ВАЗОРАТИ МАОРИФ ВА ИЛМИ ҶУМҲУРИИ ТОҶИКИСТОН
ДОНИШГОҲИ МИЛЛИИ ТОҶИКИСТОН

Бо ҳуқуқи дастнавис

ВБД 517.968.7; 517.983

ИСКАНДАРИ ҶУМЪАХОН

ТАҲҚИҚИ БАЪЗЕ СИНФҲОИ МУОДИЛАҲОИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНСИАЛӢ БО НУҚТАИ РОСТИ БАРЗИЁД СИНГУЛЯРӢ

ДИССЕРТАТСИЯ
барои дарёфти дараҷаи илмии номзади илмҳои физикаю математика аз рӯйи ихтисоси 01.01.02 – Муодилаҳои дифференсиалӣ, системаҳои динамикӣ ва идоракунии оптималӣ

Роҳбари илмӣ:
доктори илмҳои физика ва математика,
дотсент Зарифзода Сарвар Қаҳрамон

Душанбе – 2024

МУНДАРИҶА

МУҚАДДИМА

Мубрамияти таҳқиқот аз рӯйи мавзуи диссертатсияи илмӣ. Дар ин диссертатсияи илмӣ як синфи муодилаҳои интегро-дифференсиалии тартиби якум бо ядрои барзиёд сингулярӣ мавриди таҳқиқ қарор гирифтааст. Диққати асосӣ ба ҳалли муодилаҳои интегро-дифференсиалии тартиби олӣ ва ҳалли масъалаи Коши барои ин синфи муодилаҳо равона карда шудааст.

Муодилаҳои интегро-дифференсиалӣ дар амалия дар шохаҳои гуногуни илми физика ва механика татбиқ мегарданд. Масалан, ин гуна муодилаҳо ҳангоми омӯзиши равандҳое, ки дорои хотираи муайян мебошанд, васеъ татбиқ ёфтаанд. Ҳангоми ҳаракати тайёра дар осмон масъалаи муқовимати ҳаво ва газҳо ба қанотҳои тайёра низ бо ёрии муодилаҳои интегро-дифференсиалӣ тавсиф дода мешавад. Муодилаҳое, ки бо ёрии онҳо масъалаҳои ба аэродинамика алоқаманд омӯхта мешаванд, инҳо муодилаҳои интегро-дифференсиалӣ бо ядроҳои сингулярӣ мебошанд.

Омӯзиши муодилаҳои интегро-дифференсиалӣ бо ядроҳои сингулярӣ дар нимаи дуюми асри XX дар корҳои олимони шуравӣ, ба мисли Я.В.Быков [47], М.В.Булатов [46], Ю.Н.Валитский [48], В.В.Василев [49], М.М.Вейнберг [51], И.Н.Векуа [50], Н.П. Векуа [53], В.Волтерра [55], А.И.Некрасов [89], В.Н.Николаенко [90], Н.А.Сидоров [141], С.Л Соболев [143], М.В.Фалалеев [145], Г.А.Шишкин [147] мавриди таҳқиқоти васеъ қарор гирифтааст.

Ҷалб гардидани диққати олимони зиёд ба омӯзиши муодилаҳои интегро-дифференсиалии сингулярӣ ин худ нишондиҳандаи муҳимияти омӯзиши ин синфи муодилаҳо мебошад. Маълум мегардад, ки муодилаҳои интегро-дифференсиалии сингулярӣ яке аз шохаҳои зудинкишофёбандаи синфи муодилаҳои дифференсиалӣ ва интегралӣ буда, диққати олимони зиёд ба омӯзиши онҳо ҷалб гардидааст.

Дар аксарияти корҳои дар боло номбаршуда мафҳуми сингулярнокии ядрои муодилаи омӯхташаванда дар маънои Коши фаҳмида мешавад. Муодилаҳои интегралӣ ва интегро-дифференсиалие, ки ядрояшон дорои нуқтаҳои махсуси намуди Коши мебошанд, дар корҳои [57], [82], [85], [88] ба таври васеъ ҳаллу фасл гардидаанд.

Дар баробари ин дар амалия муодилаҳое вомехӯранд, ки мафҳуми сингулярнокии ядрои онҳо бо маънои одии Риман фаҳмида мешавад.

Ба омӯзиши муодилаҳои интегро-дифференсиалӣ бо ядроҳои сингулярии намуди Риман то замони мо диққати камтар зоҳир карда шудааст. Аз ин рӯ, омӯзиши густардаи ин синфи муодилаҳо айни замон саривақтӣ ва хеле муҳим ҳисобида мешавад.

Дараҷаи таҳқиқи мавзуи илмӣ. Омӯзиши васеи муодилаҳои дифференсиалии одӣ ва муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ дар интиҳои асри XIX ва ибтидои асри XX дар корҳои олимони бузурги он замон, ба мисли Ф. Гаусс, Б. Риман, К. Вейерштрасс, Ф. Клейн, Д. Гилберт ва ғайраҳо ба мушоҳида мерасад. Баъдтар омӯзиши муодилаҳои дифференсиалии таназзулёбанда ба худ муҳиммияти махсусро касб менамояд. Таҳқиқи ин синфи муодилаҳо аз корҳои классикони гузашта, ба мисли Л. Эйлер, С. Пуассон, Ж. Дарбу сарчашма гирифта, баъдтар дар корҳои олимон А.В. Битсадзе, И.Н. Векуа, В.Ф. Волкодавов, В.Н. Врагов, Ю.В. Егоров, М.В. Келдиш, А.А. Килбас, Л.Д. Кудрявсев, П.И. Лизоркин, О.И. Маричев, Л.Г. Михайлов, С.Г. Михлин, Е.И. Моисеев, А.М. Нахушев, С.М. Николский, И.Г. Петровский, Л.С. Пулькин, Н. Раҷабов, Л.Н. Раҷабова, О.А. Репин, К.Б. Сабитов, М.С. Салоҳитдинов, А.С. Сатторов, А.П. Солдатов, З.Д. Усманов, С.А. Исҳоқов, Ф.М. Шамсуддинов, А.И. Янушаускас ба авҷи аълои инкишофи худ расидааст.

Назарияи умумӣ барои муодилаҳои дифференсиалӣ бо коэффисиентҳои сингулярӣ ё таназзулёбанда дар корҳои олимони ватанӣ, чун Л.Г. Михайлов [86], [87], А.Д. Ҷураев [62], [63], Н. Раҷабов [93]- [124], Л.Н. Раҷабова [125]- [137], А.С. Сатторов [112], З.Д. Усманов, М. Исматӣ, С.А. Исҳоқов, Ф.М. Шамсуддинов [146] сохта шудааст.

Муодилаҳои дифференсиалии таназзулёбанда дар назарияи потенсиалҳо, дар назарияи акустика ва динамикаи газ, ҳангоми омӯзиши муодилаи Максвел-Эйнштейн, дар назарияи муқовимат ва чандирнокӣ татбиқи васеъ ёфтаанд.

Солҳои охир дар ҷумҳурӣ назарияи як синфи муодилаҳои интегралӣ бо ядроҳои сингулярии намуди Риман дар корҳои илмии академик Н. Раҷабов сохта шудааст. Методи дар корҳои Н. Раҷабов сохташуда, баъдан дар корҳои шогирдони мактаби илмии ӯ ба мисли Л.Н. Раҷабова, Ф. Шамсуддинов, С.Қ. Зарифзода, С. Саидов, С. Зарипов ва дигаронинкишоф дода шудааст.

Дар монографияи илмии Н. Раҷабов муодилаҳои интегралии намуди Волтерра бо ядроҳои сингулярии намуди

$$\varphi(x)+\int_a^x \frac{K(x,t)}{t-a}\varphi(t)dt=f(x)$$

ва

$$\varphi(x)+\int_a^x \frac{K(x,t)}{(t-a)^\alpha}\varphi(t)dt=f(x)$$

таҳқиқ карда шудааст. Тавре дида мешавад, ядрои муодилаи якум дар нуқтаи $t=a$ дорои махсусияти тартиби якум буда, муодилаи дуюм дар ин нуқта дорои махсусияти тартибаш аз як калон мебошад. Ин муодилаҳо инчунин дар ҳолатҳое, ки ядрояшон дорои махсусияти логарифмӣ ва дараҷагӣ мебошанд, дар корҳои Н. Раҷабов ва шогирдонаш таҳқиқ гардидаанд.

Дар корҳои илмии Л.Н. Раҷабова ва шогирдонаш назарияи муодилаҳои интегралии дученакаи намуди Волтерра бо ядроҳои сингулярӣ ва барзиёд сингулярии намуди

$$u(x,y)+\lambda\int_a^x \frac{u(t,y)}{(t-a)^\alpha}dt+\mu\int_b^y \frac{u(x,s)}{(b-s)^\beta}ds+\delta\int_a^x \frac{dt}{(t-a)^\alpha}\int_y^b \frac{u(t,s)}{(b-s)^\beta}ds=f(x,y)$$

сохта шудааст.

Методикаи дар корҳои онҳо истифодашуда дар диссертатсияи доктории С.Қ. Зарифзода барои муодилаҳои интегро-дифференсиалӣ бо ядроҳои махсусияташон гуногун инкишоф дода шудааст. Инчунин, дар корҳои С.Қ. Зарифзода методи оператсионии ҳалли ин синфи муодилаҳо коркард шудааст.

Натиҷаҳои муайян ҳангоми таҳқиқи муодилаҳои интегро-дифференсиалӣ бо ядрои барзиёд сингулярӣ дар корҳои муаллиф ба даст оварда шудаанд, ки онҳо дар мақолаҳои илмии [1-М] - [13-М] ба чоп расонида шудаанд.

Аз таҳлили мухтасари натиҷаҳои наздик, мавзуъ ва объекти таҳқиқоти диссертатсияи илмии мазкур муҳим мебошад.

Робитаи кор бо барномаҳо (лоиҳаҳо) ва мавзуъҳои илмӣ. Таҳқиқоти илмии мазкур дар чаҳорчӯбаи амалисозии нақшаи дурнамои корҳои илмӣ-таҳқиқотии кафедраи математикаи олӣ ва инчунин кафедраи математикаи ҳисоббарорӣ ва механикаи факултети механика ва математикаи Донишгоҳи миллии Тоҷикистон барои солҳои 2020-2025 дар мавзуъҳои «Таҳқиқоти аналитикӣ, таҳлили сифатӣ ва ҳалли ададии масъалаҳои математикаи амалӣ ва механика» ва «Муодилаҳо ва системаи муодилаҳои дифференсиалии таназзулёбанда» амалӣ карда шудааст.

ТАВСИФИ УМУМИИ ТАҲҚИҚОТ

Мақсади таҳқиқот. Мақсади кори мазкур ба даст овардани ҳалли умумӣ ва таҳқиқ намудани масъалаи Коши барои як синфи муодилаҳои интегро-дифференсиалии тартиби якум бо ядрои барзиёд сингулярӣ мебошад. Дарёфт намудани роҳҳои ҳалли муодилаҳои интегро-дифференсиалии тартиби олӣ бо ядрои барзиёд сингулярӣ низ яке аз мақсадҳои асосии кор ба шумор меравад.

Масъалаҳои таҳқиқот. Мувофиқи мақсади гузошташуда масъалаҳои зеринро ҷудо менамоем:

- ба даст овардани тасвири интегралии ҳал барои муодилаи интегро-дифференсиалии моделӣ бо ядрои барзиёд сингулярии тартиби якум;
- ба даст овардани тасвири интегралии ҳал барои муодилаи интегро-дифференсиалии ғайримоделӣ бо ядрои барзиёд сингулярии тартиби якум;
- омӯзиши хосиятҳои ҳалҳои бадастовардашуда;
- таҳқиқи масъалаи Коши барои муодилаи интегро-дифференсиалии моделӣ;
- таҳқиқи масъалаи навъи Коши барои муодилаи интегро-дифференсиалии моделӣ;
- ба даст овардани тасвири интегралии ҳал барои муодилаи интегро-дифференсиалии тартиби олӣ бо ядрои барзиёд сингулярӣ.

Объекти таҳқиқоти диссертатсияи илмии мазкур инҳо мебошанд:

- муодилаи интегро-дифференсиалии тартиби якуми моделӣ бо ядрои барзиёд сингулярӣ;
- муодилаи операторӣ-дифференсиалии тартиби дуюм, ки бо ёрии оператори дифференсиалии D_x^α сохта шудааст;
- муодилаи интегро-дифференсиалии тартиби якуми ғайримоделӣ бо ядрои барзиёд сингулярӣ;
- муодилаи интегро-дифференсиалии тартиби олӣ бо ядрои барзиёд сингулярӣ.

Методҳои таҳқиқот. Дар кор методҳои умумии назарияи муодилаҳои дифференсиалӣ ва интегро-дифференсиалӣ, методи ҳал намудани муодилаҳои интегралии намуди Волтерра, методи таҳқиқ намудани масъалаи Коши, инчунин методҳое, ки дар корҳои илмии Н. Раҷабов ва шогирдонаш кор карда баровярда шудаанд, васеъ истифода бурда мешавад.

Навгонии илмии таҳқиқот. Натиҷаҳои диссертатсияи илмӣ нав буда, аз тарафи муаллиф мустақилона ба даст оварда шудааст ва аз инҳо иборат мебошад:

- тасвири интегралии ҳал барои муодилаи интегро-дифференсиалии моделии тартиби якум бо ядрои барзиёд сингулярӣ ба даст оварда шудааст;
- тасвири интегралии ҳал барои муодилаи интегро-дифференсиалии ғайримоделии тартиби якум бо ядрои барзиёд сингулярӣ ба даст оварда шудааст;
- хосиятҳои ҳалҳои бадастовардашуда омӯхта шудааст;
- масъалаи Коши барои муодилаи интегро-дифференсиалии моделӣ таҳқиқ гардидааст;
- масъалаи навъи Коши барои муодилаи интегро-дифференсиалии моделӣ таҳқиқ гардидааст;
- тасвири интегралии ҳал барои муодилаи интегро-дифференсиалии тартиби олӣ бо ядрои барзиёд сингулярӣ ба даст оварда шудааст.

Натиҷаҳои ба ҳимоя пешниҳодшаванда:

- исботи теоремаҳо оид ба сохти ҳалли умумии муодилаи интегро-диференсиалии моделӣ бо ядрои барзиёд сингулярӣ;
- теоремаҳо оид ба ҳалли умумии муодилаи интегро-диференсиалии ғайримоделӣ бо ядрои барзиёд сингулярӣ;
- теоремаҳо оид ба ҳалли масъалаи Коши барои муодилаи интегро-диференсиалии моделӣ бо ядрои барзиёд сингулярӣ;
- теоремаҳо оид ба ҳалли масъалаи навъи Коши барои муодилаи интегро-диференсиалии моделӣ бо ядрои барзиёд сингулярӣ;
- теоремаҳо оид ба ҳалли умумии муодилаи интегро-диференсиалии тартиби олӣ бо ядрои барзиёд сингулярӣ.

Арзиши назариявӣ ва амалии таҳқиқот. Таҳқиқоти дар ин диссертатсияи илмӣ гузаронидашуда характери назариявӣ доранд. Натиҷаҳои илмии бадастовардашуда барои инкишофи минбаъдаи назарияи муодилаҳои интегро-дифференсиалӣ бо ядроҳои сингулярӣ ва барзиёд сингулярӣ, барои муодилаҳои интегро-дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ ва бо ядроҳои сингулярӣ ва барзиёд сингулярӣ, инчунин дар қисматҳои дигари илмҳои тадбиқӣ, ба мисли физика, механика ва ғайра истифода мешаванд. Маводди диссертатсияи илмии мазкурро ҳангоми хондани курсҳои махсус барои донишҷӯёни курсҳои болоӣ, магистрон ва докторантони мактабҳои олӣ, ки аз рӯйи ихтисосҳои математика, математикаи амалӣ ва «механика» таҳсил менамоянд, истифода бурдан мумкин аст.

Эътибурнокии таҳқиқот. Эътибурнокии натиҷаҳои илмии дар ин диссертатсия бадастовардашуда, бо ёрии ҳисобкуниҳои аниқи математикӣ ва исботҳои дақиқ, ки ба методҳои назарияи муодилаҳои дифференсиалӣ ва интегралӣ такя мекунанд, асоснок карда шудаанд.

Мутобиқати диссертатсия ба шиносномаи ихтисос. Диссертатсияи илмӣ аз рӯйи ихтисоси 01.01.02 – Муодилаҳои дифференсиалӣ, системаҳои динамикӣ ва идоракунии оптималӣ таълиф гардидааст ва пурра ба формулаи он (муодилаҳои дифференсиалии одӣ) ва се қисми соҳаи таҳқиқот (1. Назарияи умумии муодилаҳои дифференсиалӣ ва системаи муодилаҳои дифференсиалӣ; 2. Масъалаҳои ибтидоию канорӣ ва спектрӣ барои муодилаҳои дифференсиалӣ ва системаи муодилаҳои дифференсиалӣ; 3. Назарияи муодилаҳои операторӣ-дифференсиалӣ) мувофиқат мекунад. Диссертатсияи мазкурро қисми таҳлили ҳақиқӣ, комплексӣ ва функсионалӣ (ихтисоси ҳамгиро 01.01.01 – Таҳлили ҳақиқӣ, комплексӣ ва функсионалӣ) шуморидан мумкин аст.

Тасвиби натиҷаҳо. Натиҷаҳои асосии диссертатсия борҳо дар конференсияҳои ҷумҳуриявӣ ва байналмилалии зерин маъруза гардидаанд:

- конференсияи байналмилалӣ дар мавзуи «Масъалаҳои муосири таҳлили функсионалӣ ва муодилаҳои дифференсиалӣ» (ш. Душанбе, Тоҷикистон, 25-26 декабри соли 2020);
- конференсияи байналмилалии илмию амалӣ дар мавзуи «Оиди тадбиқи муодилаҳои дифференсиалӣ дар ҳалли масъалаҳои амалӣ» (ш. Душанбе, Тоҷикистон, 4 ноябри соли 2021);
- конференсияи илмӣ-амалии байналмилалӣ дар мавзуи «Масъалаҳои мубрами математикаи муосир» (ш. Душанбе, Тоҷикистон, 25-26 июни соли 2021);
- конференсияи илмӣ-амалии ҷумҳуриявӣ дар мавзуи «Масъалаҳои мубрами математикаи муосир» (ш. Душанбе, Тоҷикистон, 14 октябри соли 2022);
- конференсияи илмӣ-амалии байналмилалӣ дар мавзуи «Масъалаҳои муосири математика ва татбиқи он» (ш. Душанбе, Тоҷикистон, 20-21 октябри соли 2022);
- конференсияи илмӣ-амалии байналмилалӣ дар мавзуи «Таҳлили комплексӣ ва татбиқҳои он» (ш. Бохтар, Тоҷикистон, 19 ноябри соли 2022);
- конференсияи илмии байналмилалӣ дар мавзуи «Масъалаҳои муосири математика ва татбиқи он» (ш. Душанбе, Тоҷикистон, 2023 с.).

Саҳми шахсии довталаби дараҷаи илмӣ дар он зоҳир мегардад, ки натиҷаҳои илмии ба ҳимоя пешниҳодшаванда аз тарафи ӯ мустақилона ба даст оварда шудаанд. Инчунин, ӯ интишороти асосиро омода карда дар тасвиби кор шахсан иштирок намудааст.

Интишорот аз рӯйи мавзуи диссертатсия. Натиҷаҳои асосии диссертатсияи илмӣ дар 13 корҳои илмии муаллиф ба чоп расонида шудааст, ки аз онҳо 6-тояш мақолаҳои илмии дар маҷаллаҳои тақризшавандаи Комиссияи олии аттестатсионии назди Президенти Ҷумҳурии Тоҷикистон ба нашр расида ва 7-тои боқимондаашро мақолаҳои дар маҷмуаи маводди конференсияҳои илмии сатҳашон гуногун нашршуда ташкил медиҳанд. Дар корҳои якҷоя бо муаллифи дуюм пешниҳодгардида, ҳамаи ҳисобкуниҳо ва исботи теоремаҳо пурра ба муаллифи диссертатсия тааллуқ дорад.

Сохтор ва ҳаҷми диссертатсия. Диссертатсия аз бахшҳои муқаддима, тавсифи умумии таҳқиқот, се боб, бахши хулосаҳо бо натиҷаҳои асосии илмии диссертатсия ва тавсияҳо оид ба истифодаи амалии натиҷаҳо, рӯйхати адабиёт бо феҳристи сарчашмаҳои истифодашуда ва феҳристи интишороти илмии довталаби дарёфти дараҷаи илмӣ иборат аст.

Ҳаҷми умумии диссертатсия аз 169 саҳифаи матни компютерӣ, ки бо ёрии протсессори матнии Microsoft Word ҳарфчинӣ гардидааст, иборат буда, рӯйхати адабиёти истифодашуда 150 номгӯйро ташкил медиҳад.

БОБИ 1

БАРРАСИИ НАТИҶАҲО ОИД БА НАЗАРИЯИ МУОДИЛАҲОИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНСИАЛӢ БО ЯДРОҲОИ МАХСУС

§1.1. Маълумоти умумӣ оид ба муодилаҳои интегро-дифференсиалӣ

Омӯзиши муодилаҳои интегро-дифференсиалӣ дар назарияи муодилаҳои дифференсиалию интегралӣ яке аз мавқеъҳои марказиро ишғол менамояд.

Таърифи 1.1. *Муодилаҳое, ки дар онҳо функсияи номаълум ҳам дар зери аломати ҳосила ва ҳам дар зери аломати интеграл иштирок менамояд, муодилаҳои интегро-дифференсиалӣ номида мешавад.*

Муодилаҳои интегро-дифференсиалӣ ба ду синфи калон ҷудо мешаванд: муодилаҳои интегро-дифференсиалии одӣ ва муодилаҳои интегро-дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ.

Агар функсияи номаълуми дар муодилаи интегро-дифференсиалӣ иштироккунанда аз як тағйирёбанда вобаста бошад, пас ин гуна муодилаҳоро муодилаҳои интегро-дифференсиалии одӣ меноманд. Дар ҳолати баръакс, муодиларо муодилаи интегро-дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ меноманд.

Дар оянда мо асосан ба омӯзиши муодилаҳои интегро-дифференсиалии одӣ машғул мегардем.

Муодилаҳои интегро-дифференсиалии одӣ дар навбати худ ба ду намуд ҷудо мешаванд: муодилаҳои интегро-дифференсиалии намуди Фредголм ва муодилаҳои интегро-дифференсиалии намуди Волтерра.

Таърифи 1.2. *Агар дар муодилаи интегро-дифференсиалӣ ҳудудҳои интегралҳои дар ин муодила иштироккунанда ададҳои доимӣ бошанд, пас ин гуна муодиларо муодилаи интегро-дифференсиалии намуди Фредголм меноманд.*

Таърифи 1.3. *Агар дар муодилаи интегро-дифференсиалӣ ақаллан яке аз ҳудудҳои интегралҳои дар ин муодила иштироккунанда тағйирёбанда бошад, пас ин гуна муодиларо муодилаи интегро-дифференсиалии намуди Волтерра меноманд.*

Дар ҳолати умумӣ муодилаҳои интегро-дифференсиалии одии намуди Фредголм ва Волтерра чунин намуд доранд:

$$L_n[y(x)] + \lambda \int_a^b K(x,t,L_m[y(t)])dt = f(x) \qquad (1.1)$$

ва

$$L_n[y(x)] + \lambda \int_a^x K(x,t,L_m[y(t)])dt = f(x), \qquad (1.2)$$

ки дар ин ҷо

$$L_n[y(x)] = y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_{n-1}(x)y'(x) + a_n(x)y(x)$$

-оператори дифференсиалии берун аз интеграл ва

$$L_m[y(x)] = y^{(m)}(x) + b_1(x)y^{(m-1)}(x) + \cdots + b_{m-1}(x)y'(x) + b_m(x)y(x)$$

-оператори дифференсиалии дохили интегралӣ номида мешавад.

Агар функсияи номаълум дар муодилаи интегро-дифференсиалӣ ба таври хаттӣ иштирок намояд, пас ин гуна муодиларо муодилаи интегро-дифференсиалии хаттӣ меноманд. Муодилаҳои (1.1) ва (1.2) дар ҳолати хаттӣ будан чунин намуд мегиранд:

$$L_n[y(x)] + \lambda \int_a^b K(x,t)L_m[y(t)]dt = f(x) \qquad (1.3)$$

ва

$$L_n[y(x)] + \lambda \int_a^x K(x,t)L_m[y(t)]dt = f(x). \qquad (1.4)$$

Дар муодилаҳои (1.3) ва (1.4) $K(x,t)$ – ядрои муодила ва $f(x)$ – тарафи рости он номида мешаванд. Агар дар муодилаҳои боло $f(x) \equiv 0$ бошад, пас муодилаҳои ҳосилшуда якҷинса номида мешаванд. Қайд менамоем, ки дар муодилаҳои (1.3) ва (1.4) ядро ва тарафи рости онҳо ба синфҳои зерин тааллуқ доранд:

$$K(x,t) \in \mathrm{C}(R), f(x) \in \mathrm{C}(\Gamma), \qquad (1.5)$$

ки дар ин ҷо Γ ва R чунин муайян карда мешаванд:

$$\Gamma = \{x: a \le x \le b\}, R = \{(x,t): a \le x \le b, a \le t \le b\}.$$

Ба омӯзиши муодилаҳои интегралӣ ва интегро-дифференсиалии одии хаттӣ ва баъзе татбиқҳои онҳо, ки ядро ва тарафи росташон шартҳои (1.5)-ро қаноат менамоянд, корҳои илмии олимони зиёд бахшида шудааст [5], [29], [43], [45], [59], [77], [90], [143], [144].

Соли 1934 аз тарафи олими рус А.И. Некрасов [89] методи таҳқиқи як синфи муодилаҳои интегро-дифференсиалӣ бо ядрои регулярӣ коркард шуда буд, ки баъдтар ғояи ин кор дар корҳои олимон В.В. Василев [49], Т.И. Виграненко [52], Я.В. Быков [47] ва дигарон ба таври васеъ инкишоф дода шудааст. Таҳлил ва натиҷаҳои бадастовардашуда дар ин самти илм дар мақолаи М.М. Вейнберг [51] шарҳ дода шудааст.

Инчунин муодилаҳои (1.3) ва (1.4), дар ҳолате ки ядро ва тарафи рости онҳо шартҳои

$$\int_a^b \int_a^b |K(x,t)|^2 dxdt < \infty, \int_a^b |f(x)|^2\, dx < \infty \qquad (1.6)$$

-ро қаноат менамоянд, ба таври васеъ омӯхта шудаанд.

Методҳои тақрибии ҳал намудани муодилаҳои интегро-дифференсиалӣ дар корҳои [7], [8], [42], [84] таҳқиқ шудааст. Дар корҳои [1], [4], [48], [79] муодилаҳои интегро-дифференсиалӣ бо методҳои оператсионӣ таҳқиқ гардидаанд.

Ҳалли масъалаҳои баръакс барои синфи муайяни муодилаҳои интегро-дифференсиалӣ дар корҳои [140], [148], [149] ва ҳалли масъалаҳои канорию Коши барои ин синфи муодилаҳо дар корҳои [90], [150] ба даст оварда шудааст.

Қайд менамоем, ки агар ядрои муодила шарти якуми (1.6)-ро қаноат намояд, пас ин гуна ядроро ядрои фредголмӣ меноманд. Муодилаҳои интегро-дифференсиалӣ бо ядроҳои фредголмӣ дар корҳои олимони зиёд [6], [41], [54] таҳқиқ карда шудааст. Оид ба таҳқиқи муодилаҳои интегро-дифференсиалӣ дар фазоҳои гилбертӣ натиҷаҳои мушаххас дар корҳои [76], [80] ба даст оварда шудааст.

Агар ядрои муодилаи интегро-дифференсиалӣ нуқтаҳои махсусро дар бар гирад, пас ин гуна муодилаҳо муодилаҳои интегро-дифференсиалӣ бо ядроҳои сингулярӣ номида мешаванд.

Ду навъи ядроҳои сингулярӣ шинохта мешавад: ядрои сингулярии навъи Коши ва ядрои сингулярии навъи Риман.

Муодилаҳои интегралӣ ва интегро-дифференсиалӣ бо ядроҳои сингулярии навъи Коши ба таври васеъ дар корҳои олимони зиёд [57], [82], [85], [88] бо истифода аз методҳои назарияи функсияҳои аналитикӣ омӯхта шудаанд.

Муодилаи интегро-дифференсиалии намуди:

$$\sum_{r=0}^{m}\left[a_r(t_0)\varphi^{(r)}(t_0)+\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{K(t_0,t)\varphi^{(r)}(t)}{t-t_0}dt\right]=f(t_0) \qquad (1.7)$$

бо ядрои сингулярии навъи Коши аввалин бор аз тарафи Л.Г. Магнарадзе омӯхта шудааст.

Ҳолати хусусии ин муодила муодилаи интегро-дифференсиалии Прандтл мебошад (муодилаи назарияи қаноти тайёра), ки намуди:

$$\frac{\Gamma(x)}{B(x)}-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\Gamma'(t)}{t-x}dt=f(x)$$

-ро дошта, ба таҳқиқи он корҳои илмии зиёд, аз ҷумла корҳои И.Н. Векуа [50] ва Л.Г. Магнарадзе [82] бахшида шудааст. Л.Г. Магнарадзе дар таҳқиқоти худ масъалаи ҳал намудани муодилаи (1.7)-ро ба масъалаи ҳал намудани муодилаи баробарқувваи интегралии сингулярӣ ё регулярӣ меорад.

Муодилаи (1.7) дар ҳолате, ки L-контури суфтаи маҳкам мебошад ва функсияҳои $\mathrm{a}_r(t), f(t_0)\, K_r(t_0,t)$ – функсияҳои синфи H мебошанд, дар кори Ю.М. Крикунов [81] дида баромада шудааст.

Дар кори Н.П. Векуа [53] роҳи осони овардани муодилаи (1.7) ба муодилаи интегралӣ нишон дода шудааст.

Дар ин кор бо истифода аз гузориши

$$\varphi^m(t)=\mu(t)$$

ҳалли муодилаи (1.7) ба ҳалли муодилаи интегралии сингулярии

$$K\mu \equiv a_m(t_0)\mu(t_0) + \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{K_m(t_0,t)\mu(t)dt}{t-t_0} + \int\limits_L k(t_0,t)\,\mu(t)dt = f(t_0) - \sum_{k=1}^{m} c_k\chi_k(t_0)$$

оварда шудааст.

Натиҷаҳои монанд барои муодилаи интегро-дифференсиалии намуди:

$$\sum_{r=0}^{m}\left\{a_r(t_0)\varphi^{(r)}(t_0) + b_r(t_0)\overline{\varphi^{(r)}(t_0)} + \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{K_r(t_0,t)\varphi^{(r)}(t)dt}{t-t_0} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{M_r(t_0,t)\overline{\varphi^{(r)}(t)}dt}{t-t_0}\right\} = f(t_0)$$

низ ба даст оварда шудааст.

З.С. Исохонов муодилаи (1.7)-ро дар ҳолати контури маҳкам будани хатти каҷи L дида баромадааст [77].

Дар монографияи А. Ҷураев [62] бо ёрии методҳои назарияи функсияҳои аналитикӣ муодилаҳои интегралии сингулярӣ таҳқиқ гардида, дар монографияи [63] оператори умумии интегро-функсионалии намуди:

$$K^0(\mu) \equiv A(s_0)\mu(s_0) + b(s_0)\mu[\alpha(s_0)] + \frac{C(s_0)}{\pi}\int\limits_\Gamma \frac{\mu(s)dt}{t-t_0} + \frac{D(s_0)}{\pi}\int\limits_\Gamma \frac{\mu[\alpha(s)]dt}{t-t_0}$$

низ бо истифода аз ин методҳо таҳқиқ гардидааст.

Қайд намудан лозим аст, ки ба омӯзиши муодилаҳои интегралӣ ва интегро-дифференсиалӣ бо ядроҳои сингулярии навъи Риман то замони мо корҳои камтар бахшида шудааст.

Зикр бояд кард, ки ғайр аз мафҳумҳои муодилаҳои интегралӣ ва интегро-дифференсиалии сингулярӣ дар маънои Коши ва Риман, инчунин, дар корҳои [141], [142] мафҳуми сингулярнокии муодила дар маънои мавҷуд будани оператори барнагарданда дар назди ҳосилаҳои тартибашон баланд фаҳмида мешавад. Ин синфи муодилаҳои интегралӣ ва интегро-дифференсиалӣ бо ёрии методи назарияи функсияҳои умумикардашуда таҳқиқ карда мешаванд. Маълумот оид ба натиҷаҳои дар ин самт ҷойдоштаро аз адабиёти [91], [145], [147] дастрас намудан мумкин аст.

§1.2. Оид ба муодилаҳои интегралӣ ва интегро-дифференсиалӣ бо ядроҳои сингулярӣ ва барзиёд сингулярӣ

Омӯзиши муодилаҳои интегралӣ ва интегро-дифференсиалӣ бо ядроҳои сингулярии намуди Риман дар назарияи муодилаҳои дифференсиалию интегралӣ яке аз мавқеъҳои марказиро ишғол менамояд.

Дар монографияҳои Л.Г. Михайлов [86], [87] муодилаи интегралии намуди:

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt + f(x) \tag{1.8}$$

бо ядрои якҷинсаи дараҷааш –1 дида баромада шуда буд. Барои ин синфи муодилаҳои интегралӣ ғайр аз якҷинсагии ядро, инчунин, мавҷудияти чунин адади ҳақиқии β фарз карда мешавад, ки барои он шарти

$$\int_{-\infty}^{\infty} |K(\pm 1, u)||u|^{-\beta} du < +\infty$$

иҷро гардад. Шарти охиронро шарти суммаронидашавандаги ядро бо вазни $u^{-\beta}$ меноманд.

Оид ба муодилаҳои интегралӣ бо ядроҳои якҷинсаи дараҷаи –1 ва бо интегралҳои дорои ҳудудҳои тағйирёбанда, дар корҳои [39], [44], [58] натиҷаҳои муайян ба даст оварда шудааст.

Як қатор натиҷаҳо оид ба ҳалшавандагии муодилаҳои интегралии дученакаи сингулярӣ бо ядроҳои якҷинса дар корҳои Г. Ҷангибеков [60], [61] ва шогирдонаш ба даст оварда шудааст.

Дар назарияи муодилаҳои интегралӣ ба омӯзиши муодилаҳои интегралии намуди Фредголм ва Волтерраи ҷинси сеюм корҳои илмии камтар бахшида шудааст.

Қайд менамоем, ки муодилаи интегралии ҷинси сеюми намуди Волтерра гуфта, муодилаи интегралии намуди зеринро меноманд:

$$\mu(x)\varphi(x) + \int_a^x K(x,t)\varphi(t)dt = f(x), \tag{1.8}$$

ки дар ин ҷо $\mu(x)$ дар як ё якчанд нуқтаҳои дохилии интервали $\Gamma = \{x: a \leq x \leq b\}$ метавонад, ба сифр мубаддал гардад.

Муодилаи интегралии (1.8) бо ёрии гузориши

$$\mu(x)\varphi(x) = \psi(x)$$

ба муодилаи интегралии намуди

$$\psi(x) + \int_a^x \frac{K(x,t)}{\mu(t)}\psi(t)dt = f(x) \qquad (1.9)$$

оварда мешавад. Агар функсияи $\mu(x)$ дар нуқтаи $x = a$ – и интервали Г дорои сифри тартибаш калон аз як бошад, пас муодила намуди зеринро мегирад:

$$\varphi(x) + \int_a^x \frac{K(x,t)}{(t-a)^\alpha}\varphi(t)dt = f(x). \qquad (1.10)$$

Ҳангоми дар ин муодила $\alpha = 1$ гузоштан, муодилаи намуди

$$\varphi(x) + \int_a^x \frac{K(x,t)}{t-a}\varphi(t)dt = f(x) \qquad (1.11)$$

ҳосил мешавад. Тавре аз муодилаи (1.10) дида мешавад, ядрои муодила дар нуқтаи $t = a$ дорои махсусияти дараҷааш калон аз як мебошад. Дараҷаи махсусияти ядрои муодилаи (1.9) бошад, ба як баробар аст.

Оид ба омӯзиши муодилаҳои интегралии ҷинси сеюми намуди Фредголм ва Волтерра як қатор натиҷаҳо дар корҳои [2], [3], [30], [38], [56], [64], [83], [92], [138] ба даст оварда шудааст.

Муодилаҳои интегралии намуди (1.10) ва (1.11) аввалин бор дар корҳои Н. Раҷабов [15] - [23], [100] - [105], махсусан дар монографияи [105] ба таври васеъ омӯхта шудааст. Аввалин бор дар ҳамин кор нишон дода шудааст, ки назария ин гуна муодилаҳо аз сарҳади муқаррарии назарияи муодилаҳои интегралии навъи Волтерра берун мебарояд. Тавре аз назарияи муқаррарии муодилаҳои интегралӣ бо ядроҳои регулярӣ мебарояд, муодилаҳои интегралии навъи Волтерраи ҷинси дуюм ҳамеша дорои ҳалли ягона мебошанд.

Вале дар монографияи [105] нишон дода шудааст, ки муодилаҳои якҷинсаи ба (1.10) ва (1.11) мувофиқоянда дар ҳолатҳои муайян метавонанд, дорои ҳалҳои ғайрисифрӣ бошанд. Ин ба он оварда мерасонад, ки муодилаҳои (1.10) ва (1.11) ҳамеша дорои ҳалли ягона набуда, ҳалли умумии онҳо метавонад, аз доимиҳои ихтиёрӣ вобаста гардад.

Ин хусусияти охирони муодилаҳои (1.10) ва (1.11) зарурат ба вуҷуд меорад, ки барои ин муодилаҳо масъалаи навъи Коши гузошта шуда, таҳқиқ карда шавад.

Натиҷаҳои муайян оид ба муодилаҳои интегралии намуди Волтерраи ҷинси дуюм бо ду нуқтаҳои махсус дар ядрояш дар корҳои Н. Раҷабов ва С. Саидов [108], [109], [111], [113], [114], [115], [116], [139] ба даст оварда шудааст.

Муодилаи интегралии дученакаи намуди Волтерра бо ядроҳои сингулярӣ ва барзиёд сингулярӣ дар диссертатсияи доктории Л.Н. Раҷабова ва дар корҳои минбаъдаи ӯ бо шогирдонаш таҳқиқ карда шудааст [24] - [28], [125] - [137].

Дар корҳои илмии Ф.М. Шамсуддинов системаи муодилаҳои барзиёд муайяншудаи тартибашон гуногун бо нуқтаи сингулярӣ дида баромада шудааст.

Муодилаҳои интегралии навъи Волтерра бо махсусияти логарифмӣ дар ядрояшон дар корҳои Н. Раҷабов [21], [122], Л.Н. Раҷабова [136] ва муодилаҳои интегро-дифференсиалии навъи Волтерра бо махсусияти логарифмӣ дар ядрояшон дар корҳои С.К. Зарифзода [24], [72], [74] таҳқиқ гардидааст.

Дар диссертатсияи доктории С.К. Зарифзода барои операторҳои дифференсиалии:

$$D_x^{11} = x(1-x)\frac{d}{dx}, D_x^{\alpha} = x^{\alpha}\frac{d}{dx}$$

асосҳои ҳисоби операционӣ сохта шуда, синфи муайяни муодилаҳои оператори-дифференсиалӣ ва интегро-дифференсиалии бо ёрии ин операторҳои дифференсиалӣ тартибдодашуда таҳқиқ карда шудааст [31] - [37], [65] - [75]. Масалан, муодилаи интегро-дифференсиалии намуди:

$$D_x^{\alpha} y + A_0 y + \int_a^x \frac{K(x,t)}{(t-a)^{\alpha}} y(t)dt = f(x) \qquad (1.12)$$

бо ядрои намуди печхурии

$$K(x,t) = A_1 + A_1(\omega_\alpha(x) - \omega_\alpha(t)) + \cdots + A_n(\omega_\alpha(x) - \omega_\alpha(t))^{n-1}$$

бо истифода аз методҳои операционӣ таҳқиқ карда шудааст.

Операторҳои дифференсиалии дар боло овардашуда аввалин бор дар корҳои Н. Раҷабов пайдо шуда, баъдтар дар корҳои илмии дигар шогирдони мактаби илмии у васеъ истифода гардидааст.

Муодилаҳои дифференсиалӣ бо коэффитсиентҳои сингулярӣ ва барзиёд сингулярӣ дар корҳои Н. Раҷабов [93] - [99], Н. Раҷабов, Г.М. Қодиров [106], [107], [112] омӯхта шудааст.

Дар корҳои муаллифи диссертатсия [2-М], [3-М], [7-М], [8-М], [9-М] муодилаи интегро-дифференсиалии тартиби якум бо нуқтаи рости барзиёд сингулярии намуди:

$$D_x^\beta y + A(x)y - \int_x^b \frac{B(x,t)}{(b-t)^\beta} y(t)dt = f(x)$$

таҳқиқ карда шудааст. Натиҷаҳо оид ба таҳқиқи муодилаи интегро-дифференсиалии тартиби дуюм ва инчунин оид ба таҳқиқи муодилаи интегро-дифференсиалии тартиби n – ум бо нуқтаи рости барзиёд сингулярии:

$$P_M^n\left(D_x^\beta\right)y - \int_x^b \frac{B(x,t)}{(b-t)^\beta} P_N^m\left(D_x^\beta\right)y(t)dt = f(x),$$

ки дар ин ҷо

$$P_M^n\left(D_x^\beta\right) \equiv \left(D_x^\beta\right)^n + M_1\left(D_x^\beta\right)^{n-1} + M_2\left(D_x^\beta\right)^{n-2} + \cdots + M_{n-1}D_x^\beta + M_n,$$

$$P_N^m\left(D_x^\beta\right) \equiv \left(D_x^\beta\right)^m + N_1\left(D_x^\beta\right)^{m-1} + N_2\left(D_x^\beta\right)^{m-2} + \cdots + N_{m-1}D_x^\beta + N_m$$

мебошад, дар корҳои [4-М], [5-М], [6-М], [11-М], [12-М] ба даст оварда шудаанд.

БОБИ 2

ТАҲҚИҚИ МУОДИЛАҲОИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНСИАЛИИ ТАРТИБИ ЯКУМ БО ЯДРОИ БАРЗИЁД СИНГУЛЯРӢ

Дар ин боб муодилаи интегро-дифференсиалии тартиби якум бо ядрои барзиёд сингулярӣ мавриди таҳқиқ қарор гирифтааст.

Аввалан, муодилаи интегро-дифференсиалии моделии тартиби якум таҳқиқ карда шуда, ҳалли он вобаста аз решаҳои муодилаи характеристикии мувофиқоянда дар се ҳолат, дар намуди ошкор ёфта мешавад.

Баъдан, хосиятҳои ҳалҳои ёфташуда омӯхта шуда, дар асоси ин ҳосиятҳо барои муодилаи таҳқиқшаванда масъалаи Коши гузошта шуда, таҳқиқ карда шудааст. Инчунин, дар нуқтаи махсуси муодила барои муодилаи таҳқиқшаванда масъалаи навъи Коши гузошта шуда, яккимата ҳалшавандагии он исбот карда шудааст.

Дар параграфи ҳафтуми ин боб муодилаи интегро-дифференсиалии ғайримоделӣ низ дар се ҳолат таҳқиқ карда шуда, ҳалли он дар намуди ноошкор бо ёрии резолвентаи муодилаи интегралии намуди Волтерра ёфта мешавад.

Натиҷаҳои асосии дар ин боб бадастовардашуда дар корҳои [2-М], [3-М], [7-М], [8-М], [9-М] ба чоп расонида шудааст.

§ 2.1. Таҳқиқи муодилаи интегро-дифференсиалии моделӣ

Бигузор $\Gamma = \{x: a \leq x \leq b\}$ муҷмуи нуқтаҳо дар тири ҳақиқӣ бошад. Оператори дифференсиалии дар нуқтаи $x = b$ махсусиятдоштаи зеринро дохил мекунем:

$$D_x^\beta = (b-x)^\beta \frac{d}{dx},$$

ки дар ин ҷо $\beta > 1$ мебошад. Маълум аст, ки ин оператор махсусияти дараҷааш аз як калонро доро мебошад. Дар оянда дараҷаҳои аз як калони ин операторро дар маънои зерин мефаҳмем:

$$\left(D_x^\beta\right)^n(\cdot) = \underbrace{D_x^\beta}_{n} \cdot \underbrace{D_x^\beta}_{n-1} \cdot \dots \cdot \underbrace{D_x^\beta}_{2} \underbrace{D_x^\beta}_{1}(\cdot).$$

Қайд намудан лозим аст, ки оператори D_x^β аввалин бор дар корҳои Н. Раҷабов дохил карда шуда, баъдан дар корҳои шогирдонаш васеъ татбиқ карда шудааст. Муодилаҳоеро, ки бо ёрии ин оператори дифференсиалӣ сохта мешаванд, ба намуди муодилаҳои дифференсиалӣ бо коэффисиентҳои сингулярӣ овардан мумкин аст. Муодилаҳои дифференсиалӣ бо коэффисиентҳои сингулярӣ дар корҳои олимони ватанӣ ба мисли Л.Г. Михайлов [86], [87], Н. Раҷабов [93] - [99], Л.Н. Раҷабова [125], [126], Ф.М. Шамсуддинов [146], С.К. Зарифзода [65] - [75] ба таври васеъ таҳқиқ карда шудааст.

Дар Г муодилаи интегро-дифференсиалии хаттии тартиби якум бо ядрои махсусиятдоштаи зеринро дида мебароем:

$$D_x^\beta y + A(x)y - \int_x^b \frac{B(x,t)}{(b-t)^\beta} y(t)dt = f(x), \tag{2.1}$$

ки дар ин ҷо $D_x^\beta = (b-x)^\beta \frac{d}{dx}$ – оператори диффернсиалии дар боло дохил кардашуда, $A(x),\ f(x)$ - функсияҳои додашудаи бефосила дар Г, $B(x,t)$ - функсияи додашудаи бефосила дар росткунҷаи $R = \{(x,t)\colon a < x < b,\ a < t < b\}$, $y(x)$ - функсияи номаълум мебошад.

Азбаски дар муодилаи (2.1) $\beta > 1$ мебошад, бинобар ин ядрои муодила дорои махсусияти дараҷааш калон аз як мебошад. Аз тарафи дигар, тавре ки маълум аст, ядрои намуди $\frac{B(x,t)}{(b-t)^\beta}$ ҳангоми $|B(x,t)| \le K$, ядрои дуршаванда мебошад, чунки интеграли ғайрихоси:

$$\int_x^b \frac{B(x,t)}{(b-t)^\beta} dt$$

дуршаванда мебошад.

Аз тарафи дигар, ҳарчанд ядрои муодилаи (2.1) дуршаванда бошад ҳам, таҳқиқоти гузаронидашуда нишон медиҳад, ки синфи муайяни функсияҳое вуҷуд дорад, ки барои ин синфи функсияҳо муодилаи (2.1) дорои ҳал мегардад.

Дар оянда бо рамзи $C_{\beta-1}[a,b]$ синфи чунин функсияҳои бефосилаеро ишора менамоем, ки дар нуқтаи $x=b$ ба сифр мубаддал гашта, рафторашон аз рӯйи формулаи ассимптотикии зерин муайян карда мешаванд:

$$y(x)=o\left[(b-x)^{\delta}\right], \delta>\beta-1, \text{хангоми } x\to b. \tag{2.2}$$

Инчунин, бо рамзи $C_{\beta-1}^{(n)}[a,b]$ синфи чунин функсияҳои $y(x)\in C_{\beta-1}[a,b]$-ро ишора менамоем, ки дорои D_x^{β} - ҳосилаҳои бефосилаи то тартиби n - ум мебошанд.

Агар ҳалли муодилаи (2.1)-ро дар синфи $C_{\beta-1}^{(1)}[a,b]$ ҷустуҷӯ намоем, пас барои функсияҳои ба ин синф муттааллиқ, интеграли дар муодилаи (2.1) иштироккунанда наздикшаванда мешавад ва бинобар ин омӯзиши муодилаи (2.1) низ масъалаи дуруст ҳисобида мешавад.

Акнун барои он ки муодилаи (2.1)-ро таҳқиқ намоем, пеш аз ҳама муодилаи моделии ба муодилаи (2.1) мувофиқояндаро мавриди таҳқиқот қарор медиҳем. Яъне, ҳолатеро дида мебароем, ки дар (2.1) $A(x)=A=const$, $B(x,t)=B=const$, мебошад. Дар ин маврид муодилаи (2.1) чунин намуд мегирад:

$$D_x^{\beta}y+Ay-\int_x^b \frac{B}{(b-t)^{\beta}}y(t)dt=f(x). \tag{2.3}$$

Муодилаи (2.3)-ро муодилаи интегро-дифференсиалии тартиби якуми моделӣ бо ядрои махсусиятдошта меномем.

Ҳалли муодилаи (2.3)-ро дар синфи $C_{\beta-1}^{(1)}[a,b]$ ҷустуҷӯ менамоем. Барои ёфтани ҳалли муодилаи (2.3), пеш аз ҳама, фарз мекунем, ки функсияи $y(x)\in$

$C_{\beta-1}^{(2)}[a,b]$ ва $f(x) \in C_{\beta-1}^{(1)}[a,b]$ аст, он гоҳ оператори D_x^β-ро бори дигар ба ду тарафи муодилаи (2.3) татбиқ намуда, ҳосил мекунем:

$$\left(D_x^\beta\right)^2 y + AD_x^\beta y + By = F(x), \tag{2.4}$$

ки дар ин ҷо $F(x) = D_x^\beta f(x)$ мебошад.

Ҳамин тавр, масъалаи ҳал намудани муодилаи интегро-дифференсиалии моделии (2.3) ба масъалаи ҳал намудани муодилаи операторӣ-дифференсиалӣ бо коэффисиентҳои доимии намуди (2.4) оварда шуд.

Қайд менамоем, ки гузариш аз муодилаи (2.3) ба муодилаи (2.4) гузариши яктарафа мебошад, яъне ҳангоми ин гузариш мо соҳаи ҳалли муодилаи (2.3)-ро васеъ гардонидем. Вале дар давоми таҳқиқотҳои минбаъда ба назар гирифтан лозим аст, ки ҳама гуна ҳалҳои муодилаи (2.3), ки ду маротиба D_x^β - дифференсиронидашаванда мебошанд, халли муодилаи (2.4) шуда метавонанд, аммо на ҳама ҳалҳои муодилаи операторӣ-дифференсиалии (2.4) дар навбати худ ҳалли муодилаи (2.3) мебошанд. Яъне, муодилаи (2.4) дорои чунин ҳалҳое буда метавонад, ки барои муодилаи (2.3) ҳалҳои бегонаанд.

Бинобар ин, дар оянда вақте ки ҳалҳои муодилаи (2.4) ёфта мешаванд, аз байни онҳо ҳалҳои барои муодилаи (2.3) бегонаро партофтан лозим меояд.

Акнун ба таҳқиқи муодилаи (2.4) шуруъ намуда, пеш аз ҳама ҳалли муодилаи якҷинсаи:

$$\left(D_x^\beta\right)^2 y + AD_x^\beta y + By = 0 \tag{2.5}$$

-ро меёбем.

Ҳалли муодилаи (2.5)-ро дар намуди $y(x) = e^{\lambda\omega_\beta(x)}$ ҷустуҷӯ менамоем, ки дар ин ҷо $\omega_\beta(x) = \frac{1}{(\beta-1)(b-x)^{\beta-1}}$ мебошад. Он гоҳ қиматҳои $D_x^\beta y$ ва $\left(D_x^\beta\right)^2 y$-ро дар намудҳои:

$$D_x^\beta y = D_x^\beta e^{\lambda\omega_\beta(x)} = \lambda e^{\lambda\omega_\beta(x)}$$

ва

$$\left(D_x^\beta\right)^2 y = D_x^\beta D_x^\beta e^{\lambda\omega_\beta(x)} = D_x^\beta \lambda e^{\lambda\omega_\beta(x)} = \lambda^2 e^{\lambda\omega_\beta(x)}$$

ёфта, онҳоро ба муодилаи (2.5) мегузорем:

$$\lambda^2 e^{\lambda\omega_\beta(x)} + A\lambda e^{\lambda\omega_\beta(x)} + B e^{\lambda\omega_\beta(x)} = 0$$

ва аз ин ҷо

$$(\lambda^2 + A\lambda + B) e^{\lambda\omega_\beta(x)} = 0.$$

Ин баробарӣ иҷро мегардад, агар:

$$\lambda^2 + A\lambda + B = 0 \qquad (2.6)$$

бошад.

Ҳамин тавр, барои муодилаи якҷинсаи (2.5) муодилаи характеристикии (2.6)-ро ҳосил намудем. Акнун вобаста аз решаҳои муодилаи характеристикии (2.6) ҳалли умумии муодилаи якҷинсаи (2.5)-ро дар се ҳолат меёбем.

I. Бигузор, дар муодилаи характеристикии (2.6) $D > 0$ ва λ_1, λ_2-решаҳои ҳақиқӣ ва гуногуни он бошанд. Он гоҳ ҳалҳои хусусии муодилаи якчинсаи (2.5) намуди:

$$y_1 = e^{\lambda_1 \omega_\beta(x)}, y_2 = e^{\lambda_2 \omega_\beta(x)}$$

ва ҳалли умумии он намуди:

$$y = c_1 e^{\lambda_1 \omega_\beta(x)} + c_2 e^{\lambda_2 \omega_\beta(x)} \qquad (2.7)$$

-ро мегирад.

II. Бигузор, дар муодилаи характеристикии (2.6) $D = 0$ ва $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$-решаҳои ҳақиқӣ ва якхелаи он бошанд. Дар ин маврид ҳалҳои хусусии муодилаи якҷинсаи (2.5) намуди:

$$y_1 = e^{\lambda \omega_\beta(x)}, y_2 = \omega_\beta(x) e^{\lambda \omega_\beta(x)}$$

ва ҳалли умумии он намуди:

$$y = c_1 e^{\lambda \omega_\beta(x)} + c_2 \omega_\beta(x) e^{\lambda \omega_\beta(x)}$$

ё

$$y = e^{\lambda \omega_\beta(x)} \left(c_1 + c_2 \omega_\beta(x) \right) \qquad (2.8)$$

-ро мегирад.

II. Бигузор, дар муодилаи (2.6) $D < 0$ бошад. Дар ин маврид муодилаи (2.6) дорои решаҳои компелексӣ ва ҳамроҳшуда мебошад, ки онҳоро чунин ишорат мекунем:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{A}{2} \pm \frac{\sqrt{4B - A^2}}{2} i = \alpha \pm \gamma i.$$

Он гоҳ ҳалҳои хусусии муодилаи якҷинсаи (2.5) намуди:

$$y_1 = e^{\alpha\omega_\beta(x)}\cos\left[\gamma\omega_\beta(x)\right],\ \ y_2 = e^{\alpha\omega_\beta(x)}\sin\left[\gamma\omega_\beta(x)\right]$$

ва ҳалли умумии он намуди:

$$y = c_1 e^{\alpha\omega_\beta(x)}\cos\left[\gamma\omega_\beta(x)\right] + c_2 e^{\alpha\omega_\beta(x)}\sin\left[\gamma\omega_\beta(x)\right],$$

ё

$$y = e^{\alpha\omega_\beta(x)}\left[c_1\cos\left[\gamma\omega_\beta(x)\right] + c_2\sin\left[\gamma\omega_\beta(x)\right]\right] \qquad (2.9)$$

-ро мегирад.

§2.2. Ёфтани ҳалли умумии муодилаи операторӣ-дифференсиалии ғайрякҷинса бо методи интегронӣ

Акнун ба ёфтани ҳалли умумии муодилаи операторӣ-дифференсиалии ғайрякҷинсаи (2.4) шуруъ мекунем. Барои ҳалли умумии муодилаи (2.4)-ро ёфтан барои мо донистани як ҳалли хусусии муодилаи (2.4) зарур мебошад. Ин ҳалли хусусии муодилаи (2.4)-ро бо истифода аз методи интеграли дар намуди зерин мекобем:

$$y_{\text{чн}} = -\int_x^b \left[N_1 e^{\lambda_1\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)} + N_2 e^{\lambda_2\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\right]\frac{D_x^\beta\left(f(t)\right)}{(b-t)^\beta}dt, \quad (2.10)$$

ки дар ин ҷо $N_1,\ N_2$ – коэффисиентҳои номаълуми ихтиёрӣ мебошад.

Барои ёфтани ин коэффисиентҳои номаълум оператори D_x^β-ро ба формулаи (2.10) ду маротиба тадбиқ намуда, натиҷаҳоро ба муодилаи (2.4) мегузорем:

$$D_x^\beta\, y_{\text{чн}} = -\int_x^b \left[\lambda_1 N_1 e^{\lambda_1\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)} + \lambda_2 N_2 e^{\lambda_2\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\right] \frac{D_x^\beta\big(f(t)\big)}{(b-t)^\beta}\, dt +$$

$$+(N_1+N_2) D_x^\beta\big(f(x)\big).$$

Талаб менамоем, ки коэффисиентҳои номаълуми N_1, N_2 шарти $N_1 + N_2 = 0$-ро қаноат менамоянд. Он гоҳ:

$$D_x^\beta\, y_{\text{чн}} = -\int_x^b \left[\lambda_1 N_1 e^{\lambda_1\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)} + \lambda_2 N_2 e^{\lambda_2\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\right] \frac{D_x^\beta\big(f(t)\big)}{(b-t)^\beta}\, dt. \quad (2.11)$$

Бори дигар оператори D_x^β - ро ба баробарии (2.11) татбиқ намуда, меёбем:

$$\left(D_x^\beta\right)^2 y_{\text{чн}} = -\int_x^b \left[\lambda_1^2 N_1 e^{\lambda_1\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)} + \lambda_2^2 N_2 e^{\lambda_2\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\right] \frac{D_x^\beta\big(f(t)\big)}{(b-t)^\beta} +$$

$$+(\lambda_1 N_1 + \lambda_2 N_2) D_x^\beta\big(f(x)\big). \quad (2.12)$$

Ин қиматҳои ёфташудаи $D_x^\beta\, y_{\text{чн}}$ ва $\left(D_x^\beta\right)^2 y_{\text{чн}}$ ва худи $y_{\text{чн}}$-ро аз формулаи (2.11), (2.12) ва (2.10) ба муодилаи (2.4) мегузорем:

$$-\int_x^b \left[\lambda_1^2 N_1 e^{\lambda_1\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)} + \lambda_2^2 N_2 e^{\lambda_2\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\right] \frac{D_x^\beta\big(f(t)\big)}{(b-t)^\beta}\, dt +$$

$$+(\lambda_1 N_1 + \lambda_2 N_2) D_x^\beta\big(f(x)\big) -$$

$$-A\int_x^b \left[\lambda_1 N_1 e^{\lambda_1\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)} + \lambda_2 N_2 e^{\lambda_2\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\right]\frac{D_x^\beta\left(f(t)\right)}{(b-t)^\beta}dt -$$

$$-B\int_x^b \left[N_1 e^{\lambda_1\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)} + N_2 e^{\lambda_2\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\right]\frac{D_x^\beta\left(f(t)\right)}{(b-t)^\beta}dt = D_x^\beta\left(f(x)\right).$$

Ҷамъшавандаҳои монандро гурӯҳбандӣ менамоем:

$$-\int_x^\beta \left[N_1(\lambda_1^2 + A\lambda_1 + B)e^{\lambda_1\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)} + N_2(\lambda_2^2 + A\lambda_2 + B) \times\right.$$

$$\left.\times\, e^{\lambda_2\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\right]\frac{D_x^\beta\left(f(t)\right)}{(b-t)^\beta}dt + (\lambda_1 N_1 + \lambda_2 N_2)D_x^\beta\left(f(x)\right) = D_x^\beta\left(f(x)\right).$$

Азбаски ифодаи зериинтегралӣ ба сифр баробар аст, пас:

$$(\lambda_1 N_1 + \lambda_2 N_2)D_x^\beta\left(f(x)\right) = D_x^\beta\left(f(x)\right).$$

Баробарии охирон танҳо дар он ҳолат ҷой дорад, агар шарти:

$$\lambda_1 N_1 + \lambda_2 N_2 = 1$$

иҷро шавад.

Ҳамин тавр, барои ёфтани коэффисиентҳои номаълуми N_1 ва N_2 системаи муодилаҳои алгебравии зеринро ҳосил намудем:

$$\begin{cases} N_1 + N_2 = 0, \\ \lambda_1 N_1 + \lambda_2 N_2 = 1. \end{cases} \tag{2.13}$$

Ин системаро ҳал намуда, ба осонӣ меёбем:

$$N_1 = -\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad N_2 = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

Ҳамин тавр, ҳалли хусусии муодилаи дифференсиалии (2.4) намуди зеринро мегирад:

$$y_{\text{чн}} = -\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\int_x^b \left[e^{\lambda_1\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)} - e^{\lambda_2\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\right]\frac{D_x^\beta\left(f(t)\right)}{(b-t)^\beta}dt.$$

Дар тарафи рости баробарии охирон як маротиба қисм ба қисм интегронида, ҳосил мекунем:

$$y_{\text{чн}} = -\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\int_x^b \left[\lambda_1 e^{\lambda_1\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)} - \lambda_2 e^{\lambda_2\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\right]\frac{f(t)dt}{(b-t)^\beta}, \quad (2.14)$$

ки дар ин ҷо иҷрошавии шарти:

$$-\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\left[e^{\lambda_1\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)} - e^{\lambda_2\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\right]f(t)|_{t=b} = 0 \qquad (2.15)$$

талаб карда шудааст.

Ба ҳалли ёфташудаи (2.14) ҳалли умумии муодилаи якҷинсаи (2.5)-ро ҷамъ намуда, ҳалли умумии муодилаи ғайриякҷинсаи (2.4)-ро дар намуди зерин меёбем:

$$y_{\text{он}} = c_1 e^{\lambda_1\omega_\beta(x)} + c_2 e^{\lambda_2\omega_\beta(x)} -$$

$$-\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\int_x^b \left[\lambda_1 e^{\lambda_1\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)} - \lambda_2 e^{\lambda_2\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\right]\frac{f(t)}{(b-t)^\beta}dt. \quad (2.16)$$

Тавре ки аз формулаи (2.16) дида мешавад, интеграли тарафи рости он дар нуқтаи $t = b$ ҳам махсусияти дараҷагӣ ва ҳам махсусияти экспоненсиалӣ дорад. Аз ин рӯ, аз функсияи $f(t)$ шартҳоеро талаб менамоем, ки онҳо наздикшавандагии интегралҳоро таъмин намоянд. Барои ин вобаста аз аломатҳои λ_1 ва λ_2 ҳолатҳои зеринро ҷудо менамоем:

1. Бигузор $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ бошад. Дар ин мавридagar функсияи $f(t)$ дар нуқтаи $t = b$ ба сифр мубаддал гашта, рафтораш аз рӯйи формулаи ассимптотикии зерин муайян карда шавад:

$$f(t) = o\left[e^{-\delta\omega_\beta(t)}\right], \delta > |\lambda_1|, \quad \text{ҳангоми} \quad t \to b, \tag{2.17}$$

пас барои ин синфи функсияҳо интеграли тарафи рости формулаи (2.16) наздикшаванда мешавад.

Аз ин ҷо дида мешавад, ки барои он ки интеграли тарафи рости формулаи (2.16) наздикшаванда бошад, зарур аст, ки функсияи $f(x)$ ба синфи $C_{|\lambda_1|}[a,b]$ тааллуқ дошта бошад.

Қайд менамоем, ки махсусияти дараҷагии дар тарафи рости формулаи (2.16) иштироккунанда ба наздикшавандагии интеграл дар умум таъсир намерасонад, зеро дар ҳисобкуниҳо ин махсусият ба зери дифференсиал даровarda мешавад ва бинобар ин, талаби доштани сифри тартиби экспаненсиалӣ аз функсияи $f(x)$ барои наздикшавандагии интегралҳоро таъмин намудан кифоягӣ менамояд.

2. Бигузор, решаҳои муодилаи характеристикии (2.6) нобаробари $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ - ро қаноат намоянд. Дар ин маврид низ барои наздикшавандагии интеграли тарафи рости (2.16)-ро таъмин намудан, талаб менамоем, ки функсияи $f(x)$ шарти (2.17)-ро қаноат менамояд.

3. Бигузор, шарти $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ иҷро гардад. Дар ин маврид, барои ҳар гуна функсияи бефосила ва маҳдуди $f(x)$ интеграли тарафи рости (2.16) наздикшаванда мешавад.

Дар ҳар се ҳолатҳои овардашуда бо осонӣ санҷидан мумкин аст, ки баробарии (2.15), ки иҷрошавиашро пештар фарз намуда будем, бевосита иҷро мешавад.

Ҳамин тавр, дар бораи ҳалшавандагии муодилаи интегро-дифференсиалии (2.4) теоремаи зерин исбот карда шуд.

Теоремаи 2.1. *Бигузор, дар муодилаи* (2.4) *коэффисиентҳои он A ва B ададҳои доимӣ буда, чунон бошанд, ки решаи муодилаи характеристикии* (2.6) *ҳақиқӣ ва гуногун бошанд. Инчунин, ҳангоми* $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ *ва* $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ *будан, функсияи* $f(x)$ *дар нуқтаи* $x = b$ *ба сифр мубаддал гашта, рафтораш аз рӯйи формулаи ассимптотикии (2.17) муайян карда шавад ва ҳангоми* $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ *будан,* $f(x)$ *функсияи бафосила ва маҳдуд бошад. Он гоҳ муодилаи* (2.4) *дар синфи* $C_{\beta-1}^{(1)}[a,b]$ *ҳалшаванда мебошад ва ҳалли умумии он бо ёрии формулаи* (2.16) *ифода карда мешавад.*

Акнун ба ёфтани ҳалли муодилаи интегро-дифференсиалии (2.3) бармегардем.

Ҳалли муодилаи инегро-дифференсиалии (2.3) низ аз ду қисм иборат мебошад. Яке ҳалли умумии муодилаи интегро-дифференсиалии якҷинсаи:

$$D_x^{\beta} y + Ay - \int_x^b \frac{B}{(b-t)^{\beta}} y(t)dt = 0 \qquad (2.18)$$

ва дигаре ҳалли хусусии муодилаи интегро-дифференсиалии ғайриякҷинсаи (2.3) мебошад.

Муайян месозем, ки дар кадом ҳолат функсияи намуди:

$$y = e^{\lambda \omega_{\beta}(x)} \qquad (2.19)$$

ҳалли муодилаи якҷинсаи (2.18) мегардад. Барои ин функсияи (2.19)-ро ба муодилаи (2.18) гузошта, меёбем:

$$D_x^{\beta} e^{\lambda \omega_{\beta}(x)} + A e^{\lambda \omega_{\beta}(x)} - \int_x^b \frac{B}{(b-t)^{\beta}} e^{\lambda \omega_{\beta}(x)} dt = 0.$$

Аз ин ҷо

$$\lambda e^{\lambda \omega_{\beta}(x)} + A e^{\lambda \omega_{\beta}(x)} - \frac{B}{\lambda} e^{\lambda \omega_{\beta}(x)} \Big|_x^b = 0.$$

Агар шарти $\lambda < 0$ иҷро гардад, пас:

$$\lambda e^{\lambda \omega_{\beta}(x)} + A e^{\lambda \omega_{\beta}(x)} + \frac{B}{\lambda} e^{\lambda \omega_{\beta}(x)} = 0,$$

ё

$$\left(\lambda + A + \frac{B}{\lambda}\right) e^{\lambda \omega_{\beta}(x)} = 0,$$

ки аз ин ҷо муодилаи характеристикии (2.6) ҳосил мегардад.

Ҳамин тавр, функсияи намуди (2.19) ҳалли муодилаи (2.18) мебошад, агар шарти $\lambda < 0$ иҷро гардад.

Дар асоси гуфтаҳои боло ба чунин хулоса меоем, ки ҳангоми иҷро шудани шарти $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ ҳалли умумии муодилаи якҷинсаи (2.18) намуди

$$y_{oo} = c_1 e^{\lambda_1 \omega_{\beta}(x)} + c_2 e^{\lambda_2 \omega_{\beta}(x)}$$

-ро мегирад ва функсияи (2.16) ҳалли умумии муодилаи ғайриякҷинсаи интегро-дифференсиалии (2.3) мебошад.

Агар шарти $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ иҷро шавад, он гоҳ функсияи намуди

$$y = e^{\lambda_2 \omega_{\beta}(x)}$$

барои муодилаи (2.18) ҳалли бегона мебошад ва бинобар ин онро партофтан лозим меояд. Дар ин маврид ҳалли умумии муодилаи якҷинсаи (2.18) намуди

$$y_{oo} = c_1 e^{\lambda_1 \omega_\beta(x)}$$

ва ҳалли умумии муодилаи ғайриякҷинсаи интегро-дифференсиалии (2.3) намуди

$$y_{\text{он}} = c_1 e^{\lambda_1 \omega_\beta(x)} -$$

$$-\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \int_x^b \left[\lambda_1 e^{\lambda_1\left(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(t)\right)} - \lambda_2 e^{\lambda_2\left(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(t)\right)}\right] \frac{f(t)}{(b-t)^\beta} dt \quad (2.20)$$

-ро мегирад.

Бигузор, шарти $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ иҷро шавад. Дар ин маврид ҳар ду функсияҳои

$$y_1 = e^{\lambda_1 \omega_\beta(x)}, y_2 = e^{\lambda_2 \omega_\beta(x)}$$

барои муодилаи якҷинсаи (2.18) ҳалҳои бегона мебошанд. Бинобар ин, ҳар ду ин ҳалҳоро партофта, ба чунин натиҷа меоем, ки муодилаи якҷинсаи (2.18) дорои танҳо ҳалли сифрӣ мебошад ва муодилаи ғайриякҷинсаи (2.3) дорои ҳалли ягонаи

$$y_{\text{он}} = -\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \int_x^b \left[\lambda_1 e^{\lambda_1\left(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(t)\right)} - \lambda_2 e^{\lambda_2\left(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(t)\right)}\right] \frac{f(t)dt}{(b-t)^\beta} \quad (2.21)$$

мебошад.

Ҳамин тавр, оид ба ҳалшавандагии муодилаи ғайриякҷинсаи интегро-дифференсиалии (2.3) тероемаи зерин исбот кард шуд.

Теоремаи 2.2. *Бигузор, дар муодилаи интегро-дифференнсиалии ғайриякҷинсаи маделии* (2.3) *коэффисиентҳои он A ва B чунон бошанд, ки* *муодилаи характеристикии* (2.6) *дорои решаҳои ҳақиқии гуногуни* λ_1 *ва* λ_2 *бошад. Инчунин бигузор, ҳангоми* $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ *ва* $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ *будан, функсияи* $f(x)$ *шарти (2.17)-ро қаноат намояд ва ҳангоми* $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ *будан* $f(x)$ *функсияи бефосила ва маҳдуд бошад. Он гоҳ дар се ҳолат вобаста аз иҷрошавии шартҳои* $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ *ва* $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ *ҳалли умумии муодилаи интегро-дифференсиалии* (2.3) *мувофиқан бо ёрии формулаҳои* (2.16), (2.20) *ва* (2.21) *дода мешавад.*

§2.3. Ёфтани ҳалли муодилаи интегро-дифференсиалии ғайриякҷинсаи моделӣ дар ҳолати решаҳои муодилаи характеристикӣ ҳақиқӣ ва якхела будан

Бигузор, решаҳои муодила характеристикии (2.6) ҳақиқӣ ва якхела бошанд. Дар ин маврид, тавре ки пештар қайд намуда будем, ҳалли умумии муодилаи операторӣ-дифференсиалии (2.5) намуди:

$$y = e^{\lambda\omega_\beta(x)}\left(c_1 + c_2\omega_\beta(x)\right)$$

-ро мегирифт. Намуди умумии ин ҳалро ба назар гирифта, ҳалли хусусии муодилаи ғайриякҷинсаи (2.4)-ро дар намуди интегралии зерин мекобем:

$$y_{\text{чн}} = -\int_x^b e^{\lambda\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\left[N_1 + N_2\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)\right]\frac{F(t)dt}{(b-t)^\beta}, \qquad (2.22)$$

ки дар ин ҷо айни ҳол N_1 ва N_2 – коэффисиентҳои ихтиёрии номаълум мебошанд. Барои ёфтани ин коэффисиентҳо ба мисли ҳолати пешин амал намуда, ба функсияи (2.22) оператори D_x^β-ро ду маротиба татбиқ менамоем:

$$D_x^\beta y_{\text{чн}} = -\int_x^b e^{\lambda\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\left[\lambda N_1 + \lambda N_2\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right) + N_2\right]\frac{F(t)dt}{(b-t)^\beta} +$$
$$+N_1 F(x).$$

Фарз менамоем, ки шарти $N_1 = 0$ иҷро мешавад. Он гоҳ:

$$D_x^\beta y_{\text{чн}} = -\int_x^b e^{\lambda\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\left[\lambda N_1 + \lambda N_2\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right) + N_2\right]\frac{F(t)dt}{(b-t)^\beta}.$$

Аз ин ҷо:

$$\left(D_x^\beta\right)^2 y_{\text{чн}} = -\int_x^b e^{\lambda\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}[\lambda^2 N_1 + \lambda^2 N_2\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right) +$$
$$+2\lambda N_2]\frac{F(t)}{(b-t)^\beta}dt + (N_1\lambda + N_2)F(x).$$

Ин қиматҳои ёфташудаи $D_x^\beta y_{\text{чн}}$, $\left(D_x^\beta\right)^2 y_{\text{чн}}$ ва худи $y_{\text{чн}}$-ро ба муодилаи (2.4) мегузорем:

$$-\int_x^b e^{\lambda\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\left[\lambda^2 N_1 + \lambda^2 N_2\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right) + 2\lambda N_2\right]\frac{F(t)dt}{(b-t)^\beta} +$$
$$+(N_1\lambda + N_2)F(x) -$$
$$-A\int_x^b e^{\lambda\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\left[\lambda N_1 + \lambda N_2\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right) + N_2\right]\frac{F(t)dt}{(b-t)^\beta} -$$
$$-B\int_x^b e^{\lambda\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\left[N_1 + N_2\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)\right]\frac{F(t)dt}{(b-t)^\beta} = F(x).$$

Аъзои монандро гурӯҳбандӣ менамоем:

$$-\int_{x}^{b} e^{\lambda\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\left[N_1(\lambda^2+A\lambda+B)+N_2(2\lambda+A)+N_2(\lambda^2+A\lambda+B)\times\right.$$

$$\left.\times\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)\right]\frac{F(t)dt}{(b-t)^\beta}+(N_1\lambda+N_2)F(x)=F(x).$$

Азбаски $\lambda^2+A\lambda+B=0$ ва $2\lambda+A=0$ аст, пас ифодаи зериинтегралӣ дар тарафи рости баробарии охирон ба сифр баробар мешавад ва бинобар ин:

$$(N_1\lambda+N_2)F(x)=F(x).$$

Аз ин ҷо функсияи намуди (2.22) ҳалли муодилаи (2.4) мебошад, агар шарти:

$$\lambda N_1+N_2=1$$

иҷро шавад. Ҳамин тавр, барои ёфтани коэффитсиентҳои номаълуми N_1 ва N_2 системаи муодилаҳои алгебравии:

$$\begin{cases} N_1=0, \\ \lambda N_1+N_2=1 \end{cases}$$

-ро ҳосил намудем, ки аз он қимати N_1 ва N_2 дар намуди:

$$\begin{cases} N_1=0, \\ N_2=1 \end{cases}$$

ёфта мешавад.

Ҳамин тавр, ҳалли хусусии муодилаи ғайриякҷинсаи (2.4) дар намуди зерин ёфта шуд:

$$y_{\text{чн}} = -\int\limits_x^b e^{\lambda\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)\frac{F(t)}{(b-t)^\beta}\,dt.$$

Дар ин ҳал $F(t) = D_t^\beta f(t)$ гузошта, пас аз як маротиба қисм ба қисм интегронидан, ҳосил мекунем:

$$y_{\text{чн}} = -\int\limits_x^b e^{\lambda\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)\frac{D_t^\beta f(t)dt}{(b-t)^\beta} =$$

$$= -\int\limits_x^b e^{\lambda\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)df(t) =$$

$$= -e^{\lambda\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)\,f(t)\Big|_x^b -$$

$$-\int\limits_x^b e^{\lambda\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\left[\lambda\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)+1\right]\frac{f(t)dt}{(b-t)^\beta}.$$

Дар ин ҷо иҷрошавии шарти:

$$e^{\lambda\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)\,f(t)\Big|_{t=b} = 0 \qquad (2.23)$$

-ро фарз намуда, ҳосил мекунем:

$$y_{\text{чн}} = -\int\limits_x^b e^{\lambda\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\left[\lambda\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)+1\right]\frac{f(t)dt}{(b-t)^\beta}. \qquad (2.24)$$

Акнун ба ин ҳали ёфташуда, ҳалли умумии муодилаи якҷинсаи (2.5)-ро ҷамъ намуда, ҳалли умумии муодилаи ғайриякҷинсаи (2.4)-ро дар намуди зерин ҳосил мекунем:

$$y_{\text{oo}} = e^{\lambda\omega_\beta(x)}\left(c_1 + c_2\omega_\beta(x)\right) -$$

$$-\int_x^b e^{\lambda\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\left[\lambda\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)+1\right]\frac{f(t)}{(b-t)^\beta}dt. \qquad (2.25)$$

Тавре ки аз ҳалли ёфташудаи (2.25) дида мешавад, интеграли тарафи рости он барои баъзе қиматҳои параметри λ метавонад, дуршаванда бошад. Ин ҳолатҳоро ҷудо намуда, шартҳои наздикшавандагии интеграли тарафи рости (2.25)-ро барқарор менамоем. Барои ин ду ҳолати зеринро дида мебароем:

1. Бигузор $\lambda < 0$ бошад. Дар ин маврид нуқтаи $x = b$ нуқтаи махсуси намуди экспоненсиалии интеграли тарафи рости (2.25) мебошад. Барои он ки дар ин маврид интеграл наздикшаванда бошад, зарур аст, ки функсияи $f(x)$ дар нуқтаи $x = b$ ба сифр мубаддал гашта, рафтораш аз рӯйи формулаи ассимптотикии зерин муайян карда шавад:

$$f(x) = o\left[e^{-\delta\omega_\beta(x)}\right], \delta > |\lambda|\,,\ \text{ҳангоми}\ x \to b, \qquad (2.26)$$

яъне функсияи $f(x)$ бояд ба синфи $C_{|\lambda|}[a,b]$ тааллуқ дошта бошад.

Агар $f(x) \in C_{|\lambda|}[a,b]$ бошад, пас дурустии баробарии (2.23), ки пештар фарз намуда будем, исбот мегардад.

2. Бигузор $\lambda > 0$ бошад. Дар ин маврид, агар функсияи $f(x) \in C[a;b]$ бошад, пас интеграл дар тарафи рости (2.25) наздикшаванда мешавад.

Ҳамин тавр, ҳалли умумии муодилаи операторӣ-дифференсиалии (2.4) дар намуди (2.25) ёфта шуда, шартҳои наздикшавандагии интеграли тарафи рости (2.25) таъмин карда шуд.

Акнун муайян месозем, ки ҳалли ёфташудаи муодилаи (2.4) дар кадом ҳолатҳо ҳалли муодилаи интегро-дифференсиалии (2.3) шуда метавонад.

Бо осонӣ нишон додан мумкин аст, ки агар шарти $\lambda < 0$ иҷро гардад, пас функсияи

$$y_{\text{оо}} = e^{\lambda \omega_\beta(x)} \left(c_1 + c_2 \omega_\beta(x) \right) \tag{2.27}$$

ҳалли муодилаи якҷинсаи (2.18) мегардад. Муодилаи ғайриякҷинсаи (2.3)-ро функсияи $y_{\text{чн}}$, ки дар намуди (2.24) ёфта шуда буд, қаноат менамояд. Яъне, дар ин маврид функсияи (2.25) ҳалли умумии муодилаи (2.3) мебошад.

Агар шарти $\lambda > 0$ иҷро гардад, пас функсияи (2.27) ҳалли муодилаи якҷинсаи (2.18) шуда наметавонад. Дар ин маврид муодилаи якҷинсаи (2.18) дорои танҳо ҳалли сифрӣ мегардад. Муодилаи ғайриякҷинсаи (2.3) бошад, дорои ҳалли ягона мегардад ва он бо ёрии формулаи:

$$y_{\text{он}} = -\int\limits_x^b e^{\lambda\left(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(t)\right)} \left[\lambda \left(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(t) \right) + 1 \right] \frac{f(t)dt}{(b-t)^\beta} \tag{2.28}$$

дода мешавад.

Ҳамин тавр, дар ҳолати дорои решаҳои ҳақиқӣ ва якхела будани муодилаи характеристикии (2.6) дар бораи ҳалшавандагии муодилаи интегро-дифференсиалии (2.3) теоремаи зерин исбот карда шуд.

Теоремаи 2.3. *Бигузор, дар муодилаи* (2.3) *ададҳои доимии A ва B чунон бошанд, ки решаҳои муодилаи характеристикии* (2.6) *ҳақиқӣ ва якхела бошанд, яъне* $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. *Инчунин бигузор, ҳангоми* $\lambda < 0$ *будан, функсияи* $f(x)$ *шарти (2.26)-ро қаноат намояд ва ҳангоми* $\lambda > 0$ *будан* $f(x) \in C[a, b]$ *бошад.*

Он гоҳ дар ду ҳолат вобаста аз иҷрошавии шартҳои $\lambda < 0$ *ва* $\lambda > 0$ *ҳалли умумии муодилаи ғайриякҷинсаи интегро-дифференсиалии* (2.3) *мувофиқан бо ёрии формулаи* (2.25) *ва* (2.28) *ифода карда мешавад.*

§ 2.4. Ёфтани ҳалли умумии муодилаи интегро-дифференсиалии ғайриякҷинсаи моделӣ дар ҳолати решаҳои муодилаи характеристикӣ комплексӣ ва ҳамроҳшуда будан

Бигузор, решаҳои муодилаи характеристикии (2.6) комплексӣ ва ҳамроҳшуда бошанд. Дар ин маврид ҳалли умумии муодилаи якҷинсаи (2.5) бо ёрии формулаи зерин ифода карда мешуд:

$$y_{oo} = e^{\alpha\omega_\beta(x)}\left[c_1\cos[\gamma\omega_\beta(x)] + c_2\sin[\gamma\omega_\beta(x)]\right]. \qquad (2.29)$$

Бо дарназардошти ҳисобкуниҳои дар боло овардашуда ва намуди умумии ҳалли муодилаи якҷинсаи (2.5), ҳалли хусусии муодилаи ғайриякҷинсаи (2.4)-ро дар намуди зерин мекобем:

$$y_{\text{чн}} = -\int_x^b e^{\alpha\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\left[N_1\cos\left[\gamma\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)\right] + \right.$$
$$\left. + N_2\sin\left[\gamma\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)\right]\right]\frac{F(t)dt}{(b-t)^\beta}, \qquad (2.30)$$

ки дар ин ҷо N_1 N_2 — коэффитсиентҳои номаълум мебошанд.

Оператори дифференсиалии D_x^β-ро ду маротиба ба (2.30) татбиқ менамоем:

$$D_x^\beta y_{\text{чн}} = -\int_x^b e^{\alpha\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\left[\alpha N_1\cos\left[\gamma\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)\right] + \right.$$
$$+\alpha N_2\sin\left[\gamma\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)\right] - \gamma N_1\sin\left[\gamma\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)\right] +$$
$$\left. +\gamma N_2\cos\left[\gamma\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)\right]\right]\frac{F(t)dt}{(b-t)^\beta} + (N_1 + N_2\cdot 0)F(x).$$

Талаб менамоем, ки шарти:

$$N_1 + N_2 \cdot 0 = 0$$

ичро гардад. Он гоҳ:

$$D_x^\beta y_{\text{чн}} = -\int_x^b e^{\alpha\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\left[(\alpha N_1 + \gamma N_2)\cos\left[\gamma\left(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(t)\right)\right] + \right.$$

$$\left. +(\alpha N_2 - \gamma N_1)\sin\left[\gamma\left(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(t)\right)\right]\right]\frac{F(t)dt}{(b-t)^\beta}.$$

Аз ин ҷо:

$$\left(D_x^\beta\right)^2 y_{\text{чн}} = -\int_x^b e^{\alpha\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\left[\alpha(\alpha N_1 + \gamma N_2)\cos\left[\gamma\left(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(t)\right)\right] + \right.$$

$$+\alpha(\alpha N_2 - \gamma N_1)\sin\left[\gamma\left(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(t)\right)\right] -$$

$$-\gamma(\alpha N_1 + \gamma N_2)\sin\left[\gamma\left(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(t)\right)\right] + \gamma(\alpha N_2 - \gamma N_1) \times$$

$$\left. \times \cos\left[\gamma\left(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(t)\right)\right]\right]\frac{F(t)dt}{(b-t)^\beta} + (\alpha N_1 + \gamma N_2)F(x),$$

ё

$$\left(D_x^\beta\right)^2 y_{\text{чн}} = -\int_x^b [(\alpha^2 N_1 + 2\alpha\gamma N_2 - \gamma^2 N_1)\, cos\left[\gamma\left(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(t)\right)\right] +$$

$$+(\alpha^2 N_2 - 2\alpha\gamma N_1 - \gamma^2 N_2) sin\left[\gamma\left(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(t)\right)\right]]\frac{F(t)dt}{(b-t)^\beta} +$$

$$+(\alpha N_1 + \gamma N_2)F(x).$$

Қиматҳои $y_{\text{чн}}$, $D_x^\beta y_{\text{чн}}$ ва $\left(D_x^\beta\right)^2 y_{\text{чн}}$-ро ба муодилаи ғайриякҷинсаи (2.4) мегузорем:

$$-\int_x^b e^{\alpha\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\left[\left((\alpha^2-\gamma^2)N_1+2\alpha\gamma N_2\right)\cos\left[\gamma\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)\right]+\right.$$

$$\left.+\left((\alpha^2-\gamma^2)N_2-2\alpha\gamma N_1\right)\sin\left[\gamma\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)\right]\right]\frac{F(t)dt}{(b-t)^\beta}+$$

$$+(\alpha N_1+N_2\gamma)F(x)-$$

$$-A\int_x^b e^{\alpha\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\left[(\alpha N_1+\gamma N_2)\cos\left[\gamma\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)\right]+\right.$$

$$\left.+(\alpha N_2-\gamma N_1)\sin\left[\gamma\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)\right]\right]\frac{F(t)dt}{(b-t)^\beta}+AN_1F(x)-$$

$$-B\int_x^b e^{\alpha\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\left[N_1\cos\left[\gamma\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)\right]\right.$$

$$\left.+N_2\sin\left[\gamma\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)\right]\right]\frac{F(t)dt}{(b-t)^\beta}=F(x).$$

Аъзои монандро гурӯҳбандӣ намуда, ҳосил мекунем:

$$-\int_x^b e^{\alpha\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\left[\left((\alpha^2-\gamma^2+A\alpha+B)N_1+(2\alpha\gamma+A\gamma)N_2\right)\times\right.$$

$$\times\cos\left[\gamma\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)\right]+\left((\alpha^2-\gamma^2+A\alpha+B)N_2+(2\alpha\gamma+A\gamma)N_1\right)\times$$

$$\left.\times\sin\left[\gamma\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)\right]\right]\frac{F(t)dt}{(b-t)^\beta}+(\alpha N_1+\gamma N_2)F(x)=F(x).$$

Нишон медиҳем, ки $\alpha^2-\gamma^2+A\alpha+B=0$ ва $2\alpha\gamma+A\gamma=0$ мешавад. Дар ҳақиқат, азбаски $\alpha=-\frac{A}{2}$ ва $\gamma=\frac{\sqrt{4B-A^2}}{2}$ аст, пас:

$$\alpha^2-\gamma^2+A\alpha+B=\frac{A^2}{4}-\frac{4B-A^2}{4}-\frac{A^2}{2}+B=\frac{A^2-4B+A^2-2A^2+4B}{4}=0$$

ва

$$2\alpha\gamma + A\gamma = (2\alpha + A\,)\gamma = \left(-2 \times \frac{A}{2} + A\right)\gamma = (A - A)\gamma = 0 \cdot \gamma = 0.$$

Ҳамин тавр,

$$(\alpha N_1 + N_2\gamma)F(x) = F(x).$$

Аз ин ҷо барои он ки функсияи (2.30) ҳалли муодилаи (2.4) бошад, бояд коэффитсиентҳои номаълуми N_1 ва N_2 чунон бошанд, ки шарти:

$$\alpha N_1 + \gamma N_2 = 1$$

иҷро гардад. Аз ин ҷо, барои ёфтани коэффитсиетҳои N_1 ва N_2 системаи муодилаҳои алгебравии зеринро ҳосил намудем:

$$\begin{cases} N_1 + N_2 \cdot 0 = 0, \\ \alpha N_1 + \gamma N_2 = 1. \end{cases}$$

Аз ин система бо осонӣ ёфта мешавад:

$$N_1 = 0, N_2 = \frac{1}{\gamma}.$$

Ҳамин тавр, ҳалли хусусии муодилаи (2.30) чунин намудро мегирад:

$$y_{\text{чн}} = -\frac{1}{\gamma}\int_x^b e^{\alpha\left(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(t)\right)} \sin\left[\gamma\left(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(t)\right)\right] \frac{F(t)}{(b-t)^\beta}\,dt.$$

Дар ин ҷо $F(t) = D_x^\beta f(t)$ гузошта, як маротиба қисм ба қисм интеграл мегирем:

$$y_{\text{чн}} = -\frac{1}{\gamma}\int_x^b e^{\alpha\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\sin\left[\gamma\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)\right]\frac{D_x^\beta f(t)dt}{(b-t)^\beta} =$$

$$= -\frac{1}{\gamma}\int_x^b e^{\alpha\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\sin\left[\gamma\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)\right]df(t) =$$

$$= -\frac{1}{\gamma}e^{\alpha\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\sin\left[\gamma\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)\right]f(t)\Big|_x^b -$$

$$-\frac{1}{\gamma}\int_x^b e^{\alpha\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\left[\alpha\sin\left[\gamma\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)\right]+\right.$$

$$\left.+\gamma\cos\left[\gamma\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)\right]\right]\frac{f(t)dt}{(b-t)^\beta}.$$

Бо фарзияи он ки:

$$\frac{1}{\gamma}e^{\alpha\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\sin\left[\gamma\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)\right]f(t)\Big|_{t=b} = 0 \qquad (2.31)$$

аст, ҳосил мекунем:

$$y_{\text{чн}} = -\frac{1}{\gamma}\int_x^b e^{\alpha\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\left[\alpha\sin\left[\gamma\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)\right]+\right.$$

$$\left.+\gamma\cos\left[\gamma\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)\right]\right]\frac{f(t)}{(b-t)^\beta}dt. \qquad (2.32)$$

Ба ин ҳалли ёфташуда, ҳалли умумии муодилаи якҷинсаи (2.5)-ро, ки намуди (2.29)-ро дорад, илова намуда, ҳалли умумии муодилаи ғайриякҷинсаи (2.4)-ро дар намуди зерин ҳосил мекунем:

$$y_{\text{он}} = e^{\alpha\omega_\beta(x)}\left[c_1\cos[\gamma\omega_\beta(x)] + c_2\sin[\gamma\omega_\beta(x)]\right] -$$

$$-\frac{1}{\gamma}\int_x^b e^{\alpha\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\left[\alpha\sin\left[\gamma\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)\right] +\right.$$

$$\left.+\gamma\cos\left[\gamma\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)\right]\right]\frac{f(t)dt}{(b-t)^\beta}. \qquad (2.33)$$

Ҳолатҳои наздикшавандагии интегралҳои тарафи рости (2.33)-ро муайян месозем.

1. Бигузор, $\alpha < 0$ бошад. Барои он ки дар ин маврид интеграли тарафи рости (2.33) наздикшаванда гардад, кифоя аст, ки функсияи $f(x)$ дар нуқтаи $x = b$ ба сифр мубаддал гашта, рафтораш аз рӯи формулаи ассимптотикии зерин муайян карда шавад:

$$f(x) = o\left[(b-x)^{-\delta\omega_\beta(x)}\right], \delta > |\alpha|, \text{ҳангоми } x \to b, \qquad (2.34)$$

яъне дар ин маврид функсияи $f(x)$ бояд ба синфи $C_{|\alpha|}[a,b]$ тааллуқ дошта бошад.

Дар ин ҳолат низ агар $f(x) \in C_{|\alpha|}[a,b]$ бошад, пас дурустии фарзияи (2.31) исбот мегардад.

2. Бигузор, $\alpha > 0$ бошад. Дар ин маврид талаби $f(x) \in C[a,b]$ наздикшавандагии интеграли тарафи рости (2.33)-ро таъмин карда метавонад.

Ҳамин тавр, дар ҳолати комплексӣ ва ҳамроҳшуда будани решаҳои муодилаи характеристикии (2.6) ҳалли умумии муодилаи ғайриякҷинсаи операторӣ-дифференсиалии (2.4) ёфта шуд, ки он аз суммаи ду ҳалҳо: ҳалли умумии муодилаи операторӣ-дифференсиалии якҷинсаи (2.5), ки намуди (2.29)-ро дорад ва як ҳалли хусусии муодилаи ғайриякҷинсаи (2.4), ки намуди (2.32)-ро дорад, иборат мебошад.

Акнун ба ёфтани ҳалли муодилаи интегро-дифференсиалии (2.3) баргашта, муайян месозем, ки ин ҳалҳои ёфташуда дар кадом ҳолат муодилаи (2.3)-ро қаноат менамоянд. Барои ин ду ҳолати зеринро дида мебароем:

1. Бигузор, $\alpha < 0$ бошад. Дар ин маврид функсияи (2.29)-ро ба муодилаи интегро-дифференсиалии якҷинсаи (2.18) гузошта, муайян месозем, ки он ҳалли ин муодила мебошад. Инчунин, бо осонӣ санҷида мешавад, ки функсияи (2.32) ҳалли хусусии муодилаи ғайриякҷинсаи (2.3) мебошад. Яъне ҳангоми $\alpha < 0$ будан, ҳалли умумии муодилаи операторӣ-дифференсиалии (2.4), ки намуди (2.33)-ро дорад, ҳалли умумии муодилаи ғайриякҷинсаи интегро-дифференсиалии (2.3) низ мегардад.

2. Бигузор, $\alpha > 0$ бошад. Дар ин маврид бо ёрии санҷиш муайян месозем, ки функсияи (2.29) ҳалли муодилаи якҷинсаи (2.18) шуда наметавонад. Яъне, дар ин маврид муодилаи якҷинсаи (2.18) дорои танҳо ҳалли сифрӣ мебошад.

Муодилаи ғайриякҷинсаи (2.3) бошад, дар ин ҳолат дорои ҳалли ягонаи (2.32) мебошад. Ҳамин тавр, теоремаи зерин исбот карда шуд.

Теоремаи 2.4. *Бигузор, дар муодилаи* (2.3) *коэффисиентҳои* A *ва* B *чунон бошанд, ки решаҳои муодилаи характеристикии* (2.6) *комплексӣ ва ҳамроҳшуда бошанд, яъне* $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\gamma$. *Инчунин, ҳангоми* $\alpha < 0$ *будан функсияи* $f(x)$ *шарти (2.34)-ро қаноат намояд ва ҳангоми* $\alpha > 0$ *будан* $f(x) \in C[a,b]$ *бошад.*

Он гоҳ дар ҳолати инҷрошавии шартҳои $\alpha < 0$ *ё* $\alpha > 0$ *ҳалли умумии муодилаи интегро-дифференсиалии ғайриякҷинсаи* (2.3) *мувофиқан бо ёрии формулаҳои* (2.33) *ва* (2.32) *ифода карда мешавад.*

§ 2.5. Таҳқиқи масъалаи Коши барои муодилаи интегро-дифференсиалии моделӣ

Бигузор, дар $\Gamma = \{x : a \leq x \leq b\}$ муодилаи интегро-дифференсиалии моделии зерин дода шуда бошад:

$$D_x^{\beta} y + Ay - \int_x^b \frac{B}{(b-t)^{\beta}} y(t)dt = f(x), \qquad (2.35)$$

ки дар ин ҷо A ва B ададҳои доимӣ мебошанд.

Тавре ки аз натиҷаҳои параграфҳои пешин маълум гардид, муодилаи (2.35) вобаста аз решаҳои муодилаи характеристикии

$$\lambda^2 + A\lambda + B = 0 \qquad (2.36)$$

метавонад, дорои чунин ҳалле бошад, ки он аз доимиҳои ихтиёрии c_1, c_2 вобаста аст. Бинобар ин, барои муайян сохтани ин доимиҳои ихтиёрӣ ва ҷудо намудани ҳалли ягонаи муодилаи (2.35) гузориш ва таҳқиқи масъалаи Коши барои муодилаи (2.35) зарур мегардад.

Дар оянда мо ду навъи масъалаҳо: яке масъали Кошӣ ва дигаре масъалаи типи Коширо барои муодилаи (2.35) таҳқиқ менамоем.

Гузориши масъалаи Коши. *Дар ҳолати иҷрошавии шарти* $Re\lambda < 0$ *аз маҷмуи ҳалҳои муодилаи* (2.35) *чунин ҳалли* $y = y(x)$ *ҷудо карда шавад, ки он дар нуқтаи* $x = x_0 \in \Gamma\backslash\{b\}$ *шарти*

$$y|_{x=x_0} = y_0, \qquad D_x^{\beta} y|_{x=x_0} = y_0' \qquad (2.37)$$

-ро қаноат намояд.

Ин масъаларо дар ҳолатҳои зерин таҳқиқ менамоем:

I. Бигузор, муодилаи характеристикии (2.36) дорои решаҳои ҳақиқӣ ва гуногуни λ_1, λ_2 буда, шарти $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ иҷро шавад. Дар ин маврид ҳалли умумии муодилаи (2.35) бо ёрии формулаи зерин ифода карда мешавад:

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 \omega_\beta(x)} + c_2 e^{\lambda_2 \omega_\beta(x)} -$$

$$-\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \int_x^b \left[\lambda_1 e^{\lambda_1\left(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(t)\right)} - \lambda_2 e^{\lambda_2\left(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(t)\right)}\right] \frac{f(t)dt}{(b-t)^\beta}. \quad (2.38)$$

Ба ин функсия оператори D_x^β-ро татбиқ менамоем:

$$D_x^\beta y = c_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 \omega_\beta(x)} + c_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 \omega_\beta(x)} -$$

$$-\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \int_x^b \left[\lambda_1^2 e^{\lambda_1\left(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(t)\right)} - \lambda_2^2 e^{\lambda_2\left(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(t)\right)}\right] \frac{f(t)dt}{(b-t)^\beta} + f(x). \quad (2.39)$$

Аз (2.38) ва (2.39) бо истифода аз шартҳои (2.37) ҳосил мекунем:

$$\begin{cases} c_1 e^{\lambda_1 \omega_\beta(x_0)} + c_2 e^{\lambda_2 \omega_\beta(x_0)} - \\ -\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \int_{x_0}^b \left[\lambda_1 e^{\lambda_1\left(\omega_\beta(x_0) - \omega_\beta(t)\right)} - \lambda_2 e^{\lambda_2\left(\omega_\beta(x_0) - \omega_\beta(t)\right)}\right] \frac{f(t)dt}{(b-t)^\beta} = y_0, \\ c_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 \omega_\beta(x_0)} + c_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 \omega_\beta(x_0)} - \\ -\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \int_{x_0}^b \left[\lambda_1^2 e^{\lambda_1\left(\omega_\beta(x_0) - \omega_\beta(t)\right)} - \lambda_2^2 e^{\lambda_2\left(\omega_\beta(x_0) - \omega_\beta(t)\right)}\right] \frac{f(t)dt}{(b-t)^\beta} + f(x_0) = y_0'. \end{cases} \quad (2.40)$$

Ишораҳои зеринро дохил менамоем:

$$\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \int_{x_0}^b \left[\lambda_1 e^{\lambda_1\left(\omega_\beta(x_0) - \omega_\beta(t)\right)} - \lambda_2 e^{\lambda_2\left(\omega_\beta(x_0) - \omega_\beta(t)\right)}\right] \frac{f(t)dt}{(b-t)^\beta} = R(x_0),$$

$$\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\int\limits_{x_0}^{b}\left[\lambda_1^2 e^{\lambda_1\left(\omega_\beta(x_0)-\omega_\beta(t)\right)}-\lambda_2^2 e^{\lambda_2\left(\omega_\beta(x_0)-\omega_\beta(t)\right)}\right]\frac{f(t)dt}{(b-t)^\beta}+f(x_0)=R'(x_0).$$

Он гоҳ, системаи (2.40) намуди зеринро мегирад:

$$\begin{cases} c_1 e^{\lambda_1\omega_\beta(x_0)}+c_2 e^{\lambda_2\omega_\beta(x_0)}=y_0+R_1(x_0), \\ c_1\lambda_1 e^{\lambda_1\omega_\beta(x_0)}+c_2\lambda_2 e^{\lambda_2\omega_\beta(x_0)}=y_0'+R_1'(x_0). \end{cases} \tag{2.41}$$

Системаи (2.41)-ро бо ёрии қоидаи Крамер ҳал менамоем:

$$\Delta=\begin{vmatrix} e^{\lambda_1\omega_\beta(x_0)} & e^{\lambda_2\omega_\beta(x_0)} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1\omega_\beta(x_0)} & \lambda_2 e^{\lambda_2\omega_\beta(x_0)} \end{vmatrix}=(\,\lambda_2-\lambda_1)e^{(\lambda_1+\lambda_2)\omega_\beta(x_0)}$$

$$\Delta_{c_1}=\begin{vmatrix} y_0+R_1(x_0) & e^{\lambda_2\omega_\beta(x_0)} \\ y_0'+R_1'(x_0) & \lambda_2 e^{\lambda_2\omega_\beta(x_0)} \end{vmatrix}=\left[\lambda_2\left(y_0+R_1(x_0)\right)-\left(y_0'+R_1'(x_0)\right)\right]e^{\lambda_2\omega_\beta(x_0)},$$

$$\Delta_{c_2}=\begin{vmatrix} e^{\lambda_1\omega_\beta(x_0)} & y_0+R_1(x_0) \\ \lambda_1 e^{\lambda_1\omega_\beta(x_0)} & y_0'+R_1'(x_0) \end{vmatrix}=\left[\left(y_0'+R_1'(x_0)\right)-\lambda_1\left(y_0+R_1(x_0)\right)\right]e^{\lambda_1\omega_\beta(x_0)}.$$

Аз ин ҷо:

$$c_1=\frac{\Delta_{c_1}}{\Delta}=\frac{\left[\lambda_2\left(y_0+R_1(x_0)\right)-\left(y_0'+R_1'(x_0)\right)\right]e^{\lambda_2\omega_\beta(x_0)}}{(\,\lambda_2-\lambda_1)e^{(\lambda_1+\lambda_2)\omega_\beta(x_0)}}=$$

$$=\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\frac{\left[\lambda_2\left(y_0+R_1(x_0)\right)-y_0'-R_1'(x_0)\right]}{e^{\lambda_1\omega_\beta(x_0)}},$$

$$c_2=\frac{\Delta_{c_2}}{\Delta}=\frac{\left[\left(y_0'+R_1'(x_0)\right)-\lambda_1\left(y_0+R_1(x_0)\right)\right]e^{\lambda_1\omega_\beta(x_0)}}{(\,\lambda_2-\lambda_1)e^{(\lambda_1+\lambda_2)\omega_\beta(x_0)}}=$$

$$=\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\frac{\left[y_0'+R_1'(x_0)-\lambda_1\left(y_0+R_1(x_0)\right)\right]}{e^{\lambda_2\omega_\beta(x_0)}}.$$

Ҳамин тавр, ин қиматҳои ёфташудаи c_1 ва c_2-ро ба (2.38) гузошта, ҳалли ягонаи масъалаи Коширо дар намуди зерин ҳосил мекунем:

$$y(x) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\left[\lambda_2\big(y_0 + R_1(x_0)\big) - y_0' - R_1'(x_0)\right]e^{\lambda_1\left(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(x_0)\right)} +$$

$$+\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\left[y_0' + R_1'(x_0) - \lambda_1\big(y_0 + R_1(x_0)\big)\right]e^{\lambda_2\left(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(x_0)\right)} - \qquad (2.42)$$

$$-\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\int\limits_x^b \left[\lambda_1 e^{\lambda_1\left(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(t)\right)} - \lambda_2 e^{\lambda_2\left(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(t)\right)}\right]\frac{f(t)dt}{(b-t)^\beta}.$$

Теоремаи зерин исбот карда шуд.

Теоремаи 2.6. *Бигузор, дар муодилаи интегро-дифференсиалии ғайриякҷинсаи моделии* (2.35) *коэффитсиентҳои он A ва B чунон бошанд, ки муодилаи характеристикии* (2.36) *дорои решаҳои ҳақиқӣ ва гуногуни* λ_1 *ва* λ_2 *буда, онҳо нобаробарии* $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$*-ро қаноат намоянд. Инчунин, функсияи* $f(x)$ *шарти (2.17) – ро қаноат намояд Он гоҳ масъалаи Коши* (2.35) – (2.37) *якқимата ҳалшаванда аст ва ҳалли ягонаи ин масъала бо ёрии формулаи* (2.42) *ифода карда мешавад.*

II. Бигузор, муодилаи характеристикии (2.36) дорои решаҳои ҳақиқӣ ва якхела, яъне $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ буда, шарти $\lambda < 0$ иҷро шавад. Ҳалли умумии муодилаи интегро-дифференсиалии (2.35) дар ин ҳолат бо ёрии формулаи зерин дода мешавад:

$$y(x) = \Big(c_1 + c_2\omega_\beta(x)\Big)e^{\lambda\omega_\beta(x)} -$$

$$-\int\limits_x^b e^{\lambda\left(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(t)\right)}\left[\lambda\Big(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(t)\Big) + 1\right]\frac{f(t)dt}{(b-t)^\beta}. \qquad (2.43)$$

Дар ин ҳолат низ ба функсияи (2.43) оператори D_x^β-ро татбиқ намуда, меёбем:

$$D_x^\beta y(x) = \left[\lambda c_1 + \big(\lambda\omega_\beta(x) + 1\big)c_2\right]e^{\lambda\omega_\beta(x)} -$$

$$-\int_x^b e^{\lambda\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\left[\lambda^2\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)+2\lambda\right]\frac{f(t)dt}{(b-t)^\beta}+f(x). \quad (2.44)$$

Шартҳои аввалаи (2.37)-ро истифода бурда, аз (2.43) ва (2.44) ҳосил мекунем:

$$\begin{cases} \left(c_1+c_2\omega_\beta(x_0)\right)e^{\lambda\omega_\beta(x_0)}- \\ -\int_{x_0}^b e^{\lambda\left(\omega_\beta(x_0)-\omega_\beta(t)\right)}\left[\lambda\left(\omega_\beta(x_0)-\omega_\beta(t)\right)+1\right]\frac{f(t)dt}{(b-t)^\beta}=y_0, \\ \left(\lambda c_1+\lambda c_2\omega_\beta(x_0)+c_2\right)e^{\lambda\omega_\beta(x_0)}- \\ -\int_{x_0}^b e^{\lambda\left(\omega_\beta(x_0)-\omega_\beta(t)\right)}\left[\lambda^2\left(\omega_\beta(x_0)-\omega_\beta(t)\right)+2\lambda\right]\frac{f(t)dt}{(b-t)^\beta}+f(x_0)=y_0'. \end{cases} \quad (2.45)$$

Дар ин ҳолат ишораҳои зеринро дохил менамоем:

$$\int_{x_0}^b e^{\lambda\left(\omega_\beta(x_0)-\omega_\beta(t)\right)}\left[\lambda\left(\omega_\beta(x_0)-\omega_\beta(t)\right)+1\right]\frac{f(t)dt}{(b-t)^\beta}=R_2(x_0),$$

$$\int_{x_0}^b e^{\lambda\left(\omega_\beta(x_0)-\omega_\beta(t)\right)}\left[\lambda^2\left(\omega_\beta(x_0)-\omega_\beta(t)\right)+2\lambda\right]\frac{f(t)dt}{(b-t)^\beta}+f(x_0)=R_2'(x_0).$$

Пас системаи (2.45) ба чунин намуд меояд:

$$\begin{cases} \left(c_1+c_2\omega_\beta(x_0)\right)e^{\lambda\omega_\beta(x_0)}=y_0+R_2(x_0), \\ \left(\lambda c_1+\lambda c_2\omega_\beta(x_0)+c_2\right)e^{\lambda\omega_\beta(x_0)}=y_0'+R_2'(x_0). \end{cases}$$

Ин системаро ҳал намуда, номаълумҳои c_1 ва c_2-ро меёбем:

$$\Delta= \begin{vmatrix} e^{\lambda\omega_\beta(x_0)} & \omega_\beta(x_0)e^{\lambda\omega_\beta(x_0)} \\ \lambda\, e^{\lambda\omega_\beta(x_0)} & \lambda\omega_\beta(x_0)e^{\lambda\omega_\beta(x_0)}+e^{\lambda\omega_\beta(x_0)} \end{vmatrix} = e^{2\lambda\omega_\beta(x_0)},$$

$$\Delta_{c_1}= \begin{vmatrix} y_0+R_2(x_0) & \omega_\beta(x_0)e^{\lambda\omega_\beta(x_0)} \\ y_0'+R_2'(x_0) & \lambda\omega_\beta(x_0)e^{\lambda\omega_\beta(x_0)}+e^{\lambda\omega_\beta(x_0)} \end{vmatrix} = \big[\big(y_0+R_2(x_0)\big)\times$$

$$\times\big(\lambda\omega_\beta(x_0)+1\big)-\big(y_0'+R_2'(x_0)\big)\omega_\beta(x_0)\big]e^{\lambda\omega_\beta(x_0)},$$

$$\Delta_{c_2}= \begin{vmatrix} e^{\lambda\omega_\beta(x_0)} & y_0+R_2(x_0) \\ \lambda\, e^{\lambda\omega_\beta(x_0)} & y_0'+R_2'(x_0) \end{vmatrix} = \big[y_0'+R_2'(x_0)-\lambda\big(y_0+R_2(x_0)\big)\big]e^{\lambda\omega_\beta(x_0)}.$$

Аз ин ҷо қиматҳои c_1 ва c_2-ро меёбем:

$$c_1=\big[\big(y_0+R_2(x_0)\big)\big(\lambda\omega_\beta(x_0)+1\big)-\big(y_0'+R_2'(x_0)\big)\omega_\beta(x_0)\big]e^{-\lambda\omega_\beta(x_0)},$$

$$c_2=\big[y_0'+R_2'(x_0)-\lambda\big(y_0+R_2(x_0)\big)\big]e^{-\lambda\omega_\beta(x_0)}.$$

Ин қиматҳои ёфташудаи c_1 ва c_2-ро ба (2.43) гузошта, ҳалли ягонаи масъалаи Коширо дар намуди зерин ҳосил мекунем:

$$y(x)=\big[\big(y_0+R_2(x_0)\big)\big(\lambda\omega_\beta(x_0)+1\big)-\big(y_0'+R_2'(x_0)\big)\omega_\beta(x_0)\big]e^{\lambda\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(x_0)\right)}-$$

$$-\big[y_0'+R_2'(x_0)-\lambda\big(y_0+R_2(x_0)\big)\big]\omega_\beta(x)e^{\lambda\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(x_0)\right)}-$$

$$-\int\limits_x^b e^{\lambda\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\left[\lambda\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)+1\right]\frac{f(t)dt}{(b-t)^\beta}. \qquad (2.46)$$

Ҳамин тавр, теоремаи зерин исбот карда шуд.

Теоремаи 2.7. *Бигузор, дар муодилаи интегро-дифференсиалии ғайриякҷинсаи моделии* (2.35) *коэффисиентҳои он A ва B чунон бошад, ки муодилаи характеристикии* (2.36) *дорои решаҳои ҳақиқӣ ва якхела бошанд, яъне* $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$ *ва шарти* $\lambda<0$ *иҷро шавад. Инчунин, функсияи* $f(x)$ *шарти (2.26)-ро қаноат намояд. Он гоҳ масъалаи Коши* (2.35) − (2.37) *якқимата ҳалшаванда аст ва ҳалли ягонаи ин масъала бо ёрии формулаи* (2.46) *ифода карда мешавад.*

III. Бигузор, решаҳои муодилаи характеристикии (2.36) компелксӣ ва ҳамроҳшуда бошанд, яъне $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\gamma$ ва $\alpha < 0$ бошад. Дар ин маврид дар асоси натиҷаи пештар бадастоварда, ҳалли умумии муодилаи интегро-дифференсиалии (2.35) бо ёрии формулаи зерин ифода карда мешавад:

$$y(x) = e^{\alpha\omega_\beta(x)}\left[c_1\cos[\gamma\omega_\beta(x)] + c_2\sin[\gamma\omega_\beta(x)]\right] - \frac{1}{\gamma}\int\limits_x^b e^{\alpha\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)} \times$$

$$\times\left[\alpha\sin\left[\gamma\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)\right] + \gamma\cos\left[\gamma\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)\right]\right]\frac{f(t)dt}{(b-t)^\beta}. \quad (2.47)$$

Ба ин функсия оператори D_x^β-ро татбиқ менамоем:

$$D_x^\beta y(x) = e^{\alpha\omega_\beta(x)}\left[(\alpha c_1 + \gamma c_2)\cos[\gamma\omega_\beta(x)] + (\alpha c_2 - \gamma c_1)\sin[\gamma\omega_\beta(x)]\right] -$$

$$-\frac{1}{\gamma}\int\limits_x^b e^{\alpha\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\left[(\alpha^2-\gamma^2)\sin\left[\gamma\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)\right] +\right.$$

$$\left.+\,2\alpha\gamma\cos\left[\gamma\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)\right]\right]\frac{f(t)dt}{(b-t)^\beta} + f(x).$$

Дар асоси шартҳои аввалаи (2.37) ҳосил мекунем:

$$\begin{cases} e^{\alpha\omega_\beta(x_0)}\left[c_1\cos[\gamma\omega_\beta(x_0)] + c_2\sin[\gamma\omega_\beta(x_0)]\right] - \dfrac{1}{\gamma}\displaystyle\int\limits_{x_0}^b e^{\alpha\left(\omega_\beta(x_0)-\omega_\beta(t)\right)} \times \\ \times\left[\alpha\sin\left[\gamma\left(\omega_\beta(x_0)-\omega_\beta(t)\right)\right] + \gamma\cos\left[\gamma\left(\omega_\beta(x_0)-\omega_\beta(t)\right)\right]\right]\dfrac{f(t)dt}{(b-t)^\beta} = y_0, \\ e^{\alpha\omega_\beta(x_0)}\left[(\alpha c_1 + \gamma c_2)\cos[\gamma\omega_\beta(x_0)] + (\alpha c_2 - \gamma c_1)\sin[\gamma\omega_\beta(x_0)]\right] - \\ -\dfrac{1}{\gamma}\displaystyle\int\limits_{x_0}^b e^{\alpha\left(\omega_\beta(x_0)-\omega_\beta(t)\right)}\left[(\alpha^2-\gamma^2)\sin\left[\gamma\left(\omega_\beta(x_0)-\omega_\beta(t)\right)\right]\right. \\ \left.+\,2\alpha\gamma\cos\left[\gamma\left(\omega_\beta(x_0)-\omega_\beta(t)\right)\right]\right]\dfrac{f(t)dt}{(b-t)^\beta} + f(x_0) = y_0'. \end{cases} \quad (2.48)$$

Ишораҳои зеринро дохил менамоем:

$$\frac{1}{\gamma}\int\limits_{x_0}^{b} e^{\alpha\left(\omega_\beta(x_0)-\omega_\beta(t)\right)}\left[\alpha\sin\left[\gamma\left(\omega_\beta(x_0)-\omega_\beta(t)\right)\right]+\right.$$

$$\left.+\gamma\cos\left[\gamma\left(\omega_\beta(x_0)-\omega_\beta(t)\right)\right]\right]\frac{f(t)dt}{(b-t)^\beta}=R_2(x_0),$$

$$\frac{1}{\gamma}\int\limits_{x_0}^{b} e^{\alpha\left(\omega_\beta(x_0)-\omega_\beta(t)\right)}\left[(\alpha^2-\gamma^2)\sin\left[\gamma\left(\omega_\beta(x_0)-\omega_\beta(t)\right)\right]+\right.$$

$$\left.+2\alpha\gamma\cos\left[\gamma\left(\omega_\beta(x_0)-\omega_\beta(t)\right)\right]\right]\frac{f(t)dt}{(b-t)^\beta}=R_2'(x_0).$$

Он гоҳ системаи (2.48) чунин намуд мегирад:

$$\begin{cases} e^{\alpha\omega_\beta(x_0)}\left[c_1\cos[\gamma\omega_\beta(x_0)]+c_2\sin[\gamma\omega_\beta(x_0)]\right]=y_0+R_3(x_0), \\ e^{\alpha\omega_\beta(x_0)}\left[\left(\alpha\cos[\gamma\omega_\beta(x_0)]-\gamma\sin[\gamma\omega_\beta(x_0)]\right)c_1+\right. \\ \left.+\left(\alpha\sin[\gamma\omega_\beta(x_0)]+\gamma\cos[\gamma\omega_\beta(x_0)]\right)c_2\right]=y_0'+R_3'(x_0). \end{cases}$$

Ин системаро ҳал намуда, доимиҳои c_1ва c_2-ро меёбем:

$$\Delta=$$

$$=\begin{vmatrix} e^{\alpha\omega_\beta(x_0)}\cos[\gamma\omega_\beta(x_0)] & e^{\alpha\omega_\beta(x_0)}\sin[\gamma\omega_\beta(x_0)] \\ e^{\alpha\omega_\beta(x_0)}\left(\alpha\cos[\gamma\omega_\beta(x_0)]-\gamma\sin[\gamma\omega_\beta(x_0)]\right) & e^{\alpha\omega_\beta(x_0)}\left(\alpha\sin[\gamma\omega_\beta(x_0)]+\gamma\cos[\gamma\omega_\beta(x_0)]\right) \end{vmatrix}=$$

$$=e^{2\alpha\omega_\beta(x_0)}\left[\alpha\cos[\gamma\omega_\beta(x_0)]\sin[\gamma\omega_\beta(x_0)]+\gamma\cos^2[\gamma\omega_\beta(x_0)]-\right.$$

$$\left.-\alpha\sin[\gamma\omega_\beta(x_0)]\cos[\gamma\omega_\beta(x_0)]+\gamma\sin^2[\gamma\omega_\beta(x_0)]\right]=\gamma e^{2\alpha\omega_\beta(x_0)},$$

$$\Delta_{c_2}=\begin{vmatrix} e^{\alpha\omega_\beta(x_0)}\cos[\gamma\omega_\beta(x_0)] & y_0+R_3(x_0) \\ e^{\alpha\omega_\beta(x_0)}\left(\alpha\cos[\gamma\omega_\beta(x_0)]-\gamma\sin[\gamma\omega_\beta(x_0)]\right) & y_0'+R_3'(x_0) \end{vmatrix}=$$

$$=e^{\alpha\omega_\beta(x_0)}\left[\left(y_0'+R_3'(x_0)-\alpha y_0-\alpha R_3(x_0)\right)\cos[\gamma\omega_\beta(x_0)]+\right.$$

$$+\gamma\big(y_0+R_3(x_0)\big)\sin\big[\gamma\omega_\beta(x_0)\big]\Big],$$

$$\Delta_{c_1}=\begin{vmatrix} y_0+R_3(x_0) & e^{\alpha\omega_\beta(x_0)}\sin\big[\gamma\omega_\beta(x_0)\big] \\ y_0'+R_3'(x_0) & e^{\alpha\omega_\beta(x_0)}\big(\alpha\sin\big[\gamma\omega_\beta(x_0)\big]+\gamma\cos\big[\gamma\omega_\beta(x_0)\big]\big) \end{vmatrix}=$$

$$=e^{\alpha\omega_\beta(x_0)}\Big[\big(\alpha y_0+\alpha R_3(x_0)-\ y_0'-R_3'(x_0)\big)\sin\big[\gamma\omega_\beta(x_0)\big]+$$

$$+\gamma\big(y_0+R_3(x_0)\big)\cos\big[\gamma\omega_\beta(x_0)\big]\Big],$$

$$c_1=\frac{1}{\gamma e^{\alpha\omega_\beta(x_0)}}\Big[\big(\alpha y_0+\alpha R_3(x_0)-\ y_0'-R_3'(x_0)\big)\sin\big[\gamma\omega_\beta(x_0)\big]+$$

$$+\gamma\big(y_0+R_3(x_0)\big)\cos\big[\gamma\omega_\beta(x_0)\big]\Big]$$

$$c_2=\frac{1}{\gamma e^{\alpha\omega_\beta(x_0)}}\Big[\big(\ y_0'+R_3'(x_0)-\alpha y_0-\alpha R_3(x_0)\big)\cos\big[\gamma\omega_\beta(x_0)\big]+$$

$$+\gamma\big(y_0+R_3(x_0)\big)\sin\big[\gamma\omega_\beta(x_0)\big]\Big].$$

Ҳамин тавр, ин қиматҳои ёфташудаи c_1ва c_2-ро ба (2.47) гузошта, ҳалли ягонаи масъалаи Кoширо дар намуди зерин ҳосил мекунем:

$$y(x)=\big[\cos\big[\gamma\omega_\beta(x)\big]\Big[\big(\alpha y_0+\alpha R_3(x_0)-\ y_0'-R_3'(x_0)\big)\sin\big[\gamma\omega_\beta(x_0)\big]+$$

$$+\gamma\big(y_0+R_3(x_0)\big)\cos\big[\gamma\omega_\beta(x_0)\big]\Big]+\sin\big[\gamma\omega_\beta(x)\big]\big[\big(\ y_0'+R_3'(x_0)-$$

$$-\alpha y_0-\alpha R_3(x_0)\big)\cos\big[\gamma\omega_\beta(x_0)\big]+$$

$$+\gamma\big(y_0+R_3(x_0)\big)\sin\big[\gamma\omega_\beta(x_0)\big]\Big]e^{\alpha\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(x_0)\right)}-$$

$$-\frac{1}{\gamma}\int\limits_x^b e^{\alpha\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\Big[\alpha\sin\Big[\gamma\Big(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\Big)\Big]+$$

$$+\gamma\cos\Big[\gamma\Big(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\Big)\Big]\Big]\frac{f(t)dt}{(b-t)^\beta}. \qquad (2.49)$$

Ҳамин тавр, оид ба ҳалшавандагии масъалаи Коши барои муодилаи (2.35) теоремаи зерин исбот карда шуд.

Теоремаи 2.8. *Бигузор, дар муодилаи интегро-дифференнсиалии ғайриякҷинсаи моделии* (2.35) *коэффитсиентҳои он* A *ва* B *чунон бошанд, ки муодилаи характеристикии* (2.36) *дорои решаҳои комплексӣ ва ҳамроҳшуда бошад, яъне* $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\gamma$ *ва шарти* $\alpha < 0$ *иҷро шавад. Инчунин, функсияи* $f(x)$ *шарти (2.34)-ро қаноат намояд. Он гоҳ масъалаи Коши* $(2.35) - (2.37)$ *яккимата ҳалшаванда аст ва ҳалли ягонаи ин масъала бо ёрии формулаи* (2.49) *ифода карда мешавад.*

§ 2.6. Таҳқиқи масъалаи навъи Коши барои муодилаи интегро-дифференсиалии моделӣ

Натиҷаҳои дар §1.5. овардашуда нишон медиҳад, ки агар нуқтаи $x_0 \in \Gamma$ бошад, пас масъалаи Коши барои муодилаи (2.35) айнан бо методи классикии таҳқиқи масъалаи Коши барои муодилаҳои дифференсиалӣ таҳқиқ карда мешавад. Вале агар $x_0 = b$ бошад, яъне x_0 ба нуқтаи махсуси муодила баробар шавад, пас масъалаи Коширо барои муодилаи (2.35) бо методи классикӣ таҳқиқ намудан ғайриимкон мегардад. Дар ин маврид таҳқиқоти иловагӣ гузаронида, масъалаи навъи Коширо барои муодилаи (2.35) таҳқиқ намудан лозим меояд.

Барои таҳқиқ намудани масъалаи навъи Коши барои муодилаи (2.35) пеш аз ҳама рафтори ҳалҳои муодилаи (2.35)-ро дар атрофи нуқтаи махсус меомӯзем.

Вобаста ба решаҳои муодилаи характеристикии (2.36) ҳолатҳои зеринро ҷудо мекунем:

I. Бигузор, решаҳои муодилаи характеристикии (2.36) ҳақиқӣ ва гуногун буда $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ бошад. Дар ин маврид халли муодилаи (2.35) бо ёрии формулаи (2.38) дода мешавад. Ҳалли (2.38)-ро ба намуди зерин меорем:

$$y(x) = e^{\lambda_2 \omega_\beta(x)}\left[c_1 e^{(\lambda_1-\lambda_2)\omega_\beta(x)} + c_2\right] -$$

$$-\frac{e^{\lambda_2 \omega_\beta(x)}}{\lambda_1 - \lambda_2}\int_x^b \left[\lambda_1 \frac{e^{(\lambda_1-\lambda_2)\omega_\beta(x)}}{e^{\lambda_1 \omega_\beta(t)}} - \frac{\lambda_2}{e^{\lambda_2 \omega_\beta(t)}}\right]\frac{f(t)}{(b-t)^\beta}\,dt.$$

Аз ин ҷо:

$$\frac{1}{e^{\lambda_2\omega_\beta(x)}}y(x)=c_1e^{(\lambda_1-\lambda_2)\omega_\beta(x)}+c_2-$$

$$-\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\int_x^b\left[\lambda_1\frac{e^{(\lambda_1-\lambda_2)\omega_\beta(x)}}{e^{\lambda_1\omega_\beta(t)}}-\frac{\lambda_2}{e^{\lambda_2\omega_\beta(t)}}\right]\frac{f(t)dt}{(b-t)^\beta}. \qquad (2.50)$$

Ишораи зеринро дохил менамоем:

$$\frac{1}{e^{\lambda_2\omega_\beta(x)}}y(x)=P[\lambda_2,y(x)].$$

Акнун оператори D_x^β-ро ба функсияи $P[\lambda_2,y(x)]$ татбиқ намуда, ҳосил мекунем:

$$D_x^\beta\ P[\lambda_2,y(x)]=\mathrm{c}_1(\lambda_1-\lambda_2)e^{(\lambda_1-\lambda_2)\omega_\beta(x)}-$$

$$-\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\int_x^b\left[\lambda_1(\lambda_1-\lambda_2)\frac{e^{(\lambda_1-\lambda_2)\omega_\beta(x)}}{e^{\lambda_1\omega_\beta(t)}}\right]\frac{f(t)}{(b-t)^\beta}dt+\frac{f(x)}{e^{\lambda_2\omega_\beta(t)}}.$$

Аз ин ҷо:

$$\frac{1}{e^{(\lambda_1-\lambda_2)\omega_\beta(x)}}D_x^\beta\ P[\lambda_2,y(x)]=\mathrm{c}_1(\lambda_1-\lambda_2)-$$

$$-\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\int_x^b\frac{\lambda_1(\lambda_1-\lambda_2)}{e^{\lambda_1\omega_\beta(t)}}\frac{f(t)}{(b-t)^\beta}dt+\frac{f(x)}{e^{\lambda_1\omega_\beta(x)}}$$

Ишораи дигари зеринро дохил мекунем:

$$\frac{1}{e^{(\lambda_1-\lambda_2)\omega_\beta(x)}}D_x^\beta\ P[\lambda_2,y(x)]=\ P_1\left[\lambda_1,\lambda_2,D_x^\beta y(x)\right].$$

Акнун нишон медиҳем, ки баробариҳои:

$$\begin{cases} P[\lambda_2, y(x)]|_{x=b} = c_2, \\ P_1\left[\lambda_1, \lambda_2, D_x^{\beta} y(x)\right]_{x=b} = c_1(\lambda_1 - \lambda_2), \end{cases} \tag{2.51}$$

иҷро мегарданд.

Чунончи мо дар боло қайд карда будем, ки дар ҳалли (2.38) функсияи $f(x)$ дар нуқтаи $x = b$ аз рӯйи формулаи ассимптотикии:

$$f(x) = o\left[e^{-\delta\omega_{\beta}(x)}\right], \quad \delta > |\lambda_1|, \ x \to b$$

ба сифр майл менамояд, ки он дар нуқтаи $x = b$ махсусияти аз як хурд доштани интеграли тарафи рости (2.50)-ро мефаҳмонад. Аз ин рӯ, мувофиқи теорема дар бораи ба ҳудуд гузаштан, дар интегралҳои аз параметр вобаста, ҳосил мекунем:

$$P[\lambda_2, y(x)]|_{x=b} = \lim_{x\to b}\left[c_1 e^{(\lambda_1-\lambda_2)\omega_{\beta}(x)} + c_2\right] -$$

$$-\lim_{x\to b}\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\int_x^b\left[\lambda_1\frac{e^{(\lambda_1-\lambda_2)\omega_{\beta}(x)}}{e^{\lambda_1\omega_{\beta}(t)}} - \frac{\lambda_2}{e^{\lambda_2\omega_{\beta}(t)}}\right]\frac{f(t)}{(b-t)^{\beta}}dt = c_2$$

ва бо дарназардошти он ки:

$$\lim_{x\to b}\frac{f(x)}{e^{\lambda_1\omega_{\beta}(x)}} = \lim_{x\to b}\frac{e^{-(|\lambda_1|+\varepsilon)\omega_{\beta}(x)}}{e^{\lambda_1\omega_{\beta}(x)}} = \lim_{x\to b}\frac{1}{e^{\varepsilon\omega_{\beta}(x)}} = 0,$$

пас:

$$P_1\left[\lambda_1, \lambda_2, D_x^{\beta} y(x)\right]_{x=b} = \lim_{x\to b}[c_1(\lambda_2 - \lambda_1) -$$

$$-\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\int_x^b \frac{\lambda_1(\lambda_1-\lambda_2)}{e^{\lambda_1\omega_\beta(t)}}\frac{f(t)}{(b-t)^\beta}dt+\frac{f(x)}{e^{\lambda_1\omega_\beta(x)}}\Bigg]=c_1(\lambda_2-\lambda_1).$$

Ҳамин тавр, баробариҳои (2.51) исбот гардиданд.

Акнун масъалаи навъи Коширо барои муодилаи (2.35) таҳқиқ менамоем.

Гузориши масъалаи навъи Коши барои муодилаи (2.35), ҳангоми ичро шудани шарти $\boldsymbol{\lambda_1 < \lambda_2 < 0}$. *Чунин ҳалли $y = y(x)$ – и муодилаи* (2.35) *ёфта шавад, ки он дар нуқтаи $x = b$ шартҳои ибтидоии вазндори*

$$\begin{cases} P[\lambda_2, y(x)]|_{x=b} = k_2, \\ P_1\left[\lambda_1, \lambda_2, D_x^\beta y(x)\right]_{x=b} = k_1 \end{cases} \tag{2.52}$$

-ро қаноат намояд.

Таҳқиқи масъалаи навъи Коши. Бо дарназардошти баробариҳои исботгардидаи (2.51) ва шатрҳои ибтидоии (2.52) ҳосил мекунем:

$$\begin{cases} c_2 = k_2, \\ c_1(\lambda_1-\lambda_2) = k_1. \end{cases}$$

А ин ҷо:

$$\begin{cases} c_2 = k_2, \\ c_1 = \dfrac{k_1}{\lambda_1-\lambda_2}. \end{cases}$$

Ин қиматҳои ёфташудаи c_1 ва c_2-ро ба ҳалли (2.38) гузошта, ҳалли ягонаи масъалаи навъи Кошии (2.52)-ро дар намуди:

$$y(x) = \frac{k_1}{\lambda_1-\lambda_2}e^{\lambda_1\omega_\beta(x)} + k_2 e^{\lambda_2\omega_\beta(x)} -$$

$$-\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\int_x^b \left[\lambda_1 e^{\lambda_1\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)} - \lambda_2 e^{\lambda_2\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\right]\frac{f(t)}{(b-t)^\beta}dt \equiv$$

$$\equiv F_1^{+}\left[\frac{k_1}{\lambda_1-\lambda_2},\ k_2,\ f(x)\right] \qquad (2.53)$$

ҳосил мекунем.

Теоремаи зерин исбот карда шуд.

Теоремаи 2.9. *Бигузор, дар муодилаи интегро-дифференсиалии ғайриякҷинсаи моделии* (2.35) *коэффитсиентҳои он A ва B чунон бошанд, ки муодилаи характеристикии* (2.36) *дорои решаҳои ҳақиқӣ ва гуногуни* λ_1 *ва* λ_2 *бошад. Инчунин бигузор, ҳангоми* $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ *функсияи* $f(x)$ *шарти (2.17)-ро қаноат намояд. Он гоҳ, масъалаи навъи Коши* $(2.35)-(2.52)$ *яккимата ҳалшаванда аст ва ҳалли ягонаи он бо ёрии формулаи* (2.53) *ифода мегардад.*

Акнун масъалаи навъи Коширо дар ҳолати иҷро шудани шарти $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ таҳқиқ менамоем.

Дар ин маврид ба мо маълум аст, ки ҳалли муодилаи (2.35) бо ёрии формулаи:

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 \omega_\beta(x)} -$$

$$-\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\int_x^b \left[\lambda_1 e^{\lambda_1\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)} - \lambda_2 e^{\lambda_2\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\right]\frac{f(t)}{(b-t)^\beta}dt \equiv$$

$$\equiv F_1^{+}[c_1,\ 0,\ f(x)] \qquad (2.54)$$

ифода мегардад.

Маълум аст, ки дар ин маврид барои ҳалли (2.54) низ шарти:

$$P_1\left[\lambda_1, \lambda_2, D_x^\beta(x)\right]_{x=b} = c_1(\lambda_1-\lambda_2) \qquad (2.55)$$

иҷро мегардад. Аз ин рӯ, дар ин ҳолат масъалаи навъи Коши барои муодилаи (2.35) чунин гузошта мешавад:

Гузориши масъалаи навъи Коши барои муодилаи $(\mathbf{2.35})$ ҳангоми ичро гардидани шатри $\boldsymbol{\lambda_1 < 0 < \lambda_2}$. *Чунин ҳалли* $y = y(x)$*-и муодилаи* (2.35) *ёфта шавад, ки он дар нуқтаи* $x = b$ *шарти ибтидоии вазндори*

$$P_1\left[\lambda_1, \lambda_2, D_x^\beta(x)\right]_{x=b} = k_1 \tag{2.56}$$

-ро қаноат намояд.

Таҳқиқи масъала. Маълум аст, ки ҳангоми иҷрошавии шарти $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ ҳалли муодилаи (2.35) бо ёрии формулаи (2.54) дода мешавад, ки он шарти (2.55)-ро қаноат менамояд. Аз ин ҷо бо дарназардошти шарти (2.56) ҳосил мекунем:

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_2) = k_1,$$

ки аз ин ҷо

$$c_1 = \frac{k_1}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Ин қимати c_1-ро дар (2.54) ба ҷояш гузошта, ҳалли ягонаи масъалаи навъи Кошии $(2.35) - (2.56)$-ро дар намуди зерин ҳосил мекунем:

$$y(x) = F_1^+\left[\frac{k_1}{\lambda_1 - \lambda_2},\ 0,\ f(x)\right]. \tag{2.57}$$

Яъне, теоремаи зерин исбот шуд.

Теоремаи 2.10. *Бигузор, ҳамаи шартҳои теоремаи 2.9. ичро шаванд ва* $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ *бошад. Он гоҳ масъалаи навъи Коши* $(2.35) - (2.56)$ *якқимата ҳалшаванда аст ва ҳалли ягонаи он бо ёрии формулаи* (2.57) *ифода меёбад.*

II. Ҳолатеро дида мебароем, ки решаҳои муодилаи характеристикии (2.35) ҳақиқӣ ва якхела буда, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda < 0$ бошад. Дар ин маврид мувофиқи натиҷаҳои дар боло бадастовардашуда, ҳалли умумии муодилаи (2.35) бо ёрии формулаи:

$$y(x) = e^{\lambda\omega_\beta(x)}\left[c_1 + c_2\omega_\beta(x)\right] -$$

$$-\int_x^b e^{\lambda\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\left[\lambda\left(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(t)\right) + 1\right]\frac{f(t)}{(b-t)^\beta}dt \qquad (2.58)$$

ифода меёбад.

Ду тарафи баробарии (2.58)-ро ба ифодаи $e^{\lambda\omega_\beta(x)}\omega_\beta(x)$ тақсим менамоем:

$$\frac{1}{e^{\lambda\omega_\beta(x)}\omega_\beta(x)}y(x) = \frac{c_1}{\omega_\beta(x)} + c_2 -$$

$$-\frac{1}{\omega_\beta(x)}\int_x^b e^{-\lambda\omega_\beta(t)}\left[\lambda\left(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(t)\right) + 1\right]\frac{f(t)}{(b-t)^\beta}dt.$$

Чунин ишорат менамоем:

$$\frac{1}{e^{\lambda\omega_\beta(x)}\omega_\beta(x)}y(x) = P_2[\lambda, y(x)].$$

Оператори D_x^β-ро ба функсияи $P_2[\lambda, y(x)]$ татбиқ намуда, ҳосил мекунем:

$$D_x^\beta P_2[\lambda, y(x)] = -\frac{c_1}{\omega_\beta^2(x)} +$$

$$+\frac{1}{\omega_\beta^2(x)}\int_x^b e^{-\lambda\omega_\beta(t)}\left[\lambda\left(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(t)\right) + 1\right]\frac{f(t)}{(b-t)^\beta}dt -$$

$$-\frac{\lambda}{\omega_\beta(x)}\int_x^b e^{-\lambda\omega_\beta(t)}\frac{f(t)}{(b-t)^\beta}dt+\frac{1}{\omega_\beta(x)}\cdot\frac{f(x)}{e^{\lambda\omega_\beta(x)}}.$$

Аз ин ҷо:

$$\omega_\beta^2(x)D_x^\beta P_2[\lambda,y(x)]=$$

$$=-c_1+\int_x^b e^{-\lambda\omega_\beta(t)}\left[\lambda\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)+1\right]\frac{f(t)}{(b-t)^\beta}dt-$$

$$-\omega_\beta(x)\left[\lambda\int_x^b e^{-\lambda\omega_\beta(t)}\frac{f(t)}{(b-t)^\beta}dt-\frac{f(x)}{e^{\lambda\omega_\beta(x)}}\right].$$

Дар ду тарафи баробарии охирон ҳангоми $x\to b$ ба ҳудуд мегузарем:

$$\lim_{x\to b}\omega_\beta^2(x)D_x^\beta P_2[\lambda,y(x)]=$$

$$=-c_1+\underbrace{\lim_{x\to b}\int_x^b e^{-\lambda\omega_\beta(t)}\left[\lambda\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)+1\right]\frac{f(t)}{(b-t)^\beta}dt}_{I_1}-$$

$$-\underbrace{\lim_{x\to b}\frac{\lambda\int_x^b e^{-\lambda\omega_\beta(t)}\frac{f(t)}{(b-t)^\beta}dt-\frac{f(x)}{e^{\lambda\omega_\beta(x)}}}{\frac{1}{\omega_\beta(x)}}}_{I_2}.$$

Тавре дар боло қайд гардида буд, дар интегралҳои тарафи рости баробарии охирин функсияи $f(x)$ дар нуқтаи $x=b$ аз рӯйи формулаи ассимптотикии

$$f(x)=o\left[e^{-\delta\omega_\beta(x)}\right],\quad \delta>|\lambda|,\ x\to b \tag{2.59}$$

ба сифр майл менамояд. Аз ин рӯ, дар ҷамъшавандаи I_1 функсияи зеринтегралӣ махсусияти дараҷааш аз як хурдро доро мебошад ва бинобар ин $I_1 = 0$ мешавад. Барои ҷамъшавандаи I_2 дорем:

$$I_2 = \lim_{x\to b}\frac{\lambda\int_x^b e^{-\lambda\omega_\beta(t)}\frac{f(t)}{(b-x)^\beta}dt - \frac{f(x)}{e^{\lambda\omega_\beta(x)}}}{(\beta-1)(b-x)^{\beta-1}} = \left\{\frac{0}{0}\right\} =$$

$$= \lim_{x\to b}\frac{-\lambda e^{-\lambda\omega_\beta(t)}\frac{f(x)}{(b-x)^\beta} - \frac{f'(x)e^{\lambda\omega_\beta(x)} - \frac{\lambda}{(b-x)^\beta}f(x)e^{\lambda\omega_\beta(t)}}{e^{2\lambda\omega_\beta(x)}}}{-(\beta-1)^2(b-x)^{\beta-2}} =$$

$$= \lim_{x\to b}\frac{\frac{f'(x)}{e^{\lambda\omega_\beta(x)}}}{(\beta-1)^2(b-x)^{\beta-2}}.$$

Азбаски ифодаи $\frac{f'(x)}{e^{\lambda\omega_\beta(x)}}$ сифри дараҷаи экспоненсиалӣ дорад, банобар ин, он нисбат ба махраҷ зудтар ба сифр майл мекунад, аз ин рӯ $I_2 = 0$ мешавад.

Ҳамин тавр:

$$\lim_{x\to b}\omega_\beta^2(x)D_x^\beta P_2[\lambda, y(x)] = -c_1. \qquad (2.60)$$

Айнан ҳамин тавр, бо осонӣ нишон дода мешвад, ки:

$$\lim_{x\to b}P_2[\lambda, y(x)] = c_2. \qquad (2.61)$$

Акнун, ҳангоми решаҳои муодилаи характеристикии (2.36) ҳақиқӣ ва якхела ва $\lambda < 0$ будан, масъалаи зерини навъи Коширо барои муодилаи (2.35) таҳқиқ менамоем.

Гузориши масъалаи навъи Коши барои муодилаи (2.35) ҳангоми $\boldsymbol{\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda < 0}$ будан. *Чунин ҳалли* $y = y(x)$ - *и муодилаи* (2.35) *ёфта шавад, ки он дар нуқтаи* $x = b$ *шарти ибтидоии вазндори зеринро қаноат намояд:*

$$\begin{cases} P_2[\lambda, y(x)]|_{x=b} = k_3, \\ \omega_\beta^2(x) D_x^\beta P_2[\lambda, y(x)]\Big|_{x=b} = k_4 \end{cases} \qquad (2.62)$$

Таҳқиқи масъала. Баробариҳои исботшудаи (2.60), (2.61)-ро истифода бурда, бо назардошти шартҳои ибтидоии (2.62) ҳосил мекунем:

$$\begin{cases} k_3 = c_2, \\ k_4 = -c_1. \end{cases}$$

Аз ин ҷо:

$$\begin{cases} c_1 = -k_4, \\ c_2 = k_3. \end{cases}$$

Ин қиматҳои c_1 ва c_2-ро ба (2.58) гузошта, ҳалли ягонаи масъалаи навъи Коши $(2.35) - (2.62)$-ро дар намуди зерин ҳосил мекунем:

$$y(x) = e^{\lambda\omega_\beta(x)}\left[-k_4 + k_3\omega_\beta(x)\right] -$$
$$-\int_x^b e^{\lambda\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\left[\lambda\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)+1\right]\frac{f(t)}{(b-t)^\beta}dt. \qquad (2.63)$$

Инак, теоремаи зерин исбот гардид.

Теоремаи 2.11. *Бигузор, дар муодилаи интегро-дифференсиалии ғайриякҷинсаи моделии* (2.35) *коэффисиентҳои он* A *ва* B *чунон бошанд, ки муодилаи характеристикии* (2.36) *дорои решаҳои ҳақиқӣ ва якхела буда,* $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda < 0$ *бошад. Инчунин бигузор, функсияи* $f(x)$ *шарти (2.59)-ро қаноат намояд. Он гоҳ масъалаи навъи Коши* $(2.35) - (2.62)$ *якқимата ҳалшаванда аст ва ҳалли ягонаи он бо ёрии формулаи* (2.63) *ифода мегардад.*

III. Ҳолати решаҳои муодилаи характеристикии (2.36) комплексӣ ва ҳамроҳшуда будан. Дар ҳолати решаҳои муодилаи характеристикии (2.36) комплексӣ ва ҳамроҳшуда ва инчунин $\alpha < 0$ будан, ҳалли умумии муодилаи интегро-дифференсиалии (2.35) намуди зеринро мегирад:

$$y(x) = e^{\alpha\omega_\beta(x)}\left[c_1\cos\left[\gamma\omega_\beta(x)\right] + c_2\sin\left[\gamma\omega_\beta(x)\right]\right] -$$
$$-\frac{1}{\gamma}\int_x^b e^{\alpha\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\left[\alpha\sin\left[\gamma\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)\right] +\right.$$
$$\left.+\gamma\cos\left[\gamma\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)\right]\right]\frac{f(t)}{(b-t)^\beta}dt. \qquad (2.64)$$

Барои дар ин ҳолат масъалаи навъи Коширо барои муодилаи (2.35) таҳқиқ намудан, пеш аз ҳама, ба ду тарафи баробарии (2.64) оператори D_x^β-ро татбиқ менамоем:

$$D_x^\beta y(x) = e^{\alpha\omega_\beta(x)}\left[(\alpha c_1 + \gamma c_2)\cos\left[\gamma\omega_\beta(x)\right] + (\alpha c_2 - \gamma c_1)\sin\left[\gamma\omega_\beta(x)\right]\right] -$$
$$-\frac{1}{\gamma}\int_x^b e^{\alpha\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\left[(\alpha^2-\gamma^2)\sin\left[\gamma\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)\right] +\right.$$
$$\left.+2\alpha\gamma\cos\left[\gamma\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)\right]\right]\frac{f(t)}{(b-t)^\beta}dt. \qquad (2.65)$$

Аз баробариҳои (2.64) ва (2.65) барои ифодаҳои $e^{-\alpha\omega_\beta(x)}y(x)$ ва $e^{-\alpha\omega_\beta(x)}D_x^\beta y(x)$ ҳангоми $x \to b$ ҳосил мекунем:

$$\lim_{x\to b} e^{-\alpha\omega_\beta(x)}y(x) = Ac_1 + Bc_2 \qquad (2.66)$$

ва

$$\lim_{x\to b} e^{-\alpha\omega_\beta(x)} D_x^\beta y(x) = A(\alpha c_1 + \gamma c_2) + B(\alpha c_2 - \gamma c_1), \qquad (2.67)$$

ки дар ин ҷо $A = cos\big[\gamma\omega_\beta(b)\big]$, $B = sin\big[\gamma\omega_\beta(b)\big]$ мебошад.

Акнун масъалаи навъи Коширо барои муодилаи (2.35) таҳқиқ менамоем.

Гузориши масъалаи навъи Коши барои муодилаи (2.35) ҳангоми решаҳои муодилаи характеристикии (2.36) комплексию ҳамроҳшуда ва $\alpha < 0$ будан. *Чунин ҳалли* $y = y(x)$*-и муодилаи* (2.35) *ёфта шавад, ки он дар нуқтаи* $x = b$ *шарти ибтидоии вазндори зеринро қаноат намояд:*

$$\begin{cases} e^{-\alpha\omega_\beta(x)} y(x)\Big|_{x=b} = k_5, \\ e^{-\alpha\omega_\beta(x)} D_x^\beta y(x)\Big|_{x=b} = k_6. \end{cases} \qquad (2.68)$$

Таҳқиқи масъала. Бо дарназардошти баробариҳои (2.66), (2.67) ва шартҳои (2.68) системаи муодилаҳои алгебравии зеринро ҳосил мекунем:

$$\begin{cases} Ac_1 + Bc_2 = k_5, \\ A(\alpha c_1 + \gamma c_2) + B(\alpha c_2 - \gamma c_1) = k_6. \end{cases}$$

Ин системаро ҳал намуда, коэффитсиентҳои номаълуми c_1 ва c_2-ро бо ёрии ададҳои додашудаи k_5 ва k_6 ифода мекунем:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ A\alpha - B\gamma & A\gamma + B\alpha \end{vmatrix} = A^2\gamma + AB\alpha - AB\alpha + B^2\gamma = (A^2 + B^2)\gamma = \gamma.$$

$$\Delta c_1 = \begin{vmatrix} k_5 & B \\ k_6 & A\gamma + B\alpha \end{vmatrix}, \qquad \Delta c_2 = \begin{vmatrix} A & k_5 \\ A\alpha - B\gamma & k_6 \end{vmatrix}. \qquad (2.69)$$

Аз ин ҷо:

$$c_1 = \frac{\Delta c_1}{\gamma}, \qquad c_2 = \frac{\Delta c_2}{\gamma}.$$

Ин қиматҳои c_1 ва c_2-ро бо (2.14) мегузорем:

$$y(x) = e^{\alpha\omega_\beta(x)}\left[\frac{\Delta c_1}{\gamma}\cos\left[\gamma\omega_\beta(x)\right] + \frac{\Delta c_2}{\gamma}\sin\left[\gamma\omega_\beta(x)\right]\right] -$$

$$-\frac{1}{\gamma}\int_x^b e^{\alpha\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\left[\alpha\sin\left[\gamma\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)\right] +\right.$$

$$\left.+\gamma\cos\left[\gamma\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)\right]\right]\frac{f(t)}{(b-t)^\beta}dt. \qquad (2.70)$$

Ҳамин тавр, ба натиҷаи зерин омадем:

Теоремаи 2.12. *Бигузор, дар муодилаи интегро-дифференсиалии ғайриякҷинсаи моделии* (2.35) *коэффисиентҳои он A ва B чунон бошанд, ки муодилаи характеристикии* (2.36) *дорои решаҳои комплексӣ ва ҳамроҳшуда бошад ва* $\alpha < 0$ *бошад. Инчунин бигузор, функсияи* $f(x)$ *шарти (2.34)-ро қаноат намояд. Он гоҳ масъалаи навъи Коши* (2.35) – (2.68) *бо ёрии формулаи* (2.70) *ёфта мешавад, ки дар ин ҷо* Δc_1 *ва* Δc_2 *аз баробариҳои* (2.69) *муайян карда мешаванд.*

Қайди 2.1. *Азбаски дар баробарии* (2.70) *қиматҳои A ва B якқимата муайян карда намешаванд, пас масъалаи навъи Коши барои муодилаи* (2.35) *дар ҳолати комплексӣ ва ҳамроҳшуда будани решаҳои муодилаи характеристикии* (2.36) *ба таври ягона ҳалшаванда намебошад.*

§ 2.7. Таҳқиқи муодилаи интегро-дифференсиалии ғайримоделии тартиби якум бо ядрои барзиёд сингулярӣ

Дар $\Gamma = \{x: a \le x \le b\}$ ба таҳқиқи муодилаи интегро-дифференсиалии ғайримоделии

$$D_x^{\beta} y + A(x)y - \int_x^b \frac{B(x,t)}{(b-t)^{\beta}} y(t)\,dt = f(x), \qquad (2.71)$$

машғул мешавем, ки дар ин ҷо $A(x)$, $f(x)$ функсияҳои додашудаи бефосила дар Г, $B(x,t)$ – функсияи додашудаи бефосила дар росткунҷаи $R = \{(x,y)\colon a \le x \le b,\ \ a \le t \le b\}$ мебошад.

Тавре дар боло қайд намудем, ҳалли муодилаи (2.71)-ро дар синфи $C_{\beta-1}^{(1)}[a,b]$ ҷустуҷӯ намудан лозим мебошад.

Барои муодилаи (2.71)-ро таҳқиқ намудан, пеш аз ҳама онро ба шакли зерин меорем:

$$D_x^{\beta} y + \big[A(b) - \big(A(b) - A(x)\big)\big]y -$$
$$- \int_x^b \frac{B(b,b) - \big(B(b,b) - B(x,t)\big)}{(b-t)^{\beta}} y(t)\,dt = f(x).$$

Аз ин ҷо:

$$D_x^{\beta} y + A(b)y - \int_x^b \frac{B(b,b)}{(b-t)^{\beta}} y(t)\,dt =$$
$$= f(x) + [A(b) - A(x)]y - \int_x^b \frac{B(b,b) - B(x,t)}{(b-t)^{\beta}} y(t)\,dt.$$

Ишораи:

$$f(x) + [A(b) - A(x)]y - \int_x^b \frac{B(b,b) - B(x,t)}{(b-t)^{\beta}} y(t)\,dt = F(x) \qquad (2.72)$$

-ро дохил намуда, муодилаи охиронро дар шакли зерин менависем

$$D_x^\beta y + A(b)y - \int_x^b \frac{B(b,b)}{(b-t)^\beta} y(t)\,dt = F(x). \qquad (2.73)$$

Дар аввал фарз менамоем, ки дар тарафи рости муодилаи (2.73) функсияи $F(x)$ функсияи маълум мебошад. Бо чунин фарзия масъалаи ҳал намудаи муодилаи интегро-дифференсиалии ғайримоделии (2.71) ба масъалаи ҳал намудани муодилаи моделии (2.73) оварда шуд. Аз натиҷаҳои барои муодилаи интегро-дифференсиалии моделӣ ҷойдошта истифода бурда, ҳалли муодилаи (2.73)-ро меёбем.

Ба мо маълум аст, ки муодилаи характеристикии ба муодилаи (2.73) мувофиқоянда намуди:

$$\lambda^2 + A(b)\lambda + B(b,b) = 0 \qquad (2.74)$$

-ро дорад. Вобаста аз решаҳои муодилаи характеристикии (2.74) ҳалли муодилаи (2.73) ва аз он пас, ҳалли муодилаи (2.71)-ро дар ҳолатҳои зерин ҳосил мекунем:

I. Бигузор, муодилаи характеристикии (2.74) дорои ду решаҳои ҳақиқӣ ва гуногуни λ_1, λ_2 бошад ва ин решаҳо нобаробарии $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$-ро қаноат намоянд. Дар ин маврид, дар асоси натиҷаҳои параграфи 2.2 ҳалли умумии муодилаи (2.73) шакли зеринро мегирад:

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 \omega_\beta(x)} + c_2 e^{\lambda_2 \omega_\beta(x)} -$$
$$-\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \int_x^b \left[\lambda_1 e^{\lambda_1\left(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(t)\right)} - \lambda_2 e^{\lambda_2\left(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(t)\right)}\right] \frac{F(t)}{(b-t)^\beta} dt \equiv$$
$$\equiv E_1^+[c_1, c_2, F(x)]. \qquad (2.75)$$

Акнун, барои ҳалли муодилаи (2.71)-ро ҳосил намудан дар (2.75) ба ҷойи $F(x)$ қиматашро аз (2.72) гузошта, меёбем:

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 \omega_\beta(x)} + c_2 e^{\lambda_2 \omega_\beta(x)} -$$

$$-\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \int_x^b \left[\lambda_1 e^{\lambda_1\left(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(t)\right)} - \lambda_2 e^{\lambda_2\left(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(t)\right)}\right] \frac{f(t)}{(b-t)^\beta} dt -$$

$$-\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \int_x^b \left[\lambda_1 e^{\lambda_1\left(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(t)\right)} - \lambda_2 e^{\lambda_2\left(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(t)\right)}\right] \frac{A(b) - A(t)}{(b-t)^\beta} y(t) dt +$$

$$+\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \int_x^b \left[\lambda_1 e^{\lambda_1\left(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(t)\right)} - \lambda_2 e^{\lambda_2\left(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(t)\right)}\right] \times$$

$$\times \int_t^b \frac{B(b,b) - B(t,\tau)}{(b-\tau)^\beta} y(\tau)\, d\tau \frac{dt}{(b-t)^\beta}.$$

Он ҷамъшавандаҳое, ки функсияи номаълумро дар бар мегиранд, ба тарафи рости баробарӣ мегузаронем:

$$y(x) + \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \int_x^b \left[\lambda_1 e^{\lambda_1\left(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(t)\right)} - \lambda_2 e^{\lambda_2\left(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(t)\right)}\right] \frac{A(b) - A(t)}{(b-t)^\beta} y(t) dt -$$

$$-\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \int_x^b \left[\lambda_1 e^{\lambda_1\left(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(t)\right)} - \lambda_2 e^{\lambda_2\left(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(t)\right)}\right] \times$$

$$\times \int_t^b \frac{B(b,b) - B(t,\tau)}{(b-\tau)^\beta} y(\tau)\, d\tau \frac{dt}{(b-t)^\beta} = E_1^+[c_1, c_2, f(t)].$$

Дар интеграли дуюми тарафи чапи баробарии охирон ҳудудҳои интегрониро иваз менамоем. Яъне:

$$\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\int\limits_x^b\left[\lambda_1 e^{\lambda_1\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}-\lambda_2 e^{\lambda_2\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\right]\times$$

$$\times\int\limits_t^b\frac{B(b,b)-B(t,\tau)}{(b-\tau)^\beta}y(\tau)\,d\tau\frac{dt}{(b-t)^\beta}=$$

$$=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\int\limits_x^b\frac{B(b,b)-B(t,\tau)}{(b-\tau)^\beta}y(\tau)\,d\tau\times$$

$$\times\int\limits_x^\tau\left[\lambda_1 e^{\lambda_1\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}-\lambda_2 e^{\lambda_2\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\right]\frac{dt}{(b-t)^\beta}=|t=\tau|=$$

$$=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\int\limits_x^b\left[\int\limits_x^t\left[\lambda_1 e^{\lambda_1\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(\tau)\right)}-\lambda_2 e^{\lambda_2\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(\tau)\right)}\right]\frac{d\tau}{(b-\tau)^\beta}\right]\times$$

$$\times\frac{B(b,b)-B(\tau,t)}{(b-t)^\beta}y(t)dt.$$

Ин қиматро дар баробарии пешин мегузорем:

$$y(x)+\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\int\limits_x^b\left[\lambda_1 e^{\lambda_1\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}-\lambda_2 e^{\lambda_2\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\right]\frac{A(b)-A(t)}{(b-t)^\beta}y(t)dt-$$

$$-\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\int\limits_x^b\left[\int\limits_x^t\left[\lambda_1 e^{\lambda_1\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(\tau)\right)}-\lambda_2 e^{\lambda_2\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(\tau)\right)}\right]\frac{d\tau}{(b-\tau)^\beta}\right]\times$$

$$\times\frac{B(b,b)-B(\tau,t)}{(b-t)^\beta}y(t)dt=E_1^+[c_1,c_2,f(t)].$$

Ин баробариро ба шакли содатар меорем:

$$y(x)+\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\int\limits_x^b\left\{\left[\lambda_1 e^{\lambda_1\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}-\lambda_2 e^{\lambda_2\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\right]\frac{A(b)-A(t)}{(b-t)^\beta}-\right.$$

$$-\int_x^t \left[\lambda_1 e^{\lambda_1\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(\tau)\right)} - \lambda_2 e^{\lambda_2\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(\tau)\right)}\right] \frac{\left(B(b,b)-B(\tau,t)\right)d\tau}{(b-\tau)^\beta (b-t)^\beta}\Bigg\} y(t)dt =$$

$$= E_1^+[c_1, c_2, f(x)].$$

Ҳамин тавр, масъалаи ҳал намудани муодилаи интегро-дифференсиалии ғайримоделии (2.71) ба масъалаи ҳал намудани муодилаи интегралии намуди Волтерраи:

$$y(x) + \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \int_x^b K(x,t) y(t)\, dt = E_1^+[c_1, c_2, f(x)] \qquad (2.76)$$

оварда шуд, ки дар ин ҷо ядрои $K(x,t)$ намуди:

$$K(x,t) = \left[\lambda_1 e^{\lambda_1\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(\tau)\right)} - \lambda_2 e^{\lambda_2\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(\tau)\right)}\right] \frac{A(b)-A(t)}{(b-t)^\beta} -$$

$$-\int_x^t \left[\lambda_1 e^{\lambda_1\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(\tau)\right)} - \lambda_2 e^{\lambda_2\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(\tau)\right)}\right] \frac{\left(B(b,b)-B(\tau,t)\right)d\tau}{(b-\tau)^\beta (b-t)^\beta} \qquad (2.77)$$

ва тарафи рости он $E_1^+[c_1, c_2, f(x)]$ намуди:

$$E_1^+[c_1, c_2, f(x)] = c_1 e^{\lambda_1 \omega_\beta(x)} - c_2 e^{\lambda_2 \omega_\beta(x)} -$$

$$-\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \int_x^b \left[\lambda_1 e^{\lambda_1\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(\tau)\right)} - \lambda_2 e^{\lambda_2\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(\tau)\right)}\right] \frac{f(t)dt}{(b-t)^\beta} \qquad (2.78)$$

-ро доранд.

Барои он ки ядрои $K(x,t)$ ядрои регулярӣ бошад, талаб менамоем, ки функсияҳои

$$A_1(t) = A(b) - A(t) \tag{2.79}$$

ва

$$B_1(\tau, t) = B(b, b) - B(\tau, t) \tag{2.80}$$

ҳангоми $t \to b$ ба сифр майл намуда, рафторашон аз рӯйи формулаҳои ассимптотикии зерин муайян карда шаванд:

$$A_1(t) = o\left[e^{-\delta\omega_\beta(t)}\right], \quad \delta = |\lambda_1| \tag{2.81}$$

ва

$$B_1(\tau, t) = o\left[e^{-\delta\omega_\beta(t)}\right], \quad \delta = |\lambda_1|. \tag{2.82}$$

Ғайр аз ин, барои он ки тарафи рости муодилаи (2.76) функсияи охирнок ва бефосила бошад, талаб менамоем, ки функсияи $f(x)$ ҳангоми $x \to b$ ба сифр мубаддал гашта, рафтораш аз рӯйи формулаи ассимптотикии зерин муайян карда шавад:

$$f(x) = o\left[e^{-\delta\omega_\beta(t)}\right], \quad \delta = |\lambda_1|. \tag{2.83}$$

Ҳангоми иҷро шудани шартҳои (2.81), (2.82) ва (2.83) муодилаи интегралии (2.76) муодилаи интегралии намуди Волтерра бо ядрои регулярӣ ва тарафи рости бефосила мебошад, ки ҳалли умумии он мувофиқи назарияи умумии ин гуна муодилаҳо бо ёрии резолвентаи муодилаи интегралии (2.76) дар намуди зерин тасвир карда мешавад:

$$y(x) = E_1^+[c_1, c_2, f(x)] - \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \int_x^b \Gamma(x,t) \cdot E_1^+[c_1, c_2, f(x)]\, dt. \qquad (2.84)$$

Ҳамин тавр исбот карда шуд.

Теоремаи 2.13. *Бигузор, дар муодилаи* (2.71) *функсияҳои* $A_1(x)$ *ва* $B_1(x,t)$ *чунон бошад, ки решаҳои муодилаи характеристикии* (2.74) *ҳақиқӣ ва гуногун буда,* $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ *бошад. Инчуни бигузор, функсияҳои* $A_1(x)$ $B_1(x,t)$ *ва* $f(t)$ *ҳангоми* $t \to b$ *аз рӯи формулаҳои ассимптотикии* (2.81), (2.82) *ва* (2.83) *ба сифр майл намоянд. Он гоҳ муодилаи интегро-дифференсиалии ғайримоделии* (2.71) *дар синфи* $C_{\beta-1}^{(1)}[a,b]$ *ҳалшаванда мебошад ва ҳалли умумии он бо ёрии резолвентаи муодилаи интегралии* (7.76) *дар намуди* (2.84) *ифода мегардад.*

Ҳангоми иҷро шудани шарти $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ ҳалли муодилаи (2.73) бо ёрии формулаи

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 \omega_\beta(x)} -$$

$$-\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \int_x^b \left[\lambda_1 e^{\lambda_1\left(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(t)\right)} - \lambda_2 e^{\lambda_2\left(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(t)\right)}\right] \frac{F(t)}{(b-t)^\beta} dt \equiv$$

$$\equiv E_1^+[c_1, 0, F(x)] \qquad (2.85)$$

ифода меёбад. Фарқияти ин ҳал аз (2.75) дар он мебошад, ки дар (2.85) $c_2 = 0$ аст.

Дар ин маврид ҳисобкуниҳои боқимонда пурра ба ҳисобкуниҳои ҳолати $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ монанд буда, масъалаи ҳал намудани муодилаи интегро-дифференсиалии (2.71) ба масъали ҳал намудани муодилаи интегралии намуди Волтерраи

$$y(x) + \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \int_x^b \mathrm{K}(x,t) \cdot y(t)\, dt = E_1^+[c_1, 0, f(x)]. \qquad (2.86)$$

оварда мешавад, ки дар ин ҷо $\text{K}(x,t)$ аз (2.77) ва $E[c_1, 0, f(x)]$ аз (2.85) муайян карда мешавад.

Дар ин маврид низ барои он ки ядро ва тарафи рости муодилаи (2.86) функсияҳои бефосила бошанд, иҷрошавии шартҳои (2.81), (2.82) ва (2.83)-ро талаб менамоем. Бо иҷро шудани ин шартҳо муодилаи (2.86) муодилаи интегралии Волтерра бо ядрои Федголмӣ ва тарафи рости бефосила мебошад ва ҳалли он бо ёрии резолвентаи муодилаи (2.86) дар намуди:

$$y(x) = E_1^{+}[c_1, 0, f(x)] - \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\int_x^b \Gamma(x,t) \cdot E_1^{+}[c_1, 0, f(x)]\, dt \qquad (2.87)$$

ифода меёбад.

Аз ин ҷо теоремаи зерин ҷой дорад:

Теоремаи 2.14. *Бигузор, ҳамаи шартҳои теореами 2.13 иҷро гардад ва ба ҷои шарти* $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ *шарти* $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ *иҷро шавад, он гоҳ муодилаи интегро-дифференсиалии ғайримоделии* (2.71) *дар синфи* $C^1_{\beta-1}[a,b]$ *ҳалшаванда мебошад ва ҳалли умумии он бо ёрии резолвентаи муодилаи интегралии* (2.86) *дар намуди* (2.87) *ифода карда мешавад.*

Акнун ҳолатеро дида мебароем, ки решаҳои муодилаи характеристикии (2.74) нобаробарии $0 < \lambda_1 < \lambda_2$-ро қаноат менамоянд. Дар ин маврид ҳалли ягонаи муодилаи (2.73) бо ёрии формулаи:

$$y(x) = -\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\int_x^b \Big[\lambda_1 e^{\lambda_1\left(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(t)\right)} -$$

$$-\lambda_2 e^{\lambda_2\left(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(t)\right)}\Big]\frac{F(t)}{(b-t)^\beta} dt \equiv E_1^{+}[0, 0, F(x)] \qquad (2.88)$$

ифода мешавад.

Дар баробарии (2.88) ба ҷойи $F(t)$ қиматашро аз (2.72) гузошта, пас аз такрори ҳисобкуниҳои ба ҳолатҳои пешин монанд, ба ҳалли муодилаи интегралии намуди Волтерраи:

$$y(x)+\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\int_x^b K(x,t)y(t)dt \equiv E_1^+[0,0,f(x)] \qquad (2.89)$$

меоем, ки дар ин ҷо низ ядрои $K(x,t)$ аз рӯйи формулаи (2.77) муайян карда мешавад.

Тарафи рости муодилаи (2.89) бошад, аз (2.78) ҳангоми $c_1=0, c_2=0$ гузоштан дар намуди

$$E_1^+[0,0,f(x)] = -\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\int_x^b \left[\lambda_1 e^{\lambda_1\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(\tau)\right)} - \lambda_2 e^{\lambda_2\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(\tau)\right)}\right]\frac{f(t)dt}{(b-t)^\beta}$$

муайян карда мешавад.

Дар ин маврид маълум аст, ки барои ядрои $K(x,t)$-и муодилаи (2.89) ва тарафи рости он $E_1^+[0,0,f(x)]$ нуқтаи $x=b$ нуқтаи махсус намебошад. Аз ин рӯ агар $A_1(x)\in C[a,b]$, $B_1(x,t)\in C(R)$ ва $f(x)\in C[a,b]$ бошад, пас ядро ва тарафи рости муодилаи (2.89) функсияҳои бефосила мебошанд ва бинобар ин муодилаи (2.89) муодилаи интегралии ҷинси дуюми Волтерра бо ядро ва тарафи рости бефосила буда, ҳалли ягонаи он бо ёрии резолвентаи муодилаи интегралии (2.89) дар намуди:

$$y(x)=E_1^+[0,0,f(x)]-\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\int_x^b \Gamma_3(x,t)E_1^+[0,0,f(x)]\,dt \qquad (2.90)$$

ифода карда мешавад.

Ҳамин тавр, дар ҳолати иҷрошавии шарти $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ оид ба ҳалшавандагии муодилаи (2.71) теоремаи зерин исбот карда шуд.

Теоремаи 2.15. *Бигузор, дар муодилаи* (2.71) *функсияи* $A(x)$, $B(x,t)$ *чунин бошанд, ки решаҳои муодилаи характеристикии* (2.74) *ҳақиқи ва гуногун буда,* $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ *бошад. Инчунин бигузор, функсияҳои* $A_1(x) \in C[a,b]$, $B_1(x,t) \in C(R)$ *ва* $f(x) \in C[a,b]$ *бошад. Он гоҳ муодилаи интегро-дифференсиалии ғайримоделии* (2.71) *дар синфи* $C^1_{\beta-1}[a,b]$ *якқимата ҳалшаванда мебошад ва ҳалли ягонаи он бо ёрии резолвентаи муодилаи интегралии* (2.89) *дар намуди* (2.90) *ифода меёбад.*

II. Бигузор, решаҳои муодилаи характеристикии (2.74) ҳақиқӣ ва якхела бошанд, яъне $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ ва шарти $\lambda < 0$ иҷро шавад. Он гоҳ ҳалли умумии муодилаи (2.73) дар намуди зерин дода мешавад:

$$y(x) = e^{\lambda\omega_\beta(x)}\left[c_1 + c_2\omega_\beta(x)\right] -$$

$$-\int_x^b e^{\lambda\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\left[\lambda\left(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(t)\right) + 1\right]\frac{F(t)}{(b-t)^\beta}dt. \qquad (2.91)$$

Барои ҳалли муодилаи (2.71)-ро ҳосил намудан, дар тарафи рости баробарии (2.91) ба ҷойи $F(x)$ қиматашро аз (2.72) мегузорем:

$$y(x) = e^{\lambda\omega_\beta(x)}\left[c_1 + c_2\omega_\beta(x)\right] -$$

$$-\int_x^b e^{\lambda\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\left[\lambda\left(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(t)\right) + 1\right]\frac{f(t)}{(b-t)^\beta}dt -$$

$$-\int_x^b e^{\lambda\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\left[\lambda\left(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(t)\right) + 1\right]\frac{A(b) - A(t)}{(b-t)^\beta}y(t)dt +$$

$$+\int_x^b e^{\lambda\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\left[\lambda\left(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(t)\right) + 1\right] \times$$

$$\times \int_t^b \frac{B(b,b)-B(t,\tau)}{(b-\tau)^\beta} y(\tau)d\tau \frac{dt}{(b-t)^\beta}.$$

Дар ин баробарӣ ҷамъшавандаи охиронро ба таври зайл табдил медиҳем:

$$\int_x^b e^{\lambda\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)} \left[\lambda\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)+1\right] \times$$

$$\times \int_t^b \frac{B(b,b)-B(t,\tau)}{(b-\tau)^\beta} y(\tau)d\tau \frac{dt}{(b-t)^\beta} = \int_x^b \frac{B(b,b)-B(t,\tau)}{(b-\tau)^\beta} y(\tau)d\tau \times$$

$$\times \int_x^\tau e^{\lambda\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)} \left[\lambda\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)+1\right] \frac{dt}{(b-t)^\beta} = |\tau = t| =$$

$$= \int_x^b \left[\int_x^t e^{\lambda\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(\tau)\right)} \left[\lambda\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(\tau)\right)+1\right] \frac{d\tau}{(b-\tau)^\beta}\right] \times$$

$$\times \frac{B(b,b)-B(\tau,t)}{(b-\tau)^\beta} y(t)dt.$$

Натиҷаи ҳосилшударо ба баробарии боло мегузорем:

$$y(x) = e^{\lambda\omega_\beta(x)}\left[c_1 + c_2\omega_\beta(x)\right] -$$

$$-\int_x^b e^{\lambda\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)} \left[\lambda\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)+1\right] \frac{f(t)}{(b-t)^\beta} dt -$$

$$-\int_x^b e^{\lambda\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)} \left[\lambda\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)+1\right] \frac{A(b)-A(t)}{(b-t)^\beta} y(t)dt +$$

$$+\int_x^b \left[\int_x^t e^{\lambda\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(\tau)\right)} \left[\lambda\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(\tau)\right)+1\right] \frac{d\tau}{(b-\tau)^\beta}\right] \times$$

$$\times \frac{B(b,b)-B(\tau,t)}{(b-\tau)^{\beta}} y(t)dt.$$

Ҷамъшавандаҳоеро, ки функсияи номаълумро дар бар мегиранд, ба тарафи чапи баробарӣ гузаронида, бо дохил намудани ишораҳои:

$$A(b)-A(t)=A_1(t),$$

$$B(b,b)-B(\tau,t)=B_1(\tau,t)$$

$$E_2^{+}[c_1,c_2,f(x)]=e^{\lambda\omega_{\beta}(x)}\left[c_1+c_2\omega_{\beta}(x)\right]-$$

$$-\int_x^b e^{\lambda\left(\omega_{\beta}(x)-\omega_{\beta}(t)\right)}\left[\lambda\left(\omega_{\beta}(x)-\omega_{\beta}(t)\right)+1\right]\frac{f(t)}{(b-t)^{\beta}}dt, \qquad (2.92)$$

$$K_2^{+}(x,t)=e^{\lambda\left(\omega_{\beta}(x)-\omega_{\beta}(t)\right)}\left[\lambda\left(\omega_{\beta}(x)-\omega_{\beta}(t)\right)+1\right]\frac{A_1(t)}{(b-t)^{\beta}}-$$

$$-\int_x^t e^{\lambda\left(\omega_{\beta}(x)-\omega_{\beta}(\tau)\right)}\left[\lambda\left(\omega_{\beta}(x)-\omega_{\beta}(\tau)\right)+1\right]\frac{B_1(\tau,t)}{(b-\tau)^{\beta}(b-t)^{\beta}}d\tau \qquad (2.93)$$

ба ҳалли муодилаи интегралии намуди Волтерраи зерин меоем:

$$y(x)+\int_x^b K_2^{+}(x,t)y(t)dt \equiv E_2^{+}[c_1,c_2,f(x)]. \qquad (2.94)$$

Шартҳоеро муайян месозем, ки бо иҷро шудани онҳо ядро ба тарафи рости муодилаи (2.94) функсияҳои бефосила мебошанд.

Аз функсияҳои $A_1(t)$ ва $B_1(\tau,t)$ талаб менамоем, ки ҳангоми $t\to b$ ба сифр майл намуда, рафторашон мувофиқан аз рӯйи формулаҳои ассимптотикии зерин муайян карда шавад:

$$A_1(t)=o\left[e^{-\delta\omega_{\beta}(x)}\right], \quad \delta>|\lambda| \qquad (2.95)$$

ва

$$B_1(\tau,t)=o\left[e^{-\delta\omega_\beta(x)}\right],\quad \delta>|\lambda|. \tag{2.96}$$

Бо иҷро шудани ин шартҳо ядрои муодилаи (2.94) ядрои регулярӣ мебошад.

Инчунин, талаб менамоем, ки дар тарафи рости муодилаи (2.94) функсияи $f(x)$ шарти зеринро қаноат менамояд:

$$f(x)=o\left[e^{-\delta\omega_\beta(x)}\right],\quad \delta>|\lambda|. \tag{2.97}$$

Дар ин маврид, тарафи рости муодилаи (2.94) функсияи бефосила мегардад.

Аз ин ҷо мебарояд, ки ҳангоми иҷро шудани шартҳои (2.95) – (2.97) муодилаи (2.94) муодилаи интегралии намуди Волтерра бо ядрои регулярӣ ва бо тарафи рости бефосила мебошад ва бинобар ин, ҳалли он мувофиқи назарияи умумии ин гуна муодилаҳо бо ёрии формулаи зерин дода мешавад:

$$y(x)=E_2^+[c_1,c_2,f(x)]-\int_x^b \Gamma_2^+(x,t)E_2^+[c_1,c_2,f(x)]dt, \tag{2.98}$$

ки дар ин ҷо $\Gamma_2^+(x,t)$ – резолвентаи муодилаи интегралии (2.94) мебошад..

Ҳамин тавр, теоремаи зерин исбот карда шуд.

Теоремаи 2.16. *Бигузор, дар муодилаи* (2.71) *функсияҳои* $A(x)$ *ва* $B(x,t)$ *чунин бошанд, ки решаҳои муодилаи характеристикии* (2.74) *ҳақиқӣ ва якхела бошанд ва* $\lambda<0$ *бошад. Ин чунин бигузор, функсияҳои* $A_1(x)$ ва $B_1(x,t)$ *ва* $f(x)$ *мувофиқан шартҳои* (2.95), (2.96) *ва* (2.97)*-ро қаноат намоянд. Он гоҳ муодилаи интегро-дифференсиалии ғайриякҷинсаи* (2.71) *дар синфи* $C^1_{\beta-1}[a,b]$ *ҳалшаванда мебошад ва ҳалли умумии он бо ёрии резолвентаи муодилаи интегралии* (2.94) *дар намуди* (2.98) *дода мешавад.*

Акнун ҳолатеро дида мебароем, ки решаи дукаратаи муодилаи характеристикии (2.74) шарти $\lambda > 0$-ро қаноат намояд. Дар ин маврид ҳалли муодилаи (2.73) бо ёрии формулаи:

$$y(x) = -\int_{x}^{b} e^{\lambda\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\left[\lambda\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)+1\right]\frac{F(t)dt}{(b-t)^\beta} \equiv E_2^+[0,0,F(x)]$$

дода мешавад. Дар ин ҷо ба ҷойи $F(x)$ қиматашро аз баробарии (2.72) гузошта, пас аз содакуниҳои ба ҳолати пешина монанд, ба ҳалли муодилаи интегралии намуди Волтерраи:

$$y(x) + \int_{x}^{b} K_2^+(x,t)y(t)dt \equiv E_2^+[0,0,f(x)] \qquad (2.99)$$

меоем, ки дар ин ҷо низ ядро $K_2^+(x,t)$ аз рӯйи формулаи (2.93) муайян карда мешавад ва тарафи рости он $E_2^+[0,0,f(x)]$ аз (2.92) ҳангоми $c_1 = 0, c_2 = 0$ гузоштан, ҳосил карда мешавад.

Бо осонӣ дида мешавад, ки ҳангоми $\lambda > 0$ будан, барои ядрои $K_2^+(x,t)$ ва тарафи рости муодилаи (2.99) $E_2^+[0,0,f(x)]$, нуқтаи $t = b$ нуқтаи махсус намебошад, бинобар ин, ҳангоми $A_1(x) \in C[a,b]$, $B_1(x,t) \in C(R)$ ва $f(x) \in C[a,b]$ ядро ва тарафи рости муодилаи (2.99) функсияҳои бефосила мебошанд.

Дар ин асос муодилаи (2.99) муодилаи интегралии навъи Волтерра бо ядрои регулярӣ ва тарафи рости бефосила буда, ҳалли он мувофиқи назарияи умумии ин гуна муодилаҳо бо ёрии резолвентаи муодилаи (2.99) дар намуди:

$$y(x) = E_2^+[0,0,f(x)] - \int_{x}^{b} \Gamma_2^+(x,t)E_2^+[0,0,f(x)]dt \qquad (2.100)$$

дода мешавад.

Аз ин ҷо дар ҳолати $\lambda > 0$ теоремаи зерин ҷой дорад.

Теоремаи 2.17. *Бигузор, дар муодилаи* (2.71) *функсияҳои* $A(x)$ *ва* $B(x,t)$ *чунон бошад, ки решаҳои муодилаи характеристикии* (2.74) *ҳақиқӣ ва яклхела бошанд ва* $\lambda > 0$ *бошад. Инчунин бигузор, функсияҳои* $A_1(x) \in C[a,b]$, $B(x,t) \in C(R)$ *ва* $f(x) \in C[a,b]$ *бошад. Он гоҳ муодилаи интегро-дифференсиалии ғайриякҷинсаи* (2.71) *дар синфи* $C^1_{\beta-1}[a,b]$ *яккимата ҳалшаванда мешавад ва ҳалли ягонаи он бо ёрии резолвентаи муодилаи интегралии* (2.99) *дар намуди* (2.100) *дода мешавад.*

III. Бигузор, решаҳои муодилаи характеристикии (2.74) компелксӣ ва ҳамроҳшуда бошанд, ки онҳоро чунин ишорат менамоем $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\gamma$. Бигузор, шарти $Re\lambda_{1,2} = \alpha < 0$ иҷро шавад. Дар ин ҳолат ҳалли умумии муодилаи (2.73) бо ёрии формулаи зерин дода мешавад:

$$y(x) = e^{\alpha\omega_\beta(x)}\left[c_1\cos\gamma\omega_\beta(x) + c_2\sin\omega_\beta(x)\right] - \frac{1}{\gamma}\int_x^b e^{\alpha\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)} \times$$
$$\times \left[\alpha\sin\gamma\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right) + \gamma\cos\gamma\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)\right]\frac{F(t)dt}{(b-t)^\beta} \equiv$$
$$\equiv E_3^+[c_1, c_2, F(x)]$$

Дар тарафи рости ин баробарӣ ба ҷойи $F(x)$ қиматашро аз (2.72) гузошта, пас аз содакунии ҷамъшавандаҳои мувофиқ ҳосил мекунем:

$$y(x) = E_3^+[c_1, c_2, F(x)] - \frac{1}{\gamma}\int_x^b e^{\alpha\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)} \times$$
$$\times \left[\alpha\sin\left[\gamma\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)\right] + \gamma\cos\left[\gamma\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)\right]\right] \times$$
$$\times \frac{A(b)-A(t)dt}{(b-t)^\beta}y(t)dt + \frac{1}{\gamma}\int_x^b \left[\int_x^t e^{\alpha\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)} \times\right.$$
$$\left.\times \left[\alpha\sin\left[\gamma\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)\right] + \gamma\cos\left[\gamma\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)\right]\right]\frac{d\tau}{(b-\tau)^\beta(b-t)^\beta}\right] \times$$

$$\times \frac{B(b,b)-B(\tau,t)dt}{(b-t)^{\beta}} y(t)dt.$$

Бо дохил намудани ишораи:

$$K_3^{+}(x,t)=e^{\alpha\omega_\beta(x)}\left[\alpha\cos\gamma\omega_\beta(x)+\gamma\sin\omega_\beta(x)\right]\frac{A_1(t)}{(b-t)^{\beta}}-\int_x^t e^{\alpha\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\times$$

$$\left[\alpha\sin\left[\gamma\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)\right]+\gamma\cos\left[\gamma\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)\right]\right]\frac{B_1(\tau,t)d\tau}{(b-\tau)^{\beta}(b-t)^{\beta}}\Bigg],$$

ба ҳалли муодилаи интегралии намуди Волтерраи зерин меоем:

$$y(x)+\frac{1}{\gamma}\int_x^b K_3^{+}(x,t)y(t)dt=E_3^{+}[c_1,c_2,f(x)]. \qquad (2.101)$$

Талаб менамоем, ки функсияҳои $A_1(x)$ ва $B_1(\tau,t)$ ҳангоми $t\to b$ ба сифр майл намуда, рафторашон аз рӯйи формулаҳои ассимптотикии зерин муайян карда шавад:

$$A_1(x)=o\left[e^{-\delta\omega_\beta(t)}\right],\quad \delta>|\alpha| \qquad (2.102)$$

ва

$$B_1(\tau,t)=o\left[e^{-\delta\omega_\beta(t)}\right],\ \ \delta>|\alpha|. \qquad (2.103)$$

Инчунин, бигузор, дар тарафи рости муодилаи (2.101) функсияи $f(x)$ ҳангоми $x\to b$ ба сифр майл намуда, рафтораш аз рӯйи формулаи ассимптотикии зерин муайян карда шавад:

$$f(x)=o\left[e^{-\delta\omega_\beta(t)}\right],\quad \delta>|\alpha|. \qquad (2.104)$$

Бо иҷро шудани шартҳои (2.102) – (2.104) ядрои муодилаи (2.101) ядрои регулярӣ ва тарафи рости он функсияи бефосила мебошад. Аз ин рӯ, мувофиқи назарияи умумии муодилаҳои интегралии намуди Волтерра ҳалли муодилаи (2.101) бо ёрии формулаи зерин дода мешавад:

$$y(x)+E_3^+[c_1,c_2,f(x)]-\frac{1}{\gamma}\int_x^b \Gamma_3^+(x,t)E_3^+[c_1,c_2,f(x)]dt, \qquad (2.105)$$

ки дар ин ҷо $\Gamma_3^+(x,t)$ – резолвентаи муодилаи (2.101) мебошад.

Ҳамин тавр, теоремаи зерин исбот гардид.

Теоремаи 2.18. *Бигузор, дар муодилаи* (2.71) *функсияҳои* $A(x)$ *ва* $B(x,t)$ *чунин бошанд, ки решаҳои муодилаи характеристикии* (2.74) *компелксӣ ва ҳамроҳшуда мебошанд ва шарти* $Re\lambda_{1,2}=\alpha<0$ *иҷро шавад. Инчунин, бигузор, функсияҳои* $A_1(t)$, $B_1(x,t)$ *ва* $f(t)$ *ҳангоми* $t\to b$ *ба сифр майл намуда, рафторашон аз рӯйи формулаҳои* (2.102), (2.103) *ва* (2.104) *муайян карда шавад.*

Он гоҳ муодилаи интегро-дифференсиалии ғайриякҷинсаи (2.71) *дар синфи* $C_{\beta-1}^{(1)}[a,b]$ *ҳалшаванда мебошад ва ҳалли он бо ёрии резолвентаи муодилаи интегралии* (2.101) *дар намуди* (2.105) *ифода карда мешавад.*

Бигузор, шарти $Re\lambda_{1,2}=\alpha>0$ иҷро шавад. Дар ин маврид дар асоси натиҷаи § 2.4. ҳалли муодилаи (2.73) дар намуди зерин ифода мегардад:

$$y(x)=-\frac{1}{\gamma}\int_x^b e^{\alpha\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\times$$

$$\times\left[\alpha\sin\gamma\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)+\gamma\cos\gamma\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)\right]\frac{F(t)dt}{(b-t)^\beta}\equiv$$

$$\equiv E_3^+[0,0,F(x)].$$

Дар ин маврид низ ба ҷойи $F(x)$ қиматашро аз (2.72) гузошта, ба ҳалли муодилаи интегралии намуди Волтерраи зерин меоем:

$$y(x) + \frac{1}{\gamma}\int_x^b K_3^+(x,t)y(t)dt \equiv E_3^+[0,0,f(x)]. \qquad (2.106)$$

Дар ин муодила ҳангоми иҷро шудани шарти $\alpha > 0$ барои ядрои $K_3^+(x,t)$ нуқтаи $t = b$ нуқтаи махсус намебошад. Аз ин рӯ, дар ҳолати $A_1(x) \in C[a,b]$, $B(x,t) \in C(R)$ ва $f(x) \in C[a,b]$ ядрои муодилаи (2.106) ядрои регулярӣ буда, тарафи рости он функсияи бефосила мебошад, бинобар ин, ҳалли муодилаи (2.106) бо ёрии резолвентаи муодилаи (2.106) дар намуди зерин ифода мегардад:

$$y(x) = E_3^+[0,0,f(x)] - \frac{1}{\gamma}\int_x^b \Gamma_3^+(x,t)y(t)dt, \qquad (2.107)$$

ки дар ин ҷо $\Gamma_3^+(x,t)$ – резолвентаи муодилаи интегралии (2.106) мебошад.

Аз ин ҷо теоремаи зерин ҷой дорад:

Теоремаи 2.19. *Бигузор, дар муодилаи* (2.71) *функсияҳои* $A(x)$ *ва* $B(x,t)$ *чунон бошанд, ки решаҳои муодилаи характеристикии* (2.74) *компелксӣ ва ҳамроҳшуда бошанд ва шарти* $Re\lambda_{1,2} = \alpha > 0$ *иҷро гардад. Бигузор, функсияҳои* $A_1(x) \in C[a,b]$, $B(x,t) \in C(R)$ *ва* $f(x) \in C[a,b]$ *бошанд. Он гоҳ муодилаи интегро-дифференсиалии ғайриякҷинсаи* (2.71) *дар синфи* $C_{\beta-1}^1[a,b]$ *якқимата ҳалшаванда мебошад ва ҳалли ягонаи он бо ёрии резолвентаи муодилаи интегралии* (2.106) *дар намуди* (2.107) *ифода мешавад.*

Хулосаҳои боби дуюм

Дар ин боб муодилаи интегро-дифференсиалии моделии тартиби якум бо ядрои барзиёд сингулярӣ бавриди таҳқиқот қарор гирифтааст. Барои ёфтани ҳалли ин синфи муодилаҳои интегро-дифференсиалӣ аввал онҳо ба намуди муодилаҳои оператори-дифференсиалӣ оварда шудааст. Нишон дода шудааст, ки ба муодилаи оператори-дифференсиалии ҳосилшуда муодилаи характеристикии тартиби дуюм мувофиқ меояд. Минбаъд, вобаста аз решаҳои муодилаи характеристикӣ ҳалли муодилаи операторӣ-дифференсиалӣ дар се ҳолат ёфта мешавад.

Нишон дода шудааст, ки дар кадом ҳолат ҳалҳои ёфташудаи муодилаи оператори-дифференсиалӣ ҳалли муодилаи интегро-дифференсиалии аввала мегарданд. Оид ба натиҷаҳои дар ин самт ба даст овардашуда теоремаҳои 2.2, 2.3 ва 2.4 исбот карда шудааст.

Баъдан, масъалаи Коши ва масъалаи навъи Коши барои синфи муодилаҳои таҳқиқшаванда ҳал карда шудаанд. Нишон дода шудааст, ки дар фарқият ба масъалаи Коши ҳангоми таҳқиқи масъалаи навъи Коши шартҳои ибтидоиро бо вазнҳои муайян гузоштан лозим меояд. Инчунин, масъалаи навъи Коши дар нуқтаи махсуси муодила гузошта мешавад. Оид ба ҳалли масъалаи Коши ва ҳалли масъалаи навъи Коши теоремаҳои 2.6, 2.7, 2.8, 2.9, 2.10, 2.11 ва 2.12 исбот карда шудааст.

Инчунин, дар ин боб муодилаи интегро-дифференсиалии ғайримоделии тартиби якум бо ядрои барзиёд сингулярӣ таҳқиқ карда шуда, ҳалли умумии он ба воситаи резолвентаи муодилаи интегралии намуди Волтерра бо ядрои регулярӣ ифода карда шудааст. Натиҷаҳои асосии дар ин қисмати диссертатсия бадастовардашуда дар теоремаҳои 2.13, 2.14, 2.15, 2.16, 2.17, 2.18 ва 2.19 инъикоси худро ёфтаанд.

БОБИ 3

ТАҲҚИҚИ МУОДИЛАҲОИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРНСИАЛИИ ТАРТИБИ ОЛӢ БО ЯДРОИ БАРЗИЁД СИНГУЛЯРӢ

Дар ин боб як синфи муодилаҳои интегро-диффернсиалии тартиби олӣ бо ядрои барзиёд сингулярӣ мавриди таҳқиқот қарор гирифтааст.

Аввалан, оператори дифференсиалии тартиби олӣ бо коэффисиентҳои доимӣ дохил карда шуда, хосиятҳои ин гуна операторҳо омӯхта мешаванд.

Баъдан, бо ёрии ин гуна операторҳои дифференсиалӣ муодилаи интегро-дифференсиалии тартиби олӣ сохта шуда, мавриди таҳқиқот қарор дода мешавад.

Маълум мегардад, ки ба муодилаи интегро-дифференсиалии таҳқиқшаванда муодилаи оператори-диференсиалии тартиби $(n+1)$-ум ва муодилаи характеристикии алгебравии тартиби $(n+1)$-ум мувофиқ меояд.

Дар рафти таҳқиқотҳои минбаъда вобаста аз решаҳои муодилаи характеристикии мувофиқоянда ҳалли умумии муодилаи интегро-дифференсиалии таҳқиқшаванда дар ҳолатҳои гуногун дар намуди ошкор ёфта мешаванд.

Инчунин, дар зербобщои панҷум ва шашуми ин боб муодилаи интегро-дифференсиалии тартиби n-уми ғайримоделӣ бо ядрои барзиёд сингулярӣ ҳал карда шуда, масъалаи навъи Коши барои ин синфи муодилаҳои таҳқиқ карда мешавад.

Натиҷаҳои асосии дар ин боб бадастовардашуда дар корҳои [6-M], [11-M], [12-M] ба чоп расонда шудааст.

§ 3.1. Муодилаи интегро-диффернесиалии тартиби олӣ дар ҳолати моделӣ

Бо $P_M^n(x)$ бисёраъзогии дараҷаи n-уми зеринро ишора мекунем:

$$P_M^n(x) \equiv x^n + M_1 x^{n-1} + M_2 x^{n-2} + \cdots + M_{n-1} x + M_n,$$

ки дар ин ҷо $M_1, M_2, \cdots, M_{n-1}, M_n$-ададҳои доимӣ мебошанд. Оператори дифференсиалии:

$$D_x^\beta = (b-x)^\beta \frac{d}{dx}$$

-ро дохил намуда, бо ёрии он ба бисёраъзогии $P_M^n(x)$ оператори дифференсиалии тартиби олии зеринро мувофиқ мегузорем:

$$P_M^n\left(D_x^\beta\right) \equiv \left(D_x^\beta\right)^n + M_1\left(D_x^\beta\right)^{n-1} + M_2\left(D_x^\beta\right)^{n-2} + \cdots + M_{n-1}D_x^\beta + M_n.$$

Дар асоси натиҷаҳои дар боби якум бадастовардашуда, ба хотир меорем, ки функсияи хоси оператори D_x^β намуди:

$$y = e^{\lambda\omega_\beta(x)}$$

-ро дошт, ки дар ин ҷо $\omega_\beta(x) = \frac{1}{(\beta-1)(b-x)^{\beta-1}}$ мебошад. Аз ин ҷо бо дарназардошти он ки:

$$\left(D_x^\beta\right) e^{\lambda\omega_\beta(x)} = \lambda e^{\lambda\omega_\beta(x)},$$
$$\left(D_x^\beta\right)^2 e^{\lambda\omega_\beta(x)} = \lambda^2 e^{\lambda\omega_\beta(x)},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\left(D_x^\beta\right)^n e^{\lambda\omega_\beta(x)} = \lambda^n e^{\lambda\omega_\beta(x)},$$

ҳангоми татбиқ намудани оператори $P_M^n\left(D_x^\beta\right)$ ба функсияи $e^{\lambda\omega_\beta(x)}$ ҳосил мекунем:

$$P_M^n\left(D_x^\beta\right) e^{\lambda\omega_\beta(x)} = P_M^n(\lambda) e^{\lambda\omega_\beta(x)},$$

ки дар ин ҷо :

$$P_M^n(\lambda) = \lambda^n + M_1\lambda^{n-1} + M_2\lambda^{n-2} + \cdots + M_{n-1}\lambda + M_n.$$

Дар асоси ин натиҷаҳо бо осонӣ дида мешавад, ки барои оператори дифференсиалии тартиби олии:

$$P_N^m\left(D_x^\beta\right) \equiv \left(D_x^\beta\right)^m + N_1\left(D_x^\beta\right)^{m-1} + N_2\left(D_x^\beta\right)^{m-2} + \cdots + N_{m-1}D_x^\beta + N_m$$

низ хосияти:

$$P_N^m\left(D_x^\beta\right)e^{\lambda\omega_\beta(x)} = P_N^m(\lambda)e^{\lambda\omega_\beta(x)},$$

ки дар ин ҷо

$$P_N^m(\lambda) = \lambda^m + N_1\lambda^{m-1} + N_2\lambda^{m-2} + \cdots + N_{m-1}\lambda + N_m$$

мебошад, иҷро мешавад.

Акнун дар $\Gamma = \{x\colon a \le x \le b\}$ муодилаи интегро-дифференсиалӣ бо ядрои барзиёд сингулярии зеринро дида мебароем:

$$P_M^n\left(D_x^\beta\right)y - \int_x^b \frac{B(x,t)}{(b-t)^\beta}P_N^m\left(D_x^\beta\right)y(t)dt = f(x), \qquad (3.1)$$

ки дар ин ҷо $\beta > 1$, $B(b,b) \neq 0$ ва $n > m$ мебошад.

Маълум аст, ки барои муодилаи (3.1) нуқтаи $t = b$ нуқтаи махсусияташ калон аз як мебошад. Бинобар ин, ҳалли муодилаи (3.1)-ро бо таври табиӣ дар синфи чунин функсияҳое ҷустуҷӯ намудан лозим меояд, ки дорои D_x^{β}-ҳосилаҳои то тартиби n-ум бошанд ва ҳосилаи то тартиби m-и онҳо ба синфи $C_{\beta-1}[a,b]$ тааллуқ дошта бошад. Синфи чунин функсияҳоро дар оянда бо рамзи $C_{\beta-1}^{(n,m)}[a,b]$ ишора мекунем. Маълум аст, ки дар ин маврид ҳангоми $m = 0$ будан:

$$C_{\beta-1}^{(n,0)}[a,b] = C_{\beta-1}^{(n)}[a,b]$$

мешавад.

Муодилаи (3.1)-ро пеш аз ҳама дар ҳолати моделӣ, яъне ҳангоми $B(x,t) = B = const$ будан, мавриди таҳқиқот қарор медиҳем. Дар ин маврид, муодилаи моделии ба муодилаи (3.1) мувофиқоянда чунин намуд мегирад:

$$P_M^n\left(D_x^{\beta}\right)y - \int_x^b \frac{B}{(b-t)^{\beta}} P_N^m\left(D_t^{\beta}\right)y(t)dt = f(x). \qquad (3.2)$$

Барои таҳқиқ намудани муодилаи (3.2) ба ду тарафи он оператори D_x^{β}-ро тадбиқ намуда, ҳосил мекунем:

$$D_x^{\beta}P_M^n\left(D_x^{\beta}\right)y(x) - D_x^{\beta}\int_x^b \frac{B}{(b-t)^{\beta}} P_N^m\left(D_t^{\beta}\right)y(t)dt = D_x^{\beta}f(x).$$

Аз ин ҷо, бо дарназардошти он ки:

$$D_x^{\beta}P_M^m\left(D_x^{\beta}\right)y = D_x^{\beta}\left[\left(D_x^{\beta}\right)^n + M_1\left(D_x^{\beta}\right)^{n-1} + \cdots + M_{n-1}D_x^{\beta} + M_n\right]y =$$
$$= \left[\left(D_x^{\beta}\right)^{n+1} + M_1\left(D_x^{\beta}\right)^n + \cdots + M_{n-1}\left(D_x^{\beta}\right)^2 + M_nD_x^{\beta}\right]y$$

ва

$$-D_x^\beta \int_x^b \frac{B}{(b-t)^\beta} P_N^m\left(D_t^\beta\right) y(t)dt = (b-x)^\beta \frac{B}{(b-x)^\beta} P_N^m\left(D_x^\beta\right) y(x) =$$

$$= BP_N^m\left(D_x^\beta\right) y(x) = B\left[\left(D_x^\beta\right)^m + N_1\left(D_x^\beta\right)^{m-1} + \cdots + N_{m-1}D_x^\beta + N_m\right] y =$$

$$= \left[B\left(D_x^\beta\right)^m + BN_1\left(D_x^\beta\right)^{m-1} + \cdots + BN_{m-1}D_x^\beta + BN_m\right] y$$

ҳосил мекунем:

$$\left[\left(D_x^\beta\right)^{n+1} + M_1\left(D_x^\beta\right)^n + \cdots + M_{n-1}\left(D_x^\beta\right)^2 + M_n D_x^\beta\right] y +$$

$$+\left[B\left(D_x^\beta\right)^m + BN_1\left(D_x^\beta\right)^{m-1} + \cdots + BN_{m-1}D_x^\beta + BN_m\right] y = D_x^\beta f(x),$$

ё ин ки:

$$\left[\left(D_x^\beta\right)^{n+1} + M_1\left(D_x^\beta\right)^n + \cdots + M_{n-m+1}\left(D_x^\beta\right)^m + M_{n-m+2}\left(D_x^\beta\right)^{m-1} + \cdots +\right.$$

$$\left.+M_n D_x^\beta + B\left(D_x^\beta\right)^m + BN_1\left(D_x^\beta\right)^{m-1} + \cdots + BN_{m-1}D_x^\beta + BN_m\right] y = D_x^\beta f(x),$$

$$\left[\left(D_x^\beta\right)^{n+1} + M_1\left(D_x^\beta\right)^n + \cdots + (M_{n-m+1} + B)\left(D_x^\beta\right)^m +\right.$$

$$\left.+(M_{n-m+2} + BN_1)\left(D_x^\beta\right)^{m-2} + \cdots + (M_n + BN_{m-1})D_x^\beta + BN_m\right] y = D_x^\beta f(x).$$

Ишораҳои зеринро дохил мекунем:

$$M_1 = K_1, \dots, M_{n-m} = K_{n-m}, M_{n-m+1} + B = K_{n-m+1}, M_{n-m+2} + BN_1 =$$

$$= K_{n-m+2}, \dots, M_n + BN_{m-1} = K_n, BN_m = K_{n+1}.$$

Он гоҳ муодилаи охирон чунин намуд мегирад:

$$\left(D_x^\beta\right)^{n+1} y + K_1 \left(D_x^\beta\right)^n y + \cdots + K_n D_x^\beta y + K_{n+1} y = D_x^\beta f(x),$$

ё ин ки:

$$P_K^{n+1}\left(D_x^\beta\right) y = D_x^\beta f(x). \qquad (3.3)$$

Ҳамин тавр, ҳалли муодилаи интегро-дифференсиалии моделии (3.2) ба ҳалли муодиалаи операторӣ-дифференсиалии (3.3) оварда шуд.

Оид ба баробарқуввагии муодилаи (3.2) ба муодилаи (3.3) ҳаминро қайд менамоем, ки ҳар гуна ҳалли муодилаи (3.2), ки як маротибаи дигар бефосила D_x^β-дифференсиронидашаванда мебошад, ҳалли муодилаи (3.3) низ мебошад, зеро муодилаи (3.3) аз муодилаи (3.2) ҳангоми як маротиба D_x^β – дифференсиронидан ҳосил карда шудааст.

Вале, тасдиқоти ба ин гуфтаҳо баръакс ҷой надорад. Яъне, на ҳама ҳалҳои муодилаи (3.3) ҳалли муодилаи интегро-дифференсиалии (3.2) низ шуда метавонад. Танҳо он ҳалҳои муодилаи (3.3) ҳалли муодилаи (3.2) шуда метавонад, ки ба синфи $C_{\beta-1}^{(n,m)}[a,b]$ тааллуқ дошта бошад.

Дар асоси ин гуфтаҳо, ба таҳқиқи муодилаи (3.3) машғул гашта, пас аз ёфтани ҳалли умумии он, ҳалҳоеро ҷудо менамоем, ки ба синфи $C_{\beta-1}^{(n,m)}[a,b]$ тааллуқ дошта, ҳалли муодилаи (3.2) бошанд.

Ҳамин тавр, ба таҳқиқи муодилаи оператори-дифференсиалии (3.3) машғул гашта, пеш аз ҳама ба ёфтани ҳалли умумии муодилаи оператори-дифференсиалии якҷинсаи:

$$P_K^{n+1}\left(D_x^\beta\right) y = 0 \qquad (3.4)$$

машғул мешавем.

Ҳалли муодилаи (3.4)-ро дар намуди:

$$y(x) = e^{\lambda \omega_\beta(x)}$$

ҷустуҷӯ менамоем. Он гоҳ дар асоси хосияти оператори $P_K^{n+1}\left(D_x^\beta\right)$

$$P_K^{n+1}\left(D_x^\beta\right) e^{\lambda \omega_\beta(x)} = P_K^{n+1}(\lambda) e^{\lambda \omega_\beta(x)} = 0$$

ва аз ин ҷо

$$P_K^{n+1}(\lambda) = 0, \tag{3.5}$$

яъне барои муодилаи (3.4) муодилаи характеристикӣ – муодилаи алгебравии дараҷаи $n+1$ ҳосил гардид. Акнун вобаста аз решаҳои муодилаи характеристикии (3.5) дар ҳолатҳои гуногун ҳалли муодилаи (3.3) ва пас аз он ҳалли муодилаи (3.2)-ро ҳосил менамоем.

§ 3.2. Ёфтани ҳалли муодилаи интегро-дифференсиалии моделӣ дар ҳолати решаҳои муодилаи характеристикӣ ҳақиқӣ ва гуногун будан

Бигузор, решаҳои муодилаи характеристикии (3.5) ҳақиқӣ ва гуногун бошанд, ки онҳоро бо $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1}$ ишора мекунем ва бигузор ин решаҳо бо тартиби афзуншавиашон рақамгузорӣ шуда бошанд, яъне $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_{n+1}$.

Маълум аст, ки дар ин маврид функсияҳои:

$$y_1 = e^{\lambda_1 \omega_\beta(x)},\ y_2 = e^{\lambda_2 \omega_\beta(x)}, \dots, y_{n+1} = e^{\lambda_{n+1} \omega_\beta(x)}$$

системаи ҳалҳои фундаменталии муодилаи якҷинсаи (3.4)-ро ташкил медиҳанд. Ҳалли умумии муодилаи (3.4) дар ин маврид чунин намуд мегирад:

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 \omega_\beta(x)} + \ C_2 e^{\lambda_2 \omega_\beta(x)} + \cdots + C_{n+1} e^{\lambda_{n+1} \omega_\beta(x)}.$$

Барои ёфтани ҳалли муодилаи ғайриякҷинсаи (3.3) аз методи вариатсияи доимиҳои ихтиёрӣ истифода мебарем, яъне ҳалли муодилаи (3.3)-ро дар намуди зерин ҷустуҷӯ менамоем:

$$y(x) = C_1(x) e^{\lambda_1 \omega_\beta(x)} + \ C_2(x) e^{\lambda_2 \omega_\beta(x)} + \cdots + C_{n+1}(x) e^{\lambda_{n+1} \omega_\beta(x)}, \qquad (3.6)$$

ки айни ҳол $C_1(x)$, $C_2(x)$,..., $C_{n+1}(x)$ – функсияҳои номаълум буда, муайян намудани онҳо мақсади асосии амалҳои минбаъдаи мо мебошад.

Ба функсияи (3.6) оператори D_x^β-ро татбиқ менамоем:

$$D_x^\beta y(x) = D_x^\beta C_1(x) e^{\lambda_1 \omega_\beta(x)} + D_x^\beta \ C_2(x) e^{\lambda_2 \omega_\beta(x)} + \cdots + D_x^\beta C_{n+1}(x) e^{\lambda_{n+1} \omega_\beta(x)} +$$
$$+\lambda_1 C_1(x) e^{\lambda_1 \omega_\beta(x)} + \lambda_2 \ C_2(x) e^{\lambda_2 \omega_\beta(x)} + \cdots + \lambda_{n+1} C_{n+1}(x) e^{\lambda_{n+1} \omega_\beta(x)}.$$

Бигузор, функсияҳои $C_1(x)$, $C_2(x)$, … , $C_{n+1}(x)$ чунин мебошанд, ки шарти:

$$D_x^\beta C_1(x) e^{\lambda_1 \omega_\beta(x)} + D_x^\beta \ C_2(x) e^{\lambda_2 \omega_\beta(x)} + \cdots + D_x^\beta C_{n+1}(x) e^{\lambda_{n+1} \omega_\beta(x)} = 0 \ (3.7)$$

иҷро шавад. Он гоҳ:

$$D_x^\beta y = \lambda_1 C_1(x) e^{\lambda_1 \omega_\beta(x)} + \lambda_2 C_2(x) e^{\lambda_2 \omega_\beta(x)} + \cdots +$$
$$+\lambda_{n+1} C_{n+1}(x) e^{\lambda_{n+1} \omega_\beta(x)}. \qquad (3.8)$$

Ба ин функсия оператори D_x^β-ро бори дигар татбиқ намуда, иҷрошавии шарти:

$$\lambda_1 D_x^\beta C_1(x) e^{\lambda_1 \omega_\beta(x)} + \lambda_2 D_x^\beta C_2(x) e^{\lambda_2 \omega_\beta(x)} +$$
$$+ \cdots + \lambda_{n+1} D_x^\beta C_{n+1}(x) e^{\lambda_{n+1} \omega_\beta(x)} = 0 \qquad (3.9)$$

-ро талаб намуда, ҳосил мекунем:

$$\left(D_x^{\beta}\right)^2 y = C_1(x)\lambda_1^2 e^{\lambda_1\omega_\beta(x)} + C_2(x)\lambda_2^2 e^{\lambda_2\omega_\beta(x)} + \cdots +$$
$$+C_{n+1}(x)\lambda_{n+1}^2 e^{\lambda_{n+1}\omega_\beta(x)}. \qquad (3.10)$$

Ин равандро идома дода, барои D_x^{β}-ҳосилаи тартиби n-ум ҳосил мекунем:

$$\left(D_x^{\beta}\right)^n y = C_1(x)\lambda_1^n e^{\lambda_1\omega_\beta(x)} + C_2(x)\lambda_2^n e^{\lambda_2\omega_\beta(x)} + \cdots +$$
$$+C_{n+1}(x)\lambda_{n+1}^n e^{\lambda_{n+1}\omega_\beta(x)}, \qquad (3.11)$$

ки дар ин ҳолат иҷрошавии шарти:

$$D_x^{\beta} C_1(x)\lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1\omega_\beta(x)} + D_x^{\beta} C_2(x)\lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2\omega_\beta(x)} + \cdots +$$
$$+D_x^{\beta} C_{n+1}(x)\lambda_{n+1}^{n-1} e^{\lambda_{n+1}\omega_\beta(x)} = 0 \qquad (3.12)$$

талаб карда шудааст.

Барои D_x^{β} - ҳосилаи тартиби $n+1$-уми функсияи (3.6) дорем:

$$\left(D_x^{\beta}\right)^{n+1} y = D_x^{\beta} C_1(x)\lambda_1^n e^{\lambda_1\omega_\beta(x)} + D_x^{\beta} C_2(x)\lambda_2^n e^{\lambda_2\omega_\beta(x)} + \cdots +$$
$$+D_x^{\beta} C_{n+1}(x)\lambda_{n+1}^n e^{\lambda_{n+1}\omega_\beta(x)} + C_1(x)\lambda_1^{n+1} e^{\lambda_1\omega_\beta(x)} + C_2(x)\lambda_2^{n+1} e^{\lambda_2\omega_\beta(x)} +$$
$$+ \cdots + C_{n+1}(x)\lambda_{n+1}^{n+1} e^{\lambda_{n+1}\omega_\beta(x)}. \qquad (3.13)$$

Акнун қиматҳои $y(x)$, $D_x^{\beta} y(x)$, $\left(D_x^{\beta}\right)^2 y(x)$, ..., $\left(D_x^{\beta}\right)^n y(x)$ ва $\left(D_x^{\beta}\right)^{n+1} y(x)$-ро мувофиқан аз (3.6), (3.8), (3.10), (3.11) ва (3.13) ба муодилаи ғайриякҷинсаи (3.3) гузошта, баробарии зеринро ҳосил мекунем:

$$C_1(x)P_K^{n+1}(\lambda_1)e^{\lambda_1\omega_\beta(x)} + C_2(x)P_K^{n+1}(\lambda_2)e^{\lambda_2\omega_\beta(x)} + \cdots +$$

$$+C_{n+1}(x)P_K^{n+1}(\lambda_{n+1})e^{\lambda_{n+1}\omega_\beta(x)} + D_x^\beta C_1(x)\lambda_1^n e^{\lambda_1\omega_\beta(x)} + D_x^\beta C_2(x)\lambda_2^n e^{\lambda_2\omega_\beta(x)} +$$

$$+\cdots + D_x^\beta C_{n+1}(x)\lambda_{n+1}^n e^{\lambda_{n+1}\omega_\beta(x)} = D_x^\beta f(x).$$

Бо дарназардошти он ки:

$$P_K^{n+1}(\lambda_1) = 0,\ P_K^{n+1}(\lambda_2) = 0,\ P_K^{n+1}(\lambda_{n+1}) = 0,$$

ҳосил мекунем:

$$D_x^\beta C_1(x)\lambda_1^n e^{\lambda_1\omega_\beta(x)} + D_x^\beta C_2(x)\lambda_2^n e^{\lambda_2\omega_\beta(x)} + \cdots + D_x^\beta C_{n+1}(x)\lambda_{n+1}^n e^{\lambda_{n+1}\omega_\beta(x)} =$$

$$= D_x^\beta f(x). \quad (3.14)$$

Ҳамин тавр, барои муайян намудани функсияҳои номаълуми $C_1(x)$, $C_2(x), \dots, C_{n+1}(x)$ системаи муодилаҳои зеринро ҳосил намудем:

$$\begin{cases} e^{\lambda_1\omega_\beta(x)}D_x^\beta C_1(x) + e^{\lambda_2\omega_\beta(x)}D_x^\beta C_2(x) + \cdots + e^{\lambda_{n+1}\omega_\beta(x)}D_x^\beta C_{n+1}(x) = 0, \\ \lambda_1 e^{\lambda_1\omega_\beta(x)}D_x^\beta C_1(x) + \lambda_2 e^{\lambda_2\omega_\beta(x)}D_x^\beta C_2(x) + \cdots + \lambda_{n+1} e^{\lambda_{n+1}\omega_\beta(x)}D_x^\beta C_{n+1}(x) = 0, \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1\omega_\beta(x)}D_x^\beta C_1(x) + \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2\omega_\beta(x)}D_x^\beta C_2(x) + \cdots + \lambda_{n+1}^{n-1} e^{\lambda_{n+1}\omega_\beta(x)}D_x^\beta C_{n+1}(x) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda_1^n e^{\lambda_1\omega_\beta(x)}D_x^\beta C_1(x) + \lambda_2^n e^{\lambda_2\omega_\beta(x)}D_x^\beta C_2(x) + \cdots + \lambda_{n+1}^n e^{\lambda_{n+1}\omega_\beta(x)}D_x^\beta C_{n+1}(x) = D_x^\beta f(x). \end{cases}$$

Аз қоидаи Крамер истифода бурда, ин системаро ҳал мекунем:

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1\omega_\beta(x)} & e^{\lambda_2\omega_\beta(x)} & \dots & e^{\lambda_{n+1}\omega_\beta(x)} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1\omega_\beta(x)} & \lambda_2 e^{\lambda_2\omega_\beta(x)} & \dots & \lambda_{n+1} e^{\lambda_{n+1}\omega_\beta(x)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^n e^{\lambda_1\omega_\beta(x)} & \lambda_2^n e^{\lambda_2\omega_\beta(x)} & \dots & \lambda_{n+1}^n e^{\lambda_{n+1}\omega_\beta(x)} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{n+1})\omega_\beta(x)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^n & \lambda_2^n & \dots & \lambda_{n+1}^n \end{vmatrix} = \Delta_0 e^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{n+1})\omega_\beta(x)},$$

$$\Delta_{D_x^\beta C_1}=\begin{vmatrix} 0 & e^{\lambda_2\omega_\beta(x)} & \cdots & e^{\lambda_{n+1}\omega_\beta(x)} \\ 0 & \lambda_2 e^{\lambda_2\omega_\beta(x)} & \cdots & \lambda_{n+1}e^{\lambda_{n+1}\omega_\beta(x)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_x^\beta f(x) & \lambda_2^n e^{\lambda_2\omega_\beta(x)} & \cdots & \lambda_{n+1}^n e^{\lambda_{n+1}\omega_\beta(x)} \end{vmatrix}=$$

$$=(-1)^{n+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_2 & \lambda_3 & \dots & \lambda_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_2^{n-1} & \lambda_3^{n-1} & \dots & \lambda_{n+1}^{n-1} \end{vmatrix} e^{(\lambda_2+\lambda_3+\cdots+\lambda_{n+1})\omega_\beta(x)} D_x^\beta f(x)=$$

$$=(-1)^{n+2}\Delta_1 e^{(\lambda_2+\lambda_3+\cdots+\lambda_{n+1})\omega_\beta(x)} D_x^\beta f(x);$$

… …

$$\Delta_{D_x^\beta C_{n+1}}=\begin{vmatrix} e^{\lambda_1\omega_\beta(x)} & e^{\lambda_2\omega_\beta(x)} & \cdots & 0 \\ \lambda_1 e^{\lambda_1\omega_\beta(x)} & \lambda_2 e^{\lambda_2\omega_\beta(x)} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^n e^{\lambda_1\omega_\beta(x)} & \lambda_2^n e^{\lambda_2\omega_\beta(x)} & \dots & D_x^\beta f(x) \end{vmatrix}=$$

$$=(-1)^{2n+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} e^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)\omega_\beta(x)} D_x^\beta f(x)=$$

$$=(-1)^{2n+2}\Delta_{n+1} e^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)\omega_\beta(x)} D_x^\beta f(x).$$

Аз формулаҳои Крамер истифода бурда, қимати номаълумҳои $D_x^\beta C_1(x), D_x^\beta C_2(x), \dots, D_x^\beta C_{n+1}(x)$-ро меёбем:

$$D_x^\beta C_1(x)=\frac{\Delta_{D_x^\beta C_1}}{\Delta}=\frac{(-1)^{n+2}\Delta_1 e^{(\lambda_2+\lambda_3+\cdots+\lambda_{n+1})\omega_\beta(x)} D_x^\beta f(x)}{\Delta_0 e^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{n+1})\omega_p(x)}}=$$

$$=(-1)^{n+2}\frac{\Delta_1}{\Delta_0}\frac{1}{e^{\lambda_1\omega_\beta(x)}}D_x^\beta f(x),$$

$$D_x^\beta C_2(x)=\frac{\Delta_{D_x^\beta C_2}}{\Delta}=\frac{(-1)^{n+3}\Delta_2 e^{(\lambda_1+\lambda_3+\cdots+\lambda_{n+1})\omega_\beta(x)} D_x^\beta f(x)}{\Delta_0 e^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{n+1})\omega_\beta(x)}}=$$

$$=(-1)^{n+3}\frac{\Delta_2}{\Delta_0}\frac{1}{e^{\lambda_2\omega_\beta(x)}}D_x^\beta f(x),$$

… …

$$D_x^\beta C_{n+1}(x)=(-1)^{2n+2}\frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_0}\frac{1}{e^{\lambda_{n+1}\omega_\beta(x)}}D_x^\beta f(x).$$

Аз ин ҷо бо дарназардошти он ки $D_x^\beta C_1(x) = (b-x)^\beta C_1'(x)$ ва $D_x^\beta f(x) = (b-x)^\beta f'(x)$ ҳосил мекунем:

$$\mathrm{C}_1(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{\Delta_0}\int\limits_x^b \frac{\Delta_1}{e^{\lambda_1\omega_\beta(x)}} f'(t)dt + c_1,$$

$$\mathrm{C}_2(x) = \frac{(-1)^{n+2}}{\Delta_0}\int\limits_x^b \frac{\Delta_2}{e^{\lambda_2\omega_\beta(x)}} f'(t)dt + c_2,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\mathrm{C}_{n+1}(x) = \frac{(-1)^{2n+1}}{\Delta_0}\int\limits_x^b \frac{\Delta_{n+1}}{e^{\lambda_{n+1}\omega_\beta(x)}} f'(t)dt + c_{n+1}.$$

Ин қиматҳоро ба (3.6) мегузорем

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)} + c_2 e^{\lambda_2\omega_\beta(x)} + \dots + c_{n+1} e^{\lambda_{n+1}\omega_\beta(x)} +$$
$$+\frac{1}{\Delta_0}\int\limits_x^b \Big[\Delta_1 e^{\lambda_1\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)} + \Delta_2 e^{\lambda_2\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)} + \cdots$$
$$+ \Delta_{n+1} e^{\lambda_{n+1}\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\Big] f'(t)dt$$

Дар интеграли тарафи рости ин баробарӣ як маротиба қисм ба қисм интегронида, ҳосил мекунем:

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)} + c_2 e^{\lambda_2\omega_\beta(x)} + \dots + c_{n+1} e^{\lambda_{n+1}\omega_\beta(x)} +$$
$$+\frac{1}{\Delta_0}\int\limits_x^b \Big[\Delta_1\lambda_1 e^{\lambda_1\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)} + \Delta_2\lambda_2 e^{\lambda_2\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)} + \cdots$$
$$+ \Delta_{n+1}\lambda_{n+1} e^{\lambda_{n+1}\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\Big] \frac{f(t)}{(b-t)^\beta} dt. \qquad (3.15)$$

Баробарии (3.15) бо дарназардошти иҷрошавии шарти:

$$\frac{1}{\Delta_0}\left[\Delta_1 e^{\lambda_1\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}+\Delta_2 e^{\lambda_2\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}+\cdots\right.$$

$$\left.+\Delta_{n+1} e^{\lambda_{n+1}\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\right] f(t)|_{t=b}=0 \qquad (3.16)$$

ҳосил карда шуд.

Ҳамин тавр, дар ҳалоти ҳақиқӣ ва гуногун будани решаҳои муодилаи характеристикии (3.5) ҳалли умумии муодилаи оператори-дифференсиалии (3.3)-ро ба таври формалӣ дар намуди (3.15) ифода намудем.

Акнун ба муодилаи интегро-дифференсиалии (3.2) баргашта, муайян месозем, ки дар кадом ҳолат ин ҳалли ёфташуда ҳалли муодилаи (3.2) низ мегардад. Ҳолатҳои зеринро ҷудо менамоем:

1. Бигузор, решаҳои муодилаи характеристикии (3.5) нобаробарии

$$\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_{n+1}<0 \qquad (3.17)$$

-ро қаноат намоянд. Он гоҳ бо осонӣ санҷидан мумкин аст, ки ҳар яке аз функсияҳои

$$y_1=e^{\lambda_1\omega_\beta(x)}, y_2=e^{\lambda_2\omega_\beta(x)},\ldots,y_{n+1}=e^{\lambda_{n+1}\omega_\beta(x)} \qquad (3.18)$$

муодилаи якҷинсаи ба (3.2) мувофиқояндаи

$$P_M^n\left(D_x^\beta\right)y-\int_x^b\frac{B}{(b-t)^\beta}P_N^m\left(D_t^\beta\right)y(t)dt=0 \qquad (3.19)$$

-ро қаноат менамояд. Дар ҳақиқат, масалан барои $y_1=e^{\lambda_1\omega_\beta(x)}$ ҳосил мекунем:

$$P_M^n\left(D_x^\beta\right)e^{\lambda_1\omega_\beta(x)}-\int\limits_x^b\frac{B}{(b-t)^\beta}P_N^m\left(D_t^\beta\right)e^{\lambda_1\omega_\beta(t)}dt=0,$$

$$P_M^n(\lambda_1)e^{\lambda_1\omega_\beta(x)}-\int\limits_x^b\frac{B}{(b-t)^\beta}P_N^m(\lambda_1)e^{\lambda_1\omega_\beta(t)}dt=0,$$

$$P_M^n(\lambda_1)e^{\lambda_1\omega_\beta(x)}-\frac{BP_N^m(\lambda_1)}{\lambda_1}\int\limits_x^b e^{\lambda_1\omega_\beta(t)}\,d\left(\lambda_1\omega_\beta(t)\right)=0,$$

$$P_M^n(\lambda_1)e^{\lambda_1\omega_\beta(x)}-\frac{BP_N^m(\lambda_1)}{\lambda_1}e^{\lambda_1\omega_\beta(t)}|_x^b=0,$$

$$P_M^n(\lambda_1)e^{\lambda_1\omega_\beta(x)}+\frac{BP_N^m(\lambda_1)}{\lambda_1}e^{\lambda_1\omega_\beta(x)}|_x^b=0,$$

$$\left(P_M^n(\lambda_1)+\frac{BP_N^m(\lambda_1)}{\lambda_1}\right)e^{\lambda_1\omega_\beta(x)}=0,$$

$$\frac{\lambda_1P_M^n(\lambda_1)+BP_N^m(\lambda_1)}{\lambda_1}=0.$$

Аз ин ҷо:

$$\lambda_1P_M^n(\lambda_1)+BP_N^m(\lambda_1)=0,$$

ки ин ба муодилаи характеристикии (3.5) баробарқувва мебошад. Барои $i=\overline{2,n+1}$ ин ҳисобкуниҳоро барои функсияҳои (3.18) гузаронида, ба хулосае меоем, ки функсияҳои (3.18) системаи фундаменталии ҳалҳои муодилаи якҷинсаи (3.19)-ро ташкил медиҳанд.

Аз ин ҷо, чунин натиҷа мебарояд, ки функсияи (3.15) ҳалли умумии муодилаи ғайриякҷинсаи (3.2)-ро ифода мекунад.

Шартҳои наздикшавии интеграли тарафи рости (3.15)-ро муайян мекунем. Ҳангоми иҷро шудани шарти (3.17) дар ифодаи зериинтегралии тарафи рости (3.15) махсусияти калонтаринро функсияи намуди $e^{-\lambda_1\omega_\beta(t)}$ дорад. Аз ин рӯ, аз функсияи

$f(t)$ талаб менамоем, ки дар нуқтаи $t = b$ ба сифр мубаддал гашта, рафтораш аз рӯйи формулаи ассимптотикии зерин муайян карда шавад:

$$f(t) = o\left[e^{-\delta\omega_\beta(t)}\right], \delta > |\lambda_1|. \tag{3.20}$$

Аз ин ҷо, бо иҷро шудани шарти (3.20) интеграли тарафи рости (3.15) интеграли наздикшаванда мебошад ва ҳалли умумии муодилаи интегро-дифференсиалии ғайриякҷинсаи (3.2) бо ёрии формулаи (3.15) ифода мегардад.

Ҳамин тавр, теоремаи зерин исбот карда шуд.

Теоремаи 3.1. *Бигузор, дар муодилаи интегро-дифференсиалии (3.2) коэффитсиентҳои операторҳои дифференсиалии* $P_M^n\left(D_x^\beta\right)$ ва $P_N^m\left(D_x^\beta\right)$ *чунон бошанд, ки решаҳои муодилаи характеристикии (3.5) ҳақиқӣ ва гуногун бошанд ва шарти (3.17)-ро қаноат намоянд. Бигузор, тарафи рости муодилаи (3.2) функсияи* $f(x)$ *дар нуқтаи* $x = b$ *ба сифр мубаддал гашта, рафтораш аз рӯйи формулаи ассимптотикии (3.20) муайян карда шавад. Он гоҳ муодилаи интегро-дифференсиалии ғайриякҷинсаи (3.2) дар синфи* $C_{\beta-1}^{(n,m)}[a,b]$ *ҳалшаванда мебошад ва ҳалли умумии он дар намуди ошкор бо ёрии формулаи (3.15) дода мешавад.*

2. Бигузор, решаҳои муодилаи характеристикии (3.5) нобаробарии

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_k < 0 < \lambda_{k+1} < \lambda_{k+2} < \cdots < \lambda_{n+1} \tag{3.21}$$

-ро қаноат намоянд. Дар ин маврид бо осонӣ нишон додан мумкин аст, ки функсияҳои:

$$y_{k+1} = e^{\lambda_{k+1}\omega_\beta(x)}, y_{k+2} = e^{\lambda_{k+2}\omega_\beta(x)}, \cdots, y_{n+1} = e^{\lambda_{n+1}\omega_\beta(x)}$$

муодилаи якҷинсаи (3.19)-ро қаноат наменамоянд. Аз ин ҷо мебарояд, ки ҳалли умумии муодилаи якҷинсаи (3.19) намуди:

$$y = c_1 e^{\lambda_1 \omega_\beta(x)} + c_2 e^{\lambda_2 \omega_\beta(x)} + \dots + c_k e^{\lambda_k \omega_\beta(x)}$$

ва ҳалли умумии муодиалаи ғайриякҷинсаи (3.2) намуди:

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 \omega_\beta(x)} + c_2 e^{\lambda_2 \omega_\beta(x)} + \dots + c_k e^{\lambda_k \omega_\beta(x)} +$$
$$+\frac{1}{\Delta_0}\int_x^b \Big[\Delta_1 \lambda_1 e^{\lambda_1\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)} + \Delta_2 \lambda_2 e^{\lambda_2\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)} + \cdots$$
$$+ \Delta_{n+1}\lambda_{n+1} e^{\lambda_{n+1}\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\Big] \frac{f(t)}{(b-t)^\beta} dt \qquad (3.22)$$

-ро мегарад. Дар ин маврид низ барои наздикшавандагии интеграли тарафи рости (3.22)-ро таъмин намудан, аз функсияи $f(x)$ талаб менамоем, ки дар нуқтаи $x = b$ шарти (3.20)-ро қаноат намояд.

Ҳамин тавр, чунин теорема ҷой дорад.

Теоремаи 3.2. *Бигузор, ҳамаи шартҳои теоремаи* 3.1 *ғайр аз шарти* (3.17) *иҷро шавад. Ба ҷойи шарти* (3.17) *бигузор, решаҳои муодилаи характеристикии* (3.5)*, шарти* (3.21)*-ро қаноат намоянд. Он гоҳ муодилаи интегро-дифференсиалии ғайриякҷинсаи* (3.2) *дар синфи* $C_{\beta-1}^{(n,m)}[a,b]$ *ҳалшаванда мебошад ва ҳалли умумии он* $k -$ *доимиҳои ихтиёриро дар бар гирифта, намуди* (3.22)*-ро дорад.*

3. Бигузор, решаҳои муодилаи характеристикии (3.5) нобаробарии:

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_{n+1} \qquad (3.23)$$

-ро қаноат намоянд. Дар ин маврид ба осонӣ санҷида мешавад, ки ҳеҷ кадом аз функсияҳои:

$$y_i = e^{\lambda_i \omega_\beta(x)}, (i = \overline{1, n+1})$$

муодилаи якҷинсаи (3.19)-ро қаноат наменамоянд. Яъне, дар ин маврид муодилаи якҷинсаи (3.19) дорои танҳо ҳалли сифрӣ мебошад. Муодилаи ғайриякҷинсаи (3.2) бошад, дорои ҳалли ягона мебошад, ки он бо ёрии формулаи:

$$y(x) = \frac{1}{\Delta_0}\int_x^b \left[\Delta_1\lambda_1 e^{\lambda_1\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)} + \Delta_2\lambda_2 e^{\lambda_2\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)} + \cdots\right.$$

$$\left. + \Delta_{n+1}\lambda_{n+1} e^{\lambda_{n+1}\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\right]\frac{f(t)}{(b-t)^\beta}dt \qquad (3.24)$$

ифода карда мешавад.

Маълум аст, ки бо иҷро шудани шарти (3.23) интеграли тарафи рости (3.24) ҳангоми $f(x)\epsilon C[a,b]$ наздикшаванда мебошад.

Ҳамин тавр, дар ин ҳолат теоремаи зерин ҷой дорад.

Теоремаи 3.3. *Бигузор, дар теморемаи* 3.1 *ба ҷойи шарти* (3.17) *шарти* (3.23)*иҷро шавад ва дар муодилаи* (3.2) *функсияи* $f(x)\epsilon C[a,b]$ *бошад. Он гоҳ муодилаи интегро-дифференсиалии ғайриякҷинсаи* (3.2) *дар синфи* $C_{\beta-1}^{(n,m)}[a,b]$ *якқимата ҳалшаванда мебошад ва ҳалли ягонаи он бо ёрии формулаи* (3.24) *ифода карда мешавад.*

§3.3. Ёфтани ҳалли муодилаи интегро-дифференсиалии моделии тартиби n-ум дар ҳолати решаҳои муодилаи характеристикӣ ҳақиқӣ ва якхела будан

Бигузор, решаҳои муодилаи характеристикии (3.5) ҳақиқӣ ва якхела бошанд, яъне $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{n+1} = \lambda$.

Дар ин маврид системаи фундаменталии ҳалҳои муодилаи якҷинсаи (3.4) намуди:

$$y_1 = e^{\lambda\omega_\beta(x)}, y_2 = \omega_\beta(x)e^{\lambda\omega_\beta(x)}, \cdots, y_{n+1} = \omega_\beta^n(x)e^{\lambda\omega_\beta(x)} \qquad (3.25)$$

ва ҳалли умумии муодилаи (3.4) намуди

$$y(x) = e^{\lambda\omega_\beta(x)}\left[c_1 + c_2\omega_\beta(x) + \cdots + c_{n+1}\omega_\beta^n(x)\right] \tag{3.26}$$

-ро мегирад, ки дар ин ҷо $c_1, c_2, \cdots, c_{n+1}$ – ададҳои доимии ихтиёрӣ мебошанд.

Дар ин маврид низ барои ёфтани ҳалли муодилаи ғайриякҷинсаи (3.3) аз методи вариатсияи доимиҳои ихтиёрӣ истифода мебарем.

Ҳалли муодилаи (3.3)-ро дар намуди:

$$y(x) = e^{\lambda\omega_\beta(x)}\left[c_1(x) + c_2(x)\omega_\beta(x) + \cdots + c_{n+1}(x)\omega_\beta^n(x)\right] \tag{3.27}$$

ҷустуҷӯ менамоем, ки дар ин ҷо $c_1(x), c_2(x), \cdots, c_{n+1}$ – функсияҳои номаълум мебошанд. Барои ёфтани ин функсияҳои номаълум оператори D_x^β-ро ба функсияи (3.27) пайдарпай татбиқ намуда, иҷрошавии шартҳои муайянро талаб менамоем:

$$D_x^\beta y = e^{\lambda\omega_\beta(x)}\left[\lambda c_1(x) + \lambda c_2(x)\omega_\beta(x) + \cdots + \lambda c_{n+1}(x)\omega_\beta^n(x) + \right.$$
$$\left. + c_2(x) + 2c_3(x)\omega_\beta(x) \cdots + nc_{n+1}(x)\omega_\beta^{n-1}(x)\right] + e^{\lambda\omega_\beta(x)}\left[D_x^\beta c_1(x) + \right.$$
$$\left. + D_x^\beta c_2(x)\omega_\beta(x) + \cdots + D_x^\beta c_{n+1}(x)\omega_\beta^n(x)\right].$$

Бигузор, функсияҳои $c_i(x)$ $(i = \overline{1, n+1})$ чунин бошанд, ки шарти:

$$e^{\lambda\omega_\beta(x)}D_x^\beta c_1(x) + \omega_\beta(x)e^{\lambda\omega_\beta(x)}D_x^\beta c_2(x) + \cdots +$$
$$+\omega_\beta^n(x)e^{\lambda\omega_\beta(x)}D_x^\beta c_{n+1}(x) = 0 \tag{3.28}$$

иҷро шавад. Он гоҳ:

$$D_x^\beta y = e^{\lambda\omega_\beta(x)}\left[\lambda c_1(x) + \lambda c_2(x)\omega_\beta(x) + \cdots + \lambda c_{n+1}(x)\omega_\beta^n(x) + \right.$$

$$+c_2(x) + 2c_3(x)\omega_\beta(x) \cdots + nc_{n+1}(x)\omega_\beta^{n-1}(x)\big].$$

Ба ҳар ду тарафи ин баробарӣ оператори D_x^β-ро бори дигар тадбиқ менамоем:

$$\left(D_x^\beta\right)^2 y = e^{\lambda\omega_\beta(x)}\big[\lambda^2 c_1(x) + \lambda^2 c_2(x)\omega_\beta(x) + \cdots + \lambda^2 c_{n+1}(x)\omega_\beta^n(x) +$$
$$\lambda c_2(x) + 2\lambda c_3(x)\omega_\beta(x) + \cdots + n\lambda c_{n+1}(x)\omega_\beta^{n-1}(x) + \lambda c_2(x) +$$
$$+2\lambda c_3(x)\omega_\beta(x) + \cdots + n\lambda c_{n+1}(x)\omega_\beta^{n-1}(x)\big] +$$
$$+2\cdot 1c_3(x) + 3\cdot 2c_4(x)\omega_\beta(x) + \cdots + n(n-1)c_{n+1}(x)\omega_\beta^{n-2}(x)\big] +$$
$$+e^{\lambda\omega_\beta(x)}\left[\lambda D_x^\beta c_1(x) + \big(\lambda\omega_\beta(x) + 1\big)D_x^\beta c_2(x) + \cdots +\right.$$
$$\left. + \left(\lambda\omega_\beta^n(x) + n\omega_\beta^{n-1}(x)\right) D_x^\beta c_{n+1}(x)\right].$$

Бигузор, шарти:

$$\lambda e^{\lambda\omega_\beta(x)} D_x^\beta c_1(x) + \big(\lambda\omega_\beta(x) + 1\big)e^{\lambda\omega_\beta(x)} D_x^\beta c_2(x) + \cdots +$$
$$+ \left(\lambda\omega_\beta^n(x) + n\omega_\beta^{n-1}(x)\right) e^{\lambda\omega_\beta(x)} D_x^\beta c_{n+1}(x) = 0 \qquad (3.29)$$

иҷро шавад. Он гоҳ:

$$\left(D_x^\beta\right)^2 y = e^{\lambda\omega_\beta(x)}\left[\lambda^2\left(c_1(x) + c_2(x)\omega_\beta(x) + \cdots + c_{n+1}(x)\omega_\beta^n(x)\right) +\right.$$
$$+2\lambda\left(c_2(x) + 2c_3(x)\omega_\beta(x) + \cdots + nc_{n+1}(x)\omega_\beta^{n-1}(x)\right) +$$
$$\left. + \left(2\cdot 1c_3(x) + 3\cdot 2c_4(x)\omega_\beta(x) + \cdots + n(n-1)c_{n+1}(x)\omega_\beta^{n-2}(x)\right)\right].$$

Ба ин баробарӣ оператори D_x^β-ро бори дигар тадбиқ намуда, бо дарназардошти иҷрошавии шарти:

$$\lambda^2 e^{\lambda\omega_\beta(x)} D_x^\beta c_1(x) + \left(\lambda^2\omega_\beta(x) + 2\lambda\right) e^{\lambda\omega_\beta(x)} D_x^\beta c_2(x) +$$
$$+\left(\lambda^2\omega_\beta^2(x) + 2\lambda\cdot 2\omega_\beta(x) + 2\cdot 1\right) e^{\lambda\omega_\beta(x)} D_x^\beta c_3(x) + \cdots + \tag{3.30}$$
$$+\left(\lambda^2\omega_\beta^n(x) + 2\lambda n\omega_\beta^{n-1}(x) + n(n-1)\omega_\beta^{n-2}(x)\right) e^{\lambda\omega_\beta(x)} D_x^\beta c_{n+1}(x) = 0$$

ҳосил мекунем:

$$\left(D_x^\beta\right)^3 y = e^{\lambda\omega_\beta(x)} \Big[\lambda^3 \left(c_1(x) + c_2(x)\omega_\beta(x) + \cdots + c_{n+1}(x)\omega_\beta^n(x)\right) +$$
$$+3\lambda^2 \left(c_2(x) + 2c_3(x)\omega_\beta(x) + \cdots + nc_{n+1}(x)\omega_\beta^{n-1}(x)\right) +$$
$$3\lambda \left(2\cdot 1c_3(x) + 3\cdot 2c_4(x)\omega_\beta(x) + \cdots + n(n-1)c_{n+1}(x)\omega_\beta^{n-2}(x)\right) +$$
$$+\left(3\cdot 2\cdot 1c_4(x) + 4\cdot 3\cdot 2c_5(x)\omega_\beta(x) + \cdots + n(n-1)(n-2)c_{n+1}(x)\omega_\beta^{n-3}(x)\right)\Big].$$

Ин равандро идома дода барои D_x^β-ҳосилаи тартиби $(n+1)$-ум ҳосил мекунем:

$$\left(D_x^\beta\right)^{(n+1)} y = e^{\lambda\omega_\beta(x)} \Big[\lambda^{n+1} \left(c_1(x) + c_2(x)\omega_\beta(x) + \cdots + c_{n+1}(x)\omega_\beta^n(x)\right) +$$
$$+(n+1)\lambda^n \left(c_2(x) + 2c_3(x)\omega_\beta(x) + \cdots + nc_{n+1}(x)\omega_\beta^{n-1}(x)\right) +$$
$$\frac{(n+1)\cdot n}{2!}\lambda^{n-1}\big(2\cdot 1c_3(x) + 3\cdot 2c_4(x)\omega_\beta(x) + \cdots +$$
$$+n(n-1)c_{n+1}(x)\omega_\beta^{n-2}(x)\big) + \cdots + \lambda(n+1)n!\, c_{n+1}(x)] +$$
$$+\lambda^n e^{\lambda\omega_\beta(x)} D_x^\beta c_1(x) + \left(\lambda^n\omega_\beta(x) + n\lambda^{n-1}\right) e^{\lambda\omega_\beta(x)} D_x^\beta c_2(x) +$$
$$+\left(\lambda^n\omega_\beta^2(x) + 2n\lambda^{n-1}\omega_\beta(x) + n(n-1)\lambda^{n-2}\right) e^{\lambda\omega_\beta(x)} D_x^\beta c_3(x) + \cdots +$$
$$+\big(\lambda^n\omega_\beta^n(x) + C_n^1 n\lambda^{n-1}\omega_\beta^{n-1}(x) + C_n^2 n(n-1)\lambda^{n-2}\omega_\beta^{n-2}(x) + \cdots +$$
$$+C_n^{n-1}\lambda n(n-1)\cdots 2\omega_\beta(x) + n!\big) e^{\lambda\omega_\beta(x)} D_x^\beta c_{n+1}(x).$$

Қиматҳои ёфташудаи $D_x^\beta y, \left(D_x^\beta\right)^2 y, \cdots, \left(D_x^\beta\right)^{(n+1)} y$ ва қимати худи y-ро аз (3.27) ба муодилаи ғайриякҷинсаи (3.3) гузошта, баробарии зеринро ҳосил мекунем:

$$\begin{gathered}\lambda^n e^{\lambda\omega_\beta(x)} D_x^\beta c_1(x) + \left(\lambda^n \omega_\beta(x) + n\lambda^{n-1}\right) e^{\lambda\omega_\beta(x)} D_x^\beta c_2(x) + \cdots + \\ \left(\lambda^n \omega_\beta^n(x) + C_n^1 \lambda^{n-1} n \omega_\beta^{n-1}(x) + C_n^2 \lambda^{n-2} n(n-1) \omega_\beta^{n-2}(x) + \cdots + \right. \\ \left. + C_n^{n-1} \lambda n(n-1) \cdots 2\omega_\beta(x) + n!\right) e^{\lambda\omega_\beta(x)} D_x^\beta c_{n+1}(x) = D_x^\beta f(x). \qquad (3.31)\end{gathered}$$

Баробариҳои (3.28), (3.29), (3.30) ва (3.31)-ро якҷоя намуда, барои ёфтани қиматҳои $D_x^\beta c_1(x)$, $D_x^\beta c_2(x), \cdots, D_x^\beta c_{n+1}(x)$ системаи муодилаҳои алгебравии зеринро ҳосил мекунем:

$$\left\{\begin{array}{c} e^{\lambda\omega_\beta(x)} D_x^\beta c_1(x) + \omega_\beta(x) e^{\lambda\omega_\beta(x)} D_x^\beta c_2(x) + \cdots + \\ + \omega_\beta^n(x) e^{\lambda\omega_\beta(x)} D_x^\beta c_{n+1}(x) = 0, \\ \lambda e^{\lambda\omega_\beta(x)} D_x^\beta c_1(x) + \left(\lambda\omega_\beta(x) + 1\right) e^{\lambda\omega_\beta(x)} D_x^\beta c_2(x) + \cdots + \\ + \left(\lambda\omega_\beta^n(x) + n\omega_\beta^{n-1}(x)\right) e^{\lambda\omega_\beta(x)} D_x^\beta c_{n+1}(x) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda^n e^{\lambda\omega_\beta(x)} D_x^\beta c_1(x) + \left(\lambda^n \omega_\beta(x) + n\lambda^{n-1}\right) e^{\lambda\omega_\beta(x)} D_x^\beta c_2(x) + \cdots + \\ + \left(\lambda^n \omega_\beta^n(x) + C_n^1 n \lambda^{n-1} \omega_\beta^{n-1}(x) + \cdots + \right. \\ \left. + C_n^{n-1} \lambda n(n-1) \cdots 2\omega_\beta(x) + n!\right) e^{\lambda\omega_\beta(x)} D_x^\beta c_{n+1}(x) = D_x^\beta f(x). \end{array}\right.$$

Ҳар як муодилаи системаро ба $e^{\lambda\omega_\beta(x)}$ тақсим намуда, ҳосил мекунем:

$$\left\{\begin{array}{c} D_x^\beta c_1(x) + \omega_\beta(x) D_x^\beta c_2(x) + \cdots + \omega_\beta^n(x) D_x^\beta c_{n+1}(x) = 0, \\ \lambda D_x^\beta c_1(x) + \left(\lambda\omega_\beta(x) + 1\right) D_x^\beta c_2(x) + \cdots + \\ + \left(\lambda\omega_\beta^n(x) + n\omega_\beta^{n-1}(x)\right) D_x^\beta c_{n+1}(x) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda^n D_x^\beta c_1(x) + \left(\lambda^n \omega_\beta(x) + n\lambda^{n-1}\right) D_x^\beta c_2(x) + \cdots + \\ + \left(\lambda^n \omega_\beta^n(x) + C_n^1 n \lambda^{n-1} \omega_\beta^{n-1}(x) + \cdots + \right. \\ \left. + C_n^{n-1} \lambda n(n-1) \cdots 2\omega_\beta(x) + n!\right) D_x^\beta c_{n+1}(x) = e^{-\lambda\omega_\beta(x)} D_x^\beta f(x). \end{array}\right.$$

Системаи ҳосилшударо бо қоидаи Крамер ҳал намуда, номаълумҳои онро дар намуди зерин меёбем:

$$\begin{cases} D_x^{\beta} c_1(x) = (-1)^{n+2}\frac{C_n^0}{n!}\omega_\beta^n(x)e^{-\lambda\omega_\beta(x)}D_x^\beta f(x), \\ D_x^\beta c_2(x) = (-1)^{n+3}\frac{C_n^1}{n!}\omega_\beta^{n-1}(x)e^{-\lambda\omega_\beta(x)}D_x^\beta f(x), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ D_x^\beta c_{n+1}(x) = (-1)^{2n+2}\frac{C_n^n}{n!}e^{-\lambda\omega_\beta(x)}D_x^\beta f(x). \end{cases}$$

Аз ин ҷо меёбем:

$$\begin{cases} c_1'(x) = (-1)^{n+2}\frac{C_n^0}{n!}\omega_\beta^n(x)e^{-\lambda\omega_\beta(x)}\frac{D_x^\beta f(x)}{(b-x)^\beta}, \\ c_2'(x) = (-1)^{n+3}\frac{C_n^1}{n!}\omega_\beta^{n-1}(x)e^{-\lambda\omega_\beta(x)}\frac{D_x^\beta f(x)}{(b-x)^\beta}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{n+1}'(x) = (-1)^{2n+2}\frac{C_n^1}{n!}e^{-\lambda\omega_\beta(x)}\frac{D_x^\beta f(x)}{(b-x)^\beta}, \end{cases}$$

ё ин, ки:

$$\begin{cases} c_1(x) = (-1)^{n+1}\frac{C_n^0}{n!}\int\limits_x^b \omega_\beta^n(t)e^{-\lambda\omega_\beta(t)}\frac{D_t^\beta f(t)}{(b-t)^\beta}dt + \tilde{c}_1, \\ c_2(x) = (-1)^{n+2}\frac{C_n^1}{n!}\int\limits_x^b \omega_\beta^{n-1}(t)e^{-\lambda\omega_\beta(t)}\frac{D_t^\beta f(t)}{(b-t)^\beta}dt + \tilde{c}_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{n+1}(x) = (-1)^{2n+1}\frac{C_n^1}{n!}\int\limits_x^b e^{-\lambda\omega_\beta(t)}\frac{D_t^\beta f(t)}{(b-t)^\beta}dt + \tilde{c}_{n+1}. \end{cases}$$

Ин қиматҳои $c_1(x)$, $c_2(x)$,⋯, $c_{n+1}(x)$-ро ба (3.27) мегузорем:

$$y(x) = e^{\lambda\omega_\beta(x)}\left[\tilde{c}_1 + \tilde{c}_2\omega_\beta(x) + \cdots + \tilde{c}_{n+1}\omega_\beta^n(x)\right] +$$

$$+\frac{1}{n!}\int_{x}^{b} e^{\lambda\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)^n f'(t)dt.$$

Баробарии охиронро содда намуда, бо дарназардошти он ки:

$$D_t^\beta f(t) = (b-t)^\beta f'(t)$$

ҳосил мекунем:

$$y(x) = e^{\lambda\omega_\beta(x)}\left[\tilde{c}_1 + \tilde{c}_2\omega_\beta(x) + \cdots + \tilde{c}_{n+1}\omega_\beta^n(x)\right] +$$
$$+\frac{1}{n!}\int_{x}^{b} e^{\lambda\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)^n f'(t)dt.$$

Дар интеграли охирон як маротиба қисм ба қисм интеграл мегирем:

$$y(x) = e^{\lambda\omega_\beta(x)}\left[\tilde{c}_1 + \tilde{c}_2\omega_\beta(x) + \cdots + \tilde{c}_{n+1}\omega_\beta^n(x)\right] + \quad (3.32)$$
$$+\frac{1}{n!}\int_{x}^{b} e^{\lambda\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\left[\lambda\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)^n + n\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)^{n-1}\right]\frac{f(t)dt}{(b-t)^\beta},$$

ки дар ин ҷо иҷрошавии шарти:

$$e^{\lambda\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)^n f(t)\Big|_{t=b} = 0 \quad (3.33)$$

дар назар дошта шудааст.

Ҳамин тавр, ҳалли муодилаи (3.3) дар ҳолати решаҳои муодилаи характеристикии (3.5) ҳақиқӣ ва якхела будан, намуди (3.32)-ро мегирад.

Муайян менамоем, ки ин ҳалли ёфташуда дар кадом ҳолат ҳалли муодилаи интегро-дифференсиалии (3.2) низ шуда метавонад.

Ду ҳолати зеринро дида мебароем:

1) Бигузор, шарти

$$\lambda < 0 \tag{3.34}$$

иҷро шавад. Дар ин маврид бо осонӣ санҷида мешавад, ки функсияи

$$y(x) = e^{\lambda\omega_\beta(x)}\left[\tilde{c}_1 + \tilde{c}_2\omega_\beta(x) + \cdots + \tilde{c}_{n+1}\omega_\beta^n(x)\right]$$

ҳалли умумии муодилаи якҷинсаи (3.19)-ро ифода мекунад.

Аз ин ҷо мебарояд, ки ҳангоми иҷро шудани шарти (3.34) ҳалли умумии муодилаи ғайриякҷинсаи (3.2) бо ёрии формулаи (3.32) дода мешавад. Яъне, дар ин маврид ҳалли умумии муодилаи интегро-дифференсиалии ғайриякҷинсаи (3.2) аз $n+1$ доимиҳои ихтиёрӣ вобаста мебошад.

Аз ин ҷо теоремаи зерин ҷой дорад.

Теоремаи 3.4. *Бигузор, решаҳои муодилаи характеристикии ба муодилаи* (3.2) *мувофиқояндаи* (3.5) *ҳақиқӣ ва якхела бошанд ва шарти* (3.34)*-ро қаноат намоянд.*

Бигузор, функсияи $f(x)$ дар нуқтаи $x = b$ ба сифр майл намуда, рафтораш аз рӯйи формулаи ассимптотикии

$$f(x) = o\left[e^{-\delta\omega_\beta(x)}\right], \delta > |\lambda| \tag{3.35}$$

муайян карда шавад.

Он гоҳ муодилаи интегро-дифференсиалии ғайриякҷинсаи (3.2) *дар синфи* $C_{\beta-1}^{(n,m)}[a,b]$ *ҳалшаванда мебошад ва ҳалли умумии он бо ёрии формулаи* (3.32) *дода мешавад.*

2) Бигузор, ба ҷойи шарти (3.34) шарти

$$\lambda > 0 \qquad (3.36)$$

иҷро шавад. Дар ин маврид бо осонӣ дида мешавад, ки ҳеҷ як аз функсияҳои

$$y_1 = e^{\lambda\omega_\beta(x)}, y_2 = e^{\lambda\omega_\beta(x)}\omega_\beta(x), \cdots, y_{n+1} = e^{\lambda\omega_\beta(x)}\omega_\beta^n(x)$$

ҳалли муодилаи интегро-дифференсиалии якҷинсаи (3.19) шуда наметавонад. Яъне, дар ин маврид муодилаи якҷинсаи (3.19) дорои танҳо ҳалли сифрӣ мебошад ва бинобар ин, муодилаи ғайриякҷинсаи (3.2) дорои ҳалли ягонаи

$$y(x) = \frac{1}{n!}\int_x^b e^{\lambda\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\left[\lambda\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)^n + n\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)^{n-1}\right]\frac{f(t)dt}{(b-t)^\beta} \qquad (3.37)$$

мебошад. Маълим аст, ки дар ин маврид бефосилагии функсияи $f(x)$ кифоя аст, то интеграли тарафи рости (3.37) наздикшаванда бошад.

Ҳамин тавр, теоремаи зерин исбот гардид.

Теоремаи 3.5. *Бигузор, дар теоремаи* 3.4 *ба ҷойи шарти* (3.34) *шарти* (3.36) *иҷро шавад ва функсияи* $f(x) \in C[a,b]$ *бошад. Он гоҳ муодилаи интегро-дифференсиалии ғайриякҷинсаи* (3.2) *дар синфи* $C_{\beta-1}^{(n,m)}[a,b]$ *якқимат ҳалшаванда мебошад ва ҳалли ягонаи он бо ёрии формулаи* (3.37) *дода мешавад.*

§3.4. Ёфтани ҳалли муодилаи интегро-дифференсиалии маделии тартиби n-ум дар ҳолати решаҳои муодилаи характеристикӣ компелксӣ ва ҳамроҳшуда будан

Бигузор, дар муодилаи характеристикии (3.5) $n + 1 = 2k$- адади ҷуфт бошад, ки онҳоро чунин ишорат мекунем:

$$\lambda_{1,2} = \alpha_1 \pm i\gamma_1;\ \lambda_{3,4} = \alpha_2 \pm i\gamma_2;\ \cdots;\ \lambda_{2k-1,2k} = \alpha_k \pm i\gamma_k.$$

Дар ин маврид системаи фундаменталии ҳалҳои муодилаи якҷинсаи (3.4) чунин намуд мегирад:

$$y_1 = e^{\alpha_1\omega_\beta(x)}\cos\left[\gamma_1\omega_\beta(x)\right];\ \ y_2 = e^{\alpha_1\omega_\beta(x)}\sin\left[\gamma_1\omega_\beta(x)\right];$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_{2k-1} = e^{\alpha_k\omega_\beta(x)}\cos\left[\gamma_k\omega_\beta(x)\right];\ \ y_{2k} = e^{\alpha_k\omega_\beta(x)}\sin\left[\gamma_k\omega_\beta(x)\right].$$

Ҳалли умумии муодилаи якҷинсаи (3.4) дар намуди зерин дода мешавад:

$$y = e^{\alpha_1\omega_\beta(x)}\left[c_1\cos\left[\gamma_1\omega_\beta(x)\right] + c_2\sin\left[\gamma_1\omega_\beta(x)\right]\right] + \cdots +$$
$$+e^{\alpha_k\omega_\beta(x)}\left[c_{2k-1}\cos\left[\gamma_k\omega_\beta(x)\right] + c_{2k}\sin\left[\gamma_k\omega_\beta(x)\right]\right],$$

ки дар ин ҷо $c_1, c_2, \cdots, c_{2k-1}, c_{2k}$ – ададҳои доимии ихтиёрӣ мебошанд.

Азбаски дар ҳолати ҳамаи решаҳои муодилаи характеристикӣ комплексӣ ва ҳамроҳшуда будан, истифодабарии методи вариатсияи доимиҳои ихтиёрӣ ба ҳисобкуниҳои зиёд дучор мегардонад, бинобар ин дар ин ҳолат аз методи дигар истифода мебарем.

Дар ин маврид аз методи интегралӣ истифода мебарем, ки онро чунин баён кардан мумкин аст: ҳалли муодиали ғайриякҷинса (3.3)-ро дар намуди интеграли зерин ҷустуҷӯ менамоем:

$$\begin{gathered}y(x)=-\int_x^b\left\{e^{\alpha_1\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\left[N_1\cos\left[\gamma_1\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)\right]+\right.\right.\\ \left.+N_2\sin\left[\gamma_1\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)\right]\right]+\cdots+e^{\alpha_k\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\times \qquad (3.38)\\ \left.\times N_{2k-1}cos\left[\gamma_k\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)\right]+N_{2k}cos\left[\gamma_k\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)\right]\right]\Big\}\frac{D_t^\beta f(t)dt}{(b-t)^\beta}\end{gathered}$$

ки дар ин ҷо $N_1, N_2, \cdots N_{2k-1}, N_{2k}$ – коэффисиентҳои доимии номаълум мебошанд.

Ҳамин тавр, масъала аз ёфтани ҳамин гуна доимиҳои $N_i\ \left(i=\overline{1,2k}\right)$ иборат мебошад, ки барои онҳо функсияи (3.38) ҳалли муодилаи (3.3) мегардад.

Акнун, барои ёфтани коэффисиентҳои номаълум, пеш аз ҳама бо ёрии рамзҳои $\Lambda_{\alpha\beta}^{+,i}$, $\Lambda_{\beta\alpha}^{-,i}$ чунин операторҳои математикиро ишорат менамоем, ки он барои ҷуфти ададҳои $\{a,b\}$ аз рӯйи формулаҳои зерин амал менамоянд:

$$\begin{cases}\Lambda_{\alpha\beta}^{+,1}=\Lambda_{\alpha\beta}^{+,1}\{a,b\}=\alpha a-\beta b,\\ \Lambda_{\alpha\beta}^{-,1}=\Lambda_{\alpha\beta}^{-,1}\{a,b\}=\alpha b+\beta a\end{cases}$$

ва

$$\begin{cases}\Lambda_{\alpha\beta}^{+,k}=\Lambda_{\alpha\beta}^{+,1}\left\{\Lambda_{\alpha\beta}^{+,k-1},\Lambda_{\alpha\beta}^{-,k-1}\right\}=\alpha\Lambda_{\alpha\beta}^{+,k-1}-\beta\Lambda_{\alpha\beta}^{-,k-1},\\ \Lambda_{\alpha\beta}^{-,k}=\Lambda_{\alpha\beta}^{-,1}\left\{\Lambda_{\alpha\beta}^{+,k-1},\Lambda_{\alpha\beta}^{-,k-1}\right\}=\alpha\Lambda_{\alpha\beta}^{-,k-1}+\beta\Lambda_{\alpha\beta}^{+,k-1}.\end{cases}$$

Маълум аст, ки ин аппарати математикӣ барои ҷуфти ададҳои $\{1,0\}$ пайдарпайии ададҳои зеринро медиҳад:

$$\Lambda_{\alpha\beta}^{+,1}\{1,0\}=\alpha\cdot 1-\beta\cdot 0=\alpha, \Lambda_{\alpha\beta}^{-,1}\{1,0\}=\alpha\cdot 0+\beta\cdot 1=\beta,$$

$$\Lambda_{\alpha\beta}^{+,2}=\Lambda_{\alpha\beta}^{+,1}\left\{\Lambda_{\alpha\beta}^{+,1},\Lambda_{\alpha\beta}^{-,1}\right\}=\Lambda_{\alpha\beta}^{+,1}\{\alpha,\beta\}=\alpha^2-\beta^2,$$

$$\Lambda_{\alpha\beta}^{-,2}=\Lambda_{\alpha\beta}^{-,1}\left\{\Lambda_{\alpha\beta}^{+,1},\Lambda_{\alpha\beta}^{-,1}\right\}=\Lambda_{\alpha\beta}^{-,1}\{\alpha,\beta\}=\alpha\cdot\beta+\beta\cdot\alpha=2\alpha\beta,$$

$$\Lambda_{\alpha\beta}^{+,3}=\Lambda_{\alpha\beta}^{+,1}\left\{\Lambda_{\alpha\beta}^{+,2},\Lambda_{\alpha\beta}^{-,2}\right\}=\Lambda_{\alpha\beta}^{+,1}\{\alpha^2-\beta^2,2\alpha\beta\}=\alpha^3-\alpha\beta^2-2\alpha\beta^2=$$

$$=\alpha^3-3\alpha\beta^2,$$

$$\Lambda_{\alpha\beta}^{-,3} = \Lambda_{\alpha\beta}^{-,1}\{\Lambda_{\alpha\beta}^{+,2}, \Lambda_{\alpha\beta}^{-,2}\} = \Lambda_{\alpha\beta}^{+,1}\{\alpha^2 - \beta^2, 2\alpha\beta\} = 2\alpha^2\beta + \alpha^2\beta - \beta^3 =$$
$$= 3\alpha^2\beta - \beta^3,$$

……………………………………………………………………………

Акнун опертори D_x^β-ро бо функсияи (3.38) пайдарпай татбиқ менамоем:

$$D_x^\beta y(x) = -\int_x^b \Big\{e^{\alpha_1(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t))}\big[\Lambda_{\alpha_1\gamma_1}^{-,1}\{N_2, N_1\}\cos\big[\gamma_1\big(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(t)\big)\big] +$$
$$+\Lambda_{\alpha_1\gamma_1}^{+,1}\{N_2, N_1\}\sin\big[\gamma_1\big(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(t)\big)\big]\big] + \cdots + e^{\alpha_k(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t))} \times$$
$$\times \big[\Lambda_{\alpha_k\gamma_k}^{-,1}\{N_{2k}, N_{2k-1}\}\cos\big[\gamma_k\big(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(t)\big)\big] + \Lambda_{\alpha_k\gamma_k}^{+,1}\{N_{2k}, N_{2k-1}\} \times$$
$$\times \sin\big[\gamma_k\big(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(t)\big)\big]\big]\Big\}\frac{D_t^\beta f(t)dt}{(b-t)^\beta} + [N_1 \cdot 1 + N_2 \cdot 0 + \cdots +$$
$$+N_{2k} \cdot 1 + N_{2k-1} \cdot 0]D_x^\beta f(x).$$

Бигузор, коэффисиентҳои номаълуми N_i $\left(i = \overline{1,2k}\right)$ чунин бошад, ки шарти:

$$N_1 \cdot 1 + N_2 \cdot 0 + \cdots + N_{2k-1} \cdot 1 + N_{2k} \cdot 0 = 0 \qquad (3.39)$$

иҷро гардад.

Айнан ҳамин тавр меёбем:

$$\left(D_x^\beta\right)^2 y(x) = -\int_x^b \Big\{e^{\alpha_1(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t))}\big[\Lambda_{\alpha_1\gamma_1}^{-,1}\{\Lambda_{\alpha_1\gamma_1}^{+,1}, \Lambda_{\alpha_1\gamma_1}^{-,1}\} \times$$
$$\times \cos\big[\gamma_1\big(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(t)\big)\big] + \Lambda_{\alpha_1\gamma_1}^{+,1}\{\Lambda_{\alpha_1\gamma_1}^{+,1}, \Lambda_{\alpha_1\gamma_1}^{-,1}\}\sin\big[\gamma_1\big(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(t)\big)\big]\big] +$$
$$+ \cdots + e^{\alpha_k(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t))}\big[\Lambda_{\alpha_k\gamma_k}^{-,1}\{\Lambda_{\alpha_k\gamma_k}^{+,1}, \Lambda_{\alpha_k\gamma_k}^{-,1}\}\cos\big[\gamma_k\big(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(t)\big)\big] +$$
$$\Lambda_{\alpha_k\gamma_k}^{+,1}\{\Lambda_{\alpha_k\gamma_k}^{+,1}, \Lambda_{\alpha_k\gamma_k}^{-,1}\}\sin\big[\gamma_k\big(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(t)\big)\big]\big]\Big\}\frac{D_t^\beta f(t)dt}{(b-t)^\beta} +$$

$$+\left[\Lambda_{\alpha_1\gamma_1}^{+,1}\{1,0\}N_1+\Lambda_{\alpha_1\gamma_1}^{-,1}\{1,0\}N_2+\cdots+\right.$$
$$\left.+\Lambda_{\alpha_k\gamma_k}^{+,1}\{1,0\}N_{2k-1}+\Lambda_{\alpha_k\gamma_k}^{-,1}\{1,0\}N_{2k}\right]D_x^\beta f(x).$$

Бигузор, шарти:

$$\Lambda_{\alpha_1\gamma_1}^{+,1}\{1,0\}N_1+\Lambda_{\alpha_1\gamma_1}^{-,1}\{1,0\}N_2+\cdots+\Lambda_{\alpha_k\gamma_k}^{+,1}\{1,0\}N_{2k-1}+$$
$$+\Lambda_{\alpha_k\gamma_k}^{-,1}\{1,0\}N_{2k}=0 \qquad (3.40)$$

ичро шавад.

Ин равандро идома дода, барои D_x^β – ҳосилаи тартиби $2k$-юм ҳосил мекунем:

$$\left(D_x^\beta\right)^{2k}y(x)=-\int_x^b\left\{e^{\alpha_1\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\left[\Lambda_{\alpha_1\gamma_1}^{-,1}\left\{\Lambda_{\alpha_1\gamma_1}^{+,2k-1},\Lambda_{\alpha_1\gamma_1}^{-,2k-1}\right\}\times\right.\right.$$
$$\times\cos\left[\gamma_1\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)\right]+\Lambda_{\alpha_1\gamma_1}^{+,1}\left\{\Lambda_{\alpha_1\gamma_1}^{+,2k-1},\Lambda_{\alpha_1\gamma_1}^{-,2k-1}\right\}\times$$
$$\left.\times\sin\left[\gamma_1\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)\right]\right]+\cdots+e^{\alpha_k\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\times$$
$$\times\left[\Lambda_{\alpha_k\gamma_k}^{-,1}\left\{\Lambda_{\alpha_k\gamma_k}^{+,2k-1},\Lambda_{\alpha_k\gamma_k}^{-,2k-1}\right\}\cos\left[\gamma_k\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)\right]+\right.$$
$$\left.\left.\Lambda_{\alpha_k\gamma_k}^{+,1}\left\{\Lambda_{\alpha_k\gamma_k}^{+,2k-1},\Lambda_{\alpha_k\gamma_k}^{-,2k-1}\right\}\sin\left[\gamma_k\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)\right]\right]\right\}\frac{D_t^\beta f(t)dt}{(b-t)^\beta}+$$
$$+\left[\Lambda_{\alpha_1\gamma_1}^{+,1}\left\{\Lambda_{\alpha_1\gamma_1}^{+,2k-2}\{1,0\},\Lambda_{\alpha_1\gamma_1}^{-,2k-2}\{1,0\}\right\}N_1+\Lambda_{\alpha_1\gamma_1}^{-,1}\left\{\Lambda_{\alpha_1\gamma_1}^{+,2k-2}\{1,0\},\Lambda_{\alpha_1\gamma_1}^{-,2k-2}\{1,0\}\right\}N_2+\right.$$
$$+\cdots+\Lambda_{\alpha_k\gamma_k}^{+,1}\left\{\Lambda_{\alpha_k\gamma_k}^{+,2k-1}\{1,0\},\Lambda_{\alpha_k\gamma_k}^{-,2k-1}\{1,0\}\right\}N_{2k-1}+$$
$$\left.+\Lambda_{\alpha_k\gamma_k}^{+,1}\left\{\Lambda_{\alpha_k\gamma_k}^{+,2k-1}\{1,0\},\Lambda_{\alpha_k\gamma_k}^{-,2k-1}\{1,0\}\right\}N_{2k}\right]D_x^\beta f(x).$$

Қиматҳои $y, D_x^\beta y(x),\cdots,\left(D_x^\beta\right)^{2k}y(x)$-ро ба муодилаи (3.3) гузошта, пас аз соданамоии ифодаи ҳосилшуда, баробарии зеринро ҳосил мекунем:

$$\Big[\Lambda^{+,1}_{\alpha_1\gamma_1}\Big\{\Lambda^{+,2k-2}_{\alpha_1\gamma_1}\{1,0\},\Lambda^{-,2k-2}_{\alpha_1\gamma_1}\{1,0\}\Big\}N_1+\Lambda^{-,1}_{\alpha_1\gamma_1}\Big\{\Lambda^{+,2k-2}_{\alpha_1\gamma_1}\{1,0\},\Lambda^{-,2k-2}_{\alpha_1\gamma_1}\{1,0\}\Big\}N_2+$$

$$+\cdots+\Lambda^{+,1}_{\alpha_k\gamma_k}\Big\{\Lambda^{+,2k-2}_{\alpha_k\gamma_k}\{1,0\},\Lambda^{-,2k-2}_{\alpha_k\gamma_k}\{1,0\}\Big\}N_{2k-1}+$$

$$+\Lambda^{+,1}_{\alpha_k\gamma_k}\Big\{\Lambda^{+,2k-2}_{\alpha_k\gamma_k}\{1,0\},\Lambda^{-,2k-2}_{\alpha_k\gamma_k}\{1,0\}\Big\}N_{2k}\Big]D^{\beta}_{x}f(x)=D^{\beta}_{x}f(x).$$

Аз ин ҷо, барои он ки ин баробарии охирон иҷро гардад, бояд коэффисиентҳои N_i $\left(i=\overline{1,2k}\right)$ чунин бошанд, ки шарти:

$$\Lambda^{+,1}_{\alpha_1\gamma_1}\Big\{\Lambda^{+,2k-2}_{\alpha_1\gamma_1}\{1,0\},\Lambda^{-,2k-2}_{\alpha_1\gamma_1}\{1,0\}\Big\}N_1+\Lambda^{-,1}_{\alpha_1\gamma_1}\Big\{\Lambda^{+,2k-2}_{\alpha_1\gamma_1}\{1,0\},\Lambda^{-,2k-2}_{\alpha_1\gamma_1}\{1,0\}\Big\}N_2+$$

$$+\cdots+\Lambda^{+,1}_{\alpha_k\gamma_k}\Big\{\Lambda^{+,2k-2}_{\alpha_k\gamma_k}\{1,0\},\Lambda^{-,2k-2}_{\alpha_k\gamma_k}\{1,0\}\Big\}N_{2k-1}+$$

$$+\Lambda^{+,1}_{\alpha_k\gamma_k}\Big\{\Lambda^{+,2k-2}_{\alpha_k\gamma_k}\{1,0\},\Lambda^{-,2k-2}_{\alpha_k\gamma_k}\{1,0\}\Big\}N_{2k}=1 \qquad (3.41)$$

иҷро гардад.

Ҳамин тавр, барои муайян намудани коэффисиентҳои номаълуми N_i $\left(i=\overline{1,2k}\right)$ системаи муодилаҳои алгебравии зерин ҳосил карда шуд:

$$\begin{cases}
1\cdot N_1+0\cdot N_2+\cdots+1\cdot N_{2k-1}+0\cdot N_{2k}=0,\\
\Lambda^{+,1}_{\alpha_1\gamma_1}N_1+\Lambda^{-,1}_{\alpha_1\gamma_1}N_2+\cdots+\Lambda^{+,1}_{\alpha_k\gamma_k}N_{2k-1}+\Lambda^{-,1}_{\alpha_k\gamma_k}N_{2k}=0,\\
\Lambda^{+,2}_{\alpha_1\gamma_1}N_1+\Lambda^{-,2}_{\alpha_1\gamma_1}N_2+\cdots+\Lambda^{+,2}_{\alpha_k\gamma_k}N_{2k-1}+\Lambda^{-,2}_{\alpha_k\gamma_k}N_{2k}=0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\Lambda^{+,2k-2}_{\alpha_1\gamma_1}N_1+\Lambda^{-,2k-2}_{\alpha_1\gamma_1}N_2+\cdots+\Lambda^{+,2k-2}_{\alpha_k\gamma_k}N_{2k-1}+\Lambda^{-,2k-2}_{\alpha_k\gamma_k}N_{2k}=0,\\
\Lambda^{+,2k-1}_{\alpha_1\gamma_1}N_1+\Lambda^{-,2k-1}_{\alpha_1\gamma_1}N_2+\cdots+\Lambda^{+,2k-1}_{\alpha_k\gamma_k}N_{2k-1}+\Lambda^{-,2k-1}_{\alpha_k\gamma_k}N_{2k}=1,
\end{cases} \qquad (3.42)$$

ки дар ин ҷо:

$$\Lambda^{+,1}_{\alpha_i\gamma_i}=\Lambda^{+,1}_{\alpha_i\gamma_i}\{1,0\},\Lambda^{+,j}_{\alpha_i\gamma_i}=\Lambda^{+,1}_{\alpha_i\gamma_i}\{\Lambda^{+,j-1}_{\alpha_i\gamma_i}\Lambda^{-,j-1}_{\alpha_i\gamma_i}\},$$

$$\Lambda^{-,1}_{\alpha_i\gamma_i}=\Lambda^{-,1}_{\alpha_i\gamma_i}\{1,0\},\Lambda^{-,j}_{\alpha_i\gamma_i}=\Lambda^{-,1}_{\alpha_i\gamma_i}\{\Lambda^{+,j-1}_{\alpha_i\gamma_i}\Lambda^{-,j-1}_{\alpha_i\gamma_i}\}.$$

Нишон додан мумкин аст, ки муайянкунандаи системаи (3.42) ғайрисифрӣ мебошад ва бинобар ин, системаи (3.42) яккимата ҳалшаванда мебошад.

Ҳамин тавр, ҳалли хусусии муодилаи ғайрякҷинсаи (3.3) бо ёрии формулаи (3.38) ифода карда мешавад, ки дар он коэффисиентҳои N_i $\left(i=\overline{1,2k}\right)$ аз системаи (3.42) яккимата муайян карда мешаванд.

Аз ин ҷо ба ҳалли (3.38) ҳалли умумии муодилаи ғайриякҷинсаи (3.4)-ро ҷамъ намуда, ҳалли умумии муодилаи ғайриякҷинсаи (3.3)-ро дар намуди зерин ҳосил мекунем:

$$y(x)=e^{\alpha_1\omega_\beta(x)}\left[c_1\cos\left[\gamma_1\omega_\beta(x)\right]+c_2\sin\left[\gamma_1\omega_\beta(x)\right]\right]+\cdots+$$

$$+e^{\alpha_k\omega_\beta(x)}\left[c_{2k-1}\cos\left[\gamma_k\omega_\beta(x)\right]+c_{2k}\sin\left[\gamma_k\omega_\beta(x)\right]\right]-$$

$$-\int\limits_x^b\left\{e^{\alpha_1\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\left[N_1\cos\left[\gamma_1\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)\right]+\right.\right.$$

$$\left.+N_2\sin\left[\gamma_1\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)\right]\right]+\cdots+e^{\alpha_k\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\times$$

$$\times\left[N_{2k-1}cos\left[\gamma_k\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)\right]+N_{2k}cos\left[\gamma_k\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)\right]\right\}\frac{D_t^\beta f(t)dt}{(b-t)^\beta}.$$

Дар интеграли тарафи рости баробарии охирин як маротиба қисм ба қисм интегронида, онро ба намуди зерин меорем:

$$y(x)=e^{\alpha_1\omega_\beta(x)}\left[c_1\cos\left[\gamma_1\omega_\beta(x)\right]+c_2\sin\left[\gamma_1\omega_\beta(x)\right]\right]+\cdots+$$

$$+e^{\alpha_k\omega_\beta(x)}\left[c_{2k-1}\cos\left[\gamma_k\omega_\beta(x)\right]+c_{2k}\sin\left[\gamma_k\omega_\beta(x)\right]\right]-$$

$$-\int\limits_x^b\left\{e^{\alpha_1\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\left[\Lambda_{\alpha_1\gamma_1}^{-,1}\{N_2,N_1\}\cos\left[\gamma_1\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)\right]+\right.\right.$$

$$\left.+\Lambda_{\alpha_1\gamma_1}^{+,1}\{N_2,N_1\}\sin\left[\gamma_1\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)\right]\right]+\cdots+$$

$$+e^{\alpha_k\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\left[\Lambda_{\alpha_k\gamma_k}^{-,1}\{N_{2k},N_{2k-1}\}\cos\left[\gamma_k\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)\right]\right]$$

$$+\Lambda^{+,1}_{\alpha_k\gamma_k}\{N_{2k},N_{2k-1}\}\sin\left[\gamma_k\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)\right]\Big]\Big\}\frac{f(t)dt}{(b-t)^\beta}. \qquad (3.43)$$

Формулаи (3.43) бо дарназардошти иҷрошавии баробарии:

$$\Big\{e^{\alpha_1\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\Big[N_1\cos\left[\gamma_1\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)\right]+N_2\sin\left[\gamma_1\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)\right]\Big]+$$
$$+\cdots+e^{\alpha_k\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}[N_{2k-1}\cos\left[\gamma_k\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)\right]+$$
$$+N_{2k}\sin\left[\gamma_k\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)\right]\Big]\Big\}f(t)\Big|_{t=b}=0 \qquad (3.44)$$

ҳосил карда шудааст.

Акнун ба муодилаи интегро-дифференсиалии (3.2) баргашта, муайян менамоем, ки дар кадом ҳолатҳо ҳалли ёфташудаи (3.43) ҳалли муодилаи интегро-дифференсиалии (3.2) шуда метавонад. Барои ин ҳолатҳои зеринро ҷудо менамоем:

1) Бигузор, решаҳои муодилаи характеристикии (3.5) комплексӣ ва ҳамроҳшуда буда, чунин рақамгузорӣ карда шуда бошанд, ки шарти:

$$\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_k<0 \qquad (3.45)$$

иҷро шавад. Дар ин маврид бо осонӣ санҷида мешавад, ки ҳар як аз функсияҳои

$$y_1=e^{\alpha_1\omega_\beta(x)}\cos\left[\gamma_1\omega_\beta(x)\right];\ \ y_2=e^{\alpha_1\omega_\beta(x)}\sin\left[\gamma_1\omega_\beta(x)\right];$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_{2k-1}=e^{\alpha_k\omega_\beta(x)}\cos\left[\gamma_k\omega_\beta(x)\right];\ \ y_{2k}=e^{\alpha_k\omega_\beta(x)}\sin\left[\gamma_k\omega_\beta(x)\right];$$

муодилаи якҷинсаи (3.19)-ро қаноат менамоянд. Аз ин ҷо мебароянд, ки функсияи (3.43) ҳалли умумии муодилаи интегро-дифференсиалии ғайриякҷинсаи (3.2)-ро ифода менамояд.

Ҳамин тавр, теоремаи зерин ҷой дорад.

Теремаи 3.6. *Бигузор, коэффисиентҳои муодилаи интегро-дифференсиалии* (3.2) *чунин бошанд, ки решаҳои муодилаи характеристикии* (3.5) *комплексӣ ва ҳамроҳшуда бошанд ва қисмҳои ҳақиқии ин решаҳо шарти* (3.45)*-ро қаноат намоянд. Ғайр аз ин, бигузор, функсияи* $f(x)$ *дар нуқтаи* $x = b$ *ба сифр мубаддал гашта, рафтораш аз рӯйи формулаи ассимптотикии*

$$f(x) = o\left[e^{-\delta\omega_\beta(x)}\right], \delta > |\alpha_1| \text{ ҳангоми } x \to b \qquad (3.46)$$

муайян карда шавад. Он гоҳ муодилаи (3.2) *дар синфи* $C_{\beta-1}^{(n,m)}[a,b]$ *ҳалшаванда мебошад ва ҳалли умумии он аз рӯйи формулаи* (3.43) *дода мешавад.*

2) Бигузор, қисмҳои ҳақиқии решаҳои муодилаи характеристикии (3.5) шарти

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_i < 0 < \alpha_{i+1} < \cdots < \alpha_k \qquad (3.47)$$

-ро қаноат намоянд. Дар ин маврид ҳеҷ яке аз функсияҳои

$$y_{i+1} = e^{\alpha_1\omega_\beta(x)}\cos\left[\gamma_{i+1}\omega_\beta(x)\right];\ y_{i+2} = e^{\alpha_1\omega_\beta(x)}\sin\left[\gamma_{i+1}\omega_\beta(x)\right];$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_{2k-1} = e^{\alpha_k\omega_\beta(x)}\cos\left[\gamma_k\omega_\beta(x)\right];\ y_{2k} = e^{\alpha_k\omega_\beta(x)}\sin\left[\gamma_k\omega_\beta(x)\right];$$

ҳалли муодилаи якҷинсаи (3.19) шуда наметавонанд. Аз ин рӯ, ҳалли умумии муодилаи якҷинсаи (3.19) намуди:

$$y(x) = e^{\alpha_1\omega_\beta(x)}\left[c_1\cos\left[\gamma_1\omega_\beta(x)\right] + c_2\sin\left[\gamma_1\omega_\beta(x)\right]\right] + \cdots +$$
$$+e^{\alpha_i\omega_\beta(x)}\left[c_{2i-1}\cos\left[\gamma_i\omega_\beta(x)\right] + c_{2i}\sin\left[\gamma_i\omega_\beta(x)\right]\right]$$

-ро мегирад ва ҳалли умумии муодилаи ғайриякҷинсаи (3.2) намуди:

$$y(x) = e^{\alpha_1\omega_\beta(x)}\big[c_1\cos[\gamma_1\omega_\beta(x)] + c_2\sin[\gamma_1\omega_\beta(x)]\,\big] + \cdots +$$

$$+e^{\alpha_i\omega_\beta(x)}\big[c_{2i-1}\cos[\gamma_i\omega_\beta(x)] + c_{2i}\sin[\gamma_i\omega_\beta(x)]\big] -$$

$$-\int_x^b \Big\{e^{\alpha_1\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\Big[\Lambda^{-,1}_{\alpha_1\gamma_1}\{N_2,N_1\}\cos\Big[\gamma_1\Big(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\Big)\Big] +$$

$$+\Lambda^{+,1}_{\alpha_1\gamma_1}\{N_2,N_1\}\sin\Big[\gamma_1\Big(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\Big)\Big]\Big] + \cdots +$$

$$e^{\alpha_k\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\Big[\Lambda^{-,1}_{\alpha_k\gamma_k}\{N_{2k},N_{2k-1}\}\cos\Big[\gamma_k\Big(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\Big)\Big]\Big]$$

$$+\Lambda^{+,1}_{\alpha_k\gamma_k}\{N_{2k},N_{2k-1}\}\sin\Big[\gamma_k\Big(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\Big)\Big]\Big]\Big\}\frac{f(t)dt}{(b-t)^\beta} \qquad (3.48)$$

-ро мегирад.

Ҳамин тавр, теоремаи зерин ҷой дорад.

Теоремаи 3.7. *Бигузор, ҳамаи шартҳои теоремаи 3.6 иҷро шаванд ва ба ҷойи шарти* (3.45) *шарти* (3.47) *иҷро шавад. Он гоҳ муодиали интегро-дифференсиалии* (3.2) *дар синфи* $C^{(n,m)}_{\beta-1}[a,b]$ *ҳалшаванда мебошад ва ҳалли умумии он аз* $2i$ *доимиҳои ихтиёрӣ вобаста буда, намуди* (3.48)*-ро дорад.*

3) Бигузор, ба ҷойи шартҳои (3.45) ва (3.47) шарти

$$0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_k \qquad (3.49)$$

иҷро шавад. Дар ин маврид ҳеҷ кадом аз системаи ҳалҳои фундаменталии муодилаи (3.4) муодилаи якҷинсаи (3.19)-ро қаноат наменамояд. Аз ин рӯ, муодилаи якҷинсаи (3.19) дорои танҳо ҳалли сифрӣ аст, бинобар ин муодилаи ғайриякҷинсаи (3.2) дорои ҳалли ягонаи зерин мебошад:

$$y(x) = -\int_x^b \Big\{e^{\alpha_1\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\Big[\Lambda^{-,1}_{\alpha_1\gamma_1}\{N_2,N_1\}\cos\Big[\gamma_1\Big(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\Big)\Big] +$$

$$+\Lambda^{+,1}_{\alpha_1\gamma_1}\{N_2, N_1\}\sin\left[\gamma_1\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)\right]\Big] + \cdots +$$

$$+e^{\alpha_k\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\left[\Lambda^{-,1}_{\alpha_k\gamma_k}\{N_{2k-1}, N_{2k}\}\cos\left[\gamma_k\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)\right]\right. +$$

$$\left.+\Lambda^{+,1}_{\alpha_k\gamma_k}\{N_{2k-1}, N_{2k}\}\sin\left[\gamma_k\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)\right]\right]\Big\}\frac{f(t)dt}{(b-t)^\beta}. \qquad (3.50)$$

Дар ин ҳолат, агар $f(x) \in C[a,b]$ бошад, пас интеграли тарафи рости (3.50) наздикшаванда мешавад.

Ҳамин тавр, теоремаи зерин ҷой дорад.

Теоремаи 3.8. *Бигузор, дар теоремаи 3.6 ба ҷойи шарти* (3.45) *шарти* (3.49) *иҷро шавад ва функсияи* $f(x) \in C[a,b]$ *бошад. Он гоҳ муодилаи интегро-дифференсиалии* (3.2) *дорои ҳалли ягона буда, ин ҳал бо ёрии формулаи* (3.50) *ифода карда мешавад.*

§3.5. Таҳқиқи муодилаи интегро-дифференсиалии ғайримоделии тартиби n-ум бо ядрои барзиёд сингулярӣ

Дар $\Gamma = \{x: a \le x \le b\}$ ба таҳқиқи муодилаи интегро-дифференсиалии ғайримоделии:

$$P^n_M\left(D^\beta_x\right)y - \int_x^b \frac{B(x,t)}{(b-t)^\beta} P^m_N\left(D^\beta_t\right)y(t)dt = f(x), \qquad (3.51)$$

машғул мешавем, ки дар ин ҷо $f(x)$ функсияи додашудаи бефосила дар Г, $B(x,t)$ – функсияи додашудаи бефосила дар росткунҷаи $R = \{(x,y): a \le x \le b,\ \ a \le t \le b\}$ мебошад.

Ба мисли ҳолати муодилаи интегро-дифференсиалии тартиби якум ҳалли муодилаи (3.51)-ро дар синфи $C^{(n,m)}_{\beta-1}[a,b]$ ҷустуҷӯ менамоем.

Барои муодилаи ғайримоделии (3.51)-ро таҳқиқ намудан, пеш аз ҳама онро ба шакли зерин меорем:

$$P_M^n\left(D_x^\beta\right)y-\int_x^b \frac{B(b,b)-\left(B(b,b)-B(x,t)\right)}{(b-t)^\beta}P_N^m\left(D_x^\beta\right)dt=f(x).$$

Аз ин ҷо:

$$P_M^n\left(D_x^\beta\right)y-\int_x^b \frac{B(b,b)}{(b-t)^\beta}P_N^m\left(D_t^\beta\right)y(t)\,dt=$$

$$=f(x)-\int_x^b \frac{B(b,b)-B(x,t)}{(b-t)^\beta}P_N^m\left(D_t^\beta\right)dt.$$

Ишораи:

$$f(x)-\int_x^b \frac{B(b,b)-B(x,t)}{(b-t)^\beta}P_N^m\left(D_t^\beta\right)dt=F(x) \qquad (3.52)$$

-ро дохил намуда, муодилаи охиринро дар шакли зерин менависем:

$$P_M^n\left(D_x^\beta\right)y-\int_x^b \frac{B(b,b)}{(b-t)^\beta}P_N^m\left(D_t^\beta\right)y(t)dt=F(x). \qquad (3.53)$$

Фарз менамоем, ки дар тарафи рости муодилаи (3.53) функсияи $F(x)$ функсияи маълум мебошад. Аз ин ҷо натиҷаҳои барои муодилаи интегро-дифференсиалии моделӣ ҷойдоштаро истифода бурда, ҳалли муодилаи (3.53)-ро меёбем.

Дар асоси натиҷаҳои параграфи 3.1 муодилаи характеристикӣ барои муодилаи (3.53)-ро дар намуди:

$$\lambda^{n+1} + K_1\lambda^n + K_2\lambda^{n-1} + \cdots + K_n\lambda + K_{n+1} = 0 \qquad (3.54)$$

тартиб медиҳем, ки дар ин ҷо:

$$K_1 = M_1, \dots, K_{n-m} = M_{n-m}, K_{n-m+1} = M_{n-m+1} + B(b,b),$$
$$K_{n-m+2} = M_{n-m+2} + B(b,b)N_1, \dots, K_n = M_n + B(b,b)N_{m-1}, K_{n+1} = B(b,b)N_m.$$

Вобаста аз решаҳои муодилаи характеристикии (3.54) ҳалли муодилаи (3.53) ва аз он пас ҳалли муодилаи (3.51)-ро меёбем:

I. Бигузор, решаҳои муодилаи характеристикии (2.74) ҳақиқӣ ва гуногун буда, $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_{n+1} < 0$ бошад. Дар ин маврид, ҳалли умумии муодилаи (3.53) шакли зеринро мегирад:

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1\omega_\beta(x) - \omega_\beta(t)} + c_2 e^{\lambda_2\omega_\beta(x)} + \cdots + c_{n+1} e^{\lambda_{n+1}\omega_\beta(x)} +$$
$$+\frac{1}{\Delta_0}\int\limits_x^b \Big[\Delta_1\lambda_1 e^{\lambda_1\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)} + \Delta_2\lambda_2 e^{\lambda_2\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)} + \cdots$$
$$+ \Delta_{n+1}\lambda_{n+1} e^{\lambda_{n+1}\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\Big]\frac{F(t)}{(b-t)^\beta}dt \equiv E_1^+[c_1, c_2, \cdots, c_{n+1}, F(x)]. \qquad (3.55)$$

Акнун, барои ҳалли муодилаи (3.51)-ро ҳосил намудан, дар (3.55) ба ҷойи $F(x)$ қиматашро аз (3.52) гузошта, меёбем:

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1\omega_\beta(x) - \omega_\beta(t)} + c_2 e^{\lambda_2\omega_\beta(x)} + \cdots + c_{n+1} e^{\lambda_{n+1}\omega_\beta(x)} +$$

$$+\frac{1}{\Delta_0}\int_x^b\left[\Delta_1\lambda_1 e^{\lambda_1\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}+\Delta_2\lambda_2 e^{\lambda_2\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}+\cdots\right.$$

$$\left.+\Delta_{n+1}\lambda_{n+1}e^{\lambda_{n+1}\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\right]\frac{f(t)}{(b-t)^\beta}dt-$$

$$-\frac{1}{\Delta_0}\int_x^b\left[\Delta_1\lambda_1 e^{\lambda_1\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}+\Delta_2\lambda_2 e^{\lambda_2\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}+\cdots\right.$$

$$\left.+\Delta_{n+1}\lambda_{n+1}e^{\lambda_{n+1}\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\right]$$

$$\times\int_t^b\frac{B(b,b)-B(t,\tau)}{(b-\tau)^\beta}P_N^m\left(D_\tau^\beta\right)y(\tau)\,d\tau\frac{dt}{(b-t)^\beta}.$$

Он ҷамъшавандаҳоеро, ки функсияи номаълумро дар бар мегиранд, ба тарафи рости баробарӣ мегузаронем:

$$y(x)+\frac{1}{\Delta_0}\int_x^b\left[\Delta_1\lambda_1 e^{\lambda_1\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}+\Delta_2\lambda_2 e^{\lambda_2\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}+\cdots\right.$$

$$\left.+\Delta_{n+1}\lambda_{n+1}e^{\lambda_{n+1}\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\right]\times$$

$$\times\int_t^b\frac{B(b,b)-B(t,\tau)}{(b-\tau)^\beta}P_N^m\left(D_\tau^\beta\right)y(\tau)\,d\tau\frac{dt}{(b-t)^\beta}=E_1^+[c_1,c_2,\cdots,c_{n+1},f(x)].$$

Дар интеграли тарафи чапи баробарии охирин ҳудудҳои интегрониро иваз менамоем, яъне:

$$\frac{1}{\Delta_0}\int_x^b\left[\Delta_1\lambda_1 e^{\lambda_1\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}+\Delta_2\lambda_2 e^{\lambda_2\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}+\cdots\right.$$

$$\left.+\Delta_{n+1}\lambda_{n+1}e^{\lambda_{n+1}\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\right]\times$$

$$\times \int_t^b \frac{B(b,b)-B(t,\tau)}{(b-\tau)^\beta} P_N^m\left(D_\tau^\beta\right) y(\tau)\,d\tau \frac{dt}{(b-t)^\beta} =$$

$$= \frac{1}{\Delta_0}\int_x^b \frac{B(b,b)-B(t,\tau)}{(b-\tau)^\beta} P_N^m\left(D_\tau^\beta\right) y(\tau)\,d\tau \times$$

$$\times \int_x^\tau \left[\Delta_1\lambda_1 e^{\lambda_1\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)} + \Delta_2\lambda_2 e^{\lambda_2\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)} + \cdots\right.$$

$$\left. + \Delta_{n+1}\lambda_{n+1} e^{\lambda_{n+1}\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\right]\frac{dt}{(b-t)^\beta} = |t=\tau| =$$

$$= \frac{1}{\Delta_0}\int_x^b \left[\int_x^t \left[\Delta_1\lambda_1 e^{\lambda_1\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(\tau)\right)} + \Delta_2\lambda_2 e^{\lambda_2\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(\tau)\right)} + \cdots\right.\right.$$

$$\left.\left. + \Delta_{n+1}\lambda_{n+1} e^{\lambda_{n+1}\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(\tau)\right)}\right]\frac{d\tau}{(b-\tau)^\beta}\right] \times$$

$$\times \frac{B(b,b)-B(\tau,t)}{(b-t)^\beta} P_N^m\left(D_t^\beta\right) y(t)dt.$$

Ин қиматро дар баробарии пешин мегузорем:

$$y(x) +$$

$$+ \frac{1}{\Delta_0}\int_x^b \left[\int_x^t \left[\Delta_1\lambda_1 e^{\lambda_1\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(\tau)\right)} + \Delta_2\lambda_2 e^{\lambda_2\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(\tau)\right)} + \cdots\right.\right.$$

$$\left.\left. + \Delta_{n+1}\lambda_{n+1} e^{\lambda_{n+1}\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(\tau)\right)}\right] \frac{B(b,b)-B(\tau,t)}{(b-t)^\beta}\frac{d\tau}{(b-\tau)^\beta}\right] P_N^m\left(D_t^\beta\right) y(t)dt =$$

$$= E_1^+[c_1, c_2, \cdots, c_{n+1}, f(x)].$$

Ҳамин тавр, масъалаи ҳал намудани муодилаи интегро-дифференсиалии ғайримоделии (3.51) бо ядрои барзиёд сингулярӣ ба масъалаи ҳал намудани муодилаи интегро-дифференсиалии намуди Волтерраи:

$$y(x)+\frac{1}{\Delta_0}\int\limits_x^b K(x,t)\,P_N^m\left(D_t^\beta\right)y(t)dt=E_1^+[c_1,c_2,\cdots,c_{n+1},f(x)] \qquad (3.56)$$

оварда шуд, ки дар ин ҷо ядрои $K(x,t)$ намуди:

$$K(x,t)=\int\limits_x^t\left[\Delta_1\lambda_1 e^{\lambda_1\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(\tau)\right)}+\Delta_2\lambda_2 e^{\lambda_2\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(\tau)\right)}+\cdots\right.$$
$$\left.+\Delta_{n+1}\lambda_{n+1}e^{\lambda_{n+1}\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(\tau)\right)}\right]\frac{B(b,b)-B(\tau,t)}{(b-t)^\beta}\frac{d\tau}{(b-\tau)^\beta}$$

ва тарафи рости он $E_1^+[c_1,c_2,\cdots,c_{n+1},f(x)]$ намуди:

$$E_1^+[c_1,c_2,\cdots,c_{n+1},f(x)]=c_1e^{\lambda_1\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)}+c_2e^{\lambda_2\omega_\beta(x)}+\cdots+c_{n+1}e^{\lambda_{n+1}\omega_\beta(x)}+$$
$$+\frac{1}{\Delta_0}\int\limits_x^b\left[\Delta_1\lambda_1 e^{\lambda_1\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}+\Delta_2\lambda_2 e^{\lambda_2\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}+\cdots\right.$$
$$\left.+\Delta_{n+1}\lambda_{n+1}e^{\lambda_{n+1}\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\right]\frac{f(t)}{(b-t)^\beta}dt \qquad (3.57)$$

-ро доранд.

Барои он ки ядрои $K(x,t)$ ядрои регулярӣ бошад, талаб менамоем, ки функсияи:

$$B_1(\tau,t)=B(b,b)-B(\tau,t) \qquad (3.58)$$

ҳангоми $t\to b$ ба сифр майл намуда, рафторашон аз рӯйи формулаи ассимптотикии зерин муайян карда шавад:

$$B_1(\tau,t)=o\left[e^{-\delta\omega_\beta(t)}\right],\quad \delta=|\lambda_1|. \qquad (3.59)$$

Ғайр аз ин, барои он ки тарафи рости муодилаи (3.56) функсияи охирнок ва бефосила бошад, талаб менамоем, ки функсияи $f(x)$ ҳангоми $x \to b$ ба сифр мубаддал гашта, рафтораш аз рӯйи формулаи ассимптотикии зерин муайян карда шавад:

$$f(x) = o\left[e^{-\delta\omega_\beta(t)}\right], \quad \delta = |\lambda_1|. \tag{3.60}$$

Ҳангоми иҷро шудани шартҳои (3.59) ва (3.60) муодилаи интегро-дифференсиалии (3.56) муодилаи интегро-дифференсиалии намуди Волтерра бо ядрои регулярӣ ва тарафи рости бефосила мебошад, ки ҳалли умумии он мувофиқи назарияи умумии ин гуна муодилаҳо бо ёрии резолвентаи муодилаи интегро-диффенесиалии (3.56) дар намуди зерин тасвир карда мешавад:

$$y(x) = E_1^+[c_1, c_2, \cdots, c_{n+1}, f(x)] - \frac{1}{\Delta_0}\int_x^b \Gamma(x,t) \cdot E_1^+[c_1, c_2, \cdots, c_{n+1}, f(x)]\, dt. \tag{3.61}$$

Ҳамин тавр, исбот карда шуд.

Теоремаи 3.9. *Бигузор, дар муодилаи* (3.51) *коэффисиентҳои операторҳои дифференсиалии* $P_M^n\left(D_x^\beta\right)$ *ва* $P_N^m\left(D_x^\beta\right)$, *инчунин ядрои муодила* $B(x,t)$ *чунин бошанд, ки решаҳои муодилаи характеристикии* (3.54) *ҳақиқӣ ва гуногун буда, барояшон шарти* $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_{n+1} < 0$ *иҷро шавад. Инчуни, бигузор, функсияҳои* $B_1(x,t)$ *ва* $f(t)$ *ҳангоми* $t \to b$ *мувофиқан аз рӯйи формулаҳои ассимптотикии* (3.59) *ва* (3.60) *ба сифр майл намоянд. Он гоҳ муодилаи интегро-дифференсиалии ғайримоделии* (3.51) *дар синфи* $C_{\beta-1}^{(n,m)}[a,b]$ *ҳалшаванда мебошад ва ҳалли умумии он бо ёрии резолвентаи муодилаи интегро-дифференсиалии* (3.56) *дар намуди* (3.61) *ифода мегардад.*

Қайд. *Натиҷаҳои монандро ҳангоми иҷро шудани шартҳои:*

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < 0 < \lambda_{n+1}, \cdots, \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_i < 0 < \lambda_{i+1} < \cdots < \lambda_{n+1}, \cdots,$$

$$0 < \ \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_{n+1}$$

низ ба даст овардан мумкин аст.

§3.6. Таҳқиқи масъалаи навъи Коши барои муодилаи интегро-дифференсиалии тартиби олӣ

Масъалаи Коши дар нуқтаи $x_0 \in \Gamma$ барои муодилаи интегро-дифференсиалии тартиби олӣ низ ба мисли масъалаи Коши барои муодилаҳои интегро-дифференсиалии тартибашон паст гузошта мешавад. Аз ин рӯ, таҳқиқи масъалаи навъи Коши дар нуқтаи махсуси $x = b$ барои муодилаи интегро-дифференсиалии моделии тартиби n-уми:

$$P_M^n\left(D_x^\beta\right)y - \int_x^b \frac{B}{(b-t)^\beta} P_N^m\left(D_t^\beta\right)y(t)dt = f(x) \qquad (3.62)$$

муҳим ҳисобида мешавад. Аз ин рӯ, масъалаи навъи Коши
ро барои муодилаи (3.62) дар ҳолати решаҳои муодилаи характеритискии:

$$\lambda^{n+1} + K_1\lambda^n + K_2\lambda^{n-1} + \cdots + K_n\lambda + K_{n+1} = 0 \qquad (3.63)$$

ҳақиқӣ ва гуногун будан таҳқиқ менамоем. Бо ин мақсад, пеш аз ҳама рафтори ҳалли муодилаи (3.62)-ро дар атрофи нуқтаи махсус меомӯзем.

Вобаста аз решаҳои муодилаи характеристикии (3.63) ҳолатҳои зеринро ҷудо мекунем:

I. Бигузор, решаҳои муодилаи характеристикии (3.63) ҳақиқӣ ва гуногун буда, шатри $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_{n+1} < 0$ иҷро шавад. Дар ин мавридд халли муодилаи (3.62) бо ёрии формулаи:

$$
\begin{aligned}
y(x) = {} & c_1 e^{\lambda_1\omega_\beta(x)} + c_2 e^{\lambda_2\omega_\beta(x)} + \dots + c_{n+1} e^{\lambda_{n+1}\omega_\beta(x)} + \\
& + \frac{1}{\Delta_0}\int\limits_x^b \left[\Delta_1\lambda_1 e^{\lambda_1\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)} + \Delta_2\lambda_2 e^{\lambda_2\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)} + \cdots \right. \\
& \left. + \Delta_{n+1}\lambda_{n+1} e^{\lambda_{n+1}\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\right] \frac{f(t)}{(b-t)^\beta}\,dt
\end{aligned}
\tag{3.64}
$$

дода мешавад. Ҳалли (3.64)-ро ба намуди зерин меорем:

$$
\begin{aligned}
y(x) = {} & e^{\lambda_{n+1}\omega_\beta(x)}\left[c_1 e^{(\lambda_1-\lambda_{n+1})\omega_\beta(x)} + c_2 e^{(\lambda_2-\lambda_{n+1})(x)} + \dots + c_n e^{(\lambda_n-\lambda_{n+1})(x)} + c_{n+1}\right] + \\
& + \frac{e^{\lambda_{n+1}\omega_\beta(x)}}{\Delta_0}\int\limits_x^b \left[\Delta_1\lambda_1 \frac{e^{(\lambda_1-\lambda_{n+1})\omega_\beta(x)}}{e^{\lambda_1\omega_\beta(t)}} + \Delta_2\lambda_2 \frac{e^{(\lambda_2-\lambda_{n+1})\omega_\beta(x)}}{e^{\lambda_2\omega_\beta(t)}} + \cdots \right. \\
& \left. + \frac{\Delta_{n+1}\lambda_{n+1}}{e^{\lambda_{n+1}\omega_\beta(t)}}\right] \frac{f(t)}{(b-t)^\beta}\,dt.
\end{aligned}
$$

Аз ин ҷо:

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{e^{\lambda_{n+1}\omega_\beta(x)}}y(x) = c_1 e^{(\lambda_1-\lambda_{n+1})\omega_\beta(x)} + c_2 e^{(\lambda_2-\lambda_{n+1})(x)} + \dots + c_n e^{(\lambda_n-\lambda_{n+1})(x)} + c_{n+1} + \\
& + \frac{1}{\Delta_0}\int\limits_x^b \left[\Delta_1\lambda_1 \frac{e^{(\lambda_1-\lambda_{n+1})\omega_\beta(x)}}{e^{\lambda_1\omega_\beta(t)}} + \Delta_2\lambda_2 \frac{e^{(\lambda_2-\lambda_{n+1})\omega_\beta(x)}}{e^{\lambda_2\omega_\beta(t)}} + \dots + \frac{\Delta_{n+1}\lambda_{n+1}}{e^{\lambda_{n+1}\omega_\beta(t)}}\right] \frac{f(t)}{(b-t)^\beta}\,dt.
\end{aligned}
$$

Ишораи зеринро дохил менамоем:

$$
\frac{1}{e^{\lambda_{n+1}\omega_\beta(x)}}y(x) = P[\lambda_{n+1}, y(x)].
$$

Акнун оператори D_x^β-ро ба функсияи $P[\lambda_{n+1}, y(x)]$ татбиқ намуда, ҳосил мекунем:

$$D_x^{\beta}\, P[\lambda_{n+1}, y(x)]$$

$$= \text{c}_1(\lambda_1 - \lambda_{n+1})e^{(\lambda_1 - \lambda_{n+1})\omega_\beta(x)} + \text{c}_2(\lambda_2 - \lambda_{n+1})e^{(\lambda_2 - \lambda_{n+1})\omega_\beta(x)} + \cdots$$

$$+ \text{c}_n(\lambda_n - \lambda_{n+1})e^{(\lambda_n - \lambda_{n+1})\omega_\beta(x)} +$$

$$+ \frac{1}{\Delta_0}\int_x^b \Bigg[\Delta_1\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_{n+1})\frac{e^{(\lambda_1 - \lambda_{n+1})\omega_\beta(x)}}{e^{\lambda_1\omega_\beta(t)}} + \Delta_2\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_{n+1})\frac{e^{(\lambda_2 - \lambda_{n+1})\omega_\beta(x)}}{e^{\lambda_2\omega_\beta(t)}} + \cdots$$

$$+ \Delta_n\lambda_n(\lambda_n - \lambda_{n+1})\frac{e^{(\lambda_n - \lambda_{n+1})\omega_\beta(x)}}{e^{\lambda_n\omega_\beta(t)}}\Bigg]\frac{f(t)}{(b-t)^{\beta}}dt +$$

$$+ \frac{\Delta_1\lambda_1 + \Delta_2\lambda_2 + \cdots + \Delta_{n+1}\lambda_{n+1}}{\Delta_0}\frac{f(x)}{e^{\lambda_{n+1}\omega_\beta(x)}}.$$

Аз ин ҷо:

$$\frac{1}{e^{(\lambda_n - \lambda_{n+1})\omega_\beta(x)}}D_x^{\beta}\;\; P[\lambda_{n+1}, y(x)] =$$

$$= \text{c}_1(\lambda_1 - \lambda_{n+1})e^{(\lambda_1 - \lambda_n)\omega_\beta(x)} + \text{c}_2(\lambda_2 - \lambda_{n+1})e^{(\lambda_2 - \lambda_n)\omega_\beta(x)} + \cdots$$

$$+ \text{c}_{n-1}(\lambda_{n-1} - \lambda_{n+1})e^{(\lambda_{n-1} - \lambda_n)\omega_\beta(x)} + \text{c}_n(\lambda_n - \lambda_{n+1}) +$$

$$+ \frac{1}{\Delta_0}\int_x^b \Bigg[\Delta_1\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_{n+1})\frac{e^{(\lambda_1 - \lambda_n)\omega_\beta(x)}}{e^{\lambda_1\omega_\beta(t)}} + \Delta_2\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_{n+1})\frac{e^{(\lambda_2 - \lambda_n)\omega_\beta(x)}}{e^{\lambda_2\omega_\beta(t)}} + \cdots$$

$$+ \frac{\Delta_n\lambda_n(\lambda_n - \lambda_{n+1})}{e^{\lambda_n\omega_\beta(t)}}\Bigg]\frac{f(t)}{(b-t)^{\beta}}dt +$$

$$+ \frac{\Delta_1\lambda_1 + \Delta_2\lambda_2 + \cdots + \Delta_{n+1}\lambda_{n+1}}{\Delta_0}\frac{f(x)}{e^{\lambda_n\omega_\beta(x)}}.$$

Ишораи дигари зеринро дохил мекунем:

$$\frac{1}{e^{(\lambda_n - \lambda_{n+1})\omega_\beta(x)}}D_x^{\beta}\;\; P[\lambda_{n+1}, y(x)] = \; P_1\left[\lambda_n, \lambda_{n+1}, D_x^{\beta}y(x)\right].$$

Он гоҳ:

$$P_1\left[\lambda_n, \lambda_{n+1}, D_x^\beta y(x)\right] =$$

$$= \text{c}_1(\lambda_1 - \lambda_{n+1})e^{(\lambda_1-\lambda_n)\omega_\beta(x)} + \text{c}_2(\lambda_2 - \lambda_{n+1})e^{(\lambda_2-\lambda_n)\omega_\beta(x)} + \cdots$$

$$+ \text{c}_{n-1}(\lambda_{n-1} - \lambda_{n+1})e^{(\lambda_{n-1}-\lambda_n)\omega_\beta(x)} + \text{c}_n(\lambda_n - \lambda_{n+1}) +$$

$$+\frac{1}{\Delta_0}\int_x^b \left[\Delta_1\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_{n+1})\frac{e^{(\lambda_1-\lambda_n)\omega_\beta(x)}}{e^{\lambda_1\omega_\beta(t)}} + \Delta_2\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_{n+1})\frac{e^{(\lambda_2-\lambda_n)\omega_\beta(x)}}{e^{\lambda_2\omega_\beta(t)}} + \cdots\right.$$

$$\left. + \frac{\Delta_n\lambda_n(\lambda_n - \lambda_{n+1})}{e^{\lambda_n\omega_\beta(t)}}\right]\frac{f(t)}{(b-t)^\beta}dt +$$

$$+\frac{\Delta_1\lambda_1 + \Delta_2\lambda_2 + \cdots + \Delta_{n+1}\lambda_{n+1}}{\Delta_0}\frac{f(x)}{e^{\lambda_n\omega_\beta(x)}}.$$

Оператори D_x^β-ро ба функсияи $P_1\left[\lambda_n, \lambda_{n+1}, D_x^\beta y(x)\right]$ татбиқ менамоем:

$$D_x^\beta\, P_1\left[\lambda_n, \lambda_{n+1}, D_x^\beta y(x)\right] =$$

$$= \text{c}_1(\lambda_1 - \lambda_{n+1})(\lambda_1 - \lambda_n)e^{(\lambda_1-\lambda_n)\omega_\beta(x)} + \text{c}_2(\lambda_2 - \lambda_{n+1})(\lambda_2 - \lambda_n)e^{(\lambda_2-\lambda_n)\omega_\beta(x)} + \cdots$$

$$+ \text{c}_{n-1}(\lambda_{n-1} - \lambda_{n+1})(\lambda_{n-1} - \lambda_n)e^{(\lambda_{n-1}-\lambda_n)\omega_\beta(x)} +$$

$$+\frac{1}{\Delta_0}\int_x^b \left[\Delta_1\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_{n+1})(\lambda_1 - \lambda_n)\frac{e^{(\lambda_1-\lambda_n)\omega_\beta(x)}}{e^{\lambda_1\omega_\beta(t)}}\right.$$

$$+ \Delta_2\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_{n+1})(\lambda_2 - \lambda_n)\frac{e^{(\lambda_2-\lambda_n)\omega_\beta(x)}}{e^{\lambda_2\omega_\beta(t)}} + \cdots$$

$$\left.+ \Delta_{n-1}\lambda_{n-1}(\lambda_{n-1} - \lambda_{n+1})(\lambda_{n-1} - \lambda_n)\frac{e^{(\lambda_{n-1}-\lambda_n)\omega_\beta(x)}}{e^{\lambda_{n-1}\omega_\beta(t)}}\right]\frac{f(t)}{(b-t)^\beta}dt +$$

$$+\frac{\Delta_1\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_{n+1}) + \Delta_2\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_{n+1}) + \cdots + \Delta_n\lambda_n(\lambda_n - \lambda_{n+1})}{\Delta_0}\frac{f(x)}{e^{\lambda_n\omega_\beta(x)}} +$$

$$+\frac{\Delta_1\lambda_1 + \Delta_2\lambda_2 + \cdots + \Delta_{n+1}\lambda_{n+1}}{\Delta_0}\frac{f_1(x)}{e^{\lambda_n\omega_\beta(x)}},$$

ки дар ин ҷо:

$$f_1(x) = D_x^\beta f(x) - \lambda_n f(x).$$

Аз ин ҷо:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{e^{(\lambda_{n-1}-\lambda_n)\omega_\beta(x)}} D_x^\beta P_1\left[\lambda_n, \lambda_{n+1}, D_x^\beta y(x)\right] = \\
&\qquad = c_1(\lambda_1-\lambda_{n+1})(\lambda_1-\lambda_n)e^{(\lambda_1-\lambda_{n-1})\omega_\beta(x)} \\
&\qquad + c_2(\lambda_2-\lambda_{n+1})(\lambda_2-\lambda_n)e^{(\lambda_2-\lambda_{n-1})\omega_\beta(x)} + \cdots \\
&\qquad + c_{n-1}(\lambda_{n-1}-\lambda_{n+1})(\lambda_{n-1}-\lambda_n) + \\
&+\frac{1}{\Delta_0}\int_x^b \biggl[\Delta_1\lambda_1(\lambda_1-\lambda_{n+1})(\lambda_1-\lambda_n)\frac{e^{(\lambda_1-\lambda_{n-1})\omega_\beta(x)}}{e^{\lambda_1\omega_\beta(t)}} \\
&\qquad + \Delta_2\lambda_2(\lambda_2-\lambda_{n+1})(\lambda_2-\lambda_n)\frac{e^{(\lambda_2-\lambda_{n-1})\omega_\beta(x)}}{e^{\lambda_2\omega_\beta(t)}} + \cdots \\
&\qquad + \frac{\Delta_{n-1}\lambda_{n-1}(\lambda_{n-1}-\lambda_{n+1})(\lambda_{n-1}-\lambda_n)}{e^{\lambda_{n-1}\omega_\beta(t)}}\biggr]\frac{f(t)}{(b-t)^\beta}dt + \\
&+\frac{\Delta_1\lambda_1(\lambda_1-\lambda_{n+1}) + \Delta_2\lambda_2(\lambda_2-\lambda_{n+1}) + \cdots + \Delta_n\lambda_n(\lambda_n-\lambda_{n+1})}{\Delta_0}\frac{f(x)}{e^{\lambda_{n-1}\omega_\beta(x)}} + \\
&\qquad + \frac{\Delta_1\lambda_1 + \Delta_2\lambda_2 + \cdots + \Delta_{n+1}\lambda_{n+1}}{\Delta_0}\frac{f_1(x)}{e^{\lambda_{n-1}\omega_\beta(x)}}.
\end{aligned}$$

Ишораи зеринро дохил менамоем:

$$\frac{1}{e^{(\lambda_{n-1}-\lambda_n)\omega_\beta(x)}} D_x^\beta P_1\left[\lambda_n, \lambda_{n+1}, D_x^\beta y(x)\right] = P_2\left[\lambda_{n-1}, \lambda_n, \lambda_{n+1}, D_x^\beta y(x)\right].$$

Ин равандро идома дода, ҳосил мекунем:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{e^{(\lambda_1-\lambda_2)\omega_\beta(x)}} D_x^\beta P_{n-1}\left[\lambda_2, \lambda_3, \cdots, \lambda_{n+1}, D_x^\beta y(x)\right] = \\
&\qquad = c_1(\lambda_1-\lambda_{n+1})(\lambda_1-\lambda_n)\ldots(\lambda_1-\lambda_2) +
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{\Delta_0}\int_x^b \frac{\Delta_1\lambda_1(\lambda_1-\lambda_{n+1})(\lambda_1-\lambda_n)\dots(\lambda_1-\lambda_2)}{e^{\lambda_1\omega_\beta(t)}}\frac{f(t)}{(b-t)^\beta}dt+$$

$$+\frac{\Delta_1\lambda_1(\lambda_1-\lambda_{n+1})(\lambda_1-\lambda_n)\dots(\lambda_1-\lambda_3)+\Delta_2\lambda_2(\lambda_2-\lambda_{n+1})(\lambda_2-\lambda_n)\dots(\lambda_2-\lambda_3)}{\Delta_0}\frac{f(x)}{e^{\lambda_1\omega_\beta(x)}}$$

$$+\cdots$$

$$+\frac{\Delta_1\lambda_1(\lambda_1-\lambda_{n+1})+\Delta_2\lambda_2(\lambda_2-\lambda_{n+1})+\cdots+\Delta_n\lambda_n(\lambda_n-\lambda_{n+1})}{\Delta_0}\frac{f_{n-2}(x)}{e^{\lambda_1\omega_\beta(x)}}+$$

$$+\frac{\Delta_1\lambda_1+\Delta_2\lambda_2+\cdots+\Delta_{n+1}\lambda_{n+1}}{\Delta_0}\frac{f_{n-1}(x)}{e^{\lambda_1\omega_\beta(x)}},$$

ки дар ин ҷо:

$$f_{n-i}(x)=D_x^\beta f_{n-i-1}(x)-\lambda_{i+1}f_{n-i-1}(x).$$

Дар ин мавриД аз ишораи зерин истифода мебарем:

$$\frac{1}{e^{(\lambda_1-\lambda_2)\omega_\beta(x)}}D_x^\beta P_{n-1}\left[\lambda_2,\lambda_3,\cdots,\lambda_{n+1},D_x^\beta y(x)\right]=\ P_n\left[\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{n+1},D_x^\beta y(x)\right].$$

Дар асоси ишораҳои дар боло дохилкардашуда бо осонӣ нишон додан мумкин аст, ки баробариҳои зерин ҷой дорад:

$$\begin{cases} P[\lambda_{n+1},y(x)]|_{x=b}=c_{n+1}, \\ P_1\left[\lambda_n,\lambda_{n+1},D_x^\beta y(x)\right]\Big|_{x=b}=\mathrm{c}_n(\lambda_n-\lambda_{n+1}), \\ P_2\left[\lambda_{n-1},\lambda_n,\lambda_{n+1},D_x^\beta y(x)\right]\Big|_{x=b}=\mathrm{c}_{n-1}(\lambda_{n-1}-\lambda_{n+1})(\lambda_{n-1}-\lambda_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ P_n\left[\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{n+1},D_x^\beta y(x)\right]\Big|_{x=b}=\mathrm{c}_1(\lambda_1-\lambda_{n+1})(\lambda_1-\lambda_n)\dots(\lambda_1-\lambda_2). \end{cases} \quad (3.65)$$

Акнун масъалаи навъи Коширо барои муодилаи (3.62) таҳқиқ менамоем.

Гузориши масъалаи навъи Коши барои муодилаи $(\mathbf{3.62})$ ҳангоми иҷро шудани шарти $\boldsymbol{\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_{n+1} < 0}$. *Чунин ҳалли* $y = y(x)$ *– и муодилаи* (3.62) *ёфта шавад, ки он дар нуқтаи* $x = b$ *шартҳои ибтидоии вазндори*

$$\begin{cases} P[\lambda_{n+1}, y(x)]|_{x=b} = k_{n+1}, \\ P_1\left[\lambda_n, \lambda_{n+1}, D_x^{\beta} y(x)\right]\Big|_{x=b} = k_n, \\ P_2\left[\lambda_{n-1}, \lambda_n, \lambda_{n+1}, D_x^{\beta} y(x)\right]\Big|_{x=b} = k_{n-1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ P_n\left[\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{n+1}, D_x^{\beta} y(x)\right]\Big|_{x=b} = k_1. \end{cases} \qquad (3.66)$$

-ро қаноат намояд.

Таҳқиқи масъалаи навъи Коши. Бо дарназардошти баробариҳои исботгардидаи (3.65) ва шатрҳои ибтидоии (3.66) ҳосил мекунем:

$$\begin{cases} c_{n+1} = k_{n+1}, \\ c_n(\lambda_n - \lambda_{n+1}) = k_n, \\ c_{n-1}(\lambda_{n-1} - \lambda_{n+1})(\lambda_{n-1} - \lambda_n) = k_{n-1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_1(\lambda_1 - \lambda_{n+1})(\lambda_1 - \lambda_n) \ldots (\lambda_1 - \lambda_2) = k_1. \end{cases}$$

А ин ҷо:

$$\begin{cases} c_{n+1} = k_{n+1}, \\ c_n = \dfrac{k_n}{\lambda_n - \lambda_{n+1}}, \\ c_{n-1} = \dfrac{k_{n-1}}{(\lambda_{n-1} - \lambda_{n+1})(\lambda_{n-1} - \lambda_n)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_1 = \dfrac{k_1}{(\lambda_1 - \lambda_{n+1})(\lambda_1 - \lambda_n) \ldots (\lambda_1 - \lambda_2)}. \end{cases}$$

Ин қиматҳои ёфташудаи $c_1, \cdots, c_n, c_{n+1}$-ро ба ҳалли (3.64) гузошта, ҳалли ягонаи масъалаи навъи Кошии $(3.62) - (3.66)$-ро дар намуди

$$y(x) = \frac{k_1}{(\lambda_1 - \lambda_{n+1})(\lambda_1 - \lambda_n)\dots(\lambda_1 - \lambda_2)} e^{\lambda_1 \omega_\beta(x)} + \cdots + k_{n+1} e^{\lambda_{n+1}\omega_\beta(x)} +$$

$$+ \frac{1}{\Delta_0} \int_x^b \Big[\Delta_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 \left(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(t)\right)} + \Delta_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 \left(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(t)\right)} + \cdots$$

$$+ \Delta_{n+1} \lambda_{n+1} e^{\lambda_{n+1} \left(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(t)\right)} \Big] \frac{f(t)}{(b-t)^\beta} dt \qquad (3.67)$$

ҳосил мекунем.

Ҳамин тавр, теоремаи зерин исбот карда шуд.

Теоремаи 3.10. *Бигузор, дар муодилаи интегро-дифференнсиалии ғайриякҷинсаи тартиби n-уми* (3.62) *коэффисиентҳои операторҳои дифференсиалии* $P_M^n\left(D_x^\beta\right)$ *ва* $P_N^m\left(D_x^\beta\right)$, *инчунин адади B чунин бошанд, ки решаҳои муодилаи характеристикии* (3.63) *ҳақиқӣ ва гуногун буда, барояшон шарти* $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_{n+1} < 0$ *иҷро шавад. Инчуни, функсияи* $f(t)$ *ҳангоми* $t \to b$ *аз рӯйи формулаҳои ассимптотикии* (3.60) *ба сифр майл намоянд. Он гоҳ масъалаи навъи Коши* $(3.62) - (3.66)$ *яккимата ҳалшаванда аст ва ҳалли ягонаи он бо ёрии формулаи* (3.67) *ифода мегардад.*

Хулосаҳои боби сеюм

Масъалаи ҳалшавандагии муодилаи интегро-дифференсиалии тартиби олӣ бо ядрои барзиёд сингулярӣ таҳқиқ карда шудааст. Ҳалли муодилаи таҳқиқшаванда ба ҳалли муодилаи оператори-дифференсиалии тартиби n+1-ум бо коэффисиентҳои доимӣ оварда мешавад. Дар ин маврид ба муодилаи таҳқиқшаванда муодилаи характеристикии тартиби n+1-ум мувофиқ меояд. Натиҷаҳои дар ин самт бадастовардашуда дар теоремаҳои 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6, 3.7 ва 3.8 исбот гардидаанд.

Нишон дода шудааст, ки ҳалли умумии муодилаи интегро-дифференсиалии тартиби n-ум дар ҳолати умумӣ аз n+1 доимиҳои ихтиёрӣ вобаста мебошад.

Инчунин, ҳолате низ ҷудо карда шудааст, ки муодилаи таҳқиқшаванда дорои ҳалли ягона мебошад.

Дар зербоби 3.5 масъалаи ҳалшавандагии муодилаи интегро-дифференсиалии тартиби *n*-уми ғайримоделӣ бо ядрои барзиёд сингулярӣ мавриди баррасӣ қарор гараифтааст. Ҳалли муодилаи интегро-дифференсиалии ғайримоделӣ дар ин маврид бо воситаи резолвентаи муодилаи интегро-дифференсиалии намуди Волтерра бо ядрои регулярӣ ифода карда мешавад. Натиҷаҳои бадастовардашуда дар теоремаи 3.9 инъикоси худро ёфтаанд.

Дар қисмати охири ин боб масъалаи навъи Коши барои муодилаи интегро-дифференсиалии моделии тартиби *n*-ум таҳқиқ гардида, оид ба ҳалли ин масъала теоремаи 3.10 исбот карда шудааст.

ТАҲЛИЛИ НАТИҶАҲОИ АСОСИИ ДИССЕРТАТСИЯ

Дар ин қисмат таҳлили кӯтоҳи натиҷаҳои дар диссертатсияи илмӣ бадастовардашударо баррасӣ менамоем.

Дар **боби якуми** диссертатсия гурӯҳбандии муодилаҳои интегро-дифференсиалӣ гузаронида шуда, тафсири мухтасари натиҷаҳои корҳои илмии олимони соҳа, ки оид ба ҳалшавандагии муодилаҳои дифференсиалии таназзулёбанда, муодилаҳои интегралӣ ва муодилаҳои интегро-дифференсиалӣ ба даст овардаанд, таҳлил гардидааст.

Дар **боби дуюми** диссертатсияи илмӣ оператори дифференсиалии дорои як нуқтаи махсусияташ аз як калони:

$$D_x^\beta = (b-x)^\beta \frac{d}{dx}$$

дохил карда шудааст. Бо ёрии ин оператори дифференсиалӣ муодилаи интегро-дифференсиалии тартиби якум бо ядрои барзиёд сингулярии:

$$D_x^\beta y + A(x)y - \int\limits_x^b \frac{B(x,t)}{(b-t)^\beta} y(t)dt = f(x),$$

сохта шуда, масъалаи ҳалшавандагии он дар синфи функсияҳое, ки дар нуқтаи $x = b$ аз рӯйи формулаи ассимптотикии:

$$y(x) = o\left[(b-x)^\delta\right], \delta > \beta - 1, \text{хангоми } x \to b$$

ба сифр майл менамоянд, таҳқиқ карда шудааст.

Нишон дода шудааст, ки ба муодилаи интегро-дифференсиалии таҳқиқшаванда муодилаи характеристикии:

$$\lambda^2 + A\lambda + B = 0$$

мувофиқ меояд.

Масалан, дар ҳолати решаҳои муодилаи характеристикӣ ҳақиқӣ ва гуногун будан ва иҷро шудани шарти $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ ҳалли муодилаи интегро-дифференсиалӣ дар намуди:

$$y = c_1 e^{\lambda_1 \omega_\beta(x)} + c_2 e^{\lambda_2 \omega_\beta(x)} -$$

$$-\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \int_x^b \left[\lambda_1 e^{\lambda_1\left(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(t)\right)} - \lambda_2 e^{\lambda_2\left(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(t)\right)}\right] \frac{f(t)}{(b-t)^\beta} dt$$

ёфта мешавад.

Агар шарти $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ ё $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ иҷро гардад, пас ҳалли муодилаи интегро-дифференсиалӣ мувофиқан бо ёрии формулаҳои:

$$y = c_1 e^{\lambda_1 \omega_\beta(x)} -$$

$$-\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \int_x^b \left[\lambda_1 e^{\lambda_1\left(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(t)\right)} - \lambda_2 e^{\lambda_2\left(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(t)\right)}\right] \frac{f(t)}{(b-t)^\beta} dt$$

ва

$$y = -\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \int_x^b \left[\lambda_1 e^{\lambda_1\left(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(t)\right)} - \lambda_2 e^{\lambda_2\left(\omega_\beta(x) - \omega_\beta(t)\right)}\right] \frac{f(t)dt}{(b-t)^\beta}$$

ифода мегардад. Ин натиҷаҳо дар шакли як теорема (теоремаи 2.2) исбот гардидаанд.

Дар **параграфи сеюми боби дуюм** ҳалли умумии муодилаи интегро-дифференсиалӣ дар ҳолати решаҳои муодилаи характеристикӣ ҳақиқӣ ва якхела будан дар ду ҳолат, ҳангоми $\lambda > 0$ ва $\lambda < 0$ ёфта шудааст. Нишон дода шудааст, ки ҳангоми $\lambda > 0$ будан, ҳалли умумии муодила аз ду доимиҳои ихтиёрӣ вобаста буда, ҳангоми $\lambda < 0$ будан, муодилаи интегро-дифференсиалӣ дорои ҳалли ягона мебошад. Натиҷаҳои дар ин зербоб бадастовардашуда дар шакли як теорема (теоремаи 2.3) ҷамъбаст гардидаанд.

Дар **зербоби чоруми боби дуюм** муодилаи интегро-дифференсиалӣ моделӣ ҳангоми решаҳои муодилаи характеристикии мувофиқоянда комплексӣ ва ҳамроҳшуда будан, таҳқиқ карда шудааст. Дар ин зербоб ҳалли умумии муодилаи интегро-дифференсиалӣ бо ёрии ду доимиҳои ихтиёрӣ дар намуди:

$$y_{\text{он}} = e^{\alpha\omega_\beta(x)}\left[c_1\cos[\gamma\omega_\beta(x)] + c_2\sin[\gamma\omega_\beta(x)]\right] -$$

$$-\frac{1}{\gamma}\int\limits_x^b e^{\alpha\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\left[\alpha\sin\left[\gamma\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)\right] +\right.$$

$$\left.+\gamma\cos\left[\gamma\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)\right]\right]\frac{f(t)dt}{(b-t)^\beta}$$

ёфта шудааст.

Натиҷаҳои ин зербоб дар шакли теоремаи 2.4. ҷамъбаст гардидаанд.

Зербоби панҷуми боби дуюм ба таҳқиқи масъалаи Коши барои муодилаи интегро-дифференсиалии тартиби якум бо ядрои барзиёд сингулярӣ бахшида шудааст. Дар ин зербоб нишон дода шудааст, ки масъалаи Коши барои муодилаи таҳқиқшаванда дар нуқтаи ихтиёрии $\Gamma\backslash\{b\}$ шабеҳ ба масъалаи Коши барои муодилаҳои дифференсиалӣ гузошта мешавад. Ягонагии ҳалшавандагии масъалаи Коши барои муодилаи таҳқиқшаванда дар шакли се теорема (теоремаҳои 2.6, 2.7 ва 2.8,) исбот карда шудааст.

Дар **зербоби шашуми ин боб** масъалаи навъи Коши барои муодилаи интегро-дифференсиалӣ бо ядрои барзиёд сингулярӣ гузошта ва таҳқиқ карда шудааст. Дар фарқият ба масъалаи Коши нишон дода шудааст, ки масъалаи навъи Коши дар нуқтаи махсуси муодила гузошта мешавад. Барои масъалаи навъи Коширо таҳқиқ намудан, пеш аз ҳама, хосиятҳои ҳалҳои бадастовардашуда омӯхта шуда, операторҳои дифференсиалии махсус дохил карда мешавад. Баъдан, дар асоси хосиятҳои омӯхташуда, ба таври ягона ҳалшавандагии масъалаи навъи Коши дар теоремаҳои 2.9, 2.10, 2.11 ва 2.12 исбот карда шудааст.

Дар **зербоби ҳафтуми боби дуюм** муодилаи интегро-дифференсиалии ғайримоделӣ бо ядрои барзиёд сингулярии:

$$D_x^{\beta} y + A(x)y - \int_x^b \frac{B(x,t)}{(b-t)^{\beta}} y(t)\,dt = f(x)$$

таҳқиқ карда шудааст, ки дар ин ҷо $A(x)$, $f(x)$ функсияҳои додашудаи бефосила дар $\Gamma = \{x: a \le x \le b\}$, $B(x,t)$ – функсияи додашудаи бефосила дар росткунҷаи $R = \{(x,y): a \le x \le b,\ \ a \le t \le b\}$ мебошад.

Нишон дода шудааст, ки ҳалли муодилаи ғайримоделӣ дар се ҳолати решаҳои муодилаи характеристикии мувофиқоянда ба ҳалли муодилаи интегралии намуди Волтерра бо ядрои регулярӣ оварда мешавад. Аз ин ҷо, натиҷаҳои оид ба муодилаҳои интегралии намуди Волтерра ҷойдоштаро истифода бурда, ҳалли муодилаи ғайримоделӣ бо ёрии резолвентаи муодилаи интегралии намуди Волтерра ёфта мешавад. Оид ба ин натиҷаҳо теоремаҳои мувофиқ (теоремаи 2.13, 2.14, 2.15, 2.16, 2.17, 2.18, 2.19) исбот карда шудааст.

Боби сеюми диссертатсия ба таҳқиқи муодилаи интегро-дифференсиалии тартиби олӣ бо ядрои барзиёд сингулярӣ бахшида шудааст.

Дар **зербоби якуми ин боб** муодилаи интегро-дифференсиалии тартиби n-уми моделӣ бо ядрои барзиёд сингулярии:

$$P_M^n\left(D_x^{\beta}\right) y - \int_x^b \frac{B}{(b-t)^{\beta}} P_N^m\left(D_t^{\beta}\right) y(t) dt = f(x)$$

таҳқиқ карда шудааст, ки дар ин ҷо:

$$P_M^n\left(D_x^\beta\right) \equiv \left(D_x^\beta\right)^n + M_1\left(D_x^\beta\right)^{n-1} + M_2\left(D_x^\beta\right)^{n-2} + \cdots + M_{n-1}D_x^\beta + M_n$$

оператори дифференсиалии тартиби n-ум мебошад. Ҳалли умумии муодилаи интегро-дифференсиалии моделӣ дар синфи функсияҳои бо $C_{\beta-1}^{(n,m)}[a,b]$ ишоратшаванда вобаста аз решаҳои муодилаи характеристикии:

$$\lambda^n + K_1\lambda^{n-1} + K_2\lambda^{n-2} + \cdots + K_n\lambda + K_{n+1} = 0$$

дар се ҳолат, дар нумуди ошкор, ёфта шудааст.

Дар **зербоби дуюми боби сеюм** ҳалли умумии муодилаи интегро-дифференсиалии моделии тартиби n-ум дар ҳолати решаҳои муодилаи характеристикӣ ҳақиқӣ ва гуногун будан ва қаноат намудани шарти $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_{n+1} < 0$ дар намуди:

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)} + c_2 e^{\lambda_2\omega_\beta(x)} + \cdots + c_{n+1} e^{\lambda_{n+1}\omega_\beta(x)} +$$
$$+\frac{1}{\Delta_0}\int_x^b \left[\Delta_1\lambda_1 e^{\lambda_1\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)} + \Delta_2\lambda_2 e^{\lambda_2\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)} + \cdots\right.$$
$$\left. + \Delta_{n+1}\lambda_{n+1} e^{\lambda_{n+1}\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\right]\frac{f(t)}{(b-t)^\beta}dt$$

ёфта шудааст, ки дар ин ҷо c_i $(i = \overline{1, n+1})$ – ададҳои доимии ихтиёрӣ мебошанд. Тавре аз ин ҷо дида мешавад, ҳалли умумии муодилаи интегро-дифференсиалии тартиби n-ум аз n+1 – доимиҳои ихтиёрӣ иборат мебошад. Дар ин параграф теоремаҳои 3.1, 3.2 ва 3.3 исбот карда шудааст.

Дар **зербоби сеюми боби се** ҳалли умумии муодилаи интегро-дифференсиалии тартиби n-ум бо ядрои барзиёд сингулярӣ дар ҳолати решаҳои муодилаи характеристикӣ ҳақиқӣ ва якхела будан ва қаноат намудани шарти $\lambda < 0$ дар намуди:

$$y(x) = e^{\lambda\omega_\beta(x)}\left[\tilde{c}_1 + \tilde{c}_2\omega_\beta(x) + \cdots + \tilde{c}_{n+1}\omega_\beta^n(x)\right] + \qquad (3.32)$$
$$+\frac{1}{n!}\int_x^b e^{\lambda\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\left[\lambda\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)^n + n\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)^{n-1}\right]\frac{f(t)dt}{(b-t)^\beta}$$

ёфта шудааст, ки дар ин ҷо $\tilde{c}_i$ $(i = \overline{1, n+1})$ – ададҳои доимии ихтиёрӣ мебошанд. Дар ин параграф исбот карда шудааст, ки агар ба ҷойи шарти $\lambda < 0$ шарти $\lambda > 0$ иҷро гардад, пас муодилаи интегро-дифференсиалӣ яккимата ҳалшаванда буда, ҳалли ягонаи он дар намуди:

$$y(x) = \frac{1}{n!}\int_x^b e^{\lambda\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)}\left[\lambda\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)^n + n\left(\omega_\beta(x)-\omega_\beta(t)\right)^{n-1}\right]\frac{f(t)dt}{(b-t)^\beta}$$

дода мешавад. Ин натиҷаҳо дар шакли теоремаҳои 3.4 ва 3.5 исбот карда шудаанд.

Дар **параграфи чоруми ин боб** ҳангоми $n+1 = 2k$, яъне адади ҷуфт будан ва ҳамаи решаҳои муодилаи характеристикӣ комплексӣ ва ҳамроҳшуда будан, ҳалли умумии муодилаи интегро-дифференсиалии тартиби n-ум бо ядрои барзиёд сингулярӣ дар намуди ошкор ёфта шудааст. Натиҷаҳои ин параграф дар шакли се теорема (теоремаҳои 3.6, 3.7 ва 3.8) исбот карда шудааст.

Дар **зербоби панҷуми боби сеюми** диссертатсия муодилаи интегро-дифференсиалии ғайримоделии намуди:

$$P_M^n\left(D_x^\beta\right)y - \int_x^b \frac{B(x,t)}{(b-t)^\beta}P_N^m\left(D_t^\beta\right)y(t)dt = f(x)$$

таҳқиқ карда шудааст, ки дар ин ҷо $f(x)$ функсияи додашудаи бефосила дар $\Gamma = \{x: a \le x \le b\}$, $B(x,t)$ – функсияи додашудаи бефосила дар росткунҷаи $R = \{(x,y): a \le x \le b,\ a \le t \le b\}$ мебошад. Дар ин параграф ҳалли муодилаи ғайримоделӣ ба воситаи резолвентаи муодилаи интегро-дифференсиалии намуди Волтерра ифода карда шудааст (теоремаи 3.9).

Дар параграфи охирини боби сеюм масъалаи навъи Коши барои муодилаи интегро-дифференсиалии тартиби n-ум бо ядрои барзиёд сингулярӣ дар ҳолати решаҳои муодилаи характеристикии мувофиқоянда ҳақиқӣ ва гуногун будан, таҳқиқ карда шуда, яккимата ҳалшавандагии он исбот карда шудааст (теоремаи 3.10).

ХУЛОСАҲО

1. НАТИҶАҲОИ АСОСИИ ИЛМИИ ДИССЕРТАТСИЯ

Натиҷаҳои илмии бадастовардашуда нав буда, аз тарафи муаллиф мустақилона ба даст оварда шудааст ва аз инҳо иборат мебошанд:

- ҳалли умумии муодилаи интегро-дифференсиалии моделии тартиби якум бо ядрои барзиёд сингулярӣ вобаста аз решаҳои муодилаи характеристикӣ дар се ҳолат ёфта шудааст [1-М], [2-М], [7-М];
- методи интегралии содакардашудаи ёфтани ҳалли муодилаи оператори-дифференсиалии ғайриякҷинса коркард карда шудааст [1-М], [2-М], [6-М];
- барои муодилаи таҳқиқшаванда масъалаи Коши дар нуқтаҳои ғайримахсуси муодила гузошта шуда, яккимата ҳалшавандагии он таҳқиқ кард шудааст [1-М], [10- М], [12- М];
- барои муодилаи таҳқиқшаванда масъалаи навъи Коши дар нуқтаи махсуси муодила гузошта шуда, яккимата ҳалшавандагии он таҳқиқ кард шудааст [1-М], [2-М];
- ҳалли умумии муодилаи интегро-дифференсиалии ғайримоделии тартиби якум бо ядрои барзиёд сингулярӣ вобаста аз решаҳои муодилаи характеристикӣ дар се ҳолат, ба воситаи резолвентаи муодилаи интегралии намуди Волтерра ифода карда шудааст [3-М], [8-М], [9- М];
- муодилаи интегро-дифференсиалии тартиби n-ум бо ядрои барзиёд сингулярӣ таҳқиқ карда шуда, ҳалли умумии он вобаста аз решаҳои муодилаи характеристикӣ дар се ҳолат, дар намуди ошкор ёфта шудааст [6-М], [11-М], [12-М].

2. ТАВСИЯҲО ОИД БА ИСТИФОДАИ АМАЛИИ НАТИҶАҲО

Таҳқиқоти дар диссертатсияи илмии мазкур гузаронидашуда характери назариявӣ дорад. Натиҷаҳои бадастовардашуда барои инкишоф додани назарияи муодилаҳои интегралӣ ва интегро-дифференсиалие, ки ду ва зиёда аз он нуқтаҳои махсус доранд ва инчунин муодилаҳое, ки дараҷаи махсусияти ядрои онҳо аз як калон мебошад, истифода бурда мешавад. Инчунин, назарияи дар ин диссертатсияи илмӣ коркардшударо истифода бурда, муодилаҳои интегро-дифференсиалии бо ҳосилаҳои хусусӣ ва бо ядроҳои сингулярӣ ва барзиёд сингуляриро таҳқиқ намудан имконпазир мегардад.

Маводи диссертатсияи илмии мазкурро ҳангоми хондани курсҳои махсус барои донишҷӯёни донишгоҳҳои олӣ, магистрон ва докторантоне, ки аз рӯйи ихтисосҳои математика, математикаи амалӣ ва механика таҳсил менамоянд, истифода бурдан мумкин аст.

РӮЙХАТИ АДАБИЁТ

1. Феҳристи сарчашмаҳои истифодашуда

[1]. *Al-Hayani, W.* Solving n –th Order Integro-Differentical Equations Using the Combined Laplace Transform-Adomian Decomposition Method [Text] / W. Al-Hayani // Applied Mathematics. – 2013. – No.4. – PP. 882-886.

[2]. *Bart, G.R.* Three Theorems on Third-Kind Linear Integral Equations [Text] / G.R. Bart // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 1981. – No. 79. – PP. 48-57.

[3]. *Bart, G.R.* Linear Integral Equations of the Third Kind [Text] / / G.R. Bart, R.L. Warnock // SIAM J. Math. Anal. – 1973. – No. 4. – PP. 609-622.

[4]. *Behiry,* S.H. Nonlinear Integro-differential Equations by Differential Transform Method with Adomian Polynomials [Text] / S.H. Behiry // Mathematical Science Letters. – 2013. – No. 3. – PP. 209-221.

[5]. *Cont,* R. Integro-differential equations for option prices in exponential Levy models [Text] / R. Cont, E. Voltchkova // Finance and Stochastics. – 2005. – No. 5. – PP. 299-325.

[6]. *Favini,* A. Singular Integro-Differential Equations of Parabolic Type [Text] / A. Favini, A. Lorenzi, H. Tanabe // Adv. Diff. Eqs. – 2002. – Vol. 7. – PP. 769-798.

[7]. *Fedotov,* A.I. Approximation of Solutions to Singular Integro-Differential Equation by Hermite-Fejer Polynomials [Text] / A.I. Fedotov // Ufa Mathematical Journal. – 2018. – Vol. 10. – No. 2. – PP.109-117.

[8]. *Filiz, A.* Numerical Solution of Nonlinear Integro-differential Equation in Biological Sciences [Text] / A. Filiz, A. Isik // Advances in Computational Mathematics and its Applications. – 2013. – Vol. 2. – No 4. – PP. 341-346.

[9]. *Rajabov,* N. Introduction to ordinary differential equations with singular and super-singular coefficients [Text] / N. Rajabov. – TSNU. – Dushanbe, 1998. – 158 p.

[10]. *Rajabov,* N. Higher order ordinary differential equation with singular and super singular coefficients [Text] / N. Rajabov // Seventh International Scientific Kravchuk Conference. – Kyiv. – 1998. – PP. 425.

[11]. *Rajabov*, N. Linear conjugate boundary value problems for the second order linear ordinary differential equation with super-singular coefficients [Text] / N. Rajabov // International congress of Mathematicians. – Berlin. – 1988. – PP. 186.

[12]. *Rajabov*, N. Linear conjugate boundary value problems for the first order ordinary system of linear differential equation with singular and super-singular coefficients [Text] / N. Rajabov // Proceeding of the Second ISAAC Congress. Kluwer Academic Publishing. – 2000. – PP. 175-183.

[13]. *Rajabov*, N. Higher ordinary differential equation with super-singular points [Text] / N. Rajabov // Abstract ISAAC Congress. University of Delaware. New York, USA. – 1997.

[14]. *Rajabov*, N. Higher ordinary differential equation with super-singular points [Text] / N. Rajabov // Kluwer Academic Publishers. – 1999.

[15]. *Rajabov,* N. Volterra type integral equation with boundary and interior fixed singularity and super- singularity kernels and their application [Text] / N. Rajabov // Germany: LAP LAMBERT Academic Publishing. – 2011. – 282 p.

[16]. *Rajabov,* N. Investigation of a class of two-dimensional conjugate integral equation with fixed super-singular kernels [Text] / N.Rajabov, M.Ronto // Mathematical Notes. – 2011. – Vol. 12. – No. 2. – PP. 237-244.

[17]. *Rajabov,* N. To theory one class Linear Model Neoclassical Volterra Type Integral Equation with left Boundary Singular Point [Text] / N.Rajabov // Applied Mathematics. – 2013. – No. 4. – PP. 1301-1312.

[18]. *Rajabov,* N. About New Class of Volterra Type Integral Equation with Two Boundary Singularity in Kernels [Text] / N. Rajabov, S. Saidov // Proceedings of the 2014 International conference on Pure Mathematics - Applied Mathematic. Venice, Italy. – 2014. – No. 4. – PP. 214-217.

[19]. *Rajabov,* N. New Methods for Investigating a New Class of the Volterra Type Integral Equation with a Boundary Singularity in the Kernel [Text] / N. Rajabov // The 3rd Annual International Conference «Mathematical Science and its Applications». – Abu Dhabi University. – 2014. – PP. 69-72.

[20]. *Rajabov,* N. Integral representation of the manifold solution for new class of the Volterra type integral equation with a boundary singularity in kernels for odd power [Text] / N. Rajabov // 10th International ISAAC Congress. University of Macau. – 2015. – PP. 56-57.

[21]. *Rajabov,* N. Integral Representation of the Manifold Solution for New Class of the Volterra Type Integral Equation with a Boundary Singularity in the Case, When Kernels Contain Logarithmic Singularity and its Power [Text] / N. Rajabov // Journal of Mathematics and System Science. – 2016. – No. 6. – PP. 23-37.

[22]. *Rajabov,* N. Volterra type integral equation with super- singular kernels [Text] / N. Rajabov // Functional analysis in interdisciplinary applications. – Astana, Kazakhstan. – 2017. – Vol. 216. – PP. 333-340.

[23]. *Rajabov,* N. Volterra type integral equation with super singular kernels [Text] / N. Rajabov // Abstracts of Vl Congress of the Turkic World Mathematical Society. – Astana, 2017. – No. 6. – PP. 220.

[24]. *Rajabova,* L. The explicit Representation of Manifold solutions for a third order equation with super singular point [Text] / L. Rajabova // Boundary Value Problems, Integral Equations and Related Problems. – New Jersey, London, Hong Gong, 2000. – PP. 150-154.

[25]. *Rajabova,* L. About class, two-dimensional linear Volterra type integral Equation with boundary fixed singular Kernels [Text] / L. Rajabova, N. Rajabov // ISAAC Conference on Complex Analysis, Differential Equation and Related Topics. – Yerevan, Armenia, 2002. – PP. 5-53.

[26]. *Rajabova,* L. On some two dimensional Volterra type linear integral equation with super singularity [Text] / L. Rajabova, M. Ronto, N. Rajabov // Mathematical Notes. – 2003. – Vol. 4. – No. 1. – PP. 65-76.

[27]. *Rajabova,* L. Theory of a class of two-dimensional Volterra type integral equation with two super singular lines [Text] / L. Rajabova // 6-th International ISAAC Congress, Middle East Technical University. – Turkey, 2007. – PP. 35-36.

[28]. *Rajabova,* L. Theory of a class of two – dimensional Volterra type integral equation with two super – singular lines [Text] / L. Rajabova // 6-th International

ISAAC Congress, Middle East Technical University. – Turkey, 2007. – PP. 35-36.

[29]. *Sato,* T. Sur l′equation integrale [Text] / T. Sato // J. Math. Soc. – Japan. –2016. –Vol. 5. – No. 2. – PP. 145-153.

[30]. *Sukavanam,* N. A Fredholm-Type Theory for Third-Kind Linear Integral Equations [Text] / N. Sukavanam // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 1984. – No. 100. – PP. 478-485.

[31]. *Zaripov, S.Q.* The new type of singular integro-differential equations (Volume 1) / S.Q. Zaripov. – Germany: LAP LAMBERT Academic Publishing. – 2016. – 120p.

[32]. *Zarifzoda, S.K.* New Type Super Singular Integro-Differential Equation and Its Conjugate Equation [Text]/ T.K. Yuldashev, S.K. Zarifzoda // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2020. – Vol. 41. – No. 6. – P. 1123-1130.

[33]. *Zarifzoda, S.K.* On Exact Solutions of a Class of Singular Partial Integro-Differential Equations [Text] / T.K. Yuldashev, R.N. Odinaev, S.K. Zarifzoda // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2021. – Vol. 42. – No. 3. – P. 676-684.

[34]. *Zarifzoda, S.K.* On a New Class of Singular Integro-differential Equations [Text] / T.K. Yuldashev, S.K. Zarifzoda // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics series. – 2021. – No. 1(101). – P. 138-148.

[35]. *Zarifzoda, S.K.* Inverse problem for a Fredholm integro-differential equation with final redefinition conditions at the end of the interval [Text] / T.K. Yuldashev, S.K. Zarifzoda // Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics. – 2022. – Vol. 13. – No. 5. – P.483-490.

[36]. *Zarifzoda, S.K.* Finding the Explicit Solutions of a Second-Order Differential Equation of Riemann-type with Many Singular Points [Text] / S.K. Zarifzoda // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2022. – Vol. 43. – No. 11. – P.3335-3343.

[37]. *Zarifzoda, S.K.* Construction of the bases of operational calculus for a differential operator with two singular points [Text] / S.K. Zarifzoda // Uzbek Mathematical Journal. – 2022. – Vol. 66 – No. 4. – P.183-196.

[38]. *Takesada, T.* On the singular point of integral equations of Volterra type [Text] / T. Takesada // J. Math.Soc Japan. – 1955. – Vol. 7. – No. 2. – PP.123-136.

[39]. *Авсянкин, О.Г.* Развитие теории многомерных интегральных операторов с однородными и биоднородными ядрами [Текст] / О.Г. Авсянкин // Авт. конд. дисс. – Ростов-на-Дону, 2009. – 32с.

[40]. *Амирджанян, А.А.* Сингулярные интегральные уравнения с логарифмической особенностью в правой части [Текст] / А.А. Амирджанян, А.В. Саакян // Международная школа-конференция «Механика». – 2016. – С. 20-24.

[41]. *Арутюнян, Р.В.* Исследование интегро-дифференциальных уравнений [Текст] / Р.В. Арутюнян // Изв. Сарат. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2016. – Т. 16. – № 1. – С.5-12.

[42]. *Ахмадиев, М.Г.* Приближённые методы решения интегро-дифференциальных уравнений [Текст] / М.Г. Ахмадиев, Ю.Х. Хасанов // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. – 2015. – Т. 58. – № 3. – С. 192-197.

[43]. *Берс, Л.* Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики [Текст] / Л. Берс. – М.: Иностр. Лит. – 1961. – 208 с.

[44]. *Бильман Б.М.* Об интегральных уравнениях с переменными пределами интегрирования, ядра которых имеют особенность типа однородной функции степени -1 [Текст] / Б.М. Бильман // В сб.: Дифференциальные и интегральные уравнения с сингулярными коэффициентами. – Душанбе, 1969. – С. 19-40.

[45]. *Бободжонов, А.А.* Метод нормальных форм в сингулярно возмущенных системах интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма с быстро изменяющимися ядрами [Текст] / А.А. Бободжонов, В.Ф. Сафонов // Математический сборник. – 2013. – Т. 204. – № 7. – С. 47-70.

[46]. *Булатов, М.В.* Об интегро-дифференциальных системах с вырожденной матрицей перед производной [Текст] / М.В. Булатов // Дифференциальные уравнения. – 2002. – Т. 38. – № 5. – С. 692-697.

[47]. *Быков, Я.В.* К теории линейных интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра [Текст] / Я.В. Быков // Тр. физ.-матем. фак-та Киргиз, ун-та. – 1953. – № 2. – С. 67-83.

[48]. *Валицкий, Ю.Н.* Об операторе преобразования для интегро-дифференциальных операторов типа Вольтера [Текст] / Ю.Н. Валицкий // В сб.: «Математическая физика». Киев: Наукова Думка. – 1965. – С. 23-36.

[49]. *Васильев, В.В.* Об условиях А.И. Некрасова в теории линейных интегро-дифференциальных уравнений одного класса [Текст] / В.В. Васильев // Изв. Вузов. Матем. – 1963. – № 6. – С.29-38.

[50]. *Векуа, И.Н.* Об интегро-дифференциальном уравнении Прандтля [Текст] / И.Н. Векуа // Прикл. матем. и мех. – 1945. – Т. 9. – № 2. – С. 143-150.

[51]. *Вейнберг, М.М.* Интегро-дифференциальные уравнения [Текст] / М.М. Вейнберг // Итоги науки. Сер. Мат. анал. Теор. вероятн. Регулир. – 1962. – С. 5-37.

[52]. *Виграненко, Т.И.* Об одном классе линейных интегро-дифференциальных уравнений [Текст] / Т.И. Виграненко // Зап. Лен. горн. ин-та. – 1956. – С.176-186.

[53]. *Векуа, Н.П.* Об одной системе сингулярных интегро-дифференциальных уравнений и ее приложения в граничных задачах линейного сопряжения [Текст] / Н.П. Векуа // Тр. Тбилисск. Матем. Ин-та. АН Груз ССР. – 1957. – Т. 24. – С. 135-147.

[54]. *Власов, В.В.* Разрешимость и спектральный анализ интегро-дифференциальных уравнений, возникающих в теплофизике и акустике [Текст] / В.В. Власов, Н.А. Раутиан, А.С. Шамаев // Доклады РАН. – 2010. – Т. 434. – № 1. – С. 12-15.

[55]. *Вольтерра, В.* Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений [Текст] / В. Вольтерра. – М.: Наука, 1982. – 304 с.

[56]. *Габбасов, Н.Н.* Новый вариант метода подобластей для интегральных уравнений третьего рода с особенностями в ядре [Текст] / Н.Н. Габбасов, Р.Р. Замалиев // Изв. вузов. Математика. – 2011. – №5. – С. 12-18.

[57]. *Гахов, Ф.Д.* Краевые задачи [Текст] / Ф.Д. Гахов. – М.: Физматгиз, 1963. – 640 с.

[58]. *Гиль, А.В.* Интегральные операторы свёртки и с однородными ядрами в пространстве ВМО [Текст] / А.В. Гиль // Авт конд. дисс. – Ростов- на-Дону, 2004. – 22 с.

[59]. *Годунов, С.К.* О дискретных моделях кинетического уравнения Больцмана [Текст] / С.К. Годунов, У.М. Султангазин // Успехи мат. наук. – 1971. – Т. 26. – № 3(159). – С. 3-51.

[60]. *Джангибеков, Г. О* явном решении одного двумерного интегрального уравнения [Текст] / Г. Джангибеков, К. Арабзода // Вестник филиала московского государственного университета имени М.В. Ломоносова в г. Душанбе. Серия естественных наук. – 2017. – №3(1). – С. 19-40.

[61]. *Джангибеков, Г. О* некоторых двумерных сингулярных интегральных операторах [Текст] / Г. Джангибеков// Матем. Заметки. – 1989. – Т. 46. – № 46. – С. 91-93.

[62]. *Джураев А.Д.* Метод сингулярных интегральных уравнений [Текст] /А.Д.Джураев. – М.: Наука, 1997. – 415 с.

[63]. *Джураев, А.Д.* Системы уравнений составного типа [Текст] /А.Д.Джураев. – М.: Наука, 1972. – 227 с.

[64]. *Замалиев, Р.Р.* О прямых методах решения интегральных уравнений третьего рода с особенностями в ядре [Текст] / Р.Р. Замалиев. Авт. конд. дисс. – Казан, 2012. – 18с.

[65]. *Зарипов, С.К.* Об одном классе модельных интегро-дифференциальных уравнений первого порядка со сверх сингулярной точкой в ядре [Текст] / С.К. Зарипов // Вестник Таджикского национального университета. – 2015. – №1/6 (191). – С. 6-12.

[66]. *Зарипов, С.К.* Об одном классе немодельных интегро-дифференциальных уравнений первого порядка с одной сингулярной точкой в ядре [Текст] / С.К. Зарипов // Известия АН РТ, отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. наук. – 2016. – №4(165). – С. 26-37.

[67]. *Зарипов, С.К.* Решения одного класса модельных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с сингулярным ядром [Текст] / С.К. Зарипов, Н. Раджабов // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. – 2017. – Т. 60. – №3-4. – С. 118-125.

[68]. *Зарипов, С.К.* Об одном классе модельных интегро-дифференциальных уравнений первого порядка со степенной особенностью в ядре [Текст] / С.К. Зарипов // Вестник Таджикского национального университета. – 2018. – № 1. – С. 16-21.

[69]. *Зарипов, С.К.* Исследование одного класса сопряжённого сингулярного интегро-дифференциального уравнения [Текст] / С.К. Зарипов // Вестник Таджикского национального университета. – 2018. – № 2. – С. 21-28.

[70]. *Зарифзода, С.К.* S – интегральное преобразование и его применения для решения сингулярных интегро-дифференциальных уравнений [Текст] / С.К. Зарифзода // Вестник Таджикского национального университета. – 2019. – № 1. – С. 100-104.

[71]. *Зарипов, С.К.* Построение аналога теоремы Фредгольма для одного класса модельных интегро-дифференциальных уравнений первого порядка с сингулярной точкой в ядре [Текст] / С.К. Зарипов // Вестник Томского Государственного Университета. Математика и механика. – 2017. – №46. – С. 24-35.

[72]. *Зарипов, С.К.* Построение аналога теоремы Фредгольма для одного класса модельных интегро-дифференциальных уравнений первого порядка с логарифмической особенностью в ядре [Текст] / С.К. Зарипов // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физ.-мат. Науки. – 2017. – Т. 21. – № 2. – С. 236-248.

[73]. *Зарипов, С.К.* Об одной новой методике решения одного класса модельных интегро-дифференциальных уравнений первого порядка с сингулярным ядром [Текст] / С.К. Зарипов // Математическая физика и компьютерное моделирование. Волгоградский государственный университет. – 2017. – Т. 20. – №4. – С. 68-75.

[74]. *Зарифзода, С.К.* Исследование некоторых классов интегро-дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка со степенно-логарифмической особенностью в ядре [Текст] / С.К. Зарифзода, Р.Н. Одинаев // Вестник Томского Государственного Университета. Математика и механика. – 2020. – №67. – С. 40-54.

[75]. *Зарипов, С.К.* Об одном классе модельных интегро-дифференциальных уравнений первого порядка с правой сингулярной точкой в ядре [Текст] / С.К. Зарипов // Вестник филиала московского государственного университета имени М.В. Ломоносова в г. Душанбе. Серия естественных наук. Душанбе. – 2017. – №3(1). – С. 40-51.

[76]. *Илолов, М.* Интегро-дифференциальные уравнения высшего порядка в Гильбертовом пространстве [Текст] / М.Илолов, Д.Н.Гулджонов, С.Р.Наврузмамадова // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математики и её приложений», посвящённой 70–летию со дня рождения академика АН Республики Таджикистан, доктора физико-математических наук, профессора Илолова Мамадшо (14-15 марта 2018 г.). – Душанбе, 2018. – С. 106-107.

[77]. *Исаханов, Р.С.* Дифференциальная граничная задача линейного сопряжения и ее применение к теории интегро-дифференциальных уравнений [Текст] / Р.С.Исаханов // Сообщ. АН ГрузССР. – 1958. – Т. 20. – № 6. – С. 659-666.

[78]. *Кадиров Г.М.* Интегральные представления и многообразия решений для одного класса обыкновенного дифференциального уравнения n – го порядка с одной внутренной сингулярной точкой [Текст] / Г.М.Кадиров, Н.Раджабов // Материалы международной научной конференции «Сингулярные интегральные уравнения и дифференциальные уравнения с сингулярными

коэффициентами», посвящённой 70–летию профессора Джангибекова Гулходжа (30-31 января 2020 г.). – Душанбе, 2020. – С. 158-161.

[79]. *Калашников, А.С.* Классы единственности для интегро-дифференциальных уравнений с операторами Вольтерра типа свертки [Текст] / А.С. Калашников // Функциональный анализ и его приложения. – 1979. – Т. 13. – № 2. – С. 83-84.

[80]. *Копачевский, Н.Д.* Интегро-дифференциальные уравнения Вольтерра в гильбертовом пространстве: спец. курс лекций [Текст] / Н.Д.Копачевский. – Симферополь: ФЛП «Бондаренко О.А.», 2012. – 152 с.

[81]. *Крикунов, Ю.М.* О решении обобщенной краевой задачи Римана и линейного сингулярного интегро-дифференциального уравнения [Текст] / Ю.М. Крикунов // Уч. зап. Казанск. ун-та. – 1952. – Т. 112. – № 10. – С. 191-199.

[82]. *Магнарадзе, Л.Г.* Об одном новом интегральном уравнении теории крыла самолёта [Текст] / Л.Г.Магнарадзе // Сообщ. АН Груз. ССР. – 1942. – Т. 3. – №6. – С. 503-508.

[83]. *Магницкий, Н.А.* Линейные интегральные уравнения Вольтерра I и III рода [Текст] / Н.А.Магницкий // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1979. – Т. 19. – № 4. – С. 970-988.

[84]. *Мелешко, И.Н.* О приближенном решении одного сингулярного интегро-дифференциального уравнения [Текст] / И.Н.Мелешко, П.Г.Ласый // Известия вузов. Математика. – 2011. – №5. – С. 35-43.

[85]. *Михлин, С.Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения [Текст] / С.Г.Михлин. – М.: Физматгиз, 1962. – 254 с.

[86]. *Михайлов, Л.Г.* Новый класс особых интегральных уравнений и его применение к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами [Текст] / Л.Г.Михайлов. – Душанбе, 1963. – 183 с.

[87]. *Михайлов, Л.Г.* Об интегральных уравнениях с сингулярно-однородными ядрами [Текст] / Л.Г.Михайлов. – Душанбе, 2015. – 52 с.

[88]. *Мусхелишвили, Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения [Текст] / Н.И.Мусхелишвили. – М.: Наука, 1968. – 511 с.

[89]. *Некрасов, А.И.* Об одном классе линейных интегро-дифференциальных уравнений [Текст] / А.И.Некрасов // ТР. Цаги. в.190. – М., 1934.

[90]. *Николаенко, В.Н.* Задача Коши для интегро-дифференциального уравнения типа Фредгольма [Текст] / В.Н.Николаенко // УМН. – 1952. – Т. 7. – Вып 5(51). – С. 225-228.

[91]. *Орлов, С.С.* Обобщенные решения интегро-дифференциальных уравнений высоких порядка в банаховых пространствах [Текст] / С.С.Орлов. – Иркутск: Изд-во ИГУ, 2014. – 149с.

[92]. *Панов, Л.И.* Об интегральных уравнениях с ядрами, имеющими неинтегрируемую особенность произвольного порядка [Текст] / Л.И.Панов // Докл. АН ТаджССР. – 1967. – Т. 10. – №. 6. – С. 3-7.

[93]. *Раджабов, Н. К* теории обыкновенных дифференциальных уравнений со сверхсингулярной точкой [Текст] / Н.Раджабов, В.В. Шевчук // Доклады АН Таджикский ССР. – 1989. – Т. 32. – №8. – С. 506-510.

[94]. *Раджабов, Н.* Обыкновенные дифференциальные уравнения высших порядков со сверхсингулярной точкой [Текст] / Н.Раджабов // Изв. АИ Республики Таджикистан. – 1994. – № 1-2(81). – С. 4-9.

[95]. *Раджабов, Н.* Свойство решения одного класса нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с сингулярными и сверхсингулярными коэффициентами на особых точках [Текст] / Н.Раджабов // Тезисы международной конференции по дифференциальным уравнениям. – Киев, 1997. – С. 116-117.

[96]. *Раджабов, Н.* Задачи типа Коши для линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с одной сверхсингулярной точкой [Текст] / Н.Раджабов // Материалы научная конференция «Дифференциальное уравнения с частными производными и их приложения». – Таджикистан, Курган-Тюбе, 1997. – С. 46-47.

[97]. *Раджабов, Н.* Интегральные представления и задачи типа Коши для сверх сингулярного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с комплексно-сопряженными характеристическими корнями [Текст] / Н.Раджабов // Доклады АН РТ. – 1998. – Т. 10. – № 41. – С. 35-40.

[98]. *Раджабов, Н.* Задачи типов линейного сопряжения для линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с одной сингулярной и супер сингулярной точкой [Текст] / Н.Раджабов // Доклады АН РТ. – 1999. – Т. 16. – № 4. – С. 31-34.

[99]. *Раджабов, Н.* Интегральные представления для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка с сингулярной и супер сингулярной точкой [Текст] / Н.Раджабов // Доклады АН РТ. – 2000. – Т. XLIII. – №3. – С. 33-39.

[100]. *Раджабов, Н.* Об одном интегральном уравнении Вольтерровского типа с сингулярным и сверхсингулярным ядром [Текст] / Н.Раджабов // Материалы конференции «Математическое моделирование и компьютерные эксперименты ICMMCE -2000». – 2000. – С. 57-58.

[101]. *Раджабов, Н.* Общие интегральные уравнения типов Вольтерра с левой и правой неподвижной сингулярной точкой в ядре [Текст] / Н.Раджабов // Известия Академии наук Республики Таджикистан; Отд. физ.-мат., хим. и геологических наук. – 2001. – №1. – С. 3-9.

[102]. *Раджабов, Н.* Об одном интегральном уравнении вольтерровского типа [Текст] / Н.Раджабов // Доклады РАН. – 2002. – Т. 383. – №3. – С. 314-317.

[103]. *Раджабов, Н.* Об одном классе двумерных линейных интегральных уравнений Вольтерровского типа с фиксированными граничными сингулярными ядрами [Текст] / Н.Раджабов, Л.Н.Раджабова // Материалы международной школы-конференции «Обратные задачи, теория и приложения». – Ханты-Мансийск. – Россия, 2002. – С. 178.

[104]. *Раджабов, Н.* Интегральные уравнения вольтерровского типа с внутренней неподвижной сингулярной и сверхсингулярной точкой в ядре [Текст] / Н.Раджабов // Сборник трудов Международной научной конференции

«Дифференциальные уравнения и их приложения». – Самара, 2002. – С. 279-282.

[105]. *Раджабов, Н.* Интегральные уравнения типа Вольтера с фиксированными граничными и внутренними сингулярными ядрами и их приложения [Текст] / Н.Раджабов. – Душанбе, 2007. – 222 с.

[106]. *Раджабов, Н.* К теории одного класса обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с левой граничной сверхсингулярной точкой [Текст] / Н.Раджабов, Г.М.Кадиров // Труды международной научной конференции по «Дифференциальным и интегральным уравнениям с сингулярными коэффициентами». – Душанбе, 2003. – С. 128-130.

[107]. *Раджабов, Н.* К теории одного класса модельного обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка с левой граничной сверхсингулярной точкой [Текст] / Н.Раджабов, Г.М.Кадиров // Материалы республиканской научной конференции «Дифференциальные и интегральные уравнения», посвящённой 60 - летию образования ТГНУ и 70 - летию академика АН РТ Раджабова Н. – Душанбе, 2008. – С. 64-66.

[108]. *Раджабов, Н.* К теории одного класса одномерного интегрального уравнения вольтерровского типа с двумя граничными сингулярными точками [Текст] / Н.Раджабов, С.Саидов // Труды Всероссийской научной конференции с международным участием «Дифференциальные уравнения и их приложения». – Стерлитамак – Уфа, 2011. – С. 72-74.

[109]. *Раджабов, Н.* К теории одного класса интегральных уравнений с двумя граничными сингулярными точками [Текст] / Н.Раджабов, С.Саидов // Материалы республиканской научной конференции «Теория дифференциальных и интегральных уравнений и их приложения», посвящённой 20- ой годовщине независимости Республики Таджикистан. – Душанбе, 2011. – С. 102-107.

[110]. *Раджабов, Н.* Введение в теорию многомерных интегральных уравнений типа Вольтера с фиксированными сингулярными и сверх – сингулярными

ядрами и их приложения [Текст] / Н.Раджабов, Л.Н. Раджабова. – Germany: LAPLAMBERT Academic Publishing, 2012. – 502 с.

[111]. *Раджабов, Н.* К теории общего интегрального уравнения Вольтерровского типа с двумя граничными сингулярными точками [Текст] / Н.Раджабов, С.Саидов // Доклады АН РТ. – 2012. – Т. 55. – №7. – С. 519-525.

[112]. *Раджабов, Н.* К теории одного класса, вырождающегося обыкновенного дифференциального уравнения высших порядков [Текст] / Н.Раджабов, Г.М. Кадиров, А.С. Сатторов // Вестник Таджикского национального университета. – 2014. – №1/1(126). – С. 3-5.

[113]. *Раджабов, Н.* К теории одного класса интегрального уравнения Волтерровского типа с двумя граничными сингулярными точками [Текст] / Н.Раджабов, С.Саидов // Материалы республиканской научно-теоретической конференции профессорско-преподавательского состава и сотрудников ТНУ, посвящённой 700-летию Мир Саида Али Ҳамадони, «Году семьи» и международному десятилетию действия «вода для жизни» 2005-2015 годы. – Душанбе, 2015. – С. 475-476.

[114]. *Раджабов, Н.* Об одном классе модельного сверхсингулярного интегрального уравнения, обобщающем одномерное интегральное уравнение Вольтерра с левой граничной сверхсингулярной точкой в ядре [Текст] / Н.Раджабов, С.Саидов // Proceedings VII International Scientific Conference. – Aktobe, 2015. – С. 202-205.

[115]. *Раджабов, Н.* Граничные задачи для одного класса интегральных уравнение Вольтерровского типа с двумя граничными сингулярными точками [Текст] / Н.Раджабов, С.Саидов // Материалы республиканской научной конференции Неклассические дифференциальные и интегральные уравнения и их приложения, посвящённой 3000-летию Гиссара и 50-летию механико-математического факультета. – Душанбе, 2015. – С. 81-82.

[116]. *Раджабов, Н.* К теории одного класса интегральных уравнений Вольтера первого рода с фиксированными граничными и внутренними сингулярными

точками [Текст] / Н.Раджабов, С.Саидов // Доклады АН РТ. – 2015. – Т. 58. – №7. – С. 549-557.

[117]. *Раджабов, Н.* Линейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка общего вида с правой или левой сверхсингулярной точкой [Текст] / Н.Раджабов, М.Я. Дадоджонов, А.Г.Олимов // Учёные записки ХГУ. Серия естественные и экономические науки. – 2016. – №2(37). – С.22-30.

[118]. *Раджабов, Н.* К теории одного класса сверх-сингулярного интегрального уравнения Вольтерровского типа [Текст] / Н.Раджабов // Вестник Таджикского национального Университета. – 2017. – №1/1. – С. 3-8.

[119]. *Раджабов, Н.* К теории одного класса сингулярного интегрального уравнения по цилиндрической области [Текст] / Н.Раджабов // Материалы международной научной конференции «Проблемы прикладной математики и информатики». – Актюбинский региональный Государственный Университета, имени К Жубанова, 2017. – С. 14-144.

[120]. *Раджабов, Н.* Интегральные представления и граничные задачи для одного класса интегральных уравнений типа Вольтерра с двумя граничными сингулярными точками [Текст] / Н.Раджабов, Л.Н.Раджабова, С.Саидов // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математики и их приложения», посвящённой 70-летию образования ТНУ и 80 – летию академика АН РТ, д.ф.-м.н., профессора Раджабова Н. – Душанбе, 2018. – С. 175-180.

[121]. *Раджабов, Н.* Об одном классе трехмерного интегрального уравнения по слоевой области [Текст] / Н.Раджабов // Вестник Таджикского национального университета. – 2018. – № 2. – С. 5-9.

[122]. *Раджабов, Н.* К теории одного класса сингулярного интегрального уравнения Вольтерра третьего рода с правой логарифмической особенностью в ядре [Текст] / Н.Раджабов // Материалы международной конференции «Современные проблемы и приложения алгебры, теории чисел и математического анализа», посвящённой 60–летию академика АН

Республики Таджикистан, доктора физико-математических наук, профессора Рахмонова Зарулло Хусеновича и члена-корреспондента Академии наук Республики Таджикистана, доктора физико-математических наук, профессора Исхокова Сулаймона Абунасровича (13-14 декабря 2019 г.). – Душанбе, 2019. – С. 203-205.

[123]. *Раджабов, Н.* Двумерные симметричные интегральные уравнения типа Вольтерра с сингулярными и сверхсингулярными линиями [Текст] / Н.Раджабов, Л.Н.Раджабова, С.Б.Зарипов. – Germany: LAPLAMBERT Academic Publishing, 2019. – 108 с.

[124]. *Раджабов, Н.* К теории одного класса сверх-сингулярного интегрального уравнения Вольтерровского типа третьего рода со сверх-сингулярным ядром [Текст] / Н.Раджабов // Материалы международной конференции «Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений», посвящённой 70–летию со дня рождения академика АН Республики Таджикистан, доктора физико-математических наук, профессора Бойматова Камолиддина Хамроевича (25-26 декабря 2020 г.). – Душанбе, 2020. – С. 246-250.

[125]. *Раджабова, Л.Н.* Явное решение одного класса двумерного линейного интегрального уравнения Вольтерровского типа с двумя граничными сингулярными линиями [Текст] / Л.Н.Раджабова // Материалы международной научной конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения». – Самара, 2002. – С. 286-288.

[126]. *Раджабова, Л.Н.* Исследование одного класса двумерного интегрального уравнения с фиксированными сингулярными ядрами, связанное с гиперболическими уравнением [Текст] / Л.Н.Раджабова, Н.Раджабов // Доклады РАН. – 2003. – Т. 391. – №1. – С. 20-22.

[127]. *Раджабова, Л.Н.* Явное решение одного класса немодельного интегрального уравнения Вольтерровского типа с одной сингулярной и одной слабо-сингулярной линией [Текст] / Л.Н.Раджабова // Материалы международной научной конференции «Дифференциальные уравнения с

частными производными и родственные проблемы анализа и информатики». – Ташкент, 2004. – Т. 4. – С. 78-80.

[128]. *Раджабова, Л.Н.* К теории одного класса двумерного немодельного интегрального уравнения Вольтеровского типа со сверхсингулярными граничными линиями в ядрах [Текст] / Л.Н.Раджабова, Н.Раджабов // Доклады РАН. – 2005. – Т. 400. – № 5. – С. 602-605.

[129]. *Раджабова, Л.Н.* Об одном общем интегральном уравнении типа Вольтерра с одной сингулярной и одной сверхсингулярной линиями [Текст] / Л.Н.Раджабова // Труды XII Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ – 2005). – Харьков-Херсон, 2005. – С. 303-306.

[130]. *Раджабова, Л.Н.* Об одном общем интегральном уравнении типа Вольтерра со сверхсингулярными линиями [Текст] / Л.Н.Раджабова // Вестник национального университета. – 2005. – №2. – С. 116-123.

[131]. *Раджабова, Л.Н.* Об одном общем двумерном интегральном уравнении типа Вольтерра с особенностями на границе области [Текст] / Л.Н.Раджабова // Вестник ТГНУ. Серия естественных наук. – 2007. – №3(35). – С. 30-38.

[132]. *Раджабова, Л.Н.* О некоторых случаях одного двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра с сильными особенностями на границе области [Текст] / Л.Н.Раджабова // Материалы международная научная конференция «Актуальные вопросы математического анализа, дифференциальных уравнений и информатики», посвящённой 70 – летию акад. АН РТ З.Д.Усманова. – Душанбе, 2007. – С. 94-97.

[133]. *Раджабова, Л.Н.* К теории одного класса двумерного сопряженного интегрального уравнение вольтеровского типа с граничным фиксированными сингулярными ядрами [Текст] / Л.Н.Раджабова // Труды международной научной конференции «Дифференциальные уравнение и смежные проблемы». – Стерлитамак, 2008. – Т. 1. – С. 164-168.

[134]. *Раджабова, Л.Н.* К теории одного класса двумерных интегральных уравнений Вольтерра с внутренними особыми линиями [Текст] / Л.Н.Раджабова // Вестник ТНУ. Серия естественных наук. – 2010. – №3(59). – С. 48-53.

[135]. *Раджабова, Л.Н.* О некоторых случаях немодельных двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с особой и слабо-особой линией на полосе[Текст] / Л.Н. Раджабова., М.Б. Хушвахтов // – Доклады АН РТ. – 2019. – Т. 62. – № 9-10. – С. 533-540.

[136]. *Раджабова, Л.Н.* О некоторых случаях симметричных двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с особенностью и логарифмической особенностью в ядре [Текст] / Л.Н.Раджабова, Г.Шукурова // Доклады АН РТ. – 2018. – Т. 61. – № 3. – С. 231-240.

[137]. *Раджабова, Л.Н.* К теории двумерных интегральных уравнений типа вольтерра с граничными особой и сильно-особыми линиями, когда корни характеристических уравнений вещественные и разные [Текст] / Л.Н.Раджабова, Ф.А.Ахмадов // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. – 2021. – № 1. – С. 78-88.

[138]. *Рогожин, В.С.* Теория Нётера для интегральных уравнений третьего рода [Текст] / В.С.Рогожин, С.Н.Расламбеков // Дифференциальные уравнения. – 1978. – Т. 14. – №9. – С. 1678-1686.

[139]. *Саидов, С.А.* Интегральные уравнения типа Вольтера с двумя граничными сингулярными точками [Текст] / С.А.Саидов // Дисс. кан. физ.-мат. наук. – Душанбе, 2019. – 105 с.

[140]. *Сафаров, Ж.Ш.* Оценки устойчивости решений некоторых обратных задач для интегро-дифференциальных уравнений [Текст] / Ж.Ш.Сафаров // Вестник Удмуртского университета. Сер. Математика. – 2014. – Вып. 3. – С. 75-82.

[141]. *Сидоров, Н.А.* Решение задачи Коши для одного класса интегро-дифференциальных уравнений с аналитическими нелинейностями [Текст] /

Н.А.Сидоров // Дифференциальные уравнения. – 1968. –Т. 4. – № 7. –С. 1309-1316.

[142]. *Сидоров, Н.А.* Об одном класса уравнений Вольтерра с вырождением в банаховых пространствах. [Текст] / Н.А.Сидоров // Сибирский математический журнал. – 1983. – Т.1. – № 2 – С. 202-203.

[143]. *Соболев, С.Л.* Об одном классе интегро-дифференциальных уравнений со многими независимыми переменными [Текст] / С.Л.Соболев // Доклады АН СССР. – 1937. – Т. 17. – С. 447-450.

[144]. *Трикоми, Ф.* Интегральные уравнения / Ф.Трикоми. – М.: Иностр. Лит, 1960. – 299 с.

[145]. *Фалалеев, М.В.* Обобщенные решения вырожденных интегро-дифференциальных уравнений в банаховых пространствах и их приложения [Текст] / М.В.Фалалеев, С.С.Орлова // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2012. – Т. 18. – № 4. – С. 286-297.

[146]. *Шамсудинов, Ф.М.* Об одной переопределеённой системе дифференциальных уравнений второго порядка с сингулярной точкой [Текст] / Ф.М.Шамсудинов // Вестн. Волгогр. гос. ун-та. Сер.1, Мат.Физ. – 2014. – №5(24). – С. 46-54.

[147]. *Шишкин, Г.А.* Решение линейных интегро-дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами [Текст] / Г.А.Шишкин // Дисс. канд. физ.-мат. наук. – Иркутск, 1972. – 134 с.

[148]. *Юлдашев, Т.К.* Об одной обратной задаче для линейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма в частных производных четвертого порядка [Текст] / Т.К.Юлдашев // Вестник ВГУ. Серия: Физика, Математика. – 2015. – №2. – С. 180-189.

[149]. *Юлдашев, Т.К.* Об одной нелокальной краевой задаче для нелинейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с вырождением ядра [Текст] / Т.К.Юлдашев // Дифференциальные уравнения. – 2018. – Т. 54. – № 12. – С. 1687-1694.

[150]. *Янушаускас, А.И.* Граничные задачи для эллиптических уравнений в частных производных и интегро-дифференциальные уравнения [Текст] / А.И.Янушаускас. – Иркутск: Изд-во Иркут. гос. ун-та, 1997. – 168 с.

2. Феҳристи интишороти илмии довталаби дараҷаи илмӣ

а) Мақолаҳое, ки дар нашрияҳои тақризшавандаи Комиссияи олии аттестатсионии назди Президенти Ҷумҳурии Тоҷикистон ба табъ расидаанд:

[1-М] ***Djumakhon, I.*** Volterra-Type Integro-Differential Equations with Two-Point Singular Differential Operator [Text] / S.K. Zarifzoda, T.K. Yuldashev, I. Djumakhon // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2021. – Vol. 42. – No. 15. – P. 3784-3792.

[2-М] ***Искандари, Дж.*** Исследование одного класса интегро-дифференциального уравнения с правой сверх-сингулярной точкой / С.К. Зарифзода, Дж. Искандари // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. – 2021. – № 1. – С. 5-18.

[3-М] ***Искандари, Дж.*** Исследование одного класса немодельного интегро-дифференциального уравнения первого порядка с правой сверхсингулярной точкой [Текст] / С.К. Зарифзода, Дж. Искандари // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. – 2021. – № 3. – С. 62-76.

[4-М] ***Искандари, Дж.*** Таҳқиқи як синфи муодилаҳои интегро-дифференсиалии моделии тартиби дуюм бо нуқтаи рости барзиёд сингулярӣ [Текст] / Дж. Искандари // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. – 2021. – № 4. – С. 5-16.

[5-М] ***Искандари, Дж.*** Исследование одного класса модельного интегро-дифференциального уравнения второго порядка в случае комплексно-сопряженны корней характеристического уравнения [Текст] / С.К. Зарифзода, Дж. Искандари // Вестник педагогического университета. Естественные науки. – 2022. – № 1(13). – С. 73-81.

[6-M] ***Искандари, Дж.*** Исследование одного класса интегро-дифференциальных уравнений *n*-го порядка с особым ядром [Текст] / Дж. Искандари // Вестник филиала Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова в городе Душанбе. Серия естественных наук. – 2023. – Том1. – № 2(31). – С. 71-80.

б) Мақолаҳое, ки дар дигар нашрияҳо ба табъ расидаанд:

[7-M] ***Искандари, Дж.*** Исследования одного класса интегро-дифференциальных уравнений с правой сверх-сингулярной точкой в ядре [Текст] / С.К. Зарифзода, Дж. Искандари // Материалы международной конференции «Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений» посвящённая 70-летию со дня рождения академика АН Республики Таджикистан, доктора физико-математических наук, профессора Бойматова Камолиддина Хамроевича. – Душанбе, 2020. – С. 126-128.

[8-M] ***Искандари, Дж.*** Исследование одного класса немодельных интегро-дифференциальных уравнений первого порядка с правой сверх-сингулярной точкой в ядре [Текст] / С.К. Зарифзода, Дж. Искандари // Материалы международной конференции «Актуальные проблемы современной математики» посвященной 80-летию со дня рождения доктора физико-математических наук, профессора Темура Собирова. – Душанбе, 2021. – С. 109-111.

[9-M] ***Искандари, Дж.*** Исследование одного класса немодельных интегро-дифференциальных уравнения первого порядка с правой сверх-сингулярной точкой в ядре [Текст] / С.К. Зарифзода, Дж. Искандари // Материалы международной научно-практической конференции «О применении дифференциальных уравнений при решении прикладных задач». – Душанбе, 2021. – С. 59-61.

[10-M] ***Искандари, Дж.*** Исследование сопряжённого одномерного интегро-дифференциального уравнения первого порядка с логарифмической особенностью в ядре [Текст] / С.К. Зарифзода, Дж. Искандари // Материалы международной научно-практической конференции «Современные проблемы математики и её приложения» (20-21 октября 2022 г.). – Душанбе, 2022. – С. 39-42.

[11-M] ***Искандари, Дж.*** Исследование одного класса модельных интегро-дифференциальных уравнений n-го порядка в случае вещественно-разны корнй характеристического уравнения [Текст] / С.К. Зарифзода, Дж. Искандари // Материалы международной научно-практической конференции «Комплексный анализ и его приложения». – Бохтар, 2022. – С. 60-62.

[12-M] ***Искандари, Дж.*** Исследование одного класса интегро-дифференциальных уравнений n-го порядка с сингулярным ядром [Текст] / Дж. Искандари // Материалы республиканской научно-практической конференции «Актуальные проблемы развития естественных, точных и математических наук в современных условиях» (29 ноября 2022 г.). – Душанбе, 2022. – С. 287-288.

[13-M] ***Искандари, Дж.*** Исследование одного класса сверх сингулярных интегро-дифференциальных уравнений 3-го порядка [Текст] / Дж. Искандари, С.К. Зарифзода // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математики и её приложения». – Душанбе, 2023. – С. 65-69.