline{z}/|z|)^n W_{zz} + (z/|z|)^n d(z)\overline{W}_{\overline{z}\overline{z}} + \\
+ \quad & a_1(z)W_{\overline{z}} + b_1(z)\overline{W}_z + c_1(z)W_z + d_1(z)\overline{W}_{\overline{z}} + \\
+ \quad & e_1(z)W + h_1(z)\overline{W} = g(z),
\end{aligned} \tag{1.1}
$$

где $z = x + iy, W = u(x,y) + iv(x,y)$, n - целое число,

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right), \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

Будем считать, что $a(z), b(z), c(z), d(z)$ являются непрерывными в ограниченной односвязной области $\overline{D}$ функциями, $g(z) \in L^p_{\beta-2/p}(D)$:

$$L^p_{\beta-2/p}(D) = \{g(z): |z|^{\beta-2/p} g(z) = G(z) \in L^p(D), p > 2,\}$$

Как видно, коэффициенты уравнения (1.1) при производных W_{zz} и $\overline{W}_{\overline{z}\overline{z}}$ в точке $z = 0$ имеют неустранимый разрыв. На каждом луче, выходящим из начала координат, функция $(z/|z|)^n$ постоянна и в точке $z = 0$ имеет различные пределы по лучам. Как будет показано ниже, отказ от непрерывности коэффициентов приводит к тому, что найденные в [38], [39] условия нётеровости перестают быть достаточными, и более того, разрешимость задачи будет зависеть от показателя p лебегового пространства $L^p(D)$.

По главной части системы (1.1.) построим матричный полином:

$$F_z(t) = \begin{pmatrix} a(z) + e^{-in\varphi}c(z)\overline{t} & b(z) + e^{in\varphi}d(z)t \\ \overline{b(z)} + e^{-in\varphi}\overline{d(z)}\overline{t} & \overline{a(z)} + e^{in\varphi}\overline{c(z)}t \end{pmatrix},$$

где $|t| = 1, z \in \overline{D}, \varphi = \arg z$. Эллиптичность системы (1.1.) означает, что выполнено неравенство:

$$\det F_z(t) \equiv |a(z) + c(z)t|^2 - |b(z) + d(z)t|^2 \neq 0,$$

для $\forall z \in \overline{D}, |t| = 1$. Множество всех полиномиальных матриц вида $F_z(t)$, удовлетворяющих условию $\det F_z(t) = |P_z(t)|^2 - |Q_z(t)|^2 > 0 (< 0)$

для всех $z \in \overline{D}, |t| = 1$, обозначим $F^+(F^-)$, где

$$P_z(t) = c(z) + a(z)t, Q_z(t) = b(z) + d(z)t.$$

1.1.2. Гомотопическая классификация

Две матрицы $F_z^1(t), F_z^1(t)$ из F^+ будем считать гомотопными, если существует матричная функция $F_z(t,\tau) \in F^+$, непрерывно зависящая от действительного параметра $\tau \in [0,1]$, такая, что

$$F_z(t,0) \equiv F_z^1(t), F_z(t,1) \equiv F_z^2(t).$$

Известно [59], [60], что соотношение гомотопии разбивает F^+ на два класса гомотопии – связанные, открытые компоненты:

$\gamma_0)$ $Ind_{|t|=1}P_z(t) = 0$, то есть квадратный тр $P_z(t)$ внутри круга $|t| = 1$ корней не имеет;

$\gamma_1)$ $Ind_{|t|=1}P_z(t) = 1$, то есть квадратный тр $P_z(t)$ внутри круга $|t| = 1$ имеет один корень;

Эти классы образуют полную систему множества F^+, т.е. F_z^1 и F_z^2 из F^+ принадлежат некоторому классу $\gamma_k, k = 0,1$ тогда и только тогда, когда $F_z^1 \sim F_z^2$. Устанавливается, что для классов гомотопии γ_k при фиксированном k, выполняется одно из неравенств :

$$|\Delta_1(z)| > |\lambda(z)| + |\mu(z)|, \forall z \in \overline{D}, \tag{1.2}$$

$$|\Delta_2(z)| > |\lambda(z)| + |\mu(z)|, \forall z \in \overline{D}, \tag{1.3}$$

где

$$\Delta_1(z) = |a(z)|^2 - |b(z)|^2, \Delta_2(z) = |d(z)|^2 - |c(z)|^2,$$

$$\lambda(z) = \overline{a(z)}c(z) - b(z)\overline{d(z)}, \mu(z) = a(z)\overline{d(z)} - \overline{b(z)}c(z).$$

Лемма 1.1. *Пусть* $|P_z(t) > |Q_z(t)|$. *Тогда для выполнения неравенств (2) или (3) необходимо и достаточно, чтобы соответственно* $IndP_z = 0$ *или* $IndP_z = 1$. *Если* $|P_z(t) < |Q_z(t)|$, *то роль* $P_z(t)$ *сыграет* $Q_z(t)$, *причем* $\Delta_j < 0$.

В соответствии с гомотопическими классами γ_1, γ_2, т.е. условиями (1.2.) или (1.3.), эллиптическая система (1.1.) эквивалентным образом приводится к одному из видов:

$$\Delta_1(z)W_{z\bar{z}} + \lambda(z)(\bar{z}/|z|)^n W_{zz} + \mu(z)(z/|z|)^n \overline{W}_{\bar{z}\bar{z}} + T_1(W) = g_1(z), \quad (1.4)$$

$$\mu(z)W_{z\bar{z}} - \lambda(z)\overline{W}_{\bar{z}z} + \Delta_2(z)(z/|z|)^n \overline{W}_{zz} + T_2(W) = g_2(z), \quad (1.5)$$

где $g_1 = \bar{a}g - b\bar{g}, g_2 = \bar{c}g - d\bar{g}, T_j(W)$ $(j = 1,2)$ - младшие члены.

Задача Дирихле. Надо найти непрерывное решение системы (1.1.) в области D из класса $W_p^2(D), 2 < p < \infty$, удовлетворяющие на границе Г условию:

$$W(t)|_\Gamma = 0. \quad (1.6)$$

Без ограничения общности будем считать, что область D есть круг: $D = \{z: |z| < 1\}$.

Как известно [56], [57] все функции $W(z)$, обладающие в D обобщенными производными второго порядка, непрерывные в $\overline{D}$ и удовлетворяющие на Г условию (1.6), единственным образом представляются в виде:

$$W(z) = \iint_D G(z,\zeta)f(\zeta)ds_\zeta,$$

где

$$G(z,\zeta) = -\frac{2}{\pi}\ln\left|\frac{z-\zeta}{1-z\overline{\zeta}}\right|$$

есть функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа в единичном круге, $f(z)$ – неизвестная функция из пространства $L^p(D), 2 < p < \infty$. Тогда, как известно, для производных функции W справедливы формулы:

$$\begin{aligned}
&W_{\overline{z}z} = f(z), \overline{W}_{\overline{z}z} = \overline{f(z)},\\
&W_{zz} = -\frac{1}{\pi}\iint_D \left(\frac{1}{(\zeta-z)^2} - \frac{\overline{\zeta}^2}{(1-z\overline{\zeta})^2}\right) f(\zeta)ds_\zeta \equiv (S^\star f)(z),\\
&W_{\overline{z}\overline{z}} = -\frac{1}{\pi}\iint_D \left(\frac{1}{(\overline{\zeta}-\overline{z})^2} - \frac{\zeta^2}{(1-\overline{z}\zeta)^2}\right) f(\zeta)ds_\zeta \equiv (\overline{S}^\star f)(z),\\
&\overline{W}_{\overline{z}\overline{z}} = -\frac{1}{\pi}\iint_D \left(\frac{1}{(\overline{\zeta}-\overline{z})^2} - \frac{\zeta^2}{(1-\overline{z}\zeta)^2}\right) \overline{f(\zeta)}ds_\zeta \equiv (\overline{S}^\star \overline{f})(z),\\
&\overline{W}_{zz} = -\frac{1}{\pi}\iint_D \left(\frac{1}{(\zeta-z)^2} - \frac{\overline{\zeta}^2}{(1-z\overline{\zeta})^2}\right) \overline{f(\zeta)}ds_\zeta \equiv (S^\star \overline{f})(z).
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Ядра интегральных операторов из (1.7) терпят разрыв при $\zeta = z \in D$, а на границе Γ области D обращаются в нуль. Поэтому, для внутренних точек области D эти интегралы понимаются в смысле главного значения по Коши. Они существуют почти всюду для всякой функции $f(z)$ из $L^p_{\beta-2/p}(D)$ и сингулярные интегральные операторы (1.

7) действуют из $L^p_{\beta-2/p}(D)$ в $L^p_{\beta-2/p}(D)$ при $1 < p < \infty$.

В силу формул (1.7), получим, что задача Дирихле (1.6.) для системы (1.1) в соответствии с классами гомотопии $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_0$, эквивалентна одному из двух сингулярных интегральных уравнений:

$$\begin{aligned}
&\Delta_1(z)f + \lambda(z)(\overline{z}/|z|)^n(S^\star f)(z) +\\
&+\mu(z)(z/|z|)^n(\overline{S}^\star \overline{f})(z) + T_1 = g_1,
\end{aligned} \tag{1.8}$$

$$\mu(z)f - \lambda(z)\overline{f} + \Delta_2(z)(z \parallel z|)^n(S^\star \overline{f})(z) + T_2 = g_2, \tag{1.9}$$

Уравнения (1.8),(1.9) относятся к двумерным сингулярным интегральным уравнениям, изученных в работах Г. Джангибекова [38], [39].

Далее введем следующие обозначения:

$$R_p(k) = \sqrt{1 - \frac{2n(1-2/p)}{(k+2/p)(k+2/q-n)}}, k \geq n_0,,$$

$k \neq \frac{n}{2}(1 + signn) - 1, 1/p + 1/q = 1,$ n_0 - целая часть числа $(n-1)/2$;

$$\Lambda = \begin{cases} \dfrac{\Delta_1(0)}{\mu(0)}, & \text{если выполнено (1.2);} \\ \dfrac{\mu(0)}{\Delta_2(0)}, & \text{если выполнено (1.3).} \end{cases}$$

Через $\mu_p(\Lambda)$ обозначим число, равное для $|\Lambda| < 1$ количеству значений k при которых $R_p(k) < |\Lambda|$, а для $|\Lambda| > 1$ равное количеству значений k, при которых $R_p(k) > |\Lambda|$.

Если $n \geq 0$, то введем число:

$$\varkappa_p(\lambda) = \begin{cases} -2\mu_p(\Lambda) & \text{при } |\Lambda| < 1, \\ 2n - 2\mu_p(\Lambda) & \text{при } |\Lambda| > 1, \text{и } \mu_p(\Lambda) \neq n/2, \\ n+1 & \text{при } |\Lambda| > 1, \text{и } \mu_p(\Lambda) = n/2, \end{cases}$$

если $n \leq -1$, то введем

$$\varkappa_p(\Lambda) = \begin{cases} -2\mu_p(\Lambda) & \text{при } |\Lambda| < 1, \text{и } \mu_p(\Lambda) \neq n/2, \\ 2n - 2\mu_p(\Lambda) & \text{при } |\Lambda| > 1, \\ n+1 & \text{при } |\Lambda| < 1, \text{и } \mu_p(\Lambda) = n/2. \end{cases}$$

1.1.3. Основные результаты

Теорема 1.1. *Пусть в (1.1)* $n = 0$. *Тогда для того чтобы задача Дирихле (1.6) для эллиптической системы (1.1) в классе* $W_p^2(D)$, $2 < p < \infty$ *была н, необходимо и достаточно выполнение одного из следующих (исключающих друг друга) условий:*

$$|\Delta_1(z)| > |\lambda(z)| + |\mu(z)| \text{ длявсех } z \in \overline{D}, \tag{1.10}$$

$$|\Delta_2(z)| > |\lambda(z)| + |\mu(z)| \text{ для всех } z \in \overline{D};$$

$$\mu(t) \neq 0 \text{ для всех } t \in \Gamma. \tag{1.11}$$

При этом, если выполнено условие (1.10), то задача фредгольмова; если выполнено (1.11), то индекс задачи равен:

$$\varkappa = -2Ind_{\Gamma}\mu(t).$$

Теорема 1.2. *Пусть в (1.1)* $n \neq 0$ *и* $\lambda(0) = 0$. *Если* $\Lambda \neq 1, \Lambda \neq R_n(k), k$ *целое,* $k \geq 1/2n(1 + signn)$ *и выполняется одно из исключающих друг друга условий (1.10.), (1.11.), то задача Дирихле для эллиптической системы (1) в классе* $W_p^2(D)$, $2 < p < \infty$ *н, причем если выполнено (1.10), то индекс задачи равен* $\varkappa_p(\Lambda)$, *а если выполнено (1.11), то:*

$$\varkappa = 2Ind_{\Gamma}\mu(t) + \varkappa_p(\lambda).$$

Задача Неймана. Необходимо найти непрерывные решения системы (1.1) в области $\overline{D}$ из класса $W_p^2(D), 2 < p < \infty$, удовлетворяющие на границе Г, условию:

$$\frac{\partial w}{\partial \nu}|_{\Gamma} = 0. \tag{1.12}$$

Поскольку [56], [57] любые функции, обладающие в D обобщенными

производными второго порядка с непрерывными в $\overline{D}$ первыми производными, удовлетворяющими условиям (1.11) и

$$\int_{\Gamma} W(z)ds_z = 0,$$

может быть единственным образом представлена, в виде:

$$W(z) = \iint_D \hat{G}(z,\zeta)f(\zeta)ds_\zeta, f(z) \in L^p(D), 2 < p < \infty,$$

где

$$\hat{G}(z,\zeta) = -\frac{2}{\pi}\ln\left|\frac{z-\zeta}{1-z\overline{\zeta}}\right| - \frac{1}{\pi}(|z|^2) + |\zeta|^2) + \frac{3}{4}$$

есть функция Неймана для единичного круга, то так же как и в случае задачи Дирихле, устанавливаются необходимые и достаточные условия нётеровости и формулы для индекса, ибо указанная задача с точностью до вполне непрерывных операторов сводится к тем же сингулярным интегральным уравнениям (1.8),(1.9).

§ 1.2. Основные краевые задачи для одной частной эллиптической системы дифференциальных уравнений с разрывным коэффициентом

1.2.1. Первая основная задача

В работах Г. Джангибекова [38],[39] была изучена задача Дирихле и Неймана для общих эллиптических систем дифференциальных уравнений второго порядка с двумя функциями от двух переменных. В предположении непрерывности коэффициентов системы, были установлены необходимые и достаточные условия нетеровости и даны формулы для вычисления индекса

указанных задач.

Мы здесь будет рассматривать в единичном круге $D = \{z: |z| < 1\}$ следующую более частную, по сравнению с изложенной в параграфе 1 эллиптическую систему с разрывными коэффициентами, с целью получения более конкретных результатов относительно картины разрешимости рассматриваемых задач.

Пусть отыскиваются непрерывные решения неоднородной системы:

$$\begin{aligned} a(z)\frac{\partial^2\omega}{\partial z\partial\overline{z}} \quad &+b(z)e^{2i\varphi}\frac{\partial^2\overline{\omega}}{\partial z^2}+a_1(z)\frac{\partial\omega}{\partial\overline{z}}+b_1(z)\frac{\partial\overline{\omega}}{\partial z}+c_1(z)\frac{\partial\omega}{\partial z}+ \\ &+d_1(z)\frac{\partial\overline{\omega}}{\partial\overline{z}}+e_1(z)\omega+h_1(z)\overline{\omega}=g(z), \end{aligned} \tag{1.13}$$

в области D из класса $W_p^2(D), 2 < p < \infty$, удовлетворяющие на границе Г, условию:

$$\omega(t)|_\Gamma = 0, \tag{1.14}$$

где $z = x + iy, \omega = u(x,y) + iv(x,y)$,

$$\frac{\partial}{\partial\overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right), \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

$\varphi = \arg z$, коэффициенты $a(z), b(z)$ и т.д. будем считать непрерывными функциями в $\overline{D}$, а $g(z) \in L^p(D), 2 < p < \infty$.

Как видно из (1.13), коэффициент при производной $\frac{\partial^2\overline{\omega}}{\partial z^2}$ в точке $z = 0$ по всем лучам, выходящим из начала координат, имеет разные пределы.

Следующее утверждение следует из работы Г.Джангибекова [38]:

Теорема 2.1. *Пусть в (1.13)* $a(0) = 0$ *или* $b(0) = 0$. *Тогда для того, чтобы задача Дирихле (1.14) для эллиптической системы (1.13) была нетеровой, необходимо и достаточно выполнение одного из следующих*

(исключающих друг друга) условий:

$$|a(z)| > |b(z)| \text{ длявсех } z \in \overline{D}, \tag{1.15}$$

$$|a(z)| < |b(z)| \text{ для всех } z \in \overline{D}, a(t) \neq 0 \text{ для всех } t \in \Gamma. \tag{1.16}$$

При этом, если выполнено условие (1.15), то задача фредгольмова; если выполнено (1.16), то индекс задачи равен:

$$\varkappa = -2Ind_{\Gamma}a(t).$$

1.2.2. Приведение к сингулярным интегральным уравнениям

Далее мы будем предполагать, что $a(0) \neq 0$ и $b(0) \neq 0$. Как отмечено в [56], [57], все функции $\omega(z)$, обладающие в D обобщенными производными второго порядка, непрерывные в $\overline{D}$ и удовлетворяющие на Γ условию (??), единственным образом представляются, в виде:

$$\omega(z) = -\frac{2}{\pi}\iint_D \ln\left|\frac{1 - z\overline{\zeta}}{\zeta - z}\right| f(\zeta)ds_\zeta,$$

где $f(z)$ - неизвестная функция из пространства $L^p(D), 2 < p < \infty$.

Тогда имеем:

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial z\partial\overline{z}} = f(z), \frac{\partial^2\overline{\omega}}{\partial z^2} = (S\overline{f})(z) + (B\overline{\zeta}^2\overline{f})(z),$$

где

$$(S\overline{f})(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_D \frac{\overline{f(\zeta)}}{(\zeta - z)^2}ds_\zeta, (B\overline{\zeta}^2\overline{f})(z) = \frac{1}{\pi}\iint\limits_D \frac{\overline{\zeta^2}}{(1 - z\overline{\zeta})^2}\overline{f(\zeta)}ds_\zeta,$$

и $\theta = \arg(\zeta - z)$. Подставляя значения указанных производных в

систему (??), получим следующее сингулярное интегральное уравнение

$$a(z)f(z)+\frac{z}{\bar{z}}b(z)\left(\left(S\bar{f}\right)(z)+\left(B\bar{\zeta}^{2}\bar{f}\right)(z)\right)+$$

$$+(Tf)(z)=g(z), z\in D, \qquad (1.17)$$

где T - вполне непрерывный в пространствах $L^p(D)$,$2<p<\infty$, оператор. Интегральное уравнение (1.13), относится к изученным в работах [38],[39] уравнениям.

Рассмотрим сначала систему с главной частью (1.13) и с "замороженными" в нуле коэффициентами:

$$a(0)\frac{\partial^2\omega}{\partial z\partial\bar{z}}\quad+b(0)e^{2i\varphi}\frac{\partial^2\overline{\omega}}{\partial z^2}=g(z), \qquad (1.8)$$

Соответствующее интегральное уравнение:

$$a(0)f(z)+\frac{z}{\bar{z}}b(0)\left((S\bar{f})(z)+(B\bar{\zeta}^{2}\bar{f})(z)\right)=g(z), z\in D, \qquad (1.19)$$

изучено в работе [45].

Введем обозначения:

$$R_p(k)=\sqrt{1-\frac{4(1-\frac{2}{p})}{k^2-\frac{4}{p^2}}}, k=0,2,3,\dots,;\ \lambda=\frac{b(0)}{a(0)},$$

$\varkappa_+$ и $\varkappa_-$ - соответственно, обозначают число линейно независимых (над полем вещественных чисел) решений однородной задачи (1.18), (1.19) и число условий разрешимости неоднородной задачи.

1.2.3. Основные результаты

Теорема 2.2. *Для нормальной разрешимости модельной задача (1.18), (1.19) в классе* $W_p^2(D)$, $2 < p < \infty$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$|\lambda| \neq 1 \text{ и } |\lambda| \neq R_p(k_0), k_0 = 0,2, \dots. \qquad (1.20)$$

Если $|\lambda| < R_p(2)$, то задача (1.18), (1.14) имеет в классе $W_p^2(D)$ $(2 < p < \infty)$ единственное решение;

если $R_p(k_0) < |\lambda| < R_p(k_0 + 1), k_0 = 2,3, \dots,$ то $\varkappa_+ = 0, \varkappa_- = 2k_0 - 2$; если $1 < |\lambda| < p - 1$, то $\varkappa_+ = 3, \varkappa_- = 0$; если $|\lambda| > p - 1$, то $\varkappa_+ = 4, \varkappa_- = 0$. При этом, линейно независимые решения однородной задачи и условия разрешимости неоднородной выписываются в явном виде.

Теперь переходим к задаче (1.14) для исходной системы (1.13). Предварительно введем следующие обозначения.

Через $\mu_p(\lambda)$ обозначим число, равное для $|\lambda| < 1$ количеству значений k, при которых $R_p(k) < |\lambda|$, а для $|\lambda| < 1$ равное количеству значений k при которых $R_p(k) > |\lambda|$, где по прежнему $\lambda = b(0)/a(0)$. Введем еще число

$$\varkappa_p(\lambda) = \begin{cases} -2\mu_p(\lambda) & \text{при } |\lambda| < 1, \\ 4 - 2\mu_p(\lambda) & \text{при } |\lambda| > 1, \text{и } \mu_p(\lambda) \neq 1, \\ 3 & \text{при } |\lambda| > 1, \text{и } \mu_p(\lambda) = 1. \end{cases}$$

Теорема 2.3. *Для того, чтобы исходная задача (1.13), (1.14) в классе* $W_p^2(D)$, $2 < p < \infty$ *была нетеровой, необходимо и достаточно выполнение условий*

$$|a(z)| \neq |b(z)| \text{ длявсех } z \in \overline{D}, a(t) \neq 0 \text{ длявсех } t \in \Gamma, \qquad (1.21)$$

$$|\lambda| \neq R_p(k), k = 0,2, ..., \qquad (1.22)$$

причем индекс задачи равен

$$\varkappa = -2Ind_{\Gamma} a(t) + \varkappa_p(\lambda).$$

Как видно из теоремы 2.2 и 2.3, отказ от непрерывности коэффициентов существенно влияет на нетеровость и индекс задачи, причем разрешимость будет зависеть от показателя p лебегового пространства $L^p(D)$.

Аналогичным образом изучается задача Неймана для системы (1.13).

§ 1.3. Задача линейного сопряжения решений обобщенной системы Коши – Римана с сингулярными коэффициентами

В этом параграфе речь идет о нахождении функций $\varphi^+(z)$ и $\varphi^-(z)$ в областях G^+ и G^-, непрерывных вплоть до контура Г, где они сопряжены условием

$$\varphi^+(t) = a(t)\varphi^-(t) + b(t)\overline{\varphi^-(t)} + g(t), \varphi(\infty) = 0, t \in \Gamma. \quad (1.23)$$

Здесь через G^+ обозначена ограниченная область комплексной плоскости z, Γ - её граница, а G^- - дополнение $G^+ \cup \Gamma$ до полной плоскости.

Первые исследования краевой задачи (44) для обобщенной системы Коши-Римана в регулярном случае принадлежат Л.Г.Михайлову [16] – [18]. Он использовав взаимно однозначное соответствие между решением обобщенной системы Коши-Римана и аналитическими функциями, свел рассматриваемую задачу к аналогичной задаче в классе аналитических функции, а также, используя другой подход, получил точные результаты для нескольких различных случаев. Б.М.Боярский [60] – [63], использовав

представления решения задачи через интеграла типа Коши с вещественной плотностью, получил первые точные результаты при $|a(t)| > |b(t)|$. При этом им были наложены более жесткие ограничения на коэффициент $a(t)$.

Задача (1.23) для решений обобщенной системы Коши-Римана с сингулярными коэффициентами, то есть для уравнения

$$\varphi_{\overline{z}} + \frac{c(z)}{|z|}\varphi + \frac{d(z)}{|z|}\overline{\varphi} = 0, \tag{1.24}$$

изучена Л.Г.Михайловым [16] при помощи формулы устанавливающей соответствие между решением (1.24) и множеством аналитических функций при определенных условиях малости коэффициентов $c(z)$ и $d(z)$ в особой точке, причем оказалось, что тогда для задачи сопряжения сохраняются все теоремы регулярного случая. Впоследствии эти исследования были продолжены при иных условиях малости (см.[28] – [32]) и библиографию к ней.

1.3.1. Постановка задачи

Теперь перейдем к постановке задачи, рассматриваемой в данном параграфе.

Пусть $G^+ = \{z: |z| < 1\}, \Gamma = \{t: |t| = 1\}, G^- = \{z: |z| > 1\}$. Обозначим через $\mathfrak{M}\ \mathfrak{D}$ – множество функций $\varphi(z)$, принадлежащих $L^p_{\beta-1-2/p}(D^+) \cap W^1(D^+\backslash 0)$, где $2 < p < \infty, 0 < \beta < 1$. Это означает, что функция $\varphi(z)$ имеет в $D^+\backslash 0$ обобщенные производные $\varphi_{\overline{z}}, \varphi_z$ и $|z|^{\beta-n-2/p} \in L^p(D^+)$ при $2 < p < \infty, 0 < \beta < 1$.

Требуется найти решения уравнений:

$$\begin{aligned} &\varphi_{\overline{z}} + \frac{c(z)}{\overline{z}}\varphi + \frac{d(z)}{\overline{z}}\overline{\varphi} = g(z), z \in D^+, \varphi \in \mathfrak{M}(\mathfrak{D}^+), \\ &\varphi_{\overline{z}} = 0, z \in D^-, \text{при } \varphi(\infty) = 0 \text{ (порядокнуляравен2)}, \end{aligned} \tag{1.25}$$

имеющие непрерывные граничные значения и удовлетворяющие на Γ, условию:

$$\varphi^+(t) = a(t)\varphi^-(t) + b(t)\overline{\varphi^-(t)}, t \in \Gamma, \tag{1.26}$$

где $c(z), d(z)$ – измеримые ограниченные в $\overline{D}^+$ функции, имеющие пределы $\lim_{z\to 0} c(z) = c(0), \lim_{z\to 0} d(z) = d(0), g(z) \in L^p_{\beta-n+1-2/p}(D^+)$, функции $a(t)$ и $b(t)$ на Γ, удовлетворяют условию

$$|a(t)| \neq |b(t)|, \tag{1.27}$$

и принадлежат классу $SW^1_p(\Gamma), p > 2$ (см.монографию Монахова В.Н. [77] стр. 267) с сохранением условия (1.27), т.е. их соответствующие продолжения $a(z), b(z)$ внутри области D^+ принадлежат $W^1_p(D^+), p > 2$, и удовлетворяют неравенству $|a(z)| \neq |b(z)|, z \in \overline{D}^+$.

Отметим, что из принадлежности функции $\varphi(z)$ пространству $L^p_{\beta-2/p}(G^+)(0 < \beta < 1, 2 < p < \infty)$, и из уравнения (1.25) следует, что $\varphi_{\overline{z}} \in L^p_{\beta-2/p}(G^+)$, и поскольку тогда $\varphi, \varphi_{\overline{z}} \in L^{q_0}(G^+)$, где q_0 - некоторое фиксированное число больше 2, то $\varphi \in W^1_{q_0}(G^+)$. Тогда из теоремы вложения Соболева ([100], стр. 57) функция $\varphi(z)$ непрерывна в G^+ и удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\frac{q_0-2}{q_0} < 1$.

Далее будет показано, что сформулированная задача эквивалентным образом редуцируется к двумерным сингулярным интегральным уравнениям с разрывными коэффициентами. Следует отметить, что в регулярном случае, связь задачи с сингулярным интегральным уравнением была установлена А.Джураевым [76]. Мы, в основных чертах, следуем разработанной им схеме.

1.3.2. Эквивалентность задачи (1.25),(1.26) некоторым двумерным сингулярным интегральным уравнениям

Прежде всего отметим,что заданные на контуре Γ функции $a(t), b(t)$ класса $C^1(\Gamma)$ и удовлетворяющие условию $|a(t)| \neq |b(t)|, t \in \Gamma$, можно продолжить во внутрь круга $|z| \leq 1$ с сохранением класса, то есть $a(z), b(z) \in C^1(\overline{D}^+)$ и $|a(z)| \neq |b(z)|, z \in \overline{G}^+$.

Поскольку рассматриваемая задача (1.25),(1.26) инвариантно относительно конформных преобразований, то без ограничения общности резульратов мы будем считать, что область D^+ кругом $|z| < 1$ и $\Gamma = \{t: |t| = 1\}$.

Пусть теперь $\varphi(z)$ – решение задачи (1.25),(1.26) из класса $\mathfrak{M}\mathfrak{D}$. Тогда введем в рассмотрение функцию

$$\omega(z) = \begin{cases} \dfrac{\overline{a(z)}\varphi^+(z) - b(z)\overline{\varphi^+(z)}}{z(|a(z)|^2 - |b(z)|^2)}, z \in G^+, \\ \dfrac{\varphi^-(z)}{z}, z \in G^-. \end{cases} \tag{1.28}$$

Из определения этой функции следует, что $\omega(z) \in L^p_{\beta-2/p}(G^+)$, она непрерывна в $G^+ \backslash 0$ и в окрестности нуля $\omega(z) = O(|z|^{-2/q_0}), q_0 > 2$; голоморфна в $G^-, \omega(\infty) = 0$. Очевидно, что кроме нуля, в G^- существует $\omega_{\overline{z}}$ и

$$\begin{aligned} \omega_{\overline{z}} = & \frac{\overline{a}_{\overline{z}}\varphi_{\overline{z}} + \overline{a}\varphi^+_{\overline{z}} - b_{\overline{z}}\overline{\varphi}^+ - b\overline{\varphi}^+_{\overline{z}}}{z(|a|^2 - |b|^2)} - \\ & - \frac{(\overline{a}\varphi^+ - b\overline{\varphi^+})(\overline{a}a_{\overline{z}} + a\overline{a}_{\overline{z}} - bb_{\overline{z}} - b\overline{b}_{\overline{z}})}{z(|a|^2 - |b|^2)^2}. \end{aligned} \tag{1.29}$$

Из наложенных выше требований на функции $a(z), b(z), \varphi(z)$ следует, что $\omega_{\overline{z}} \in L^p_{\beta+1-2/p}(G^+), 0 < \beta < 1, 2 < p < \infty$ и тогда $\omega_{\overline{z}} \in L^{p_0}(G^+)$ где p_0 - некоторое фиксированное число, больше 1. Поэтому, по теореме 1.36 ([37],

стр. 89), существует также ω_z, и тогда существует $\overline{\omega_{\overline{z}}} \in L^{p_0}(G^+), p_0 > 1$.

Теперь из (1.28) находим, что

$$\varphi^+(z) = za(z)\omega(z) + \overline{z}b(z)\overline{\omega(z)}, z \in G^+. \qquad (1.30)$$

Очевидно, что существует $\varphi_{\overline{z}}$ и

$$\varphi_{\overline{z}} = za_{\overline{z}}\omega + za\omega_{\overline{z}} + (b + \overline{z}b_{\overline{z}}\overline{\omega}) + \overline{z}b\overline{\omega_{\overline{z}}} \in L^p_{\beta-2/p}(G^+).$$

Подставляя эти значения в (1.29), заключаем, что функция $\omega(z)$, определенная по формуле (1.28), будет решением уравнения

$$\begin{aligned} &za\omega_{\overline{z}} + \overline{z}b\overline{\omega_{\overline{z}}} + [za_{\overline{z}} + \tfrac{z}{\overline{z}}(ac + \overline{b}d)]\omega + \\ &+(b + zb_{\overline{z}} + bc + \overline{a}d)\overline{\omega} = g(z), z \in G^+. \end{aligned} \qquad (1.31)$$

Обозначим через $\omega_{\overline{z}} = \overline{f(z)}, z \in G$. Так как $\overline{f(z)} \in L^p_{\beta+1_2/p}(G^+), 0 < \beta < 1, 2 < p < \infty$, то $\overline{f(z)} \in L^{p_0}(G^+), 1 < p_0 < \infty$, тогда по теореме 1.26 ([57], стр. 50)

$$\omega(z) = \Phi(z) - \frac{1}{\pi}\iint_{G^+} \frac{\overline{f(\zeta)}}{\zeta - z} ds_\zeta, z \in G^+\backslash 0, \qquad (1.32)$$

где $\Phi(z)$ - голоморфная в $G^+\backslash 0$ функция. Как уже отмечено, $\omega(z)$ непрерывна в $G^+ \cup G^-$, в окрестности нуля $\omega(z) = O(|z|^{-2/q_0})$, аналитична в G^- и $\omega(\infty) = 0$. Покажем, что $\omega(z)$ непрерывна на границе Г. Действительно, по определению и по условию (1.32)

$$\omega^+(t) - \omega^-(t) = \frac{\overline{a(t)}\varphi^+(t) - b(t)\overline{\varphi^+(t)}}{t(|a(t)|^2 - |b(t)|^2)} - \frac{\varphi^-(t)}{t} = \frac{\varphi^-(t)}{t} - \frac{\varphi^-(t)}{t}$$
$$= 0,$$

то есть $\omega^+(t) = \omega^-(t), t \in \Gamma$.

Теперь покажем, что двойной интеграл из правой части (1.32) также обладает всеми этими свойствами. В самом деле, аналитичность в G^- и исчезновение интеграла на бесконечности очевидны. Поскольку $\overline{f(z)} \in L^p_{\beta+1-2/p}(G^+)$, то

$$-\frac{1}{\pi}\iint_{G^+}\frac{\overline{f(\zeta)}}{\zeta-z}ds_\zeta = -\frac{1}{\pi}\iint_{G^+}\frac{\overline{F_0(\zeta)}}{\overline{\zeta}(\zeta-z)}ds_\zeta, z \in G^+, \qquad (1.33)$$

где $F_0(z) \in L^p_{\beta-2/p}(G^+)$, то есть $F_0(z) \in L^{q_0}(G^+), q_0 > 2$. В монографии Л.Г.Михайлова ([16], стр. 103 – 107) доказано, что двойной интеграл в правой части (54) непрерывна на всей плоскости, кроме нуля, а в окрестности нуля имеет вид $O(|z|^{-2/q_0}), q_0 > 2$. Теперь из (1.32) следует, что аналитическая функция $\Phi(z)$, как сумма двух функций, является непрерывной на всей плоскости функцией, кроме нуля, где в окрестности $z = 0: \Phi(z) = O(|z|^{-2/q_0})$, $q_0 > 2, \Phi(\infty) = 0$. По обобщенной теореме Лиувилля $\Phi(z) \equiv 0$, то есть

$$\omega(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_{G^+}\frac{\overline{f(\zeta)}}{\zeta - z}ds_\zeta, z \in G^+.$$

Теперь подставляя значения $\omega(z), \omega_{\overline{z}}, \overline{\omega}_{\overline{z}}$ в уравнение (1.31) получим, что функция $f(z)$, принадлежащая пространству $L^p_{\beta+1-2/p}(G^+), 0 < \beta < 1, 2 < p < \infty$ удовлетворяет следующему двумерному сингулярному интегральному уравнению

$$\begin{aligned}&\overline{a(z)}f(z) - \frac{z}{\overline{z}}\frac{\overline{b(z)}}{\pi}\iint_{|\zeta|<1}\frac{\overline{f(\zeta)}}{(\zeta-z)^2}ds_\zeta \\ &-\frac{A(z)}{\overline{z}\pi}\iint_{|\zeta|<1}\frac{\overline{f(\zeta)}}{\zeta-z}ds_\zeta - \frac{B(z)}{z\pi}\iint_{|\zeta|<1}\frac{f(\zeta)}{\overline{\zeta}-\overline{z}}ds_\zeta = g_1(z), |z| < 1,\end{aligned} \qquad (1.34)$$

где

$$A(z) = \overline{b_z(z)} + \overline{c(z)b(z)} + a(z)\overline{d(z)},$$

$$B(z) = z\overline{a_z(z)} + \overline{c(z)a(z)} + b(z)\overline{d(z)},$$

$$f(z), g_1(z) = \frac{\overline{g(z)}}{\overline{z}} \in L^p_{\beta-2/p}(G^+), 0 < \beta < 1, 2 < p < \infty.$$

ОБРАТНОЕ. Пусть $g(z)$ - заданная функция класса $L^p_{\beta+1-2/p}(|z| < 1)$ и $f(z)$ - решение уравнения (1.34) из класса $L^p_{\beta-2/p}(G^+), 0 < \beta < 1, 2 < p < \infty$.

Введем в рассмотрение функцию

$$W(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1} \frac{\overline{f(\zeta)}}{\zeta - z} ds_\zeta. \tag{1.35}$$

Из свойства функции $f(z)$ следует, что $L^p_{\beta+1-2/p}(G^+)$, непрерывна на всей плоскости, кроме нуля, в окрестности точки $z = 0$ $W(z) = O(|z|^{-2/q_0}), q_0 > 2$, аналитична в G^- и $\omega(\infty) = 0$. Очевидно, что при $|z| < 1, W_{\overline{z}} = \overline{f(z)}$ и

$$\overline{W}_{\overline{z}} = \frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1} \frac{f(\zeta)}{(\overline{\zeta} - \overline{z})^2} ds_\zeta \in L^p_{\beta+1-2/p}(G^+).$$

Подставляя эти значения в (1.34), придем к заключению, что функция $W(z)$ удовлетворяет уравнению (1.31).

Теперь введем функцию

$$\varphi(z) = \begin{cases} za(z)W(z) + \overline{z}b(z)\overline{W(z)}, z \in G^+, \\ zW(z), z \in G^-. \end{cases} \tag{1.36}$$

Учитывая свойства $W(z)$, приходим к выводу,что $\varphi^+(z) \in L^p_{\beta-2/p}(G^+)$, а в окрестности точки $z = 0$: $\varphi^+(z) = O(|z|^{1-2/q_0}), q_0 > 2$.

Непосредственным вычислением, получим

$$\varphi_{\bar z}^{+} = za_{\bar z}W + zaW_{\bar z} + (b + \bar z b_{\bar z})\overline{W} + \bar z b\overline{W}_{\bar z} \in L^{p}_{\beta-2/p}(G^{+}),$$

где $z \in G^{+}$ то есть $\varphi^{+}(z) \in W^{1}_{q_0}(G^{+})$; $\varphi^{-}(z) = 0$ при $z \in G^{-}$. При условии $|a(z)| \neq |b(z)|, z \in G^{-}$ из (1.35) находим

$$W(z) = \begin{cases} \dfrac{\overline{a(z)}\varphi^{+}(z) - b(z)\overline{\varphi^{+}(z)}}{z(|a(z)|^{2} - |b(z)|^{2})}, z \in G^{+}, \\ \dfrac{\varphi^{-}(z)}{z}, z \in G^{-}. \end{cases} \qquad (1.37)$$

Продифференцировав W и $\overline{W}$ по $\bar z$, получим, что $W_{\bar z}, \overline{W}_{\bar z} \in L^{p}_{\beta+1-2/p}(G^{+})$. Внося теперь результаты дифференцирования в (8), заключаем, что функция $\varphi(z)$, определяемая по формуле (57), удовлетворяет уравнению (1.25).

Из определения функции $\varphi(z)$ следует, что она на контуре удовлетворяет условию

$$\varphi^{+}(t) = ta(t)W^{+}(t) + \bar t b(t)\overline{W^{+}(t)}, t \in \Gamma.$$

Поскольку $W(z)$ непрерывна гна всей плоскости (кроме точки $z = 0$), то $W^{+}(t) = W^{-}(t), t \in \Gamma$, а по определению функции $\varphi(z)$, $\varphi^{-}(t) = tW^{-}(t)$. Таким образом,

$$tW^{+}(t) = \varphi^{-}(t),$$

то есть функция $\varphi(z)$ на контуре Γ удовлетворяет условию (1.26).

Таким образом, нами доказано следующая

Лемма 3.1. *Пусть задача (1.25),(1.26) разрешима и* $\varphi(z)$ *– ее решение. Тогда функция* $f(z) = \omega_{\bar z}$, *где*

$$\omega(z) = (\overline{a(z)})\varphi(z) - b(z)\overline{\varphi(z)}(|\alpha(z)|^{2} - |\beta(z)|^{2})^{-1}z^{-1}, z \in D^{+}$$

принадлежащая пространству $L^p_{\beta-2/p}(D^+), 0<\beta<1, 2<p<\infty$, при $|a(t)| \neq |b(t)|, t \in \Gamma$, удовлетворяет сингулярному интегральному уравнению

$$(Af)(z) \equiv \overline{a(z)}f(z) + \frac{z\overline{b(z)}}{z}(Sf)(z) +$$

$$+\frac{A(z)}{\overline{z}}(T\overline{f})(z) + \frac{B(z)}{z}(T\overline{f})(z) = g_1(z), \qquad (1.38)$$

где

$$(Tf)(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_{D^+}\frac{f(\zeta)ds_\zeta}{\zeta - z}, (\overline{T}f)(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_{D^+}\frac{f(\zeta)ds_\zeta}{\overline{\zeta} - \overline{z}},$$

$$(S\overline{f})(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_{D^+}\frac{\overline{f(\zeta)}ds_\zeta}{(\zeta - z)^2}.$$

Обратно, если при $|a(z)| \neq |b(z)|, z \in \overline{G^+}$ уравнение (1.38) имеет решение $f(z)$ в классе $L^p_{\beta-2/p}(D^+)$, $0<\beta<1, 2<p<\infty$, то функция

$$\varphi(z) = \begin{cases} za(z)(Tf)(z) + \overline{z}b(z)(\overline{Tf})(z), z \in D^+, \\ z(Tf)(z), z \in D^-, \end{cases}$$

будет решением задачи (1.25) , (1.26) , причем числа линейно-независимых решений однородной задачи (1.25) , (1.26) и однородного уравнения (1.26) совпадают.

1.3.3. Исследование модельного интегрального уравнения

Интегральное уравнение (1.38) включается в класс двумерных сингулярных интегральных уравнений изученных в работе [46], для которых получены необходимые и достаточные условия нетеровости и формула для подсчета индекса в лебеговом пространстве $L^p_{\beta-2/p}(D)$. Прежде всего

отметим, что имеет место

Лемма 3.2. *Если* $f(z)$ *принадлежит пространству* $L^p_{\beta'-2/p}(|z|<1)$, *то операторы*

$$(A(z)-A(0))\frac{1}{\bar{z}}(T\bar{f})(z),(B(z)-B(0))\frac{1}{z}(\bar{T}f)(z)$$

вполне непрерывны в $L^p_{\beta'-2/p}(|z|<1), 1<\beta'<2, 1<p<\infty$.

В силу этой леммы в качестве модельного уравнения (1.38) можно брать уравнение

$$(A_0 f)(f)(z) \equiv f(z) + \lambda\frac{z}{\bar{z}}\left(S\bar{f}\right)(z) +$$

$$+\frac{\mu}{\bar{z}}(T\bar{f})(z) + \frac{\nu}{z}(\bar{T}f)(z) = g(z), \qquad (1.39)$$

где через μ и ν обозначены $\mu = A(0), \nu = B(0)$. Ниже для (1.39) получим эффективные необходимые и достаточные условия нетеровости и формулы для подсчета индекса.

Приступим к исследованию уравнения (1.38). Изучение проводится по схеме, изложенной в работе [45]. Сначала изучается свойства композиции операторов $S\bar{S}, T\bar{S}, TS, T\bar{T}, T^2$. Базируясь на этих свойствах, введем в пространстве $L^p_{\beta'-2/p}(|z|<1), 1<\beta'<2, 1<p<\infty$, замкнутое подпространство

$$V(N) = \{f(z): f(z) \in L^p_{\beta'-\frac{2}{p}}(|z|<1),$$

$$f_k(r) \equiv 0 \text{ при } -N \le k \le N,$$

где $f_k(r)$ - коэффициент Фурье функции $f(z)$:

$$f_k(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z)e^{ik\varphi}d\varphi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, z = rE^{i\varphi},$$

N - некоторое натуральное число. Устанавливается, что справедлива следующая

Лемма 3.3. *Для любых значений* λ, μ, ν, *где* $|\lambda| \neq 1$, *существует натуральное число* $N_0(\lambda, \mu, \nu)$ *такое, что уравнение (1.37) безусловно разрешимо в* $V(N)$ *при* $N > N_0$.

Далее, в силу леммы 3, исследование уравнения (1.39) сводится к изучению конечной совокупности одномерных интегральных уравнений для коэффициентов Фурье искомой функции $f(z)$, которые имеют вид:

$$\begin{aligned}
&f_k(r) = 2\int_r^1 \frac{\lambda(k-1+\mu)}{r}\left(\frac{r}{\rho}\right)^{k-1}\overline{f_{-k}(\rho)}d\rho - \\
&-2\nu\int_0^r \frac{1}{r}\left(\frac{\rho}{r}\right)^{k+1} f_k(\rho)d\rho - \lambda\overline{f_{-k}(\rho)} + g_k(r), \\
&f_{-k}(r) = 2\int_0^r \frac{\lambda(k+1-\mu)}{r}\left(\frac{\rho}{r}\right)^{k+1}\overline{f_k(\rho)}d\rho - \\
&-2\nu\int_r^1 \frac{1}{r}\left(\frac{r}{\rho}\right)^{k-1} f_{-k}(\rho)d\rho - \lambda\overline{f_k(\rho)} + g_{-k}(r), \text{при } 1 \le k \le N_0 \text{и}
\end{aligned} \tag{1.40}$$

$$\begin{aligned}
&f_0(r) = 2\int_0^r \frac{\lambda-\mu}{r}\left(\frac{\rho}{r}\right)\overline{f_0(\rho)}d\rho - \\
&-2\nu\int_0^r \frac{1}{r}\left(\frac{\rho}{r}\right) f_0(\rho)d\rho - \lambda\overline{f_0(r)} + g_0(r), \text{при } k = 0.
\end{aligned} \tag{1.41}$$

Для изучения уравнений (1.40), (1.41) перейдем в первой строке (1.40) к комплексно-сопряженным значениям, присоединяя к (1.40) уравнение, полученное из (1.40) переходом к комплексно сопряженным значениям, вводя новые функции u_k, v_k, u_0, v_0 по формулам

$$u_k(r = \overline{f_k(r)} + \overline{\lambda} f_{-k}(r), v_k(r) = \lambda \overline{f_k(r)} + f_{-k}(r)$$

$$\text{при } 1 \le k \le N_0,$$

$$u_0(r = \overline{f_0(r)} + \overline{\lambda} f_0(r), v_0(r) = \lambda \overline{f_0(r)} + f_0(r) \text{ при } k = 0$$

и полагая $|\lambda| \neq 1$, получим следующие системы интегральных уравнений относительно неизвестных u_k, v_k, u_0, v_0:

$$\begin{aligned} u_k(r) &= \frac{2}{\Delta}\left\{\begin{matrix} \int_0^1 \frac{1}{r}\Omega_{11}^k\left(\frac{\rho}{r}\right) u_k(\rho)d\rho + \\ + \int_0^1 \frac{1}{r}\Omega_{12}^k\left(\frac{\rho}{r}\right) v_k(\rho)d\rho \end{matrix}\right\} + \overline{g_k(r)}, \\ u_k(r) &= \frac{2}{\Delta}\left\{\begin{matrix} \int_0^1 \frac{1}{r}\Omega_{21}^k\left(\frac{\rho}{r}\right) u_k(\rho)d\rho + \\ + \int_0^1 \frac{1}{r}\Omega_{22}^k\left(\frac{\rho}{r}\right) v_k(\rho)d\rho \end{matrix}\right\} + g_{-k}(r), \end{aligned} \tag{1.42}$$

при $1 \le k \le N_0$.

$$\begin{aligned} u_0(r) &= \frac{2}{\Delta}\left\{\begin{matrix} -\int_0^r \frac{|\lambda|^2 - \lambda\overline{\mu} + \overline{\nu}}{r}\left(\frac{\rho}{r}\right) u_0(\rho)d\rho + \\ + \int_0^r \frac{\overline{\lambda} - \overline{\mu} + \overline{\lambda}\nu}{r}\left(\frac{\rho}{r}\right) v_0(r)d\rho \end{matrix}\right\} + \overline{g_0(r)}, \\ v_0(r) &= \frac{2}{\Delta}\left\{\begin{matrix} -\int_0^r \frac{\lambda - \mu + \lambda\overline{\nu}}{r}\left(\frac{\rho}{r}\right) u_0(\rho)d\rho - \\ - \int_0^r \frac{|\lambda|^2 - \overline{\lambda}\mu + \nu}{r}\left(\frac{\rho}{r}\right) v_0(r)d\rho \end{matrix}\right\} + g_0(r), \end{aligned} \tag{1.43}$$

при $k = 0$, где $\Delta = (1 - |\lambda|^2)^{-1}$ и

$$\Omega_{11}^k(\tau) = \begin{cases} \overline{\nu}\tau^{k+1}, \text{если } 0 < \tau < 1, \\ -|\lambda|^2(k-1) + \lambda\overline{\mu}, \text{если } \tau > 1; \end{cases}$$

$$\Omega_{12}^k(\tau) = \begin{cases} \overline{\lambda}\overline{\nu}\tau^{k+1}, \text{если } 0 < \tau < 1, \\ -\overline{\lambda}(k-1) + \overline{\mu}\tau^{1-k}, \text{если } \tau > 1; \end{cases}$$

$$\Omega_{21}^{k}(\tau)=\begin{cases} (\overline{\lambda}(k+1)-\mu)\tau^{k+1}, \text{если } 0<\tau<1, \\ -\lambda\nu\tau^{1-k}, \text{если } \tau>1; \end{cases}$$

$$\Omega_{22}^{k}(\tau)=\begin{cases} |\lambda|^2(k+1)+\overline{\lambda}\mu\tau^{k+1}, \text{если } 0<\tau<1, \\ \nu\tau^{1-k}, \text{если } \tau>1. \end{cases}$$

Рассматриваемые в пространстве $L^{p}_{\beta_1'/p}(0,1)$ системы уравнений (1.42), (1.43) относятся к системам интегральных уравнений с ядрами однородными степени -1, удовлетворяющими условиям суммируемости с показателем β': $1<\beta'<2$. Из результатов [44] – [46] следует, что если $|\lambda|<1$ и $\mathcal{G}_k(t)\neq 0$ при всех t: $-\infty<t<\infty$, где

$$\mathcal{G}_k(t)=1-\frac{4}{1-|\lambda|^2}\times$$

$$\times\frac{(|\lambda|^2-Re\gamma)(1-\beta'+it)+Re(\overline{\lambda}\mu+\nu)+|\nu|^2-|\mu|^2-ikIm\gamma}{k^2-(2-\beta'+it)^2}, \quad (1.44)$$

$0\leq k\leq N_0, \gamma=\overline{\lambda}\mu-\nu$ то оператор из k - ой системы (1.42), (1.43) будет нормально разрешимым в пространстве $L^{p}_{\beta_1'/p}$ на отрезке [0,1]. При этом соответствующая k - система (1.42), (1.43) имеет конечное число линейно независимых решений, а для разрешимости неоднородной системы необходимо и достаточно, чтобы ее свободный член удовлетворял конечному числу условий разрешимости и индекс указанной системы буде равен

$$\begin{aligned} \varkappa_k &= -2\underset{-\infty<t<\infty}{Ind}\,\mathcal{G}_k(t), \text{при } 1\leq k\leq N_0, \\ \varkappa_0 &= -\underset{-\infty<t<\infty}{Ind}\,\mathcal{G}_0(t), \text{при } k=0, \end{aligned} \quad (1.45)$$

Переходя от этих результатов к формулировке результатов для исходного модельного уравнения (1.39), отметим, что каждому решению однородной системы (1.42) либо (1.43) отвечает решение однородного уравнения (1.38), по формуле

$$f(z) = f_k(r)e^{ik\varphi} + f_{-k}(r)e^{-ik\varphi}, z = re^{i\varphi},$$

причем таким образом исчерпываются все решения однородного уравнения (1.38). При этом очевидно, что функции построенные по линейно независимым решениям однородной системы (1.42) либо (1.43) с фиксированным номером k будут линейно независимым. То же самое относится к функциям, построенным по решениям (1.42), (1.43) с различными k.

Положим

$$\mathcal{G}(t) = \prod_{0 \le k \le N_0} \mathcal{G}_k(t). \tag{1.46}$$

Резюмируем окончательный результат для модельного интегрального уравнения (1.39).

Теорема 3.1. *Пусть* $|\lambda| \neq 1$ *и* $\mathcal{G}(t) \neq 0$ *при всех* $t: -\infty < t < \infty$. *Тогда однородное модельное интегральное уравнение (1.39) в* $L^p_{\beta'-2/p}, 1 < \beta' < 2, 1 < p < \infty$ *имеет конечное число* $\varkappa^+$ *линейно независимых (над полем вещественных чисел) решений.*

Для разрешимости неоднородного уравнения (1.39) в $L^p_{\beta'-2/p}$ необходимо и достаточно, чтобы его свободный член удовлетворял конечному числу $\varkappa^-$ условий

$$Re \iint_{|z|<1} g(z)\psi(z)ds_z = 0,$$

где $\psi(z)$ - пробегает базис решений однородного сопряженного к (1.39) уравнения из пространства $L^p_{2-\beta'-2/p}$. При этом индекс уравнения (1.39) равен

$$\varkappa^+ - \varkappa^- = \sum_{k=0}^{N_0} \varkappa_k.$$

1.3.4. Формулировка результатов для задачи сопряжение (1.25),(1.26)

Прежде всего сформулируем основные результаты для исходного интегрального уравнения (1.38).

Имеет место

Лемма 3.4. *Пусть функции* $a(z), b(z), c(z), d(z)$ *удовлетворяют указанным выше условиям и* $|a(0)| \neq |b(0)|$. *Тогда*

$$A = A_0 A_1 + T, \tag{1.47}$$

где T - вполне непрерывный оператор,

$$(A_1 f)(z) =$$

$$= (|a(0)|^2 - |b(0)|^2)^{-1} f(z) + (\overline{a(0)} b(z)$$

$$- b(0)\overline{a(z)}) \frac{z}{\pi \bar{z}} \iint_{|\zeta|<1} \frac{\overline{f(\zeta)}}{(\zeta - z)^2} ds_\zeta +$$

$$+ (a(0) + \delta)^{-1} \{a(0) b(0) \overline{b(z)} - |b(0)|^2 a(z)$$

$$+ \delta b(0) \overline{b(z)}\} \frac{1}{\pi} \iint_{|\zeta|<1} \frac{f(\zeta) ds_\zeta}{(1 - z\bar{\zeta})^2},$$

A_0 - модельный интегральный оператор из (1.39), $\delta = 0$, если $a(0) \neq 0$ и равно 1, если $a(0) = 0$.

Теперь, зная результаты для операторов A_0, A_1, на основе известных фактов теории линейных операторов, можем получить из (1.47) условия нетеровости уравнения (1.38) в $L^p_{\beta'-2/p}(|z| < 1)$ и формулу для вычисления его индекса. Из этих результатов для задачи сопряжение (1.24),(1.25) следует

Теорема 3.2. *Для разрешимости задачи (1.25),(1.26) в классе* $\mathfrak{M}$,

необходимо и достаточно выполнение условий:

1. $|a(z)| \neq |b(z)|$ при $|z| \leq 1, a(t) \neq 0$ при $|t| = 1$,

2. $\mathcal{G}_k(t) \neq 0, -\infty < t < \infty, 0 \leq k \leq N_0$,

причем индекс задачи равен

$$\varkappa = -2 \underset{|t|=1}{Ind} a(t) + \sum_{k=0}^{N_0} \varkappa_k,$$

где

$$\varkappa_k = -2 \underset{-\infty<t<\infty}{Ind} \mathcal{G}_k(t), \text{при } 1 \leq k \leq N_0,$$
$$\varkappa_0 = - \underset{-\infty<t<\infty}{Ind} \mathcal{G}_0(t), \text{при } k = 0,$$

функции $\mathcal{G}_k(t)$ определяются по формуле (1.44).

ГЛАВА 2. ФОРМУЛА ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С СИНГУЛЯРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

§2.4. Одномерный случай

Пусть в прямоугольнике $Q = \{0 < t < T, 0 < x < l\}$ требуется найти решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial^2 x} + \frac{p^2}{x^2} u = 0, \tag{2.1}$$

удовлетворяющему начальному условию

$$u(t,x)|_{t=0} = \varphi(x) \tag{2.2}$$

и граничным условиям при $t > 0$

$$u(t,0) = u(t,l) = 0. \tag{2.3}$$

При этом предполагается, что функция $\varphi(x)$ непрерывна и удовлетворяет условиям согласованности $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$

Такую задачу назовем сингулярной смешанной задачей.

Сначала мы попытаемся найти нетривиальное, то есть не равные нулю тождественно, решения уравнения (2.1), вида

$$u(t,x) = T(t)X(x) \tag{2.4}$$

удовлетворяющее граничным условиям (2.3)

$$\frac{T'}{T} + \frac{-X'' + \frac{p^2}{x^2}X}{X} = 0$$

Так как независимая переменная t входит только в первую из этих дробей, а x – только во вторую, то приравнивая вторую из дробей постоянной λ, получим следующие два уравнения:

$$T' + \lambda T = 0 \tag{2.5}$$

$$X'' + (\lambda - \frac{p^2}{r^2})X = 0. \tag{2.6}$$

Чтобы получить нетривиальное решение $u(t,x)$, вида (2.4), удовлетворяющее граничному условию (2.3), необходимо найти нетривиальное, то есть не равное тождественно нулю, решение уравнения (2.6), удовлетворяющее краевому условию

$$X(x) = X(l) = 0 \tag{2.7}$$

Такая задача называется задача Штурма - Лиувилля на собственные значения и собственных функций.

Формула, дающая общее решение уравнения (2.6), имеют существенно различный вид, в зависимости от того, что

$$\lambda < 0, \lambda = 0 \text{ или } \lambda > 0.$$

Рассмотрим в отдельности каждый из этих трех случаев.

2.4.1. Случай 1. $(\lambda = -k^2 < 0)$.

В этом случае уравнение (2.6), примет вид:

$$X'' + (k^2 - \frac{p^2}{r^2})X = 0.$$

Как известно, общее решение этого уравнения есть

$$X(x) = \sqrt{x}(C_1 I_\nu(kx) + C_2 K_\nu(kx)), \qquad (2.8)$$

где $\nu^2 = p^2 + \frac{1}{4}, I_\nu(kx), K_\nu(kx)$ - модифицированные функции Бесселя (функции Макдональдо)(см. [17], [18]). Как мы знаем, функция $\sqrt{x}K_\nu(kx)$ неограниченно возрастает, когда $x \to 0$ и поэтому в (2.8) берем $C_2 = 0$. Мы знаем также, что у функции $I_\nu(kx)$ нет вещественных корней, а потому заставить решение (2.8) обратиться в нуль при $x = l$ невозможно. Значит, и $C_1 = 0$.

Тогда мы получим только тривиальное решение уравнения (2.6).

2.4.2. Случай 2. ($\lambda = 0$).

Тогда общее решение уравнения (2.6) имеет вид:

$$X(x) = \sqrt{x}(C_1 x^\nu + C_2 x^{-\nu})$$

Данная функция ограничена в нуле, только если $C_2 = 0$, но тогда возрастающая функция $x^{\frac{1}{2}+\nu}$ не сможет обратиться в нуль при $x = l$. Значит, и $C_1 = 0$. Таким образом, мы так же, как и в предыдущем случае, приходим к выводу, что только тривиальное решение уравнения (2.6) может удовлетворить обоих краевых условий (2.7).

2.4.3. Случай 3. ($\lambda = k^2 > 0$).

В этом случае, уравнение (2.6), примет вид:

$$X'' + (k^2 - \frac{p^2}{x^2})X = 0,$$

общее решение которого есть

$$X(x) = \sqrt{x}(C_1 I_\nu(kx) + C_2 J_{-\nu}(kx)),$$

где $\nu^2 = p^2 + \frac{1}{4}, J_{\pm\nu}(x)$ - функции Бесселя первого и второго рода. Если $\nu^2 = p^2 + \frac{1}{4}$ целое, то в качестве второго решения берем функцию Вебера второго рода $Y_\nu(x)$ [17], [18].

Поскольку функция $\sqrt{x}J_{-\nu}(kx)$ неограниченна в нуле, мы вновь обязаны принять, что $C_2 = 0$. Так как, согласно теории функции Бесселя (см. [17]), функция Бесселя первого рода $J_\nu(x)$ имеет счетное множество положительных корней, то она способна обратить в нуль функцию $X(x)$ при $x = l$. Итак, пусть $k = k_1^{(\nu)}, k_2^{(\nu)}, \dots, k_m^{(\nu)}, \dots,$ положительные корни уравнения $J_\nu(kl) = 0$, расположенные в порядке их возрастания, тогда функции $\sqrt{x}J_\nu(k_m^{(\nu)}x), m = 1,2,\dots$, дают нетривиальные решения уравнения (2.6) удовлетворяющие краевым условиям (2.7) при $\lambda = \lambda_m = (k_m^{(\nu)})^2$, то есть $\lambda_m = (k_m^{(\nu)})^2$ собственные значения, а соответствующие собственные функции $\sqrt{x}J_\nu(k_m^{(\nu)}x), m = 1,2,\dots$, образуют ортогональную систему в $L_2[(0,l)x]$ (см. [18]). Вернемся теперь к поставленной в начале сингулярной смешанной задаче. Поставив в уравнение (2.5) вместо λ его $\lambda_m = (k_m^{(\nu)})^2$, мы получим

$$T'' + (k_m^{(\nu)})^2 T = 0$$

Отсюда $T_m(t) = A_m e^{-(k_m^{(\nu)})^2 t}$

Поэтому все функции $u_m(t,x) = A_m e^{-(k_m^{(\nu)})^2 t}\sqrt{x}J_\nu(k_m^{(\nu)}x)$ по построению удовлетворяют уравнению (2.1) и граничным условиям (2.3) при любых A_m. Попытаемся определить эти постоянные таким образом, чтобы бесконечный ряд

$$u(t,x) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m e^{-(k_m^{(\nu)})^2 t}\sqrt{x}J_\nu(k_m^{(\nu)}x) \qquad (2.9)$$

удовлетворял начальному условию (2), то есть:

$$u(t,x)|_{t=0} = \sum_{m-1}^{\infty} A_m\sqrt{x}J_\nu(k_m^{(\nu)}x) = \varphi(x),$$

откуда видно, что A_m есть коэффициенты Фурье - Бесселя функции $\varphi(x)$ по системе собственных функций $\{\sqrt{x}J_\nu(k_m^{(\nu)}x)\}_1^\infty$. Они вычисляются по формуле:

$$A_m = \frac{2}{l^2 J_{\nu+1}^2(k_m^{(\nu)})}\int_0^1 \varphi(x)J_\nu(k_m^{(\nu)}x)xdx.$$

Коротко остановимся на условии сходимости ряда (2.9).

Так как система функций $\sqrt{x}J_\nu(k_m^{(\nu)}x), m = 1,2,\ldots,$ образует полную ортогональную систему в $L_2[(0,l);x]$ (см. [18]) и $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$ в силу условия согласованности, то функция $\sqrt{x}\varphi(x)$ разлагается в регулярно сходящийся ряд по системе функций $\sqrt{x}J_\nu(k_m^{(\nu)}x), m = 1,2,\ldots,$ (см. теорему § 23.7 [18]).

$$\sqrt{x}\varphi(x) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m^{(\nu)}\sqrt{x}J_\nu(k_m^{(\nu)}x) \qquad (2.10)$$

где $C_m^{(\nu)} = \frac{2}{l^2 J_{\nu+1}^2(k_m^{(\nu)})}\int_0^1 \varphi(\sigma)J_\nu(k_m^{(\nu)}\sigma)\sigma d\sigma,$ то есть $A_m = C_m^{(\nu)}$.

Следовательно, в силу ограниченности функций $e^{-(k_m^{(\nu)})^2 t}$ при $t \geq 0$, ряд (2.9) также сходится абсолютно и разномерно, как ряд (2.10).

Поэтому функция $u(t,x)$, определяемая этим рядом, непрерывна в замкнутом прямоугольнике $\overline{Q} = \{0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq l\}$, и принимаем заданные значения на его нижнем основании и на его боковых сторонах. Оста

показать, что внутри Q и на верхнем основании она удовлетворяет уравнению (2.1). Для этого достаточно показать, что ряды, полученные из (9), почленным однократным дифференцированием по t или двукратным почленным дифференцированием по x, также абсолютно и равномерно сходятся при $t \geq t_0 > 0$, какого бы ни было $t_0 > 0$. А это последнее утверждение слндует из того, что при всяком положительном $t_0, (k_m^{(\nu)})^2 e^{-(k_m^{(\nu)})^2 t_0} < 1$ если m достаточно велико, ибо $k_m^{(\nu)} l = (m + \frac{1}{2}\nu_n - \frac{1}{4})\pi + O(1/m)$[17].

Таким образом, ряд (2.9) да классическое решение задачи (2.1)-(2.3).

2.4.4. Основной результат

Теорема 4.1. *Пусть* $k = k_1^{(\nu)}, k_2^{(\nu)}, \ldots, k_m^{(\nu)}, \ldots,$ *положительные корни уравнения* $J_\nu(kl) = 0,$ *расположенные в порядке их возрастания. Тогда задача*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial^2 x} + \frac{p^2}{x^2} u = 0, 0 < x < l, 0 < t$$

$$u(t,x)|_{t=0} = \varphi(x)$$

$$u(t,0) = u(t,l) = 0.$$

имеет единственное классическое решение в виде

$$u(t,x) = \sum_{m-1}^{\infty} A_m e^{-(k_m^{(\nu)})^2 t} \sqrt{x} J_\nu(k_m^{(\nu)} x)$$

где коэффициенты определяются по формуле:

$$A_m = \frac{2}{l^2 J_{\nu+1}^2(k_m^{(\nu)})} \int_0^1 \varphi(x) J_\nu(k_m^{(\nu)} x) x dx.$$

§ 2.5. Формула представления в многомерном случае

2.5.1. Постановка задачи

Пусть в цилиндре

$$G = \{(t,x): 0 < t < \infty, x \in D\},$$

$D = \{r < a\}$ $n-$мерныйшаррадиуса a , требуется найти решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\Delta_n u + \frac{p^2}{r^2} u = 0 \qquad (2.11)$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u(t,x)|_{t=0} = \varphi(x), x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (2.12)$$

и при $t \geq 0$ краевому условию

$$u(t,x)|_{r=a} = (0) \qquad (2.13)$$

где функция $\varphi(x) \in C^2(\overline{D})$ и удовлетворяет условию согласованности

$$\varphi(t,x)|_{r=a} = 0, \Delta_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

n – мерный оператор Лапласа,

$$r^2 = |x|^2 = \sum_{k=1}^{n} x_i^2$$

p – постоянное число. Такую задачу назовем начально - краевой задачей с сингулярным коэффициентом.

2.5.2. Метод разделения переменных

Сначала мы попытаемся найти нетривиальное, то есть не равные нулю тождественно, решения уравнения (2.11) вида

$$u(t,x) = T(t)X(x) \tag{2.14}$$

удовлетворяющие краевому условию (2.13)

Подставляя (2.14) в уравнение (2.11) и разделяя переменные, получим

$$\frac{T'}{T} + \frac{-\Delta_n X + \frac{p^2}{r^2}X}{X} = 0$$

Так как независимая переменная t входит только в первую из этих дробей, а x – только во вторую, то приравнивая вторую из дробей постоянной λ, получим слудующие два уравнения

$$T' + \lambda T = 0 \tag{2.15}$$

$$\Delta_n X + (\lambda - \frac{p^2}{r^2})X = 0. \tag{2.16}$$

Чтобы получить нетривиальное решение $u(t,x)$ вида (2.14), удовлетворяющее краевому условию (2.13), необходимо найти нетривиальное, то есть не равное тождественно нулю решение уравнения (2.16), удовлетворяющее краевому условию

$$X(x)|_{r=a} = 0 \tag{2.17}$$

Такая задача называется задача Штурма - Лиувилля на собственные значения и собственных функций.

В уравнение (2.16), переходя от декартовых координат $x_1, x_2, \ldots, x_n$ к сферическим координатам $r, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{n-1}$, ищем его решение, в виде

$$X(x) = X(r,s) = R(r)Y_{k,n}(s) \qquad (2.18)$$

В этих координатах, уравнение (2.14) перепишется так [17],

$$\frac{\partial^2 X}{\partial^2 r} + \frac{(n-1)}{r}\frac{\partial X}{\partial r} + \frac{\triangle_s X}{r^2} + (\lambda - \frac{p^2}{r^2})V = 0, \qquad (2.19)$$

где введены обозначения:

$$\Delta_s X = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{q_j sin^{n-j-1}\theta_j}\frac{\partial}{\partial\theta_j}(sin^{n-j-1}\theta_j \frac{\partial X}{\partial\theta_j})$$

n– мерный сферический оператор Лапласа,

$$q_1 = 1, q_j = (sin\theta_1 sin\theta_2 \ldots sin\theta_j - 1)^2$$

s – точка единичной n – мерной сферы с угловыми координатами $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{n-1}$, $Y_{k,n}(s)$ – n –мерные сферические функции порядка k. В дальнейшем размерность n – пространства будет оставаться фиксированной, и мы будем опускать слово n – мерная в названии сферической функции.

Подставляя (2.18) в (2.19) и разделяя переменные, получим

$$[R''(r) + \frac{n-1}{r}R'(r) + (\lambda - \frac{p^2}{r^2})R(r)]Y_{k,n}(s) + \frac{1}{r^2}R(r)\Delta_s Y_{k,n}s = 0$$

Воспользуемся тем, что сферические функции $Y_{k,n}(s)$ удовлетворяют уравнениям $\Delta_s Y_{k,n}(s) + k(k+n-2)Y_{k,n}(s) = 0$,[1]. Исключая $\Delta_s Y_{k,n}(s)$, с помощью этого уравнения, получаем

$$R''(r) + \frac{n-1}{r}R'(r) + (\lambda - \frac{p^2+k(k+n-2)}{r^2})R(r) = 0 \qquad (2.20)$$

В уравнение (2.20) введем вместо $R(r)$, новую искомую функцию $w(r)$, по формуле

$$R(r) = r^a w(r) \tag{2.21}$$

где a – постоянная. Дифференцируя, имеем очевидное равенство

$$R'(r) = ar^{a-1}w(r) + r^a w'(r)$$

$$R''(r) = a(a-1)r^{a-2}w(r) + 2ar^{a-1}w'(r) + r^a w^n(r)$$

Подставляя выражения $R(r), R'(r), R''(r)$ в уравнение (10), после элементарных преобразований, получим уравнение для $w(r)$:

$$r^2 w''(r) + (2a + n - 1)rw'(r) +$$

$$+\lambda p^2 - [p^2 + k(k + n - 2) - a(a + n - 2)]w(z) = 0$$

Если положить, что это уравнение $a = -\frac{n-2}{2}, \lambda = \mu^2$ (то, что λ должно быть положительным доказывается так же, как в работе [4]) то получим уравнение Бесселя

$$r^2 w''(r) + rw'(r) + [\mu^2 r^2 - (\frac{4p^2 + (2k + n - 2)^2}{4})]w(r) = 0$$

Как известно [18], общий интеграл этого уравнения будет

$$w_k(r) = C_1 J_{\nu_k}(\mu r) + C_2 J_{-\nu_k}(\mu r)$$

$$\nu_k^2 = \frac{4q^2 + (2k + n - 2)^2}{4}$$

где $J_{\pm\nu_k}(x)$ - функции Бесселя первого и второго рода, прич, если ν_k– целое положительное число, то $J_{-\nu_k}(x)$ надо заменить на $Y_{\nu_k}(x)$, по формуле

$$Y_{\nu_k}(x) = \lim_{\nu \to \nu_k} \frac{J_\nu(x) cos\nu\pi - J_{-\nu}(x)}{sin\nu\pi}$$

Поскольку $J_{-\nu_k}(x)$ обращается в бесконечность при x=0, а мы хотим иметь ограниченное при $r = 0$ решение, то в формуле для $w_k(r)$ берем $C_2 = 0$. не ограничивая общности, мы можем считать, $C_1 = 1$, т.е. положительной

$$w_k(r) = J_{\nu_k}(\mu r),$$

$$\nu_k^2 = \frac{4p^2 + (2k + n - 2)^2}{4}$$

Итак, поскольку $J_{\nu_k}(\mu r) = O(r^{\nu_k})$ при $r \to 0$ то ограниченными в нуле решениями уравнения (2.10) с учетом (2.11) будут:

$$R_k(r) = r^{-\frac{n-2}{2}} J_{\nu_k}(\mu r)$$

Таким путем, мы получим бесчисленное множество решений (ограниченных при $r \to 0$) уравнения (2.6), вида:

$$X_{k,\mu}(x) = X_{k,\mu}(r, s) = r^{-\frac{n-2}{2}} J_{\nu_k}(\mu r) Y_{k,n}(s)$$

где $k = 0,1,2,\ldots$ - целое, постоянная $\mu > 0$ может иметь любое значение.

Так как, согласно теории функций Бесселя (см. [17]), функция Бесселя первого рода $J_{\nu_k}(\mu r)$ имеет счетное множество положительных корней, то она способна обратить в нуль функцию $X(x)$ при $|x| = r = a$. Итак, пусть $\mu = \mu_1^{(\nu_k)}, \mu_2^{(\nu_k)}, \ldots, \mu_m^{(\nu_k)}, \ldots$, положительные корни уравнения $J_{\nu_k}(\mu a) = 0$, расположенные в порядке их возрастания, тогда функции

$$X_{k,m}(r, s) = r^{-\frac{n-2}{2}} J_{\nu_k}\left(\mu_m^{\nu_k} r\right) Y_{k,n}(s),$$

$$k = 0,1,1, \ldots, m = 1,2, \ldots$$

дают нетривиальные решения уравнения (2.16), удовлетворяющие краевым условиям (2.17) при $\lambda = \lambda_{k,m} = (\mu_m^{(\nu_k)})^2$, то есть $\lambda_{k,m} = (\mu_m^{(\nu_k)})^2$ - собственные значения, а соответствующие собственные функции $X_{k,m}(r,s) = r^{-fracn-22} J_{\nu_k}(\mu_m^{\nu_k} r) Y_{k,n}(s), k = 0,1,1,\ldots, m = 1,2,\ldots$, образуют ортогональную систему в $L_2[D]$ (см. [3]). Вернемся теперь к поставленной в начале сингулярной смешанной задаче. Подставив в уравнение (2.15) вместо λ , его значение $\lambda_{k,m} = (\mu_m^{(\nu_k)})^2$, мы получим

$$T' + (\mu_m^{(\nu_k)})^2 T = 0$$

Отсюда $T_{k,m}(t) = A_{k,m} e^{-(\mu_m^{(\nu_k)})^2 t}$.

Поэтому все функции

$$u_{k,m}(t,x) = A_{k,m} e^{-(\mu_m^{(\nu_k)})^2 t} r^{-\frac{n-2}{2}} J_{\nu_k}(\mu_m^{\nu_k} r) Y_{k,n}(s)$$

по построению удовлетворяют уравнению (2.11) и граничным условиям (2.13) при любых $A_{k,m}$. Попытаемся определить это постаянные таким образом, чтобы бесконечный ряд

$$u(t,x) =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} A_{k,m} e^{-(\mu_m^{(\nu_k)})^2 t} r^{-\frac{n-2}{2}} J_{\nu_k}(\mu_m^{\nu_k} r) Y_{k,n}(s) \qquad (2.22)$$

удовлетворял начальному условию (2.12), то есть

$$u(t,x)|_{t=0} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} A_{k,m} e^{-(\mu_m^{(\nu_k)})^2 t} r^{-\frac{n-2}{2}} J_{\nu_k}(\mu_m^{\nu_k} r) Y_{k,n}(s) = \varphi(x) =$$
$$= \varphi(r,s)$$

откуда видно, что $A_{k,m}$ есть коэффициенты Фурье - Бесселя функции

$\varphi(x)$ по системе собственных функций

$$X_{k,m}(r,s) = r^{-\frac{n-2}{2}} J_{\nu_k}(\mu_m^{\nu_k} r) Y_{k,n}(s), k = 0,1,2,\ldots, m = 1,2,\ldots.$$

Они вычисляются по формулам

$$A_{k,m} Y_{k,m}(s) =$$

$$= N_{k,m} \int_0^a \int_{S_1} \varphi(\sigma, s') J_{\nu_k}(\mu_m^{(\nu_k)} \sigma) I_{k,n}((s,s')) \sigma^{\frac{n}{2}} d\sigma ds',$$

где $I_{k,n}((s,s'))$ - сферическая гармоника порядка $k, s, s' \epsilon S_1$ - точки единичной сферы $S_1, (s, s,)$ - скалярные произведенные единичных векторов $\overleftarrow{OS}$ и $\overleftarrow{OS'}$,

$$ds' = sin^{n-2}\theta_1' sin^{n-3}\theta_2' \cdots sin\theta_{n-1}' d\theta_1' d\theta_2' \cdots d\theta_{n-1}', N_{k,m} =$$

$$= \frac{2(2k+n-2)}{(n-2)|S_1| a^{\frac{n+2}{2}} J_{\nu_k+1}^2(\mu_m^{(\nu_k)} a)}$$

Здесь мы воспользовались формулой для сферических функций: [17].

$$Y_{k,n}(s) = \frac{2k+n-2}{(n-2)|S_1|} \int_{S_1} Y_{k,n}(s') I_{k,n}((s,s')) ds',$$

и их ортогональностью,

$$\int_{S_1} Y_{k,n}(s') I_{k,n}((s,s')) ds' = 0, k \neq j,$$

а так же свойствами обобщенной ортогональности функций $J_{\nu_k}(\mu_m^{\nu_k} p)$ при фиксированном

$$\nu_k^2 = \frac{4q^2 + (2k+n-2)^2}{4} [18],$$

а именно:

$$\int_0^a pJ_{\nu_k}(\mu_i^{(\nu_k)}p)J_{\nu_k}(\mu_j^{(\nu_k)}p)dp = 0 \text{ при } i \neq j,$$

$$\int_0^a pJ_{\nu_k}^2(\mu_m^{(\nu_k)}p)dp = \frac{a^2}{2}J_{\nu_k}^2(\mu_m^{(\nu_k)}a)$$

и полноту системы функций

$$\{J_{\nu_k}(\mu_m^{(\nu_k)}r)Y_{k,n}(s)\}k = 0,1,2,\ldots,m = 1,2,\ldots.$$

Коротко остановимся на условиях сходимости ряда (2.22).

Так как система функций

$$\{J_{\nu_k}(\mu_m^{(\nu_k)}r)Y_{k,n}(s)\}k = 0,1,2,\ldots,m = 1,2,\ldots.$$

образует полную ортогональную систему в $L_2[D]$ (см. [18]) и $\varphi(x)|_{r=a} = 0$, в силу условий согласованности, то функция $r_{n-2}^2\varphi(x)$ разлагается в регулярно сходящийся ряд, по системе функций

$$\{J_{\nu_k}(\mu_i^{(\nu_k)}r)Y_{k,n}(s)\}m = 1,2,\ldots.$$

$$r_{n-2}^2\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} C_{k,m}J_{\nu_k}(\mu_m^{(\nu_k)}r)Y_{k,n}(s) \qquad (2.23)$$

где

$$C_{k,m}Y_{k,n}(s) =$$

$$N_{k,m}\int_0^a\int_{S_1}\varphi(\sigma,s')J_{\nu_k}(\mu_m^{(\nu_k)}\sigma)I_{k,n}((s,s'))\sigma^{\frac{n}{2}}d\sigma ds',$$

то есть $A_{k,m} = C_{k,m}$.

Следовательно, в силу ограниченности функций $e^{-(\mu_m^{(\nu_k)})^2 t}$ при $t \geq 0$, ряд (12) также сходится абсолютно и равномерно, как ряд (2.22).

Поэтому, функция $u(t,x)$, определяемая этим рядом, непрерывна в замкнутом цилиндре $C_\infty = (0,\infty) \times D$, и принимает заданные значения на его нижнем основании и на его боковых сторонах. Оста показать, что внутри $C_\infty = (0,\infty) \times D$, она удовлетворяет уравнению (2.11). Для этого достаточно показать, что ряды, полученные из (2.22) почленным однократным дифференцированием по t или двукратным почленным дифференцированием по x, также абсолютно и равномерно сходятся при $t \geq t_0 > 0$, какого бы ни было $t_0 > 0$. А это последнее утверждение следует из того, что при всяком положительном t_0

$$(\mu_m^{(\nu_k)})^2 e^{-(\mu_m^{(\nu_k)})^2 t_0} < 1$$

если m достаточно велико, ибо $\mu_m^{(\nu_k)} l = (m + \frac{1}{2}\nu_k - \frac{1}{4})\pi + o(1/m)$[2]. Таким образом, ряд (2.22) да классическое решение задачи (2.11)-(2.13).

2.5.3. Основной результат

Теорема 5.1. *Пусть* $\mu = \mu_1^{(\nu_k)}, \mu_2^{(\nu_k)}, \ldots, \mu_m^{(\nu_k)}, \ldots$, *положительные корни уравнения* $J_{(\nu_k)}(\mu l) = 0$, *расположенные в порядке их возрастания. Тогда задача*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \triangle_n u + \frac{p^2}{r^2} u = 0, 0 < |x| = r < a, 0 < t < \infty \qquad (2.24)$$

$$u(t,x)|_{t=0} = \varphi(x) \qquad (2.25)$$

$$u(t,x)|_{r=a} = 0 \qquad (2.26)$$

имеет единственное классическое решение, в виде

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} A_{k,m} e^{-(\mu_m^{(\nu_k)})^2 t} r^{-\frac{n-2}{2}} J_{\nu_k}(\mu_m^{\nu_k} r) Y_{k,n}(s),$$

где коэффициенты определяются по формулам:

$$A_{k,m} Y_{k,m}(s) = N_{k,m} \int_0^a \int_{S_1} \varphi(\sigma, s') J_{\nu_k}(\mu_m^{(\nu_k)} \sigma) I_{k,n}((s,s')) \sigma^{\frac{n}{2}} d\sigma ds',$$

$$N_{k,m} = \frac{2(2k+n-2)}{(n-2)|S_1| a^{\frac{n+2}{2}} J_{\nu_k+1}^2(\mu_m^{(\nu_k)} a)}.$$

Обсуждение полученных результатов

Глава 1 посвящена изучению задачи Дирихле и Неймана для эллиптических систем второго порядка с двумя неизвестными функциями от двух независимых переменных с разрывными коэффициентами на плоскости. В § 1 первой главы рассматривается следующая система уравнений

$$\begin{aligned} & a(z)W_{z\overline{z}} + b(z)\overline{W}_{\overline{z}z} + c(z)(\overline{z}/|z|)^n W_{zz} + (z/|z|)^n d(z)\overline{W}_{\overline{z}\overline{z}} + \\ + \quad & a_1(z)W_{\overline{z}} + b_1(z)\overline{W}_z + c_1(z)W_z + d_1(z)\overline{W}_{\overline{z}} + \\ + \quad & e_1(z)W + h_1(z)\overline{W} = g(z), \end{aligned} \tag{1}$$

где $z = x + iy, W = u(x,y) + iv(x,y)$, n - целое число,

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right), \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

$a(z), b(z), c(z), d(z)$ являются непрерывными в ограниченной односвязной области $\overline{D}$ функциями, $g(z) \in L^p_{\beta-2/p}(D)$ $(0 < \beta < 2, p > 2)$:

$$L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D) = \{g(z)\textcircled{:}z|^{\beta-\frac{2}{p}}g(z) =$$

$$= G(z) \in L^p(D), ||g||_{L^p_{\beta-2/p}} = ||G||_{L^p}\}.$$

Как видно, коэффициенты уравнения (1) при производных W_{zz} и $\overline{W}_{\overline{z}\overline{z}}$ в точке $z = 0$ имеют неустранимый разрыв. На каждом луче, выходящим из начала координат, функция $(z/|z|)^n$ постоянна и в точке $z = 0$ имеет различные пределы по лучам. Эллиптичность системы (1) означает, что выполнено неравенство

$$|a(z) + c(z)t|^2 - |b(z) + d(z)t|^2 \neq 0, (2)$$

Для $\forall z \in \overline{D}, |t| = 1$. Из работы [30], следует, что условие (2) эквивалентно выполнению одного из неравенств:

$$|\Delta_1(z)| > |\lambda(z)| + |\mu(z)|, \forall z \in \overline{D}, \tag{3}$$

$$|\Delta_2(z)| > |\lambda(z)| + |\mu(z)|, \forall z \in \overline{D}, \tag{4}$$

где

$$\Delta_1(z) = |a(z)|^2 - |b(z)|^2, \Delta_2(z) = |d(z)|^2 - |c(z)|^2,$$

$$\lambda(z) = \overline{a(z)}c(z) - b(z)\overline{d(z)}, \mu(z) = a(z)\overline{d(z)} - \overline{b(z)}c(z).$$

Для системы (1) ставится следующая

Задача Дирихле. Найти непрерывное решение системы (1) в области D из класса $W_p^2(D), 2 < p < \infty$, удовлетворяющие на границе Γ условию

$$W(t)|_\Gamma = 0. \tag{5}$$

Задача (1), (5) при $n = 0$, была изучена Б.В.Боярским [59] в случае сильно эллиптических систем, то есть когда коэффициенты системы (1) удовлетворяют неравенству

$$||a(z)| - |b(z)|| > |c(z)| + |d(z)|, \text{при } \forall z \in \overline{D}.$$

В работах [38], [39] Джангибекова Г. были изучены задачи Дирихле и Неймана для общих эллиптических систем уравнений второго порядка с двумя функциями от двух переменных с непрерывными коэффициентами при старших производных. Показано, что указанные краевые задачи не всегда обладают "фредгольмовыми" свойствами. В предположении непрерывности коэффициентов системы при старших производных были установлены необходимые и достаточные условия нётеровости и даны формулы для

вычисления индекса указанных задач в пространстве Соболева $W_p^2(D), 2 < p < \infty$. Далее введем следующие обозначения:

$$R_p(k) = \sqrt{1 - \frac{2n\left(1 - \frac{2}{p}\right)}{\left(k + \frac{2}{p}\right)\left(k + \frac{2}{q} - n\right)}}, k \geq n_0,$$

$k \neq \frac{n}{2}(1 + signn) - 1, \frac{2}{p} + \frac{2}{q} = 1,$ n_0 - целая часть числа $(n-1)/2$;

$$\Lambda = \begin{cases} \frac{\Delta_1(0)}{\mu(0)}, & \text{если выполнено (3);} \\ \frac{\mu(0)}{\Delta_2(0)}, & \text{если выполнено (4).} \end{cases}$$

Через $\mu_p(\Lambda)$ обозначим число, равное для $|\Lambda| < 1$ количеству значений k при которых $R_p(k) < |\Lambda|$, а для $|\Lambda| > 1$ равное количеству значений k, при которых $R_p(k) > |\Lambda|$.

Если $n \geq 0$, то введем число

$$\varkappa_p(\lambda) = \begin{cases} -2\mu_p(\Lambda) & \text{при } |\Lambda| < 1, \\ 2n - 2\mu_p(\Lambda) & \text{при } |\Lambda| > 1, \text{и } \mu_p(\Lambda) \neq n/2, \\ n + 1 & \text{при } |\Lambda| > 1, \text{и } \mu_p(\Lambda) = n/2, \end{cases}$$

если $n \leq -1$, то введем

$$\varkappa_p(\Lambda) = \begin{cases} -2\mu_p(\Lambda) & \text{при } |\Lambda| < 1, \text{и } \mu_p(\Lambda) \neq n/2, \\ 2n - 2\mu_p(\Lambda) & \text{при } |\Lambda| > 1, \\ n + 1 & \text{при } |\Lambda| < 1, \text{и } \mu_p(\Lambda) = n/2. \end{cases}$$

Основными результатами параграфа 1 являются

Теорема 1.1. *Пусть в (1)* $n = 0$. *Тогда для того чтобы задача Дирихле (5) для эллиптической системы (1) в классе* $W_p^2(D)$, $2 < p < \infty$ *была н, необходимо и достаточно выполнение одного из следующих (исключающих друг друга), условий:*

$$|\Delta_1(z)| > |\lambda(z)| + |\mu(z)| \text{для всех } z \in \overline{D}, \tag{6}$$

$$|\Delta_2(z)| > |\lambda(z)| + |\mu(z)| \text{для всех } z \in \overline{D};\ \mu(t) \neq 0 \text{ для всех } t \in \Gamma. \tag{7}$$

При этом, если выполнено условие (6), то задача фредгольмова; если выполнено (7), то индекс задачи равен

$$\varkappa = -2Ind_{\Gamma}\mu(t).$$

Теорема 1.2. *Пусть в (1)* $n \neq 0$ *и* $\lambda(0) = 0$. *Если* $\Lambda \neq 1, \Lambda \neq R_n(k), k$ *целое,* $k \geq 1/2n(1 + signn)$ *и выполняется одно из исключающих друг друга условий (6), (7), то, задача Дирихле для эллиптической системы (1) в классе* $W_p^2(D)$, $2 < p < \infty$ *нетерово, причем если выполнено (6), то индекс задачи равен* $\varkappa_p(\Lambda)$, *а если выполнено (7), то*

$$\varkappa = 2Ind_{\Gamma}\mu(t) + \varkappa_p(\lambda).$$

Аналогичные результаты имеют место для задачи Неймана для системы (1).

В § 2 рассматривается более частная по сравнению с изложенной в параграфе 1 эллиптическая система с разрывными коэффициентами, с целью получения более конкретных результатов относительно картины разрешимости рассматриваемых задач. Пусть отыскиваются непрерывные решения неоднородной системы

$$a(z)\frac{\partial^2\omega}{\partial z\partial\bar{z}} \quad +b(z)e^{2i\varphi}\frac{\partial^2\overline{\omega}}{\partial z^2}+a_1(z)\frac{\partial\omega}{\partial\bar{z}}+b_1(z)\frac{\partial\overline{\omega}}{\partial z}+c_1(z)\frac{\partial\omega}{\partial z}+ \\ +d_1(z)\frac{\partial\overline{\omega}}{\partial\bar{z}}+e_1(z)\omega+h_1(z)\overline{\omega}=g(z), \tag{8}$$

в области D из класса $W_p^2(D), 2<p<\infty$, удовлетворяющие на границе Г, условию

$$\omega(t)|_\Gamma = 0. \tag{9}$$

Следующее утверждение следует из работы Г.Джангибекова [30]:

Теорема 2.1. *Пусть в (8)* $a(0)=0$ *или* $b(0)=0$. *Тогда для того, чтобы задача Дирихле (9) для эллиптической системы (8) была нетеровой, необходимо и достаточно выполнение одного из следующих (исключающих друг друга) условий:*

$$|a(z)|>|b(z)| \text{ для всех } z\in\overline{D}, \tag{10}$$

$$|a(z)|<|b(z)| \text{ для всех } z\in\overline{D}, a(t)\neq 0 \text{ для всех } t\in\Gamma. \tag{11}$$

При этом, если выполнено условие (10), то задача фредгольмова; если выполнено (11), то индекс задачи равен

$$\varkappa = -2Ind_\Gamma a(t).$$

Наряду с исходной задачи (8),(9) рассматривается вспомогательное модельное уравнение

$$a(0)\frac{\partial^2\omega}{\partial z\partial\bar{z}}+b(0)e^{2i\varphi}\frac{\partial^2\overline{\omega}}{\partial z^2}=g(z) \tag{12}$$

и задача (9) для (12). Введем обозначения:

$$R_p(k) = \sqrt{1 - \frac{4(1-\frac{2}{p})}{k^2 - \frac{4}{p^2}}}, k = 0,2,3,\dots,; \ \lambda = \frac{b(0)}{a(0)},$$

$\varkappa_+$ и $\varkappa_-$ - соответственно обозначают число линейно независимых (над полем вещественных чисел) решений однородной задачи 8, 9 и число условий разрешимости неоднородной задачи.

Основными результатами параграфа 2 являются

Теорема 2.2. *Для нормальной разрешимости модельной задачи (12), (9) в классе* $W_p^2(D)$, $2 < p < \infty$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$|\lambda| \neq 1 \text{ и } |\lambda| \neq R_p(k_0), k_0 = 0,2,\dots. \tag{13}$$

Если $|\lambda| < R_p(2)$, то задача (12), (9) имеет в классе $W_p^2(D)$ $(2 < p < \infty)$ единственное решение;

если $R_p(k_0) < |\lambda| < R_p(k_0+1), k_0 = 2,3,\dots,$ то $\varkappa_+ = 0, \varkappa_- = 2k_0 - 2$; если $1 < |\lambda| < p-1$, то $\varkappa_+ = 3, \varkappa_- = 0$; если $|\lambda| > p-1$, то $\varkappa_+ = 4, \varkappa_- = 0$. При этом линейно независимые решения однородной задачи и условия разрешимости неоднородной выписываются в явном виде.

Теорема 2.3. *Для того, чтобы исходная задача (8), (9) в классе* $W_p^2(D)$, $2 < p < \infty$ *была нетеровой, необходимо и достаточно выполнение условий*

$$|a(z)| \neq |b(z)| \text{ для всех } z \in \overline{D}, a(t) \neq 0 \text{ для всех } t \in \Gamma, \tag{14}$$

$$|\lambda| \neq R_p(k), k = 0, 2, \dots, \tag{15}$$

причем индекс задачи равен

$$\varkappa = -2Ind_\Gamma a(t) + \varkappa_p(\lambda),$$

где

$$\varkappa_p(\lambda) = \begin{cases} -2\mu_p(\lambda) & \text{при } |\lambda| < 1, \\ 4 - 2\mu_p(\lambda) & \text{при } |\lambda| > 1, \text{и } \mu_p(\lambda) \neq 1, \\ 3 & \text{при } |\lambda| > 1, \text{и } \mu_p(\lambda) = 1. \end{cases}$$

Результаты параграфов 1 и 2 главы 1 опубликованы в работах [3-А] и [4-А], где установлены эффективные необходимые и достаточные условия нетеровости задачи Дирихле и Неймана для эллиптической системы второго порядка с разрывными коэффициентами и получены формулы для вычисления индекса.

В § 3 главы 1 изучается задача линейного сопряжения для обобщённой системы Коши – Римана с сингулярными коэффициентами в весовом пространстве Лебега $L^p_{\beta-1-2/p}(D^+) \cap W^1(D^+)$, где $2 < p < \infty, 0 < \beta < 1$. Указанная система ранее была предметом исследования со стороны Л.Г. Михайлова и З.Д. Усманова при различных условиях малости коэффициентов. В данном параграфе, путем эквивалентного перехода к двумерным сингулярным интегральным уравнениям по ограниченной области доказывается, что данная задача нётерова и получена формула для подсч индекса задачи. Как оказалось, сингулярность коэффициентов существенно влияет на разрешимость рассматриваемой задачи и зависит от показателя веса рассматриваемых пространств функций. При этом, от коэффициентов системы, в отличие от соответствующих работ Л. Г. Михайлова и З. Д. Усманова, не требуется условия малости коэффициентов.

Пусть $G^+ = \{z: |z| < 1\}, \Gamma = \{t: |t| = 1\}, G^- = \{z: |z| > 1\}$. Обозначим через $\mathfrak{M}(\mathfrak{D})$ – множество функций $\varphi(z)$, принадлежащих $L^p_{\beta-1-2/p}(D^+) \cap W^1(D^+\backslash 0)$, где $2 < p < \infty, 0 < \beta < 1$. Это означает, что функция $\varphi(z)$ имеет в $D^+\backslash 0$ обобщенные производные $\varphi_{\bar{z}}, \varphi_z$ и $|z|^{\beta-n-2/p} \in L^p(D^+)$ при $2 < p < \infty, 0 < \beta < 1$.

Требуется найти решения уравнений

$$\begin{aligned}&\varphi_{\overline{z}}+\frac{c(z)}{\overline{z}}\varphi+\frac{d(z)}{\overline{z}}\overline{\varphi}=g(z), z\in D^{+}, \varphi\in\mathfrak{M}(\mathfrak{D}^{+}),\\&\varphi_{\overline{z}}=0, z\in D^{-}, \text{при } \varphi(\infty)=0 \text{ (порядок нуля равен2)},\end{aligned} \tag{16}$$

имеющие непрерывные граничные значения и удовлетворяющие на Γ, условию

$$\varphi^{+}(t)=a(t)\varphi^{-}(t)+b(t)\overline{\varphi^{-}(t)}, t\in\Gamma, \tag{17}$$

где $c(z), d(z)$ – измеримые ограниченные в $\overline{D}^{+}$ функции, имеющие пределы $\lim_{z\to 0}c(z)=c(0), \lim_{z\to 0}d(z)=d(0), g(z)\in L^{p}_{\beta-n+1-2/p}(D^{+})$, функции $a(t)$ и $b(t)$ на Γ удовлетворяют условию

$$|a(t)|\neq|b(t)|, \tag{18}$$

и принадлежат классу $SW^{1}_{p}(\Gamma), p>2$ (см.монографию Монахова В.Н. [77] стр. 267) с сохранением условия (17), т.е. их соответствующие продолжения $a(z), b(z)$ внутри области D^{+} принадлежат $W^{1}_{p}(D^{+}), p>2$, и удовлетворяют неравенству:

$$|a(z)|\neq|b(z)|, z\in\overline{D}^{+}.$$

Основным результатом параграфа является

Теорема 3.2. *Для разрешимости задачи (16),(17) в классе* $\mathfrak{M}$, *необходимо и достаточно выполнение условий:*

1. $|a(z)|\neq|b(z)|$ при $|z|\leq 1, a(t)\neq 0$ при $|t|=1$,
2. $\mathcal{G}_{k}(t)\neq 0, -\infty<t<\infty, 0\leq k\leq N_{0}$,

причем индекс задачи равен

$$\varkappa=-2\underset{|t|=1}{Ind}\,a(t)+\sum_{k=0}^{N_{0}}\varkappa_{k},$$

где

$$\varkappa_k = -2 \underset{-\infty<t<\infty}{Ind} \mathcal{G}_k(t), \text{при } 1 \le k \le N_0,$$
$$\varkappa_0 = - \underset{-\infty<t<\infty}{Ind} \mathcal{G}_0(t), \text{при } k = 0,$$

функции $\mathcal{G}_k(t)$ определяются по формуле

$$\mathcal{G}_k(t) = 1 - \frac{4}{1-|\lambda|^2} \times$$

$$\times \frac{(|\lambda|^2 - Re\gamma)(1-\beta'+it) + Re(\overline{\lambda}\mu + \nu) + |\nu|^2 - |\mu|^2 - ikIm\gamma}{k^2 - (2-\beta'+it)^2}, \qquad (19)$$

Задача линейного сопряжения для обобщённой системы Коши – Римана с сингулярными коэффициентами в весовом пространстве лебега $L^p_{\beta-1-2/p}(D^+) \cap W^1(D^+)$, где $2 < p < \infty, 0 < \beta < 1$ изложенны в статье [5–A].

Глава 2 посвящена получению формулы представления решений начально – краевой задачи для одного многомерного параболического уравнения с сингулярным коэффициентом.

В параграфе 4 главы 2 в прямоугольнике $Q = \{0 < t < T, 0 < x < l\}$ рассматривается параболическое уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial^2 x} + \frac{p^2}{x^2} u = 0, \qquad (20)$$

где $t, x \in Q = \{0 < t < T, 0 < x < l\}$.

Требуется найти в прямоугольнике Q решение уравнения (21), удовлетворяющее начальному условию

$$u(t,x)|_{t=0} = \varphi(x) \qquad (21)$$

и при $t > 0$ граничным условиям

$$u(t,0) = u(t,l) = 0. \tag{22}$$

При этом предполагается, что функция $\varphi(x)$ непрерывна и удовлетворяет условиям согласованности $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$. Доказана следующая

Теорема 4.1. *Пусть* $k = k_1^{(\nu)}, k_2^{(\nu)}, \dots, k_m^{(\nu)}, \dots,$ *положительные корни уравнения* $J_\nu(kl) = 0$, *расположенные в порядке их возрастания. Тогда задача*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial^2 x} + \frac{p^2}{x^2} u = 0, 0 < x < l, t > 0$$

$$u(t,x)|_{t=0} = \varphi(x)$$

$$u(t,0) = u(t,l) = 0$$

имеет единственное классическое решение в виде

$$u(t,x) = \sum_{m-1}^{\infty} A_m e^{-(k_m^{(\nu)})^2 t} \sqrt{x} J_\nu(k_m^{(\nu)} x)$$

где $J_{\pm\nu}(x)$ - функции Бесселя первого и второго рода, а коэффициенты A_m определяются по формуле:

$$A_m = \frac{2}{l^2 J_{\nu+1}^2(k_m^{(\nu)})} \int_0^1 \varphi(x) J_\nu(k_m^{(\nu)} x) x dx.$$

В § 5 главы 2 в цилиндре

$$G = \{(t,x): 0 < t < \infty, x \in D\},$$

где $D = \{r < a\}$ n – мерный шар радиуса a, рассматривается следующее параболическое уравнение с сингулярным коэффициентом

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\triangle_n u + \frac{p^2}{r^2} u = 0. \tag{23}$$

Требуется найти решение уравнение (20)–(22), удовлетворяющее начальному условию

$$u(t,x)|_{t=0} = \varphi(x), x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \tag{24}$$

и при $t \geq 0$, краевому условию

$$u(t,x)|_{r=a} = (0), \tag{25}$$

где функция $\varphi(x) \in C^2(\overline{D})$ и удовлетворяет условию согласованности

$$\varphi(t,x)|_{r=a} = 0,$$

$\Delta_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, – n мерный оператор Лапласа, $r^2 \equiv |x|^2 = \sum_{k=1}^{n} x_i^2$ p – постоянное число.

Доказана следующая

Теорема 5.1. *Пусть* $\mu = \mu_1^{(\nu_k)}, \mu_2^{(\nu_k)}, \dots, \mu_m^{(\nu_k)}, \dots,$ *положительные корни уравнения* $J_{(\nu_k)}(\mu l) = 0$, *расположенные в порядке их возрастания. Тогда задача*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta_n u + \frac{p^2}{r^2} u = 0, 0 < |x| = r < a, 0 < t < \infty \tag{26}$$

$$u(t,x)|_{t=0} = \varphi(x) \tag{27}$$

$$u(t,x)|_{r=a} = 0 \tag{28}$$

имеет единственное классическое решение, в виде

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} A_{k,m} e^{-(\mu_m^{(\nu_k)})^2 t} r^{-\frac{n-2}{2}} J_{\nu_k}(\mu_m^{\nu_k} r) Y_{k,n}(s)$$

где коэффициенты определяются по формулам:

$$A_{k,m}Y_{k,m}(s) = N_{k,m}\int_0^a \int_{S_1} \varphi(\sigma, s')J_{\nu_k}(\mu_m^{(\nu_k)}\sigma)I_{k,n}((s,s'))\sigma^{\frac{n}{2}}d\sigma ds',$$

$$N_{k,m} = \frac{2(2k+n-2)}{(n-2)|S_1|a^{\frac{n+2}{2}}J_{\nu_k+1}^2(\mu_m^{(\nu_k)}a)}.$$

Формулы представления решений начально – краевой задачи для одномерного и многомерного параболического уравнения с сингулярным коэффициентом, опубликованы в работах [1-A] и [2-A].

Заключение

- установлены эффективные необходимые и достаточные условия нетеровости задачи Дирихле и Неймана для эллиптической системы второго порядка с разрывными коэффициентами и получена формула для вычисления индекса задачи [4–А];
- получена полная картина разрешимости задач Дирихле и Неймана для более частной эллиптической системы дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами [3–А];
- задачи линейного сопряжения для обобщенной системы Коши – Римана с сингулярными коэффициентами, установлены необходимые и достаточные условия нётеровости и получена формула для подсч индекса задачи без условия малости коэффициентов [5–А];
- для одного уравнения параболического типа с сингулярным коэффициентом найдена формула представления начально–краевой задача в виде рядов Фурье – Бесселя [1–А];
- для одного класса многомерного уравнения параболического типа с сингулярным коэффициентом найдена формула представления начально–краевой задача в виде рядов Фурье – Бесселя [2–А];

Литература

1. КЕЛДЫШ М.В. О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области [Текст] / М.В. Келдыш // ДАН СССР. – 1951. – т.77. – 2. – с.181 – 183.

2. КЕЛДЫШ М.В. О собственных значениях и собственных функиях некоторых классов несамосопряженных уравнений [Текст] / М.В. Келдыш // ДАН СССР. – 1951. – т.77. – 1. – с.11 – 14.

3. БИЦАДЗЕ А.В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка [Текст] / А.В. Бицадзе. М. – Наука. – 1966. – 204с.

4. БИЦАДЗЕ А.В. Уравнения смешанного типа [Текст] / А.В. Бицадзе. Изд-во АН СССР.– Москва. – 1959. – 164 с.

5. ИЛЬИН А.М. Вырождающиеся эллиптические и параболические уравнения [Текст] / А.М. Ильин // Матем. сб. – 1960. – т.50(92). – 4. – с.443 – 498.

6. ГЛУШКО В.П. Первая краевая задача для уравнений эллиптического типа, вырождающихся на многообразиях [Текст] / В.П. Глушко // ДАН СССР. – 1959. – т.129. – 3. – с.599 – 611.

7. ГЛУШКО В.П., САВЧЕНКО Ю.Б. Вырождающиеся эллиптические уравнения высокого порядка: пространства, операторы, граничные задачи [Текст] /В.П. Глушко, Ю.Б. Савченко // Итоги науки и техн. – Сер. мат. анал. – 1985. – с.125 – 218.

8. КИПРИЯНОВ И.А. Преобразование Фурье – Бесселя и теоремы вложения для весовых классов [Текст] / И.А Киприянов // Тр. МИАН СССР. – 1967. – т.89. – с.130 – 213.

9. КИПРИЯНОВ И.А., КАТРАХОВ В.В., ЛЯПИН В.М. О краевых задачах в областях общего вида для сингулярных параболических систем уравнений [Текст] / И.А Киприянов, В.В. Катрахов, В.М. Ляпин // Докл. АН СССР. – 1976. – т.230. – 6. – с.1271 – 1274.

10. КИПРИЯНОВ И.А. Сингулярные эллиптические краевые задачи [Текст] / И.А Киприянов. М.: – Наука. Физмат.лит. – 1997. – 208 с.

11. КАТРАХОВ В.В. Общие краевые задачи для одного класса сингулярных и вырождающихся эллиптических уравнений [Текст] / В.В. Катрахов // Матем. сб. – 1980. – т.112(154). – 3(7). – с.354 – 379.

12. КРЕХИВСКИЙ В.В., МАТИЙЧУК М.И. Фундаментальные решения и задача Коши для линейных параболических систем с оператором Бесселя [Текст] / В.В. Крехивский, М.И. Матийчук // Докл. АН СССР. – 1968, – т.181, – 6, с.1320 – 1323.

13. МАТИЙЧУК М.И. Фундаментальные решения параболических систем с разрывными коэффициентами и их применения к краевым задачам. I. [Текст] / М.И. Матийчук. // Дифференц. уравнения. – 1974. – т.10. – 8. – с.1463 – 1477.

14. МАТИЙЧУК М.И. Фундаментальные решения параболических систем с разрывными коэффициентами и их применения к краевым задачам. II. [Текст] / М.И. Матийчук. // Дифференц. уравнения. – 1975. – т.11. – 7. – с.1293 – 1303.

15. МАТИЙЧУК М. И. Фундаментальные решения параболических систем с разрывными коэффициентами и их применения к краевым задачам. III. [Текст] / М.И. Матийчук // Дифференц. уравнения. – 1978. – т.14. – 2. – с.291 – 303.

16. МИХАЙЛОВ Л.Г. Новый класс особых интегральных уравнений и его приложения к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами [Текст] / Л.Г. Михайлов. Душанбе. – 1963. – 183 с.

17. МИХАЙЛОВ Л.Г. Эллиптические уравнения с сингулярными коэффициентами [Текст] / Л.Г. Михайлов. ДАН СССР.– 1961. т.139. – 3. с.552 – 555.

18. МИХАЙЛОВ Л.Г. Эллиптические уравнения с сингулярными коэффициентами [Текст] / Л.Г. Михайлов // Изв. АН СССР. – Сер. матем. – 1962. – т.26. – 2. – с.293 – 312.

19. МИХАЙЛОВ Л.Г. МУХСИНОВ А. О некоторых формулах представления решений одного трехмерного сингулярного эллиптического уравнения [Текст] / Л.Г. Михайлов, А. Мухсинов // Российская академия наук. – 2005. – т.402. – 5. – с.596 – 600.

20. АЧИЛЬДИЕВ А.И. Первая и вторая краевые задачи для эллиптических уравнений, вырождающихся в конечном числе внутренних точек [Текст] / А.И.Ачильдиев // ДАН СССР. – 1963, т.152. – 1. – с.13 – 16.

21. АЧИЛЬДИЕВ А.И. Обобщенный принцип максимума для вырождающихся эллиптических уравнений [Текст] / А.И.Ачильдиев // Докл. АН ТаджССР. – 1961. – т.4. – 1, с.

22. АЧИЛЬДИЕВ А.И. Обобщенный принцип максимума и некоторые свойства решений краевых задач для вырождающихся зллиптических уравнений. Изв. отд. геолг.–хим. и техн. наук АН Тадж. ССР, вып. 2(8), 1962.

23. РАДЖАБОВ Н.Р. Построение потенциалов и исследование внутренних и внешних граничных задач типа Дирихле и Неймана для некоторых сингулярных уравнений эллиптического типа в многомерном случае [Текст] / Н.Р. Раджабов // ДАН СССР. 1976. – т.228. – 4. – с.801 – 804.

24. РАДЖАБОВ Н.Р. Интегральные представления для некоторых классов дифференциальных уравнений эллиптического типа с сингулярными гиперплоскостями, через решение уравнений с регулярными коэффициентами [Текст] / Н.Р. Раджабов // – 1977. т.233. – 5. – с.796 – 799.

25. РАДЖАБОВ Н.Р. Интегральные представления и граничные задачи для некоторых дифференциальных уравнений с сингулярной линией или сингулярными поверхностями части 1–4 [Текст] / Н.Р. Раджабов.

Душанбе. – 1981.

26. РАДЖАБОВ Н.Р. Решение задач типа Римана и Гильберта для обобщенной системы Коши–Римана с сингулярной линией [Текст] / Н.Р. Раджабов // Докл. АН СССР. – 1969. т.185. – 4. – с.764–767

27. РАДЖАБОВ Н.Р. Теоремы единственности решений задач и типов Дирихле и Неймана для общего сингулярного уравнения второго порядка эллиптического типа [Текст] / Н.Р. Раджабов // Докл. АН СССР. – 1979. т.246. – 1. с.14–19.

28. УСМАНОВ З.Д. Краевая задача для обобщенных аналитических функций с неподвижной особой точкой [Текст] / З.Д. Усманов // ДАН СССР. – 1971. – т.197. – 2. – с.288 – 291.

29. УСМАНОВ З.Д. Об одном классе обобщенных систем Коши – Римана с сингулярной точкой [Текст] / З.Д. Усманов // Сиб. матем. журн. –1973. – 5. – с.1076 – 1087.

30. УСМАНОВ З.Д. Обобщенные системы Коши – Римана с сингулярной точкой [Текст] / З.Д. Усманов. Душанбе. – 1993. –244 с.

31. УСМАНОВ З.Д. Связь многообразий решений общей и модельной обобщенных систем Коши–Римана с сингулярной точкой [Текст] / З.Д. Усманов // Матем. заметки. – т.66. – 2. – 1999. – с.302 – 307.

32. УСМАНОВ З.Д. Эффективное решение одного двумерного интегрального уравнения с однородным ядром и его приложения [Текст] / З.Д. Усманов // Дифференц. уравнения. – т.8. – 12. – 1972. – с.2267 – 2270.

33. ТУРСУНОВ М. Интегральное уравнение для одного эллиптического уравнения с сингелярным коэффициентом [Текст] / М. Турсунов // Докл. АН Тадж. ССР, т.15, 2, 1972 с. 11 – 14.

34. МУХСИНОВ А. Построение решений в виде двойных степенных рядов одного сингулярного уравнения эллиптического типа [Текст] / А.

Мухсинов // Доклады АН Тадж. ССР. – 1988. – т.31. – 9. – с. 499 – 503.

35. МУХСИНОВ А. Формула представления решений одного уравнения в частных производных с сингулярной линией [Текст] / А. Мухсинов // Доклады АН РТ. – 2009. – т.52. – 2. – с.101 – 105.

36. МУХСИНОВ А. О некоторых формулах представления решений многомерных эллиптичесих уравнений с сингулярной точками [Текст] / А. Мухсинов // Доклады АН РТ. – 2009. – т.52. – 5. – с.344 – 353.

37. МУХСИНОВ А. Формула представления решений задачи Дирихле для одного трехмерного уравнения в частных производных с сингулярной плоскостью [Текст] / А. Мухсинов // Доклады АН РТ. – 2009. – т.52. – 4. – с.261 – 266.

38. ДЖАНГИБЕКОВ Г. Об одном классе двумерных сингулярных интегральных операторов и его приложениях к краевым задачам для эллиптических систем уравнений на плоскости [Текст] / Г. Джангибеков // Докл. РАН. – 1993. – т.330. – 4. – с.415 – 417.

39. JANGIBEKOV G. On a class of two-dimensional singular integral operators and its applications to boundary value problems for elliptic systems of equations in the pline [Text]] / G. Jangibekov // Prosidings of the second ISAAC Congress. – volum 2. – 2000. – p.1421 – 1430.

40. ДЖАНГИБЕКОВ Г. Задача линейного сопржения решений эллиптических систем дифференциальных уравнений с сингулярными коэффициентами на плоскости [Текст] / Г. Джангибеков // ДАН СССР. – 1991. – т.317, 4, с.813 – 818.

41. ДЖАНГИБЕКОВ Г., ХУДЖАНАЗАРОВА Г.Х. О задаче Дирихле для эллиптической системы двух уравнений четвертого порядка на плоскости [Текст] / Г. Джангибеков, Г.Х. Худжаназарова // ДАН России. – 2004. – т.398. – 2. – с.151 – 155.

42. ДЖАНГИБЕКОВ Г., ХУДЖАНАЗАРОВА Г.Х. О нётеровости и индексе некоторых двумерных сингулярных интегральных операторов по ограниченной области [Текст] / Г. Джангибеков, Г.Х. Худжаназарова // ДАН России. – 2004. – т.396. – 4. – с.449 – 454.

43. ХУДЖАНАЗАРОВА Г.Х. Некоторые классы двумерных интегральных операторов с подвижными и неподвижными особенностями к краевым задачам для эллиптических систем с сингулярными коэффициентами [Текст] / Г.Х. Худжаназарова. Дисс. к. физ.– мат. н. – Душанбе. – 2004. – 92 с.

44. ЗАРИФБЕКОВ М.Ш. Некоторые классы двумерных интегральных операторов с подвижными и неподвижными особенностями и их приложения к краевым задачам для эллиптических систем с сингулярными коэффициентами [Текст] / М.Ш. Зарифбеков. Дисс. к. физ. – мат. н. – Душанбе. – 2004. – 92 с.

45. ОДИНАБЕКОВ Дж.М. Некоторые классы двумерных интегральных операторов с несколькими фиксированными особенностями и их приложения к эллиптическим системам дифференциальных уравнений [Текст] / Дж.М. Одинабеков. Дисс. к. физ.–мат. н. – Душанбе. – 2007. – 62 с.

46. ДЖАНГИБЕКОВ Г., ЗАРИФБЕКОВ М.Ш. О задаче Римана-Гильберта для обобщенной системы Коши-Римана с сингулярным коэффициентом [Текст] / Г. Джангибеков, М.Ш. Зарифбеков// Вестник ТГНУ. – 2005. – серия математика. – 1. с.35 – 43.

47. ДЖАНГИБЕКОВ Г., ОДИНАБЕКОВ Дж.М. О некоторых классах двумерных сингулярных интегральных операторах и их приложениях к краевым задачам [Текст] / Г. Джангибеков, Дж.М. Одинабеков // В сборнике "Современные про- блемы естественных наук. – Филиал МГУ им.М.В.Ломоносова в г. Душанбе. – 2017. – с.13 – 16.

48. ПЕТРОВСКИЙ И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными [Текст] / И.Г. Петровский. М.: Физ.-мат. лит. – 1961. – 400 с.

49. ВЛАДИМИРОВ В.С. Уравнения математической физики [Текст] / В.С. Владимиров. М.: – Наука. – 1976. – 528 с.

50. МИХЛИН С.Г. Линейные уравнения в частных производных [Текст] / С.Г. Михлин. М.: – ВШ. – 1977. – 431 с.

51. ЛАВРЕНТЬЕВ М.А., ШАБАТ Б.В. Методы теории функций комплексного переменного [Текст] / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. М.: – Наука. – 1972. – 736 с.

52. СИДОРОВ Ю.В., ФЕДОРЮК М.В., ШАБУНИН М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного [Текст] / Ю.В. Сидоров, М.В. Федорюк, М.И. Шабунин. – М.: – Наука. – 1989. – 477 с.

53. ВИШИК М.И. О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений [Текст] / М.И. Вишик // Матем. сб. – 1951. т.29(71). 3. – с.615 – 676.

54. БИЦАДЗЕ А.В. О единственности решения задачи Дирихле для эллиптических уравнений с частными производными [Текст] / А.В. Бицадзе // УМН. – 1948. т.3 – выпуск 6(28). –с.211–212.

55. БИЦАДЗЕ А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных [Текст] / А.В. Бицадзе. М.: – Наука. – 1981. – 448 с.

56. ВЕКУА И.Н. Новые методы решения эллиптических уравнений [Текст] / И.Н. Векуа. М.: – Гостехиздат. – 1948. – 296 с.

57. ВЕКУА И.Н. Обобщённые аналитические функции [Текст] / И.Н. Векуа. М.: – Физматгиз. – 1959. – 672 с.

58. ВЕКУА И.Н. Задача приведения к каноническому виду дифференциальных форм эллиптического типа и обобщенная система Коши–Римана [Текст] / И.Н. Векуа // ДАН СССР. – 1955. – т.100. – 2. – с.197 – 200.

59. БОЯРСКИЙ Б.В. Исследования по уравнениям эллиптического типа на плоскости и граничным задачам теории функций [Текст] / Б.В. Боярский. Дисс. д. физ. – мат. н. – М. 1960.

60. БОЯРСКИЙ Б.В. Некоторые граничные задачи для системы уравнений эллиптического типа [Текст] / Б.В. Боярский // ДАН СССР. – 1959. – т.124. – 1. с.1 – 4.

61. БОЯРСКИЙ Б.В. Об обобщенной граничной задаче Гильберта [Текст] / Б.В. Боярский // Сообщение АН Груз. ССР. – 1959. – т.25. – 4. – с.385 – 390.

62. БОЯРСКИЙ Б.В. Теория обобщенного аналитического вектора [Текст] / Б.В. Боярский // An.Polonici mathemat. – 1986. – vol.17. – 3. -с.281 – 320.

63. БОЯРСКИЙ Б.В. О решениях линейной эллиптической системы дифференциальных уравнений на плоскости [Текст] / Б.В. Боярский // ДАН СССР. – 1955. – т.102. – 5. – с.871 – 874.

64. CALDEГON A.P., ZYGMUND A. On the existence of singular integrals [Text] / A.P. Calderon, A. Zygmund // Acta Math. –1952. – 88. – p.85 – 139.

65. CALDEГON A.P., ZYGMUND A. On singular integrals [Text] / A.P. Calderon, A. Zygmund // American j. math. –1956. – 88. – p. 289 – 309.

66. ШАПИРО З.Я. Первая краевая задача для эллиптической системы дифференциальных уравнений [Text] / З.Я. Шапиро // Матем. сб. – 1951. – т.28(70). – выпуск 1. – с.55 – 78.

67. ШАПИРО З.Я. Об общих краевых задачах для уравнений эллиптического типа [Text] / З.Я. Шапиро // Изв. АН СССР. – Сер. матем. – 1953. – т.17. – выпуск 6. – с.539 – 562.

68. ТОВМАСЯН Н.Е. Задача Дирихле для эллиптической системы двух дифференциальных уравнений второго порядка [Text] / Н.Е. Товмасян // Докл. АН СССР. – 1963. – т.153. – 1. – с.53 – 56.

69. ТОВМАСЯН Н.Е. Задача Дирихле для эллиптической системы дифференциальных уравнений второго порядка [Text] / Н.Е. Товмасян // Докл. АН СССР. – 1964. – 159. – 5. – с.995 – 998.

70. ЗОЛОТАРЕВА Е.В. Задача Дирихле для одного класса эллиптических систем [Text] / Е.В. Золотарева // Докл. АН СССР. – 1960. – т.132. – 4. – с.751–753.

71. ВОЛЬПЕРТ А.И. Исследование по теории граничных задач для эллиптических систем уравнений с двумя независимыми переменными [Text] / А.И. Вольперт. Докторская диссертация. – М. – 1960.

72. ВОЛЬПЕРТ А.И. Об индексе и нормальной разрешимости граничных задач для эллиптических систем дифференциальных уравнений на плоскости [Text] / А.И. Вольперт // Тр. ММО. – 1961. – т.10. – 41 – 87.

73. ЛОПАТИНСКИЙ Я.Б. Об одном способе приведения граничных задач для системы дифферепциалных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям [Text] / Я.Б. Лопатинский // Укр. матем. журн. – 1953. – т.5. – 2. – с.123–151.

74. ДЖАНГИБЕКОВ Г., ЗАРИФБЕКОВ М.Ш. О нетеровости и индексе задачи Дирихле для одной эллиптической системы второго порядка с сингулярными коэффициентами [Текст] / Г. Джангибеков, М.Ш. Зарифбеков// Вестник Национального университета. – серия математика. – 2004. – 1. – с.33–41.

75. ДЖАНГИБЕКОВ Г. Некоторые интегральные уравнения с несуммируемыми однородными ядрами [Текст] / Г. Джангибеков. Дисс. к. физ.-мат. н. – Душанбе. – 1982. – 110 с.

76. ДЖУРАЕВ А.Д. Метод сингулярных интегральных уравнений [Текст] / А.Д. Джураев. – М.: – Наука. – 1987. – 415 с.

77. МОНАХОВ В.Н. Краевые задачи со свободными границами для

эллиптических систем уравнений [Текст] / В.Н. Монахов. М.: – Наука. – 1977. – 420 с.

78. ГАХОВ Ф.Д. Каевые задачи [Текст] / Ф.Д. Гахов. М.: – Физ.мат.лит. – 1963. – 639с.

79. СМИРНОВ В.И. Курс высшей математики [Текст] / В.И. Смирнов. М. – 1969. – Физ.мат.из. – 672с.

80. СМИРНОВ В.И. Курс высшей математики, т.2, [Текст] / В.И. Смирнов. М. – 1965. – Наука. – 600с.

81. БОГОЛЮБОВ А.Н., КРАВЦОВ В.В. Задачи по математической физике [Текст] / А.Н. Боголюбов, В.В. Кравцов М. Изд-во МГУ. – 1998. – 320 с.

82. ЯНУШАУСКАС А.И. Введение в аналитическую теорию вырождающихся эллиптических уравнений [Текст] / А.И. Янушаускас. Вильнюс. – 1974. – 152 с.

83. БОЯРСКИЙ Б.В. О первой краевой задачи для систем уравнений второго порядка на плоскости Бюлл [Текст] / Б.В. Боярский // Польск. АН. – серия математика. – 1959. – т.7. – 9. – с.565–570.

84. ВОЛЬПЕРТ А.И. О вычислении индекса задачи Дирихле [Текст] / А.И. Вольперт // ДАН УССР. – 1958. – 10. – с.1042–1044.

85. ВОЛЬПЕРТ А.И. Исследование граничных задач для эллиптических систем дифференциальных уравнений на плоскости [Текст] / А.И. Вольперт // ДАН СССР. – 1957. – т.114. – 3. – с.462–464.

86. ВОЛЬПЕРТ А.И. О первой краевой задаче для эллиптических систем дифференциальных уравнений [Текст] / А.И. Вольперт // ДАН. – 1959. – т.127. – 3. – с.487–489.

87. ЛОПАТИНСКИЙ Я.Б., ДАНИЛЮК И.И., СКРЫПНИК И.В. Донецкая конференция по дифференциальным уравнениям в частных производных [Текст] / Я.Б. Лопатинский, И.И. Данилюк, И.В. Скрыпник // УМН. –

1980. – т.35. – 1(211). – с.235–240.

88. ТОВМАСЯН Н.Е. Некоторые краевые задачи для уравнения Лапласа с разрывными граничными данными Сиб. матем. журн. [Текст] / Н.Е. Товмасян // Сиб. матем. журн. – 1964. – т.5. – 1. – с.174–185.

89. ЗОЛОТАРЕВА Е.В. Необходимое и достаточное условие фредгольмовости задачи Дирихле для некоторого класса эллиптических систем [Текст] / Е.В. Золотарева // Докл. АН СССР. – 1962. – т.145. – 4. – с.7724–726.

90. МАРКУШЕВИЧ А.И. Об одной граничной задаче аналитических функций [Текст] / А.И. Маркушевич // Ученые записки Московского университета. – 1946. – т.100. – с.20-30.

91. ВЕКУА И.Н. Системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптичесого типа и граничные задачи с применением к теории оболочек [Текст] / И.Н. Векуа // Матем.сб. – 1952. – т.31. – 2. – с.217–314.

92. Боярский Б. Общее представление решений эллиптической системы $2n$ уравнений на плоскости [Текст] / Б.В. Боярский // Докл. АН СССР//. – 1958. – т.122. – 4. с.543 – 546

93. БИЛЬМАН Б.М., ДЖАНГИБЕКОВ Г. Об условиях нетеровости и индексе некоторых двумерных сингулярных интегральных уравнений с разрывными коэффициентами по ограниченной односвязной области [Текст] / Б.М. Бильман, Г. Джангибеков // ДАН СССР. – 1986. – т.288. – 4. – с.792–797.

94. ДЖАНГИБЕКОВ Г. О разрешимости одного особого двумерного интегралного уравнения с комплексно сопряженной неизвестной функцией. [Текст] / Г. Джангибеков // Докл. АН ТаджССР. – 1977. – т.20. – 5. – с.3 – 6.

95. БИЛЬМАН Б.М., ДЖАНГИБЕКОВ Г. Об условиях нетеровости и индексе некоторых особых двумерных интегральных уравнений [Текст] / Б.М.

Бильман, Г. Джангибеков // ДАН СССР. – 1990. – т.312. – 1. – с.15 – 19.

96. ВАТСОН Г.Н. Теория бесселевых функций [Текст] / Г.Н. Ватсон. Л. ИЛ. – 1949. – ч.1 – 798 с.

97. СМИРНОВ В.И. Курс высшей математики [Текст] / В.И. Смирнов. – М.: – Физмат.гиз. – 1969. – т.3. – ч.2. – 672 с.

98. СМИРНОВ В.И. Курс высшей математики [Текст] / В.И. Смирнов. – М.: – Наука. – 1974. – т.2. – 479 с.

99. СМИРНОВ В.И. Вырождающиеся эллиптические и гиперболичес - кие уравнения [Текст] / В.И. Смирнов. М.: – Наука. – 1966. – 292 с.

100. ЯНУШАУСКАС А.И. Задача Дирихле для эллиптической по Петровскому системы уравнений второго порядка [Текст] / А.И. Янушаускас // Сиб. матем. журн. – 1999. – т.40. – 1. – с.226 – 234

101. БЕРЕЗАНСКИЙ Ю.М. Разложения по собственным функциям самосопряженных операторов [Текст] / Ю.М. Березанский. Наукова думка. – Киев. – 1965. – 798 с.

102. БЕСОВ О.В., ИЛЬИН В.П., НИКОЛЬСКИЙ С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения [Текст] / О.В. Бесов, В.П. Ильин, С.М. Никольский. М.: – Наука. – 1975. – 480 с.

103. ЛАДЫЖЕНСКАЯ О.А. Краевые задачи математической физики [Текст] / О.А. Ладыженская. М., Наука, 1973. – 407 с.

104. ЛАДЫЖЕНСКАЯ О.А. О единственности решения задачи Коши для линейного параболического уравнения [Текст] / О.А. Ладыженская // Матем. сб. – 1950. – т.27(69). – 2. – с.175–184.

105. ЛАДЫЖЕНСКАЯ О.А. О решении смешанной задачи для гиперболических уравнений [Текст] / О.А. Ладыженская // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1951. – т.15. выпуск 6. – с.545 – 562.

106. ЛАДЫЖЕНСКАЯ О.А., УРАЛЬЦЕВА Н.Н. О разрешимости первой

краевой задачи для квазилинейных эллиптических и параболических уравнений при наличии особенностей [Текст] / О.А. Ладыженская, Н.Н. Уральцева // Докл. АН СССР. – 1985. – т.281. – 2. – с.275 – 279.

107. ЛАДЫЖЕНСКАЯ О.А. О дифференциальных свойствах обобщенных решений некоторых многомерных вариационных задач [Текст] / О.А. Ладыженская // Докл. АН СССР. – 1958. – т.120. 5. – с.956 – 959.

108. ОЛЕЙНИК О.А. Об уравнениях эллиптического типа, вырождающихся на границе области [Текст] / О.А. Олейник // ДАН СССР. – 1952. – т.87. 6. – с.885 – 888.

109. ЛЕВИТАН Б.М. Разложения по собственным функциям [Текст] / Б.М. Левитан. ГИТЛ. – Москва–Ленинград. – 1950. – 159 с.

110. МИРАНДА К. Уравнения с частными производными эллиптического типа [Текст] / К. Миранда. М.: – Изд. ИЛ. – 1957. – 256 с.

111. СОБОЛЕВ С.Л. Уравнения математической физики [Текст] / С.Л. Соболев. М.: – Наука. – 1966. – 652 с.

112. ТИХОНОВ А.Н., САМАРСКИЙ А.А. Уравнения математической физики [Текст] / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. М. – Наука. – 1977. – 735 с.

113. ИЛЬИН А.М. Вырождающиеся эллиптические и параболические уравнения [Текст] / А.М. Ильин // Научные доклады высшей школы. – 1958. – т.1. – 2. – 48–53.

114. ИЛЬИН В.А. О равномерной сходимости разложений по собственным функциям при суммировании в порядке возрастания собственных чисел [Текст] / В.А. Ильин // ДАН СССР СССР. – 1957. – т.114. – 4. – с.698 – 701.

115. ИЛЬИН В.А. Необходимые и достаточные условия базисности подсистемы собственных и присоединенных функций пучка М. В. Келдыша обыкновенных дифференциальных операторов [Текст] / В.А.

Ильин // ДАН СССР. – 1976. – т.227. – 4. – с.796 – 799.

116. ИЛЬИН В.А. О безусловной базисности на замкнутом интервале систем собственных и присоединенных функций дифференциального оператора второго порядка [Текст] / В.А. Ильин // Докл. АН СССР. – 1983. – т.273. – 5. – с.1048 – 1053.

117. КЕНДЖАЕВ И. Об абсолютной и равномерной сходимости рядов Фурье по собственным функциям самосопряженного эллиптического оператора $2m$–го порядка [Текст] / И. Кенджаев // Докл. АН СССР. – 1968. –т.181. – 6 , с.1317 – 1319.

118. ИСМАТОВ М. О разрешимости первой основной смешанной задачи динамики трехмерного упругого тела [Текст] / М. Исматов // Диф. уравнения. – 1976. – т.12. – 12. – с.2223 – 2232.

119. ИСМАТОВ М. Об абсолютной и равномерной сходимости рядов Фурье по собственным функциям оператора теории упругости во всей замкнутой области и обоснование метода Фурье [Текст] / М. Исматов // Диф. уравнения. – 1976. – т.12. – 10. – с.1824 – 1831.

120. ЯНКЕ Е., ЭМДЕ Ф., ЛЕШ Ф. Специальные функции [Текст] / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш. М.: – Наука. – 1968. – 344 с.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ В изданиях из перечня ВАК при Президенте Республики Таджикистан

[1-А] БОБОЕВ Э. Д. Формула представления решений начально – краевой задачи для одного многомерного параболического уравнения с сингулярными коэффициентами / Мухсинов А., Бобоев Э. Д.// Учёные записки. Серия: естественные и экономические науки. Учредитель: Худжандский государственный университет имени академика Б. Гафурова. – Худжанд: Нури маърифат, 2015, т. 34, 3, с. 15 – 19.

[2-А] БОБОЕВ Э. Д. Формула представления решений начально – краевой задачи для одномерного параболического уравнения с сингулярными коэффициентами / Мухсинов А., Бобоев Э. Д.// Учёные записки. Серия: естественные и экономические науки. Учредитель: Худжандский государственный университет имени академика Б. Гафурова. – Худжанд: Нури маърифат, 2016, т. 39, 4, с. 18 – 24.

[3-А] БОБОЕВ Э. Д.Задача Дирихле и Неймана для эллиптических систем второго порядка с разрывными коэффициентами. / Джангибеков Г., Бобоев Э. Д.// Учёные записки. Серия: естественные и экономические науки. Учредитель: Худжандский государственный университет имени академика Б. Гафурова. – Худжанд: Нури маърифат, 2021, т. 56, 1, с. 8 – 11.

[4-А] БОБОЕВ Э. Д. О краевых задачах для одного класса эллиптических систем дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами на плоскости. / Бобоев Э. Д.// ДАН РТ, 2021, т. 61, 1, с. 19 – 26.

[5-А] БОБОЕВ Э. Д. Задача линейного сопряжения решений обобщенной системы Коши – Римана с сингулярными коэффициентами. / Джангибеков Г., Бобоев Э. Д.// Вестник ТНУ, 2021, Серия естественных наук, 4, с. 12 – 20.