ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертацию Эшонкулова Алишера Алигуловича «О разрешимости некоторых классов двумерных сингулярных интегральных операторов со сдвигом», представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ .

Методы сингулярных интегральных уравнений и операторов являются одним из мощных средств решения задач современной математики, математической физики, прикладной математики и механики.

Рассматриваемые в работе двумерные сингулярные интегральные операторы вида

$$(S_n f)(z) = \frac{|n|}{2\pi i^{|n|}} \iint\limits_D \frac{e^{in\theta}}{|\zeta - z|^2} f(\zeta) ds_\zeta, \quad \theta = \arg(\zeta - z), \quad z \in \overline{D}, \qquad (1)$$

относятся к многомерным сингулярным интегральным операторам типа Михлина–Кальдерона–Зигмунда и широко применяются во многих задачах теории обобщённых аналитических функции (Векуа И.Н.), теории квазиконформных отображений (Альфорс Л., Шиффер М.) и теории дифференциальных уравнений с частными производными (Боярский Б., Джураев А.и др.).

Для широкого класса уравнений с операторами вида (1) в работах И.И.Комяка, А.Джураева, Н.Н.Василевского, Г.Джангибекова, Г.Джангибекова и К.Бойматова установлены эффективные необходимые и достататочные условия нетеровости и получены формулы для подсчета индекса.

Изучение двумерных сингулярных уравнений со сдвигом началось сравнительно недавно. Первые работы в этом направлении выполнены Г. Джангибековым, Р.В.Дудучава, А.И.Сагинашвили и Е.М.Шаргородским. Указанные авторы методом банаховых алгебр исследовали некоторые классы двумерных сингулярных интегральных уравнений с карлемановским сдвигом посредством сведения к системе интегральных уравнений без сдвига.

В настоящее время теория таких уравнений далека от завершениия. Поэтому поставленная здесь задача относится к актуальному направлению теории сингулярных интегральных уравнений и теории краевых задач для уравнений в частных производных.

Диссертационная работа А.А.Эшонкулова состоит из трех глав и шести параграфов. Параграф 1 главы 1 носит вспомогательный характер. В нём описаны используемые в работе пространства функций и приводятся основные понятия и факты теории нётеровых операторов в банаховых пространствах.

В § 2 в пространстве n – мерных вектор-функций $L^n_{\beta-2/p}(D), 1 < p < \infty,\ 0 < \beta < 2$ В разделе 2 в пространстве $L^p_{\beta-2/p}(D)$:

$$L^{n,p}_{\beta-2/p}(D) = \{f(z) : |z|^{\beta-2/p} f(z) = F(z) \in L^p(D),\ ||f||_{L^p_{\beta-2/p}} = ||F||_{L^p}\}$$

$(1 < p < \infty,\ 0 < \beta < 2)$ рассматривается следующий оператор

$$A = aI + bW + \sum_{m=1}^{N} (c_m I + d_m W) S_{2m} + T, \tag{2}$$

N – натуральное число, $a(z), b(z),\ c_m(z), d_m(z)$ – непрерывные в $\overline{D}$ квадратные матрицы - функции порядка n, $W : L^{n,p}_{\beta-2/p}(D) \to L^{n,p}_{\beta-2/p}(D)$ – оператор карлемановского сдвига:

$$(Wf)(z) = f(\alpha(z)),$$

где $\alpha(z)$ – однолистное конформное отображение области D на себя со свойством $\alpha(\alpha(z)) = z$ для $\forall z \in \overline{D}$ и $\exists z_0 \in \overline{D}$ такое, что $\alpha(z_0) = z_0$. – непрерывные в $\overline{D} = D \bigcup \Gamma$ комплекснозначные функции.

Доказывается, что имеет место следующая

Теорема 1.1. *Для нётеровости оператора A из (2) в пространствах $L^{n,p}_{\beta-2/p}(D)$ $(0 < \beta < 2,\ 1 < p < \infty)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия*

$$1)\ \det \mathscr{G}_A(z,\sigma) \neq 0 \quad \textit{при } z \in \overline{D},\ |\sigma| = 1,$$
$$2)\ \det \mathscr{G}_A(z,\sigma) \neq 0 \quad \textit{при } z \in \Gamma,\ |\sigma| < 1,$$

где $\mathscr{G}_A(z,\sigma)$ - матрица-символ оператора A. При этом индекс оператора равен нулю.

В § **2.2. главы 2** рассматривается алгебра $\mathcal{R}$, порожденная всеми действующими в пространстве $L^p(D)(1 < p < \infty)$ операторами, вида

$$\mathcal{A} = aI + bS_{-n}K + cB_n + d\overline{B}_n + eB_nK + q\overline{B}_nK + T, \tag{3}$$

где B_n- поликерн оператор Бергмана. Доказана следующая

Т е о р е м а 2.1 *Для того, чтобы произвольный оператор $\mathcal{M}$ из алгебры $\mathcal{R}$ был нетеровым оператором в пространстве $L^p(D)$, $1 < p < \infty$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$|a(z)|^2 + |b(z)|^2 \neq 0 \ \textit{при}\ z \in \overline{D},\ \det D(t) \neq 0 \ \textit{при}\ t \in \Gamma. \tag{4}$$

При выполнении этих условий, индекс оператора равен

$$\varkappa = -\frac{n}{2\pi}[\arg\det D(t)]\Big|_{\Gamma}.$$

В § **2.2. главы 2** в векторном лебеговом пространстве $L^{\nu,p}(D)$ $(1 < p < \infty)$ изучается алгебра $\mathcal{R}$, порожденная сингулярными операторами с нечетными характеристиками со сдвигом, вида

$$\mathcal{A} = a(z)I + b(z)WS_{2m+1} + \sum_{l=0}^{m} c_l(z)B_{2l+1} + T, \quad m \geq 0 - \text{целое}, \tag{5}$$

где $a(z)$, $b(z)$, $c_l(z)$ – непрерывные в $\overline{D}$ квадратные матрицы-функции порядка ν, T – вполне непрерывный оператор, B_n – поликерн-оператор Бергмана, оператор W – является оператором антиконформного сдвига, то есть $(Wf)(z) = f(\alpha(z))$, где $\alpha(z)$ антиконформное отображение области $\overline{D}$ на себя, удовлетворяющее условию Карлемана $\alpha(\alpha(z)) = z$ для $\forall z \in \overline{D}$ и $\exists z_0 \in \overline{D}$ такое, что $\alpha(z_0) = z_0$.

Установлена следующая

Теорема 2.2. *Для того, чтобы сингулярный интегральный оператор $\mathcal{A}$ с антиконформным сдвигом Карлемана $\alpha(z)$ из (10) был нетеровым в пространстве $L^{\nu,p}(D)$ $(1 < p < \infty)$, необходимо и достаточно выполнение условий*

$$\det\sigma_{\mathcal{A}}(z,t) \equiv \begin{vmatrix} a(z) & d(z)(\alpha'(z)/\overline{\alpha'(z)})^{m+1/2} & 0 \\ d(\alpha(z)) & a(\alpha(z))(\alpha'(z)/\overline{\alpha'(z)})^{m+1/2} & 0 \\ 0 & 0 & c(t) \end{vmatrix} \neq 0, \ \forall z \in \overline{D},$$

$$\prod_{j=1}^{m} \det\Big(a(t) + \sum_{k=j}^{m} c_k(t)\Big) \neq 0, \ \forall t \in \Gamma.$$

При выполнении этих условий, индекс оператора $\mathcal{A}$ вычисляется по формуле

$$\varkappa = \sum_{j=1}^{m} Ind_{\Gamma} \det\Big(a(t) + \sum_{k=j}^{m} c_k(t)\Big).$$

Глава 3 посвящена исследованию одномерного сингулярного интегрального уравнения Коши, вида

$$Af(z) \equiv a(t)f(t) + b(t)\overline{f(t)} + \frac{c(t)}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\tau)}{\tau - t}d\tau - \frac{d(t)}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\overline{f(\tau)}}{\overline{\tau} - \overline{t}}d\overline{\tau} + (Tf)(t) = g(t) \tag{6}$$

в банаховых пространствах $L_p(\Gamma)(1 < p < \infty)$, где $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $d(t)$ – заданные непрерывные на Γ функции, Γ – простая замкнутая кривая Ляпунова. Доказана следующая

Теорема 3.1. *Для нетеровости оператора A из (6) в пространствах $L_p(\Gamma)$ $(1 < p < \infty)$ необходимо и достаточно, чтобы* $\det \Phi_U(t, \Theta) \neq 0 \; \forall t \in \Gamma$, *то есть*

$$\Delta(t) \equiv \big(a(t) - c(t)\big)\big(\overline{a(t)} + \overline{c(t)}\big) - \big(b(t) + d(t)\big)\big(\overline{b(t)} - \overline{d(t)}\big) \neq 0 \quad \forall t \in \Gamma. \quad (7)$$

При выполнении условия (7), *индекс оператора A равен*

$$\varkappa = 2Ind_{\Gamma}\Delta(t).$$

В § **3.2. главы 3** полученные выше результаты для сингулярных интегральных уравнений (6) применены к общей задаче сопряжения для аналитических функций.

Переходя к оценке полученных в диссертации результатов отметим:

1. Степень обоснованности научных положений, выводов и рекомендаций, сформулированных в диссертации.

Все приведенные в диссертации теоремы, выводы, научные положения, рекомендации, а также полученные формулы строго и полно обоснованы методами теории функций и функционального анализа.

2. Достоверность и новизна, полученных результатов.

Новыми результатами, полученными в диссертационной работе являются:

- для одной системы двумерных сингулярных интегральных операторов по ограниченной области со сдвигом Карлемана в лебеговых пространствах с весом найдены эффективные необходимые и достаточные условия нетеровости и вычислен ее индекс;
- для некоторых классов двумерных сингулярных интегральных операторов с нечетной характеристикой по ограниченной области в лебеговых пространствах с весом получены необходимые и достаточные условия нетеровости, а также даны формулы для подсчета индекса оператора;
- в лебеговых пространствах изучены свойства алгебры $\mathcal{R}$, порожденные сингулярными операторами с нечетными характеристиками и антиконформном сдвигом, для которых получены необходимые и достаточные условия нетеровости и формула для подсчета индекса;
- доказана теорема разрешимости одного класса одномерных сингулярных интегральных операторов Коши и получена формула для подсчета индекса:

- решена одна общая задача линейного сопряжения для аналитических функций

Основные результаты диссертации дополняют известные исследования Г. Джангибекова, Р.В.Дудучава, А.И.Сагинашвили и Е.М.Шаргородский. При доказательствах основных утверждений эффективно используются методы, разработанные Н.И.Мусхелишвили, Ф.Д.Гаховым, И.Б.Симоненко, Р.В.Дудучава.

Доказательства результатов не вызывают сомнений, в связи с чем представляются достоверными.

3. Теоретическая и практическая значимость, полученных результатов.

Диссертационная работа носит теоретический характер. Результаты исследования, проведенного диссертантом, существенно дополняет общую теорию двумерных сингулярных операторов и может быть использовано при построении теории обобщенных аналитических функций в смысле Векуа, в теории квазиконформных отображений и других областях математической науки. Кроме того, некоторые результаты диссертации могут быть использованы как методический материал при обучении магистров и аспирантов математических специальностей.

4. Оценка содержания диссертации, ее завершенность.

Диссертационная работа является завершенным научным исследованием, полно описывающим теорию Нётера рассмотренных классов операторов.

5. Достоинства и недостатки в содержании и оформлении диссертации, влияние отмеченных недостатков на качество исследования.

Достоинствами диссертации является то, что в ней изучены новые классы двумерные сингулярные интегральные уравнения со сдвигом, причем получены эффективные необходимые и достаточные условия нетеровости и даны простые формулы для подсчета всех рассматриваемых уравнений в лебеговых пространствах с весом.

В целом автореферат и диссертация написаны грамотным математическим языком. Однако, тем не менее, имеются некоторые замечания:

Отметим, что сделанные замечания не являются принципиальными и не влияют на общую положительную оценку работы.

6. Соответствие автореферата основному содержанию диссертации.

Автореферат соответствует требованиям ВАК при Президенте РТ, полно и правильно отражает основные положения диссертации.

Оформление структурных элементов диссертации и автореферата соответствуют требованиям ВАК при Президенте РТ.

Заключение о соответствии диссертации критериям, установлены.

В списке литературы библиографические записи соответствуют требованиям ВАК при Президенте РТ в полной мере.

Диссертационная работа Эшонкулова Алишера Алигуловичана на тему «О разрешимости некоторых классов двумерных сингулярных интегральных операторов со сдвигом», представленная на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, является научно-квалификационной работой, в которой содержатся решения задач, имеющих существенное значение для теории сингулярных интегральных уравнений, полностью соответствует всем требованиям ВАК при Президенте РТ о присуждении ученых степеней, а ее автор заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Официальный оппонент:
кандидат физико-математических наук
по специальности 01.01.01 – вещественный,
комплексный и функциональный анализ,
и.в.дотцент кафедрой высшая математика и
информатики Технологический
университет Таджикистана Акобиршоев М.О.

Подпись Акобиршоев М.О. заверяю:
Начальник ОК и СР ТУТ Н.Бухориев

Адрес организации:
Технологический университет Таджикистана
736061, Таджикистан, г. Душанбе, ул. Н.Карабаева 63/3,
Сайт: www.tut.tj; e-mail: rectorat-favri-tut@mail.ru
Тел. рабочий: (+992 37) 234-79-88