ДОНИШГОҲИ МИЛЛИИ ТОҶИКИСТОН

УДК-517.968.2

Бо ҳуқуқи дастнавис

Файззода Кишвар Шоҳпулод

ҲАЛШАВАНДАГИИ МАСЪАЛАҲОИ КАНОРИИ ДИРИХЛЕ ВА НЕЙМАН БАРОИ СИСТЕМАИ МУОДИЛАҲОИ УМУМИИ ЭЛЛИПТИКИИ ТАРТИБИ ШАШ ДАР ҲАМВОРӢ

Диссертатсия
барои дарёфти дараҷаи илмии доктори фалсафа (PhD)–доктор аз рӯи ихтисоси 6D060100–МАТЕМАТИКА: 6D060102–Муодилаҳои дифференсиалӣ, системаҳои динамикӣ ва идоракунии оптималӣ

Роҳбари илмӣ: **доктори илмҳои физикаю математика ,**
профессор Ҷангибеков Гулхоҷа

Душанбе – 2024

Мундарича

Муқаддима (Тафсири адабиёт. Натиҷаҳои асосии кор) 4

Таҳлили адабиёт оиди назарияи масъалаҳои канорӣ барои муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ

chapter**1. Таҳлили натиҷаҳо оиди назарияи масъалаҳои Дирихле ва Нейман барои системаҳои эллиптикии қавии татиби ду**

2. Таҳлили натиҷаҳо оиди назарияи масъалаҳои Дирихле ва Нейман барои системаҳои эллиптикӣ дар ҳолати умумӣ

section**Боби 1. Масъалаҳои Дирихле ва Нейман барои системаи муодилаҳои дифференсиалии умумии эллиптикии тартиби шаш бо коэффисиентҳои бефосила дар ҳамворӣ** 40

§ 1.1. Тавсифи фазои функсияҳо ва баъзе мафҳумҳои ёрирсон 40

1.1.1. Операторҳои нётеровӣ ва хосиятҳои асосии онҳо 40

1.1.2. Таърифи фазои $W_p^k(D)$ 44

1.1.3. Гузориши масъалаҳои канории якум ва дуюм 45

§ 1.2. Масъалаҳои Дирихле ва Нейман барои системаи ду муодилаи эллиптикии тартиби шаш дар ҳамворӣ 45

1.2.1. Классификатсияи гомотопӣ ва тасвири интегралӣ 47

1.2.2. Гузариш ба муодилаҳои интегралии сингулярӣ 49

1.2.3. Масъалаи Нейман 51

§ 1.3. Масъалаҳои Дирихле ва Нейман барои баъзе синфҳои системаи ду муодилаи эллиптикии тартиби шаш дар ҳамворӣ . . . 53
1.3.1. Классификатсияи гомотопии системаи (1.3.1) ва тасвири интегралӣ 55
1.3.2. Гузариш ба муодилаҳои интегралии сингулярӣ . . . 59
§ 1.4. Масъалаҳои Дирихле ва Нейман барои системаи муодилаҳои дифференсиалии умумии эллиптикии тартиби шаш бо коэффисиентҳои бефосила дар ҳамворӣ . . . 66
1.4.1. Классификатсияи гомотопии системаи (1.4.2) ва тасвири интегралӣ 67
1.4.2. Гузариш аз масъалаи Дирихле ба муодилаҳои интегралии сингулярӣ аз рӯи соҳаи маҳдуд . . . 68
1.4.3. Масъалаи канории дуюм . . . 79
Боби 2. Масъалаҳои Дирихле ва Нейман барои барои баъзе синфҳои системаи муодилаҳои дифференсиалии эллиптикии тартиби шаш бо коэффисиентҳои канишнок дар ҳамворӣ . . . 80
§ 2.1. Оиди ҳалли масъалаи Дирихле барои як системаи эллиптикии тартиби шаш бо коэффисиенти канишнок . . . 80
2.1.1. Гузориши масъала . . . 80
2.1.2. Муодилаи моделии дифференсиалӣ . . . 82
2.1.3. Муодилаи дифференсиалии ибтидоӣ . . . 82
§ 2.2. Масъалаҳои Дирихле ва Нейман барои баъзе синфҳои системаи эллиптикии тартиби шаш бо коэффисиентҳои канишнок . . . 92
2.2.1. Гузориши масъала . . . 92
2.2.2. Классификатсияи гомотопии системаи (2.2.1) . . . 93
2.2.3. Гузаштан ба муодилаҳои интегралии сингулярӣ . . . 95
2.2.4. Натиҷаҳои асосӣ . . . 98
Хулосаҳо . . . 100
Рӯйхати адабиёт . . . 101

Муқаддима (Тафсири адабиёт. Натиҷаҳои асосии кор)

Мубрамии мавзӯи таҳқиқот. Дар корҳои И. Н. Векуа [1]– [5] усули нави таҳқиқи масъалаҳои гуногуни сарҳадӣ барои системаи муодилаҳои дифференсиалии хаттӣ бо ҳосилаҳои хусусии тартиби 2m бо тағйирёбандаи новобастаи $z = x + iy$ ва функсияи номаълуми $\omega(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$

$$\sum_{n=-m}^{m} a_n(z)\frac{\partial^{2m}\omega}{\partial\overline{z}^{m+n}\partial z^{m-n}} + b_n(z)\frac{\partial^{2m}\overline{\omega}}{\partial\overline{z}^{m-n}\partial z^{n+m}} + T\omega = g(z), \qquad (0.1)$$

пешниҳод гардида буд, ки дар он T – оператори дифференсиалии тартиби поёнӣ мебошад.

Усул аз он иборат аст, ки тавассути тасвири умумии ҳалҳои масъалаҳои таҳқиқшаванда аз масъалаи гузошташуда ба таври эквивалентӣ ба муодилаҳои интегралии сингулярӣ аз рӯи соҳаи маҳдуд гузариш намуда, баъдан ҳалшавандагии ин муодилаҳои интегралӣ таҳқиқ карда мешаванд.

Омӯзиши минбаъдаи назарияи масъалаҳои сарҳадии хаттӣ ва ғайрихаттии муодилаҳои эллиптикӣ дар корҳои илмии шогирдони бевоситаи И.Н Векуа: Б. В. Боярский [6]– [15], А. И. Волперт [16]– [19], В.С. Виноградов [20]– [23], П. Т. Дибов [24]– [26], А. Ҷ. Ҷураев [27] давом ёфтанд. Зикр бояд намуд, ки дар ҳамаи корҳои муаллифони номбаршуда системаи (0.1) фақат дар мавриди қавӣ эллиптикӣ будани оператори дифференсиалӣ мавриди таҳқиқ гардида буданд. Масъалан Б.В. Боярский дар кори [6] тавассути усули инъикосҳои фушурдашавнда фредголмовӣ будани масъалаҳои Дирихле ва Нейманро барои системаи (0.1) - и тартиби ду исбот намудааст. Айнан бо ҳамин шартҳо П. Т. Дибов дар корҳои [24]– [26] системаи (0.1)–и тартиби чор ва шаш ва А. Ҷ. Ҷӯраев дар монографияи [27] системаи тартиби $2m$ – ро мавриди омӯзиш қарор додаанд.

Бо назардошти гуфтаҳои болоӣ айён мегардад, ки таҳқиқи назарияи нётеровӣ будан ва ҳосил намудани формула барои ҳисоб намудани индекси масъалаҳои Дирихле ва Неймани системаи муодилаҳои эллиптикии (0.1) аз рӯи соҳаи маҳдуди ҳамворӣ масъалаи мубрам мебошад. Дар ин раванд А. И. Волперт кори аввалини [16] - ро ба иҷро расонидааст, ки дар мисоли системаи эллиптикии тартиби ду

$$\lambda z^n \frac{\partial^2 \omega}{\partial \overline{z} \partial z} + \frac{\partial^2 \overline{\omega}}{\partial \overline{z}^2} = 0, \ |\lambda| < 1, \ n - \text{адади бутун}, \tag{0.2}$$

номбурда нишон додааст, ки индекси масъалаи Дирихле барои системаи эллиптикии (0.2) ғайринулӣ буда, бар замми он қимати ихтиёрии ҷуфт дорад ва ба $2n$ баробар мебошад.

Дараҷаи таҳқиқи мавзӯи илмӣ. Дар солҳои охир Г. Ҷангибеков (ниг. мас. [28]– [37]) шартҳои зарурӣ ва кифоягии эффективноки нётеровӣ будан ва формулаҳои ҳисоб намудани як қатор синфҳои операторҳои интегралии сингулярии дученакаро аз рӯи соҳаи охирнок ҳосил намуд. Истифода намудани ин натиҷаҳо аз он ҷумла имконият доданд, ки дар корҳои Г. Ҷангибеков [32]– [35], Г. Ҷангибеков ва Х. Г. Хуҷаназарова [36], Г. Ҷангибеков ва Ҷ. М. Одинабеков [37], Г. Х. Хуҷаназарова [38], Г. Ҷангибеков ва М. Ш. Зарифбеков [39], Ҷ. М. Одинабеков [40] ва Э. Д. Бобоев [42] назарияи ҳалшавандагии масъалаҳои Дирихле ва Неймана барои системаи муодилаҳои эллиптикии тартибҳои ду ва чори (0.1), таҳқиқ шуда, формулаҳои ҳисоб намудани индекси ин масъалаҳо ба воситаи коэффисиентҳои система ҳосил карда шаванд. Оиди дигар натиҷаҳои ба мавзӯи рисола наздикро аз корҳои [50]–[81] дарёфт намудан мумкин аст.

Кори диссертатсионии мазкур ба таҳқиқи хосиятҳои нётеровӣ будани масъалаҳои Дирихле ва Неймани системаи муодилаҳои дифференсиалии умумии эллиптикии аз ду тағийрёбандаи тартиби шаш бо коэффисиентҳои бефосила ва дар як нуқта канишнок дар ҳамворӣ, тариқи гузаштан ба муодилаҳои интегралии сингулярӣ аз рӯи соҳаи маҳдуд бахшида шудааст.

Мақсади таҳқиқот. Мақсади асосии кори диссертатсионӣ аз таҳқиқи ҳалшавандагии масъалаҳои Дирихле ва Нейман барои системаи муодилаҳои дифференсиалии умумии эллиптикии аз ду тағийрёбанда вобастаи тартиби шаш бо коэффисиентҳои бефосила ва дар як нуқта канишнок дар ҳамворӣ иборат аст.

Навгонии илмии тақиқот. Дар кори диссертатсионӣ натиҷаҳои илмии зерин ба даст оварда шудаанд:

- шартҳои зарурӣ ва кифоягии нетеровӣ будани масъалаҳои Дирихле ва Нейман барои як системаи эллиптикии тартиби шаши вобаста аз ду тағйирёбанда бо коэффитсентҳои бефосила дар ҳамворӣ **исбот карда шуда** формулаи ҳисоб намудани индекси масъалаҳо ёфта шудааст;

- барои баъзе синфҳои системаи эллиптикии тартиби шаши вобаста аз ду тағйирёбанда бо коэффитсентҳои бефосила дар ҳамворӣ теоремаҳо оиди шартҳои зарурӣ ва кифоягии нетеровӣ будан ва формула барои ҳисоб намудани индекс **исбот карда шудааст**;

- шартҳои эффективноки зарурӣ ва кифоягии нетеровӣ будан ва формула барои ҳисоб намудани индекси системаи умумии эллиптикии тартиби шаши аз ду функсияҳои номаълуми ду тағйирёбанданок бо коэффитсиентҳои бефосила **ёфта шудааст**;

- теоремаҳои ҳалшавандагии масъалаҳои Дирихле ва Нейман барои баъзе синфҳои системаҳои эллиптикии тартиби шаш бо коэффитсентҳои канишнок **исбот карда шуда** формулаҳо барои ҳисоб намудани индекси масъалаҳо ҳосил карда шудааст;

Аҳамияти назариявӣ ва илмию амалии таҳқиқот. Натиҷаҳои дар диссертатсия ба даст овардашуда, асосан, характери назариявӣ доранд. Онҳо метавонанд дар раванди таҳқиқотҳои илмии оянда дар назарияи ҳалшавандагии масъалаҳои сарҳадӣ барои муодилаҳои дифференсиалии эллиптикии тартиби олӣ истифода шаванд.

Аҳамияти амалии кор ба он алоқаманд аст, ки бисёр масъалаҳои амалии механика ва дигар бахшҳои физика бо ёрии масъалаҳои канорӣ барои муодилаҳои дифферентсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ ҳал карда мешаванд.

Методҳои таҳқиқот. Методҳое, ки дар диссертатсия истифода шудаанд аз методҳои назарияи операторҳои интегралии сингулярӣ аз рӯи соҳаи маҳдуд, методҳои назарияи функсияҳои тағйирёбандааш комплексӣ ва методи факторизатсияи матриса-функцияҳо иборат мебошанд.

Натиҷаҳое, ки ба ҳимоя бароварда мешаванд:

- теоремаҳо оиди шартҳои зарурӣ ва кифоягии нётеровӣ будани масъалаҳои Дирихле ва Нейман барои як системаи муодилаҳои эллиптикии тартиби шаши вобаста аз ду тағйирёбанда бо коэффитсентҳои бефосила дар ҳамворӣ ва формулаи ҳисоб намудани индекси масъалаҳо;
- тасдиқотҳо оиди синфҳои гомотопии муодилаҳои эллиптикии тартиби шаши вобаста аз ду тағйирёбанда;
- теоремаҳо оиди шартҳои зарурӣ ва кифоягии нетеровӣ будан ва формула барои ҳисоб намудани индекс оиди баъзе синфҳои системаи эллиптикии тартиби шаши вобаста аз ду тағйирёбанда бо коэффитсентҳои бефосила дар ҳамворӣ;
- теоремаҳо оиди шартҳои эффективноки зарурӣ ва кифоягии нетеровӣ будан ва формула барои ҳисоб намудани индекси системаи умумии эллиптикии тартиби шаши аз ду функсияҳои номаълуми ду тағйирёбанданок бо коэффитсиентҳои бефосила;
- теоремаҳои ҳалшавандагии масъалаҳои Дирихле ва Нейман барои баъзе синфҳои системаҳои эллиптикии тартиби шаш бо коэффитсентҳои канишнок ва формулаҳо барои ҳисоб намудани индекси масъалаҳо.

Дараҷаҳаи эътимоднокии натиҷаҳо. Эътимоднокии натиҷаҳои илмии кор бо исботҳои муфассал математикии ҳамаи тасдиқоти дар диссертатсия овардашуда асоснок карда мешаванд, ки бо тасдиқоти маълуми назарияи муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ, таҳлили функсионналӣ ва назарияи функсияҳои комплексӣ ҳамоҳанг мебошанд.

Мутобиқати диссертатсия ба шиносномаи ихтисоси илмӣ (ба формула ва соҳаи тадқиқот). Кори диссертатсионӣ аз рӯи ихтисоси 6D060100–МАТЕМАТИКА: 6D060102-муодилаҳои дифференсиалӣ, системаҳои динамикӣ ва идоракунии оптималӣ иҷро карда шудааст.

Саҳми шахсии довталаби дараҷаи илмӣ дар таҳқиқот. Масъалаҳои таҳқиқот аз тарафи роҳбари илмӣ пешниҳод гардида, методҳои ҳалли онҳо интихоб гардидаанд. Инчунин, дар рафти иҷрои кори диссертатсионӣ роҳбари илмӣ ба муаллиф ёрии машваратӣ расонидааст. Натиҷаҳои асосии кори диссертатсиониро, ки дар банди Навгонии илмӣ номбар шудааст шахсан муаллиф ҳосил кардааст.

Натиҷаҳои диссертатсия дар конференсияҳои зерин муҳокима гардидаанд:

Тасвиб ва амалисозии натиҷаҳои диссертатсия. Натиҷаҳои асаии кори диссертатсионӣ дар семинари илмии кафедраи таҳлили функсионалӣ ва муодилаҳои дифференциалии Донишгоҳи миллии Тоҷикистон муҳокима ва баррасӣ гардидаанд. национального университета.

Натиҷаҳои диссертатсия дар конференсияҳои зерин муҳокима гардидаанд:

- конференсияи байналхалқии илмии "Муаммоҳои актуалии математикаи муосир" бахшида ба 50-солагии Институти математикаи ба номи А. Ҷӯраеви АМИТ, ш. Душанбе, 30-31 маи 2023 г.;

- конференсияи байналхалқии илмии "Муаммоҳои актуалии математикаи муосир" бахшида ба 75-солагии ДМТ, 20-солагии рушди илмҳои дақиқ, табиатшиносӣ ва риёзӣ ва 85-солагии акдемики АМИТ Раҷабов Н. ш. Душанбе, 5-октябри соли 2023.;

- конференсияи байналхалқии илмӣ бахшида ба 20-солагии рушди илмҳои дақиқ, табиатшиносӣ ва риёзӣ. Данғара, 30 апрели соли 2024 г.

Интишорот аз рӯи мавзӯи диссертатсия. Натиҷаҳои асосии кори муаллиф аз рӯи диссертатсия дар 9 кори илмӣ, аз он ҷумла 5 мақола дар нашрияҳои тақризшаванда, ки дар рӯйхати амалкунандаи КОА-назди Президенти Ҷумҳурии Тоҷикистон оварда шудаанд. Дар корҳое, ки дар ҳаммуаллифӣ интишор ёфтаанд, ба роҳбари илмӣ гузориши масъала ва интихоби усули исботи натиҷаҳо ва ба диссертант исботи натиҷаҳои асосӣ таалуқ доранд.

Сохтор ва ҳаҷми диссертатсия. Диссертатсия аз муқаддима, тавсифи умумии кор, ду боб, муҳокимаи натиҷаи бадастомада, хулосаҳо, рӯйхати адабиёти истифодашуда иборат аз 89 номгӯй буда, хамагӣ 113 саҳифаи чопи мошиниро дар бар мегирад, ки дар LATEX ҳуруфчинӣ шудааст. Барои осонӣ дар диссертатсия рақамгузории якхелаи теоремаҳо, леммаҳо ва формулаҳо истифода мешавад. Онҳо рақамгузории сегона доранд, ки дар он рақами аввал рақами боб, рақами дуюм рақами параграф ва рақами сеюм ба шумораи тартибии теоремаҳо, леммаҳо ё формулаҳо дар ин параграф мебошад.

Мазмуни мухтасари таҳқиқот

Дар муқаддима шарҳи мухтасари таърихии натиҷаҳои мавҷудбудаи таалуқи мавзӯъи диссертатсионӣ оварда шуда, зарурати давом додани тадқиқоти мавзӯъ асоснок карда шуда, мазмуни мухтасари натиҷаҳои ба даст овардашудаи диссертатсия дарҷ гардидааст.

Боби якуми диссертатсия ба таҳқиқи масъалаҳои Дирихле ва Нейман барои системаи муодилаҳои дифференсиалии эллиптикии умумии тартиби шаш бо коэффитсиентҳои бефосила дар ҳамворӣ бахшида шудааст.

Боби дуюми диссертатсия ба омӯхтани ҳалшавандагии масъалаҳои Дирихле ва Нейман барои баъзе синфҳои системаи муодилаҳои дифференсиалии эллиптикии тартиби шаш бо коэффитсиентҳои канишнок дар ҳамворӣ бахшида шудааст.

Параграфи якуми боби як характери ёрирасонӣ дошта, дар он фазоҳои функсионалии истифодашуда, мафҳумҳо ва фактҳои асосии назарияи нётеровӣ будани операторҳо дар фазоҳои банахи оварда шудаанд.

Дар параграфи дуюми боби якум масъалаи ҳалшавандагии масъалаҳои Дирихле ва Нейман барои системаҳои ду номаълумноки эллиптикии тартиби шаши намуди зерин

$$a(z)\frac{\partial^6\omega}{\partial\overline{z}^3\partial z^3}+b(z)\frac{\partial^6\overline{\omega}}{\partial\overline{z}^6}+\sum_{k+j=0}^{5}\left[a_{k,j}(z)\frac{\partial^{k+j}\omega}{\partial\overline{z}^k\partial z^j}+b_{k,j}(z)\frac{\partial^{k+j}\overline{\omega}}{\partial\overline{z}^k\partial z^j}\right]=g(z), \quad (0.3)$$

омӯхта мешавад, ки дар он $\omega(z) = u(x,y) + iv(x,y)$; коэффисиентҳои $a(z)$, $b(z)$, $a_{k,j}(z)$, $b_{k,j}(z)$, $(0 \le k+j \le 5)$ дар соҳаи $\overline{D}$ бефосила, $g(z) \in L^p(D)$, $2 < p < \infty$ ва

$$\frac{\partial}{\partial\overline{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

мебошанд.

Масъалаи Дирихле. *Функсияи $\omega(z)$ аз синфи $W_p^6(D)\cap C^2(\overline{D})$ ёфта шавад, ки дар дохили D муодилаи (0.3) ва дар сарҳади D бошад шартҳои*

$$\omega(z)\big|_{\Gamma}=0, \quad \frac{\partial\omega}{\partial n}\bigg|_{\Gamma}=0, \quad \frac{\partial^2\omega}{\partial n^2}\bigg|_{\Gamma}=0 \qquad (0.4)$$

ро қаноат кунад, ки дар ин ҷо $\frac{\partial\omega}{\partial n}$ *- ҳосила аз рӯи равиши нормали беруна ба нуқтаҳои контури* Γ *- ро ифода мекунад.* Тавассути методи гузаштан ба муодилаи интегралии сингулярии дученака теоремаи зерин исбот карда шудааст:

Теоремаи 0.1. *Барои он, ки масъалаи (0.4) барои системаи эллиптикии (0.3) дар синфи* $W_p^6(D)\cap C^2(\overline{D})$ $2<p<\infty$ *нётеровӣ бошад, зарур ва кифоя аст, ки шартҳои зерин*

$$|a(z)|\neq|b(z)| \text{ барои ҳамаи } z\in\overline{D}, \quad a(t)\neq 0 \quad \text{барои ҳамаи} \quad t\in\Gamma, \tag{0.5}$$

иҷро шаванд ва айни ҳол агар $|a(z)|>|b(z)|$ *бошад, онгоҳ индекси масъала баробари нол аст ва агар шарти* $|a(z)|<|b(z)|$ *иҷро шавад, онгоҳ индекси масъала ба*

$$\varkappa=-\frac{3}{\pi}\Big[\arg a(t)\Big]_\Gamma$$

баробар мешавад.

Айнан ҳамин гуна натиҷа барои масъалаи Неймани муодилаи (0.3) ҷой дорад.

Дар параграфи сеюми боби як ҳалшавандагии масъалаҳои Дирихле ва Нейман барои системаи ду муодилаи эллиптикии ҳашт компонентноки тартиби шаши намуди зерин омӯхта мешавад:

$$\begin{gathered}
a_0(z)\frac{\partial^6\omega}{\partial\overline{z}^3\partial z^3}+b_0(z)\frac{\partial^6\overline{\omega}}{\partial\overline{z}^3\partial z^3}+a_1(z)\frac{\partial^6\omega}{\partial\overline{z}^4\partial z^2}+b_1(z)\frac{\partial^6\overline{\omega}}{\partial z^4\partial\overline{z}^2}+\\
+a_2(z)\frac{\partial^6\omega}{\partial\overline{z}^5\partial z}+b_2(z)\frac{\partial^6\overline{\omega}}{\partial z^5\partial\overline{z}}+a_3(z)\frac{\partial^6\omega}{\partial\overline{z}^6}+b_3(z)\frac{\partial^6\overline{\omega}}{\partial z^6}+\\
+\sum_{k+j=0}^{5}\left[a_{k,j}(z)\frac{\partial^{k+j}\omega}{\partial\overline{z}^k\partial z^j}+b_{k,j}(z)\frac{\partial^{k+j}\overline{\omega}}{\partial\overline{z}^k\partial z^j}\right]=g(z),
\end{gathered}\tag{0.6}$$

ки дар ин ҷо $\omega(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, коэффисиентҳои $a_j(z),\ b_j(z),\ a_{k,j}$, $b_{k,j}(j,k=0,1,2)$ – функсияҳои додашудаи бефосила дар соҳаи сарбастаи $\overline{D}=D\cup\Gamma$ мебошанд ва $g(z)\in L^p(D)$, $2<p<\infty$.

Аз рӯи қисми асосии системаи (0.7) матритса-функисияи зеринро месозем

$$\mathcal{G}_z(t) = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{3} a_n(z)t^n & \sum_{n=0}^{3} b_n(z)\bar{t}^n \\ \sum_{n=0}^{3} \overline{b_n(z)}t^n & \sum_{n=0}^{3} \overline{a_n(z)}\bar{t}^n, \end{pmatrix}$$

ки $z \in \overline{D}$, $|t| = 1$ аст. Эллиптикӣ будани системаи (0.6) маънои онро дорад, ки барои дилхоҳ нуқтаи $z \in \overline{D}$ ва ихтиёри $t : |t| = 1$ нобаробарии зерин иҷро шавад $\det \mathcal{G}_z(t) \neq 0$:

$$|F(z,t)|^2| - |Q(z,t)||^2 \neq 0, \; z \in \overline{D}, \qquad (0.7)$$

ки $F(z,t) = \sum_{n=0}^{3} a_n(z)t^n$, $Q(z,t) = \sum_{n=0}^{3} b_n(z)\bar{t}^n$ аст.

Қайд бояд намуд, ки дар корҳои Н. П. Дибов [25]–[27] системаи умумии муодилаҳои эллиптикии тартиби шаш тариқи методи муодилаҳои интегралии сингуярӣ дида баромада шудааст, аммо нисбати системаи (0.6) натиҷаҳои ҳосилшуда фақат ҳолати системаҳои эллиптикии қавиро дар бар мегиранд, яъне ҳолате, ки барои муодилаҳои интегралии мувофиқи он принсипи операторҳои фушурдашаванда татбиқ мешаванд.

Маҷмӯи ҳамаи матритсаҳои полиномиалии намуди $\mathcal{G}_z(t)$, ки барои ҳамаи $z \in \overline{D}$, шарти $\det \mathcal{G}_z(t) > 0 \, (< 0)$ - ро қаноат мекунанд, бо $\mathcal{G}^+$ $(\mathcal{G}^-)$ ишора мекунем. Ду матрисаи $\mathcal{G}_z^1$, $\mathcal{G}_z^2$ аз синфи $\mathcal{G}^+$ - ро гомотопӣ меномем, агар маҷмӯи матрисаҳои полиномиалии $\mathcal{G}_z^+(\tau)$ аз $\mathcal{G}^+$ мавҷуд бошанд, ки онҳо аз параметри ҳақиқии $\tau : 0 \leq \tau \leq 1$ бефосила вобаста бошанд ва

$$\mathcal{G}^+(0) \equiv \mathcal{G}_z^1, \quad \mathcal{G}^+(1) \equiv \mathcal{G}_z^2$$

шаванд.

Бигузор $q_1(z)$, $q_2(z)$, $q_3(z)$ – ҳалҳои комплексии муодилаи уравнения $F(z,t) = 0$ бошанд. Мувофиқи шарти (0.7) ин ҳалҳо дар сарҳади доираи воҳиди намехобанд, яъне модули ҳамаи онҳо нобаробари як аст. Вобаста аз миқдори нулҳои полиноми $F(z,t)$ дар дохили доираи $|t| = 1$ 4 ҳолатҳои зерин имконпазир аст:

- ҳолати ν_0 - полиноми $F(z,t)$ дар дохили $|t|<1$ ҳал надорад;
- ҳолати ν_k - полиноми $F(z,t)$ дар дохили $|t|<1$ расо k $(k=1,2,3)$-то ҳал дорад.

Ҳамин тавр муносибатҳои гомотопӣ $\mathcal{G}^+$- ро ба 4 синфи гомотопӣ - компонентҳои сарбастаи ν_k $(k=0,1,2,3)$ ҷудо мекунад. Ин синфҳо системаи пурраи маҷмӯи$\mathcal{G}^\pm$ т - ро ташкил медиҳанд, яъне $\mathcal{G}_z^1$ $\mathcal{G}_z^2$ аз F^+ дохили яке аз синфҳои $\nu_j\,(j=0,\ 1,\ 2,\ 3)$ мехобанд, фақат ва фақат дар он ҳолате, ки $\mathcal{G}z^1\sim\mathcal{G}^1$ бошад.

Леммаи 0.1. *Бигузор матрисаи $\mathcal{G}_z(t)\in\mathcal{G}^+$ бошад. Онгоҳ $\mathcal{G}^+$ таалуқи синфи ν_j $(j=0,\ 1,\ 2,\ 3)$ мешавад, фақат ва фақат дар он ҳолате, ки нобаробарии*

$$\Delta_j(z)>M(z)+\Big(M^2(z)+\sum_{\substack{n=0\\ n\neq j}}^{3}|\mu_{j,n}(z)|^2-|\lambda_{j,n}(z)|^2\Big)^{1/2}\quad\forall z\in\overline{D},\quad(0.8)$$

иҷро шавад, ки дар ин ҷо

$$\lambda_{j,n}=\overline{a}_ja_n-b_j\overline{b}_n,\ \mu_{j,n}=\overline{a}_jb_n-b_j\overline{a}_n,\ \Delta_n(z)=|a_n(z)|^2-|b_n(z)|^2,\ n=0,1,2,3;$$

$$M(z)=\max_{|t|=1}[(a_1\overline{a}_0-b_1\overline{b}_0+a_2\overline{a}_1-b_2\overline{b}_1+a_3\overline{a}_1-b_3\overline{b}_1)t+$$
$$+(a_2\overline{a}_0-b_2\overline{b}_0+a_3\overline{a}_1-b_3\overline{b}_1)t^2+(a_3\overline{a}_0-b_3\overline{b}_0)t^3]$$

мебошанд.

Масъалаи Дирихле. *Функсияи $\omega(z)$ аз синфи $W_p^6(D)\cap C^2(\overline{D})$ ёфта шавад, ки дар дохили D муодилаи (0.6) – ро қаноат мукунад ва дар сарҳади Γ се шартҳои*

$$\omega(z)\big|_\Gamma=0,\quad \frac{\partial\omega}{\partial n}\bigg|_\Gamma=0,\quad \frac{\partial^2\omega}{\partial n^2}\bigg|_\Gamma=0,\qquad(0.9)$$

-ро қаноат кунад, ки $\frac{\partial\omega}{\partial n}$ – ҳосила аз рӯи нормали беруна дар нуқтаи контури Γ мебошад.

Натиҷаҳои асосии **§3 боби 1** инҳоянд:

Теоремаи 0.2. *Бигузор матрисаи $\mathcal{G}_z(t)$ из $\mathcal{G}^+$ таалуқи синфи гомотопии ν_0 бошад. Барои он, ки масъалаи (0.9) барои системаи эллиптикии (0.6) аз синфи $W_p^6(D)\bigcap C^2(\overline{D})$ $(2 < p < \infty)$ фредголъмовӣ бошад, зарур ва кифоя аст, ки шарти зерин иҷро шавад:*

$$\Delta_0(z) > M(z) + \Big(M^2(z) + \sum_{n=1}^{3} |\mu_{0,n}(z)|^2 - |\lambda_{0,n}(z)|^2\Big)^{1/2} \quad \forall z \in \overline{D}. \quad (0.10)$$

Теоремаи 0.3. *Бигузор матрисаи $\mathcal{G}_z(t)$ из $\mathcal{G}^+$ таалуқи синфи гомотопии ν_j $(j = 1, 2, 3)$ бошад. Барои он, ки масъалаи (0.9) барои системаи эллиптикии (0.6) аз синфи $W_p^6(D)\bigcap C^2(\overline{D})$ $(2 < p < \infty)$ нетеровӣ шавад, зарур ва кифоя аст, ки шартҳои зерин*

$$\begin{gathered}\Delta_j(z) > M(z) + \Big(M^2(z) + \sum_{\substack{n=0\\ n\neq j}}^{3} |\mu_{j,n}(z)|^2 - |\lambda_{j,n}(z)|^2\Big)^{1/2} \\ \text{ва} \quad \mu_{j,n}(\tau) \neq 0 \quad \text{барои} \quad \forall z \in \overline{D}, \quad \tau \in \Gamma,\end{gathered} \quad (0.11)$$

иҷро шаванд, ки

$$\lambda_{j,n}(z) = \overline{a_j(z)}a_n(z) - b_j(z)\overline{b_n(z)},\ \mu_{j,n}(z) = \overline{a_j(z)}b_n(z) - b_j(z)\overline{a_n(z)}$$

мебошанд.

Айни замон, агар шарти (0.10) иҷро шавад, онгоҳ индекси масъала ба

$$\varkappa = -2jInd_{\Gamma}\mu_{j,0}(\tau),$$

баробар мешавад.

Айнан ҳамин гуна натиҷа барои масъслаи Неймани муодилаи (0.6) ҷой дорад.

Дар параграфи чоруми боби якуми диссертатсия масъалаҳои Дирихле ва Нейман барои системаи умумии эллиптикии ду муодилаҳои аз ду тағйирёбанда вобастаи тартиби шаш дар ҳамворӣ мавриди таҳқиқ қарор дода шудааст, навишти комплексии он намуди зерин дорад:

$$
\begin{gathered}
\sum_{n=-3}^{3} a_n(z)\frac{\partial^6\omega}{\partial\overline{z}^{3+n}\partial z^{3-n}} + b_n(z)\frac{\partial^{2m}\overline{\omega}}{\partial\overline{z}^{3-n}\partial z^{n+3}} + \\
+\sum_{0\le l+j\le 5} a_{l,j}(z)\frac{\partial^{l+j}\omega}{\partial\overline{z}^{l}\partial z^{j}} + b_{l,j}(z)\frac{\partial^{l+j}\overline{\omega}}{\partial\overline{z}^{l}\partial z^{j}} = g(z),
\end{gathered}
\qquad (0.12)
$$

где $z = x + iy$, $\omega(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Дар назар дошта мешавад, ки коэффисиентҳои муодилаи (0.13) дар $\overline{D}$ функсияҳои бефосила ва $g(z) \in L^p(D), 2 < p < \infty$ мебошанд.

Дар ин параграф натиҷаҳои параграфҳои пешинаи диссертатсия густариш ёфтаанд. Вобаста аз синфҳои гомотопӣ барои системаи умумии эллиптикии ду муодилаҳои аз ду тағйирёбанда вобастаи тартиби шаш дар ҳамворӣ шартҳои зарурӣ ва кифоягии нётеровӣ будани масъалаҳои Дирихле ва Нейман ёфта шуда формулаҳо барои ҳисоб намудани индекси масъалаҳо ҳосил карда шудааст.

Барои системаи (0.12) матритса-символи зеринро месозем

$$
\mathscr{G}(z,t) = \begin{pmatrix} \dfrac{\mathscr{P}_6(z,t)}{Q_6(z,t)} & \dfrac{\mathscr{Q}_6(z,t)}{\mathscr{P}_6(z,t)} \end{pmatrix}, \qquad (0.13)
$$

ки

$$
\mathscr{P}_6(z,t) = \bar{t}^3 \sum_{n=-3}^{m} a_n(z)t^{3+n},\ \mathscr{Q}_6(z,t) = \bar{t}^3 \sum_{n=-3}^{3} (-1)^n b_n(z)t^{3-n},
$$

аст.

Эллиптикӣ будани системаи (0.12) маънои онро дорад, ки

$$
\det\mathscr{G}(z,t) \equiv |\mathscr{P}_6(z,t)|^2 - |\mathscr{Q}_6(z,t)|^2 \neq 0 \qquad (0.14)
$$

барои ҳамаи $z \in \overline{D}$, $|t| = 1$ иҷро шавад. Аз (0.14) мебарояд, ки $P_6(z,t) \equiv t^3\mathscr{P}_6(z,t) = \sum_{n=-3}^{m} a_n(z)t^{3+n}$ – полиноми комплексии таназулнаёбандаи 6 мебошад. Бигузор $q_k(z)$ $(k = 1, 2, \ldots, 6)$ ҳалҳои комплексии муодилаи $P_6(z,t) = 0$ бошанд. Мувофиқи (0.14) ин ҳалҳо дар давраи $|t| = 1$ намехобанд, яъне $|q_k(z)| \neq 1$ ё $|q_k(z)| < 1$ ёин, ки $|q_k(z)| > 1$ мебошанд. Ҳалҳои гуруҳи якумро бо $q_k^+(z)$, $k = 1, 2, \ldots, l^+$ ва ҳалҳои гуруҳи дуюмро бо $q_k^-(z)$, $k = 1, 2, \ldots, l^-$, $l^+ + l^- = 6$ ишора мекунем. Вобаста аз миқдори нулҳои полиноми $P_6(z,t)$ дар дохили доираи воҳидии $|t| = 1$, априорӣ 7 ҳолат имконпазир аст.

Синфи полиномҳои матритсавиро аз $\mathscr{F}_+^2$, ки барои онҳо яке аз ҳолатҳои имконпазир ҷой дорад, ба воситаи ν_k $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3)$ ишора мекунем.

Таъриф. Мегӯянд, ки системаи эллиптикии (0.12) таалуқи синфи ν_k ($-3 \leq k \leq 3$) аст, агар барои дилхоҳ $z \in \overline{D}, |t| = 1$ нобаробарии (14) ҷой дорад ва

$$\nu_k = Ind_{|t|=1} \mathscr{P}_6(z,t) = l^+ - 3$$

аст.

Масъалаи Дирихле. *Функсияи $\omega(z)$ - ро аз синфи $W_p^6(D) \cap C^2(\overline{D})$ ёфтан даркор аст, ки дар дохили D муодилаи (0.12) ва дар сарҳади он Γ шартҳои*

$$\left. \frac{\partial^j \omega}{\partial n^j} \right|_{\Gamma} = 0, \ j = 0, \ 1, \ 2, \tag{0.15}$$

- ро қаноат мекунанд, ки дар ин ҷо $\frac{\partial \omega}{\partial n}$ - ҳосилаи функсияи $\omega(z)$ аз рӯи равиши нормали беруна дар нуқтаҳои Γ мебошад.

Натиҷаҳои асосии **§4 -и боби 1** зеринанд:

Теоремаи 0.4. *Бигузор матрисаи $\mathcal{G}_z(t)$ аз $\mathcal{G}^+$ таалуқи синфи гомотопикии ν_0 бошад. Барои он, ки масъалаи (0.15) барои системаи эллиптикии (0.12) дар синфи $W_p^6(D) \bigcap C^2(\overline{D})$ $(2 < p < \infty)$ фредголмовӣ бошад, зарур ва кифоя аст, ки шарти*

$$\Delta_0(z) > M(z) + \Big(M^2(z) + \sum_{\substack{n=-3 \\ n \neq 0}}^{3} |\mu_{0,n}(z)|^2 - |\lambda_{0,n}(z)|^2 \Big)^{1/2} \quad \forall z \in \overline{D} \tag{0.16}$$

иҷро шавад.

Теоремаи 0.5. *Бигузор матрисаи $\mathcal{G}_z(t)$ аз $\mathcal{G}^+$ таалуқи синфи гомотопикии ν_j $(j = \pm1, \pm2, \pm3)$ бошад. Барои он, ки масъалаи (0.15) барои системаи эллиптики (0.12) аз синфи $W_p^6(D)\bigcap C^2(\overline{D})$ $(2 < p < \infty)$ нётеровӣ бошад, зарур ва кифоя аст, ки шартҳои*

$$\begin{gathered}\Delta_j(z) > M(z) + \Big(M^2(z) + \sum_{\substack{n=-3\\ n\neq j}}^{3} |\mu_{j,n}(z)|^2 - |\lambda_{j,n}(z)|^2\Big)^{1/2} \\ \text{и} \quad \mu_{j,0}(\tau) \neq 0 \quad \text{для} \quad \forall z \in \overline{D}, \quad \tau \in \Gamma\end{gathered} \tag{0.17}$$

иҷро шавад, ки

$$\lambda_{j,n}(z) = \overline{a_j(z)}a_n(z) - b_j(z)\overline{b_n(z)},\ \mu_{j,n}(z) = \overline{a_j(z)}b_n(z) - b_j(z)\overline{a_n(z)}$$

мебошад.

Айни ҳол, агар шартҳои (0.17) иҷро шаванд, онгоҳ индекси масъала баробари

$$\varkappa = -2jInd_{\Gamma}\mu_{j,0}(\tau)$$

мешавад.

Айнан ҳамин гуна натиҷаҳо барои масъалаи Неймани барои муодилаи (12) ҷой доранд.

Боби дуюми кори диссертатсионӣ ба тадқиқи масъалаҳои Дирихле ва Нейман барои баъзе синфҳои системаи муодилаҳои дифференсиалии эллиптикии тартиби шаш бо коэффитсиентҳои канишнок дар ҳамворӣ бахшида шудааст.

Дар параграфи 2.1 - и боби 2 системаи муодилаҳои дифференсиалии эллиптикии зерин

$$\begin{aligned}&a(z)\frac{\partial^6\omega}{\partial\overline{z}^3\partial z^3} + (\overline{z}/|z|)^n b(z)\frac{\partial^6\overline{\omega}}{\partial\overline{z}^6} + \\ &+ \sum_{k+j=0}^{5}\left[a_{k,j}(z)\frac{\partial^{k+j}\omega}{\partial\overline{z}^k\partial z^j} + b_{k,j}(z)\frac{\partial^{k+j}\overline{\omega}}{\partial\overline{z}^k\partial z^j}\right] = g(z),\end{aligned} \tag{0.18}$$

омӯхта мешавад.

Чуноне, ки аён аст, коэффитсенти назди ҳосилаи $\overline{\omega}_{\overline{zz}}$ муодилаи (0.18) дар нуқтаи $z = 0$ каниши бартарафнашаванда дорад. Дар ҳар як нури аз ибтидои координата баромада, функсияи $(\overline{z}/|z|)^n$ доимӣ буда, дар нуқтаи $z = 0$ аз рӯи ин нурҳо ҳудудҳои гуногун дорад. Дар поён нишон дода мешавад, ки бефосила набудани коэффисиентҳо ба он оварда мерасонад, ки шартҳои дар §2 боби 1 ёфташуда барои нетеровӣ будан кифоягӣ намекунанд ва илова бар ин ҳалшавандагии масъалаи Дирихле аз нишондиҳандаи p - и фазои лебегии $L^p(D)$ вобаста мешавад.

Дар пункти 2.5.1 муодилаи дифференсиалии моделии уравнение

$$a(0)\frac{\partial^6\omega}{\partial\overline{z}^3\partial z^3} + (z/|z|)^n b(0)\frac{\partial^6\overline{\omega}}{\partial\overline{z}^6} = q(z). \tag{0.19}$$

омӯхта мешавад.

Масъалаи Дирихлеи (4) барои муодилаи моделии (19) тавассути тасвири интегралии Векуа

$$\omega(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_D G_6(z,\zeta)f(\zeta)ds_\zeta, \tag{0.20}$$

ки

$$G_6(z,\zeta) = |\zeta - z|^4 \ln\left|\frac{1-z\overline{\zeta}}{\zeta - z}\right|^2 - |\zeta - z|^2(1-|z|^2)(1-|\zeta|^2) + \frac{1}{2}(1-|z|^2)^2(1-|\zeta|^2)^2.$$

аст, ба муодилаи дученакаи интегралии сингулярии

$$a(0)f(z) + (z/|z|)^n b(0)(S_3\overline{f})(z) + (Tf)(z) = g(z), \tag{0.21}$$

оварда мешавад, ки

$$(S_3\overline{f})(z) = -\frac{3}{\pi}\iint\limits_D \frac{(\overline{\zeta} - \overline{z})^2}{(\zeta - z)^4}\overline{f(\zeta)}ds_\zeta$$

оператори интегралии сингулярии дученака бо характеристикаи ҷуфти тартиби шаш буда, T – оператори пурра бефосила мебошад. Дар навбати худ тадқиқи муодилаи (0.21) ба тадқиқи системаи муодилаҳои якченака бо ядроҳои якҷинсаи татиби (-1) нисбати коэффитсентҳои Фурйеи функсияи номаълуми $\omega_k(r)$ оварда мешавад, ки онҳо дар мақолаҳои Г. Ҷангибеков [46],[47] омӯхта шудаанд.

$$R_\beta(k) = \sqrt{1 - \frac{12(1-\beta)}{(k-\beta)(k+4)}}, \tag{0.22}$$

ки $0 < \beta < 2$, k аз маҷмӯъи ададҳои бутуни $k \geq -2$ қимат мегирад. Ба воситаи $\mu_\beta(\lambda)$ ададеро ишора мекунем, ки он барои $|\lambda| < 1$ баробари миқдори қиматҳои k, ки барои онҳо нобаробариҳои $R_\beta(k) < |\lambda|$ иҷро мешаванд; барои $|\lambda| > 1$ баробари қиматҳои k, ки барои онҳо нобаробарии $R_\beta(k) > |\lambda|$ иҷро мешавад.

Билохира барои муодилаи интегралии сингулярии дученакаи моделии (0.21) ва инчунин барои масъалаи Дирихлеи (0.15) - и муодилаи дифференсиалии моделии (0.19) (ҳангоми $n = 2$) дар синфи $W_p^6(D) \cap C(\overline{D})$, $p > 2$ натиҷаҳои зерин ҳосил карда шудааст:

Теоремаи 0.6. *Барои нормалӣ ҳалшавандагии муодилаи интегралии сингулярии моделии (0.21) дар фазоҳои $L^p_{\beta-2/p}(|z| < 1)$ зарур ва кифоя аст, ки $|\lambda| \neq 1$ ва $|\lambda| \neq R_\beta(k)$ бошанд, ки $k \geq -2$ ва $k \neq 1$ мебошанд. ҳангоми иҷро шудани иншартҳо, индекс $\varkappa_\beta(\lambda)$ қиматҳои зеринро қабул мекунад:*

агар $0 < \beta \leq 1$ бошад, онгоҳ $\varkappa_\beta(\lambda) = -2\mu_\beta(\lambda)$ ҳангоми $|\lambda| < 1$ ва баробари $2(6-\mu_\beta(\lambda))$ ҳангоми $|\lambda| > 1$ ва $\mu_\beta(\lambda) \neq 3$ ва баробари 7 ҳангоми $\mu_\beta(\lambda) = 3$ будан;

агар $1 < \beta < 2$ бошад, онгоҳ $\varkappa_\beta(\lambda)$ баробари $2\mu_\beta(\lambda)$ ҳангоми $|\lambda| < 1$ ва баробари $\mu_\beta(\lambda) \neq 3$ ва баробари 5 ҳангоми $|\lambda| < 1$ ва $\mu_\beta(\lambda) = 3$ ва баробари $2(6 + \mu_\beta(\lambda))$ ҳангоми $|\lambda| > 1$ будан.

Дар айни ҳол, агар $\varkappa_\beta(\lambda) > 0$ бошад, онгоҳ муодилаи якҷинсаи (0.21) расо $\varkappa_\beta(\lambda)$ ҳалли хаттӣ нововбвста дорад ва ҳангоми $\varkappa_\beta(\lambda) < 0$ будан барои ҳалшавандагии муодилаи ғайриякҷинсаи (0.21) иҷро шудани $-\varkappa_\beta(\lambda)$ шарти ҳалшавандагӣ талаб карда мшавад, ки онҳо ба таври ошкор ифода меёбанд.

Теоремаи 0.7. *Барои он, ки масъалаи Дирихлеи (0.15) барои муодилаи дифференсиалии моделии (0.19) (ҳангоми $n = 2$) дар синфи $W_p^6(D) \cap C^2(\overline{D}),\ p > 2$ нётеровӣ бошад, зарур ва кифоя аст, ки шартҳои*

$$|a(0)| \neq |b(0)|, |\lambda| \neq R_{2/p}(k), k \geq -2, \tag{0.23}$$

иҷро шаванд ва индекси масъала баробари

$$\varkappa_{2/p}(\lambda) = \begin{cases} -2\mu_{2/p}(\lambda) & \text{ҳангоми } \ |\lambda| < 1; \\ 2(6 - 2\mu_{2/p})(\lambda) & \text{ҳангоми } \ |\lambda| > 1,\ \ \mu_\beta(\lambda) \neq 3\ ; \\ 7 & \text{ҳангоми } \ \mu_{2/p}(\lambda) = 3. \end{cases}$$

аст.

Барои гузаштан аз ин натиҷаҳо ба натиҷаҳо барои масъалаи Дирихле (0.15) барои системаи муодилаҳои дифференсиалии аввалаи (0.20) дар пункти 2.1.3. леммаи (2.1.1) оиди факторизатсияи операторҳои дученакаи интегралии сингулярӣ бо коэффитсентҳои канишнок исбот карда мешавад. Аз ин натиҷаҳо барои масъалаи Дирихле (0.19) теоремаи зерин хулоса мебарояд:

Теоремаи 0.8. *Барои он, ки масъалаи (0.19) барои муодилаи (0.20)(ҳангоми $n = 2$) дар синфи $W_p^6(D) \cap C^2(\overline{D}),\ 2 < p < \infty$ нётеровӣ бошад, зарур ва кифоя аст, ки шартҳои зерин иҷро шаванд:*
1. $|a(z)| \neq |b(z)|$ *ҳангоми* $|z| \leq 1,\ a(t) \neq 0$ *ҳангоми* $|t| = 1$,
2. $|\lambda| \neq R_{2/p}(k), k \geq -2$,
ва индекси масъала баробар аст ба

$$\varkappa = -6\underset{|t|=1}{Ind}a(t) + \varkappa_{2/p}(\lambda),$$

ки $\varkappa_{2/p}(\lambda)$ *аз теоремаи (0.7) муайян мешавад.*

Дар параграфи 2.6. боби 2 натиҷаҳои теоремаҳои 0.7 ва 0.8. барои масъалаҳои Дирихле ва Нейман барои баъзе синфҳои системаҳои муодилаҳои дифференсиалии эллиптикӣ бо коэффитсентҳои канишноки намуди

$$a(z)\frac{\partial^6\omega}{\partial\overline{z}^3\partial z^3}+b(z)\frac{\partial^6\overline{\omega}}{\partial\overline{z}^3\partial z^3}+(z/|z|)^n c(z)\frac{\partial^6\omega}{\partial\overline{z}^6}+(\overline{z}/|z|)^n d(z)\frac{\partial^6\overline{\omega}}{\partial z^6}+ \\ +\sum_{k+j=0}^{5}\left[a_{k,j}(z)\frac{\partial^{k+j}\omega}{\partial\overline{z}^k\partial z^j}+b_{k,j}(z)\frac{\partial^{k+j}\overline{\omega}}{\partial\overline{z}^k\partial z^j}\right]=g(z) \tag{0.24}$$

дошта умумӣ карда мешаванд.

Ишораҳои зеринро дохил мекунем:

$$R_p(k)=\sqrt{1-\frac{2n(1-2/p)}{(k+2/p)(k+2/q-n)}},\ \ k\geq n_0,,$$

$k\neq\dfrac{n}{2}(1+signn)-1,\ 1/p+1/q=1,\ n_0$ - қисми бутуни адади $(n-1)/2$;

$$\Lambda=\begin{cases}\frac{\Delta_1(0)}{\mu(0)}, & \text{агар (1.2) иҷро шавад;}\\ \frac{\mu(0)}{\Delta_2(0)}, & \text{агар (1.3) иҷро шавад.}\end{cases}$$

Ба воситаи $\mu_p(\Lambda)$ ададеро ишора мекунем, ки ҳангоми $|\Lambda|<1$ будан баробари миқдори қиматҳои k, ки барои онҳо нобаробариҳои $R_p(k)<|\Lambda|$, иҷро шаванд, ва барои $|\Lambda|>1$ аробари миқдори қиматҳои k, ки барои онҳо нобаробариҳои $R_p(k)>|\Lambda|$ иҷро мешаванд.

Агар $n\geq 0$ бошад, онгоҳ адади

$$\varkappa_p(\lambda)=\begin{cases}-2\mu_p(\Lambda) & \text{ҳангоми } |\Lambda|<1,\\ 2n-2\mu_p(\Lambda) & \text{ҳангоми } |\Lambda|>1, \text{ и } \mu_p(\Lambda)\neq n/2,\\ n+1 & \text{ҳангоми } |\Lambda|>1, \text{ и } \mu_p(\Lambda)=n/2,\end{cases}$$

-ро дохил мекунем, агар $n\leq -1$ бошад, онгоҳ

$$\varkappa_p(\Lambda)=\begin{cases}-2\mu_p(\Lambda) & \text{ҳангоми } |\Lambda|<1, \text{ и } \mu_p(\Lambda)\neq n/2,\\ 2n-2\mu_p(\Lambda) & \text{ҳангоми } |\Lambda|>1,\\ n+1 & \text{ҳангоми } |\Lambda|<1, \text{ ва } \mu_p(\Lambda)=n/2.\end{cases}$$

Масъалаи Дирихле. *Функсияи* $\omega(z)$ *- ро аз синфи* $W_p^6(D)\cap C^2(\overline{D})$ *ёфтан даркор аст, ки дар дохили* D *муодилаи (24)-ро ва дар сарҳади* Γ *ду шартҳои*

$$\omega(z)\Big|_{\Gamma}=0, \quad \frac{\partial\omega}{\partial n}\bigg|_{\Gamma}=0, \quad \frac{\partial^2\omega}{\partial n^2}\bigg|_{\Gamma}=0 \qquad (0.25)$$

-ро қаноат кунад, ки $\frac{\partial\omega}{\partial n}$ *- ҳосила аз рӯи равиши нормали беруна ба нуқтаҳои контури* Γ *мебошад.*

Тасдиқотҳои зерин исбот карда шудаад:

Теоремаи 0.9. *Бигузор дар муодилаи (0.24)* $n=0$ *бошад. Онгоҳ барои он, ки масъалаи Дирихле (0.26) барои системаи эллиптикии (0.25) дар синфи* $W_p^6(D)\cap C^2(\overline{D})$ *нетеровӣ бошад зарур ва кифоя аст, ки яке аз шартҳои зерин иҷро шаванд:*

$$|\Delta_1(z)|>|\lambda(z)|+|\mu(z)| \quad \text{барои ҳамаи} \quad z\in\overline{D}, \qquad (0.26)$$

$$|\Delta_2(z)|>|\lambda(z)|+|\mu(z)| \ \text{барои ҳамаи} \quad z\in\overline{D};\ \mu(t)\neq 0 \ \text{барои ҳамаи} \quad t\in\Gamma. \qquad (0.27)$$

Ҳамзамон, агар шарти (0.27) иҷро шавад, онгоҳ масъала фредголмовӣ аст; агар шарти (0.28) иҷро шавад, онгоҳ индекси масъала ба

$$\varkappa=-2Ind_{\Gamma}\mu(t).$$

Теоремаи 0.10. *Бигузор дар (0.25)* $n\neq 0$ *ва* $\lambda(0)=0$ *бошад. Онгоҳ агар* $\Lambda\neq 1, \Lambda\neq R_n(k), k$ *бутун,* $k\geq 1/2n(1+signn)$ *ва яке аз шартҳои (0.27), (0.28) иҷро шаванд, онгоҳ, масъалаи Дирихле барои системаи эллиптикии (0.25) дар синфи* $W_p^6(D)\cap C^2(\overline{D})$ *нётеровӣ мешавад ва ҳамзамон агар шарти (0.27) иҷро шавад, онгоҳ то индекси масъала ба* $\varkappa_p(\Lambda)$ *баробар мешавад ва агар шарти (0.28) иҷро шавад, онгоҳ*

$$\varkappa=2Ind_{\Gamma}\mu(t)+\varkappa_p(\lambda).$$

баробар мешавад.

Айнан ҳамин тавр масъалаи Нейман низ омӯхта шудааст:

Масъалаи Нейман. *Дар соҳаи* $\overline{D}$ *ҳалли бефосилаи системаи (0.25) - ро аз синфи* $W_p^6(D) \cap C^2(\overline{D})$ *ёфта шавад, ки дар сарҳади* Γ *шартҳои*

$$\frac{\partial^j \omega}{\partial \nu^j}\Big|_{\Gamma} = 0, \;\; j = 1, 2, 3 \qquad (0.28)$$

-ро қаноат кунад.

ТАҲЛИЛИ АДАБИЁТ ОИДИ НАЗАРИЯИ МАСЪАЛАҲОИ КАНОРӢ БАРОИ МУОДИЛАҲОИ ДИФФЕРЕНСИАЛӢ БО ҲОСИЛАҲОИ ХУСУСӢ

1. Таҳлили натиҷаҳо оиди назарияи масъалаҳои Дирихле ва Нейман барои системаҳои эллиптикии қавии тартиби ду

Усули потенсиалҳои содда, ду қабата ва инчунин усули назарияи функсияҳои тағйирёбандааш комплексӣ, ки дар онҳо роли потенсиалҳоро интеграли намуди Коши мебозад, имконият медиҳанд, ки масъалаҳои канории физикаи математикӣ ба муодилаҳои интегралӣ оварда шаванд (ниг. масалан: И. Г. Петровский [55], В. С. Владимиров [84], С. Г. Михлин [85], М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат [86], Ю. В. Сидоров, М. В. Федорюк, М. И. Шабунин [87]). Масъалаи канорӣ, ки аз ду қисм иборат аст, муодила ва шарти канорӣ, ба як муодилаи интегралӣ оварда мешаванд, ки он ба пуррагӣ ба масалаи ибтидоӣ баробарқувва мебошад. Аз сабаби он, ки доираи муодилаҳо ва шартҳои сарҳадӣ васеъ мешаванд, пас ҳар замон муодилаҳои интегралии нав пайдо мешавад. Масалан баъд аз муодилаҳо барои масъалаҳои Дирихле ва Нейман ва дигар маъалаҳо муодилаҳои интегралии сингулярӣ пайдо шуд, ки онҳо масъалаҳои гуногуни назарияи чандирӣ ва гидродинамикиро хубтар тасвир мекунанд. Синфи васеъи масъалаҳои физикии статсионарӣ ба ёфтани функсияҳои гармоникӣ меорад, ки баъзе шартҳои сарҳадиро қаноат мекунанд [48] – [63]. Аз ҳама муодилаи содда ва хело ҳам муҳим – муодилаи эллиптикӣ, муодилаи Лапласа мебошад:

$$\Delta u = 0, \tag{0.29}$$

ки $u(x, y)$, – функсияи ҳақиқӣ, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператори Лаплас мебошанд. Бигузор дар сарҳади $\Gamma-$ и соҳаи маҳдуди D, функсияи бефосилаи $u_0(x, y)$ дода шуда бошад. Масъалаи классикии Дирихле барои муодилаи

Лаплас чунин гузошта машавад:
функсияи дар соҳаи D гармоникии $u(x,y)$ ёфта шавад, ки он то сарҳади соҳа Γ бефосила буда, дар сарҳад бошад Γ қимати $u_0(x,y)$–ро қабул кунад:

$$u|_{(x,y)\in\Gamma} = u_0(x,y). \tag{0.30}$$

Ҳалли масъалаи классикии Дирихле (0.29), (0.30) мавҷуд ва ягона аст. Исботи мавҷудияти ҳал дар корҳои [48]– [53] оварда шудаанд. Ягонагии ҳал аз принсипи максимум ва минимуми функсияҳои гармоникӣ мебароянд.

Дар амалия шарти бефосилагии қиматҳои сарҳадӣ $u_0(x,y)$ бисёр маҳдудкунанда мебошад ва бинобарин масъалаи умумишудаи Дирихле чорӣ карда мешавад:
дар сарҳади Γ - и соҳаи D функсияи $u_0(x,y)$ дода шудааст, ки он дар ҳама ҷо ба ғайр аз миқдори охирноки нуқтаҳои (x_k,y_k) $k=1,2,\dots n$ бефосила буда, дар ин нуқтаҳо бошад каниши ҷинси якум дорад. Функсияи дар соҳаи маҳдуди D гармоникӣ ва маҳдуди $u(x,y)$ ёфт шавад, ки дар ҳамаи нуқтаҳои бефосилагиаш қимати $u_0(x,y)$ - ро қабул мекунад.

Ҳалли масъалаи умумишудаи Дирихле мавҷуд ва ягона аст [48]–[52].

Дар соҳаи маҳдуди якалоқаноки дученакаи D бо сарҳади Γ системаи умумии муодилаҳои тартиби дуро дида мебароем:

$$\sum_{j=0}^{2} a_j(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^j \partial y^{2-j}} + b_1(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b_2(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + b_0(x,y)u = g(x,y), \tag{0.31}$$

ки $a_j(x,y), b_j(x,y)$ $(j = 0,1,2)$ – матритсаҳои квадратии андозаашон 2×2, $u = (u_1,u_2)$ – вектор-функсияи номаълуми тағйирёбандаҳояш x и y; $g = (g_1,g_2)$ – вектор-функсияи додашуда мебошанд.

Оператори тарафи чапи (0.31) дар соҳаи $\overline{D}$ эллиптикӣ номида мешавад, агар дар дилхоҳ нуқтаи $(x,y)\in\overline{D}$ шарти зерин:

$$det\sum_{j=0}^{2} a_j(x,y)\xi^j \neq 0 \tag{0.32}$$

барои ихтиёрӣ параметри ҳақикии ξ иҷро шавад.

Барои муодилаи (0.31) масъалаи Дирихле чунин гузошта мешавад: дар соҳаи D бо сарҳади Γ ҳалли регулярии муодилаи (0.31) ёфта шавад, ки он таалуқи синфи $C_\alpha D)$ буда, шарти сарҳадии :

$$u|_\Gamma = q(x, y) \tag{0.33}$$

- ро қаноат кунад, ки $g(x, y)$ – вектор-функсияи дар Γ додашудаи синфи $C'_\alpha(\Gamma)$ мебошад.

Аз корҳои М. И. Вишик [56] мебарояд, ки агар системаи система (0.31) эллиптикии қавӣ бошад, онгоҳ масъалаи Дирихле барои он ва ситемаи ҳамроҳшудаи он ҷуфти фредголмовии масъалаҳои канориро ташкил медиҳанд. Барои системаҳои эллиптическии умумӣ умуман ин тасдиқот ҷой надорад. Чуноне, ки мисоли А. В. Битсадзе [57],[58] нишон медиҳад, масъалаи якҷинсаи (0.33) барои системаи эллиптикии:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = 0, \quad 2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = 0$$

миқдори беохири ҳалҳои хаттӣ новобаста дорад.

Барои силсилаи синфҳои системаҳои эллиптикӣ, масъалаи (0.33), (0.31) ва масъалаҳои сарҳадии нисбатан умумитар дар қорҳои И. Н. Векуа [1]–[5], М. И. Вишик [56], А. В. Битсадзе [57], [58], Б. Боярский [12]–[15] омӯхта шудаанд. Масъалаҳои дар ин корҳо омӯхташударо ба таври эквивалентӣ ба муодилаҳои интегралии намуди нормалӣ дошта оварда шуда, нётеровӣ будани онҳо исбо ва индекси онҳо ҳисоб карда шудаанд. Дар корҳои Я. Б. Лопатинский [70] ба коэффициентҳои системаи (0.31) шартҳое гузошта шудаанд, ки онҳо барои нётеровӣ будани масъалаи кифоягӣ мекунанд. Системаҳои эллиптикие, ки ин шартҳор иҷро мекунанд системаҳои васеътарро нисбат ба корҳои [48]–[51] дар бар мегиранд. Барои соҳаҳои якалоқанок масъалаи (0.33), (0.31) дар кори [73] дида баромада шудааст. Дар ин кор масъалаи (0.33), (0.31) ба муодилаҳои интегралӣ оварда нашудаанд, аммо ҳангоми иҷро шудани шартҳои номбаршуда нетеровӣ будани масъала ва формулаи индекс ҳосил карда шудааст.

Ба тадқиқи масъалаҳои (0.33), (0.31) корҳои З. Я. Шапиро [61], [62], Е. Н. Товмасян [63],[64], Е. В. Золотарёв [72], А. И. Волперт [16]-[19], Б. Боярский [12]–[15], А. Ҷӯраев [27], В. Н. Монахов [67], Г. Ҷангибеков [32]–[34] низ бахшида шудаанд.

Алоқамандии сахти байни назарияи муодилаҳои дифференсиалии эллиптикӣ ва назарияи функцияҳои тағйирёбандаашон комплексӣ дар мисоли муодилаи Лаплас баръало намоён мегардад. Ин самти классикӣ дар назарияи функсияҳо мебошад, ки аз корҳои Эйлер ва ба хусус Риман ибтидо мегиранд. Аммо дар вақтҳои охир алоқамандии байни назарияи функсияҳо ва муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусии умумитари намуди (0.31) диққатро зиёдтар ҷалб мекунад.

Дар корҳои И. Н. Векуа [1]–[5] усули нави таҳқиқи системаи муодилаҳо бо ҳосилаҳои хусусии эллиптикӣ пешниҳод гардидааст, ки он бо истифода намудани интегралҳои сингулярӣ аз рӯи соҳаи маҳдуд мебошад. Дар корҳои Б.Боярский [6]–[11] ин усул нисбати муодилаҳои умумитари (0.33) коркард шудааст. Дар фикрронииҳои муаллиф як нобаробарӣ аз корҳои А. Р. Кальдерон ва А. Зигмунда [59],[660] истифода мешаванд ва он имконият медиҳад, ки ба фарқият аз корҳои дигар бисёр тасдиқотҳо дар фазои лебегии $Lp(D)$ $p > 2$ гузаронида шаванд, ки ин исботҳоро соддатар мегардонад ва ба натиҷаҳои амиқтар оварда мерасонад.

Масъалаҳои канории умумӣ барои системаи муодилаҳои ду тағйирёбандаок диққати бисёр математикҳоро ба худ ҷалб намудааст. Натиҷаҳои нисбатан пурраро дар ин И. Н. Векуа [1]–[5] ба даст овардааст. Барои синфи васеъи системаҳои эллиптикӣ масъалаи (0.33), (0.31) ва масъалаҳои сарҳадии нинисбатан нисбатан васеътар дар корҳои З. Я. Шапиро [61],[62], Н. Е. Товмасян [63],[64], Е.В. Золотарёв [65], А. И. Вольперт [16]-[19] омӯхта шудаанд. Масъалаҳои дар ин корҳо дида баромадашуда ба таври эквивалентӣ ба муодилаҳои интегралӣ оварда мешаванд ва нӯтеровӣ будан исбот ва индекси масъала ҳисоб карда шудааст.

Функсияи комплексии $\omega(z) = u_1(x,y) + iu_2(x,y)$, $z = x + iy$ – ро дохил намуда, яке аз муодилаҳои (0.31) – ро ба i зарб зада ба муодилаи дигар зам намуда, муодилаи (0.31) – ро ба намуди

$$\begin{aligned} &a(z)\omega_{z\overline{z}} + b(z)\overline{\omega}_{\overline{z}z} + c(z)\omega_{zz} + d(z)\overline{\omega}_{\overline{z}\overline{z}}+ \\ &+e(z)\omega_{\overline{z}\overline{z}} + h(z)\overline{\omega}_{zz} + a_1(z)\omega_{\overline{z}} + b_1(z)\overline{\omega}_{\overline{z}}+ \\ &+c_1(z)\omega_z + d_1(z)\overline{\omega}_{\overline{z}} + e_1(z)\omega + h_1\overline{\omega} = g(z), \end{aligned} \tag{0.34}$$

менависем, ки $g(z) = g_1(z) + ig_2(z)$,

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\Big), \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\Big)$$

мебошанд. Ҳисоб мекунем, ки коэффисиентҳои муодилаи (0.34) дар соҳаи $\overline{D}$ бефосила мебошанд ва $g(z \in L^p(D)$, $2 < p < \infty$. Муодилаи (0.34) навишти системаи ду муодилаҳои эллиптикии намуди (0.31) мебошад.

Аз рӯи қисми асосии системаи (0.34) Боярский Б. [59],[60] полиноми матритсавии зеринро

$$F_z(t) = \begin{pmatrix} a(z) + c(z)\overline{t} + e(z)t & b(z) + d(z)t + h(z)\overline{t} \\ \overline{b(z)} + \overline{d(z)}\overline{t} + \overline{h(z)}t & \overline{a(z)} + \overline{c(z)}t + \overline{e(z)}\overline{t} \end{pmatrix},$$

сохт, ки $|t| = 1$, $z \in \overline{D}$ аст. Эллиптикӣ будани системаи (0.34) маънои онро дорад, ки барои ихтиёрӣ $\varphi : 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ обаробарии

$$detF_z(e^{2i\varphi}) \neq 0$$

ҷой дорад. Бе маҳдудияти умумият ҳисоб мекунем, ки $D = \{z : |z| \leq 1$ мебошад ва

$$detF_z(t) = |\alpha_z(t)|^2 - |\beta_z(t)|^2 > 0,$$

аст ва $\alpha_z(t)$ – полиноми комплексии таназулнаёбандаи тартиби 2 мебошад. Азбаски решаҳои полиноми $\alpha_z(t) = 0$ дар давраи $|t| = 1$ намехобанд, пас вобаста аз ҷойгиршавии ҳалҳои муодилаи

$$\alpha_z(t) = 0$$

полиноми $F_z(t)$ ба се синфҳои гомотопӣ ҷудо мешавад: ε_j $(j = 1, 2, 3)$ – се компоненти пайваста аст. Системаи муодилаҳои $\Delta u_i = 0,\ i = 1, 2,$ масалан, таалуқи синфи ε_2 мебошад.

Б.Боярский дар корҳои [60],[61] ҳангоми омӯхтани масъалаҳои канории асосии Дирихле $\omega|_\Gamma = 0$ ва масъалаи Нейман $\frac{\partial\omega}{\partial n}|_\Gamma = 0$ барои системаи (0.34) дар синфи гомотопии ε_2 аз фазои $W_p^2(D),\ p > 2$, ҳалли ҷусташавандаи $\omega(z)$ - ро ба намуди зерин:

$$\omega(z) = \iint\limits_D G(z, \zeta) f(\zeta) ds_\zeta,\ G(z, \zeta) = \frac{2}{\pi} \ln\left|\frac{\zeta - z}{1 - z\overline{\zeta}}\right|,$$

тасвир мекунад, ки $G(z, \zeta)$ – функсияи Грини масъалаи Дирихле барои муодилаи Лапласа дар доираи воҳидӣ мебошад. Онгоҳ ин масъала ба таври эквивалентӣ ба халли муодилаи интегралии сингуляри дученакаи

$$\begin{gathered} f(z) + \alpha(z)(S_1 f)(z) + \beta(z)(S_2 f)(z) + \\ + \gamma(z)(\overline{S_1 f})(z) + \delta(z)(\overline{S_2 f})(z) + T = q(z), \end{gathered} \tag{0.35}$$

оварда мешавад ва дар айни ҳол коэффисиентҳои муодила шарти мунтазам эллиптикии

$$|\alpha(z)| + |\beta(z)| + |\gamma(z)| + |\delta(z)| \le q_0 < 1 \tag{0.36}$$

- ро қаноат мекунад, ки интегралҳои сингулярии S_1 ва S_2 аз рӯи формулаҳои:

$$(S_1 f)(z) = -\frac{1}{\pi} \iint\limits_D \Big(\frac{1}{(\zeta - z)^2} - \frac{\overline{\zeta}^2}{(1 - z\overline{\zeta})^2}\Big) f(\zeta) ds_\zeta,$$

$$(S_2 f)(z) = -\frac{1}{\pi} \iint\limits_D \Big(\frac{1}{(\overline{\zeta} - \overline{z})^2} - \frac{\zeta^2}{(1 - \overline{z}\zeta)^2}\Big) f(\zeta) ds_\zeta,$$

муайян мешаванд ва T – оператори пурра бефосила мебошад. Интегралҳои сингулярӣ барои дилхоҳ функсияҳои $f(z) \in L_p(D)$ $p > 2$ қариб дар ҳама ҷо мавҷуданд ва айни ҳол $||S_1||_{L_2(D)} = 1$ ва $||S_1||_{L_p(D)} \to 1$ ҳангоми $p \to 2$.

Ҳамин тавр дар асоси шарти (0.36) ба муодилаи интегралии (0.35), принсипи инъикосҳои фушурдашаванда тадбиқ мешавад, ва барои масъалаи Дирихле $\omega|_\Gamma = 0$ барои муодилаи (0.34) теоремаи зерин ҷой дорад:

Теоремаи Б.Боярский. *Масъалаи Дирихле барои дилхоҳ системаи ду муодилаи (0.34) аз синфи гомотопии ε_2 фредголмовӣ мебошад, яъне масъалаи якҷинсаи $\omega|_\Gamma = 0$ ва ҳамроҳшудаи он миқдори охирноки l ҳалҳои хаттӣ нановбаста доранд ва масъалаи ғайриякҷинса бошад ҳангоми иҷро l шартҳо ҳалшаванда мешавад.*

Ҳамин гуна теорема барои масъалаи Неймани для системаи (0.34) ҷой дорад.

Қайд мекунем, ки масъалаи Дирихле ва Неймана барои ду синфҳои дигари гомотопии ε_1 ва ε_3 дар корҳои Боярский Б. дида баромада нашудаанд.

Дар корҳои Н.П. Дибов [25]–[27] системаи умумии муодилаҳои эллиптикии тартиби чор ва инчунин тартиби шаш тариқи методи муодилаҳои интегралии сингуярӣ дида баромада шудааст, аммо нисбати системаи (0.34) натиҷаҳои ҳосилшуда фақат ҳолати системаҳои эллиптикии қавиро дар бар мегиранд, яъне ҳолате, ки барои муодилаҳои интегралии мувофиқи он принсипи операторҳои фушурдашаванда татбиқ мешаванд.

Дар монографияи А. Ҷӯраев [76] ҳамин гуна натиҷаҳо барои масъалаҳои Дирихле ва Нейман барои синфи гомотопии ε_2 - и системаи (0.34) дар соҳаи D - бисёралоқанок ҳосил карда шудааст.

Дар монографияи В. И. Монахов [77] баъзе масъалаҳо барои системаҳои муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусии ғайрихатии намуди сарҳадҳои озод дошта омӯхта шудаанд.

2. Таҳлили натиҷаҳо оиди назарияи масъалаҳои Дирихле ва Нейман барои системаҳои эллиптикӣ дар ҳолати умумӣ

Чуноне, ки дар пункти 1 ишора шуд тамоми тадқиқотҳои корҳои дар боло қайдшудаи назарияи нётеровӣ будан ва ҳосил намудани формула барои ҳисоб намудани индекси масъалаҳои Дирихле ва Неймани системаи муодилаҳои эллиптикии (0.34) аз рӯи соҳаи маҳдуди ҳамворӣ ҳолати системаҳои эллиптикии қавиро дар бар мегирифтанд, яъне ҳолате, ки ба муодилаҳои интегралии сингулярии мувофиқи ин масъалаҳо принсипи операторҳои фушурдашаванда татбиқ мешаванд ва масъалаҳо фредголмовӣ мешаванд.

Аввалин коре, ки дар он дигар ҳолати муодилаи эллиптикии (0.34) дида баромада шудааст, ин кори А. И. Волперт [16] мебошад, ки муаллифи он дар мисоли системаи эллиптикии тартиби ду

$$\lambda z^n \frac{\partial^2 \omega}{\partial \overline{z} \partial z} + \frac{\partial^2 \overline{\omega}}{\partial \overline{z}^2} = 0, \ |\lambda| < 1, \ n - \text{адади бутун}, \tag{0.37}$$

нишон додааст, ки индекси масъалаи Дирихле барои системаи эллиптикии (0.37) ғайринулӣ буда, бар замми он қимати ихтиёрии ҷуфт дорад ва ба $2n$ баробар мебошад, яъне мувофиқи классификатсияи системаҳои эллиптикии Б. Боярский – системаи (0.37) намояндаи синфи гомотопии ε_3 мебошад ва барои он теоремаҳои Нётерӣ ҷой дорад. Ногуфта намонад, ки А. И. Волперт ин системаро ба муодилаҳои интегралӣ наоварда, онро бевосита ҳал намудааст. Мушкилоти асосии тадқиқоти масъалаҳои Дирихле ва Нейман барои системаи (0.34) ин омӯхта нашудани муодилаҳои интегралии сингулярии дученакаи мувофиқи онҳо аз рӯи соҳаи маҳдуд мебошад. Омӯхтани ин муодилаҳои интегралии сингуляриро дар солҳои охир Г. Ҷангибеков [28]–[34] ба анҷом расонидааст.

Дар корҳои Г. Ҷангибеков [38]–[40] дар фазоҳои $W_p^2(D) \bigcap C(\overline{D}), \ 2 < p < \infty$ ҳамаи се синфҳои гомотопии $\varepsilon_j \ (j = 1, 2, 3)$ масъалаҳои Дирихле ва Нейман таҳқиқ карда шудааст, ки онҳо мувофиқан аз рӯи се нобаробариҳо нисбати коэффитсиентҳои системы (0.34) муайян мешаванд. Мувофиқи ин масъалаҳои канонии асосӣ, яъне масъалаи Дирихле ва Неймана барои системаи (0.34) ба тарви эквивалентӣ ба се муодилаҳои интегралии сингулярии дученакаи гуногун аз рӯи соҳаи маҳдуди D оварда мешаванд, ки барои онҳо шартҳои эффективноки зарурӣ ва кифоягии нётеровӣ будан ёфта шуда формулаҳо барои ҳисоб намудани индекси масъала ҳосил карда шудааст:

Теоремаи 1.(Г. Ҷангибеков) *Барои он, ки масъалаи Дирихле* $u|_\Gamma = 0$ *барои системаи эллиптикии (0.34) дар синфи* $W^2_p(D)\bigcap C^2(\overline{D}),\ 2 < p < \infty$ *нётеровӣ бошад, зарур ва кифоя аст, ки яке аз шартҳои зерин иҷро шавад (шартҳои ноҳамҷоя)*

$$|\Delta_1(z)| > M(z) + \sqrt{M^2(z) + |\mu_1(z)|^2 - |\lambda_1(z)|^2 - |\mu_3(z)|^2 - |\lambda_3(z)|^2},$$
$$\text{барои } \forall z \in \overline{D}, \tag{0.38}$$

$$|\Delta_2(z)| > M(z) + \sqrt{M^2(z) + |\mu_1(z)|^2 - |\lambda_1(z)|^2 - |\mu_2(z)|^2 + |\lambda_2(z)|^2},$$
$$\mu_1(t) \neq 0 \text{ барои } \forall z \in \overline{D},\ \forall t \in \Gamma, \tag{0.39}$$

$$|\Delta_3(z)| > M(z) + \sqrt{M^2(z) + |\mu_3(z)|^2 - |\lambda_3(z)|^2 - |\mu_2(z)|^2 + |\lambda_2(z)|^2},$$
$$\mu_3(t) \neq 0 \text{ барои } \forall z \in \overline{D},\ \forall t \in \Gamma. \tag{0.40}$$

Айни замон, агар шарти (0.37) иҷро шавад, онгоҳ масъала фредголмовӣ мешавад (яъне индекси он баробари нол аст); агар шарти (0.38) ио шавад, онгоҳ индекси масъала баробар аст ба

$$\varkappa = 2Ind_\Gamma \omega_1(t);$$

агар шарти (0.39) иҷро шавад, онгоҳ, индекси масъала ба:

$$\varkappa = 2Ind_\Gamma \omega_3(t),$$

баробар мешавад, ки

$$\Delta_1(z) = |a(z)|^2 - |b(z)|^2,\ \lambda_1(z) = \overline{a(z)}c(z) - b(z)\overline{d(z)},$$

$$\lambda_2(z) = \overline{h(z)}c(z) - e(z)\overline{d(z)}, \Delta_2(z) = |c(z)|^2 - |d(z)|^2,$$

$$\mu_1(z) = a(z)\overline{d(z)} - \overline{b(z)}c(z),\ \mu_2(z) = h(z)\overline{d(z)} - \overline{e(z)}c(z),$$

$$\Delta_3(z) = |e(z)|^2 - |h(z)|^2,\ \lambda_3(z) = \overline{a(z)}e(z) - b(z)\overline{h(z)},$$

$$\mu_3(z) = a(z)\overline{h(z)} - \overline{b(z)}e(z),$$

$$M(z) = max_{|t|=1} Re\{\mu_2(z)t^2 - (\lambda_2(z) + \overline{\lambda_3(z)})t\}.$$

мебошанд.

Айнан ҳамин гуна натиҷаҳо барои масъалаи Нейман барои системаи (0.34) ҷой дорад.

Натиҷа. Аз теоремаи болоӣ мебарояд, ки масъалаҳои Дирихле ва Нейман барои муодилаи маъмули А. В. Битсадзе (ниг.масалан. [58], гл. 2, §1)

$$\omega_{\overline{zz}} = g(z)$$

бо сабаби он нётеровӣ несст, ки дар ин ҳолат дар системаи (0.34) коэффитсиентҳои $a(z)$, $b(z)$, $c(z)$, $d(z)$, $h(z)$ дар соҳаи сарбастаи $\overline{D}$ айниятан баробари нуланд ва бинобар ин шартҳои сарҳадии нётеровии теоремаи болоӣ:

$$\mu_3(t) = a(t)\overline{h(t)} - \overline{b(t)}e(t) \neq 0$$

барои ҳамаи $t \in \Gamma$ иҷро намегардад.

Дар корҳои Г. Хуҷаназарова [38], Э. Д. Бобоев .[42], Г. Ҷангибеков ва М. Ш. Зарифбеков [39], Г. Ҷангибеков ва Ҷ .М. Одинабеков [43] ҳалшавандагии масъалаи Дирихле барои баъзе синфҳои муодилаи дифференсиалии (0.34) ва системаи ду муодилаҳои элллиптикии тартиби чор бо коэффитсиентҳои канишнок омӯхта шудаанд. Аз он ҷумла дар кори Г. Ҷангибекова ва М. Ш. Зарифбеков [39]], дар доираи воҳидии $D = \{z : |z| < 1\}$

чунин системаи эллиптикӣ бо коэффитсентҳои сингулярӣ дида баромада шудааст:

$$
\begin{aligned}
a(z)\frac{\partial^2\omega}{\partial z\partial\overline{z}} + b(z)e^{2i\varphi}\frac{\partial^2\overline{\omega}}{\partial z^2} + \frac{a_1(z)}{z}\frac{\partial\omega}{\partial\overline{z}} + \frac{b_1(z)}{\overline{z}}\frac{\partial\overline{\omega}}{\partial z} + c_1(z)\frac{\partial\omega}{\partial z} + \\
+ d_1(z)\frac{\partial\overline{\omega}}{\partial\overline{z}} + e_1(z)\omega + h_1(z)\overline{\omega} = g(z),
\end{aligned}
\tag{0.41}
$$

ки $z = x + iy$, $\omega = u(x,y) + iv(x,y)$, ҳосилаҳои формалӣ нисбати z ва $\overline{z} = x - iy$ аз рӯи формулаҳои:

$$
\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial\overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right),
$$

муайян мешаванд; $\varphi = \arg z$, коэффитсиентхои $a(z), b(z)$ ва ҳоказо дар соҳаи $\overline{D}$ функцияҳои бефосила буда, функсияи $g(z) \in L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)\,(2 < p < \infty, 0 < \beta < 1)$:

$$
L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D) = \{f(z) : f(z) = |z|^{\beta-\frac{2}{p}}F(z) \in L^p(D), ||f||_{L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)} = ||F||_{L_p(D)}\}.
$$

мебошад. Чуноне, ки аз (0.41) мебарояд, коэффитсиенти назди ҳосилаи $\frac{\partial^2\overline{\omega}}{\partial z^2}$ дар нуқтаи $z = 0$ аз рӯи ҳамаи нурҳои аз ибтидои координата мебароянд ҳудудҳои гуногун доранд ва коэффитсиенти назди ҳосилаҳои тартиби яки муодила $\frac{\partial\omega}{\partial\overline{z}}, \frac{\partial\overline{\omega}}{\partial z}$ махсусияти сингулярии тартиби як доранд.

Масъалаи Дирихле. Дар соҳаи D ҳалли бефосилаи $\omega(z)$ - и системаи (0.41) аз синфи $L^p_{\beta-1-\frac{2}{p}}(D) \cap W^2(D \setminus 0), (2 < p < \infty, 0 < \beta < 1)$ ёфта шавад, ки дар сарҳади соҳа Γ шарти

$$
\omega(t)\big|_{\Gamma} = 0 \tag{0.42}
$$

- ро қаноат кунад. Ин маънои онро дорад, ки функсияи $\omega(z)$ дар $D \setminus 0$ ҳосилаи умумишудаи $\frac{\partial^k\omega}{\partial z^{k-l}\partial\overline{z}^l}$ $(k = 1, 2;\ l = 0, 1, 2)$ дорад ва $|z|^{\beta-1-\frac{2}{p}}\omega(z) \in L^p(D)$ ва $2 < p < \infty,\ 0 < \beta < 1$ мебошанд.

Теоремаи 2.(Г. Чангибеков) *Барои он, ки масъалаи (0.41), (0.42) дар синфи* $L^p_{\beta-1-\frac{2}{p}}(D) \cap W^2(D \setminus 0), (2 < p < \infty, 0 < \beta < 1)$ *нётеровӣ бошад, зарур ва кифоя аст, ки шартҳои зерин иҷро шаванд:*

a) $|a(z)| \neq |b(z)|$ *ҳангоми* $z \in \overline{D}$, $a(t) \neq 0$ *ҳангоми* $t \in \Gamma$,

b) $\mathcal{G}_k(x;\beta) \neq 0$, $-\infty < x < \infty$, $k = 0, 1, \cdots, N_0$

ва айни ҳол индекси масъалаи (0.41), (0.42) баробар аст ба

$$\varkappa = -\{2Ind_\Gamma a(t) + 2\sum_{k=1}^{N_0} Ind_{-\infty<x<\infty}\mathcal{G}_k(x;\beta) + Ind_{-\infty<x<\infty}\mathcal{G}_0(x;\beta)\},$$

ки дар ин ҷо

$$\mathcal{G}_k(x;\beta) =$$
$$= 1 - 4\frac{|\nu|^2 - |\lambda-\mu|^2 + (\beta - ix)(|\lambda|^2 - Re(\overline{\lambda}\mu - \nu)) - ikIm(\overline{\lambda}\mu - \nu)}{(1-|\lambda|^2)(k^2 - (\beta - ix)^2)}.$$

мебошад.

Дар кори Г. Ҷангибеков ва Ҷ. М. Одинабеков [43] системаи умумии ду муодилаҳои дифференсиалии эллиптикии тартиби чори зерин омӯхта шудааст:

$$\sum_{n=-2}^{2} a_n(z)\frac{\partial^4\omega}{\partial\overline{z}^{2+n}\partial z^{2-n}} + b_n(z)\frac{\partial^4\overline{\omega}}{\partial\overline{z}^{n-2}\partial z^{n+2}} +$$
$$+ \sum_{0\leq l+j\leq 3} a_{l,j}(z)\frac{\partial^{l+j}\omega}{\partial\overline{z}^l\partial z^j} + b_{l,j}(z)\frac{\partial^{l+j}\overline{\omega}}{\partial\overline{z}^l\partial z^j} = g(z), \tag{0.43}$$

ки $\omega(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, коэффитсиентҳои муодила $a_n(z), b_n(z), a_{k,j}(z)$, $b_{k,j}(z)\,(k, j = 0, \ldots, 4)$ дар соҳаи $\overline{D}$ бефосила ва $g(z) \in L^p(D)$, $2 < p < \infty$,

$$\frac{\partial}{\partial\overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

мебошанд. Аз рӯи қисми асосии системаи (0.43) матритса-функсияи

$$\mathscr{G}(z,\sigma) = \begin{pmatrix} \mathscr{P}_{2m}(z,\sigma) & \mathscr{Q}_{2m}(z,\sigma) \\ \overline{\mathscr{Q}_{2m}(z,\sigma)} & \overline{\mathscr{P}_{2m}(z,\sigma)} \end{pmatrix}$$

месозем, ки $\mathscr{P}_4(z,\sigma) = \sum_{n=-2}^{2} a_n(z)\sigma^{2+n}\overline{\sigma}^{2-n}$, $\mathscr{Q}_4(z,\sigma) = \sum_{n=-2}^{2} b_n(z)\sigma^{2-n}\overline{\sigma}^{2+n}$ мебошанд.

Эллиптикӣ будани системаи (0.43) маънои онро дорад, ки барои ихтиёрӣ нуқтаи $z \in \overline{D}$ ва ихтиёрӣ адади комплексии $\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2 \neq 0$ нобаробарии

$$\det \mathcal{G}_z(\sigma) \equiv |\mathscr{P}_z(t)|^2 - |\mathscr{Q}_z(t)|^2 \neq 0$$

ҷой дорад, ки

$$\mathscr{P}_z(t) = \bar{t}^2 \sum_{n=-2}^{2} a_n(z) t^{2+n} \equiv \bar{t}^2 P_z(t),\ \mathscr{Q}_z(t) = \bar{t}^2 \sum_{n=-2}^{2} (-1)^n b_n(z) t^{2-n} \equiv \bar{t}^2 Q_z(t),$$

мебошанд.

Системаҳои эллиптикии (0.43) – ро ба 5 синфҳои гомотопии $j_\nu (j = 0, 1, \ldots, 4)$ ҷудо мекунем:

синфи $j_0 : Ind_{|t|=1} P_z(t) = 0$, яъне полиноми $P_z(t)$ - дар дохили лоираи $|t| = 1$ ҳал надорад;

синфи $j_\nu\,(1 \leq \nu \leq 4) : Ind_{|t|=1} P_z(t) = \nu$, яъне синфи $P_z(t)$ - дар дохили доираи $|t| = 1$ расо ν - то ҳал дорад.

Масъалаи Дирихле. Функсияи $\omega(z)$ аз синфи $W_p^4(D) \cap C(\overline{D})$ ёфта шавад, ки дар дохиои воҳаи D муодилаи (0.43) ва дар сарҳади он D ду шартҳои сарҳадии

$$\omega(z)\Big|_\Gamma = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial n}\Big|_\Gamma = 0 \tag{0.44}$$

- ро қаноат кунад, ки $\frac{\partial \omega}{\partial n}$ - ҳосила аз рӯи равиши нормали беруна дар нуқтаҳои контури беруна D мебошад.

Функсияи комплексии таалуқи синфи $W_p^4(D) \cap C(\overline{D})$ - ро, ки дар сарҳади соҳаи D шартҳои якҷинсаи (0.44)-ро қаноат мекунад, ба намуди

$$\omega(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_D G_4(z, \zeta) f(\zeta) ds_\zeta \tag{0.45}$$

пешниҳод мекунем, ки функсияи ихтиёрии $f(z)$ таалуқи фазои $L_p(D), p > 2$ буда, $G_4(z, \zeta)$ функсияи Грини муодилаи бигармоникии соҳаи D :

$$G_4(z, \zeta) = |\zeta - z|^2 \ln \left| \frac{1 - z\overline{\zeta}}{\zeta - z} \right|^2 - (1 - |z|^2)(1 - |\zeta|^2)$$

мебошад.

Ҳисобкуниҳои бевосита нишон медиҳанд:

$$\frac{\partial^4\omega}{\partial\overline{z}^4} = \frac{2}{\pi}\iint\limits_D K_1(z,\zeta)f(\zeta)ds_\zeta, \quad \frac{\partial^4\omega}{\partial\overline{z}^3\partial z} = \frac{2}{\pi}\iint\limits_D K_2(z,\zeta)f(\zeta)ds_\zeta, \tag{0.46}$$

$$\begin{aligned} K_1(z,\zeta) &= \frac{\zeta - z}{(\overline{\zeta}-\overline{z})^3} + \frac{3|\zeta - z|^2\zeta^4}{(1-\overline{z}\zeta)^4} - \frac{4(\zeta - z)\zeta^3}{(1-\overline{z}\zeta)^3}, \\ K_2(z,\zeta) &= -\frac{1}{(\overline{\zeta}-\overline{z})^2} - \frac{2(\overline{\zeta}-\overline{z})\zeta^3}{(1-\overline{z}\zeta)^3} + \frac{3\zeta^2}{(1-\overline{z}\zeta)^2} \end{aligned} \tag{0.47}$$

мебошанд. Бояд қайд намуд, ҷамъшавандаҳои якуми ядроҳои $K_1(z,\zeta)$ ва $K_1(z,\zeta)$ мувофиқан интегралҳои сингулярии $(S^2f)(z)$, $(Sf)(z)$ – ро ташкил медиҳанд:

$$(S^2f)(z) = \frac{2}{\pi}\iint\limits_D \frac{e^{4i\theta}}{|\zeta - z|^2}f(\zeta)ds_\zeta, \quad (Sf)(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_D \frac{e^{2i\theta}}{|\zeta - z|^2}f(\zeta)ds_\zeta,\ \theta = \arg(\zeta - z)$$

ва ду ҷамъшавандаҳои дигар фақат дар сарҳади соҳаи махсусият дорад ва бинобар ин оператори пурра бефосиларо ташкил медиҳанд.

Қиматҳои ҳосилаҳои функсияи $\omega(z)$ – ба муодилаи дифференсиалии (0.43) гузошта, барои муайян намудани функсияи $f(z)$ муодилаи интегралии сингулярии дученакаи зеринро ҳосил мекунем:

$$\begin{aligned} &(a_0I + b_0K)f + \big(a_{-2}I + b_{-2}K\big)S_*^2f + \big(a_2I + b_2K\big)\overline{S}_*^2f + \\ &+ \big(a_{-1}I + b_{-1}K\big)S_*f + \big(a_1I + b_1K\big)\overline{S}_*f + Tf = g, \end{aligned} \tag{0.48}$$

ки дар ин ҷо $f(z)$ – функсияи ҷусташаванда, $g(z)$ – функсияи додашудаи фазои $L_p(D)\,(1 < p < \infty)$ а $(Kf)(z) = \overline{f(z)}$ – оператори гузаштан ба қимати комплексии ҳамроҳшуда, T – оператори пурра бефосила, ва операторҳои интегралии сингулярии $S_*^2, \overline{S}_*^2, S_*, \overline{S}_*$ аз рӯи формулаҳои

$$(S_*^2f)(z) = \frac{2}{\pi}\iint\limits_D K_1(z,\zeta)f(\zeta)ds_\zeta, \quad \overline{S}_*^2 = KS_*^2K,$$

$$(S_*f)(z) = \frac{1}{\pi}\iint\limits_D K_2(z,\zeta)f(\zeta)ds_\zeta, \quad \overline{S}_* = KS_*K.$$

муайян мешаванд.

Акнун ишораҳои

$$\lambda_{\nu,n} = \overline{a}_\nu a_n - b_\nu \overline{b}_n,\ \ \mu_{\nu,n} = \overline{a}_\nu b_n - b_\nu \overline{a}_n$$

$$\Delta_n(z) = |a_n(z)|^2 - |b_n(z)|^2,\ \ n = 0, \pm 1, \pm 2;$$

$$\begin{aligned} M(z) = \max_{|t|=1}\Big[&(a_2\overline{a}_{-2} - b_{-2}\overline{b}_2)t^4 + (a_0\overline{a}_{-2} - a_1\overline{a}_{-1} + a_2\overline{a}_0 - \\ &- b_{-2}\overline{b}_0 - b_{-1}\overline{b}_1 - b_0\overline{b}_2)t^2 + (a_{-2}\overline{a}_2 - a_2\overline{a}_{-2} - b_{-2}\overline{b}_2 - b_2\overline{b}_{-2})\Big], \\ -m(z) = \min_{|t|=1}\Big[&(a_2\overline{a}_{-2} - b_{-2}\overline{b}_2)t^4 + (a_0\overline{a}_{-2} - a_1\overline{a}_{-1} + a_2\overline{a}_0 - \\ &- b_{-2}\overline{b}_0 - b_{-1}\overline{b}_1 - b_0\overline{b}_2)t^2 + (a_{-2}\overline{a}_2 - a_2\overline{a}_{-2} - b_{-2}\overline{b}_2 - b_2\overline{b}_{-2})\Big]. \end{aligned} \qquad (0.49)$$

- ро дохил намуда ба муодилаҳои интегралии сингулярии дученакаи (0.48) натиҷаҳои теоремаи 1 аз кори [43] татбиқ мекунем ва вобаста аз синфҳои гомотопии $j_\nu(\nu = 0, 1, \ldots, 4)$ барои масъалаи Дирихле (0.44)-и системаи умумии эллиптикии (0.43) ҳосил мекунем:

Теоремаи 3.(Г.Ҷангибеков) *Барои он, ки масъалаи Дирихле (0.44) барои системаи ихтиёрии эллиптикии (0.43) бо коэффитсиентҳои бефосилаи синфи* $W_p^4(D) \cap C(\overline{D})$ *нётеровӣ бошад, зарур ва кифоя аст, ки яке аз шартҳои (ноҳамҷояи) :*

$$\Delta_0(z) > M(z) + \Big(M^2(z) + \sum_{n=-2, n\neq 0}^{2} (|\mu_{0,n}(z)|^2 - |\lambda_{0,n}(z)|^2)\Big)^{1/2} \ \textit{барои}\ \forall z \in \overline{D}, \qquad (0.50)$$

$$\Delta_\nu(z) > M(z) + \Big(M^2(z) + \sum_{n=-2, n\neq \nu}^{2} (|\mu_{\nu,n}(z)|^2 - |\lambda_{\nu,n}(z)|^2)\Big)^{1/2}$$

$$\textit{ва}\quad \overline{a_\nu(\tau)} b_0(\tau) - b_\nu(\tau)\overline{a_0(\tau)} \neq 0 \quad \textit{барои}\quad \forall z \in \overline{D},\ \tau \in \Gamma,\ \nu = \pm 1, \pm 2. \qquad (0.51)$$

иҷро шаванд. Дар айни ҳол агар шарти (0.45) иҷро шавад, онгоҳ масъала фредголмовӣ мешавад ва агар шарти (0.46) иҷро шавад, онгоҳ индекси масъала баробар аст ба

$$\varkappa = -2\nu Ind_\Gamma \left(\overline{a_\nu(\tau)} b_0(\tau) - b_\nu(\tau)\overline{a_0(\tau)}\right).$$

Масъалаи Нейман. Функсияи $\omega(z)$ аз синфи $W_p^4(D)\cap C(\overline{D})$ ёфта шавад, ки дар дохили соҳаи D муодилаи (0.43) ва дар сарҳади он Γ шартҳоисарҳадии

$$\left.\frac{\partial^j\omega}{\partial n^j}\right|_{\Gamma}=0,\ j=1,\ldots,m, \tag{0.52}$$

- ро қаноат мекунанд.

Ин масъала низ ба муодилаҳои интегралии сингулярии дученакаи намуди (0.46) оварда мешавад.

Боби 1

Масъалаи Дирихле ва Нейман барои системаи муодилаҳои дифференсиалии умумии эллиптикии тартиби шаш бо коэффитсиентҳои бефосила дар ҳамворӣ

1.1. Тавсифи фазои функсияҳо ва баъзе мафҳумҳои ёрирасон

Дар ин параграф мо фазоҳои функсионалии истифодашуда, мафҳумҳо ва тасдиқотҳои асосии назарияи нётеровӣ будани операторҳо дар фазоҳои банахӣ ва гузориши масъалаҳои асосии сарҳадиро овардаем. Муфассали ин назария ва исботи тасдиқотҳои дар ин ҷо овардашударо, масалан, аз монографияҳои С. Г. Крейн [44], С. Л. Соболев [45], С. Г. Михлин [46] дастрас намудан мумкин аст.

Таърифи 1.1. Хати каҷи суфтаи сарбастаи Γ, хати каҷи Ляпунов номида мешавад, агар шарти зеринро қаноат кунад: расанда ба хати каҷ, ки равиши муайяни доимӣ дорад, кунҷе ташкил медиҳад, ки он нисбати камони s - и хати каҷи Γ шарти Гёлдер - ро қаноат кунад.

1.1.1. Операторҳои нётеровӣ ва хосиятҳои асосии онҳо

Бигузор D - соҳаи якалоқаноки охирноки ҳамвории комплексӣ бошад, ки, бо хати каҷи сарбастаи Ляпунови Γ маҳдуд бошад ва дар дохил нуқтаи $z = 0$ - ро дар бар гирад.

Дар ин пункт мафҳумҳои асосӣ ва фактҳои назарияи нётеровӣ будани операторҳо дар фазоҳои банахӣ гирд оварда шудаанд, ки аз онҳо дар кори диссертатсионӣ истифода мешаванд. Исботи ҳамаи тасдиқотҳои истифодашударо масалан аз монографияҳои [44]– [46] дастрас намудан мумкин аст.

Бигузор X - фазои банахӣ , A - оператори хаттии маҳдуди аз X ба X амалкунанда бошанд ва A^* - оператори ҳамроҳшуда ба A бошад, ки дар фазои ҳамроҳшудаи X^* амал мекунад.

Таърифи 1.2. Мегуянд, ки оператори A дорои регуляризатори чап мебошад, агар чунин оператори маҳдуди R - дар X амалкунанда мавҷуд бошад, ки ҳосили зарби RA (AR) оператори Фредголм бошад, яъне

$$RA = I + T,$$

ки I - оператори воҳидӣ ва T - оператори дар X пурра мебошанд. Дар ин маврид оператори R *регуляризатори тарафи чапи оператори* A номида мешавад.

Таърифи 1.3. Мегуянд, ки оператори A дорои регуляризатори рост мебошад, агар чунин оператори маҳдуди R - дар X амалкунанда мавҷуд бошад, ки ҳосили зарби AR оператори Фредголм бошад, яъне

$$AR = I + T,$$

ки I - оператори воҳидӣ ва T - оператори дар X пурра мебошанд. Дар ин маврид оператори R *регуляризатори тарафи рости оператори* A номида мешавад.

Таърифи 1.4. Мегуянд, ки A дорои *регуляритсияи дутарафа* мебошад, агар он дар як маврид регуляризатори чап ва рост дошта бошад.

Маҷмӯи $KerA$ ҳамаи ҳалҳои муодилаи

$$Ax = 0 \tag{1.1.1}$$

маҷмӯи нулҳо ё ин, ки ядрои оператори A номида мешаванд. Маҷмӯи $KerA$ зерфазои фазои X мебошад. Ченаки зерфазои $KerA$, яъне миқдори хаттӣ новобастаи ҳалҳои муодилаи (1.1.1) - ро бо ишора мекунанд. Ба воситаи $KerA^*$ зерфазои нулҳои оператори о A^*, яъне маҷмӯи ҳамаи ҳалҳои муодилаи

$$A^*x = 0 \tag{1.1.2}$$

ишора карда мешавад ва ядрои оператори A^* номида мешавад ва дар охир $\beta_A = \alpha_{A^*} = KerA^*$. Ададҳои α_A, β_A - ададҳои дефектии оператори A номида мешаванд. Агар ақалан яке аз ададҳои α_A ва β_A - охирнок бошанд, онгоҳ фарқи онҳо индекси оператори A номида мешавад ва бо $IndA$ ишора мешавад:

$$IndA = \alpha_A - \beta_A. \tag{1.1.3}$$

Аён аст, ки $IndA$ фақат ва фақат ҳамон вақт охирнок мешавад, агар ченаки ҳарду маҷмӯҳои α_A ва β_A - охирнок бошанд.

Барои он, ки муодилаи

$$Ax = y, \; y \in X, \tag{1.1.4}$$

ақалан як то ҳал дошта бошад, зарур ва кифоя аст, ки аъзои озоди y ба $KerA^*$ ортогоналӣ бошад (яъне ба таври дигар элементи y ба ҳамаи функционалҳои $u \in KerA^*$ ортогоналӣ бошад). Дар ҳақиқат, агар муодилаи (1.1.4) ҳалли x дошта бошад ва $u \in KerA^*$ бошад, онгоҳ

$$(y, u) = (Ax, u) = (x, A^*u) = (x, 0) = 0$$

мешавад, ки дар ин ҷо бо қавсайн қимати функсионал ба элементи мувофиқро ифода мекунад.

Агар шарти ортогоналии дар боло номбаршуда барои ҳалшавандагии муодилаи (1.1.4) кифоя бошад, онгоҳ мегуянд, ки оператори A нормалӣ ҳалшаванда мебошад. Ҳамин тавр таърифи зерин додан мумкин аст:

Таърифи 1.5. *Оператори A ба маънои Хаусдорф нормалӣ ҳалшаванда номида мешавад, агар муодилаи гайриякҷинсаи (1.1.4) фақат ва фақат ҳамон вақт ҳалшаванда аст, ки тарафи рости он y ба ҳамаи ҳалҳои хаттӣ нowобастаи муодилаи ҳамроҳшудаи (1.1.2) ортогоналӣ бошад.*

Теоремаи маъмули зерини Хаусдорф ҷой дорад: барои он, ки оператор нормалӣ ҳалшавнда бошад, зарур ва кифоя аст, ки соҳаи қиматҳои он сарбаста бошад.

Таърифи 1.6. *Оператори A дар X нётеровӣ номида мешаввд, агар он нормалӣ ҳалшаванда ва ададҳои α_A, β_A охирнок бошанд.*

Определение 1.7. *Ададӣ бутуни $\alpha_A - \beta_A = IndA$ индекси оператори нётеровии A номида мешавад.*

Таърифи зерин аз байни маҷмӯи ҳамаи операторҳои нётеровӣ, зермаҷмӯи операторҳои фредголмовиро ҷудо мекунад:

Таърифи 1.8. *Оператори нётеровие, ки индекси он баробари нул аст, оператори фредголмовӣ номида мешавад.*

Таърифи 1.9. *(теорема оиди композитсияи операторҳо). Агар операторҳои A ва B дар X нётеровӣ бошанд, онгоҳ композитсияи онҳо AB низ дар X нётеровӣ мешавад ва айни ҳол $IndAB = IndA + IndB$ мешавад.*

Таърифи 1.10. *Агар A дар X нётеровӣ бошад, онгоҳ оператори A^* низ дар X^* нётеровӣ мешавад ва айни ҳол $IndA^* = -IndA$ аст.*

Таърифи 1.11. *(галаён бо операторҳои пурра бефосила). Агар оператори A дар X нётеровӣ ва T - оператори пурра бефосила бошанд, онгоҳ оператори $A + T$ низ дар X нётеровӣ мешавад ва дар айни ҳол $Ind(A + T) = IndA$ мешавад.*

Таърифи 1.12. *(галаён бо операторҳои нормаашон хурд). Агар A дар X нётеровӣ бошад, онгоҳ барои ҳамаи операторҳои B чунин ададӣ $\varepsilon = \varepsilon(A)$ ёфт мешавад, ки барои ҳамаи операторҳои B, ки $||B|| < \varepsilon$ аст, оператори $A + B$ дар X нётеровӣ ва $Ind(A + B) = IndA$ мешавад.*

Таърифи 1.13. *Барои он, ки оператори A нётеровӣ бошад, зарур ва кифоя аст, ки барои ин оператор регуляризаторҳои чап ва рост мавҷуд бошанд.*

Таърифи 1.14. *Операторҳои нётеровии A ва B операторҳои гомотопӣ номида мешаванд, агар чунин маҷмӯи операторҳои нётеровии $A(t)$, $t \in [0, 1]$ мавҷуд бошанд, ки онҳо аз рӯи норма дар сегменте $[0, 1]$ мунтазам бефосила бошанд, ва барои дилхох ададӣ додашудаи*

$\varepsilon > 0$ чунин $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ёфт шавад, ки агар $|t_1 - t_2| < \delta$ бошад, онгоҳ $||A(t_1) - A(t_2)|| < \varepsilon$ ва $A(0) = A,\ A(1) = B$ шавад.

Хосияти 1.1. *Агар операторҳои A ва B гомотопӣ бошанд, онгоҳ*

$$IndA = IndB$$

мешавад.

1.1.2. Таърифи фазоҳои $W_p^k(D)$

Бигузор D – ягон соҳаи маҳдуди ҳамвории комплексии $z = x + iy$ бошад. Ба воситаи $C_0^k(D)$ мо маҷмӯи функцияҳои $\varphi(z)$ - ро ишора мекунем, ки k маротиба бефосила дифференсирондашаванда ва дар D финитӣ бошанд, яъне дар атрофи нуқтаҳои сарҳадии соҳаи D ба нол баробар бошанд.

Бигузор $\omega(z) \in L_p(D)$ – функсияи ихтиёрии фазои $L_p(D)$ бошад. Агар чунин функсияи $\chi(z))$ аз $L_p(D)$ ёфт шавад, ки барои дилхоҳ функсияи $\varphi(z) \in C_0^k(D)$ баробарии

$$\iint\limits_D \omega(z)\frac{\partial^k\varphi}{\partial z^{k_1}\partial\overline{z}^{k_1}}ds_z = (-1)^k\iint\limits_D \chi(z)\varphi(z)ds_z,\ k_1 + k_2 = k,$$

ҷой дошта бошад, онгоҳ $\chi(z)$ ҳосилаи умумишудаи тартиби k - аз функсияи $\omega(z)$ нисбати тағйируобандаи z ва $\overline{z}$ дар соҳаи D номида мешавад ва менависанд $\chi(z) = \frac{\partial^k\omega}{\partial z^{k_1}\partial\overline{z}^{k_1}}$, ки операторҳои формалии $\frac{\partial}{\partial\overline{z}}$ ва $\frac{\partial}{\partial z}$ ба воситаи формулаҳои

$$\frac{\partial}{\partial\overline{z}} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\Big),\ \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\Big).$$

муайян карда мешаванд.

Маҷмӯи функсияҳое, ки дар D суммирондашавандаанд ва ҳосилаҳои имконпазири умумишудаи тартиби додашудаи k доранд ва дар D бо дараҷаи p суммирондашавада буда нормаи

$$||\omega||_{W_p^k} = \Big(\iint\limits_D |\omega(z)|^p ds_z + \sum_{k_1+k_2=k}\iint\limits_D \frac{\partial^k\varphi}{\partial z^{k_1}\partial\overline{z}^{k_1}}ds_z\Big)^{\frac{1}{p}},$$

доранд, **фазои соболевӣ** *номида мешаванд ва бо рамзи $W_p^k(D)$ ишора карда мешаванд.*

1.1.3. Гузориши масъалаҳои канории якум ва дуюм

Дар ҳамвории комплексӣ системаи эллиптикии умумии ду муодилаҳои аз ду тағйирёбанда вобастаи тартиби шаш - ро дида мебароем, ки навишти комплексии он зерин аст:

$$\sum_{n=-3}^{3} a_n(z)\frac{\partial^6\omega}{\partial\overline{z}^{3+n}\partial z^{3-n}} + b_n(z)\frac{\partial^{2m}\overline{\omega}}{\partial\overline{z}^{3-n}\partial z^{n+3}} + \\ + \sum_{0\le l+j\le 5} a_{l,j}(z)\frac{\partial^{l+j}\omega}{\partial\overline{z}^{l}\partial z^{j}} + b_{l,j}(z)\frac{\partial^{l+j}\overline{\omega}}{\partial\overline{z}^{l}\partial z^{j}} = g(z), \tag{1.1.5}$$

ки дар ин ҷо $z = x+iy$, $\omega(z) = u(x,y)+iv(x,y)$ мебошанд. Коэффитсиентҳои муодилаи (1.1.5) функсияҳои дар $\overline{D}$ бефосилаанд ва $g(z) \in L^p(D), 2 < p < \infty$.

Масъалаи Дирихле. *Функсияи $\omega(z)$ - ро аз синфи $W_p^6(D)\cap C^2(\overline{D})$ ёфта шавад, ки дар дохили D муодилаи (1.1.5)- ро қаноат мекунад ва дар сарҳади он Γ се шартҳои*

$$\omega(z)\Big|_{\Gamma} = 0, \quad \frac{\partial\omega}{\partial n}\Big|_{\Gamma} = 0, \quad \frac{\partial^2\omega}{\partial n^2}\Big|_{\Gamma} = 0 \tag{1.1.6}$$

- ро қаноат мекунад, ки $\frac{\partial\omega}{\partial n}$ - ҳосила аз рӯи нормали беруна дар нуқтаҳои контури Γ мебошад.

Функсияи $\omega(z)$ *ҳалли* масъалаи гузошташуда ҳисобида мешавад, агар:

1. ҳосилаи умумиишудаи тартиби 6 ба маънои Соболеви функсияи $\omega(z)$ мавҷуд аст ва $\omega(z) \in W_p^{(6)}(D+\Gamma)$;
2. функсияи $\omega(z)$ қариб дар ҳама ҷо муодилаи (1.1.5) - ро қаноат мекунад;
3. $\omega(z)$ шартҳои сарҳадии (1.1.6) - ро қаноат мекунад.

Масъалаи (1.1.5), (1.1.6) *нётеровӣ* номида мешавад, агар:

1. зерфазои ҳаллҳои масъалаи якҷинсаи (ҳангоми $g(z) = 0$) охирченака (ченаки онро бо l ишора мекунем) аст,

2. миқдори охирноки новобастаи шартҳои зарурӣ ва кифоягии ҳалшавандагии масъслаҳои (1.1.5), (1.1.6) мавҷуд аст.

Агар масъалаи (1.1.5), (1.1.6) нётеровӣ бошад, онгоҳ адади $\varkappa = l - k$ индекси масъала номида мешавад.

Масъалаи Нейман. *Функсияи $\omega(z)$ аз класси $W_p^6(D) \cap C^2(\overline{D})$ ёфта шавад, ки дар дохили D муодилаи (1.1.5) ва дар сарҳади он Γ бошад шартҳои*

$$\left.\frac{\partial^j \omega}{\partial n^j}\right|_{\Gamma} = 0, \; j = 1, \; 2, \; 3, \tag{1.1.7}$$

- ро қаноат кунад, ки $\frac{\partial \omega}{\partial n}$ - ҳосила аз рӯи нормали беруна дар нуқтаҳои контури Γ мебошад.

1.2. Масъалаи Дирихле ва Нейман барои як системаи эллиптикии ду муодилаҳои дифференсиалии тартиби шаш дар ҳамворӣ

Аз корҳои [1]– [27] маълум аст, ки назарияи операторҳои дученакаи интегралии сингулярӣ бо назария масъалаҳои канорӣ барои системаҳои муодилаҳои дифференсиалии эллиптикӣ дар ҳамвори сахт алоқаманд аст. Дар солҳои охир Г. Ҷангибеков (ниг. мас., [28]– [33]) шартҳои эффективноки зарурӣ ва кифоягии нётеровӣ будан ва формулаҳо барои ҳисоб намудани индекси як қатор операторҳои интегралии сингулярии дученака аз рӯи соҳаи маҳдудро ҳосил намудаст. Истифода намудани ин натиҷаҳо имконият доданд, ки масалан дар корҳои [32], [33], [36], [37] назарияи масъалаҳои Дирихле ва Нейман барои системаҳои эллиптикии муодилаҳои дифференсиалии тартибҳои ду ва чор дар ҳамвории комплексӣ сохта шуда, индекси ин масъалаҳо ба воситаи коэффитсентҳои система ёфта шаванд.

Дар ин параграф ҳалшавандагии масъалаҳои Дирихле ва Нейман барои системаи ду муодилаҳои эллиптикии тартиби шаш тариқи ба муодилаҳои интегралии сингулярӣ аз рӯи соҳаи маҳдуд овардан омӯхта мешавад.

Бигузор $D = \{z : |z| < 1\}$ - доираи воҳидии ҳамвории комплексии $z = x + iy$ бошад. Системаи муодилаҳои дифференсиалии тартиби 6 - и зеринро дида мебароем

$$a(z)\frac{\partial^6\omega}{\partial\overline{z}^3\partial z^3} + b(z)\frac{\partial^6\overline{\omega}}{\partial\overline{z}^6} + \sum_{k+j=0}^{5}\left[a_{k,j}(z)\frac{\partial^{k+j}\omega}{\partial\overline{z}^k\partial z^j} + b_{k,j}(z)\frac{\partial^{k+j}\overline{\omega}}{\partial\overline{z}^k\partial z^j}\right] = g(z), \tag{1.2.1}$$

ки $\omega(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $a(z)$, $b(z)$, $a_{k,j}(z)$, $b_{k,j}(z)$, $(0 \leq k + j \leq 5)$ функсияҳои дар соҳаи $\overline{D}$ бефосила, $g(z) \in L^p(D)$, $2 < p < \infty$,

$$\frac{\partial}{\partial\overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

мебошанд.

Мувофиқи қисми асосии системаи (1.8) матритса-функсияи

$$\mathcal{G}_z(\sigma) = \begin{pmatrix} a(z)\sigma^3\overline{\sigma}^3 & b(z)\overline{\sigma}^6 \\ \overline{b(z)}\sigma^6 & \overline{a(z)}\overline{\sigma}^3\sigma^3 \end{pmatrix},$$

- ро месозем, ки $z \in \overline{D}$, σ - адади комплексии ғайринулии ихтиёрӣ мебошад.

1.2.1. Классификатсияи гомотопӣ ва тасвири интегралӣ

Эллиптикӣ будани системаи (1.2.1) маънои онро дорад, ки барои дилхоҳ нуқтаи $z \in \overline{D}$ ва адади комплексии ғайринулии ихтиёрии $\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2$ нобаробарии $\det\mathcal{G}_z(\sigma) \neq 0$ иҷро шавад. Аён аст, ки барои ҳамаи қиматҳои $z \in \overline{D}$

$$\det\mathcal{G}_z(\sigma) \equiv |a(z)|^2 - |b(z)|^2 \neq 0$$

аст. Бояд зикр намуд, ки дар кори [26] системаи эллиптикии тартиби шаши намуди умумӣ дида баромада шудааст, аммо нисбати (1.2.1) натиҷаҳои дар он ҷо ҳосилшуда фақат ҳолати системаи эллиптикии қавиро дар бар мегиранд, яъне ҳангоме, ки барои ҳамаи $z \in \overline{D}$ нобаробарии $|a(z)| > |b(z)|$ иҷро мешавад.

Маҷмӯи ҳамаи матритсаҳои полиномиалии намуди $\mathcal{G}_z(\sigma)$ дошта, ки барои ҳамаи $z \in \overline{D}$ шарти $\det \mathcal{G}_z(\sigma) = |a(z)|^2 - |b(z)|^2 > 0\,(< 0)$ - ро қаноат мекунанд, ба воситаи $\mathcal{G}^+\,(\mathcal{G}^-)$ ишора мекунем.

Ду матритсаи $\mathcal{G}_z^1, \mathcal{G}_z^2$ аз синфи $\mathcal{G}^+$ - ро гомотопӣ меномем, яъне $\mathcal{G}_z^1 \sim \mathcal{G}_z^2$, агар маҷмӯи чунин матритсаҳои полиномиалӣ $\mathcal{G}_z^+(\tau)$ аз $\mathcal{G}^+$ ёфт шаванд, ки онҳо аз параметри ҳақиқии $\tau : 0 \leq \tau \leq 1$ бефосила вобаста буда

$$\mathcal{G}^+(0) \equiv \mathcal{G}_z^1, \quad \mathcal{G}^+(1) \equiv \mathcal{G}_z^2$$

бошанд.

Ду системаи эллиптикӣ аз маҷмӯи ҳамаи системаҳои эллиптикии (1.8) бо қисми асосии якхела, ки $\mathcal{G}_z(\sigma) \in \mathcal{G}^+$ фақат ва фақат ҳамон вақт бо роҳи бефосила дар $\mathcal{G}^+$ пайваст намудан мумкин аст, ки матритсаҳои характеристикии онҳо гомотопӣ бошанд. Ҳамин тариқ, муносибати готопӣ $\mathcal{G}^+$ - ро ба ду синфҳои гомотопӣ - компонентҳои паваста ҷудо мекунад:

синфи ε^+ : яъне ҳангоме, барои $\forall\ z \in \overline{D}$ нобаробарии $|a(z)| > |b(z)|$ иҷро мешавад;

синфи ε^- : яъне ҳангоме, барои $\forall\ z \in \overline{D}$ нобаробарии $|a(z)| < |b(z)|$ иҷро мешавад.

Ин синфҳо системаи пурраи маҷмӯи $\mathcal{G}^\pm$ - ро ташкил медиҳанд, яъне $\mathcal{G}_z^1$ ва $\mathcal{G}_z^2$ аз F^+ ба ягон синфи $\varepsilon^\pm$ фақат ва фақат ҳамон вақт дохил мешаванд, ки $\mathcal{G}z^1 \sim \mathcal{G}^1$ бошанд.

Масъалаи Дирихле. *Функцияи $\omega(z)$ - ро аз синфи $W_p^6(D) \cap C^2(\overline{D})$ ёбед, ки дар дохили D муодилаи (1.2.1) - ро, ва дар сарҳади он Γ се шар-*

тҳои

$$\omega(z)\big|_{\Gamma}=0, \quad \frac{\partial\omega}{\partial n}\bigg|_{\Gamma}=0, \quad \frac{\partial^2\omega}{\partial n^2}\bigg|_{\Gamma}=0 \qquad (1.2.2)$$

- ро қаноат кунад, ки $\frac{\partial\omega}{\partial n}$ *- ҳосила аз рӯи равиши нормали беруна дар нуқтаҳои контури* Γ *мебошад.*

Маълум [1]– [5] аст, ки дилхоҳ функсияи комплексии синфи $W_p^6(D)\cap C(\overline{D})$, ки дар сарҳади Γ шартҳои сарҳадии якҷинсаи [1.2.2] - ро қаноат мекунад, тасвири интегралии зерин

$$\omega(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_D G_6(z,\zeta)f(\zeta)ds_{\zeta}, \qquad (1.2.3)$$

бо дилхоҳ функсияи комплексии $f(z)\in L_p(D)$, $p>1$ дорад, дар куҷо $G_6(z,\zeta)$ - функцияи Грини мудилаи лапласи $\Delta^3 w \equiv \frac{\partial^6\omega}{\partial z^3\partial\overline{z}^3}=0$ соҳаи маҳдуди $D=\{z:|z|<1\}$ мебошад:

$$G_6(z,\zeta) = |\zeta-z|^4\ln\left|\frac{1-z\overline{\zeta}}{\zeta-z}\right|^2 - |\zeta-z|^2(1-|z|^2)(1-|\zeta|^2) + \frac{1}{2}(1-|z|^2)^2(1-|\zeta|^2)^2. \qquad (1.2.4)$$

Нишон дода мешавад, ки ҳамаи ҳосилаҳои хусусии функсияи $\omega(z)$ нисбати z ва $\overline{z}$ то тартиби 5 операторҳои интегралии ядроҳояшон функсияҳои бефосила ва ё махсусиятҳои сустдошта доранд ва бинобар ин дар фазои $L_p(D)$ $(1<p<\infty)$ операторҳои пурра бефосиларо ташкил медиҳанд.

1.2.2. Гузариш ба муодилаҳои интегралии сингулярӣ

Ҳисбкуниҳои бевосита нишон медиҳанд, ки $\frac{\partial^6\omega}{\partial z^6}$ аз рӯи формулаи зерин муайян мешавад

$$\frac{\partial^6\overline{\omega}}{\partial\overline{z}^6} = \iint\limits_D K(\overline{z},\zeta)\overline{f(\zeta)}ds_{\zeta}(z), \qquad (1.2.5)$$

ки

$$K(\overline{z},\zeta) = -\frac{3}{\pi}\frac{(\zeta - z)^2}{(\overline{\zeta} - \overline{z})^4} + K_1(\overline{z},\zeta),$$
$$K_1(\overline{z},\zeta) = \frac{3(\zeta - z)^2\zeta^4}{\pi(1 - \overline{z}\zeta)^4} \tag{1.2.6}$$

мебошанд.

Айнан ҳамин тавр ҳосил мекунем, ки

$$\frac{\partial^6\omega}{\partial z^3\partial\overline{z}^3} = f(z) \tag{1.2.7}$$

аст.

Дар ин ҷо бояд қайд намуд, ки оператори интегралӣ бо ядрои $K(\overline{z},\zeta)$ дар нуқтаҳои дохилии соҳаи D махсусияти тартиби 2 дорад, бинобар ин интеграл ба таври қимати асосии Коши фаҳмида мешавад. Барои нуқтаҳои сарҳадӣ бошад, ҳангоми $\zeta \in \Gamma$, $\overline{\zeta} = 1/\zeta$ будан, бевосита дидан мумкин аст, ки дар ин маврид $K(\overline{z},\zeta) = 0$ мешавад.

Қиматҳои ҳосилаҳоро аз формулаҳои (1.2.5), (1.2.7) ба муодилаи дифференсиалии аввалаи (1.2.1) гузошта, барои муайян намудани функсияи $f(z)$ муодилаи интегралии сингулярии дученакаи зерин ҳосил мекунем:

$$a(z)f(z) + b(z)(S^*\overline{f})(z) + (Tf)(z) = g(z), \tag{1.2.8}$$

ки

$$(S^*\overline{f})(z) = -\frac{3}{\pi}\iint\limits_D\Big(\frac{(\zeta - z)^2}{(\overline{\zeta} - \overline{z})^4} - \frac{(\zeta - z)^2\zeta^4}{(1 - \overline{z}\zeta)^4}\Big)\overline{f(\zeta)}ds_\zeta$$

мебошад ва T – оператори пурра бефосила дар фазои лебегии $L^p(D)$, $p > 2$ аст.

Муодилаҳои интегралии (1.15) ба муодилаҳои интегралии сингулярии дученакаи характеристикаашон ҷуфт аз рӯи соҳаи маҳдуд таалуқ доранд, ки дар корҳои [28] , [30] омӯхта шудаанд. Натиҷаҳои корҳои номбаршударо ба муодилаи (1.2.8) татбиқ намуда, ҳосил мекунем:

Теоремаи 1.2.1. *Барои он, ки масъалаи (1.2.2) барои системаи эллиптикии (1.2.1) дар синфи* $W_p^6(D) \cap C^2(\overline{D})$ $2 < p < \infty$ *нётеровӣ бошад,* *зарур ва кифоя аст, ки шартҳои зерин иҷро шаванд:*

$$|a(z)| \neq |b(z)| \text{ барои ҳамаи } z \in \overline{D}, \quad a(t) \neq 0 \quad \text{барои ҳамаи} \quad t \in \Gamma, \tag{1.2.9}$$

дар айни ҳол агар $|a(z)| > |b(z)|$ бошад, онгоҳ индекси масъала ба нол баробар мешавад, агар $|a(z)| < |b(z)|$ бошад, онгоҳ индекси масъала ба

$$\varkappa = -\frac{3}{\pi}\Big[\arg a(t)\Big]_{\Gamma}$$

баробар мешавад.

Айнан ҳамин тавр натиҷа барои масъалаи Нейман барои муодилаи (1.2.1) ҷой дорад.

Мисол. Ба сифати мисол муодилаи дифференсиалии зеринро дида мебароем

$$z^n \frac{\partial^6 \omega}{\partial \overline{z}^3 \partial z^3} + \lambda \frac{\partial^6 \overline{\omega}}{\partial \overline{z}^6} = g(z), \tag{1.2.10}$$

ки λ – параметри комплексӣ буда барои ҳамаи $\{z : |z| \leq 1\}$ нобаробарии $|\lambda| > |z|^n$ - ро қаноат мекунад, n - адади дилхоҳи натуралӣ аст. Исбот карда мешавад, ки муодилаи интегралии сингулярии мувофиқи масъалаи (1.9) тариқи ба қатори Фурйие нисбати кунҷи қутбӣ паҳн намудани функсияи $f(z)$ ба системаи муодилаҳои интегралӣ бо ядроҳои якҷинсаи тартиби (-1) оварда мешавад. Нишон дода мешавад, ки масъалаи якҷинсаи (1.2.1), (1.2.2) расо $6n$ ҳалҳои хаттӣ новобаста (дар фазои ададҳои ҳақиқӣ) дорад ва масъалаи якҷинсаи мувофиқи он ҳал надорад.

1.2.3. Масъалаи Нейман

Функсияи $\omega(z)$ аз синфи $W_p^6(D) \cap C^2(\overline{D})$ ёфта шавад, ки он дар дохили соҳаи D муодилаи (1.2.1) ва дар сарҳади он Γ шартҳои канории

$$\left.\frac{\partial^j \omega}{\partial n^j}\right|_{\Gamma} = 0, \ j = 1, \ 2, \ 3 \tag{1.2.11}$$

- ро қаноат кунад, ки $\frac{\partial\omega}{\partial n}$ *- ҳосила аз рӯи равиши нормали беруна дар нуқтаҳои контури* Γ *мебошад.*

Акнун ба ҷои тасвири интегралии (1.2.11) тасвири [1] , [2] , [48] функсияҳоеро, ки шартҳои (1.18) - ро қаноат мекунанд ва намуди

$$\omega(z) = \iint\limits_{D} N_3(z,\overline{\zeta}) f(\zeta) ds_{\zeta}, \tag{1.2.12}$$

дорад, ки

$$N_3(z,\overline{\zeta}) = \frac{1}{2\pi}|\zeta - z|^4 \ln\Big|(\zeta - z)(1 - z\overline{\zeta})\Big|^2 + g_3(z,\overline{\zeta})$$

функсияи Неймани муодилаи $\Delta^m\omega \equiv \frac{\partial^m\omega}{\partial z^m\partial\overline{z}^m} = 0$ дар доираи воҳидии $D = \{z : |z| < 1\}$, ки айни ҳол ин функсия ба аоситаи формулаи рекуррентии

$$\frac{\partial^2 N_3(z,\overline{\zeta})}{\partial z\partial\overline{z}} = N_2(z,\overline{\zeta}).$$

ифода меёбад. Ба мисли масъалаи Дирихле, масъалаи Нейман (1.2.2), (1.2.1) низ ба таври эквиваленти ба муодилаи интегралии сингулярии дученакаи намуди (1.2.8) оварда мешавад.

1.3. Масъалаҳои Дирихле ва Нейман барои баъзе синфҳои системаи ду муодилаи эллиптикии тартиби шаш дар ҳамворӣ

Дар ин параграф масъалаҳои Дирихле ва Нейман барои баъзе синфҳои системаи ду муодилаи эллиптикии тартиби шаши ҳашт компонента дар ҳамворӣ тариқи ба муодилаҳои интегралии сингулярии дученака аз рӯи соҳаи маҳдуд омӯхта мешавад.

Бигузор D – соҳаи охирноки якалоқаноки бо хати качи сарбастаи Ляпунов Γ маҳдуд бошад. Системаи муодилаҳои тартиби 6 - и намуди

$$\begin{gathered}
a_0(z)\frac{\partial^6\omega}{\partial\overline{z}^3\partial z^3}+b_0(z)\frac{\partial^6\overline{\omega}}{\partial\overline{z}^3\partial z^3}+a_1(z)\frac{\partial^6\omega}{\partial\overline{z}^4\partial z^2}+b_1(z)\frac{\partial^6\overline{\omega}}{\partial z^4\partial\overline{z}^2}+\\
+a_2(z)\frac{\partial^6\omega}{\partial\overline{z}^5\partial z}+b_2(z)\frac{\partial^6\overline{\omega}}{\partial z^5\partial\overline{z}}+a_3(z)\frac{\partial^6\omega}{\partial\overline{z}^6}+b_3(z)\frac{\partial^6\overline{\omega}}{\partial z^6}+\\
+\sum_{k+j=0}^{5}\left[a_{k,j}(z)\frac{\partial^{k+j}\omega}{\partial\overline{z}^k\partial z^j}+b_{k,j}(z)\frac{\partial^{k+j}\overline{\omega}}{\partial\overline{z}^k\partial z^j}\right]=g(z),
\end{gathered}\tag{1.3.1}$$

доштаро дида мебароем, ки $\omega(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, коэффициентҳои система $a_j(z)$, $b_j(z)(j=0,1,2)$ - функсияҳои додашудаи дар соҳаи сарбастаи D бефосила, $g(z)\in L^p(D)$, $2<p<\infty$,

$$\frac{\partial}{\partial\overline{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

мебошанд.

Аз рӯи қисми асосии (1.3.1) матритса-функсияи зеринро месозем:

$$\mathcal{G}_z(\sigma)=\begin{pmatrix}\sum_{j=0}^{3}a_j(z)\sigma^{3+j}\overline{\sigma}^{3-j} & \sum_{j=0}^{3}b_j(z)\overline{\sigma}^{3+j}\sigma^{3-j}\\ \sum_{j=0}^{3}\overline{b_j(z)}\sigma^{3+j}\overline{\sigma}^{3-j} & \sum_{j=0}^{3}\overline{a_j(z)}\overline{\sigma}^{3+j}\sigma^{3-j}\end{pmatrix},$$

ки $z\in\overline{D}$, σ - адади дилхоҳи комплексии ғайринулӣ мебошад.

Эллиптикӣ будани системаи (1.3.1) маънои онро дорад, ки барои нуқтаи ихтиёрии $z\in\overline{D}$ ва дилхоҳ $t:|t|=1$ нобаробарии $\det\mathcal{G}_z(t)\neq 0$:

$$\det\mathcal{G}_z(t)\equiv|F(z,t)|^2|-|Q(z,t)||^2\neq 0 \tag{1.3.2}$$

барои ҳамаи $z \in \overline{D}$, $|t| = 1$ иҷро шавад, ки

$$F(z,t) = \sum_{n=0}^{3} a_n(z)t^n, \ Q(z,t) = \sum_{n=0}^{3} b_n(z)\overline{t}^n$$

мебошанд. Қайд мекунем, ки, дар корҳои Н. П. Дыбов [24] – [26] системаи муодилаҳои эллиптикии тартиби шаши намуди умумидошта тариқи муодилаҳои интегралӣ дида баромада шудааст, аммо натиҷаҳои дар он ҷо ҳосилшуда фақат танҳо системаҳои қавӣ эллиптикиро дар бар мегиранд, яъне ба муодилаҳои интегралии мувофиқи онҳо принсипи операторҳои фушурдашавада татбиқ мешаванд.

Леммаи 1.3.1. *Матритса-функсияи $\mathcal{G}_z(z,t)$ фақат ва фақат дар ҳамон маврид таназулнаёбанда мешавад, ки барои ҳамаи $z \in \overline{D}$ ва $|t| = 1$ $(\det \mathcal{G}_z(z,t) \neq 0)$ яке аз ин нобаробариҳо*

$$\sum_{n=0}^{3} \Delta_n(z) > 2M(z), \ \text{ҳангоми}\ \forall z \in \overline{D}, \tag{1.3.3}$$

$$\sum_{n=0}^{3} \Delta_n(z) < -2m(z), \ \text{ҳангоми}\ \forall z \in \overline{D}, \tag{1.3.4}$$

иҷро шаванд, ки дар ин ҷо

$$\Delta_n(z) = |a_n(z)|^2 - |b_n(z)|^2, \ n = 0, \ 1, \ 2, \ 3;$$

$$M(z) = \max_{|t|=1}[(a_1\overline{a}_0 - b_1\overline{b}_0 + a_2\overline{a}_1 - b_2\overline{b}_1 + a_3\overline{a}_1 - b_3\overline{b}_1)t+$$

$$+(a_2\overline{a}_0 - b_2\overline{b}_0 + a_3\overline{a}_1 - b_3\overline{b}_1)t^2 + (a_3\overline{a}_0 - b_3\overline{b}_0)t^3];$$

$$m(z) = \min_{|t|=1}[(a_1\overline{a}_0 - b_1\overline{b}_0 + a_2\overline{a}_1 - b_2\overline{b}_1 + a_3\overline{a}_1 - b_3\overline{b}_1)t+$$

$$+(a_2\overline{a}_0 - b_2\overline{b}_0 + a_3\overline{a}_1 - b_3\overline{b}_1)t^2 + (a_3\overline{a}_0 - b_3\overline{b}_0)t^3]$$

мебошанд.

1.3.1. Классификатсияи гомотопиии системаи (1.3.1) ва тасвири интегралӣ

Маҷмӯи ҳамаи матритсаҳои полиномиалии намуди $\mathcal{G}_z(t)$, ки шарти $\det \mathcal{G}_z(t) > 0\,(< 0)$ барои ҳамаи $z \in \overline{D}$ қаноат мекунанд, бо $\mathcal{G}^+\,(\mathcal{G}^-)$ ишора мекунем.

Ду матритсаи $\mathcal{G}_z^1$, $\mathcal{G}_z^2$ аз синфи $\mathcal{G}^+$ - ро гомотопӣ меномем ва бо $\mathcal{G}_z^1 \sim \mathcal{G}_z^2$ ишора мекунем, агар чунин маҷмӯи матритсаҳои полиномиалии $\mathcal{G}_z^+(\tau)$ аз $\mathcal{G}^+$мавҷуд бошанд, ки онҳо бефосила аз параметри $\tau : 0 \le \tau \le 1$ вобаста бошанд ва

$$\mathcal{G}^+(0) \equiv \mathcal{G}_z^1, \quad \mathcal{G}^+(1) \equiv \mathcal{G}_z^2.$$

бошанд.

Ду системаҳои эллиптикӣ аз маҷмӯи ҳамаи системаҳои эллиптикии (1.3.1) қисми асосии якхела дошта $\mathcal{G}_z(\sigma) \in \mathcal{G}^+$ фақат ва фақат ҳамон вақт дар $\mathcal{G}^+$ бефосила пайваст намудан мумкин аст, ки матритсаҳои характеристикии полиномалии онҳо гомотопӣ бошанд.

Полиноми $F(z,t)$ – полиноми комплексии таназулнаёбандаи тартиби се мебошад. Бигузор $q_1(z),\ q_2(z),\ q_3(z)$ – ҳалҳои комплексии муодилаи

$$F(z,t) = 0. \tag{1.3.5}$$

бошанд. Мувофиқм шарти (1.3.2) ин ҳалҳо дар сарҳади доираи воҳидии $|t| = 1$ намехобанд, яъне

$$|q_j(z)| \neq 1, \quad j = 1,\ 2,\ 3.$$

мебошанд. Чор ҳолат имконпазир аст:

1. $|q_j(z)| > 1,$ барои ҳамаи $j = 1,\ 2,\ 3;$

2. $|q_1(z)| < 1$ ва $|q_j(z)| > 1$ барои $j = 2,\ 3;$

3. $|q_j(z)| < 1,$ барои $j = 1,\ 2$ ва $|q_3(z)| > 1;$

4. $|q_j(z)| < 1,$ барои ҳамаи $j = 1,\ 2,\ 3.$

Ҳамин тавр муносибати гомотопӣ $\mathcal{G}^+$ - ро ба чор синфи гомотопӣ бо компонентҳои:

$$\begin{cases} \text{синфи } \nu_0 : \text{то есть когда выполняются неравенства 1. барои } \forall z \in D; \\ \text{синфи } \nu_1 : \text{яъне ҳангоми иҷро шудани шарти 2. барои } \forall z \in D. \\ \text{синфи } \nu_2 : \text{яъне ҳангоми иҷро шудани шарти 3. барои } \forall z \in D. \\ \text{синфи } \nu_3 : \text{яъне ҳангоми иҷро шудани шарти 4. барои } \forall z \in D. \end{cases} \tag{1.3.6}$$

ҷудо мекунад.

Ин синфҳо системаи пурраи маҷмӯи $\mathcal{G}^{\pm}$ - ро ташкил медиҳанд, яъне $\mathcal{G}_z^1$ ва $\mathcal{G}_z^2$ аз F^+ фақат ва фақат дар ҳамон маврид ба ягон класси ν_j $(j = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$ дохил мешаванд, агар $\mathcal{G}z^1 \sim \mathcal{G}^1$ бошанд.

Леммаи 1.3.2. *Бигузор матритсаи $\mathcal{G}_z(t) \in \mathcal{G}^+$ бошад. Онгоҳ $\mathcal{G}^+$ ба синфи ν_j $(j = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$ фақат ва фақат ҳамон вақт дохил мешавад, ки нобаробарии зерин иҷро шавад:*

$$\Delta_j(z) > M(z) + \Big(M^2(z) + \sum_{\substack{n=0 \\ n\neq j}}^{3} |\mu_{j,n}(z)|^2 - |\lambda_{j,n}(z)|^2\Big)^{1/2} \quad \forall z \in \overline{D}, \tag{1.3.7}$$

ки

$$\lambda_{j,n} = \overline{a}_j a_n - b_j \overline{b}_n,\ \mu_{j,n} = \overline{a}_j b_n - b_j \overline{a}_n.$$

мебошанд.

1. Бигузор $\mathcal{G}_z(t)$ аз $\mathcal{G}^+$ принадлежит гомотопическому ба класси гомотопии ν_0 дохил бошад. Онгоҳ мувофиқи леммаи 2

$$\Delta_0(z) = |a_0(z)|^2 - |b_0(z)|^2 > 0 \text{ для всех } z \in \overline{D}.$$

Аз муодилаи (1.3.1) ифодаи $\frac{\partial^6\overline{\omega}}{\partial\overline{z}^3\partial z^3}$ - ро хориҷ намуда, мо ба навишти зерини системаи ихтиёрии синфи гомотопии зерини ν_0 меоем:

$$\Delta_0(z)\frac{\partial^6\omega}{\partial\overline{z}^3\partial z^3}+\lambda_{0,1}(z)\frac{\partial^6\omega}{\partial\overline{z}^4\partial z^2}+\lambda_{0,2}(z)\frac{\partial^6\omega}{\partial\overline{z}^5\partial z}+\lambda_{0,3}(z)\frac{\partial^6\omega}{\partial\overline{z}^6}+$$
$$+\mu_{0,1}(z)\overline{\Big(\frac{\partial^6\omega}{\partial\overline{z}^4\partial z^2}\Big)}+\mu_{0,2}(z)\overline{\Big(\frac{\partial^6\omega}{\partial\overline{z}^5\partial z}\Big)}+\mu_{0,3}(z)\overline{\Big(\frac{\partial^6\omega}{\partial\overline{z}^6}\Big)}+T(\omega)=g(z), \tag{1.3.8}$$

мешавад, ки $T(\omega)$ – оператори дифференциалии тартиби поёнӣ мебошад.

Ба воситаи $W_p^6(D)\bigcap C^2(\overline{D})$– фазои функсияҳои комплексиро ишора мекунем, ки $\omega(z)$ дар D ҳосилаҳои умумишудаи тартиби шаш дошта бошанд, ки бо ҳосилаҳояшон дар соҳаи $\overline{D}$ бефосилаанд. Бе маҳдудият ҳисоб мекунем, ки D доираи воҳидӣ бо марказаш дар ибтидои координата: $D=\{z:|z|<1\}$ мебошад.

Масъалаи Дирихле. *Функсияи $\omega(z)$ - ро аз синфи $W_p^6(D)\cap C^2(\overline{D})$ ёбед, ки дар дохили G муодилаи (1.3.8) - ро қаноат мекунад, ва дар сарҳад он Γ се шартҳои*

$$\omega(z)\big|_{\Gamma}=0,\quad \frac{\partial\omega}{\partial n}\bigg|_{\Gamma}=0,\quad \frac{\partial^2\omega}{\partial n^2}\bigg|_{\Gamma}=0, \tag{1.3.9}$$

- ро қаноат кунад, ки $\frac{\partial\omega}{\partial n}$ - ҳосила аз рӯи равиши нормали беркна ба нуқтаҳои контури Γ гузаронида шудааст.

Аз корҳои [1]–[5] маълум аст, ки функсияи ихтиёрии синфи $W_p^6(D)\cap C^2(\overline{D})$, $(p>2)$, ки дар сарҳади соҳа Γ шартҳои (1.3.9) - ро қаноат мекунад, ба таври зайл тасвири интегралии

$$\omega(z)=-\frac{1}{\pi}\iint\limits_D G_6(z,\zeta)f(\zeta)ds_\zeta, \tag{1.3.10}$$

дорад, ки $f(z)$ - функсияи комплексии ихтиёрӣ аз $f(z)\in L_p(D)$, $p>1$ мебошад ва $G_6(z,\zeta)$ – функсияи Грини муодилаи $\Delta^3\omega\equiv\frac{\partial^6\omega}{\partial z^3\partial\overline{z}^3}=0$ дар соҳаи маҳдуди $D=\{z:|z|<1\}$:

$$G_6(z,\zeta)=\frac{|\zeta-z|^4}{4\pi}|\ln\left|\frac{1-z\overline{\zeta}}{\zeta-z}\right|^2-|\zeta-z|^2(1-|z|^2)(1-|\zeta|^2)+\frac{1}{2}(1-|z|^2)^2(1-|\zeta|^2)^2$$

мебошад.

Ҳосилаҳои функсияҳои $\omega(z)$ - ро ҳисоб мекунем. Аён аст, ки ҳамаи ҳосилаҳои функсияи $\omega(z)$ нисбати z ва $\overline{z}$ то тартиби 5 - операторҳои интегралӣ бо ядроҳои бефосила ва махсусияти сустдоштаро ташкил медиҳанд ва бинобар ин дар фазои $L_p(D)\,(1 < p < \infty)$ операторҳои пурра бефосила мебошанд. Ишораҳои зеринро дохил мекунем:

$$\sigma_0(z,\overline{\zeta}) = \frac{1}{4\pi}|\zeta - z|^4 \ln|\zeta - z|^2,$$

$$\sigma_1(z,\overline{\zeta}) = -\frac{1}{4\pi}|\zeta - z|^4 \ln|1 - z\overline{\zeta}|^2 - \sum_{k=1}^{2}\frac{(-1)^k}{k\pi}|\zeta - z|^{2(2-k)}[(1-|z|^2)(1-|\zeta|^2)]^k,$$

$$(Uf)(z) = \iint\limits_D \sigma_0(z,\overline{\zeta}) f(\zeta) ds_\zeta, \quad (Vf)(z) = \iint\limits_D \sigma_1(z,\overline{\zeta}) f(\zeta) ds_\zeta. \qquad (1.3.11)$$

Ҳисобкуниҳои бевосита нишон медиҳанд, ки

$$\frac{\partial^3 U}{\partial z^3} = -\frac{1}{2\pi}\iint\limits_D \frac{(\overline{\zeta} - \overline{z})^2}{\zeta - z} f(\zeta) ds_\zeta \qquad (1.3.12)$$

мебошад.

Аз баробарии (1.3.11) $3+n$ маротиба нисбати z ва $3-n$ маротиба нисбати $\overline{z}$ ҳосила гирифта, ҳосил мекунем:

$$\frac{\partial^6 U}{\partial z^{3+n}\partial \overline{z}^{3-n}} = \begin{cases} \frac{(-1)^n n}{\pi}\iint\limits_D \frac{(\overline{\zeta}-\overline{z})^{n-1}}{(\zeta-z)^{n+1}} f(\zeta) ds_\zeta \equiv (S_{-n}f)(z), & \text{если } n = 1,\ 2,\ 3\ ; \\ f(z), & \text{агар } n = 0. \end{cases} \qquad (1.3.13)$$

Акнун ба оператор $(Vf)(z)$ мегузарем. Аз функсияи V нисбати z $3+n$ маротиба ва нисбати $\overline{z}$ $3-n$ маротиба ҳосила гирифта, ҳосил мекунем:

$$\frac{\partial^{2m} V}{\partial z^{3+n}\partial \overline{z}^{3-n}} = \iint\limits_D K_{\nu_0,n}(z,\overline{\zeta}) f(\zeta) ds_\zeta,\ n = 1,\ 2,\ 3,$$

ки ядрои $K_{\nu_0,n}(z,\overline{\zeta})$ намуди

$$K_{\nu_0,n}(z,\overline{\zeta})=\frac{(-1)^{3-n}}{2\pi\cdot(n-1)!}\sum_{k=0}^{2}C_{3+n}^{k}(-1)^{k}2\dots(3-k)\cdot(2+n-k)!\times$$

$$\times\frac{(\zeta-z)^{2-k}(\overline{\zeta}-\overline{z})^{n-1}\overline{\zeta}^{3+n-k}}{(1-z\overline{\zeta})^{3+n-k}}, \tag{1.3.14}$$

дорад, ва дар айни ҳол, агар нуқтаи ζ дар дохили сарҳади давраи воҳидии Γ бошад, яъне $|\zeta|=1$, онгоҳ

$$\frac{(\zeta-z)^{2-k}(\overline{\zeta}-\overline{z})^{n-1}\overline{\zeta}^{3+n-k}}{(1-z\overline{\zeta})^{3+n-k}}=\frac{(\overline{\zeta}-\overline{z})^{n-1}}{(\zeta-z)^{n+1}}.$$

1.3.2. Гузаштан ба муодилаҳои интегралии сингулярӣ.

Қиматҳои ҳосилаҳоро аз (1.3.12)–(1.3.14) ба муодилаи дифференсиалии (1.3.8) гузошта, барои муайян намудани функсияи $f(z)$ Муодилаи интегралии сингулярии дученакаи зеринро ҳосил мекунем:

$(A_0f)(z)\equiv$

$$\equiv\Delta_0(z)f(z)+\sum_{n=1}^{3}\lambda_{0,n}(z)(S_{-n}^{*}f)(z)+\mu_{0,n}(z)\overline{(S_{-n}^{*}f)}(z)+(Tf)(z)=g(z), \tag{1.3.15}$$

ки дар ин ҷо

$$(S_n^{*}f)(z)=\iint\limits_{D}K_{3+n,3-n}(z,\zeta)f(\zeta)ds_{\zeta},$$

$$K_{3+n,3-n}(z,\zeta)=\frac{(-1)^{n}n}{\pi}\left(\frac{(\overline{\zeta}-\overline{z})^{n-1}}{(\zeta-z)^{n+1}}+K_{n_0,n}(z,\overline{\zeta})\right),\ n=1,\ 2,\ 3,$$

мебошанд, T – оператори пурра бефосила дар $L^{p}(D)$, $p>2$ аст.

Дар ин, ҷо бояд қайд намуд, ки оператори интегралӣ бо ядрои $K_{3+n,3-n}(z,\overline{\zeta})$ дар нуқтаҳои дохилии соҳаи D махсусияти тартиби ду дорад, бинобар маҷудияти ин интегралро ба маънои қимати асосии Коши бояд фаҳмем. Оиди нуқтаҳои сарҳадӣ бошад, агар $\zeta\in\Gamma$, $\overline{\zeta}=1/\zeta$

шавад, онгоҳ ба осонӣ тафтиш кардан мумкин аст, ки дар ин маврид $K_{3+n,3-n}(z,\overline{\zeta}) = 0$ мешавад. Муодилаи интегралии (1.3.15) таалуқи муодилаҳои интегралии сингулярии дученака бо характеристикаҳои ҷуфт дар соҳаи маҳдуд мебошад, ки дар корҳои [29]–[31] омӯхта шудаанд. Матритса–символи мувофиқи оператори A_0 намуди зерин дорад:

$$\mathcal{G}^0_{A_0}(z,t) = \begin{pmatrix} \Delta_0(z) + \sum_{n=1}^3 \lambda_{0,n}(z)t^n & \sum_{n=1}^3 \mu_{0,n}(z)\overline{t}^n \\ \sum_{n=1}^3 \overline{\mu_{0,n}(z)}t^n & \Delta_0(z) + \sum_{n=1}^3 \overline{\lambda_{0,n}(z)\overline{t}^n} \end{pmatrix}, \ z \in \overline{D}, \ |t| = 1.$$

Мувофиқи натиҷаҳои [29]–[31] барои нётеровӣ будани оператори A_0 зарур ва кифоя аст, ки матритса-символи он $\mathcal{G}^0_{A_0}(\tau,t)$ $(\tau \in \Gamma, \ |t| = 1)$ индексҳои хусусии нулӣ дошта бошад. Аз рӯи символи $\mathcal{G}_{A_0}(z,t)$ матритсаи $\mathcal{G}_{A_0}(\tau,t)$ – ро месозем, ки $\tau \in \Gamma, |t| = 1$ мебошанд. Нишон дода мешавад, ки барои $\mathcal{G}_{A_0}(\tau,t)$ пешниҳоди зайл:

$$\mathcal{G}_{A_0}(\tau,t) = R_0^-(\tau,t)R_0^+(\tau,t),$$

ҷой дорад, ки $R_0^+(\tau,t)$ нисбати тағйирёбандаи t ба дохили доираи воҳидии $|z| < 1$ аналитикӣ густаришёбанда ва $R_0^-(\tau,t)$- беруни ин доира ва дар айни ҳол муайянкунандаҳои онҳо ба нол баробар намешаванд, яъне матритсаи $\mathcal{G}_{A_0}(\tau,t)$ индексҳои хусусии нулӣ доранд. Онгоҳ аз [49] мебарояд, ки оператори A_0 дар $L^p(D)$ $(1 < p < \infty)$ нётеровӣ аст.

Акнун индекси оператори A_0 - ро ҳисоб мекунем. Азбаски полиноми $F(z,t)$ дар дохили доираи $|t| < 1$ ҳал надорад, пас онро чунин пешниҳод намудан мумкин аст:

$$F(z,t) = \lambda_{0,n}(z)\prod_{j=1}^{3}(t - q_j^-(z)),$$

ки $|q_j^-(z)| > 1$ мебошад. Инро ба назар гирифта, чунин силсилаи матритса-функсияҳоро месозем:

$$\mathcal{G}_{A_0^\rho}(z,t,\rho) = \begin{pmatrix} \dfrac{F(z,t,\rho)}{Q(z,t,\rho)} & \dfrac{Q(z,t,\rho)}{F(z,t,\rho)} \end{pmatrix},$$

ки онҳо аз параметри $\rho : 0 \leq \rho \leq 1$ бефосила вобаста мебошанд ва

$$F(z,t,\rho) = \lambda_{0,n}(z)\prod_{j=1}^{3}(\rho t - q_{\nu}^{-}(z))$$

$$Q(z,t,\rho)\rho\varphi(\rho)Q(z,t),\ 0 \leq \rho \leq 1,$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{\varepsilon}{N}, & \text{ҳангоми } 0 \leq \rho \leq \rho_0 < 1, \\ \frac{1}{N}\Big(\varepsilon + \frac{N-\varepsilon}{1-\tau_0}\Big)(\rho - \tau_0), & \text{ҳангоми } \rho_0 \leq \rho \leq 1, \end{cases}$$

τ_0 – ададИ ҳақиқии ба 1 наздик аст,

$$N = \sup|P(z,t,\tau)|,\ \varepsilon = \inf|Q(z,t,\tau)|$$

ва супремум (инфимум) аз рӯи ҳамаи $z \in \overline{D},\ |t| = 1,\ 0 \leq \rho \leq 1$ гирифта мешавад. Аз рӯи матритсаҳои $\mathcal{G}_{A_0^\rho}(z,t,\rho)$ силсила операторҳои интегралии $A_\rho^o,\ 0 \leq \rho \leq 1$ намуди (1.3.15) месозем. Бе душворӣ дидан мумкин аст,ки

$$|F(z,t,\rho)| > |Q(z,t,\rho)|,$$

ва$Ind_{|t|=1}F(z,t,\rho) = 0,\ \forall z \in \overline{D}, |t| = 1, 0 \leq \rho \leq 1$ аст, яъне операторҳои A_ρ^o, нётеровӣ мебошанд. Азбаски

$$A_1^0 = A_0 \quad \text{ва} \quad A_0^0 = -\Delta_0(z)q_1^{-}(z)\cdot q_2^{-}(z)\cdot q_3^{-}(z)I$$

мебошанд, пас индекси оператори A_0 ба нул баробар аст.

Теоремаи 1.3.1. *Бигузор матритсаи $\mathcal{G}_z(t)$ аз $\mathcal{G}^+$ таалуқи синфи гомотопии ν_0 бошад. Барои он, ки масъалаи (1.3.9) системаи эллиптические (1.3.8) дар синфи $W_p^6(D)\bigcap C^2(\overline{D})$ $(2 < p < \infty)$ фредголъмовӣ бошад, зарур ва кифоя аст, ки шарти*

$$\Delta_0(z) > M(z) + \Big(M^2(z) + \sum_{n=1}^{3}|\mu_{0,n}(z)|^2 - |\lambda_{0,n}(z)|^2\Big)^{1/2} \quad \forall z \in \overline{D}. \quad (1.3.16)$$

иҷро гардад.

2. Бигузор акнун $\mathcal{G}_z(t)$ из $\mathcal{G}^+$ ба синфи гомотопии ν_j $(j=1,\ 2,\ 3)$ таалуқ бошад. Онгоҳ мувофиқи леммаи 3.2

$$\Delta_j(z)=|a_j(z)|^2-|b_j(z)|^2>0 \text{ барои ҳамаи } z\in\overline{D}$$

мешавад. Аз муодилаи (1.3.1) ифодаи $\frac{\partial^6\overline{\omega}}{\partial z^{3+j}\partial\overline{z}^{3-j}}$ - ро хориҷ намуда, мо ба навишти зерини системаи ихтиёрӣ аз синфии гомотопии

$$\nu_j\ (j=1,\ 2,\ 3)$$

меоем.

$$\Delta_j(z)\frac{\partial^6\omega}{\partial\overline{z}^{3+j}\partial z^{3-j}}+\sum_{\substack{n=0\\n\neq j}}^{3}\lambda_{j,n}(z)\frac{\partial^6\omega}{\partial\overline{z}^{3+n}\partial z^{3-n}}+\mu_{j,n}(z)\frac{\partial^6\overline{\omega}}{\partial z^{3+n}\partial\overline{z}^{3-n}}=g_1(z). \tag{1.3.17}$$

Қиматҳои ҳосилаҳои (1.3.12)–(1.3.14) - ро ба муодилаи дифференсиалии (1.3.1) гузошта, барои муайян намудани функсияи $f(z)$ чунин муодилаи интегралии сингулярии дученакаҳосил мекунем:

$(A_jf)(z)\equiv$

$$\equiv\Delta_j(z)(S_j^*f)(z)+\sum_{\substack{n=0\\n\neq j}}^{3}\lambda_{j,n}(z)(S_{-n}^*f)(z)+\mu_{j,n}(z)\overline{(S_{-n}^*f)}(z)+(Tf)(z)=g(z), \tag{1.3.18}$$

ки ҳангоми $n=0$ будан, $(S_0^*f)(z)$ функсияи $f(z)$ - ро ифода мекунад.

Акнун аз рӯи символи $\mathcal{G}_{A_\nu}(z,t)$ матритса–функсияи сарҳадиро зерин-ро месозем:

$$\mathcal{G}_{A_\nu}(\tau,t)=\begin{pmatrix}F(\tau,t) & Q(\tau,t)\\ \overline{Q(\tau,t)} & \overline{F(\tau,t)}\end{pmatrix},$$

ки

$$F(\tau,t)=\Delta_j(\tau)t^j+\sum_{n=0,n\neq j}^{3}\lambda_{j,n}(\tau)t^n,$$

$$Q(\tau,t)=\sum_{n=0,n\neq j}^{3}\mu_{j,n}(\tau)\overline{t}^n,\ \tau\in\Gamma,\ |t|=1$$

мебошанд. Нишон дода мешавад, ки матритсаи $\mathcal{G}_{A_j}(\tau,t)$ ҳангоми иҷро шудани шарти

$$\mu_{j,0}(\tau)=\overline{a_j(\tau)}b_0(\tau)-b_j(\tau)\overline{a_0(\tau)}\neq 0 \quad \forall\tau\in\Gamma$$

бо индексҳои хусусии нулӣ факторизатсия $\mathcal{G}_{A_j}(\tau,t)=R_j^-(\tau,t)R_j^+(\tau,t)$ мешавад, ки матритсаи $R_j^+(\tau,t)$ ба дохили доираи воҳидӣ $|t|\leq 1$ нисбати t аналитикӣ густариш меёбад ва нулҳои муайянкунандаи он дар беруни доираи воҳидӣ мехобанд ва $R_j^-(\tau,t)$ аналитикӣ ба беруни доираи воҳидии $|t|<1$ аналитикӣ густариш меёбад, нулҳои муайянкунандаи он бошанд дар дохили доираи воҳидии $|t|<1$ мехобанд ва дар айни ҳол шарти $\mu_{j,0}(\tau)\neq 0$, $\tau\in\Gamma$ зарур ва кифоя аст, ки оператори A_j дар фазои $L^p_{\beta-2/p}(D)$ нётеровӣ бошад.

Акнун ба ҳисоб намудани индекси оператори A_j шурӯ менамоем. Оператори A ба синфи ν_j дохил мешавад ва айни ҳол шарти (1.3.16) ва $Ind_{|t|=1}F(z,t)=j\neq 0$, $(j=1,2,3)$ иҷро мешаванд. Онгоҳ бисёраъзогии$P(z,t)$ расо j ҳалҳои $q_k^+(z)$ $(k=1,\ldots,j)$ дар дохили доираи $|t|\leq 1$ ва $3-j$ ҳалҳои $q_k^-(z)$ $(k=j+1,\ldots,3)$ дар беруни доираи $|t|\leq 1$ дорад. Бинобар ин $F(z,t)$ - ро ба намуди

$$F(z,t)=\lambda_{j,n}(z)\prod_{k=1}^{j}(t-q_k^+(z))\prod_{k=j+1}^{3}(t-q_k^-(z))$$

пешниҳод намудан мумкин аст. Инро ба назар гирифта силсилаи матритсафункцияҳои

$$\mathcal{G}_{A_\nu^\tau}(z,t,\rho)=\begin{pmatrix}F(z,t,\rho) & Q(z,t,\rho)\\ \overline{Q(z,t,\rho)} & \overline{F(z,t,\rho)}\end{pmatrix},$$

- ро сохтан мумкин аст, ки онҳо аз параметри $\rho:0\leq\tau\leq 1$ бефосила вобастаанд ки

$$F(z,t,\rho)=\lambda_{j,n}(z)\prod_{k=1}^{j}(t-\tau q_k^+(z))\prod_{k=j+1}^{3}(\tau t-q_k^-(z)),$$

$$Q(z,t,\rho)=\mu_{j,0}(z)+\tau\varphi(\rho)\Big(\sum_{n=1,n\neq 0,j}^{3}\mu_{j,n}(z)\overline{t}^{n}\Big),\ z\in\overline{D}$$

мебошанд ва $\varphi(\tau)$ ба мисли ҳолати пешина муайян мешаванд.

Акнун аз рӯи матритсаҳои $\mathcal{G}_{A_j}(z,t,\rho)$ силсилаи операторҳои интегралии $A_j^{\tau},\ \ 0\leq\tau\leq 1$ намуди (1.3.15) сохта қайд мекунем, ки онҳо нётеровӣ мебошанд, чунки

$$|F(z,t,\rho)|>|Q(z,t,\rho)|,\ \forall z\in\overline{D},\ 0\leq\rho\leq 1$$

ва $\mu_{j,0}(z)\neq 0,\ z\in\Gamma$ аст.

Азбаски $A_j^1=A_j$ ва

$$A_j^0=\lambda_{j,n}(z)q_{j+1}^{+}(z)\dots q_3^{+}(z)S_{-j}+\mu_{j,0}(z)K$$

аст, пас ба оператори A_j^0 натиҷаҳои корҳои результаты работ [28]–[33], -ро татбиқ намуда, ҳосил мекунем, ки индекис оператор A ба

$$\varkappa=-2jInd_{\Gamma}\mu_{j,0}(\tau)$$

баробар аст.

Теоремаи 1.3.2. *Бигузор матритсаи $\mathcal{G}_z(t)$ аз $\mathcal{G}^{+}$ ба синфи гомотопии ν_j $(j=1,2,3)$ дохил бошад. Барои он, ки масъалаи (1.3.8) барои системаи эллиптикии (1.3.17) дар синфи $W_p^6(D)\bigcap C^2(\overline{D})$ $(2<p<\infty)$ нётеровӣ бошад, зарур ва кифоя аст, ки шартҳои*

$$\Delta_j(z)>M(z)+\Big(M^2(z)+\sum_{\substack{n=0\\ n\neq j}}^{3}|\mu_{j,n}(z)|^2-|\lambda_{j,n}(z)|^2\Big)^{1/2} \tag{1.3.19}$$

$$\textit{ва}\quad \mu_{j,n}(\tau)\neq 0\quad \textit{для}\quad \forall z\in\overline{D},\quad \tau\in\Gamma,$$

иҷро шаванд, ки

$$\lambda_{j,n}(z)=\overline{a_j(z)}a_n(z)-b_j(z)\overline{b_n(z)},\ \mu_{j,n}(z)=\overline{a_j(z)}b_n(z)-b_j(z)\overline{a_n(z)}$$

мебошанд.

Дар айни замон, агар шарти (1.3.19) иҷро гардад, индекси масъала

$$\varkappa = -2jInd_{\Gamma}\mu_{j,0}(\tau),$$

баробар мешавад.

Айнан ҳамин гуна натиҷаҳо барои масъалаи Нейман барои муодилаи (1.3.8) ҷой дорад.

1.4. Масъалаҳои Дирихле ва Нейман барои системаи муодилаҳои дифференсиалии умумии эллиптикии тартиби шаш бо коэффисиентҳои бефосила дар ҳамворӣ

Дар корҳои И. Н. Векуа [1]– [5] усули нави таҳқиқи масъалаҳои гуногуни сарҳадӣ барои системаи муодилаҳои дифференсиалии хаттӣ бо ҳосилаҳои хусусии тартиби 2m бо тағйирёбандаи новобастаи $z = x + iy$, $\omega(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$

$$\sum_{n=-m}^{m} a_n(z)\frac{\partial^{2m}\omega}{\partial\overline{z}^{m+n}\partial z^{m-n}} + b_n(z)\frac{\partial^{2m}\overline{\omega}}{\partial\overline{z}^{m-n}\partial z^{n+m}} + T\omega = g(z), \qquad (1.4.1)$$

пешниҳод гардида буд, ки дар он T – оператори дифференсиалии тартиби поёнӣ мебошад.

Усул аз он иборат аст, ки тавассути тасвири умумии ҳалҳои масъалаҳои таҳқиқшаванда аз масъалаи гузошташуда ба таври эквивалентӣ ба муодилаҳои интегралии сингулярӣ аз рӯи соҳаи маҳдуд гузариш намуда, баъдан ҳалшавандагии ин муодилаҳои интегралӣ таҳқиқ карда мешаванд.

Омӯзиши минбаъдаи назарияи масъалаҳои сарҳадии хаттӣ ва ғайрихаттии муодилаҳои эллиптикӣ дар корҳои илмии шогирдони бевоситаи И.Н Векуа: Б.В. Боярский [6]– [15], А. И. Волперт [16]– [?], В.С. Виноградов [20]– [23], П.Т. Дибов [24]– [25], А.Ҷ.Ҷураев [27] давом ёфтанд. Зикр бояд намуд, ки дар ҳамаи корҳои муаллифони номбаршуда системаи (1) фақат дар мавриди қавӣ эллиптикӣ будани оператори дифференсиалӣ мавриди таҳқиқ гардида буданд. Масъалан Б.В. Боярский дар кори [6] тавассути усули инъикосҳои фушурдашавнда фредголмовӣ будани масъалаҳои Дирихле ва Нейманро барои системаи (1.4.1) - и тартиби ду исбот намудааст. Айнан бо ҳамин шартҳо П.Т. Дибов дар корҳои [24]– [26] системаи (1.4.1)–и тартиби чор ва шаш ва А.Ҷ. Ҷӯраев дар монографияи [27] системаи тартиби $2m$ – ро мавриди омӯзиш қарор додаанд.

Дар ин параграф густариши ояндаи ин тадқиқотҳо оварда шудааст, ки ба натиҷаҳои нав оварда мерасонанд. Вобаста аз синфҳои гомотопии системаҳои умумии муодилаҳои эллиптикии тартиби 6 дар ҳамворӣ шартҳои зарурӣ ва кифоягии нётеровӣ будани масъалаҳои Дирихле ва Неймана исбот карда шуда, фомулаҳои ошкор барои ҳисоб намудани индекси масъалаҳо ёфта шудаанд.

Системаи умумии эллиптикии ду муодилаҳои аз ду тағйирёбандаи новобастаи тартиби шаш дар ҳамворӣ намуди комплексии зерин доранд:

$$\begin{gathered}\sum_{n=-3}^{3} a_n(z)\frac{\partial^6\omega}{\partial\overline{z}^{3+n}\partial z^{3-n}}+b_n(z)\frac{\partial^{2m}\overline{\omega}}{\partial\overline{z}^{3-n}\partial z^{n+3}}+\\ +\sum_{0\le l+j\le 5} a_{l,j}(z)\frac{\partial^{l+j}\omega}{\partial\overline{z}^{l}\partial z^{j}}+b_{l,j}(z)\frac{\partial^{l+j}\overline{\omega}}{\partial\overline{z}^{l}\partial z^{j}}=g(z),\end{gathered}\tag{1.4.2}$$

дида баромада мешавад, ки $z = x + iy$, $\omega(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ мебошанд. Коэффициентҳои муодилаи (1.39) функсияҳои бефосила дар соҳаи $\overline{D}$ буда, функцияи $g(z) \in L^p(D), 2 < p < \infty$ мебошад.

1.4.1. Классификатсияи гомотопии системаи (1.4.2) ва тасвири интегралӣ

Аз рӯи қисми асосии системаи (1.4.2) матритса-функсияи

$$\mathcal{G}(z,\sigma)=\begin{pmatrix}\mathcal{P}_6(z,\sigma) & \mathcal{Q}_6(z,\sigma)\\ \overline{\mathcal{Q}_6(z,\sigma)} & \overline{\mathcal{P}_6(z,\sigma)}\end{pmatrix},$$

- ро месозем, ки

$$\mathcal{P}_6(z,\sigma)=\sum_{n=-3}^{3} a_n(z)\sigma^{3+n}\overline{\sigma}^{3-n},\ \mathcal{Q}_6(z,\sigma)=\sum_{n=-3}^{3} b_n(z)\sigma^{3-n}\overline{\sigma}^{3+n}.$$

мебошанд.

Эллиптикӣ будани системаи (1.4.2) маънои онро дорад, ки барои дилхоҳ нуқтаи $z \in \overline{D}$ ва ихтиёрӣ адади комплексии ғайринулии н $\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2$ нобаробарии

$$\det\mathcal{G}(z,\sigma)\equiv|\mathcal{P}_6(z,\sigma)|^2|-|\mathcal{Q}_6(z,\sigma)||^2\neq 0\tag{1.4.3}$$

иҷро шавад. Барои осонии кор ишораи $t = \frac{\sigma}{\bar{\sigma}}$ дохил мекунем ва матритса-функсияи $\mathcal{G}_6(z, \sigma)$ - ро ,ба намуди зерин менависем:

$$\mathcal{G}_6(z,t) = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_6(z,t) & \mathcal{Q}_6(z,t) \\ \hat{\mathcal{Q}}_6(z,t) & \hat{\mathcal{P}}_6(z,t) \end{pmatrix}, \ |t| = 1, \ z \in \overline{D},$$

ки

$$\mathcal{P}_6(z,t) = \bar{t}^3 \sum_{n=-3}^{3} a_n(z) t^{3+n} \equiv \bar{t}^3 P_6(z,t),$$

$$\mathcal{Q}_6(z,t) = \bar{t}^3 \sum_{n=-3}^{3} b_n(z) t^{3-n} \equiv \bar{t}^3 Q_6(z,t).$$

мебошанд. Бе маҳдудияти умумӣ соҳаи маҳдуди D - ро доираи воҳидии $D = \{z : |z| < 1\}$ меҳисобем. Барои муодилаи (1.39) масъалаи Дирихлеи зеринро таҳқиқ мекунем:

Масъалаи Дирихле. *Функсияи* $\omega(z)$ *аз синфи* $W_p^6(D) \cap C^2(\overline{D})$ *ёфта шавад, ки дар дохили соҳаи* D *муодилаи (1.4.2) ва дар сарҳади он* Γ *– шартҳои сарҳадии*

$$\left.\frac{\partial^j \omega}{\partial n^j}\right|_{\Gamma} = 0, \ j = 0, \ 1, \ 2, \tag{1.4.4}$$

- ро қаноат кунад, ки $\frac{\partial \omega}{\partial n}$ *- ҳосила аз рӯи нормали берунаи функцсияи* $\omega(z)$ *ба нуқтаҳои контури* Γ *мебошад.*

Чуноне ба мо маълум аст, кори аввалине, ки ба тадқиқи системаи муодилаҳои тартиби шаши намуди (1.4.2) дошта бахшида шудааст, ин мақолаи П.Т. Дибов [26] мебошад ва дар он натиҷаҳои фредголмовӣ будани масъалаи Дирихле таҳқиқ гардидааст, ки он фақат ҳолати қавӣ эллиптикӣ будани системаи (1.39) - ро дар бар мегирад.

1.4.2. Гузариш аз масъалаи Дирихле ба муодилаҳои интегралии сингулярӣ аз рӯи соҳаи маҳдуд

Леммаи 1.4.1. *Матритса-функсияи* $\mathcal{G}_6(z,t)$ *барои ҳамаи* $z \in \overline{D}$ *ва* $|t| = 1$ $(\det \mathcal{G}_6(z,t) \neq 0)$ *фақат ва фақат ҳамон вақт таназулнаёбанда* *мешавад, ки яке аз шартҳои зерин иҷро гарданд:*

$$\sum_{n=-3}^{3} \Delta_n(z) > 2M(z), \ \text{ҳангоми} \ \forall z \in \overline{D}, \tag{1.4.5}$$

$$\sum_{n=-3}^{3} \Delta_n(z) < 2m(z), \ \text{ҳангоми} \ \forall z \in \overline{D}, \tag{1.4.6}$$

ки

$$\Delta_n(z) = |a_n(z)|^2 - |b_n(z)|^2, \ n = 0, \ \pm 1, \pm 2, \pm 3;$$

$$M(z) = \max_{|t|=1} Re[\alpha_1(z)t + \alpha_2(z)t^2 + \alpha_3(z)t^3],$$

$$-m(z) = \min_{|t|=1} Re[\alpha_1(z)t + \alpha_2(z)t^2 + \alpha_3(z)t^3];$$

$$\alpha_1(z) = \overline{a}_{-1}a_0 - \overline{b}_{-1}b_0 + \overline{a}_{-2}a_{-1} - \overline{b}_{-2}b_{-1} + \overline{a}_{-3}a_{-2} - \overline{b}_{-3}b_{-2},$$

$$\alpha_2(z) = a_2\overline{a}_0 - b_2\overline{b}_0 + a_3\overline{a}_{-1} - b_3\overline{b}_{-1} + \overline{a}_{-2}a_0 - \overline{b}_{-2}b_0 + \overline{a}_{-3}a_{-1} - \overline{b}_{-3}b_{-1},$$

$$\alpha_3(z) = a_3\overline{a}_0 - b_3\overline{b}_0 + \overline{a}_{-3}a_0 - \overline{b}_{-3}b_0$$

мебошанд.

Маҷмӯи ҳамаи матритсаҳои полиномалии намуди $\mathcal{G}_6(z,t) : \det \mathcal{G}_6(z,t) = |\mathcal{P}_6(z,t)|^2 - |\mathcal{Q}_6(z,t)|^2$ дошта, ки барои ҳамаи $z \in \overline{D}$, шарти $\det \mathcal{G}_6(z,t) > 0 \, (< 0)$ - ро қаноат мекунад, ба воситаи $\mathcal{G}^+ \, (\mathcal{G}^-)$ ишора мекунем.

Ду матритсаи матрипсаи $\mathcal{G}_z^1$, $\mathcal{G}_z^2$ аз синфи $\mathcal{G}^+$ гомотопӣ номида мешаванд ва бо $\mathcal{G}_6^1 \sim \mathcal{G}_6^2$ ишора мешаванд, агар чунин силсилаи матритсаҳои полиномиалии $\mathcal{G}_6^+(\tau)$ аз $\mathcal{G}^+$ ёфт шаванд, ки онҳо $\tau : 0 \leq \tau \leq 1$ бефосила вобаста бошанд ва

$$\mathcal{G}^+(0) \equiv \mathcal{G}_6^1, \quad \mathcal{G}^+(1) \equiv \mathcal{G}_6^2$$

бошанд.

Ду системаи эллиптикӣ аз маҷмӯи системаҳои эллиптикии (1.4.2) бо қисми ҳақиқии якхела $\mathcal{G}_6(\sigma) \in \mathcal{G}^+$ фақат ва фақат ҳамон вақт бо роҳи бефосила в $\mathcal{G}^+$ пайваст намудан мумкин ат, ки можно агар матритсаи–полиномалии ин системаҳо гомотопӣ бошанд. Полиноми тартиби шаш $P(z,t)$ –

комплексӣ ва таназулнаёбанда аст. Бигузор $q_j(z)(j=1,2,\dots,6)$ – ҳалҳои комплексии муодилаи

$$P(z,t)=0 \tag{1.4.7}$$

бошанд. Мувофиқи шарти (1.4.3) ин ҳалҳо дар сарҳади доираи воҳидии $|t|=1$ намехобанд, яъне

$$|q_j(z)|\neq 1, \quad (j=1,2,\dots,6).$$

мебошанд. Ҳафт ҳолати имконпазир мавҷуд аст:

1. $|q_j(z)|>1$, барои ҳамаи $j=1,2,\dots,6$;
2. $|q_1(z)|>1$ барои ҳамаи j ба ғайр аз яктоаш ;
3. ....

4. $|q_j(z)|<1$, барои ҳамаи $j=1,2,\dots,6$.

Ҳамин тавр, муносибати гомотопӣ $\mathcal{G}^+$ – ро ба 7 синфҳо (компонентҳо) ҷудо мекунад:

$$\begin{cases} \text{синфи } \nu_0 : \text{яъне нобаробарии 1. барои } \forall z\in D \text{ ичро мешавад;} \\ \text{синфи } \nu_1 : \text{яъне нобаробарии 2. барои } \forall z\in D \text{ ичро мешавад} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ . \\ \text{синфи } \nu_6 : \text{яъне нобаробарии 4. барои } \forall z\in D \text{ ичро мешавад.} \end{cases} \tag{1.4.8}$$

Ин синфҳо маҷмӯи пурраи $\mathcal{G}^{\pm}$ - ро ташкил медиҳанд, яъне $\mathcal{G}_6^1$ ва $\mathcal{G}_6^2$ аз $\mathcal{G}^{\pm}$ фақат ва фақат ҳамон вақт ба ягон синфи $\nu_j\,(j=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3)$ дохил мешаванд, агар $\mathcal{G}_6^1\sim\mathcal{G}_6^2$ бошанд.

Леммаи 1.4.2. *Бигузор матритаи $\mathcal{G}_6(t)\in\mathcal{G}^+$ бошад. Онгоҳ $\mathcal{G}^+$ фақат ва фақат ҳамон вақт ба ягон синфи ν_j $(j=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3)$*

дохил мешаванд, агар нобаробарии

$$\Delta_j(z) > M(z) + \Big(M^2(z) + \sum_{\substack{n=-3\\ n\neq j}}^{3} |\mu_{j,n}(z)|^2 - |\lambda_{j,n}(z)|^2\Big)^{1/2} \quad \forall z \in \overline{D}, \quad (1.4.9)$$

шавад, ки дар ин ҷо

$$\lambda_{j,n} = \overline{a}_j a_n - b_j \overline{b}_n, \;\; \mu_{j,n} = \overline{a}_j b_n - b_j \overline{a}_n.$$

мебошад.

1. Бигузор $\mathcal{G}_6(t)$ из $\mathcal{G}^+$ ба синфи гомотопии ν_0 таалуқ бошад. Онгоҳ мувофиқи леммаи 4.2

$$\Delta_0(z) = |a_0(z)|^2 - |b_0(z)|^2 > 0 \text{ для всех } z \in \overline{D}.$$

мешавад.Аз муодилаи (1.39) ифодаи $\frac{\partial^6\overline{\omega}}{\partial\overline{z}^3\partial z^3}$ - ро хориҷ намуда, мо ба чунини навишти система дилхоҳи синфи гомотопии ν_0

$$\Delta_0(z)\frac{\partial^6\omega}{\partial\overline{z}^3\partial z^3} + \lambda_{0,1}(z)\frac{\partial^6\omega}{\partial\overline{z}^4\partial z^2} + \lambda_{0,2}(z)\frac{\partial^6\omega}{\partial\overline{z}^5\partial z} + \lambda_{0,3}(z)\frac{\partial^6\omega}{\partial\overline{z}^6} +$$
$$+ \lambda_{0,-1}(z)\frac{\partial^6\omega}{\partial z^4\partial\overline{z}^2} + \lambda_{0,-2}(z)\frac{\partial^6\omega}{\partial z^5\partial\overline{z}} + \lambda_{0,-3}(z)\frac{\partial^6\omega}{\partial z^6} +$$
$$+ \mu_{0,1}(z)\Big(\overline{\frac{\partial^6\omega}{\partial\overline{z}^4\partial z^2}}\Big) + \mu_{0,2}(z)\Big(\overline{\frac{\partial^6\omega}{\partial\overline{z}^5\partial z}}\Big) + \mu_{0,3}(z)\Big(\overline{\frac{\partial^6\omega}{\partial\overline{z}^6}}\Big) +$$
$$+ \mu_{0,-1}(z)\Big(\overline{\frac{\partial^6\omega}{\partial z^4\partial\overline{z}^2}}\Big) + \mu_{0,-2}(z)\Big(\overline{\frac{\partial^6\omega}{\partial z^5\partial\overline{z}}}\Big) + \mu_{0,-3}(z)\Big(\overline{\frac{\partial^6\omega}{\partial z^6}}\Big) + T(\omega) = g(z), \quad (1.4.10)$$

меоем, ки $T(\omega)$ – оператори дифференсиалии тартиби поёнӣ мебошад.

Маълум аст [1] – [5] , ки функсияи ихтиёрии комплексии фазои $W_p^6(D) \cap C^2(\overline{D})$, $(p > 2)$, ки дар сарҳади соҳаи Γ масъалаи якҷинсаи сарҳадии (1.4.4) - ро қаноат мекунад, ба намуди

$$\omega(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_D G_6(z,\zeta) f(\zeta) ds_\zeta \quad (1.4.11)$$

и тасвири интегралӣ дорад, ки функсияи ихтиёрии $f(z) \in L_p(D)$, $p > 1$ мебошад ва $G_6(z,\zeta)$ функсияи Грини муодилаи $\Delta^3\omega \equiv \frac{\partial^6\omega}{\partial z^3\partial\overline{z}^3} = 0$ дар соҳаи маҳдуди $D = \{z : |z| < 1\}$:

$$G_6(z,\zeta) = \frac{|\zeta - z|^4}{4\pi}|\ln\left|\frac{1 - z\overline{\zeta}}{\zeta - z}\right|^2 - |\zeta - z|^2(1-|z|^2)(1-|\zeta|^2) + \frac{1}{2}(1-|z|^2)^2(1-|\zeta|^2)^2.$$

аст.

Ҳосилаҳои функсияи $\omega(z)$ - ро ҳисоб мекунем. Бе душворӣ дидан мумкин аст, ки ҳамаи ҳосилаҳои тартиби то 5 -и функсияи $\omega(z)$ нисбати z ва $\overline{z}$ операторҳои интегралии дар фазоҳҳои $L_p(D)\,(1 < p < \infty)$ пурра бефосила медиҳанд, чунки ядроҳои онҳо функсияҳои бефосила ва ё функсияҳои махсусияташон суст мебошанд. Чунин ишораҳои зеринродохил мекунем:

$$\sigma_0(z,\overline{\zeta}) = \frac{1}{4\pi}|\zeta - z|^4 \ln|\zeta - z|^2,$$

$$\sigma_1(z,\overline{\zeta}) = -\frac{1}{4\pi}|\zeta - z|^4 \ln|1 - z\overline{\zeta}|^2 - \sum_{k=1}^{2}\frac{(-1)^k}{k\pi}|\zeta - z|^{2(2-k)}[(1-|z|^2)(1-|\zeta|^2)]^k,$$

$$(Uf)(z) = \iint\limits_D \sigma_0(z,\overline{\zeta})f(\zeta)ds_\zeta, \quad (Vf)(z) = \iint\limits_D \sigma_1(z,\overline{\zeta})f(\zeta)ds_\zeta. \tag{1.4.12}$$

Ҳисобкуниҳои бевосита нишон медиҳанд, ки

$$\frac{\partial^3 U}{\partial z^3} = -\frac{1}{2\pi}\iint\limits_D \frac{(\overline{\zeta} - \overline{z})^2}{\zeta - z}f(\zeta)ds_\zeta \tag{1.4.13}$$

мебошад.

Баробарии (1.4.12) - ро $3+n$ маротиба нисбати z ва $3-n$ маротиба нисбати $\overline{z}$ ҳосила гирифта, ҳосил мекунем:

$$\frac{\partial^6 U}{\partial z^{3+n}\partial\overline{z}^{3-n}} = \begin{cases} \frac{(-1)^n n}{\pi}\iint\limits_D \frac{(\overline{\zeta}-\overline{z})^{n-1}}{(\zeta-z)^{n+1}}f(\zeta)ds_\zeta \equiv (S_{-n}f)(z), & \text{если } n = 1,\ 2,\ 3\ ; \\ f(z), & \text{если } n = 0. \end{cases} \tag{1.4.14}$$

Акнун ба оператори $(Vf)(z)$ мегузарем. Аз функсияи V нисбати z $3+n$ маротиба ва нисбати $\overline{z}$ $3-n$ маротиба ҳосила мегирем ва ҳосил мекунем:

$$\frac{\partial^6 V}{\partial z^{3+n}\partial \overline{z}^{3-n}} = \iint\limits_D K_{\nu_0,n}(z,\overline{\zeta})f(\zeta)ds_\zeta,\ n=1,\ 2,\ 3,$$

ки ядрои $K_{\nu_0,n}(z,\overline{\zeta})$ намуди зерин

$$K_{\nu_0,n}(z,\overline{\zeta}) = \frac{(-1)^{3-n}}{2\pi\cdot(n-1)!}\sum_{k=0}^{2} C_{3+n}^k(-1)^k 2\dots(3-k)\cdot(2+n-k)!\times$$

$$\times\frac{(\zeta-z)^{2-k}(\overline{\zeta}-\overline{z})^{n-1}\overline{\zeta}^{3+n-k}}{(1-z\overline{\zeta})^{3+n-k}}, \qquad (1.4.15)$$

дорад ва агар нуқтаи ζ ба сарҳади доираи воҳидии Γ афтад, яъне $|\zeta|=1$ шавад, пас

$$\frac{(\zeta-z)^{2-k}(\overline{\zeta}-\overline{z})^{n-1}\overline{\zeta}^{3+n-k}}{(1-z\overline{\zeta})^{3+n-k}} = \frac{(\overline{\zeta}-\overline{z})^{n-1}}{(\zeta-z)^{n+1}}$$

мешавад.

Қиматҳои ҳосилаҳоро аз формулаҳои (1.4.12)–(1.4.14) ба системаи муодилаҳои аввалаи (1.4.2) гузошта, барои муайян намудани функсияи $f(z)$ муодилаи интегралии сингулярии дученакаи зерин ҳосил мекунем: $(A_0f)(z)\equiv$

$$\equiv\Delta_0(z)f(z)+\sum_{n=-3,n\neq0}^{3}\lambda_{0,n}(z)(S_{-n}^*f)(z)+\mu_{0,n}(z)\overline{(S_{-n}^*f)}(z)+(Tf)(z)=g(z), \qquad (1.4.16)$$

ки

$$(S_n^*f)(z) = \iint\limits_D K_{3+n,3-n}(z,\zeta)f(\zeta)ds_\zeta,$$

$$K_{3+n,3-n}(z,\zeta) = \frac{(-1)^n n}{\pi}\left(\frac{(\overline{\zeta}-\overline{z})^{n-1}}{(\zeta-z)^{n+1}} + K_{\nu_0,n}(z,\overline{\zeta})\right),\ n=1,\ 2,\ 3$$

мебошанд ва T оператори дар фазои $L^p(D),\ p>2$ пурра бефосила.

Дар ин ҷо бояд қайд намуд, ки оператори интегралӣ бо ядрои $K_{3+n,3-n}(z,\overline{\zeta})$ дар нуқтаҳои дохилии соҳаи D махсусити тартиби 2 дорад ва аз ин сабаб ин интегралро ба маънои интеграл аз рӯи қимати асосии н Коши бояд фаҳмид. Оиди нуқтаҳои сарҳад бошад, хангоми $\zeta \in \Gamma$, $\overline{\zeta} = 1/\zeta$ будан дар ин ҳолат бевосита дидан мумкин аст, ки $K_{3+n,3-n}(z, \overline{\zeta}) = 0$ мешавад.

Муодилаи интегралии (1.4.16) таалуқи муодилаҳои интегралии сингулярии дученака бо характеристикаҳои ҷуфт аз рӯи соҳаи маҳдуд мебошад, ки дар корҳои [28]– [33] омӯхта шудаанд. Матритса–символи мувофиқи оператори A_0 намуди зерин дорад:

$$\mathcal{G}^0_{A_0}(z,t) = \begin{pmatrix} \Delta_0(z) + \sum_{n=-3}^{3} \lambda_{0,n}(z) t^n & \sum_{n=-3}^{3} \mu_{0,n}(z) \overline{t}^n \\ \sum_{n=-3}^{3} \overline{\mu_{0,n}(z)} t^n & \Delta_0(z) + \sum_{n=-3}^{3} \overline{\lambda_{0,n}(z) \overline{t}^n} \end{pmatrix},$$

$z \in \overline{D},\ |t| = 1.$

Мувофиқи натиҷаҳои [49] барои нётеровӣ будани оператори A^0 зарур ва кифоя аст, ки матритсаи $\mathcal{G}^0_{A_0}(\tau, t)$ $(\tau \in \Gamma,\ |t| = 1)$ индексҳои хусусии нулӣ дошта бошад. Аз рӯи символи $\mathcal{G}_{A_0}(z, t)$ матритсаи $\mathcal{G}_{A_0}(\tau, t)$ - ро месозем, ки $\tau \in \Gamma, |t| = 1$ мебошанд. Нишон дода мешавад, ки барои $\mathcal{G}_{A_0}(\tau, t)$ пешниҳоди зерин ҷой дорад:

$$\mathcal{G}_{A_0}(\tau, t) = R_0^-(\tau, t) R_0^+(\tau, t),$$

ки $R_0^+(\tau, t)$ нисбати t ба дохили доираи воҳидии $|t| = 1$ аналитикӣ густаришёбанда ва $R_0^-(\tau, t)$- ба беруни доираи воҳидӣ, дар айни ҳол муайянкунандаҳои онҳо ба нул баробар нестанд, яъне матритсаи $\mathcal{G}_{A_0}(\tau, t)$ индексҳои хусусии нулӣ доранд. Онгоҳ аз [40] мебарояд, ки оператори A_0 дар $L^p(D)$ $(1 < p < \infty)$ нётеровӣ мебошад.

Акнун индекси оператори A_0 - ро ҳисоб мекунем. Азбаски полиноми $P(z, t)$ дар дохили доираи воҳидии $|t| < 1$ ҳал надорад, пас онро ба таври зайл пешниҳод намудан мумкин аст:

$$P(z, t) = \lambda_{0,n}(z) \prod_{j=-3}^{3} (t - q_j^-(z)),$$

ки $|q_j^-(z)|>1$ аст. Инро ба назар гирифта, силсилаи матриса-функцияҳои

$$\mathcal{G}_{A_0^\rho}(z,t,\rho)=\begin{pmatrix}\mathcal{P}(z,t,\rho) & \mathcal{Q}(z,t,\rho)\\ \overline{\mathcal{Q}(z,t,\rho)} & \overline{\mathcal{P}(z,t,\rho)}\end{pmatrix},$$

- ро месозем, ки аз параметри $\rho: 0\le\rho\le 1$ бефосила вобаста буда

$$\mathcal{P}(z,t,\rho)=\lambda_{0,n}(z)\prod_{j=-3}^{3}(\rho t-q_\nu^-(z))$$

$$\mathcal{Q}(z,t,\rho)\rho\varphi(\rho)Q(z,t),\ 0\le\rho\le 1,$$

$$\varphi(x)=\begin{cases}\frac{\varepsilon}{N}, & \text{когда } 0\le\rho\le\rho_0<1,\\ \frac{1}{N}\Big(\varepsilon+\frac{N-\varepsilon}{1-\tau_0}\Big)(\rho-\tau_0), & \text{когда } \rho_0\le\rho\le 1,\end{cases}$$

τ_0 – ададի ҳақиқии, ба 1 наздик,

$$N=\sup|P(z,t,\tau)|,\ \varepsilon=\inf|Q(z,t,\tau)|,$$

ки супремум (инфимум) аз рӯи ҳамаи $z\in\overline{D},\ |t|=1,\ 0\le\rho\le 1$ гирифта мешавад. Аз матритсаҳои $\mathcal{G}_{A_0^\rho}(z,t,\rho)$ силсилаи оперторҳои интегралии A_ρ^o, $0\le\rho\le 1$ - ро месозем, ки намуди вида (1.4.16) доранд. Бевосита дидан мумкин аст, ки

$$|\mathcal{P}(z,t,\rho)|>|\mathcal{Q}(z,t,\rho)|,$$

аст ва $Ind_{|t|=1}F(z,t,\rho)=0,\ \forall z\in\overline{D},|t|=1,0\le\rho\le 1,$ яъне операторҳои A_ρ^o, нётеровӣ мебошанд. Азбаски $A_1^0=A_0$ ва $A_0^0=-\Delta_0(z)q_1^-(z)\cdot q_2^-(z)\cdot q_3^-(z)I$ мебошанд, пас индекси оператори A_0 ба нул баробар аст.

Теоремаи 1.4.1. *Бигузор матритсаи $\mathcal{G}_z(t)$ из $\mathcal{G}^+$ ба синфи гомотопикии ν_0 мансуб бошад. Барои он, ки масъалаи (1.4.4) барои системаи эллиптическии (1.4.3) дар синфи $W_p^6(D)\bigcap C^2(\overline{D})$ $(2<p<\infty)$ фредголмовӣ бошад, зарур ва кифоя аст, ки шарти зерин*

$$\Delta_0(z)>M(z)+\Big(M^2(z)+\sum_{\substack{n=-3\\ n\neq 0}}^{3}|\mu_{0,n}(z)|^2-|\lambda_{0,n}(z)|^2\Big)^{1/2}\quad\forall z\in\overline{D},\ (1.4.17)$$

иҷро шавад.

2. Бигузор акнун $\mathcal{G}_z(t)$ аз $\mathcal{G}^+$ ба синфи гомотопии ν_j $(j = \pm1,\ \pm2,\ \pm3)$ мансуб бошад. Онгоҳ, му вофиқи леммаи 1.4.2

$$\Delta_j(z) = |a_j(z)|^2 - |b_j(z)|^2 > 0 \text{ барои ҳамаи } z \in \overline{D}$$

мешавад. Аз муодилаи (1.4.2) ифодаи $\frac{\partial^6\overline{\omega}}{\partial z^{3+j}\partial\overline{z}^{3-j}}$ - ро хориҷ намуда, мо ба чунин навишти системаи ихтиёрӣ аз синфи гомотопии ν_j $(j = 1,\ 2,\ 3)$ меоем:

$$\Delta_j(z)\frac{\partial^6\omega}{\partial\overline{z}^{3+j}\partial z^{3-j}}+\sum_{\substack{n=-3\\ n\neq j}}^{3}\lambda_{j,n}(z)\frac{\partial^6\omega}{\partial\overline{z}^{3+n}\partial z^{3-n}}+\mu_{j,n}(z)\frac{\partial^6\overline{\omega}}{\partial z^{3+n}\partial\overline{z}^{3-n}}+T(\omega) = g(z). \tag{1.4.18}$$

Қиматҳои ҳосилаҳоро аз формулаҳои (1.4.12)–(1.4.14) ба муодилаҳои дифференсиалии (1.4.18) гузошта, барои муайян намудани функсияи $f(z)$ муодилаи интегралии сингулярии зерин ҳосил мекунем:

$$(A_jf)(z) \equiv$$

$$\equiv \Delta_j(z)(S_j^*f)(z)+\sum_{\substack{n=-3\\ n\neq j}}^{3}\lambda_{j,n}(z)(S_{-n}^*f)(z)+\mu_{j,n}(z)\overline{(S_{-n}^*f)}(z)+(Tf)(z) = g(z), \tag{1.4.19}$$

ки ҳангоми $n=0$ будан ифодаи $(S_0^*f)(z)$ маънои $f(z)$ - ро дорад.

Акнун мувофиқи символи $\mathcal{G}_{A_\nu}(z,t)$ матритса-функсияи сарҳадии

$$\mathcal{G}_{A_\nu}(\tau,t) = \begin{pmatrix} \mathcal{P}(\tau,t) & \mathcal{Q}(\tau,t) \\ \overline{\mathcal{Q}(\tau,t)} & \overline{\mathcal{P}(\tau,t)} \end{pmatrix},$$

-ро месозем, ки

$$\mathcal{P}(\tau,t) = \Delta_j(\tau)t^j + \sum_{n=-3,n\neq j}^{3}\lambda_{j,n}(\tau)t^n,$$

$$\mathcal{Q}(\tau,t) = \sum_{n=-3,n\neq j}^{3}\mu_{j,n}(\tau)\overline{t}^n,\ \tau\in\Gamma,\ |t| = 1$$

мебошанд.

Нишон дода мешавад, ки матритсаи $\mathcal{G}_{A_j}(\tau,t)$ ҳангоми иҷро шудани шарти

$$\mu_{j,0}(\tau)=\overline{a_j(\tau)}b_0(\tau)-b_j(\tau)\overline{a_0(\tau)}\neq 0\quad\forall\tau\in\Gamma$$

бо индексҳои хусусии нулӣ факторизатсия мешаванд

$$\mathcal{G}_{A_j}(\tau,t)=R_j^-(\tau,t)R_j^+(\tau,t),$$

ки матритсаи $R_j^+(\tau,t)$ ба дохили доираи воҳидии $|t|\leq 1$ аналитикӣ густариш меёбад ва нулҳои муайянкунандаи он дар беруни доираи воҳидӣ мехобанд. Матритсаи $R_j^-(\tau,t)$ дар беруни доираи воҳидии $|t|\leq 1$ аналитикӣ густариш меёбад ва нулҳои муайянкунандаи он дар дохили доираи воҳидӣ мехобанд ва инчунин шарти $\mu_{j,0}(\tau)\neq 0,\ \tau\in\Gamma$ барои дар фазои $L^p_{\beta-2/p}(D)$ нётеровӣ булани оператори A_j зарур ва кифоя мебошад.

Акнун ба ҳисоб намудани индекси оператори A_j мегузарем. Оператори A ба синфи ν_j мансуб мебошад, ва ҳамзамон шарти (10) иҷро шуда $Ind_{|t|=1}F(z,t)=j\neq 0,\ \ (j=1,2,3)$ мешавад. Онгоҳ бисёраъзогии $P(z,t)$ расо j - то нулҳои $q_k^+(z)\ \ (k=1,\ldots,j)$ дар дохили доираи $|t|\leq 1$ дорад ва $3-j$ нулҳои $q_k^-(z)$ $(k=j+1,\ldots,3)$ дар беруни $|t|\leq 1$. Бинобар ин $F(z,t)$- ро ба намуди

$$\mathcal{P}(z,t)=\lambda_{j,n}(z)\prod_{k=-3}^{j}(t-q_k^+(z))\prod_{k=j+1}^{3}(t-q_k^-(z)).$$

пешниҳод намудан мкмкин аст. Инро ба назар гирифта силсилаи матритсафунксиҳои

$$\mathcal{G}_{A_\nu^\tau}(z,t,\rho)=\begin{pmatrix}\dfrac{\mathcal{P}(z,t,\rho)}{\mathcal{Q}(z,t,\rho)} & \dfrac{\mathcal{Q}(z,t,\rho)}{\mathcal{P}(z,t,\rho)}\end{pmatrix},$$

- ро месозем, ки аз параметр $\rho:0\leq\tau\leq 1$ бефосила вобаста аст, ки

$$\mathcal{P}(z,t,\rho)=\lambda_{j,n}(z)\prod_{k=-3}^{j}(t-\tau q_k^+(z))\prod_{k=j+1}^{3}(\tau t-q_k^-(z)),$$

$$\mathcal{Q}(z,t,\rho)=\mu_{j,0}(z)+\tau\varphi(\rho)\Big(\sum_{n=-3,n\neq 0,j}^{3}\mu_{j,n}(z)\overline{t}^n\Big),\ z\in\overline{D},$$

ва $\varphi(\tau)$ ба мисли ҳолати пештара муайян мегардад.

Акнун аз рӯи матрисаҳои $\mathcal{G}_{A_j}(z,t,\rho)$ силсилаи операторҳои интегралии A_j^τ, $0 \le \tau \le 1$ - и намуди (1.4.16) месозем ва қайд мекунем, ки онҳо нётеровӣ мебошанд, чунки

$$|\mathcal{P}(z,t,\rho)| > |\mathcal{Q}(z,t,\rho)|, \ \forall z \in \overline{D}, \ 0 \le \rho \le 1$$

$\mu_{j,0}(z) \ne 0, \ z \in \Gamma$ мебошанд.

Азбаски $A_j^1 = A_j$ ва

$$A_j^0 = \lambda_{j,n}(z) q_{j+1}^+(z) \dots q_3^+(z) S_{-j} + \mu_{j,0}(z) K,$$

мебошанд, пас ба оператори A_j^0 натиҷаҳои [30] - ро татбиқ намуда ҳосил мекунем ки индекси оператори A ба $\varkappa = -2jInd_\Gamma \mu_{j,0}(\tau)$ баробар мебошад.

Теоремаи 1.4.2. *Бигузор матрисаи $\mathcal{G}_z(t)$ аз $\mathcal{G}^+$ ба синфи гомотопии ν_j $(j = \pm1, \pm2, \pm3)$ мансуб бошад. Барои он, ки масъалаи (1.4.4) барои системаи эллиптикии (1.4.2) дар синфи $W_p^6(D) \bigcap C^2(\overline{D})$ $(2 < p < \infty)$ нётеровӣ, бошад, зарур ва кифоя аст, ки шарти*

$$\Delta_j(z) > M(z) + \Big(M^2(z) + \sum_{\substack{n=-3 \\ n \ne j}}^{3} |\mu_{j,n}(z)|^2 - |\lambda_{j,n}(z)|^2\Big)^{1/2} \tag{1.4.20}$$

$$\text{и} \quad \mu_{j,n}(\tau) \ne 0 \quad \text{для} \quad \forall z \in \overline{D}, \quad \tau \in \Gamma,$$

иҷро гардад, ки

$$\lambda_{j,n}(z) = \overline{a_j(z)} a_n(z) - b_j(z)\overline{b_n(z)}, \ \mu_{j,n}(z) = \overline{a_j(z)} b_n(z) - b_j(z)\overline{a_n(z)}$$

мебошад.

Ҳамзамон, агар шарти (1.4.20) иҷро гардад, индекси масъала ба

$$\varkappa = -2jInd_\Gamma \mu_{j,0}(\tau),$$

баробар мешавад.

1.4.3. Масъалаи канории дуюм

Масъалаи Нейман. *Функсияи* $\omega(z)$ *азз фазои* $W_p^6(D)\cap C^2(\overline{D})$ *ёфта шавад, ки дар дохили соҳаи* D *муодилаи (1.4,2) ва дар сарҳади он* Γ *шартҳои канории*

$$\left.\frac{\partial^j\omega}{\partial n^j}\right|_\Gamma = 0,\ j=1,\ 2,\ 3, \tag{1.4.21}$$

- ро қаноат кунанд, ки $\frac{\partial\omega}{\partial n}$ *- ҳосилаи функсияи* $\omega(z)$ *- ро аз рӯи равиши нормали беруна ба нуқтаҳои контури* Γ *мебошад.*

Акнун ба ҷои тасвири интегралии (1.4.11) мо тасвири интегралии [2], [48] функцияҳоеро, ки се шартҳои (1.4.21) - ро қанот мекунанд ба воситаи формулаи

$$\omega(z) = \iint\limits_D N_3(z,\overline{\zeta})f(\zeta)ds_\zeta \tag{1.4.22}$$

истифода мекунем, ки

$$N_3(z,\overline{\zeta}) = \frac{1}{2\pi}|\zeta - z|^4 \ln\Big|(\zeta - z)(1 - z\overline{\zeta})\Big|^2 + g_3(z,\overline{\zeta})$$

функсияи Неймани муодилаи $\Delta^3\omega \equiv \frac{\partial^6\omega}{\partial z^3\partial\overline{z}^3} = 0$ дар доираи воҳидии $D = \{z : |z| < 1\}$ мебошад, ва айни ҳол ин функсия аз рӯи формулаи рекурентии

$$\frac{\partial^2 N_3(z,\overline{\zeta})}{\partial z\partial\overline{z}} = N_2(z,\overline{\zeta}).$$

муайян мегардад. Ба мисли масъалаи Дирихле, масъалаи Неймани (1.4.21), (1.4.2) ба таври эквивалентӣ ба муодилаҳои интегралии сингулярии намуди (1.4.16) оварда мешавад.

Боби 2

Масъалаҳои Дирихле ва Нейман барои барои баъзе синфҳои системаи муодилаҳои дифференсиалии эллиптикии тартиби шаш бо коэффисиентҳои канишнок дар ҳамворӣ

2.1. Оиди ҳалли масъалаи Дирихле барои як системаи эллиптикии тартиби шаш бо коэффисиенти канишнок

Дар солҳои охир Г. Ҷангибеков (ниг. мас. [28]– [37]) шартҳои зарурӣ ва кифоягии эффективноки нётеровӣ будан ва формулаҳои ҳисоб намудани як қатор синфҳои операторҳои интегралии сингулярии дученакаро аз рӯи соҳаи охирнок ҳосил намуд. Истифода намудани ин натиҷаҳо аз он ҷумла имконият доданд, ки дар корҳои Г. Ҷангибеков [32]– [35], Г. Ҷангибеков ва Х.Г. Хуҷаназарова [36], назарияи ҳалшавандагии масъалаҳои Дирихле ва Неймана барои системаи муодилаҳои эллиптикии тартибҳои ду ва чори (1), таҳқиқ шуда, формулаҳои ҳисоб намудани индекси ин масъалаҳо ба воситаи коэффисиентҳои система ҳосил карда шаванд.

Дар ин боб ҳалшавандагии масъалаҳои Дирихле ва Нейман барои системаҳои элллиптикии ду муодилаҳои тартиби шаш бо коэффитсиентҳои канишнок дар ҳамворӣ мавриди таҳқиқ қарор гирифта шуда омӯзиши онҳоро тариқи гузаштан ба муодилаҳои интегралии сингулярӣ аз рӯи соҳаи маҳдуд ба итмом расонда шудааст.

2.1.1. Гузориши масъала

Бигузор $D = \{z : |z| < 1\}$ - доираи воҳидии ҳамвории комплексии $z = x + iy$ бошад. Системаи муодилаҳои дифференсиалии тартиби шашизеринро дида мебароем:

$$
\begin{aligned}
& a(z)\frac{\partial^6\omega}{\partial\overline{z}^3\partial z^3}+(\overline{z}/|z|)^n b(z)\frac{\partial^6\overline{\omega}}{\partial\overline{z}^6}+\\
&+\sum_{k+j=0}^{5}\left[a_{k,j}(z)\frac{\partial^{k+j}\omega}{\partial\overline{z}^k\partial z^j}+b_{k,j}(z)\frac{\partial^{k+j}\overline{\omega}}{\partial\overline{z}^k\partial z^j}\right]=g(z),
\end{aligned}
\tag{2.1.1}
$$

ки $\omega(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, n – адади бутун, функсияҳои $a(z), b(z)$, $a_{k,j}(z), b_{k,j}(z)$ $(0 \le k+j \le 5)$ дар соҳаи $\overline{D}$ бефосила ва $g(z) \in L^p(D)$, $2 < p < \infty$,

$$
\frac{\partial}{\partial\overline{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right).
$$

Аз рӯи қисми асосии системаи (2.1) построим матритса-функсияи

$$
\mathcal{G}_z(\sigma)=\begin{pmatrix} a(z) & (\overline{z}/|z|)^n b(z)(\overline{\sigma}/\sigma)^6\\ (z/|z|)^n\overline{b(z)}(\sigma/\overline{\sigma})^6 & \overline{a(z)}\end{pmatrix}.
$$

месозем.

Эллиптикӣ будани системаи (2.1.1) маънои онро дорад, ки, барои нуқтаи ихтиёрии $z \in \overline{D}$ ва дилхоҳ адади комплексии ғайринулии $\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2$ бояд нобаробарии $\det\mathcal{G}_z(\sigma) \neq 0$ иҷро гардад. Айён аст, ки

$$
\det\mathcal{G}_z(\sigma)\equiv|a(z)|^2-|b(z)|^2\neq 0
$$

барои ҳамаи $z \in \overline{D}$ мебошад.

Маҷмӯи ҳамаи матритсаҳои полиномиалии намуди $\mathcal{G}_z(\sigma)$ дошта, ки шарти $\det\mathcal{G}_z(\sigma) = |a(z)|^2 - |b(z)|^2 > 0\,(< 0)$ - ро барои ҳамаи $z \in \overline{D}$ қаноат мекунанд, бо $\mathcal{G}^+\,(\mathcal{G}^-)$ ишора мекунем.

Ду матритсаи $\mathcal{G}_z^1$, $\mathcal{G}_z^2$ аз синфи $\mathcal{G}^+$ - ро гомотопӣ меномем, яъне $\mathcal{G}_z^1 \sim \mathcal{G}_z^2$, агар чунин силсилаи матритсаҳои полиномиалӣ $\mathcal{G}_z^+(\tau)$ аз $\mathcal{G}^+$ ёфт шаванд, ки онҳо аз параметри ҳақиқии $\tau : 0 \le \tau \le 1$ бефосила вобаст буда

$$
\mathcal{G}^+(0)\equiv\mathcal{G}_z^1,\quad \mathcal{G}^+(1)\equiv\mathcal{G}_z^2
$$

бошанд.

Ду системаҳои эллиптикӣ $\mathcal{G}^{\infty}{}_z(\sigma), \mathcal{G}^{\in}{}_z(\sigma) \in \mathcal{G}^+$ аз маҷмӯи ҳамаи системаҳои эллиптикии (2.1.1) бо қисмҳои асосии якхела фақат ва фақат ҳамон вақт бо роҳи бефосила дар $\mathcal{G}^+$ пайваст намудан мумкин аст, ки агар матритса-полиномҳои характеристикии ин системаҳо гомотопӣ бошанд. Ҳамин тариқ, муносибатҳои гомотопӣ $\mathcal{G}^+$ - ро ба ду синфҳои гомотопии сарбаста (компонентҳо) ҷудо мекунад:

синфи ε^+ : яъне ҳангоме, ки нобаробарии $|a(z)| > |b(z)|$ барои $\forall$ $z \in \overline{D}$ иҷро шавад;

синфи ε^- : яъне ҳангоме, ки нобаробарии $|a(z)| < |b(z)|$ барои $\forall$ $z \in \overline{D}$ иҷро шавад;

Ин синфҳо маҷмӯи пурраи $\mathcal{G}^{\pm}$ - ро ташкил медиҳанд, яъне $\mathcal{G}^1_z$ ва $\mathcal{G}^2_z$ аз F^+ ба синфи $\varepsilon^{\pm}$ фақат ва фақат ҳамон вақт ки $\mathcal{G}z^1 \sim \mathcal{G}^2$ бошанд

Масъалаи Дирихле. *Функсияи $\omega(z)$ аз синфи $W^6_p(D) \cap C^2(\overline{D})$, ки дар дохили D муодилаи (2.1.1) ва дар сарҳади он Γ се шартҳои*

$$\omega(z)\Big|_{\Gamma} = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial n}\bigg|_{\Gamma} = 0, \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial n^2}\bigg|_{\Gamma} = 0 \tag{2.1.2}$$

- ро қаноат кунанд, ки $\frac{\partial \omega}{\partial n}$ - ҳосилаи функсия аз рӯи равиши нормали беруна ба нуқтаҳои контури Γ мебошад.

Қайд мекунем, ки дар боби 1 системаи эллиптикии (2.1.1) дида бароамада шуд, ки дар он $n = 0$ буд, яъне ҳангоме, ки коэффициентҳои система дар соҳаи D функсияҳои бефосилаанд. Ҳангоми $n \neq 0$ будан коэффитсиенти назди ҳосилаи $\frac{\partial^6 \overline{\omega}}{\partial \bar{z}^6}$ дар нуқтаи $z = 0$ каниши намуди $(z/|z|)^n$ (n – (адади бутун) дорад, яъне аз рӯи нурҳои гуногуни аз ибтидои координата бароамада ҳудудҳои гуногун доранд.

2.1.2. Муодилаи дифференсиалии моделӣ

Дар ин пункт мо муодилаи дифференциалии моделии зеринро бо коэффитсиенти канишноки зеринро дида мебароем:

$$a(0)\frac{\partial^6 \omega}{\partial \bar{z}^3 \partial z^3} + (z/|z|)^n b(0)\frac{\partial^6 \overline{\omega}}{\partial \bar{z}^6} = q(z). \tag{2.1.3}$$

Муайян аст [1] – [3], ки функсияи ихтиёрии комплексии синфи $W_p^6(D) \cap C^2(\overline{D})$ - ро, ки дар сарҳади соҳа Γ шартҳои якҷинсаи (2.1.2) - ро қаноат мекунад ба таври интегралӣ тасвир намудан мумкин аст

$$\omega(z) = -\frac{1}{\pi} \iint\limits_D G_6(z,\zeta) f(\zeta) ds_\zeta, \tag{2.1.4}$$

дар куҷо $f(z)$ - комплексии ихтиёрии фазои $L^p(D)$, $p > 2$ ва $G_6(z,\zeta)$ функсияи Грини муодилаи $\Delta^3 w \equiv \frac{\partial^6 \omega}{\partial z^3 \partial \overline{z}^3} = 0$ доираи воҳидии $D = \{z : |z| < 1\}$:

$$G_6(z,\zeta) = |\zeta - z|^4 \ln \left| \frac{1 - z\overline{\zeta}}{\zeta - z} \right|^2 - |\zeta - z|^2 (1 - |z|^2)(1 - |\zeta|^2) + \frac{1}{2}(1 - |z|^2)^2 (1 - |\zeta|^2)^2.$$

мебошанд.

Ҳисобкуниҳои бевосита нишон медиҳанд, $\frac{\partial^6 \omega}{\partial z^6}$ аз рӯи формулаи

$$\frac{\partial^6 \omega}{\partial z^6} = \iint\limits_D K(z,\overline{\zeta}) f(\zeta) ds_\zeta(z), \tag{2.1.5}$$

муайян мегардад, ки

$$\begin{aligned} K(z,\overline{\zeta}) &= -\frac{3}{\pi} \frac{(\overline{\zeta} - \overline{z})^2}{(\zeta - z)^4} + K_1(z,\overline{\zeta}), \\ K_1(z,\overline{\zeta}) &= \frac{3(\overline{\zeta} - \overline{z})^2 \overline{\zeta}^4}{\pi (1 - z\overline{\zeta})^4} \end{aligned} \tag{2.1.6}$$

мебошанд.

Айнан ҳамин тавр меёбем, ки

$$\frac{\partial^6 \omega}{\partial z^3 \partial \overline{z}^3} = f(z) \tag{2.1.7}$$

аст.

Дар ин ҷо бояд қайд намуд, ки оператори интеграли бо ядрои $K(z,\overline{\zeta})$ дар нуқтаҳои дохилии соҳаи D махсусияти тартиби 2 дорад, бинобар ин интегралро ба маънои қимати асосии Коши фаҳмидан даркор аст. Ҳангоме, ки нуқтаи z дар сарҳади соҳа мехобад, яъне $\zeta \in \Gamma$, $\overline{\zeta} = 1/\zeta$, пас бе

душворӣ дидан мумкин аст, ки дар ин
холат $K(z, \overline{\zeta}) = 0$ мебошад.

Қиматҳои ҳосилаҳоро аз формулаҳои (2.1.5)–(2.1.7) ба муодилаи дифференсиалии моделии (2.1.2) гузошта, барои муайян намудани функсияи $f(z)$ чунин муодилаи интегралии сингулярии

$$a(0)f(z) + (z/|z|)^n b(0)(S_3\overline{f})(z) + (Tf)(z) = g(z), \tag{2.1.8}$$

ҳосил мекунем, ки

$$(S_3\overline{f})(z) = -\frac{3}{\pi}\iint\limits_D \frac{(\overline{\zeta} - \overline{z})^2}{(\zeta - z)^4}\overline{f(\zeta)}ds_\zeta$$

оператори интеграли сингулярии дученака бо характеристикаи ҷуфт ва T – оператори пурра бефосила мебошанд.

Муодилаи интегралии (2.1.8) таалуқи муодилаҳои интегралии сингулярии дученака бо характеристикаиҳои ҷуфт дар соҳаи маҳдуд мебошад, ки дар кори [30], дар фазои васеътари вазндори $L^p_{\beta-2/p}(D)$ $(1 < p < \infty, 0 < \beta < 2$ омӯхта шудаанд.

Дар ин ҷо бе маҳдуди умумият ҳисоб мекунем, ки $n = 2$ аст ва муодилаи моделии (2.1.8) - ро ҳангоми $a(0) \neq 0$ будан меомӯзем, чунки дар ҳолати акс муодилаи (2.1.8) ба таврЬ эквивалентӣ ба муодилаи бокоэффитсиенти бефосила оварда мешавад.

Ишораи $\lambda = \frac{b(0)}{a(0)}$ - ро ворид намуда, қисми характеристикии муодилаи (2.8) - ро (ҳангоми $n = 2$ будан) ба намуди

$$(A_0 f)(z) \equiv f(z) - \frac{3\lambda}{\pi}\frac{z}{\overline{z}}\iint\limits_{|z|<1} \frac{(\overline{\zeta} - \overline{z})^2}{(\zeta - z)^4}\overline{f(\zeta)}ds_\zeta = q(z), \ |z| < 1, \tag{2.1.9}$$

меорем, ки $q(z) = \frac{g(z)}{a(0)}$ аст.

Гузоришҳои $\zeta = \sigma z,\ \zeta = \rho e^{i\theta},\ z = r^{i\varphi},\ \sigma = \tau e^{i\gamma}$ - ро истифода намуда, ҳосил мекунем:

$$f(z) = \frac{3\lambda}{\pi} e^{-4i\varphi} \iint\limits_{|z|<1} \frac{(\overline{\sigma}-1)^2}{(\sigma-1)^4} \overline{f(\sigma z)} ds_\sigma + q(z), \quad |z|<1. \qquad (2.1.10)$$

Мо ҳалли муодиларо ба намуди $f(z) = f(r,\varphi)$ қатори Фурйие нисбати кунҷи қутбии φ мекобем:

$$f(r,\varphi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k(r) e^{ik\varphi},\ f_k(r) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(r,\varphi) e^{-ik\varphi} d\varphi.$$

Айнан ҳамин тавр ишораҳо барои функсияи $q(z) = q(r,\varphi)$ истифода бурда мешавад.

Баробарии (2.1.10) - ро ба $e^{-ik\varphi}$ зарб зада интеграл мегирем ва ҳосил мекунем

$$f_k(r) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} e^{-i(k+4)\varphi} d\varphi \frac{3\lambda}{\pi} \iint\limits_{\tau r<1} \frac{(\overline{\sigma}-1)^2}{(\sigma-1)^4} \overline{f(\sigma z)} ds_\sigma + q_k(r) \quad |z|<1. \quad (2.1.11)$$

Ҳудуди интеграли сингулярии дохила нисбати φ мунтазам бефосила мавҷуд аст, бинобар ин тартиби интегралҳоро иваз намуда, хосил мекунем

$$f_k(r) = \frac{3\lambda}{\pi} \iint\limits_{\tau r<1} \frac{(\overline{\sigma}-1)^2}{(\sigma-1)^4} \frac{ds_\sigma}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \overline{f(\sigma z)} e^{-i(k+4)\varphi} d\varphi + q_k(r) \quad |z|<1 \qquad (2.1.12)$$

ва даври будани функсияи $f(z)$ нисбати φ, ҳосил мекунем

$$f_k(r) = \frac{3\lambda}{\pi} \iint\limits_{|\sigma|\le\frac{1}{|z|}} \Big(\frac{\sigma}{|\sigma|}\Big)^{k+4} \frac{(\overline{\sigma}-1)^2}{(\sigma-1)^4} \overline{f_{-k-4}(\tau r)} ds_\sigma + q_k(r),\ |z|<1. \qquad (2.1.13)$$

Акнун дар интеграли ҳосилшуда ивази тағйируобандаи баръакси $\sigma = \zeta/z$ - ро истифода намуда, ҳосил мекунем:

$$f_k(r) = \frac{3\lambda}{\pi} \Big(\frac{|z|}{z}\Big)^{k-2} \iint\limits_{|\sigma|\le\frac{1}{|z|}} \Big(\frac{\zeta}{|\zeta|}\Big)^{k+4} \frac{(\overline{\zeta}-\overline{z})^2}{(\zeta-z)^4} \overline{f_{-k-4}(\tau r)} ds_\sigma + q_k(r),\ |z|<1. \qquad (2.1.14)$$

Интеграли сингулярии дученакаи охиринро ба намуди ҳосилаи умумишуда нисбати z менаваисем

$$f_k(r) = \frac{\lambda}{\pi}\Big(\frac{|z|}{z}\Big)^{k-2}\frac{\partial}{\partial z}\iint\limits_{|\sigma|\le\frac{1}{|z|}}\Big(\frac{\zeta}{|\zeta|}\Big)^{k+4}\frac{(\overline{\zeta}-\overline{z})^2}{(\zeta-z)^3}\overline{f_{-k-4}(\tau r)}ds_\sigma + q_k(r), \quad |z|<1. \tag{2.1.15}$$

Дар интеграли махсусияти сустдоштаи таҳти дифференсиал ба системаи координатаи қутбӣ мегузарем ва тавасути назарияи тафриқҳо нисбати кунҷи қутби ҳисоб мекунем. Баъдан амали дифференсирониро иҷро намуда, муодилаи зеринро ҳосил мекунем:

$$\begin{aligned}
f_k(r) &= \frac{\lambda}{r}\int\limits_r^1 \Theta_1^k\Big(\frac{\rho}{r}\Big)\overline{f_{-k-4}(\rho)}d\rho - \lambda\overline{f_{-k-4}(r)}, \text{ при } -1\le k\le N_0,\\
f_k(r) &= \frac{\lambda}{r}\int\limits_0^r \Theta_2^k\Big(\frac{\rho}{r}\Big)\overline{f_{-k-4}(\rho)}d\rho - \lambda\overline{f_{-k-4}(r)}, \text{ при } -N_0-4\le k\le -2,
\end{aligned} \tag{2.1.16}$$

ки

$$\begin{aligned}
\Theta_1^k(\tau) &= 2\tau^{1-k}\sum_{j=0}^{2}\frac{(-1)^j}{j!(2-j)!}(k+3-j)(k+2-j)(k+1-j)\tau^{2(j-2)},\\
\Theta_2^k(\tau) &= 2\tau^{-k-3}\sum_{j=0}^{2}\frac{(-1)^j}{j!(m-1-j)!}(-k+1-j)(-k-j)(-k-1-j)\tau^{2(2-j)},
\end{aligned} \tag{2.1.17}$$

N_0 - ягон адади натуралӣ мебошад.

Дар муодилаи дуйуми (2.1.16) индекси k - ро ба $-k-4$ ивазмекунем ва ифодаи $f_k(r)$ - ро аз як сатри (2.1.16) ба сатри дигар гузошта барои коэффицитсиентҳои Фурйиеи $f_{-k-4}(r)$, $-2\le k\le N_0$, при $|\lambda|\ne 1$ муодилаи интегралии зерини ҳосил мекунем:

$$f_{-k-4}(r) = \frac{\nu}{(k+2)r}\Big[(k-1)\int\limits_r^1 \Big(\frac{r}{\rho}\Big)^{k-1} f_{-k-4}(\rho)d\rho -$$

$$-(k+5)\int\limits_0^r \Big(\frac{\rho}{r}\Big)^{k+5} f_{-k-4}(\rho)d\rho\Big] + q^1_{-k-4}(r) \text{ при } -1 \le k \le N_0, \tag{2.1.18}$$

$$f_{-2}(r) = \frac{2\nu}{r}\int\limits_0^r \Big(\frac{\rho}{r}\Big)^3 \Big(\ln\Big(\frac{r}{\rho}\Big)^3 - 1\Big) f_{-2}(\rho)d\rho + q^2_{-2}(r) \text{ при } k=-2, \tag{2.1.19}$$

ки $\nu = \frac{6|\lambda|^2}{1-|\lambda|^2}$ ва функсияи $q^j_k(r)(j=1,2)$ ба воситаи $\overline{g_k(r)}$ ва $g_{-k-4}(r)$ ифода меёбад.

Ядроҳои муодилаҳои интегралии (2.1.18), (2.1.19) - ядроҳои якҷинсаи тартиби (-1) мебошанд ва бе душворӣ тафтиш намудан мумкин аст, ки барои дилхоҳ $\beta : 0 < \beta < 2$шартҳои мувофиқи суммирондашавандагиро қаноат мекунанд ва бинобар ин нисбати онҳо натиҷаҳои [41],[42] татбиқ мешаванд. Мувофиқи фазоҳои ибтидоии $L^p_{\beta-2/p}$ дар доираи $|z| < 1$, муодилаҳои (2.1.18), (2.1.19) - ро дар фазоҳои $L^p_{\beta-1/p}$ - и порчаи [0,1] дида баромадан даркор аст.

Ҳангоми ҷамъбасти натиҷаҳо барои муодилаи интегралии сингулярии дученакаи ибтидоии (2.9) бояд ба назар гирифт, ки барои ҳалшаванда будани он зарур ва кифоя аст, ки ҳамаи муодилаҳои (2.1.18),(2.1.19) ҳалшаванда бошанд. Ба ҳар як ҳалли системаи якҷинсаи (2.1.16), отвечает ҳалли системаи якҷинсаи (2.1.19) аз рӯи формулаи

$$f(z) = f_k(r)e^{ik\varphi} + f_{-k-4}(r)e^{-i(k+4)\varphi},\ z = re^{i\varphi}$$

мувофиқ меояд ва айни ҳол ҳамаи ҳалҳои муодилаи якҷинсаи муодилаи (2.1.19) ба итмом мерасанд. Дар воқеъ аён аст, ки функцияҳое, ки тавассути ҳалҳои хаттӣ новобостаи системаи якҷинсаи (2.1.16) бо номери додашудаи k сохта мешаванд, худ хаттӣ новобастаанд. Айнан ҳамин тавр ҳолат ба функсияҳои аз рӯи ҳалҳои бо қиматҳои гуногуни k сохташуда низ ҷой дорад.

Ишораи

$$R_\beta(k) = \sqrt{1 - \frac{12(1-\beta)}{(k-\beta)(k+4)}} \qquad (2.1.20)$$

- ро дохил мекунем, ки $0 < \beta < 2$, k - қиматҳоро аз маҷмӯи ададҳои бутуни $k \geq -2$ қабул мекунад. Бо $\mu_\beta(\lambda)$ ададеро, ишора мекунем, ки он ба миқдори қиматҳои k, ки ҳангоми $|\lambda| < 1$ будан, барои онҳо $R_\beta(k) < |\lambda|$ мебошад; ба миқдори қиматҳои k, ки ҳангоми $|\lambda| > 1$ будан, барои онҳо $R_\beta(k) > |\lambda|$ мебошад.

Акнун натиҷаи асосӣ барои муодилаи интегралии сингулярии моделии (2.1.9) чунин мешавад:

Теоремаи 2.1.1. *Барои дар фазои $L^p_{\beta-2/p}(|z|<1)$ нормалӣ ҳалшавандагии системаи муодилаҳои интегралии моделии (2.1.8) зарур ва кифоя аст, ки $|\lambda| \neq 1$ и $|\lambda| \neq R_\beta(k)$ бошад, ки $k \geq -2$ ва $k \neq 1$ мебошанд. Ҳангоми иҷро шудани ин шартҳо индекси $\varkappa_\beta(\lambda)$ қимаатҳои зеринро қабул мекунад:*

агар $0 < \beta \leq 1$ бошад, онгоҳ дар мавриди $|\lambda| < 1$ будан $\varkappa_\beta(\lambda) = -2\mu_\beta(\lambda)$ мешавад ва баробари $2(6 - \mu_\beta(\lambda))$ агар $|\lambda| > 1$ и $\mu_\beta(\lambda) \neq 3$ бошад ва баробари 7 ҳангоми $\mu_\beta(\lambda) = 3$ будан ;

агар $1 < \beta < 2$ бошад, онгоҳ дар мавриди $|\lambda| < 1$ буадан $\varkappa_\beta(\lambda)$ баробари $2\mu_\beta(\lambda)$ мешавад ва ҳангоми $|\lambda| > 1$ будан ва $\mu_\beta(\lambda) \neq 3$ ва равно 5 при $|\lambda| < 1$ ва $\mu_\beta(\lambda) = 3$ ва баробари $2(6 + \mu_\beta(\lambda))$ ҳангоми $|\lambda| > 1$ будан.

Дар айни ҳол агар $\varkappa_\beta(\lambda) > 0$ бошад, онгоҳ муодилаи якҷинсаи (2.1.8) расо $\varkappa_\beta(\lambda)$ - то ҳалҳои хаттӣ новобаста дорад, ҳангоми $\varkappa_\beta(\lambda) < 0$ будан барои ҳалшавандагии муодилаи ғайриякҷинсаи (2.1.8) $-\varkappa_\beta(\lambda)$ шарт зарур аст, ки онҳо ба таври ошкор навишта мешаванд..

Акнун ба масъалаи Дирихлеи (2.1.2) барои муодилаи дифференции моделии (2.1.1) мегузарем. Барои натиҷаҳоро оиди масъалаи гузошташуда мувофиқ пешниҳоди (2.1.4) ҷамъбаст намудан дар асоси натиҷаҳои теоремаи 2.1.1 ба синфҳои бевазни $L^p(D), p > 2$ гузаштан зарур мешавад, яъне бояд $0 < \beta = 2/p < 1$ гирем.

Теоремаи 2.1.2. *Барои он, ки масъалаи (2.1.2) барои муодилаи дифференсиалии моделии (2.1.3) (при $n = 2$) дар синфи $W_p^6(D) \cap C^2(\overline{D}),\ p > 2$ ҳалшаванда бошад, зарур ва кифоя аст, ки шартҳои*

$$|a(0)| \neq |b(0)|, |\lambda| \neq R_{2/p}(k), k \geq -2, \tag{2.1.21}$$

иҷро шаванд, ва дар айни ҳол индекси масъала ба

$$\varkappa_{2/p}(\lambda) = \begin{cases} -2\mu_{2/p}(\lambda) & \text{ҳангоми } \ |\lambda| < 1; \\ 2(6 - 2\mu_{2/p})(\lambda) & \text{ҳангоми } \ |\lambda| > 1, \ \ \mu_\beta(\lambda) \neq 3 \ ; \\ 7 & \text{ҳангоми } \ \mu_{2/p}(\lambda) = 3 \end{cases}$$

баробар мешавад.

2.1.3. Муодилаи дифференсиалии ибтидоӣ

Акнун ба масъалаи Дирихле (2.1.2) барои муодилаи дифференсиалии ибтидоии (2.1.1) мегузарем. Тасвири интегралии (2.1.4) - ро истифода намуда формулаҳо барои ҳосилаҳои (2.1.5)–(2.1.7) - ро ба муодилаи (2.1.1) гузошта, барои муайян намудани функсияи $f(z)$ муодилаи интегралии сингулярии дученакаи зеринро ҳосил мекунем:

$$(Af)(z) \equiv a(z)f(z) - b(z)\frac{3}{\pi}\Big(\frac{z}{|z|}\Big)^n \iint\limits_{|z|<1} \frac{(\overline{\zeta} - \overline{z})^2}{(\zeta - z)^4}\overline{f(\zeta)}ds_\zeta + (Tf)(z) = g(z), \tag{2.1.22}$$

ки $|z| < 1$ ва T – дар фазои $L^p(|z| < 1),\ 2 < p < \infty$ оператори пурра бефосила мебошанд.

Леммаи 2.1.1. *Бигузор функсияи $a(z),\ b(z)$ доираи $|z| \leq 1$ бефосила ва $|a(0)| \neq |b(0)|$ бошанд. Онгоҳ пешниҳоди зерин*

$$A = A_0 A_1 + T \tag{2.1.23}$$

ҷой дорад, ки T - оператори пурра бефосила,

$$(A_1 f)(z) =$$

$$= (|a(0)|^2 - |b(0)|^2)^{-1} f(z) + (\overline{a(0)} b(z) - b(0)\overline{a(z)}) \frac{z}{\pi \overline{z}} \iint\limits_{|\zeta|<1} \frac{\overline{f(\zeta)}}{(\zeta - z)^2} ds_\zeta +$$

$$+ (a(0) + \delta)^{-1} \{a(0) b(0) \overline{b(z)} - |b(0)|^2 a(z) + \delta b(0) \overline{b(z)}\} \frac{1}{\pi} \iint\limits_{|\zeta|<1} \frac{f(\zeta) ds_\zeta}{(1 - z\overline{\zeta})^2},$$

A_0 - оператори интегралии модели аз (2.1.9), $\delta = 0$, агар $a(0) \neq 0$ ва баробари 1, агар $a(0) = 0$ мебошанд.

Акнун, ҳангоме, ки мо натиҷахоро барои операторҳои $A_0,\ A_1$ медонем, дар асоси фактҳои маълуми назарияи операторҳои хаттӣ аз [5] шартҳои нётеровӣ будани муодилаи (2.1.2) - ро дар $L^p_{\beta - 2/p}(|z| < 1)$ ва формула барои ҳисоб намудани индекси онҳоро ҳосил мекунем. Аз ин натиҷаҳо ҳосил мекунем:

Теоремаи 2.1.3. *Барои он, ки масъалаи (2.1.2) барои муодилаи (2.1.1) (ҳангоми $n = 2$) дар синфи $W^6_p(D) \cap C^2(\overline{D}),\ 2 < p < \infty$ была нётеровӣ бошад, зарур ва кифоя аст, ки шартҳои зерин иҷро шаванд:*

1. $|a(z)| \neq |b(z)|$ при $|z| \leq 1,\ a(t) \neq 0$ при $|t| = 1$,

2. $|\lambda| \neq R_{2/p}(k), k \geq -2$,

айни ҳол индекси масъала баробар аст ба

$$\varkappa = -6 \underset{|t|=1}{Ind} a(t) + \varkappa_{2/p}(\lambda),$$

ки $\varkappa_{2/p}(\lambda)$ аз теоремаи 2.1.2 муайян мешавад.

Эъзоҳот. Аз рӯи нақшаи дар боло овардашуда, вале бо баъзе мушкилотхои ҳисобкуниҳои техникӣ, нётеровӣ будан ва формулаҳо барои ҳисоб намудани индекси масъала ба кулли аз қиматҳои параметри n вобаста мешаванд.

2.2. Масъалаҳои Дирихле ва Нейман барои баъзе синфҳои системаи эллиптикии тартиби шаш бо коэффисиентҳои канишнок

2.2.1. Гузориши масъала

Пештар дар боби 1 масъалаҳои Дирихле ва Нейман барои системаҳои умумии муодилаҳои дифференсиалии эллиптикии тартиби шаш бо ду функсияҳои дутағйирёбанданок мавриди таҳқиқ қарор ёфта шуд. Бо шарти бефосилагии коэффитсиентҳо система шартҳои зарурӣ ва кифоягии нётеровӣ будани масъалаҳо ёфта шуда формула барои ҳисоб намудани индекси масъалаҳо ҳосил карда шуданд.

Дар ин параграф масъалаҳои асосии канорӣ барои баъзе синфҳои системаҳои эллиптикии тартиби шаш бо ду функсияҳои дутағйирёбанданок бо коэффитсиентҳои канишнок дар соҳаи маҳдуд бо хати каҷи Ляпунов Γ; $\overline{D} = D \cup \Gamma$ ки нуқтаи $z = 0$ - ро дар бар мегирад омӯхта мешавад.

Системаи зеринро дида мебароем:

$$\begin{gathered} a(z)\frac{\partial^6\omega}{\partial\overline{z}^3\partial z^3} + b(z)\frac{\partial^6\overline{\omega}}{\partial\overline{z}^3\partial z^3} + (z/|z|)^n c(z)\frac{\partial^6\omega}{\partial\overline{z}^6} + (\overline{z}/|z|)^n d(z)\frac{\partial^6\overline{\omega}}{\partial z^6} + \\ + \sum_{k+j=0}^{5}\left[a_{k,j}(z)\frac{\partial^{k+j}\omega}{\partial\overline{z}^k\partial z^j} + b_{k,j}(z)\frac{\partial^{k+j}\overline{\omega}}{\partial\overline{z}^k\partial z^j}\right] = g(z), \end{gathered} \tag{2.2.1}$$

ки $z = x + iy$, $\omega = u(x, y) + iv(x, y)$, n - адади бутун,

$$\frac{\partial}{\partial\overline{z}} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\Big), \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\Big)$$

мебошанд. Ҳисоб мекунем, ки $a(z)$, $b(z)$, $c(z)$, $d(z)$, $a_{k,j}(z), b_{k,j}(z)$ $(0 \leq k + j \leq 5)$ функсияҳои бефосила дар соҳаи $\overline{D}$, $g(z) \in L^p_{\beta-2/p}(D)$:

$$L^p_{\beta-2/p}(D) = \{g(z) : |z|^{\beta-2/p} g(z) = G(z) \in L^p(D),\ p > 2\}$$

мебошанд. Чуноне, маълум аст, коэффисиентҳои муодилаи (2.24) назди ҳосилаҳои ω_{zz} и $\overline{\omega}_{\overline{z}\overline{z}}$ дар нуқтаи $z = 0$ каниши қавӣ доранд. Дар ҳар як нуре, ки аз ибтидои координата мебарояд функсияи $(z/|z|)^n$ доими аст ва дар нуқтаи $z=0$ аз рӯи нурҳои гуногун ҳудудҳои гуногун дорад. Чуноне, ки маълум мешавад, даст кашидан аз бефосилагии коэффитсиентҳо ба он оварда мерасонад, ки шартҳои нётеровие, ки дар боби 1 дар ҳолати бефосилагии коэффитсиентҳо ёфта шуда буданд кифоягӣ намекунанд ва бар замми ин ҳалшавандагии масъалаҳо аз нишондиҳандаи p - и фазои лебегии $L^p(D)$ вобаст мешаванд.

Аз рӯи қисми асосии системаи (2.2.1) матритса-функсияи зеринро месозем:

$$F_z(t)=\begin{pmatrix} a(z)\zeta^3\overline{\zeta}^3+e^{-in\varphi}c(z)\overline{\zeta}^6 & b(z)\zeta^3\overline{\zeta}^3+e^{in\varphi}d(z)\zeta^6\\ \overline{b(z)}\zeta^3\overline{\zeta}^3+e^{-in\varphi}\overline{d(z)}\overline{\zeta}^6 & \overline{a(z)}\zeta^3\overline{\zeta}^3+e^{in\varphi}\overline{c(z)}\zeta^6\end{pmatrix},$$

ки $\zeta=\zeta_1+i\zeta_2\in\overline{D}\setminus 0$, $\varphi=\arg z$ мебошанд. Эллиптикӣ будани системаи (2.2.1) маънои онро дорад, ки нобаробарии зерин иҷро мешавад

$$\det F_z(t)\equiv|a(z)+c(z)t|^2-|b(z)+d(z)t|^2\neq 0,\ t=\frac{\zeta^3}{\overline{\zeta}^3},$$

барои $\forall z\in\overline{D}, |t|=1$.

Маҷмӯи ҳамаи матрисаи полиномиалии намуди $F_z(t)$, ки шарти $\det F_z(t)=|P_z(t)|^2-|Q_z(t)|^2>0(<0)$ - ро барои ҳамаи

$$P_z(t)=c(z)+a(z)t,\quad Q_z(t)=b(z)+d(z)t$$

қаноат мекунанд бо F^+ ишора мекунем.

2.2.2. Классификатсияи гомотопии ситемыаи (2.2.1)

Ду матритсаи $F_z^1(t), F_z^1(t)$ аз F^+ - ро гомотопӣ меномем, агар чунин силсилаи матритса функсияҳоии $F_z(t,\tau)\in F^+$ ёфт шаванд, ки онҳо бефосила аз параметри ҳақиқии $\tau\in[0,1]$, бефосила вобаста бошанд ва

$$F_z(t,0)\equiv F_z^1(t),\quad F_z(t,1)\equiv F_z^2(t)$$

шаванд. Маълум аст, ки [11], [15] муносибати гомотопӣ F^+ - ро ду синфи гомотопии сарбаста, компонентыҳо ҷудо мекунад:

$\gamma_0)$ $Ind_{|t|=1}P_z(t) = 0$, яъне сеаъзогии квадратии $P_z(t)$ дар дохили $|t| = 1$ хал надорад;

$\gamma_1)$ $Ind_{|t|=1}P_z(t) = 1$, яъне сеаъзогии квадратии $P_z(t)$ дар дохили $|t| = 1$ якто ҳал дорад;

Ин синфҳо системаи пурраи маҷмӯи F^+ - ро ташкил медиҳанд, яъне F_z^1 ва F_z^2 аз F^+ таалуқи ягон синфи $\gamma_k, k = 0,1$ мебошанд фақат ва фақат дар он ҳолате, ки $F_z^1 \sim F_z^2$ бошанд.

Нишон дода мешавад, ки барои синфҳои гомотопии γ_k, барои қимати қайдшудаи k, яке аз ин нобаробариҳо иҷро шаванд:

$$|\Delta_1(z)| > |\lambda(z)| + |\mu(z)|, \quad \forall z \in \overline{D}, \tag{2.2.2}$$

$$|\Delta_2(z)| > |\lambda(z)| + |\mu(z)|, \quad \forall z \in \overline{D}, \tag{2.2.3}$$

ки

$$\Delta_1(z) = |a(z)|^2 - |b(z)|^2,\ \Delta_2(z) = |d(z)|^2 - |c(z)|^2,$$

$$\lambda(z) = \overline{a(z)}c(z) - b(z)\overline{d(z)},\ \mu(z) = a(z)\overline{d(z)} - \overline{b(z)}c(z)$$

мебошанд.

Бигузор $|P_z(t) > |Q_z(t)|$ бошад. Онгоҳ барои иҷро шудани нобаробарии (2.2.2) ё (2.2.3) зарур ва кифоя вст, ки, мувофиқан $IndP_z = 0$ ё $IndP_z = 1$ бошанд. Агар $|P_z(t) < |Q_z(t)|$ бошад, онгоҳ ҷои $P_z(t)$ - ро, бо $Q_z(t)$, иваз намудан даркор аст ва айни ҳол $\Delta_j < 0$ мебошад.

Мувофиқи синфҳои гомотопикии γ_1, γ_2, яъне шартҳои (2.2.2) ё (2.2.3), системаи эллиптикии (2.2.1) ба таври эквиваленти ба яке аз намудҳои зерин оварда мешаванд:

$$\Delta_1(z)\frac{\partial^6\omega}{\partial\overline{z}^3\partial z^3} + (z/|z|)^n\lambda(z)\frac{\partial^6\omega}{\partial\overline{z}^6} + (\overline{z}/|z|)^n\mu(z)\frac{\partial^6\overline{\omega}}{\partial z^6} + T\omega = g_1(z) \tag{2.2.4}$$

$$\mu(z)\frac{\partial^6\omega}{\partial\overline{z}^3\partial z^3} + \lambda(z)\frac{\partial^6\overline{\omega}}{\partial\overline{z}^3\partial z^3} + (\overline{z}/|z|)^n\Delta_2(z)\frac{\partial^6\overline{\omega}}{\partial z^6} + T_2(\omega) = g_2(z), \tag{2.2.5}$$

ки $g_1 = \overline{a}g - b\overline{g},\ g_2 = \overline{c}g - d\overline{g},\ \ T_j(\omega)\ (j = 1, 2)$ - азоҳои хурд мебошанд.

Масъалаи Дирихле. *Функцияи* $\omega(z)$ *аз синфи* $W_p^6(D) \cap C^2(\overline{D})$ *ёфт шавад, ки дар дохили соҳаи* D *муодилаи (2.2.1), ва дар сарҳади он* Γ *ду шартҳои зеринро қаноат кунанд:*

$$\omega(z)\Big|_\Gamma = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial n}\bigg|_\Gamma = 0, \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial n^2}\bigg|_\Gamma = 0 \qquad (2.2.6)$$

ки $\frac{\partial \omega}{\partial n}$ *- ҳосилаи функсия аз рӯи равиши нормали беруна дар нуқтаҳои контури* Γ *мебошад.*

Бе маҳдудияти умумият ҳисоб намудан мумкин аст, ки соҳаи D доираи $D = \{z : |z| < 1\}$ мебошад.

2.2.3. Гузаштан ба муодилаҳои интегралии сингулярӣ

Маълум аст, ки [1]–[5], функсияи ихтиёрии синфи $W_p^6(D) \cap C^2(\overline{D})$ - ро, ки дар сарҳади Γ шарти якҷинсаи сарҳадиии (2.2.16) - ро қаноат мекунад, ба намуди зерин пешниҳод намудан мумкин аст:

$$\omega(z) = -\frac{1}{\pi} \iint\limits_D G_6(z, \zeta) f(\zeta) ds_\zeta, \qquad (2.2.7)$$

ки $f(z)$ функсияи ихтиёрии класси $L_p(D), p > 1$ ва $G_6(z, \zeta)$ - функсияи Грини муодилаи $\Delta^3 w \equiv \frac{\partial^6 \omega}{\partial z^3 \partial \overline{z}^3} = 0$ соҳаи маҳдуди $D = \{z : |z| < 1\}$ мебошанд:

$$G_6(z, \zeta) = |\zeta - z|^4 \ln \left| \frac{1 - z\overline{\zeta}}{\zeta - z} \right|^2 - |\zeta - z|^2 (1 - |z|^2)(1 - |\zeta|^2) + \frac{1}{2} (1 - |z|^2)^2 (1 - |\zeta|^2)^2.$$

Аён аст, ки ҳамаи ҳосилаҳои функсияи $\omega(z)$ нисбати z ва $\overline{z}$ то тартиби 5 операторҳои интегралии ядроҳои бефосила ва ё махсусияти суст дошта доранд ва бинобар ин ин операторҳо в $L_p(D)\,(1 < p < \infty)$ пурра бефосилаанд.

Ҳисобкуниҳои бевосита нишон медиҳанд, ки ҳосилаҳои $\frac{\partial^6\omega}{\partial z^3\partial\overline{z}^3}$, $\frac{\partial^6\omega}{\partial z^6}$, $\frac{\partial^6\overline{\omega}}{\partial z^3\partial\overline{z}^3}$, $\frac{\partial^6\overline{\omega}}{\partial\overline{z}^6}$ мувофиқан ба воситаи формулаҳои

$$\frac{\partial^6\omega}{\partial z^3\partial\overline{z}^3} = f(z), \quad \frac{\partial^6\omega}{\partial z^6} = \iint\limits_D K(z,\overline{\zeta})f(\zeta)ds_\zeta(z), \tag{2.2.8}$$

,

$$\frac{\partial^6\overline{\omega}}{\partial z^3\partial\overline{z}^3} = \overline{f(z)}, \quad \frac{\partial^6\overline{\omega}}{\partial z^6} = \iint\limits_D \overline{K(z,\overline{\zeta})}f(\zeta)ds_\zeta(z), \tag{2.2.9}$$

муайян мешаванд, ки

$$\begin{aligned} K(z,\overline{\zeta}) &= -\frac{3}{\pi}\frac{(\overline{\zeta}-\overline{z})^2}{(\zeta-z)^4} + K_1(z,\overline{\zeta}), \\ K_1(z,\overline{\zeta}) &= \frac{3(\overline{\zeta}-\overline{z})^2\overline{\zeta}^4}{\pi(1-z\overline{\zeta})^4} \end{aligned} \tag{2.2.10}$$

мебошанд.

Дар ин ҷо бояд қайд намуд, ки интегралии оператори бо ядрои $K(z,\overline{\zeta})$ дар нуқтаҳои дохилии соҳаи D махсусияти тартиби 2 дорад ва бинобар ин интегралро ба маънои қимати асосии Коши бояд фаҳмид. Дар нуқтаҳои сарҳадӣ бошад, ҳангоми $\zeta \in \Gamma$, $\overline{\zeta} = 1/\zeta$ ва бе душворӣ дидан мумкин аст, ки дар ин ҳолат $K(z,\overline{\zeta}) = 0$ аст.

$$a(z)f(z) + b(z)(S^*f)(z) + (Tf)(z) = g(z), \tag{2.2.11}$$

Қиматҳои ҳосилаҳоро аз (2.31), (2.32) ба муодилаи дифференсиалии аввала (2.24) гузошта для определения функции $f(z)$ получим следующее двумерное сингулярное интегральное уравнение: барои масъалаи Дирихле (2.29) барои системаи (3.24) мувофиқи синфҳои гомотопии $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_0$ барои муайян намудани функсияи f(z) ба таври эквиваленти ба яке аз муодилаҳои интегралии сингулярии дученака меоем:

$$\begin{aligned} &\Delta_1(z)f + \lambda(z)(\overline{z}/|z|)^n(S^\star f)(z) + \\ &+ \mu(z)(z/|z|)^n(\overline{S^\star f})(z) + T_1 = g_1, \end{aligned} \tag{2.2.12}$$

$$\mu(z)f - \lambda(z)\overline{f} + \Delta_2(z)(z\|z|)^n(S^\star\overline{f})(z) + T_2 = g_2, \qquad (2.2.13)$$

ки дар ин ҷо

$$(S^* f)(z) = -\frac{3}{\pi}\iint\limits_D \Big(\frac{(\overline{\zeta}-\overline{z})^2}{(\zeta - z)^4} - \frac{(\overline{\zeta}-\overline{z})^2\overline{\zeta}^4}{(1-z\overline{\zeta})^4}\Big) f(\zeta) ds_\zeta$$

мебошанд ва $T_{1,2}$ – операторҳои дар $L^p(D),\ p>2$ пурра бефосила мебошанд.

Ядрои оператори интеграл S^* ҳангоми $\zeta = z \in D$ будан каниш дорад ва дар сарҳади Γ - соҳаи D ба нул баробар мешавад. Бинобар ин дар нуқтаҳои дохилии соҳаи D ин интеграл ба маънои қтмати асосӣ фаҳмида мешавад. Ин интеграл қариб дар ҳама ҷо барои функсияҳои ихтиёрии $f(z)$ аз $L^p_{\beta-2/p}(D)$ мавҷуданд ва оператори интегралии сингуляии S^* аз фазои $L^p_{\beta-2/p}(D)$ ба $L^p_{\beta-2/p}(D)$, $1<p<\infty$ амал мекунад.

Муодилаҳои (2.35),(2.36) таалуқи муодилаҳои интегралии сингулярии дученака мебошанд, ки дар корҳои Г. Ҷангибеков [28], [29] омӯхта шудаанд.

Ишораҳои зеринро дохил мекунем:

$$R_p(k) = \sqrt{1 - \frac{2n(1-2/p)}{(k+2/p)(k+2/q-n)}},\ \ k \geq n_0,,$$

$k \neq \dfrac{n}{2}(1+signn)-1$, $1/p+1/q=1$, n_0 - қисми бутуни адади $(n-1)/2$;

$$\Lambda = \begin{cases} \frac{\Delta_1(0)}{\mu(0)}, & \text{агар (1.2) иҷро шавад;} \\ \frac{\mu(0)}{\Delta_2(0)}, & \text{агар (1.3) иҷро шавад.} \end{cases}$$

Через $\mu_p(\Lambda)$ обозначим число, равное для $|\Lambda|<1$ количеству значений k при которых $R_p(k) < |\Lambda|$, а для $|\Lambda|>1$ равное количеству значений k, при которых $R_p(k) > |\Lambda|$.

Агар $n \geq 0$ бошад, онгоҳ адади зеринро дохил мекунем

$$\varkappa_p(\lambda) = \begin{cases} -2\mu_p(\Lambda) & \text{агар } |\Lambda| < 1 \text{ бошад} \\ 2n - 2\mu_p(\Lambda) & \text{агар } |\Lambda| > 1, \text{ бощад ва } \mu_p(\Lambda) \neq n/2, \\ n+1 & \text{при } |\Lambda| > 1, \text{ ва } \mu_p(\Lambda) = n/2, \end{cases}$$

Агар $n \leq -1$ бошад, онгоҳ

$$\varkappa_p(\Lambda) = \begin{cases} -2\mu_p(\Lambda) & \text{агар } |\Lambda| < 1, \text{ ва } \mu_p(\Lambda) \neq n/2, \\ 2n - 2\mu_p(\Lambda) & \text{агар } |\Lambda| > 1, \\ n+1 & \text{при } |\Lambda| < 1, \text{ и } \mu_p(\Lambda) = n/2. \end{cases}$$

2.2.4. Натиҷаҳои асосӣ

Теоремаи 2.2.1. *Бигузор дар (2.2.1) $n = 0$ бошад. Барои он, ки масъалаи Дирихле (2.2.6)-и системаи эллиптикии (2.2.1) дар синфи $W_p^6(D) \cap C^2(\overline{D})$, $2 < p < \infty$ нётеровӣ бошад, зарур ва кифоя аст, ки яке аз шартҳои зерин иҷро шаванд:*

$$|\Delta_1(z)| > |\lambda(z)| + |\mu(z)| \quad \textit{барои ҳамаи} \quad z \in \overline{D}, \tag{2.2.14}$$

$$|\Delta_2(z)| > |\lambda(z)| + |\mu(z)| \; \textit{для всех} \quad z \in \overline{D}; \; \mu(t) \neq 0 \; \textit{для всех} \quad t \in \Gamma. \tag{2.2.15}$$

Дар айни ҳол, агар шарти (2.2.14) иҷро шавад, онгоҳ масъала фредголмовӣ аст; агар шарти (2.2.15) иҷро шавад, онгоҳ индекси масъала баробар аст ба

$$\varkappa = -2Ind_{\Gamma}\mu(t).$$

Теоремаи 2.2.2. *Бигузор дар (2.2.1) $n \neq 0$ бошад ва $\lambda(0) = 0$. Агар $\Lambda \neq 1, \Lambda \neq R_n(k), k$ адади бутун, $k \geq 1/2n(1 + signn)$ ва яке аз шартҳои (2.2.14), (2.2.15) иҷро шаванд, онгоҳ, масъалаи Дирихле барои системаи эллиптикии (2.2.1) дар синфи $W_p^6(D) \cap C^2(\overline{D})$, $2 < p < \infty$ нётеровӣ* *мешавад ва дар айни ҳол агар шарти (2.2.14) иҷро шавад, онгоҳ индекси асъала баробар аст ба* $\varkappa_p(\Lambda)$ *ва агар шарти (2.2.15) иҷро шавад, онгоҳ*

$$\varkappa = 2Ind_{\Gamma}\mu(t) + \varkappa_p(\lambda)$$

мешавад.

Масъалаи Нейман. *Функцияи* $\omega(z)$ *аз синфи* $W_p^6(D) \cap C^2(\overline{D})$ *ёфт шавад, ки дар дохили соҳаи* D *муодилаи (2.2.1), ва дар сарҳади он* Γ *се шартҳои зеринро қаноат кунанд:*

$$\frac{\partial \omega}{\partial n}\bigg|_{\Gamma} = 0, \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial n^2}\bigg|_{\Gamma} = 0, \quad \frac{\partial^3 \omega}{\partial n^2}\bigg|_{\Gamma} = 0, \tag{2.2.16}$$

ки $\frac{\partial \omega}{\partial n}$ *- ҳосилаи функсия аз рӯи равиши нормали беруна дар нуқтаҳои контури* Γ *мебошад.*

Азбаски [37], [41] функсияи ихтиёрие, ки дар соҳаи D ҳосилаҳои умумишуда то тартиби се дорад ва ҳосилаҳои бефосилае, ки шартҳои (2.2.16) - ро қаноат мекунанд ва

$$\int\limits_{\Gamma} W(z) ds_z = 0$$

бошад, онгоҳ ин функсияро ба таври ягона ба намуди

$$W(z) = \iint\limits_{D} \hat{G}(z,\zeta) f(\zeta) ds_{\zeta}, \quad f(z) \in L^p(D), \quad 2 < p < \infty,$$

пешниҳод намудан мумкин аст, ки

$$\hat{G}(z,\zeta) = -\frac{2}{\pi} \ln\left|\frac{z-\zeta}{1-z\overline{\zeta}}\right| - \frac{1}{\pi}(|z|^2) + |\zeta|^2) + \frac{3}{4}$$

функсияи Нейман барои доираи воҳидӣ мебошад. Ба мисли масъалаи Дирихле, шартҳои зарурӣ ва кифоягии нётеровӣ будан ва формула барои ҳисоб намудани индекси масъала ёфта шуданд, чунки масъалаи мазкур бо аниқии оператоҳои пурра бефосила ба муодилаҳои интегралии сингулярии (2.2.12),(2.2.13) оварда мешаванд.

Хулосаҳо

Натиҷаҳои асосии кори диссертатсионӣ аз инҳо иборат аст:

- шартҳои зарурӣ ва кифоягии нетеровӣ будани масъалаҳои Дирихле ва Нейман барои як системаи эллиптикии тартиби шаши вобаста аз ду тағйирёбанда бо коэффитсентҳои бефосила дар ҳамворӣ **исбот карда шуда** формулаи ҳисоб намудани индекси масъалаҳо ёфта шудааст;

- барои баъзе синфҳои системаи эллиптикии тартиби шаши вобаста аз ду тағйирёбанда бо коэффитсентҳои бефосила дар ҳамворӣ теоремаҳо оиди шартҳои зарурӣ ва кифоягии нетеровӣ будан ва формула барои ҳисоб намудани индекс **исбот карда шудааст**;

- шартҳои эффективноки зарурӣ ва кифоягии нетеровӣ будан ва формула барои ҳисоб намудани индекси системаи умумии эллиптикии тартиби шаши аз ду функсияҳои номаълуми ду тағйирёбанданок бо коэффитсиентҳои бефосила **ёфта шудааст**;

- теоремаҳои ҳалшавандагии масъалаҳои Дирихле ва Нейман барои баъзе синфҳои системаҳои эллиптикии тартиби шаш бо коэффитсентҳои канишнок **исбот карда шуда** формулаҳо барои ҳисоб намудани индекси масъалаҳо ҳосил карда шудааст;

РУЙХАТИ АДАБИЁТ

1. ВЕКУА И.Н. Системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа и граничные задачи с применением к теории оболочек [Текст] / И.Н. Векуа // Матем. сб. – 1952. – т.31. – №2. – с.217 – 314.

2. ВЕКУА И.Н. Новые методы решения эллиптических уравнений [Текст] / И.Н. Векуа. М.: – Гостехиздат. – 1948. – 296 с.

3. ВЕКУА И.Н. Задача приведения к каноническому виду дифференциальных форм эллиптического типа и обобщенная система Коши–Римана [Текст] / И.Н. Векуа // ДАН СССР. – 1955. – т.100. – №2. – с.197 – 200.

4. ВЕКУА И.Н. Об одном методе решения краевых задач уравнения в частных производных [Текст] / И.Н. Векуа // ДАН СССР. – 1955. – т.101. – №4. – с.593– – 596.

5. ВЕКУА И.Н. Обобщённые аналитические функции [Текст] / И.Н. Векуа. М.: – Физматгиз. – 1959. – 672 с.

6. БОЯРСКИЙ Б.В. Исследования по уравнениям эллиптического типа на плоскости и граничным задачам теории функций [Текст] / Б.В. Боярский. Дисс. д. физ. – мат. н. – М. 1960.

7. БОЯРСКИЙ Б.В. Об одной краевой задаче для системы уравнений в частных производных первого порядка эллиптического типа [Текст] /Боярский Б.В. / ДАН СССР. – 1955. – т.102. – №2. – с.201 – 204.

8. БОЯРСКИЙ Б.В. Гомеоморфные решения системы Бельтрами [Текст] /Боярский Б.В.// ДАН СССР. – 1955. – т.102. – №4. – с.661 – 664.

9. БОЯРСКИЙ Б.В. О решениях линейной эллиптической системы дифференциальных уравнений на плоскости [Текст] / Б.В. Боярский // ДАН СССР. – 1955. – т.102. – №5. – с.871 – 874.

10. БОЯРСКИЙ Б.В. Обобщенные решения системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа с разрывными коэффициентами [Текст] / Б.В. Боярский // Матем. сб.//. – 1957. – т.43. – №4. с.451 – 503

11. Боярский Б. Общее представление решений эллиптической системы $2n$ уравнений на плоскости [Текст] / Б.В. Боярский // Докл. АН СССР//. – 1958. – т.122. – №4. с.543 – 546

12. БОЯРСКИЙ Б.В. Некоторые граничные задачи для системы уравнений эллиптического типа [Текст] / Б.В. Боярский // ДАН СССР. – 1959. – т.124. – №1. с.1 – 4.

13. БОЯРСКИЙ Б.В. Об обобщенной граничной задаче Гильберта [Текст] / Б.В. Боярский // Сообщение АН Груз. ССР. – 1959. – т.25. – №4. – с.385 – 390.

14. БОЯРСКИЙ Б.В.Теория обобщенного аналитического вектора [Текст] / Б.В. Боярский // An.Polonici mathemat. – 1986. – vol.17. – №3. -с.281 – 320.

15. БОЯРСКИЙ Б.В. О первой краевой задачи для систем уравнений второго порядка на плоскости Бюлл [Текст] / Б.В. Боярский // Польск. АН. – серия математика. – 1959. – т.7. – №9. – с.565–570.

16.ВОЛЬПЕРТ А.И. Об индексе задачи Дирихле // Известия Высших учебных заведений. МАТЕМАТИКА. – 1960. – No 5. – с.40–44.

17. ВОЛЬПЕРТ А.И. Исследование граничных задач для эллиптических систем дифференциальных уравнений на плоскости [Текст] / А.И. Вольперт // ДАН СССР. – 1957. – т.114. – №3. – с.462–464.

18. ВОЛЬПЕРТ А.И. Исследование по теории граничных задач для эллиптических систем уравнений с двумя независимыми переменными [Text] / А.И. Вольперт. Докторская диссертация. – М. – 1960.

19. ВОЛЬПЕРТ А.И. Об индексе и нормальной разрешимости граничных задач для эллиптических систем дифференциальных уравнений на плоскости [Text] / А.И. Вольперт // Тр. ММО. – 1961. – том 10.– с. 41–87.

20. ВИНОГРАДОВ В.С. О задаче Неймана для уравнений эллптического типа [Text] / Виноградов В.С. // ДАН. – 1956. – т.109. – №1. – с.13–16.

21. ВИНОГРАДОВ В.С. Об одной краевой задаче для лнейных эллиптических систем дифферециальных уравнений первого порядка на плоскости [Text] Виноградов В.С. // ДАН. – 1958. – т.118. – №6. – с.1059–1062.

22. ВИНОГРАДОВ В.С. Об ограниченностирешений краевых задач для линейных эллиптических систем уравнений на плоскости [Text] Виноградов В.С. // ДАН. – 1958. – т.121. – №3. – с.399–402.

23. ВИНОГРАДОВ В.С. Об одной задаче для квазилинейных систем уравнений на плоскости [Text] Виноградов В.С. // ДАН. – 1958. – т.121. – №4. – с.579–582.

24. ДЫБОВ П.Т. Разрешимость первой краевой задачи для уравнения эллиптического типа в единичном круге [Text] Дыбов П.С. // Дифференц. уравнения, 1988, т. 24, №5, с. 844–852.

25. ДЫБОВ П.Т. Разрешимость уравнения эллиптического типа 4-го порядка на плоскости в классе функций с ограничением на рост в бесконечности [Text] Дыбов П.С. // ДАН.— 1971, т. 199, №4, с. 754–757.

26. ДЫБОВ П.Т. О разрешимости первой краевой задачи для дифференциального уравнения эллиптического типа шестого порядка [Text] Дыбов П.С. // ДАН.— 1972, т. 202, №6, с. 1251–1253.

27. ДЖУРАЕВ А.Д. Метод сингулярных интегральных уравнений [Текст] / А.Д. Джураев. – М.: – Наука. – 1987. – 415 с.

28. ДЖАНГИБЕКОВ Г. О нетеровости и индексе одного класса двумерных сингулярных интегральных уравнений с разрывными коэффициентами [Текст] / Г. Джангибеков // ДАН СССР. – 1988. – т. 300, №2, с.272 –

276. BoiJan1988BoiJan1988

29. БОЙМАТОВ К.Х.,ДЖАНГИБЕКОВ Г. Об одном сингулярном интегральном операторе [Текст] / К.Х.Бойматов, Г. Джангибеков // Успехи математических наук. – 1988. – т. 43, №3, с.171 – 173.

30. ДЖАНГИБЕКОВ Г. О нетеровости и индексе некоторых двумерных сингулярных интегральных уравнений с разрывными коэффициентами // Изв. ВУЗов. матем. 1992, №9, с. 25–37.

31. БИЛЬМАН Б.М., ДЖАНГИБЕКОВ Г. Об условиях нетеровости и индексе некоторых особых двумерных интегральных уравнений [Текст] / Б.М. Бильман, Г. Джангибеков // ДАН СССР. – 1990. – т.312. – №1. – с.15 – 19.

32. ДЖАНГИБЕКОВ Г. Об одном классе двумерных сингулярных интегральных операторов и его приложениях к краевым задачам для эллиптических систем уравнений на плоскости [Текст] / Г. Джангибеков // Докл. РАН. – 1993. – т.330. – №4. – с.415 – 417.

33. JANGIBEKOV G. On a class of two-dimensional singular integral operators and its applications to boundary value problems for elliptic systems of equations in the pline [Text]] / G. Jangibekov // Prosidings of the second ISAAC Congress. – volum 2. – 2000. – p.1421 – 1430.

34. ДЖАНГИБЕКОВ Г., ХУДЖАНАЗАРОВА Г.Х. О нётеровости и индексе некоторых двумерных сингулярных интегральных операторов по ограниченной области [Текст] / Г. Джангибеков, Г.Х. Худжаназарова // ДАН России. – 2004. – т.396. – №4. – с.449 – 454.

35. ДЖАНГИБЕКОВ Г. Задача линейного сопржения решений эллиптических систем дифференциальных уравнений с сингулярными коэффициентами на плоскости [Текст] / Г. Джангибеков // ДАН СССР. – 1991. – т.317, №4, с.813 – 818.

36. ДЖАНГИБЕКОВ Г., ХУДЖАНАЗАРОВА Г.Х. О задаче Дирихле для эллиптической системы двух уравнений четвертого порядка на плоскости [Текст] / Г. Джангибеков, Г.Х. Худжаназарова // ДАН России. – 2004. – т.398. – №2. – с.151 – 155.

37. ДЖАНГИБЕКОВ Г., ОДИНАБЕКОВ Д.,М. К теории Нетера двумерных сингулярных операторов и её приложения к краевым задачам для эллиптических систем уравнений четвертого порядка [Текст] / Г.Джангибеков, Д.М. Одинабеков // Вестн. СамУ. Естественнонаучн. сер.,– 2020. т. 26. №1. с. 7–13.

38. ХУДЖАНАЗАРОВА Г.Х. Некоторые классы двумерных интегральных операторов с подвижными и неподвижными особенностями к краевым задачам для эллиптических систем с сингулярными коэффициентами [Текст] / Г.Х. Худжаназарова. Дисс. к. физ.– мат. н. – Душанбе. – 2004. – 92 с.

39. ДЖАНГИБЕКОВ Г., ЗАРИФБЕКОВ М.Ш. О нетеровости и индексе задачи Дирихле для одной эллиптической системы второго порядка с сингулярными коэффициентами [Текст] / Г. Джангибеков, М.Ш. Зарифбеков// Вестник Национального университета. – серия математика. – 2004. – №1. – с.33–41.

40. ОДИНАБЕКОВ Дж.М. Некоторые классы двумерных интегральных операторов с несколькими фиксированными особенностями и их приложения к эллиптическим системам дифференциальных уравнений [Текст] / Дж.М. Одинабеков. Дисс. к. физ.–мат. н. – Душанбе. – 2007. – 62 с.

41. ДЖАНГИБЕКОВ Г. БОБОЕВ Э.Д. Задача Дирихле ва Неймана для эллиптических систем дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентавми [Текст] / Джангибеков Г.,Бобоев Э.Д.// Учёные записки – 2021. –т. 56. №1. – с. 8–11.

42. БОБОЕВ Э.Д. Некоторые краеве задачи для дифференциальных уравнений с сингулярными коэффициентами [Текст] / Э.Д. Бобоев. Дисс. к. физ.–мат. н. – Душанбе. – 2022. – 99 с.

43. ДЖАНГИБЕКОВ Г., ОДИНАБЕКОВ Д.М. К теории Нетера двумерных сингулярных операторов с четной характеристикой по ограниченной области и его приложениях к краевым задачам для эллиптических систем уравнений четвертого порядка [Текст] / Джангибеков Г.,Одинабеков Д.М.// Вестник. Самарского Университета. Естественнонаучн. сер., – 2020. – том 26. – выпуск 1, – с. 7–13.

44. КРЕЙН С.Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве М. 1971, 103 с.

45. СОБОЛЕВ С.Л. Уравнения математической физики [Текст] / С.Л. Соболев. М.: – Наука. – 1966. – 652 с.

46. МИХЛИН С.Г. Линейные уравнения в частных производных [Текст] / Михлин С.Г. М.: – Высшая школа. – 1977. 431 с.

47. ТИХОНОВ А.Н., САМАРСКИЙ А.А. Уравнения математической физики [Текст] / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. М. – – 1977. – Наука. – 735 с.

48. BEGEHR H., VANEGA C.J. Iterated Neumann problem for higher order Poisson equation. Math. Nachr. [Текст] / Begehr H., Vanegas C.J. 2006, 279, p.p. 38–57.

49. DUDUCHAVA R. On multidimensional singular integral operators. I.II: the half-spase case [Текст] /R.Duduchava// J. of operator theory. 1984. v. 11, p. 41-76, 199-214.

50. МИХАЙЛОВ Л.Г. Интегральные уравнения с ядром, однородным степени -1. Душанбе. Дониш. 1966. 49 с.

51. БИЛЬМАН Б.М. Об интегральных уравнениях с переменными предела- ми интегрирования, ядра которых имеют особенность типа однородные функции степени -1. // В сб. Дифференциальные и интегральные уравне- ния с сингулярными коэффициентами. [Текст] / Бильман Б.М. Душанбе. Дониш. 1969. с. 19-40.

52. ДЖАНГИБЕКОВ Г., ЗАРИФБЕКОВ М.Ш. О задаче Римана-Гильберта для обобщенной системы Коши-Римана с сингулярным коэффициентом [Текст] / Г. Джангибеков, М.Ш. Зарифбеков// Вестник ТГНУ. – 2005. – серия математика. – №1. с.35 – 43.

53.ДЖАНГИБЕКОВ Г. О разрешимости одного особого двумерного интегралного уравнения с комплексно сопряженной неизвестной функцией. [Текст] / Г. Джангибеков // Докл. АН ТаджССР. – 1977. – т.20. – №5. – с.3 – 6.

54. ДЖАНГИБЕКОВ Г. Некоторые интегральные уравнения с несуммируемыми однородными ядрами [Текст] / Г. Джангибеков. Дисс. к. физ.-мат. н. – Душанбе. – 1982. – 110 с.

55. ПЕТРОВСКИЙ И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными [Текст] / И.Г. Петровский. М.: Физ.-мат. лит. – 1961. – 400 с.

56. ВИШИК М.И. О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений [Текст] / М.И. Вишик // Матем. сб. – 1951. т.29(71).№3. – с.615 – 676.

57. БИЦАДЗЕ А.В. О единственности решения задачи Дирихле для эллиптических уравнений с частными производными [Текст] / А.В. Бицадзе // УМН. – 1948. т.3 – выпуск 6(28). –с.211–212.

58. БИЦАДЗЕ А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных [Текст] / А.В. Бицадзе. М.: – Наука. – 1981. – 448 с.

59. CALDERON A.P., ZYGMUND A. On the existence of singular integrals [Text] / A.P. Calderon, A. Zygmund // Acta Math. –1952. – №88. – p.85 – 139.

60. CALDERON A.P., ZYGMUND A. On singular integrals [Text] / A.P. Calderon, A. Zygmund // American j. math. –1956. – №88. – p. 289 – 309.

61. ШАПИРО З.Я. Первая краевая задача для эллиптической системы дифференциальных уравнений [Text] / З.Я. Шапиро // Матем. сб. – 1951. – т.28(70). – выпуск 1. – с.55 – 78.

62. ШАПИРО З.Я. Об общих краевых задачах для уравнений эллиптического типа [Text] / З.Я. Шапиро // Изв. АН СССР. – Сер. матем. – 1953. – т.17. – выпуск 6. – с.539 – 562.

63. ТОВМАСЯН Н.Е. Задача Дирихле для эллиптической системы двух дифференциальных уравнений второго порядка [Text] / Н.Е. Товмасян // Докл. АН СССР. – 1963. – т.153. – №1. – с.53 – 56.

64. ТОВМАСЯН Н.Е. Задача Дирихле для эллиптической системы дифференциальных уравнений второго порядка [Text] / Н.Е. Товмасян // Докл. АН СССР. – 1964. – 159. – №5. – с.995 – 998.

65. ЗОЛОТАРЕВА Е.В. Задача Дирихле для одного класса эллиптических систем [Text] / Е.В. Золотарева // Докл. АН СССР. – 1960. – т.132. – №4. – с.751–753.

66. ЛОПАТИНСКИЙ Я.Б. Об одном способе приведения граничных задач для системы дифферепциалных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям [Text] / Я.Б. Лопатинский // Укр. матем. журн. – 1953. – т.5. – №2. – с.123–151.

67. МОНАХОВ В.Н. Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений [Текст] / В.Н. Монахов. М.: – Наука. – 1977. – 420 с.

68. ГАХОВ Ф.Д. Каевые задачи [Текст] / Ф.Д. Гахов. М.: – Физ.мат.лит. – 1963. – 639с.

69. ЯНУШАУСКАС А.И. Введение в аналитическую теорию вырождающихся эллиптических уравнений [Текст] / А.И. Янушаускас. Вильнюс. – 1974. – 152 с.

70. ЛОПАТИНСКИЙ Я.Б., ДАНИЛЮК И.И., СКРЫПНИК И.В. Донецкая конференция по дифференциальным уравнениям в частных производных [Текст] / Я.Б. Лопатинский, И.И. Данилюк, И.В. Скрыпник // УМН. – 1980. – т.35. – №1(211). – с.235–240.

71. ТОВМАСЯН Н.Е. Некоторые краевые задачи для уравнения Лапласа с разрывными граничными данными Сиб. матем. журн. [Текст] / Н.Е. Товмасян // Сиб. матем. журн. – 1964. – т.5. – №1. – с.174–185.

72. ЗОЛОТАРЕВА Е.В. Необходимое и достаточное условие фредгольмовости задачи Дирихле для некоторого класса эллиптических систем [Текст] / Е.В. Золотарева // Докл. АН СССР. – 1962. – т.145. – №4. – с.7724–726.

73. МАРКУШЕВИЧ А.И. Об одной граничной задаче аналитических функций [Текст] / А.И. Маркушевич // Ученые записки Московского университета. – 1946. – т.100. – с.20-30.

74. ВЕКУА И.Н. Системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптичесого типа и граничные задачи с применением к теории оболочек [Текст] / И.Н. Векуа // Матем.сб. – 1952. – т.31. – №2. – с.217–314.

75. БИЛЬМАН Б.М., ДЖАНГИБЕКОВ Г. Об условиях нетеровости и индексе некоторых двумерных сингулярных интегральных уравнений с разрывными коэффициентами по ограниченной односвязной области [Текст] / Б.М. Бильман, Г. Джангибеков // ДАН СССР. – 1986. – т.288. – №4. – с.792–797.

76. ДЖАНГИБЕКОВ Г. О разрешимости одного особого двумерного интегралного уравнения с комплексно сопряженной неизвестной функцией. [Текст] / Г. Джангибеков // Докл. АН ТаджССР. – 1977. – т.20. – №5. – с.3 – 6.

77. БИЛЬМАН Б.М., ДЖАНГИБЕКОВ Г. Об условиях нетеровости и индексе некоторых особых двумерных интегральных уравнений [Текст] / Б.М. Бильман, Г. Джангибеков // ДАН СССР. – 1990. – т.312. – №1. – с.15 – 19.

78. БИЦАДЗЕ А.В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка [Текст] / А.В. Бицадзе. М. – Наука. – 1966. – 204с.

79. БИЦАДЗЕ А.В. Уравнения смешанного типа [Текст] / А.В. Бицадзе. Изд-во АН СССР.– Москва. – 1959. – 164 с.

80. ЯНУШАУСКАС А.И. Задача Дирихле для эллиптической по Петровскому системы уравнений второго порядка [Текст] / А.И. Янушаускас // Сиб. матем. журн. – 1999. – т.40. – №1. – с.226 – 234

81. ОЛЕЙНИК О.А. Об уравнениях эллиптического типа, вырождающихся на границе области [Текст] / О.А. Олейник // ДАН СССР. – 1952. – т.87. №6. – с.885 – 888.

82. МИРАНДА К. Уравнения с частными производными эллиптического типа [Текст] / К. Миранда. М.: – Изд. ИЛ. – 1957. – 256 с.

83.ПЕТРОВСКИЙ И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными [Текст] / И.Г. Петровский. М.: Физ.-мат. лит. – 1961. – 400 с.

84.ВЛАДИМИРОВ В.С. Уравнения математической физики [Текст] / В.С. Владимиров. М.: – Наука. – 1976. – 528 с.

85.МИХЛИН С.Г. Линейные уравнения в частных производных [Текст] / С.Г. Михлин. М.: – ВШ. – 1977. – 431 с.

86.ЛАВРЕНТЬЕВ М.А., ШАБАТ Б.В. Методы теории функций комплексного переменного [Текст] / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. М.: – Наука. – 1972. – 736 с.

87.СИДОРОВ Ю.В., ФЕДОРЮК М.В., ШАБУНИН М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного [Текст] / Ю.В. Сидоров, М.В. Федорюк, М.И. Шабунин. – М.: – Наука. – 1989. – 477 с.

88. ИСМАТОВ М. О разрешимости первой основной смешанной задачи динамики трехмерного упругого тела [Текст] / М. Исматов // Диф. уравнения. – 1976. – т.12. – №12. – с.2223 – 2232.

89. ИСМАТОВ М. Об абсолютной и равномерной сходимости рядов Фурье по собственным функциям оператора теории упругости во всей замкнутой области и обоснование метода Фурье [Текст] / М. Исматов // Диф. уравнения. – 1976. – т.12. – №10. – с.1824 – 1831.

ИТИШОРОТИ МУАЛЛИФ АЗ РУИ МАВЗУИ ДИССЕРТАТСИЯ

1. Дар мачаллахои дар руйхати КОА-и назди Президенти Чумхурии Точикистон кайдшуда:

[1-A] ДЖАНГИБЕКОВ Г., ФАЙЗЗОДА К.Ш. Задача Дирихле для эллиптических систем двух уравнений шестого порядка на плоскости / Джангибеков Г., Файззода К.Ш. // Вестник филиала МГУ им.М.В. Ломоносова в г. Душанбе, сер. естетв. наук, 2022, т.1, №4, с. 20 – 24.

[2-A] ФАЙЗЗОДА К.Ш. О решении задачи Дирихле для одной эллиптической системы шестого порядка с разрывным коэффициентом / Файззода К.Ш., // Доклады НАН Таджикистана, 2023, т. 66, №4, с. 9 - 10, 530–539.

[3-A] ДЖАНГИБЕКОВ Г., ФАЙЗЗОДА К.Ш. Задача Дирихле для некоторых эллиптических систем дифференциальных уравнений шестого порядка на плоскости / Джангибеков Г., Файззода К.Ш. // Известия НАН Таджикистана, 2023, №3, с. 17–28.

[4-A] ДЖАНГИБЕКОВ Г., ФАЙЗЗОДА К.Ш. Задачи Дирихле и Неймана для общих эллиптических систем дифференциальных уравнений шестого порядка на плоскости / Джангибеков Г., Файззода К.Ш // , 2024, т. 67, №3-4, с. 165 – 177.

[5-A] ФАЙЗЗОДА К.Ш. Задачи Дирихле и Неймана для некоторых классов эллиптических систем дифференциальных уравнений шестого порядка с разрывными коэф фициентами на плоскости / Файззода К.Ш., // Доклады НАН Таджикистана, 2025, т. 68, №4, с. 9-10, 530–539.

2. В других изданиях:

[6-A] ФАЙЗЗОДА К.Ш. Задачи Дирихле для некоторых эллиптических систем дифференциальных уравнений шестого порядка на плоскости./

Джангибеков Г., Файззода К.Ш //Материалы международной конференции, посвященной "Двадцатилетием изуч. и разв.эстесвн., точных и математич. наук."Дангара, 30 апреля 2024 г.

[7-А] ФАЙЗЗОДА К.Ш. Задачи Дирихле для некоторых эллиптических систем дифференциальных уравнений шестого порядка на плоскости./ //Материалы международной конференции, посвященной "Двадцатилетие изуч. и разв.эстесвн., точных и математич. наук."Дангара, 30 апреля 2024 г.

[8-А] ФАЙЗЗОДА К.Ш. О решении задачи Дирихле для одной эллиптической системы шестого порядка с разрывными коэф фициентами/ ФАЙЗЗОДА К.Ш.//Материалы международной конференции, посвященной "Двадцатилетие изуч. и разв.эстесвн., точных и математич. наук."Дангара, 30 апреля 2024 г.

[9-А] ФАЙЗЗОДА К.Ш. Задачи Дирихле и Неймана для некоторых классов эллиптических систем дифференциальных уравнений шестого порядка с разрывными коэффициентами на плоскости / Джангибеков Г., Файззода К.Ш //Материалы международной конференции Современной проблемы математии и ее приложение, Душанбе, 30-31 мая 2024 г.