Министерство образования и науки Республики Таджикистан
ГОУ «Худжандский государственный университет
имени академика Б. Гафурова»

УДК 517.95

На правах рукописи

Джумаев Бустонбек Махмадназарович

РАЗРЕШИМОСТЬ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ПОРЯДКА С ВЕЩЕСТВЕННЫМИ И КОМПЛЕКСНЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Д И С С Е Р Т А Ц И Я

на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор **Байзаев С.**

Худжанд – 2022

ОГЛАВЛЕНИЕ

Список используемых обозначений 3

ВВЕДЕНИЕ 4

ГЛАВА 1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ ПО ИССЛЕДУЕМОЙ ТЕМЕ 11

§1.1. Переопределенные системы с вещественными переменными 11

§1.2. Переопределенные системы с комплексными переменными 20

ГЛАВА 2. ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С ВЕЩЕСТВЕННЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ 24

§2.1. Система трёх уравнений с одной искомой функцией трёх переменных 24

§2.2. Решения, растущие не быстрее степенной функции 34

§2.3. Решения степенного роста в неограниченной цилиндрической области ... 44

§2.4. Переопределенные системы двух уравнений с двумя переменными в угле 51

ГЛАВА 3. ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С КОМПЛЕКСНЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ 61

§3.1. Вспомогательные материалы 61

§3.2. О многообразии решений одной многомерной переопределенной системы 64

§3.3. Об общем решении переопределенной системы двух комплексных уравнений с частными производными 79

§3.4. Нахождение решений обобщенной системы Коши-Римана с несколькими переменными 89

§3.5. О решениях одного класса двух уравнений с частными производными второго порядка 97

ГЛАВА 4. ОБСУЖДЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ 127

ВЫВОДЫ 134

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ 136

Список используемых обозначений

R^n – n-мерное вещественное пространство;

C^n – n-мерное комплексное пространство;

$C(R^2)$ – пространство непрерывных и ограниченных на всей плоскости R^2 функций;

C_1 – класс функций, имеющих непрерывные частные производные первого порядка;

$C_{2\pi}$ – пространство непрерывных и двояко-периодических с основными периодами $2\pi,\ 2\pi i$ функций;

E_n – единичная матрица n-го порядка;

Z^2 – целочисленная решётка в C^1;

$grad\ U = \left(U_{x_1}, U_{x_2}, U_{x_3}\right)$ – градиент функции $U(x_1, x_2, x_3)$;

$2w_{\bar{z}_j} = w_{x_j} + iw_{y_j}$ – производное относительно $\bar{z}$;

P_N – класс непрерывных в R^3 функций $u(x_1, x_2, x_3)$, удовлетворяющих условию

$$|u(x_1, x_2, x_3)| \leq K(1 + |x_1| + |x_2| + |x_3|)^N,$$

где K – положительная постоянная, зависящая от u, N – неотрицательное целое число;

п.с. – переопределенная система;

у.ч.п. – уравнения с частными производными;

у.п.р. – условия полной разрешимости.

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. В девятнадцатом столетии, как математические модели практических задач теории упругости, теории электромагнитного поля и гидродинамики, появились п.с. у.ч.п. Такие системы играют важную роль и в современной теории уравнений математической физики, они нашли применения в дифференциальной геометрии, теории групп Ли, в различных задачах магнитогидродинамики, теоретической физики, статистической гидродинамики и стохастических систем (см., например, [18], [25]).

Теория п.с. у.ч.п. в основном была построена и систематизирована в научных трудах Л. Хёрмандера, Л.Г. Михайлова, И.В. Гайшуна, В.П. Паламодова и др. (см., например, [18], [19], [44], [51], [52], [85], [89] – [91], [115]).

В развитие теории п.с. у.ч.п. внесли свою лепту и большой коллектив математиков Таджикистана – Л.Г. Михайлов, Н. Раджабов, Э. Мухамадиев, Э. Рузметов, С. Байзаев, Д. Сафаров, Р. Пиров и др. (см., например, [12], [36] – [45], [47], [49], [55] – [59], [64] – [70], [79], [81], [82], [96] – [108]). В основном изучались следующие вопросы: нахождение у.п.р. систем, построения многообразия решений из определенного класса, исследование начальных и граничных задач.

Исследование вопросов разрешимости п.с. у.ч.п. в пространствах функций, ограниченных во всём трёхмерном пространстве R^3 и цилиндрических областях, а также вопросов разрешимости п.с. у.ч.п. с комплексными переменными во всей комплексной плоскости или комплексного пространства являются важными и актуальными.

Степень научной разработанности изучаемой проблемы. В работах Л.Г. Михайлова, Н.А. Холова, С. Байзаева и М.А. Рахимовой, N. Taghizadeh и A. Neirameh, М.Л. Зайцева и В.Б. Аккермана, М.И. Ализаде (см. [1] – [7], [37] – [45], [69] – [74], [92] – [94], [116]) для ряда классов п.с. у.ч.п. с вещественными и комплексными переменными исследованы вопросы разрешимости и нахождения решений в различных функциональных пространствах, в частности в пространствах

периодических, почти-периодических и ограниченных функций (подробный аналитический обзор приведён в главе 1).

Связь работы с научными программами (проектами), темами. Диссертационная работа выполнена в рамках реализации перспективных планов научно-исследовательских работ кафедры математического анализа имени профессора А. Мухсинова ГОУ «Худжандский государственный университет имени академика Б. Гафурова» на 2016 – 2020 гг. по теме «Исследование представления решений некоторых дифференциальных, интегральных и операторных уравнений с особенностями, их свойств, разрешимость краевых задач» и на 2021 – 2025 гг. по теме «Исследование классов обыкновенных дифференциальных уравнений с особенностями, разрешимость переопределенных систем дифференциальных уравнений в различных функциональных пространствах, применение групп и алгебры Ли в дифференциальных уравнениях».

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ИССЛЕДОВАНИЯ

Цель исследования. Изучение проблем разрешимости п.с. линейных у.ч.п. функций, заданных в R^3 и её неограниченных областях, а также вопросов разрешимости п.с. линейных у.ч.п. с одной или несколькими комплексными переменными.

Задачи исследования.

- Нахождение решений из пространства P_N п.с. линейных у.ч.п.

$$grad\ U + A(x_1, x_2, x_3)U = F(x_1, x_2, x_3), \tag{0.1}$$

здесь $U = U(x_1, x_2, x_3) -$ искомая функция, $grad\ U = \left(U_{x_1}, U_{x_2}, U_{x_3}\right)$, $A = (A_1,\ A_2,\ A_3)$ – вектор коэффициентов, $F = (f_1, f_2, f_3) -$ вектор правых частей, $P_N -$ пространство непрерывных в R^3 функций $u(x_1, x_2, x_3)$, удовлетворяющих условию

$$|u(x_1, x_2, x_3)| \leq K(1 + |x_1| + |x_2| + |x_3|)^N, \tag{0.2}$$

где K – положительная постоянная, зависящая от u, N – неотрицательное целое число.

- Нахождение решений системы (0.1) в неограниченном цилиндре $\Omega = \{(x_1, x_2, x_3);\ (x_1, x_2) \in G,\ \ x_3 > 0\}, G -$ ограниченная область на плоскости R^2, принадлежащих классу $P_N(\Omega)$, т.е. удовлетворяющих условию роста:

$$|u(x_1, x_2, x_3)| \leq M(1 + x_3)^N. \tag{0.3}$$

- Нахождение решений п.с. двух линейных у.ч.п. первого порядка в угле $D = \{(x_1, x_2\ ): 0 < x_1 < +\infty,\ \lambda_1 x_1 < x_2 <\ \lambda_2 x_2\}$, $\lambda_1, \lambda_2 -$ постоянные, имеющие рост на бесконечности не быстрее полинома.

- Нахождение решений п.с.

$$\begin{cases} w_{\bar{z}} = A\overline{w}, \\ w_z = B\overline{w}, \end{cases} \tag{0.4}$$

где $w \in C^n,\ A, B -$ комплексные матрицы порядка n, в случае, когда у.п.р. не выполнено.

- Построение общего решения п.с. вида

$$\begin{cases} w_{\bar{z}_1} + a(z_1, z_2)w = f(z_1, z_2), \\ w_{\bar{z}_2} + b(z_1, z_2)w = g(z_1, z_2) \end{cases} \tag{0.5}$$

с двумя комплексными переменными.

- Построение общего решения п.с.

$$w_{\bar{z}_j} + a_j(z)w = 0, \quad j = \overline{1, n} \tag{0.6}$$

с n независимыми переменными $z = (z_1, \dots, z_n)$, где $a_j \in C_{2\pi}$.

- Нахождение общего решения п.с. у.ч.п. второго порядка вида

$$\begin{cases} w_{\bar{z}\bar{z}} + aw + b\overline{w} = 0, \\ \overline{w}_{\bar{z}\bar{z}} + cw + d\overline{w} = 0, \end{cases} \tag{0.7}$$

с комплексными постоянными коэффициентами.

Объект исследования. Объектом исследования являются п.с. у.ч.п. первого порядка с двумя и тремя независимыми переменными и п.с. у.ч.п. первого и второго порядков с комплексными независимыми переменными.

Предмет исследования. Предметом исследования являются установление теорем о разрешимости и получение формул для решений, рассматриваемых п.с. у.ч.п. в пространствах ограниченных, периодических или степенного роста функций.

Научная новизна исследования. В диссертации получены следующие результаты, которые являются новыми:

- для п.с. вида (0.1) получены условия однозначной разрешимости в пространствах P_N и $P_N(\Omega)$, и построены формулы для решений;

- для п.с. двух линейных у.ч.п. первого порядка в угле D, найдены условия однозначной разрешимости в пространстве функций, имеющие рост на бесконечности не быстрее полинома;

- найдено общее решение п.с. вида (0.4) в случае, когда у.п.р. не выполнено;

- построено общее решение п.с. вида (0.5) с двоякопериодическими коэффициентами и правой частью;

- найдены решения, имеющие рост на бесконечности не быстрее полинома, в частности ограниченные и периодические решения однородной системы, соответствующей (0.5);

- построено общее решение п.с. (0.6) с двоякопериодическими коэффициентами;

- найдено общее решение, в частности решения из пространства типа P_N, п.с. вида (0.7) и получена формула для размерности пространства P_N.

Теоретическая и научно-практическая значимость работы. Работа имеет теоретический характер. Методы, развитые в диссертации и полученные результаты можно применять при исследовании других классов п.с. у.ч.п.

Положения, выносимые на защиту:

- теоремы об однозначной разрешимости в пространствах P_N и $P_N(\Omega)$ п.с. вида (0.1);

- утверждение об однозначной разрешимости в пространстве функций, имеющие рост на бесконечности не быстрее полинома, п.с. двух линейных у.ч.п. первого порядка в угле D;

- теорема и формулы для общего решения п.с. вида (0.4) в случае, когда у.п.р. не выполнено;

- теорема об общем решении п.с. вида (0.5) с двоякопериодическими коэффициентами и правой частью;

- утверждения о решениях, имеющие рост на бесконечности не быстрее полинома, в частности ограниченных и периодических решений однородной системы, соответствующей (0.5);

- теорема об общем решении п.с. (0.6) с двоякопериодическими коэффициентами;

- утверждения об общем решении, в частности о решениях из пространства типа P_N, п.с. вида (0.7) и формула для размерности пространства P_N.

Степень достоверности результатов. Все теоремы и утверждения диссертации обеспечены строгими математическими доказательствами, ряд положений подтверждаются исследованиями других авторов.

Соответствие диссертации паспорту научной специальности (формуле и области исследования). Диссертационная работа выполнена по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление. Она относится к составной части этой специальности – уравнения с частными производными и полностью соответствует формуле специальности и пункту «Качественная теория дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений» области исследования.

Личный вклад соискателя ученой степени. Постановка задачи принадлежит научному руководителю. Все результаты, приведённые в разделе «Научная новизна» получены лично соискателем.

Апробация и реализация результатов диссертации. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах:

- Международная открытая конференция «Современные проблемы анализа динамических систем. Теория и практика» (21-23 мая 2019 г.), г. Воронеж;
- Международная научная конференция «Уфимская осенняя математическая школа – 2020» (11-14 ноября 2020 г.), г. Уфа;
- Международная открытая конференция «Современные проблемы в науке и технике. Теория и практика» (21-23 декабря 2020 г.), г. Воронеж;
- Международная конференция «Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений», посвященная 70-летию академика К.Х. Бойматова (25-26 декабря 2020 г.), г. Душанбе;
- Международная конференция «Актуальные проблемы современной математики», посвященная 80-летию профессора Т. Собирова (25-26 июня 2021 г.), г. Душанбе;
- Международная научная конференция «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики» (5-9 декабря 2021 г.), г. Нальчик – Эльбрус;
- Международная конференция «Современные проблемы математического анализа и теории функций», посвященная 70-летию академика М.Ш. Шабозова (24-25 июня 2022 г.), г. Душанбе.
- Научный семинар при Таджикском государственном университете права, бизнеса и политики под руководством д.ф.-м.н., профессора С. Байзаева (2018 – 2022 гг.), г. Худжанд.

Ряд результатов диссертации использованы при чтении специальных курсов для студентов и магистрантов.

Публикации по теме диссертации. Основные результаты диссертации опубликованы в 16 статьях и материалах научных конференций [1-А] – [16-А]. Работы [1-А] – [5-А] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых

научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК при Президенте Республики Таджикистан. Из совместных работ с научным руководителем С. Байзаевым на защиту выносятся лишь результаты, полученные лично автором диссертации.

Структура диссертации и объем. Диссертационная работа состоит из введения, четырёх глав, заключения, а также списка литературы, в котором включены 133 наименований. В диссертации используется двойная нумерация. Первый номер указывает на номер главы, второй номер параграфа, определения, леммы или теоремы. Аналогичным образом ведется нумерация формул. Общий объём диссертации – 152 страниц.

ГЛАВА 1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ ПО ИССЛЕДУЕМОЙ ТЕМЕ

Эта глава посвящена обзору и анализу литературы по исследуемой теме. К настоящему времени имеется огромное количество научных работ как по теории п.с. линейных, квазилинейных и нелинейных у.ч.п., так и по их применению в различных задачах.

В основном мы приведем анализ работ, посвященных п.с. линейных у.ч.п. с независимыми вещественными переменными первого и второго порядков, а также переопределенным линейным комплексным у.ч.п. с комплексными независимыми переменными первого порядка.

§1.1. Переопределенные системы с вещественными переменными

1.1.1. Систему у.ч.п. называют переопределенной, если в этой системе количество уравнений больше чем количество неизвестных функций.

В девятнадцатом столетии, как математические модели практических задач теории упругости, теории электромагнитного поля и гидродинамики, появились п.с. у.ч.п. К таким системам относятся, так называемые, уравнения в полных дифференциалах или более общие системы – уравнения Пфаффа (см., например, [18], [19], [113]). Такие системы играют важную роль и в современной теории уравнений математической физики, они нашли применения в дифференциальной геометрии, математическом анализе, теории групп Ли, в ряде задач из магнитогидродинамики, теоретической физики и др. (см., например, [8], [15], [18], [25], [33], [34], [63], [77], [86], [88], [111]).

Одним из первых научных трудов, где изложены сведения о п.с. у.ч.п. первого порядка с одной искомой функцией является монография Э. Гурса [109].

Теория п.с. у.ч.п. в основном была построена и систематизирована в научных трудах Л. Хёрмандера, Л.Г. Михайлова, И.В. Гайшуна, В.П. Паламодова и др. (см.,

например, [18] – [21], [44] [51], [52] [89] – [91]). Современная теория так называемых вполне интегрируемых уравнений изложена в монографиях И.В. Гайшуна [18], [19].

В развитие теории п.с. у.ч.п. внесли свою лепту и большой коллектив математиков Таджикистана – Л.Г. Михайлов, Н. Раджабов, Э. Мухамадиев, Э. Рузметов, С. Байзаев, Д. Сафаров, Р. Пиров и др. (см., например, [12], [36] – [45], [47] [49], [55] – [58], [63], [64], [68] – [70], [78], [80] – [82], [101] – [104]). В основном изучались следующие вопросы: нахождение у.п.р. систем, построения многообразия решений из определенного класса, исследование начальных и граничных задач.

В работах Л.Г. Михайлова, Н.А. Холова, С. Байзаева и М.А. Рахимовой, N. Taghizadeh и A. Neirameh, М.Л. Зайцева и В.Б. Аккермана (см. [1] – [6], [37] – [45], [69] – [74], [93] – [95], [116]) для ряда классов п.с. у.ч.п. с вещественными и комплексными переменными исследованы вопросы разрешимости и нахождения решений в различных функциональных пространствах, в частности в пространствах периодических, почти-периодических и ограниченных функций.

Наибольший интерес представляют так называемые вполне интегрируемые системы, т.е. п.с. для которых начальная задача имеет единственное решение.

Теперь перейдем к более детальному анализу работ по п.с. у.ч.п., близкие или соприкасающиеся теме диссертации.

1.1.2. Переопределенные системы первого порядка. В монографии Л.Г. Михайлова [44] подытожены результаты исследований самого автора и его учеников (см. [37] – [43], [101] – [103]). В первую очередь рассматривалась задача восстановления функции многих переменных, если известен её полный дифференциал. С точки зрения физики эта задача о восстановлении поля по его градиенту, а на языке дифференциальных уравнений эта задача нахождения решений системы вида

$$grad\, U(x) = F(x), \tag{1.1}$$

здесь

$U = U(x)$ – искомая функция переменных $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$,

$grad\ U = \left(U_{x_1}, U_{x_2}, \dots, U_{x_n}\right)$,

$F = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ – известная вектор-функция.

Систему (1.1) Л.Г. Михайлов называет *п.д.-системой.* Ясно, что для разрешимости системы (1.1) должны выполняться условия совместности.

Необходимые и достаточные условия совместности для двух типов п.с. были давно известны. Это линейные системы (см., например, [84]):

$$L^k u \equiv \sum_{j=1}^{n} a_{kj}(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_j} = 0, \quad k = 1, \dots, n$$

и квазилинейные системы в полных дифференциалах [84]:

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_j} = h^{kj}(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_n).$$

Например, для системы (1.1) необходимые и достаточные условия совместности выглядят так (см. [44], стр. 39):

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_k} \quad \forall k \neq j, \tag{1.2}$$

а для линейной п.д.-системы

$$grad\ U(x) = a(x)U(x) + F(x), \tag{1.3}$$

где коэффициент $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ заданная вектор-функция, такими условиями являются следующие равенства (см. [44], стр. 44):

$$\frac{\partial a_k}{\partial x_j} = \frac{\partial a_j}{\partial x_k}, \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_j} - \frac{\partial f_j}{\partial x_k} + a_k f_j - a_j f_k = 0, \quad k \neq j. \tag{1.5}$$

Отметим, что для систем вида (1.1), а также более общих п.с. справедлива теорема Фробениуса о полной интегрируемости (см. [88], стр. 152).

Н.А. Холов для системы вида (1.1) в случае непрерывных коэффициентов и правых частей получил условия совместности в форме интегральных соотношений и установил теоремы разрешимости в пространствах периодических и ограниченных функций (см. [92], [93]). Отметим, что условия совместности трудно проверяемы и нет явных формул для периодических и ограниченных решений.

В настоящей диссертации рассматриваются системы вида (1.3) при $n = 2$ и $n = 3$ в неограниченных областях. Исследуются задачи нахождения решений, имеющие рост на бесконечности не быстрее полинома, в частности ограниченные решения, а также изучаются соотношения (1.4) как одно уравнение в частных производных с двумя неизвестными функциями (при $n = 2$) или как система трёх у.ч.п. с тремя неизвестными функциями (при $n = 3$), а соотношения (1.5) как обыкновенные дифференциальные уравнения при фиксировании некоторых переменных и находятся решения этих уравнений. Такие задачи при $n = 3$ ранее не были исследованы, а при $n = 2$ частично рассмотрены в работах С. Байзаева и М.А. Рахимовой (см., например, [66] – [68], [75]).

В работах [41], [44] исследованы квазилинейные п.с. у.ч.п. вида

$$grad\, U = a(x, U). \tag{1.6}$$

Для этой системы условиями совместности являются следующие равенства:

$$\frac{\partial a_k}{\partial x_j} + a_j \frac{\partial a_k}{\partial u} = \frac{\partial a_j}{\partial x_k} + a_k \frac{\partial a_j}{\partial u}, \quad k \neq j.$$

В работе [101] для случая $n = 2$ найдены классы п.д.-систем вида (1.6), интегрируемые в квадратурах.

В работах Р. Пирова изучались ряд классов п.с. у.ч.п. первого и второго порядка. Для линейных систем [55], которых в матричной форме можно записать в виде

$$A[\operatorname{grad} u,\ \operatorname{grad} u]^T + B[u,\ v]^T = h, \tag{1.7}$$

где $A -$ матрица-функция размера 3×4 а $B -$ размера 3×2, $u = u(x, y)$, $v = v(x, y) -$ искомые функции, $h -$ вектор-функция правых частей, в зависимости от ранга матрицы A, в различных возможных ситуациях, в терминах свойств коэффициентов выписаны условия совместности и найдены многообразия решений. Эти многообразия могут зависит от одной, двух, трёх произвольных постоянных или одной, двух произвольных функций. Также исследованы квазилинейные п.с. у.ч.п., разрешенных относительно производных. Перекрестным дифференцированием исследуемая система приводится к системе четырёх дифференциальных уравнений, дополненной одним функциональным соотношением. Далее, выделются два случая: в первом случае функциональное соотношение выполняется тождественно, а во-втором – только на некоторой поверхности. В каждом случае, учитывая специфику системы уравнений, найдены условия совместности и определено многообразие решений. Многообразие решений определяется в зависимости от того, какое начальное условие ставится для однозначной разрешимости системы уравнений.

Исследованы квазилинейные п.с., состоящие из трёх у.ч.п. [54], два из которых разрешены относительно производных, а левая часть третьего уравнения является линейной комбинацией остальных двух производных. Всего имеются три пары таких систем и каждая пара различается как по схеме исследования, так и по

результатам. Для каждой пары найдены условия совместности и доказаны теоремы об однозначной разрешимости начальной задачи. Аналогичные результаты получены также для квазилинейных систем вида

$$a_i(x,y,u,v)u_y + b_i(x,y,u,v)v_x + c_i(x,y,u,v)v_y =$$
$$= f_i(x,y,u,v,u_x), \quad i = 1,2,3$$

с двумя неизвестными функциями.

Цикл работ [54], [56], [60] посвящены некоторым классам квазилинейных и нелинейных п.с. четырех у.ч.п. с двумя и тремя неизвестными функциями, в числе которых системы из четырех уравнений, связанных с прикладными задачами гидродинамики, теории упругости и теории поля. Установлены теоремы о совместности, однозначной разрешимости начальной задачи и многообразии решений этих систем. Нужно отметить, что предложен новый способ построения многообразия решений трёхмерных модельных систем уравнений теории поля

$$\operatorname{rot}\vec{U} = \vec{F}, \quad \operatorname{div}\vec{U} = \mathrm{g}.$$

Системы вида (1.1) при $n = 2$ исследованы в работах С. Байзаева и М.А. Рахимовой (см., например, [67] - [69]) в различных функциональных пространствах. В основном исследованы задачи о разрешимости п.с. двух линейных у.ч.п. первого порядка

$$\begin{cases} u_x = a(x,y)u + f(x,y), \\ u_y = b(x,y)u + \mathrm{g}(x,y) \end{cases} \tag{1.8}$$

в функциональном пространстве $C(G)$. Отметим, что $C(G)$ состоит из функций, заданных в области G и ограниченных в ней. Рассмотрены случаи, когда $G = C^1$ или когда G является полуплоскостью или первой четвертью. Коэффициенты $a(x,y)$,

$b(x,y)$, а также функции $f(x,y)$, $\mathrm{g}(x,y)$ в системе (1.8) могут быть ограниченными, периодическими, расти на бесконечности не быстрее полинома или могут иметь сингулярности.

Относительно системы (1.8) при выполнении условий совместности вида (1.4), (1.5) получены следующие результаты:

- установлены критерии, когда система имеет в пространствах $C(R^2)$ и периодических по x и y функций единственное решение; построены формулы для решений; эти критерии выражаются в терминах коэффициентов $a,\ b$;

- показано, что из условий совместности можно однозначно выразить функцию f через $\mathrm{g},\ a,\ b$ либо функцию g – через $f,\ a,\ b$;

- найдены условия, которые будут достаточными для того чтобы система (1.8) имела единственное решение, определенное в полуплоскости и имеющее рост при $x^2+y^2\to\infty$ не выше чем $(x^2+y^2)^{N/2}$.

Аналогичные результаты получены и для линейных п.с. у.ч.п. в первой четверти, коэффициенты которых являются сингулярными, а также квазилинейных п.с. у.ч.п. первого порядка с двумя независимыми переменными на полуплоскости [70].

В работах М.Л. Зайцева и В.Б. Аккермана [1] - [6] исследована проблема понижения размерности п.с. у.ч.п. Создан алгоритм, который даёт возможность редуцировать п.с. у.ч.п. С помощью этого алгоритма можно уравнения гидродинамики по объему привести к п.с. у.ч.п. на поверхности. Конечно, не всякую п.с. у.ч.п. можно свести к системе меньшей размерности. Для этого нужно требовать выполнения некоторых условий. Названными авторами найдены некоторые достаточные условия, при которых сокращается размерность системы и находятся явные представления решений таких систем. Указан приём, позволяющий найти решения исходной системы дифференциальных уравнений гидродинамики во всем объеме при помощи решений редуцированного уравнения на поверхности. В качестве тестов этот приём применен к п.с. уравнений Эйлера, Навье – Стокса и уравнений аналитической механики (см. [4]).

1.1.3. Переопределенные системы второго порядка. В работах Л.Г. Михайлова, Н. Раджабова, их учеников и последователей (см., например, [40], [44], [65]) исследованы п.с. у.ч.п. второго порядка различного вида.

В статьях [39], [40] рассмотрены системы вида

$$LU = F(x, y, U, grad\ U), \tag{1.9}$$

где

$$LU = (U_{xx}, U_{xy}, U_{yy})^T,\ F = (f_1, f_2, f_3)^T.$$

Переходом к п.с. у.ч.п. первого порядка большей размерности, найдены у.п.р. и установлены теоремы об однозначной разрешимости начальной задачи. Рассмотрены также ситуации двух уравнений, а именно когда в (1.9) в выражение LU входят только две какие-нибудь частные производные второго порядка, а F является двухмерной вектор-функцией.

В ряде работ Н. Раджабова и его учеников (см., например, [46], [65], [105] - [108]) исследованы п.с. у.ч.п. второго порядка с коэффициентами, имеющие сингулярности в точках, на линиях или на поверхностях. Найдены условия на порядок сингулярности, на коэффициенты и правые части уравнений, при выполнении которых общее решение системы пишется явно, получены асимптотика решений в окрестности сингулярной точки.

Р. Пировым исследованы ряд классов п.с. у.ч.п. второго порядка с одной, двумя либо с тремя искомыми функциями на плоскости и в трехмерном пространстве (см., например, [58] - [60]) и получены следующие результаты:

- получены у.п.р., для исследуемых систем уравнений;

- построено общее решение конкретных задач из теории поля и механики деформируемого твёрдого тела.

Большое число исследований проведено Ф.М. Шамсудиновым (см., например, [96] - [100]) по п.с. у.ч.п. второго порядка, коэффициенты которых имеют сингулярности. Исследованы п.с., состоящие из следующих комбинаций у.ч.п.:

1) по одному гиперболическому у.ч.п. первого и второго порядка;

2) два гиперболическое у.ч.п. первого и одно второго порядка;

3) по одному гиперболическому и параболическому у.ч.п. второго порядка;

4) два гиперболических у.ч.п. второго порядка;

5) одно гиперболическое и два параболическое у.ч.п. второго порядка.

Для перечисленных классов п.с. при соответствующих условиях на порядок сингулярности, на коэффициенты и правые части уравнений получены формулы представления решений, выявлена асимптотика решений в окрестности сингулярной точки, а также найдены решения некоторых начально-краевых задач.

§1.2. Переопределенные системы с комплексными переменными

П.с. у.ч.п. с одной или несколькими комплексными переменными исследованы в научных трудах многих учёных. Классическими стали монографии крупных специалистов в области у.ч.п. Л. Хёрмандера [90], [91], Л.Г. Михайлова [44] и В.П. Паламодова [51], в которых изложены достижения, как своих, так и других авторов по п.с. у.ч.п. с комплексными переменными.

Классической п.с. у.ч.п. с комплексными переменными являются уравнения Коши-Римана вида

$$w_{\bar{z}_j} = 0, \quad j = \overline{1,n},$$

решениями которых являются аналитические функции переменной $z = (z_1, \dots, z_n)$ и только они.

Более общей системой является так называемая обобщенная система Коши-Римана

$$w_{\bar{z}_j} + a_j w + b_j \overline{w} = f_j(z), \quad j = \overline{1,n}, \tag{1.10}$$

где функции a_j, b_j и f_j определены в области $G \subset C^n$ или возможно во всем пространстве C^n. Случай $a_j = b_j = 0$ впервые с помощью L^2-метода изучали С. Морри и Дж. Кон (см. монографию Л. Хёрмандера [90]). Когда $b_j = 0$ и функции a_j, f_j заданы в поликруге система (1.10) исследована в работах Л.Г. Михайлова и других авторов [37], [42], [112], [114], в которых получены необходимые и достаточные у.п.р. в виде равенств

$$\frac{\partial a_j}{\partial \bar{z}_k} = \frac{\partial a_k}{\partial \bar{z}_j},$$

$$\frac{\partial f_j}{\partial \bar{z}_k} - \frac{\partial f_k}{\partial \bar{z}_j} + a_k f_j - a_j f_k = 0, \quad j \neq k$$

и представление общего решения через интегральные операторы Векуа и Коши.

Д. Сафаровым исследована система (1.10) с двоякопериодическими коэффициентами и получены представления решений (см. [80]).

В работе Г.А. Магомедова и В.П. Паломодова [35], рассматривается частный случай системы (1.10) при $b_j = 0,\ j = 1, \dots, n$ и с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами и как пишет Л.Г. Михайлов в своей монографии: «Теория системы трактуется как теория некоторой связности в линейных расслоениях на римановых поверхностях. Подробнейшим образом выписываются дифференциальные и интегродифференциальные условия, необходимые для совместности системы» [44], стр. 100.

В работе [43] Л.Г. Михайлов исследовал п.с. Бельтрами

$$\frac{\partial w}{\partial \overline{z_k}} - q_k(z_1, \dots, z_n)\frac{\partial w}{\partial z_k} = 0,\ \ k = 1, \dots, n,$$

которая после подстановки $z_k = x_k + iy_k$, перегруппировки слагаемых и отделения вещественных и мнимых частей приводится к линейной комплексной системе с $2n$ вещественными независимыми переменными. В случае бесконечно дифференциируемых коэффициентов такие системы исследовались Л. Ниренбергом (см. [50]).

В работах Р. Пирова [56] – [58] рассмотрены системы трёх комплексных уравнений вида

$$w_{1z}, w_{1\bar{z}},\ \ aw_{2z} + bw_{2\bar{z}} = f_k(z, w_1, w_2),\ \ k = 1, 2, 3.$$

Для таких систем найдены условия совместности и теоремы о разрешимости задачи Коши. Также исследованы некоторые классы п.с. четырёх у.с.п. с двумя неизвестными комплексными функциями от двух независимых комплексных переменных, общий вид которых следующий

$$L_k(w_1, w_2) = f_k(z, \zeta, w_1, w_2),\ \ k = 1, 2, 3, 4.$$

где $L_k(w_1, w_2) -$ линейные дифференциальные выражения, состоящие каждое только от одной частной производной. Для таких систем получены теоремы об однозначной разрешимости задачи Коши и установлено, что многообразия решений могут содержать две произвольные функции.

В работах С. Байзаева и М.А. Рахимовой (см., например, [11], [12], [75], [77]) исследованы многомерные п.с. следующих видов:

$$\begin{cases} w_{\bar{z}} = A\overline{w}, \\ w_z = B\overline{w}, \end{cases} \tag{1.11}$$

$$\begin{cases} w_{\bar{z}} = Aw, \\ w_z = Bw + C\overline{w}, \end{cases} \tag{1.12}$$

где $w \in C^n,\ A, B, C -$ комплексные матрицы порядка $n.$ Для систем (1.11), (1.12) в терминах коэффициентов найдено критерия у.п.р. и построены многообразия решений. В работах [12], [77] этих авторов для п.с. вида

$$\begin{cases} w_{z_1} = A\overline{w}, \\ w_{z_2} = B\overline{w}, \end{cases}$$

получены следующие результаты:

- найдены необходимые у.п.р и построены многообразия решений;

- в терминах коэффициентов найдены условия существования ненулевых умеренно растущих решений;

- указаны все случаи, когда многообразие всех умеренно растущих решений будет нулевым или бесконечномерным.

Д. Сафаровым в работе [82] исследована задача о решениях, имеющих полиномиальный рост для одного класса п.с. эллиптического типа и получена формула для размерности пространства таких решений.

В работах М.В. Коровиной [28] – [32] исследованы задача Коши для некоторых классов п.с. линейных и нелинейных у.ч.п. в пространстве голоморфных функций. Доказаны соответствующие теоремы формальной и реальной разрешимости, установлена конечность числа условий согласования задачи Коши для нелинейных п.с. у.ч.п.

Н.Б. Плещинским [61], [62] изучены переопределенные граничные задачи для эллиптических у.ч.п. и систем уравнений Максвелла в полубесконечной цилиндрической области. Даны применения полученных результатов в теории дифракции волн.

В работе Г.А. Рудых и Э.И. Семенова [78] исследовано многомерное уравнение нелинейной теплопроводности, путем представления этого уравнения в виде п.с. у.ч.п. и в ряде случаев построены точные неотрицательные решения исходного уравнения с конечной скоростью распространения возмущений.

В настоящей диссертации рассматривается случай, когда у.п.р. для системы вида (1.11) не выполнено, т.е. $A\bar{A} \neq B\bar{B}$. Для этого случая разработан приём, позволяющий привести нахождение общего решения этой п.с. к решению такого же вида системы, но меньшего размера.

Из проведенного анализа литературных источников видно, что научных работ по п.с. у.ч.п. во всей плоскости или во всем пространстве сравнительно мало.

Исследование вопросов разрешимости п.с. линейных у.ч.п. в пространствах функций, ограниченных во всём трёхмерном пространстве R^3 и цилиндрических областях, а также вопросов разрешимости п.с. линейных у.ч.п. с комплексными переменными во всей комплексной плоскости или комплексного пространства являются важными и актуальными.

В настоящей диссертации указанные вопросы исследуются для большого класса п.с. линейных у.ч.п. первого и второго порядков с вещественными и комплексными независимыми переменными.

ГЛАВА 2. ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С ВЕЩЕСТВЕННЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

В этой главе рассматриваются п.с. линейных у.ч.п. с двумя и тремя независимыми вещественными переменными в неограниченных плоских и пространственных областях. Исследованы вопросы существования решений, рассматриваемых п.с. у.ч.п. в пространствах ограниченных, периодических или степенного роста функций.

§2.1. Система трёх уравнений с одной искомой функцией трёх переменных

2.1.1. Общее решение системы. Рассмотрим п.с. трёх линейных у.ч.п. вида

$$grad\ U + A(x_1, x_2, x_3)U = F(x_1, x_2, x_3), \tag{2.1}$$

здесь $U = U(x_1, x_2, x_3) -$ искомая функция, $grad\ U = \left(U_{x_1}, U_{x_2}, U_{x_3}\right)$, $A = (A_1,\ A_2,\ A_3)$ – вектор коэффициентов, $F = (f_1, f_2, f_3) -$ вектор правых частей, которые заданы в области $\Omega = \{(x_1, x_2, x_3, u): (x_1, x_2, x_3) \in G, u \in R\}$, $G -$ область в трёхмерном пространстве R^3, $R -$ числовая прямая.

Системы вида (2.1) и их аналоги встречаются в задачах дифференциальной геометрии, теории упругости, магнитогидродинамики и др. (см., например, [19]). В работах [66], [67] изучены двумерные аналоги системы (2.1) в пространстве $C(R^2)$; для них получены необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости в пространстве $C(R^2)$ и формулы для решений.

В этом параграфе для системы (2.1) будем изучать вопросы полной интегрируемости и существования решений, определённых во всем пространстве R^3, а также, в случае постоянных коэффициентов, решений имеющих рост не быстрее полинома.

Говорят, что система (2.1) вполне интегрируемая, (см., например [44]), если для всех $(x_1^o, x_2^o, x_3^o, u^o) \in \Omega$ задача Коши $U(x_1^o, x_2^o, x_3^o) = u^o$ разрешима.

Всюду далее будем считать, что коэффициенты и правые части системы (2.1) принадлежат $C^1(G) -$ классу непрерывно дифференцируемых в области G функций. При таких предположениях решение системы (2.1) (если оно существует) будет принадлежать классу $C^2(G) -$ дважды непрерывно дифференцируемых в G функций.

Проводя перекрестное дифференцирование уравнений системы (2.1) можно получить необходимые у.п.р, которые имеют вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial A_1}{\partial x_2} - \dfrac{\partial A_2}{\partial x_1} = 0, \\ \dfrac{\partial A_1}{\partial x_3} - \dfrac{\partial A_3}{\partial x_1} = 0, \qquad (x_1, x_2, x_3) \in G, \\ \dfrac{\partial A_2}{\partial x_3} - \dfrac{\partial A_3}{\partial x_2} = 0, \end{cases} \tag{2.2}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} - \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} + A_1 f_2 - A_2 f_1 = 0, \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial x_3} - \dfrac{\partial f_3}{\partial x_1} + A_1 f_3 - A_3 f_1 = 0, \qquad (x_1, x_2, x_3) \in G, \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_3} - \dfrac{\partial f_3}{\partial x_2} + A_2 f_3 - A_3 f_2 = 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

Можно доказать, что условия (2.2) - (2.3) будут также достаточными для у.п.р. системы (2.1), причем общее решение этой системы определяется формулой

$$u(x_1, x_2, x_3) = e^{a(x_1, x_2, x_3)} \left[C + \int_{x_3^o}^{x_3} f_3(x_1^o, x_2^o, \xi_3) e^{-\int_{x_3^o}^{\xi_3} A_3(x_1^o, x_2^o, \eta_3) d\eta_3} d\xi_3 + \right.$$

$$\left. + \int_{x_2^o}^{x_2} f_2(x_1^o, \xi_2, x_3) e^{-\int_{x_2^o}^{\xi_2} A_2(x_1^o, \eta_2, x_3) d\eta_2 - \int_{x_3^o}^{x_3} A_3(x_1^o, x_2^o, \eta_3) d\eta_3} d\xi_2 \right] +$$

$$+\int_{x_1^o}^{x_1} f_1(\xi_1,x_2,x_3)e^{-\int_{x_1}^{\xi_1} A_1(\eta_1,x_2,x_3)d\eta_1}d\xi_1, \qquad (2.4)$$

где

$$a(x_1,x_2,x_3)=\int_{x_1^o}^{x_1} A_1(\xi_1,x_2,x_3)d\xi_1+\int_{x_2^o}^{x_2} A_2(x_1^o,\xi_2,x_3)d\xi_2+$$

$$+\int_{x_3^o}^{x_3} A_3(x_1^o,x_2^o,\xi_3)d\xi_3,$$

$C-$ произвольная постоянная, $(x_1^o,x_2^o,x_3^o\,)-$ произвольная точка области Ω.

Рассмотрим условия (1.2), которых можно анализировать как систему трёх у.ч.п. с тремя неизвестными A_1,A_2,A_3.

Имеет место утверждение (см. [6-А]).

Теорема 2.1. *Общее решение системы (2.2) имеет вид*

$$A_1=\varphi_1(x_1,x_2,x_3), \qquad A_2=\varphi_2(x_2,x_3)+\int_{x_1^o}^{x_1}\frac{\partial}{\partial x_2}\varphi_1(\xi_1,x_2,x_3)d\xi_1\,, \qquad (2.5)$$

$$A_3=\varphi_3(x_3)+\int_{x_2^o}^{x_2}\frac{\partial}{\partial x_3}\varphi_2(\xi_2,x_3)d\xi_2+\int_{x_1^o}^{x_1}\frac{\partial}{\partial x_3}\varphi_1(\xi_1,x_2,x_3)d\xi_1\,, \qquad (2.6)$$

где $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$ – произвольные непрерывно дифференцируемые функции.

Доказательство. Пусть

$$A_1(x_1,x_2,x_3)=\varphi_1(x_1,x_2,x_3), \qquad (2.7)$$

$$A_2(x_1^o,x_2,x_3)=\varphi_2(x_2,x_3), \qquad (2.8)$$

$$A_3(x_1^o,x_2,x_3)=\omega_3(x_2,x_3). \qquad (2.9)$$

Интегрируя первое уравнение системы (2.2) относительно x_1, получим

$$\int_{x_1^o}^{x_1} \frac{\partial}{\partial \xi} A_2(\xi, x_2, x_3) d\xi = \int_{x_1^o}^{x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} A_1(\xi, x_2, x_3) d\xi,$$

или с учётом равенства (2.8) получаем

$$A_2(x_1, x_2, x_3) = \varphi_2(x_2, x_3) + \int_{x_1^o}^{x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} A_1(\xi, x_2, x_3) d\xi\,. \qquad (2.10)$$

Аналогично из второго уравнения системы (2.2) и равенства (2.9) получим:

$$A_3(x_1, x_2, x_3) = \omega_3(x_2, x_3) + \int_{x_1^o}^{x_1} \frac{\partial}{\partial x_3} A_1(\xi, x_2, x_3) d\xi\,. \qquad (2.11)$$

Из равенств (2.10), (2.11) следует, что

$$\frac{\partial A_2}{\partial x_3} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3} + \int_{x_1^o}^{x_1} \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} A_1(\xi, x_2, x_3) d\xi,$$

$$\frac{\partial A_3}{\partial x_2} = \frac{\partial \omega_3}{\partial x_2} + \int_{x_1^o}^{x_1} \frac{\partial^2}{\partial x_3 \partial x_2} A_1(\xi, x_2, x_3) d\xi.$$

Так как

$$\frac{\partial A_1}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial A_1}{\partial x_3 \partial x_2},$$

то вычитая последние два равенства, с учетом третьего уравнения системы (2.2), получим

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3} = \frac{\partial \omega_3}{\partial x_2}.$$

Отсюда имеем

$$\omega_3(x_2, x_3) = \int\limits_{x_2^0}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x_3} \varphi_2(\xi, x_3) d\xi + \varphi_3(x_3), \tag{2.12}$$

где $\varphi_3(x_3)$ – произвольная дифференцируемая функция.

Итак, считая функции $\varphi_1(x_1, x_2, x_3)$, $\varphi_2(x_2, x_3)$ и $\varphi_3(x_3)$ из класса C^1, по формулам (2.10) и (2.11) можно найти функции $A_2(x_1, x_2, x_3)$ и $A_3(x_1, x_2, x_3)$. Далее используя соотношение (2.12) получим справедливость теоремы 2.1.

2.1.2. Система с постоянными коэффициентами. Пусть коэффициенты системы (2.1) являются постоянными. В этом случае условия (2.2) выполняются автоматически и формула общего решения системы (2.1) при выполнении условий (2.3) примет вид

$$u(x_1, x_2, x_3) = e^a \left[C + \int\limits_{x_3^0}^{x_3} f_3(x_1^0, x_2^0, \xi_3)\, e^{-A_3(\xi_3 - x_3^0)} d\xi_3 + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{x_2^0}^{x_2} f_2(x_1^0, \xi_2, x_3) e^{-A_2(\xi_2 - x_2^0) - a_3(x_3 - x_3^0)} d\xi_2 \right] + \int\limits_{x_1^0}^{x_1} f_1(\xi_1, x_2, x_3) e^{-A_1(\xi_1 - x_1)} d\xi_1, \tag{2.13}$$

где

$$a = A_1(x_1 - x_1^0) + A_2(x_2 - x_2^0) + A_3(x_3 - x_3^0).$$

Для задачи о решениях системы (2.1) из пространства P_N имеет место

Теорема 2.2. *Пусть* $|A_1| + |A_2| + |A_3| > 0$ *и выполнены условия (2.3). Пусть функции* f_1, f_2, f_3 *и их частные производные первого порядка принадлежат пространству* P_N. *Тогда система (2.1) в пространстве* P_N *имеет единственное решение.*

Доказательство. Рассмотрим случай $A_3 > 0$. Тогда из (2.13) следует

$$u(x_1^0, x_2^0, x_3) = e^{A_3(x_3 - x_3^0)}\left[C + \int\limits_{x_3^0}^{x_3} f_3(x_1^0, x_2^0, \xi_3) e^{-A_3(\xi_3 - x_3^0)} d\xi_3\right].$$

Для того чтобы функция $u(x_1^0, x_2^0, x_3)$ имела рост не более чем степенная, необходимо чтобы

$$C = -\int\limits_{x_3^0}^{+\infty} f_3(x_1^0, x_2^0, \xi_3) e^{-A_3(\xi_3 - x_3^0)} d\xi_3.$$

Отметим, что для $f \in P_N$ и $\alpha > 0$ несобственные интегралы вида

$$\int\limits_{x_3^0}^{+\infty} f(x_1^0, x_2^0, \xi_3) e^{-\alpha \xi_3} d\xi_3$$

существуют.

Подставим значение C в (2.13)

$$u(x_1, x_2, x_3) = e^{a}\left[-\int\limits_{x_3}^{+\infty} f_3(x_1^0, x_2^0, \xi_3) e^{-A_3(\xi_3 - x_3^0)} d\xi_3 + \right.$$

$$+\int_{x_2^0}^{x_2} f_2(x_1^0,\xi_2,x_3)e^{-A_2(\xi_2-x_2^0)-A_3(x_3-x_3^0)}d\xi_2\Bigg]+$$

$$+\int_{x_1^0}^{x_1} f_1(\xi_1,x_2,x_3)e^{-A_1(\xi_1-x_1)}d\xi_1. \qquad (2.14)$$

Найдём связь интегралов

$$I_1=\int_{x_1^0}^{x_1} f_1(\xi_1,x_2,x_3)e^{-A_1(\xi_1-x_1)}d\xi_1,$$

$$I_2=\int_{x_2^0}^{x_2} f_2(x_1^0,\xi_2,x_3)e^{-A_2(\xi_2-x_2^0)-A_3(x_3-x_3^0)}d\xi_2$$

с интегралом от функции f_3. Из условия (2.3) получим

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_3}-A_3f_1=\frac{\partial f_3}{\partial x_1}-A_1f_3.$$

Это равенство будем считать как обыкновенное дифференциальное уравнение относительно f_1. Тогда

$$f_1(x_1,x_2,x_3)=$$

$$=e^{A_3(x_3-x_3^0)}\left[C_1(x_1,x_2)+\int_{x_3^0}^{x_3}\left(\frac{\partial f_3}{\partial x_1}-A_1f_3\right)e^{-A_3(\xi_3-x_3^0)}d\xi_3\right]. \qquad (2.15)$$

Чтобы функция $f_1(x_1,x_2,x_3)$ принадлежала классу P_N, необходимо выполнение равенства

$$C_1(x_1,x_2) = -\int\limits_{x_3^0}^{+\infty} \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_1} - a_1 f_3\right) e^{-A_3(\xi_3 - x_3^0)} d\xi_3.$$

Отсюда и из (2.15), получим

$$f_1(x_1,x_2,x_3) = -\int\limits_{x_3}^{+\infty} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f_3(\xi_1,x_2,\xi_3) - A_1 f_3(\xi_1,x_2,\xi_3)\right) e^{A_3(x_3-\xi_3)} d\xi_3.$$

Поэтому

$$I_1 = \int\limits_{x_1^0}^{x_1} f(\xi_1,x_2,x_3) e^{-A_1(\xi_1 - x_1)} d\xi_1 =$$

$$= -\int\limits_{x_3}^{+\infty} \int\limits_{x_1^0}^{x_1} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} f_3(\xi_1,x_2,\xi_3) - A_1 f_3(\xi_1,x_2,\xi_3)\right] e^{-A_1(\xi_1 - x_1)}\, e^{A_3(x_3-\xi_3)} d\xi_1 d\xi_3 =$$

$$= -\int\limits_{x_3}^{+\infty} [f_3(x_1,x_2,\xi_3) - e^{A_1 x_1} f_3(x_1^0,x_2,\xi_3)] e^{A_3(x_3-\xi_3)} d\xi_3.$$

Теперь используя включения $f_1 \in P_N,\ f_2 \in P_N$, установим связь интеграла I_2 с интегралом от функции f_3. Из условия (2.3) получим

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_3} - A_3 f_2 = \frac{\partial f_3}{\partial x_2} - A_2 f_3.$$

Отсюда подобно тому, как была найдена функция f_1, находим

$$f_2(x_1,x_2,x_3) = -\int\limits_{x_3}^{+\infty} \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - A_2 f_3\right) e^{A_3(x_3-\xi_3)} d\xi_3.$$

Поэтому

$$I_2 = \int\limits_{x_2^0}^{x_2} f_2(x_1^0, \xi_2, x_3) e^{-A_2(\xi_2 - x_2^0) - A_3(x_3 - x_3^0)} d\xi_2 =$$

$$= -\int\limits_{x_3}^{+\infty} \int\limits_{x_2^0}^{x_2} \left[\frac{\partial}{\partial x_2} f_3(x_1^0, \xi_2, \xi_3) - a_2 f_3(x_1^0, \xi_2, \xi_3)\right] e^{-A_2(\xi_2 - x_2^0) - A_3(\xi_3 - x_3^0)} d\xi_2 d\xi_3 =$$

$$= -\int\limits_{x_3}^{+\infty} f_3(x_1^0, \xi_2, \xi_3) e^{-A_2(\xi_2 - x_2^0)} \Big|_{x_2^0}^{x_2} e^{-A_3(\xi_3 - x_3^0)} d\xi_3 =$$

$$= -\int\limits_{x_3}^{+\infty} \left[f_3(x_1^0, x_2, \xi_3) e^{-A_2(x_2 - x_2^0)} - f_3(x_1^0, x_2^0, \xi_3)\right] e^{-A_3(\xi_3 - x_3^0)} d\xi_3.$$

Подставляя выражения для интегралов I_1 и I_2 в (2.14), имеем

$$u(x_1, x_2, x_3) = e^a \left\{ -\int\limits_{x_3}^{+\infty} f_3(x_1^0, x_2^0, \xi_3) e^{-A_3(\xi_3 - x_3^0)} d\xi_3 - \right.$$

$$\left. -\int\limits_{x_3}^{+\infty} \left[f_3(x_1^0, x_2, \xi_3) e^{-A_2(x_2 - x_2^0)} - f_3(x_1^0, x_2^0, \xi_3)\right] e^{-A_3(\xi_3 - x_3^0)} d\xi_3 \right\} -$$

$$-\int\limits_{x_3}^{+\infty} [f_3(x_1, x_2, \xi_3) - e^{A_1 x_1} f_3(x_1^0, x_2, \xi_3)] e^{A_3(x_3 - \xi_3)} d\xi_3 =$$

$$= -\int\limits_{x_3}^{+\infty} f_3(x_1, x_2, \xi_3) e^{A_3(x_3 - \xi_3)} d\xi_3.$$

Итак, при $A_3 > 0$ система (2.1) в пространстве P_N имеет единственное решение

$$u(x_1, x_2, x_3) = -\int\limits_{x_3}^{+\infty} f_3(x_1, x_2, \xi_3) e^{a_3(x_3-\xi_3)} d\xi_3.$$

Аналогично рассматриваются остальные случаи.

Таким образом, приходим к формуле

$$u(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} -\int\limits_{x_k}^{+\infty} f_k e^{a_k(x_k-\xi_k)} d\xi_k & \text{при } a_k > 0, \\ \int\limits_{-\infty}^{x_k} f_k e^{a_k(x_k-\xi_k)} d\xi_k & \text{при } a_k < 0, \end{cases}$$

здесь в аргументе функции f_k вместе переменной x_k пишется переменная ξ_k.

Теорема 2.2 доказана.

§2.2. Решения, растущие не быстрее степенной функции

В настоящем параграфе для системы (2.1) будем изучать вопрос существования решений, определённых во всем пространстве R^3 и принадлежащих классу P_N.

Предположим, что функции A_i и f_i определены во всем пространстве R^3, причем A_i ограниченны в R^3 и удовлетворяют условиям (2.2) и (2.3) §2.1.

Пусть $x = (x_1, x_2, x_3)$ – точка из R^3. Через y_i обозначим точку из R^2 с координатами x_k, $k \neq i$. В функции A_i заменим переменную x_i на t_i и полученную функцию обозначим через $B_i(y_i, t_i)$.

Введем следующие функции

$$a_i(y_i, \xi, \eta) = \frac{1}{\xi - \eta} \int_{\eta}^{\xi} B_i(y_i, t_i) dt_i\,, \quad \xi \neq \eta, \quad i = 1,2,3. \tag{2.16}$$

Функции (2.16) являются ограниченными при $\xi \neq \eta$. Следовательно, для каждой точки $y_i \in R^2$ существуют нижние и верхние пределы:

$$\alpha_+^i = \varliminf_{\substack{\xi-\eta\to\infty \\ \xi>\eta\geq 0}} a_i(y_i, \xi, \eta), \qquad \alpha_i^+ = \varlimsup_{\substack{\xi-\eta\to\infty \\ \xi>\eta\geq 0}} a_i(y_i, \xi, \eta),$$

$$\alpha_-^i = \varliminf_{\substack{\xi-\eta\to\infty \\ \eta<\xi\leq 0}} a_i(y_i, \xi, \eta), \qquad \alpha_i^- = \varlimsup_{\substack{\xi-\eta\to\infty \\ \eta<\xi\leq 0}} a_i(y_i, \xi, \eta).$$

Учитывая условие (2.2) нетрудно установить, что эти пределы не зависят от y_i.

Пусть

$$\beta_i^* = \max\{\alpha_i^+, \alpha_i^-\}, \qquad \beta_*^i = \min\{\alpha_+^i, \alpha_-^i\}, \qquad i = 1,2,3.$$

Теорема 2.3. *Пусть выполнены условия (2.2), (2.3) и функции f_i принадлежат классу P_N. Пусть для какого-нибудь значения $i = 1, 2, 3$ выполняется одно из следующих неравенств:*

$$1)\ \beta_*^i > 0; \quad 2)\ \beta_i^* < 0.$$

Тогда система (2.1) в пространстве P_N имеет единственное решение.

Доказательство. *Случай 1*. Пусть для определенности $\beta_*^1 > 0$. Покажем, что в этом случае функция

$$u(x_1, x_2, x_3) = -\int_{x_1}^{+\infty} f_1(\xi_1, x_2, x_3) e^{\int_{\xi_1}^{x_1} A_1(t_1, x_2, x_3) dt_1} d\xi_1 \tag{2.17}$$

принадлежит классу P_N и удовлетворяет системе (2.1). Вначале установим включение $u \in P_N$. Так как $\alpha_+^1 > 0, \alpha_-^1 > 0$, то в силу определения α_+^1 существует число $T > 0$, что при $\xi - \eta > T,\ \eta \geq 0$ и всех точек (x_2, x_3) плоскости верно неравенство

$$\frac{1}{\xi - \eta} \int_{\eta}^{\xi} A_1(t_1, x_2, x_3) dt_1 \geq \frac{\alpha_+^1}{2}.$$

Считая $\xi_1 - x_1 > T,\ x_1 \geq 0$ получим

$$\int_{x_1}^{\xi_1} A_1(t_1, x_2, x_3) dt_1 \geq \frac{\alpha_+^1}{2} (\xi_1 - x_1) \quad \forall (x_2, x_3) \in R^2. \tag{2.18}$$

В силу положительности α_+^1 из неравенства (2.18) получим

$$\int_{x_1}^{\xi_1} A_1(t_1, x_2, x_3)dt_1 \to +\infty \text{ при } x_1 \to +\infty, \ \forall\, (x_2, x_3) \in R^2.$$

Поэтому в силу включения $f_1 \in P_N$ несобственный интеграл (2.17) равномерно сходится.

Далее при $x_1 \geq 0$ имеем

$$|u(x_1, x_2, x_3)| \leq M \left[\int_{x_1}^{x_1+T} (1 + \xi_1 + |x_2| + |x_3|)^N e^{-\int_{x_1}^{\xi_1} A_1(t_1,x_2,x_3)dt_1} d\xi_1 + \right.$$

$$\left. + \int_{x_1+T}^{+\infty} (1 + \xi_1 + |x_2| + |x_3|)^N e^{-\int_{x_1}^{\xi_1} A_1(t_1,x_2,x_3)dt_1} d\xi_1 \right]. \qquad (2.19)$$

Теперь произведем оценку интегралов J_1 и J_2, находящихся в квадратных скобках.

Пусть $a_1^{\text{o}} = \inf A_1$. Если $a_1^{\text{o}} \neq 0$, то имеем оценку

$$J_1 \leq \int_{x_1}^{x_1+T} (1 + x_1 + T + |x_2| + |x_3|)^N e^{-a_1^{\text{o}}(\xi_1 - x_1)} d\xi_1 =$$

$$= \frac{1}{a_1^{\text{o}}} (1 + x_1 + T + |x_2| + |x_3|)^N \left(1 - e^{-a_1^{\text{o}} T}\right),$$

из которой следует включение $J_1 \in P_N$. Если же $a_1^{\text{o}} = 0$, то включение $J_1 \in P_N$ очевидно.

Для интеграла J_2 будем использовать неравенство (2.18):

$$J_2 \leq \int_{x_1+T}^{+\infty} (1 + \xi_1 + |x_2| + |x_3|)^N e^{-\alpha(\xi_1 - x_1)} d\xi_1,$$

здесь $\alpha = \frac{\alpha_+^1}{2}$. Обозначая интеграл в правой части последнего неравенства через I_N, с помощью интегрирования по частям, имеем:

$$I_N = \int\limits_{x_1+T}^{+\infty} (1 + \xi_1 + |x_2| + |x_3|)^N e^{-\alpha(\xi_1 - x_1)} d\xi_1 =$$

$$= \begin{vmatrix} u = (1 + \xi_1 + |x_2| + |x_3|)^N & dv = e^{-\alpha(\xi_1 - x_1)} d\xi_1 \\ d_{\xi_1} u = N(1 + \xi_1 + |x_2| + |x_3|)^{N-1} d\xi_1 & v = -\dfrac{1}{\alpha} e^{-\alpha(\xi_1 - x_1)} \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{\alpha}(1 + \xi_1 + |x_2| + |x_3|)^N e^{-\alpha(\xi_1 - x_1)}\Big|_{\xi_1 = x_1+T}^{+\infty} +$$

$$+ \frac{N}{\alpha} \int\limits_{x_1+T}^{+\infty} (1 + \xi_1 + |x_2| + |x_3|)^{N-1} e^{-\alpha(\xi_1 - x_1)} d\xi_1,$$

то есть

$$I_N = \frac{1}{\alpha}(1 + x_1 + T + |x_2| + |x_3|)^N e^{-\alpha T} + \frac{N}{\alpha} I_{N-1}. \qquad (2.20)$$

Так как

$$I_0 = \int\limits_{x_1+T}^{+\infty} e^{-\alpha(\xi_1 - x_1)} d\xi_1 = \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha T},$$

то из соотношения (2.20) следует, что $I_1 \in P_1$ и далее $I_2 \in P_2, \dots, I_N \in P_N$.

Итак, мы показали, что $J_1, J_2 \in P_N$ при $x_1 \geq 0$. Тогда из неравенства (2.19) при $x_1 \geq 0$ вытекает включение $u \in P_N$.

Пусть теперь $x_1 < 0$. Выберем число $T > 0$ так, чтобы при $\xi_1 - x_1 > T, x_1 < \xi_1 < 0$ выполнялось неравенство

$$\int_{\eta}^{\xi} A_1(t_1, x_2, x_3)dt_1 \geq \frac{\alpha_-^1}{2}(\xi_1 - x_1), \tag{2.21}$$

это возможно согласно определению числа α_-^1. Так как нас интересует поведение функции $u(x_1, x_2, x_3)$ при достаточного больших значениях $|x_1|$, то будем считать, что $x_1 + T < 0$.

Интеграл (2.17) разобьем на три интеграла S_1, S_2 и S_3 по промежуткам $[x_1, x_1 + T]$, $[x_1 + T, 0]$ и $[0, +\infty]$ соответственно. С учетом включения $f_1 \in P_N$ для интеграла S_1 имеем:

$$|S_1| \leq M \int_{x_1}^{x_1+T} (1 - \xi_1 + |x_2| + |x_3|)^N e^{a_1^0} d\xi_1 \leq$$

$$\leq \frac{1}{a_1^0}(1 - x_1 + |x_2| + |x_3|)^N \left(1 - e^{-a_1^0 T}\right).$$

Далее аналогично, тому как производилась оценка интеграла J_2, можно показать, что $S_2 \in P_N$ (здесь используется неравенство (2.21)), а также $S_3 \in P_N$.

Таким образом, мы установили, что функция $u(x_1, x_2, x_3)$, определенная формулой (2.17) принадлежит классу P_N.

Теперь докажем, что эта функция удовлетворяет всем уравнениям системы (2.1).

Найдем u_{x_1}:

$$u_{x_1} = f_1(x_1, x_2, x_3) - \int_{x_1}^{+\infty} A_1(x_1, x_2, x_3) f_1(\xi_1, x_2, x_3) e^{\int_{\xi_1}^{x_1} A_1(t_1, x_2, x_3)dt_1} d\xi_1.$$

Отсюда с учетом формулы (2.17), получаем

$$u_{x_1} = A_1(x_1, x_2, x_3)u + f_1(x_1, x_2, x_3),$$

то есть функция $u(x_1, x_2, x_3)$ удовлетворяет первому уравнению системы (2.1).

Найдем u_{x_2}:

$$u_{x_2} = -\int_{x_1}^{+\infty} \left[\frac{\partial f_1}{\partial x_2} + f_1(\xi_1, x_2, x_3) \int_{\xi_1}^{x_1} \frac{\partial A_1}{\partial x_2} dt_1\right] e^{\int_{\xi_1}^{x_1} A_1(t_1, x_2, x_3) dt_1} d\xi_1. \qquad (2.22)$$

В силу условий (2.2) при $i = 1, j = 2$, имеем

$$\frac{\partial A_1}{\partial x_2} = \frac{\partial A_2}{\partial x_1}.$$

Интегрируем это равенство:

$$\int_{\xi_1}^{x_1} \frac{\partial A_1}{\partial x_2} dt_1 = \int_{\xi_1}^{x_1} \frac{\partial A_2}{\partial x_1} dt_1 = A_2(x_1, x_2, x_3) - A_2(\xi_1, x_2, x_3). \qquad (2.23)$$

Из условий (2.3) при $i = 1, j = 2$, получим

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - A_1(x_1, x_2, x_3) f_2(x_1, x_2, x_3) + A_2(x_1, x_2, x_3) f_1(x_1, x_2, x_3).$$

Отсюда имеем

$$\int_{x_1}^{+\infty} \frac{\partial f_1}{\partial x_2} e^{\int_{\xi_1}^{x_1} A_1(t_1, x_2, x_3) dt_1} d\xi_1 = \int_{x_1}^{+\infty} \Big[\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - A_1(\xi_1, x_2, x_3) f_2(\xi_1, x_2, x_3) +$$

$$+ A_2(\xi_1, x_2, x_3) f_1(\xi_1, x_2, x_3)\Big] e^{\int_{\xi_1}^{x_1} A_1(t_1, x_2, x_3) dt_1} d\xi_1. \qquad (2.24)$$

Подставляя выражения для интегралов из (2.23) и (2.24) в (2.22), получим

$$u_{x_2} = -\int\limits_{x_1}^{+\infty} \left[\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - A_1(\xi_1, x_2, x_3) f_2(\xi_1, x_2, x_3) + \right.$$

$$\left. + A_2(x_1, x_2, x_3) f_1(\xi_1, x_2, x_3)\right] e^{\int_{\xi_1}^{x_1} A_1(t_1, x_2, x_3) dt_1} d\xi_1. \qquad (2.25)$$

Далее интегрируем по частям:

$$\int\limits_{x_1}^{+\infty} \frac{\partial f_2}{\partial x_1} e^{\int_{\xi_1}^{x_1} A_1(t_1, x_2, x_3) dt_1} d\xi_1 =$$

$$= \begin{vmatrix} u = e^{\int_{\xi_1}^{x_1} A_1(t_1, x_2, x_3) dt_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} d\xi_1 = dv \\ d_{\xi_1} u = e^{\int_{\xi_1}^{x_1} A_1(t_1, x_2, x_3) dt_1} \left(-A_1(\xi_1, x_2, x_3)\right) d\xi_1 & v = f_2(\xi_1, x_2, x_3) \end{vmatrix} =$$

$$= f_2(\xi_1, x_2, x_3) e^{\int_{\xi_1}^{x_1} A_1(t_1, x_2, x_3) dt_1} \Big|_{\xi_1 = x_1 + T}^{+\infty} +$$

$$+ \int\limits_{x_1}^{+\infty} A_1(\xi_1, x_2, x_3) f_2(\xi_1, x_2, x_3) e^{\int_{\xi_1}^{x_1} A_1(t_1, x_2, x_3) dt_1} d\xi_1 =$$

$$= -f_2(x_1, x_2, x_3) + \int\limits_{x_1}^{+\infty} A_1(\xi_1, x_2, x_3) f_2(\xi_1, x_2, x_3) e^{\int_{\xi_1}^{x_1} A_1(t_1, x_2, x_3) dt_1} d\xi_1.$$

Мы здесь учли, что $f_2 \in P_N$. Отсюда и из формулы (2.25) имеем

$$u_{x_2} = f_2(x_1, x_2, x_3) - \int\limits_{x_1}^{+\infty} A_1(\xi_1, x_2, x_3) f_2(\xi_1, x_2, x_3) e^{\int_{\xi_1}^{x_1} A_1(t_1, x_2, x_3) dt_1} d\xi_1 +$$

$$+ \int\limits_{x_1}^{+\infty} A_1(\xi_1, x_2, x_3) f_2(\xi_1, x_2, x_3) e^{\int_{\xi_1}^{x_1} A_1(t_1, x_2, x_3) dt_1} d\xi_1 -$$

$$-\int_{x_1}^{+\infty} A_2(x_1,x_2,x_3)f_1(\xi_1,x_2,x_3)e^{\int_{\xi_1}^{x_1} A_1(t_1,x_2,x_3)dt_1}\,d\xi_1 =$$

$$= f_2(x_1,x_2,x_3) - \int_{x_1}^{+\infty} A_2(x_1,x_2,x_3)f_1(\xi_1,x_2,x_3)e^{\int_{\xi_1}^{x_1} A_1(t_1,x_2,x_3)dt_1}\,d\xi_1.$$

Окончательно получим

$$u_{x_2} = A_2(x_1,x_2,x_3)u + f_2(x_1,x_2,x_3).$$

Теперь докажем что функция $u(x_1,x_2,x_3)$ удовлетворяет третьему уравнению системы (2.1). Найдём u_{x_3}:

$$u_{x_3} = -\int_{x_1}^{+\infty}\left[\frac{\partial f_1}{\partial x_3} + f_1(\xi_1,x_2,x_3)\int_{\xi_1}^{x_1}\frac{\partial A_1}{\partial x_3}dt_1\right]e^{\int_{\xi_1}^{x_1} A_1(t_1,x_2,x_3)dt_1}d\xi_1. \qquad (2.26)$$

Из формулы (2.2) при $i = 1, j = 3$, имеем

$$\frac{\partial A_1}{\partial x_3} = \frac{\partial A_3}{\partial x_1},$$

$$\int_{\xi_1}^{x_1}\frac{\partial A_1}{\partial x_3}dt_1 = \int_{\xi_1}^{x_1}\frac{\partial A_3}{\partial x_1}dt_1 = A_3(x_1,x_2,x_3) - A_3(\xi_1,x_2,x_3). \qquad (2.27)$$

Из формулы (2.3) при $i = 1, j = 3$, получим

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1} + A_1 f_3 - A_3 f_1 = 0,$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_3} = \frac{\partial f_3}{\partial x_1} - A_1(x_1,x_2,x_3)f_3(x_1,x_2,x_3) + A_3(x_1,x_2,x_3)f_1(x_1,x_2,x_3).$$

Отсюда

$$\int_{x_1}^{+\infty} \frac{\partial f_3}{\partial x_1} e^{\int_{\xi_1}^{x_1} A_1(t_1,x_2,x_3)dt_1} d\xi_1 = \int_{x_1}^{+\infty} \Big[\frac{\partial f_3}{\partial x_1} - A_1(\xi_1,x_2,x_3) f_3(\xi_1,x_2,x_3) +$$

$$+A_3(\xi_1,x_2,x_3) f_1(\xi_1,x_2,x_3)\Big] e^{\int_{\xi_1}^{x_1} A_1(t_1,x_2,x_3)dt_1} d\xi_1. \qquad (2.28)$$

Подставляя выражения для интегралов из (2.27) и (2.28) в (2.26) получим

$$u_{x_3} = -\int_{x_1}^{+\infty} \Big[\frac{\partial f_3}{\partial x_1} - A_1(\xi_1,x_2,x_3) f_3(\xi_1,x_2,x_3)$$

$$+A_3(x_1,x_2,x_3) f_1(\xi_1,x_2,x_3)\Big] e^{\int_{\xi_1}^{x_1} A_1(t_1,x_2,x_3)dt_1} d\xi_1. \qquad (2.29)$$

Далее интегрируем по частям:

$$\int_{x_1}^{+\infty} \frac{\partial f_3}{\partial x_1} e^{\int_{\xi_1}^{x_1} A_1(t_1,x_2,x_3)dt_1} d\xi_1 =$$

$$= \begin{vmatrix} u = e^{\int_{\xi_1}^{x_1} A_1(t_1,x_2,x_3)dt_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_1} d\xi_1 = dv \\ d_{\xi_1} u = e^{\int_{\xi_1}^{x_1} A_1(t_1,x_2,x_3)dt_1}\big(-A_1(\xi_1,x_2,x_3)\big) d\xi_1 & v = f_3(\xi_1,x_2,x_3) \end{vmatrix} =$$

$$= f_3(\xi_1,x_2,x_3) e^{\int_{\xi_1}^{x_1} A_1(t_1,x_2,x_3)dt_1}\Big|_{x_1}^{+\infty} +$$

$$+\int_{x_1}^{+\infty} A_1(\xi_1,x_2,x_3) f_3(\xi_1,x_2,x_3) e^{\int_{\xi_1}^{x_1} A_1(t_1,x_2,x_3)dt_1} d\xi_1 =$$

$$= -f_3(x_1,x_2,x_3) + \int_{x_1}^{+\infty} A_1(\xi_1,x_2,x_3) f_3(\xi_1,x_2,x_3) e^{\int_{\xi_1}^{x_1} A_1(t_1,x_2,x_3)dt_1} d\xi_1.$$

Мы здесь учли, что $f_3 \in P_N$ и выполнено неравенство (2.21). Подставляя в формулу (2.26), получим

$$u_{x_3} = f_2(x_1, x_2, x_3) - \int\limits_{x_1}^{+\infty} A_1(\xi_1, x_2, x_3) f_3(\xi_1, x_2, x_3) e^{\int_{\xi_1}^{x_1} A_1(t_1, x_2, x_3) dt_1} d\xi_1 +$$

$$+ \int\limits_{x_1}^{+\infty} A_1(\xi_1, x_2, x_3) f_3(\xi_1, x_2, x_3) e^{\int_{\xi_1}^{x_1} A_1(t_1, x_2, x_3) dt_1} d\xi_1 =$$

$$- \int\limits_{x_1}^{+\infty} A_3(x_1, x_2, x_3) f_1(\xi_1, x_2, x_3) e^{\int_{\xi_1}^{x_1} A_1(t_1, x_2, x_3) dt_1} d\xi_1 =$$

$$= f_3(x_1, x_2, x_3) - A_3(x_1, x_2, x_3) \int\limits_{x_1}^{+\infty} f_1(\xi_1, x_2, x_3) e^{\int_{\xi_1}^{x_1} A_1(t_1, x_2, x_3) dt_1} d\xi_1.$$

Следовательно

$$u_{x_3} = A_3(x_1, x_2, x_3) u + f_3(x_1, x_2, x_3).$$

Итак, мы установили, что функция $u(x_1, x_2, x_3)$, определенная формулой (2.17) принадлежит классу P_N и является решением системы (2.1).

Однородная система, соответствующая (2.1) в силу условий $\alpha_+^1 > 0$ и $\alpha_-^1 > 0$ в классе P_N имеет только нулевое решение. Поэтому решение неоднородной системы (2.1) в классе P_N единственное. Утверждение теоремы для случая $\beta_*^1 > 0$ доказано. Если $\beta_*^2 > 0$ (или $\beta_*^3 > 0$), то в формуле (2.17) нужно x_1 и f_1 заменит на x_2 и f_2 (x_3 и f_3) соответственно.

Случай 2. Пусть для какого-нибудь значения $i = 1, 2, 3$ выполнено неравенство $\beta_i^* < 0$. Аналогично случаю 1 можно доказать, что функция $u(x_1, x_2, x_3)$, определенная формулой

$$u(x_1, x_2, x_3) = - \int\limits_{-\infty}^{x_i} f_i(y_i, t_i) e^{\int_{t_i}^{x_i} B_i(y_i, \tau_i) d\tau_i} dt_i,$$

является единственным решением системы (2.1) в классе P_N.

Теорема 2.3 доказана.

§2.3. Решения степенного роста в неограниченной цилиндрической области

Рассмотрим систему (2.1) в цилиндре $\Omega = \{(x_1, x_2, x_3);\ (x_1, x_2) \in G,\ \ x_3 > 0\}, G -$ ограниченная область в R^2. В этом случае будем исследовать задачу о решениях системы (2.1), принадлежащих классу $P_N(\Omega)$, состоящих из функций $u(x_1, x_2, x_3) \in C(\Omega)$, удовлетворяющих условию роста:

$$|u(x_1, x_2, x_3)| \leq M(1 + x_3)^N.$$

По коэффициенту A_3 определим числа α_+^3 и α_3^+ (см. §2.2).

Теорема 2.4. *Пусть выполнены условия (2.2), (2.3) и функции f_i принадлежат классу $P_N(\Omega)$. Тогда справедливы утверждения:*

а) если $\alpha_+^3 > 0$, то система (2.1) в пространстве $P_N(\Omega)$ однозначно разрешимо и решение даётся формулой

$$u(x_1, x_2, x_3) = -\int\limits_{x_3}^{+\infty} f_3(x_1, x_2, \xi_3) e^{\int_{\xi_3}^{x_3} A_3(x_1, x_2, t_3) dt_3} d\xi_3; \qquad (2.30)$$

б) если $\alpha_3^+ < 0$, то все решения из класса $P_N(\Omega)$ системы (2.1) определяются формулой

$$u(x_1, x_2, x_3) = e^{a(x_1, x_2, x_3)} \left[C + \int\limits_{x_1^o}^{x_1} f_1(\xi_1, x_2, x_3^o) e^{-A(\xi_1, x_2^o, x_3^o) - A(x_1^o, x_2, x_3^o)}\ d\xi_1 + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{x_2^o}^{x_2} f_1(x_1^o, \xi_2, x_3^o) e^{-A(x_1^o, \xi_2, x_3^o)}\ d\xi_2 + \int\limits_{x_3^o}^{x_3} f_3(x_1, x_2, \xi_3) e^{-A(x_1, x_2, \xi_3)}\ d\xi_3 \right], \qquad (2.31)$$

где

$$a(x_1,x_2,x_3)=\int\limits_{x_1^o}^{x_1}A_1(\xi_1,x_2,x_3^o)d\xi_1+\int\limits_{x_2^o}^{x_2}A_2(x_1^o,\xi_2,x_3^o)d\xi_2+$$

$$+\int\limits_{x_3^o}^{x_3}A_3(x_1,x_2,\xi_3)d\xi_3,$$

$C-$ *произвольная постоянная.*

Доказательство. **а)** Третье уравнение системы (2.1) рассмотрим при $(x_1,x_2)\in G, x_3>0$. Интегрируя это уравнение имеем

$$u(x_1,x_2,x_3)=$$

$$=e^{\int_{x_3^o}^{x_3}A_3(x_1,x_2,\xi_3)d\xi_3}\left[C(x_1,x_2)+\int\limits_{x_3^o}^{x_3}f_3(x_1,x_2,\xi_3)e^{-\int_{x_3^o}^{\xi_3}A_3(x_1,x_2,t_3)dt_3}d\xi_3\right],$$

$$(x_1,x_2)\in G, x_3^o>0, \qquad (2.32)$$

где $C(x_1,x_2)-$ произвольная дифференцируемая функция.

Так как $\alpha_+^3>0$, то исходя из неравенства вида (2.18) для коэффициента A_3 получим предельное соотношение

$$\int\limits_{x_3^o}^{x_3}A_3(x_1,x_2,\xi_3)d\xi_3\to+\infty \text{ при } x_3\to+\infty,\ \forall\,(x_1,x_2)\in G.$$

Поэтому для того чтобы функция $u(x_1,x_2,x_3)$, определенная формулой (2.32) принадлежала классу $P_N(\Omega)$, необходимо выполнение равенства

$$C(x_1,x_2)+\int\limits_{x_3^o}^{+\infty}f_3(x_1,x_2,\xi_3)e^{-\int_{x_3^o}^{\xi_3}A_3(x_1,x_2,t_3)dt_3}d\xi_3=0. \qquad (2.33)$$

Заметим, что в силу условия $\alpha_+^3 > 0$ несобственный интеграл в (2.33) равномерно сходится.

С учетом (2.33) формула (2.32) перепишется в виде

$$u(x_1, x_2, x_3) = e^{\int_{x_3^0}^{x_3} A_3(x_1,x_2,\xi_3)d\xi_3} \left[-\int_{x_3^0}^{+\infty} f_3(x_1, x_2, \xi_3) e^{-\int_{x_3^0}^{\xi_3} A_3(x_1,x_2,t_3)dt_3} d\xi_3 + \right.$$

$$\left. + \int_{x_3^0}^{x_3} f_3(x_1, x_2, \xi_3) e^{-\int_{x_3^0}^{\xi_3} A_3(x_1,x_2,t_3)dt_3} d\xi_3 \right].$$

Отсюда, объединяя интегралы внутри квадратных скобок и занося экспоненту внутрь интеграла и ещё раз объединяя интегралы в показателях, получим формулу (2.30).

Аналогично как в доказательстве теоремы 2.3 (случай 1) можно показать, что функция $u(x_1, x_2, x_3)$ является единственным решением системы (2.1) из пространства $P_N(\Omega)$.

б) Пусть $\alpha_3^+ < 0$. Функцию $u(x_1, x_2, x_3)$, определенную формулой (2.32) подставим в первое уравнение системы (2.1).

Находим u_{x_1}:

$$u_{x_1} = e^{\int_{x_3^0}^{x_3} A_3(x_1,x_2,\xi_3)d\xi_3} \left\{ \int_{x_3^0}^{x_3} \frac{\partial A_3}{\partial x_1} d\xi_3 \left[C(x_1, x_2) \right.\right.$$

$$\left. + \int_{x_3^0}^{x_3} f_3(x_1, x_2, \xi_3) e^{-\int_{x_3^0}^{\xi_3} A_3(x_1,x_2,t_3)dt_3} d\xi_3 \right] + \frac{\partial C}{\partial x_1} +$$

$$\left. + \int_{x_3^0}^{x_3} \left[\frac{\partial f_3}{\partial x_1} - f_3(x_1, x_2, \xi_3) \cdot \int_{x_3^0}^{\xi_3} \frac{\partial A_3}{\partial x_1} dt_3 \right] e^{-\int_{x_3^0}^{\xi_3} A_3(x_1,x_2,t_3)dt_3} d\xi_3 \right\}.$$

Из (2.2) при $i = 3, j = 1$ имеем

$$\int\limits_{x_3^0}^{x_3} \frac{\partial A_3}{\partial x_1} d\xi_3 = \int\limits_{x_3^0}^{x_3} \frac{\partial A_1}{\partial x_3} d\xi_3 = A_1(x_1, x_2, x_3) - A_1(x_1, x_2, x_3^0).$$

Поэтому

$$u_{x_1} = e^{\int_{x_3^0}^{x_3} A_3(x_1,x_2,\xi_3)d\xi_3} \left\{ [A_1(x_1, x_2, x_3) - A_1(x_1, x_2, x_3^0)] \left[C(x_1, x_2) \right.\right.$$

$$\left. + \int\limits_{x_3^0}^{x_3} f_3(x_1, x_2, \xi_3) e^{-\int_{x_3^0}^{\xi_3} A_3(x_1,x_2,t_3)dt_3} d\xi_3 \right] + \frac{\partial C}{\partial x_1} +$$

$$\left. + \int\limits_{x_3^0}^{x_3} \left[\frac{\partial f_3}{\partial x_1} - f_3(x_1, x_2, \xi_3) \cdot [A_1(x_1, x_2, \xi_3) - A_1(x_1, x_2, x_3^0)] \right] e^{-\int_{x_3^0}^{\xi_3} A_3(x_1,x_2,t_3)dt_3} d\xi_3 \right\} =$$

$$= e^{\int_{x_3^0}^{x_3} A_3(x_1,x_2,\xi_3)d\xi_3} \left\{ [A_1(x_1, x_2, x_3) - A_1(x_1, x_2, x_3^0)] \cdot C(x_1, x_2) \right.$$

$$+ A_1(x_1, x_2, x_3) \int\limits_{x_3^0}^{x_3} f_3(x_1, x_2, \xi_3) e^{-\int_{x_3^0}^{\xi_3} A_3(x_1,x_2,t_3)dt_3} d\xi_3 + \frac{\partial C}{\partial x_1} +$$

$$\left. + \int\limits_{x_3^0}^{x_3} \left[\frac{\partial f_3}{\partial x_1} - A_1(x_1, x_2, \xi_3) f_3(x_1, x_2, \xi_3) \right] e^{-\int_{x_3^0}^{\xi_3} A_3(x_1,x_2,t_3)dt_3} d\xi_3 \right\}.$$

Из (2.3) при $i = 3, j = 1$ получим

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_1} - A_1(x_1, x_2, \xi_3) f_3(x_1, x_2, \xi_3) = \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - A_3(x_1, x_2, \xi_3) f_1(x_1, x_2, \xi_3).$$

Тогда

$$\int_{x_3^0}^{x_3}\left[\frac{\partial f_3}{\partial x_1}-A_1(x_1,x_2,\xi_3)f_3(x_1,x_2,\xi_3)\right]e^{-\int_{x_3^0}^{\xi_3}A_3(x_1,x_2,t_3)dt_3}d\xi_3=$$

$$=\int_{x_3^0}^{x_3}\left[\frac{\partial f_1}{\partial x_3}-A_3(x_1,x_2,\xi_3)f_1(x_1,x_2,\xi_3)\right]e^{-\int_{x_3^0}^{\xi_3}A_3(x_1,x_2,t_3)dt_3}d\xi_3=$$

$$=\int_{x_3^0}^{x_3}\frac{\partial}{\partial x_3}\left[f_1(x_1,x_2,\xi_3)e^{-\int_{x_3^0}^{\xi_3}A_3(x_1,x_2,t_3)dt_3}\right]d\xi_3=$$

$$=f_1(x_1,x_2,x_3)e^{-\int_{x_3^0}^{x_3}A_3(x_1,x_2,t_3)dt_3}-f_1(x_1,x_2,x_3^0).$$

Следовательно,

$$u_{x_1}=e^{\int_{x_3^0}^{x_3}A_3(x_1,x_2,\xi_3)d\xi_3}\Bigg\{[A_1(x_1,x_2,x_3)-A_1(x_1,x_2,x_3^0)]\cdot C(x_1,x_2)$$

$$+A_1(x_1,x_2,x_3)\int_{x_3^0}^{x_3}f_3(x_1,x_2,\xi_3)e^{-\int_{x_3^0}^{\xi_3}A_3(x_1,x_2,t_3)dt_3}d\xi_3+\frac{\partial C}{\partial x_1}+$$

$$+f_1(x_1,x_2,x_3)e^{-\int_{x_3^0}^{x_3}A_3(x_1,x_2,t_3)dt_3}-f_1(x_1,x_2,x_3^0)\Bigg\}.$$

Подставим u_{x_1} в первое уравнение системы (2.1):

$$e^{\int_{x_3^0}^{x_3}A_3(x_1,x_2,\xi_3)d\xi_3}\Bigg\{[A_1(x_1,x_2,x_3)-A_1(x_1,x_2,x_3^0)]\cdot C(x_1,x_2)$$

$$+A_1(x_1,x_2,x_3)\int_{x_3^0}^{x_3}f_3(x_1,x_2,\xi_3)e^{-\int_{x_3^0}^{\xi_3}A_3(x_1,x_2,t_3)dt_3}d\xi_3+\frac{\partial C}{\partial x_1}+$$

$$+f_1(x_1,x_2,x_3)e^{-\int_{x_3^0}^{x_3}A_3(x_1,x_2,t_3)dt_3}-f_1(x_1,x_2,x_3^0)\Bigg\}=$$

$$= A_1(x_1, x_2, x_3) e^{\int_{x_3^0}^{x_3} A_3(x_1, x_2, \xi_3) d\xi_3} \Bigg[C(x_1, x_2)$$

$$+ \int_{x_3^0}^{x_3} f_3(x_1, x_2, \xi_3) e^{-\int_{x_3^0}^{\xi_3} A_3(x_1, x_2, t_3) dt_3} d\xi_3 \Bigg] + f_1(x_1, x_2, x_3).$$

После преобразований получим

$$\frac{\partial C}{\partial x_1} = A_1(x_1, x_2, x_3^0) \cdot C(x_1, x_2) + f_1(x_1, x_2, x_3^0). \tag{2.34}$$

Аналогично находя u_{x_2} и повторяя все преобразования, проделанные выше, можно получить уравнение

$$\frac{\partial C}{\partial x_2} = A_2(x_1, x_2, x_3^0) \cdot C(x_1, x_2) + f_2(x_1, x_2, x_3^0). \tag{2.35}$$

Итак, для определения функции $C(x_1, x_2)$ мы получили п.с. у.ч.п. вида

$$\begin{cases} \dfrac{\partial C}{\partial x_1} = A_1(x_1, x_2, x_3^0) C(x_1, x_2) + f_1(x_1, x_2, x_3^0), \\ \dfrac{\partial C}{\partial x_2} = A_2(x_1, x_2, x_3^0) C(x_1, x_2) + f_2(x_1, x_2, x_3^0). \end{cases}$$

Из работы [67] следует, что

$$C(x_1, x_2) = e^{\int_{x_1^0}^{x_1} A_1(\xi_1, x_2, x_3^0) d\xi_1 + \int_{x_2^0}^{x_2} A_2(x_1^0, \xi_2, x_3^0) d\xi_2} [C +$$

$$+ \int_{x_2^0}^{x_2} f_2(x_1^0, \xi_2, x_3^0) e^{-\int_{x_2^0}^{\xi_2} A_2(x_1^0, t_2, x_3^0) dt_2} d\xi_2 \Bigg] +$$

$$+\int_{x_1^0}^{x_1} f_1(\xi_1, x_2, x_3^0) e^{\int_{\xi_1}^{x_1} A_1(t_1, x_2, x_3^0) dt_1} d\xi_1,$$

где C − произвольная постоянная. Отсюда и из формулы (2.32) будем иметь

$$u(x_1, x_2, x_3) = e^{a(x_1, x_2, x_3)} \left[C + \int_{x_3^0}^{x_3} f_2(x_1^0, \xi_2, x_3^0) e^{-\int_{x_2^0}^{\xi_2} A_2(x_1^0, t_2, x_3^0) dt_2} d\xi_2 + \right.$$

$$+\int_{x_2^0}^{x_2} f_1(\xi_1, x_2, x_3^0) e^{-\int_{x_1^0}^{\xi_1} A_1(t_1, x_2, x_3^0) dt_1 - \int_{x_2^0}^{x_2} A_2(x_1^0, t_2, x_3^0) dt_2} d\xi_1 +$$

$$\left. +\int_{x_3^0}^{x_3} f_3(x_1, x_2, \xi_3) e^{-A(x_1, x_2, \xi_3)} d\xi_3 \right],$$

где

$$a(x_1, x_2, x_3) = \int_{x_1^0}^{x_1} A_1(\xi_1, x_2, x_3^0) d\xi_1 + \int_{x_2^0}^{x_2} A_2(x_1^0, \xi_2, x_3^0) d\xi_2 +$$

$$+\int_{x_3^0}^{x_3} A_3(x_1, x_2, \xi_3) d\xi_3.$$

Таким образом, в случае б) система (2.1) в классе $P_N(D)$ имеет бесконечное множество решений и все такие решения определяются формулой (2.31).

Теорема 2.4 доказана.

§2.4. Переопределенные системы двух уравнений с двумя переменными в угле

Рассмотрим п.с. у.ч.п. вида

$$\begin{cases} u_{x_1} = a_1(x_1, x_2)u + f_1(x_1, x_2), \\ u_{x_2} = a_2(x_1, x_2)u + f_2(x_1, x_2), \end{cases} \tag{2.36}$$

где коэффициенты и правые части заданы в угле $D = \{(x_1, x_2): 0 < x_1 < +\infty, \lambda_1 x_1 < x_2 < \lambda_2 x_1\}$, $\lambda_1, \lambda_2 -$ постоянные.

В работах [66], [67] системы вида (2.36) исследованы во всей плоскости R^2 и найдены критерии существования ограниченного на R^2 решения. Мы будем изучать более общую задачу в угле D.

Через $C(D)$ обозначим пространство непрерывных и ограниченных в D функций, через $C^1(D) -$ пространство функций $u(x_1, x_2)$, имеющих в D непрерывные частные производные первого порядка, а через $P_N(D) -$ пространство непрерывных в D функций $u(x_1, x_2)$, удовлетворяющих условию

$$|u(x_1, x_2)| \leq M(1 + |x_1|^N + |x_2|^N), \qquad (x_1, x_2) \in D, \tag{2.37}$$

где постоянная M вообще говоря зависит от $u(x_1, x_2)$, $N -$ целое неотрицательное число. Очевидно, $C(D) \subset P_N(D)$.

В предположении, что существуют частные производные $\frac{\partial a_1}{\partial x_2}$, $\frac{\partial a_2}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f_1}{\partial x_2}$ и $\frac{\partial f_2}{\partial x_1}$ условия полной интегрируемости системы (2.36) имеет вид [44]:

$$\frac{\partial a_1}{\partial x_2} = \frac{\partial a_2}{\partial x_1}, \qquad (x_1, x_2) \in D, \tag{2.38}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + a_1 f_2 - a_2 f_1 = 0, \quad (x_1, x_2) \in D. \tag{2.39}$$

Пусть коэффициенты системы (2.36) принадлежат пространству $C(D)$, а правые части – пространству $P_N(D)$ и выполнены условия (2.38) и (2.39). Для системы (2.36) будем изучать следующую задачу.

Задача *P*. *Найти решения системы (2.36), принадлежащие пространству* $P_N(D)$.

Задачу удобно исследовать переходом в полярные координаты:

$$x_1 = r\cos\varphi\,,\ x_2 = r\sin\varphi\,,\ 0 < r < +\infty,$$
$$\varphi_1 < \varphi < \varphi_2,\ \ tg\varphi_j = \lambda_j,\ \ j = 1, 2.$$

Дополнительно будем предполагать, что существуют частные производные $\frac{\partial a_1}{\partial x_2}$, $\frac{\partial a_2}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f_1}{\partial x_2}$ и $\frac{\partial f_2}{\partial x_1}$. В полярных координатах система (2.36) переходит в систему

$$\begin{cases} U_r = (Acos\varphi + Bsin\varphi)U + Fcos\varphi + Gsin\varphi, \\ U_\varphi = r(-Asin\varphi + Bcos\varphi)U + r(-Fsin\varphi + Gcos\varphi), \end{cases} \tag{2.40}$$

где

$$U = u(rcos\varphi, rsin\varphi), \qquad A = a_1(rcos\varphi, rsin\varphi), \qquad B = a_2(rcos\varphi, rsin\varphi),$$
$$F = f_1(rcos\varphi, rsin\varphi),\ G = f_2(rcos\varphi, rsin\varphi),\ 0 < r < +\infty,\ \varphi_1 < \varphi < \varphi_2,$$

а условия (2.38) и (2.39) в следующие

$$\left(A_\varphi - rB_r\right)\cos\varphi + \left(B_\varphi + rA_r\right)\sin\varphi = 0, \tag{2.41}$$
$$\left(F_\varphi - rG_r\right)\cos\varphi + \left(G_\varphi + rF_r\right)\sin\varphi + r(AG - BF) = 0 \tag{2.42}$$

соответственно.

Введем функцию трёх переменных

$$c(r,\rho,\varphi)=\frac{1}{r-\rho}\int\limits_{\rho}^{r}C(s,\varphi)ds, \tag{2.43}$$

где $C(s,\varphi)=A(s,\varphi)\cos\varphi+B(s,\varphi)\sin\varphi$, определенную в области $\Omega=\{(r,\rho,\varphi):\ 0<\rho<r,\ \varphi_1<\varphi<\varphi_2\}$. В силу ограниченности функций A и B функция $c(r,\rho,\varphi)$ также является ограниченной. Поэтому существует следующая величина

$$c_0=\varliminf_{\substack{r-\rho\to+\infty\\ r>\rho>0}}\ \inf_{\varphi_1<\varphi<\varphi_2}c(r,\rho,\varphi)\,. \tag{2.44}$$

1. *Доказательство эквивалентности систем (2.36) и (2.40).*

В системе (2.36) произведем замену независимых переменных:

$$x_1=r\cos\varphi,\quad x_2=r\sin\varphi\,. \tag{2.45}$$

Пусть $U(r,\varphi)=u(r\cos\varphi\,,r\sin\varphi)$. Тогда

$$u_{x_1}=U_r r_{x_1}+U_\varphi\varphi_{x_1},\ \ u_{x_2}=U_r r_{x_2}+U_\varphi\varphi_{x_2}. \tag{2.46}$$

Так как $r^2=x_1^2+x_2^2$, то $2rr_{x_1}=2x_1, 2rr_{x_2}=2x_2$, поэтому

$$r_{x_1}=\frac{x_1}{r}=\cos\varphi\,,\qquad r_{x_2}=\frac{x_2}{r}=\sin\varphi\,. \tag{2.47}$$

Далее дифференцируя равенства (2.45) имеем:

$$1=r_{x_1}\cos\varphi-r\sin\varphi\cdot\varphi_{x_1},\ \ 1=r_{x_2}\sin\varphi+r\cos\varphi\cdot\varphi_{x_2}$$

или с учетом (2.47)

$$1 = \cos^2\varphi - r\sin\varphi \cdot \varphi_{x_1}, \quad 1 = \sin^2\varphi + r\cos\varphi \cdot \varphi_{x_2}.$$

Отсюда

$$\varphi_{x_1} = -\frac{1}{r}\sin\varphi, \quad \varphi_{x_2} = \frac{1}{r}\cos\varphi\,. \tag{2.48}$$

Из (2.46) – (2.48) получим

$$u_{x_1} = \cos\varphi \cdot U_r - \frac{1}{r}\sin\varphi \cdot U_\varphi,$$
$$u_{x_2} = \sin\varphi \cdot U_r + \frac{1}{r}\cos\varphi \cdot U_\varphi.$$

Подставляя эти выражения в систему (2.36), приходим к соотношениям

$$\begin{cases} \cos\varphi \cdot U_r - \dfrac{1}{r}\sin\varphi \cdot U_\varphi = A(r,\varphi)U + F(r,\varphi), \\ \sin\varphi \cdot U_r + \dfrac{1}{r}\cos\varphi \cdot U_\varphi = B(r,\varphi)U + G(r,\varphi). \end{cases}$$

Разрешая эту систему относительно U_r и U_φ, получим систему (2.40).

Обратно, подставляя в (2.46) выражения для U_r, U_φ из (2.40), выражения для частных производных $r_{x_1}, r_{x_2}, \varphi_{x_1}, \varphi_{x_2}$ из (2.47) и (2.48), после несложных преобразований приходим к системе (2.36).

2. *Доказательство эквивалентности условий (2.38), (2.39) и условий (2.41), (2.42).*

Пусть выполнены условия (2.38) и (2.39). Подставляя выражения для a_y и b_x в полярных координатах в (2.38), имеем

$$A_r \cdot \sin\varphi + A_\varphi \cdot \frac{1}{r}\cos\varphi = B_r\cos\varphi - B_\varphi \cdot \frac{1}{r}\sin\varphi\,. \tag{2.49}$$

Отсюда получаем равенство (2.41). Аналогично подставляя выражения для $\frac{\partial f_1}{\partial x_2}$ и $\frac{\partial f_2}{\partial x_1}$ в (2.39) можно получить равенство (2.42).

Обратно, переписывая условие (2.41) в виде (2.49) и учитывая формулы (2.47), (2.48) получаем равенство (2.38). Аналогично из (2.42) можно получить равенство (2.39).

Имеет место

Теорема 2.5. *Пусть* $a, b \in C(\overline{D}) \cap C^1(D), f, g \in P_N(D) \cap C^1(D)$ *и выполнены условия (2.38) и (2.39). Пусть* $c_0 > 0$. *Тогда задача* P *однозначно разрешимо и решение в полярных координатах даётся формулой*

$$U(r,\varphi) = -\int_r^{+\infty} [F(\rho,\varphi)\cos\varphi + G(\rho,\varphi)\sin\varphi] e^{\int_\rho^r C(s,\varphi)ds} d\rho. \qquad (2.50)$$

Доказательство. Проверим, что функция $U(r,\varphi)$, определенная формулой (2.50) удовлетворяет системе (2.40). Прежде всего нужно показать, что несобственный интеграл в формуле (2.50) равномерно сходится. Так как $c_0 > 0$, то по определению нижнего предела и инфимума существует такое число $T > 0$, что

$$c(\rho_1,\rho_2,\varphi) \geq \frac{c_0}{2} \quad \forall\, \varphi \in (\varphi_1,\varphi_2), \;\; \rho_1 - \rho_2 > T.$$

Поэтому

$$\frac{1}{\rho - r}\int_r^\rho C(s,\varphi)\, ds = c(\rho,r,\varphi) \geq \frac{c_0}{2}$$

при $\varphi \in (\varphi_1,\varphi_2), \;\; \rho - r > T$, т.е.

$$\int_r^\rho C(s,\varphi)\,ds \le -\frac{c_0}{2}(\rho - r) \tag{2.51}$$

при выше указанных значениях ρ, r, φ.

Считая R достаточно большим, а именно $R > r + T$, имеем

$$\int_r^R [F(\rho,\varphi)\cos\varphi + G(\rho,\varphi)\sin\varphi]\, e^{\int_\rho^r C(s,\varphi)ds} d\rho = I_1 + I_2, \tag{2.52}$$

где

$$I_1 = \int_r^{r+T} [F(\rho,\varphi)\cos\varphi + G(\rho,\varphi)\sin\varphi] e^{\int_\rho^r C(s,\varphi)ds} d\rho,$$

$$I_2 = \int_{r+T}^R [F(\rho,\varphi)\cos\varphi + G(\rho,\varphi)\sin\varphi] e^{\int_\rho^r C(s,\varphi)ds} d\rho.$$

В (2.52) произведем оценку интегралов. Так как функция $C(s,\varphi)$ ограниченная, то найдется число c_1, такое что $C(s,\varphi) \ge c_1$, причём можно считать, что $c_1 < 0$. Следовательно,

$$\int_r^\rho C(s,\varphi)\,ds \ge c_1(\rho - r)\,, \quad \rho > r,$$

т.е.

$$e^{\int_\rho^r C(s,\varphi)ds} \le e^{-c_1(\rho - r)}\,, \quad \rho > r.$$

Тогда с учётом того, что $F, G \in P_N$ имеем:

$$|I_1| = \left| \int\limits_{r}^{r+T} [F(\rho,\varphi)\cos\varphi + G(\rho,\varphi)\sin\varphi]\, e^{\int_{\rho}^{r} C(s,\varphi)ds} d\rho \right| \leq$$

$$\leq K \int\limits_{r}^{r+T} (1+\rho^N)\, e^{-c_1(\rho-r)} d\rho \leq K[1+(r+T)^N]\left(\frac{1-e^{-c_1 T}}{c_1}\right). \qquad (2.53)$$

Аналогично с учётом (2.51) имеем

$$|I_2| = \left| \int\limits_{r+T}^{R} [F(\rho,\varphi)\cos\varphi + G(\rho,\varphi)\sin\varphi]\, e^{\int_{\rho}^{r} C(s,\varphi)ds} d\rho \right| \leq$$

$$\leq K \int\limits_{r+T}^{R} (1+\rho^N)\, e^{-\frac{c_0}{2}(\rho-r)} d\rho. \qquad (2.54)$$

Вычислим интеграл J_N, находящийся в правой части этого неравенства. Имеем

$$J_0 = \int\limits_{r+T}^{R} e^{-\frac{c_0}{2}(\rho-r)} d\rho = -\frac{2}{c_0}\left[e^{-\frac{c_0}{2}(R-r)} - e^{-\frac{c_0}{2}T}\right],$$

$$J_1 = \int\limits_{r+T}^{R} \rho e^{-\frac{c_0}{2}(\rho-r)} d\rho = \begin{vmatrix} u=\rho, & dv = e^{-\frac{c_0}{2}(\rho-r)} d\rho \\ du = d\rho, & v = -\frac{2}{c_0} e^{-\frac{c_0}{2}(\rho-r)} \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{2\rho}{c_0} e^{-\frac{c_0}{2}(\rho-r)}\Big|_{\rho=r+T}^{R} + \frac{2}{c_0} J_0 =$$

$$= -\frac{2}{c_0}\left\{ R e^{-\frac{c_0}{2}(\rho-r)} - (r+T) e^{-\frac{c_0}{2}T} + \frac{2}{c_0}\left[e^{-\frac{c_0}{2}(R-r)} - e^{-\frac{c_0}{2}T}\right]\right\} =$$

$$= -\frac{2}{c_0}\left[\left(R + \frac{2}{c_0}\right) e^{-\frac{c_0}{2}(R-r)} - \left(r + T + \frac{2}{c_0}\right) e^{-\frac{c_0}{2}T}\right]$$

и т.д. Отсюда и из оценки (2.54) видно, что несобственный интеграл в формуле (2.50) является равномерно сходящимся и определяет на угле D непрерывную функцию, принадлежащую $P_N(D)$.

Теперь проверим, что функция $U(r,\varphi)$ из формулы (2.50) удовлетворяет первому уравнению системы (2.50). При дифференцировании функции $U(r,\varphi)$ возникают несобственные интегралы, равномерная сходимость которых устанавливаются как выше.

Пусть $H(r,\varphi) = F(r,\varphi)\cos\varphi + G(r,\varphi)\sin\varphi$. Имеем

$$U_r = H(r,\varphi) - \int\limits_r^{+\infty} H(\rho,\varphi) e^{\int_\rho^r C(s,\varphi)ds} \cdot C(r,\varphi)d\rho$$

или

$$U_r = H(r,\varphi) + C(r,\varphi)U,$$

т.е. U удовлетворяет первому уравнению системы (2.40).

Далее имеем

$$U_\varphi = -\int\limits_r^{+\infty} \left[H_\varphi(\rho,\varphi) + H(\rho,\varphi) \int\limits_\rho^r C_\varphi(s,\varphi)ds \right] e^{\int_\rho^r C(s,\varphi)ds} d\rho\,. \qquad (2.55)$$

Воспользуясь условием (2.42) и интегрируя по частям, находим

$$\int\limits_r^{+\infty} H_\varphi(\rho,\varphi)\, e^{\int_\rho^r C(s,\varphi)ds} d\rho = \int\limits_r^{+\infty} \big[F_\varphi(\rho,\varphi)\cos\varphi + G_\varphi(\rho,\varphi)\sin\varphi -$$

$$-F(\rho,\varphi)\sin\varphi + G(\rho,\varphi)\cos\varphi] e^{\int_\rho^r C(s,\varphi)ds} d\rho = \int\limits_r^{+\infty} \big\{[\rho G(\rho,\varphi)]_\rho \cos\varphi -$$

$$-[\rho F(\rho,\varphi)]_\rho \sin\varphi - \rho(AG - BF)\}e^{\int_\rho^r C(s,\varphi)ds}d\rho =$$

$$= \rho[G(\rho,\varphi)\cos\varphi - F(\rho,\varphi)\sin\varphi]e^{\int_\rho^r C(s,\varphi)ds}\Bigg|_{\rho=r}^{+\infty} +$$

$$+\int_r^{+\infty} \rho\{C(\rho,\varphi)[G(\rho,\varphi)\cos\varphi - F(\rho,\varphi)\sin\varphi] - (AG - BF)\}.$$

В силу условия $c_o > 0$ внеинтегральный член при $\rho = +\infty$ будет равен нулю, поэтому

$$\int_r^{+\infty} H_\varphi(\rho,\varphi)e^{\int_\rho^r C(s,\varphi)ds}d\rho = r[-G(\rho,\varphi)\cos\varphi + F(\rho,\varphi)\sin\varphi] +$$

$$+\int_r^{+\infty} \rho[(A\cos\varphi + B\sin\varphi)(G(\rho,\varphi)\cos\varphi - F(\rho,\varphi)\sin\varphi) -$$

$$-AG + BF]e^{\int_\rho^r C(s,\varphi)ds}d\rho \qquad (2.56)$$

Теперь используя условие (2.41) и интегрируя по частям, будем иметь

$$\int_\rho^r C_\varphi(s,\varphi)ds =$$

$$= \int_\rho^r \left[A_\varphi(s,\varphi)\cos\varphi + B_\varphi(s,\varphi)\sin\varphi - A(s,\varphi)\sin\varphi + B(s,\varphi)\cos\varphi\right]ds =$$

$$= \int_\rho^r [sB_s(s,\varphi)\cos\varphi - sA_s(s,\varphi)\sin\varphi - A(s,\varphi)\sin\varphi + B(s,\varphi)\cos\varphi]ds =$$

$$= \int_\rho^r \frac{\partial}{\partial s}[(sB)\cos\varphi - (sA)\sin\varphi]ds = [rB(r,\varphi) - \rho B(\rho,\varphi)]\cos\varphi -$$

$$-[rA(r,\varphi) - \rho A(\rho,\varphi)]\sin\varphi\,. \qquad (2.57)$$

Из соотношений (2.55) – (2.57) получим

$$U_\varphi = r[G(r,\varphi)\cos\varphi - F(r,\varphi)\sin\varphi] -$$
$$-\int_r^{+\infty} \{\rho[(A\cos\varphi + B\sin\varphi)(G\cos\varphi - F\sin\varphi) -$$
$$-(AG - BF)] + (F\cos\varphi + G\sin\varphi)\big[\big(rB(r,\varphi) - \rho B(\rho,\varphi)\big)\cos\varphi -$$
$$-\big(rA(r,\varphi) - \rho A(\rho,\varphi)\big)\sin\varphi\big]\}e^{\int_\rho^r C(s,\varphi)ds}d\rho$$

или вынося из под интеграла выражения, не содержащие переменную ρ и преобразуя, имеем

$$U_\varphi = r[G(r,\varphi)\cos\varphi - F(r,\varphi)\sin\varphi] +$$
$$+r[B(r,\varphi)\cos\varphi - A(r,\varphi)\sin\varphi]U(r,\varphi) -$$
$$-\int_r^{+\infty} \rho\,(AG\cos^2\varphi - AF\cos\varphi\sin\varphi + BG\sin\varphi\cos\varphi - BF\sin^2\varphi - AG + BF -$$
$$-BF\cos^2\varphi - BG\cos\varphi\sin\varphi + AF\sin\varphi\cos\varphi + AG\sin^2\varphi)$$

или

$$U_\varphi = r[G(r,\varphi)\cos\varphi - F(r,\varphi)\sin\varphi] +$$
$$+r[B(r,\varphi)\cos\varphi - A(r,\varphi)\sin\varphi]U(r,\varphi),$$

т.е. U удовлетворяет второму уравнению системы (2.36).

Теорема 2.5 доказана.

ГЛАВА 3. ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С КОМПЛЕКСНЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

В этой главе рассматриваются п.с. линейных у.ч.п. с комплексными независимыми переменными в неограниченных плоских и пространственных областях. Исследованы вопросы существования и нахождения общего решения рассматриваемых п.с. у.ч.п., а также нахождения ограниченных, периодических или степенного роста решений.

§3.1. Вспомогательные материалы

В этом параграфе будут приведены вспомогательные материалы и известные факты, используемые в дальнейшем.

Введем операторы, определённые в $C_{2\pi}$:

$$T_j f = f_0^j \bar{z}_j - 2i \sum_{k \neq 0} \frac{f_k^j}{k} e^{i(k, z_j)}, \tag{3.1}$$

где $k = k_1 + ik_2 \in Z^2$, $(k,\ z_j) = k_1 x_j + k_2 y_j$, f_k^j – коэффициенты Фурье функции f по переменной z_j, т.е.

$$f_k^j = \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_K f e^{-i(k, z_j)} dz_j, \tag{3.2}$$

$K = \{z_j = x_j + iy_j : 0 < x_j < 2\pi,\ \ 0 < y_j < 2\pi\}$. Отметим, что (см. [10]) ряд в правой части формулы (3.1) сходится в пространстве $L_2(K \times K)$ и в обобщенном смысле имеют место следующие равенства:

$$\left(T_j f\right)_{\bar{z}_j} = f, \quad T_j\left(f_{\bar{z}_j}\right) = f - f_0^j. \tag{3.3}$$

Если функция f удовлетворяет условию Гельдера по каждой переменной, то первое равенства из (3.3) будет выполнено в классическом смысле.

Введем также операторы:

$$S_j f = T_j f - f_0^j \bar{z}_j, \qquad j = 1, 2.$$

Очевидно, что $S_j f \in C_{2\pi}$, т.е. операторы S_j действуют в пространстве $C_{2\pi}$.

Лемма 3.1 ([10], стр. 44)**.** *Пусть в уравнение*

$$w_{\bar{z}_1} = a(z_1) w$$

коэффициент $a(z_1)$ *является двоякопериодической с основными периодами* 2π *и* $2\pi i$. *Тогда общее решение этого уравнения определяется формулой*

$$w(z_1) = e^{-T_1 a} \varphi(z_1),$$

где $\varphi(z_1)$ *— произвольная аналитическая функция.*

Справедлива следующая лемма об общем решении многомерной эллиптической системы с постоянными коэффициентами.

Лемма 3.2 ([10], стр. 38)**.** *Общее решение системы*

$$U_{\bar{z}} = BU, \tag{3.4}$$

здесь B *— постоянная матрица* n*-го порядка имеет вид*

$$U(z) = e^{B\bar{z}} \Phi(z), \tag{3.5}$$

где $\Phi(z)$ *— произвольная аналитическая вектор-функция.*

Формулы Грина в комплексной форме имеют вид ([17], стр. 28):

$$\iint\limits_G \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} dxdy = \frac{1}{2i} \int\limits_\Gamma w(t)dt,$$

$$\iint\limits_G \frac{\partial w}{\partial z} dxdy = -\frac{1}{2i} \int\limits_\Gamma w(t)d\bar{t},$$

где $\Gamma -$ граница области G.

Теорема Лиувилля. *Если целая функция $f(z)$ комплексных переменных $z = (z_1, \dots, z_n)$ ограничена, то есть*

$$|f(z)| \leq M < \infty,$$

то $f(z)$ есть константа.

§3.2. О многообразии решений одной многомерной переопределенной системы

В работе М.А. Рахимовой [74] рассмотрена многомерная п.с. вида

$$\begin{cases} w_{\bar{z}} = A\overline{w}, \\ w_z = B\overline{w}, \end{cases} \tag{3.6}$$

где $w \in C^n,\ A, B -$ комплексные матрицы порядка n и найдено необходимое и достаточное у.п.р. этой системы:

$$A\bar{A} = B\bar{B} \tag{3.7}$$

и там же приведена формула общего решения.

В этом параграфе будем исследовать случай, когда условие (3.7) не выполняется.

Пусть $C = A\bar{A} - B\bar{B}$ и $C \neq 0$. В случае обратимой матрицы C система (3.6) имеет только нулевое решение.

Действительно, пусть $w(z)$ удовлетворяет системе (3.6). Согласно теоремы о гладкости решений эллиптических систем (см., например, [9], [14], стр. 144) $w(z) \in C^\infty$. Тогда из (3.6) имеем

$$w_{\bar{z}z} = A\overline{w}_z = A\overline{(A\overline{w})} = A\bar{A}w,$$
$$w_{z\bar{z}} = B\overline{w}_z = B\overline{(B\overline{w})} = B\bar{B}w.$$

Отсюда

$$(A\bar{A} - B\bar{B})w(z) = 0 \tag{3.8}$$

и $w(z) \equiv 0$.

Поэтому в дальнейшем будем предполагать, что

$$\det C = \det(A\bar{A} - B\bar{B}) = 0. \tag{3.9}$$

Из (3.8) и (3.9) следует, что решения системы (3.6) должны иметь вид

$$w(z) = a_1(z)u_1 + \cdots + a_m(z)u_m, \tag{3.10}$$

где a_j − скалярные функции, u_j − собственные векторы матрицы C, отвечающие нулевому собственному значению. Подставляя выражение (3.10) в систему (3.6), для определения a_j получаем п.с. у.ч.п.

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial a_j}{\partial \bar{z}} u_j = \sum_{j=1}^{m} \bar{a}_j A \bar{u}_j\,, \\ \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial a_j}{\partial z} u_j = \sum_{j=1}^{m} \bar{a}_j B \bar{u}_j\,. \end{cases} \tag{3.11}$$

Эта система состоит из $2n$ уравнений с неизвестными $a_1, \dots, a_m$ $(m \le n)$.

Рассмотрим случай $m = 1$, т.е. нулевому собственному значению матрицы C соответствует один линейно независимый собственный вектор $u_1 = u$. Будем считать, что $\|u\|_{C^n} = 1$ и $a_1 = a \neq 0$. Тогда $w(z) = a(z)u$ и подставляя в систему (3.6), имеем

$$\begin{cases} a_{\bar{z}} u = \bar{a} A \bar{u}, \\ a_z u = \bar{a} B \bar{u}. \end{cases} \tag{3.12}$$

Умножая обе части этих уравнений скалярно на вектор u, получим

$$\begin{cases} a_{\bar{z}} = \lambda \bar{a}, \\ a_z = \mu \bar{a}, \end{cases} \tag{3.13}$$

где $\lambda = (A\bar{u}, u),\ \mu = (B\bar{u}, u)$. Из равенств (3.12) и (3.13) следует, что

$$\begin{cases} A\bar{u} = \lambda u, \\ B\bar{u} = \mu u. \end{cases} \tag{3.14}$$

Из (3.13) видно, что если $\lambda = 0$ (или $\mu = 0$), то $a \equiv const$ и $\mu = 0$ (или $\lambda = 0$). Поэтому в случае $A\bar{u} = B\bar{u} = 0$ решениями системы (3.6) будут постоянные векторы $w = cu,\ c -$ произвольное комплексное число и только они.

В случае $A\bar{u} \neq 0,\ B\bar{u} \neq 0$ из (3.14) имеем: $A\bar{A}u = \bar{\lambda}A\bar{u},\ \ B\bar{B}u = \bar{\mu}B\bar{u}$. В силу $Cu = 0$ левые части последних равенств совпадают, следовательно $\bar{\lambda}A\bar{u} = \bar{\mu}B\bar{u}$ или в силу (3.14) $|\lambda|^2 u = |\mu|^2 u$, т.е.

$$|\lambda| = |\mu|. \tag{3.15}$$

Заметим, что если условие (3.15) не выполняется, то система (3.6) не имеет решений, кроме нулевого.

Система (3.13) эквивалентна следующей системе

$$\begin{cases} a_x = (\lambda + \mu)\bar{a}, \\ a_y = -i(\lambda - \mu)\bar{a}. \end{cases} \tag{3.16}$$

Дифференцируя первое уравнение, получим: $a_{xx} - |\lambda + \mu|^2 a = 0$. Отсюда при фиксированном y, находим:

$$a = C_1(y)e^{|\lambda+\mu|x} + C_2(y)e^{-|\lambda+\mu|x},$$

где $C_1, C_2 -$ произвольные функции класса C^1. Подставляя a в первое уравнение системы (3.16) и приравняв коэффициенты при экспонентах, получим

$$|\lambda + \mu| C_1(y) = (\lambda + \mu)\overline{C_1(y)},$$
$$-|\lambda + \mu| C_2(y) = (\lambda + \mu)\overline{C_2(y)}.$$

Пусть в начале $\lambda + \mu \neq 0$. Тогда из предыдущих соотношений находим

$$C_1(y) = e^{i\gamma/2} d_1(y),$$
$$C_2(y) = i e^{i\gamma/2} d_2(y),$$

где $\gamma = \arg(\lambda + \mu)$, $d_1, d_2 -$ произвольные вещественные функции класса C_1. Поэтому

$$a = e^{i\gamma/2}\left[d_1(y) e^{|\lambda+\mu|x} + i d_2(y) e^{-|\lambda+\mu|x}\right].$$

Подставим эту функцию во второе уравнение системы (3.16):

$$d_1'(y) = -i(\lambda - \mu) e^{-i\gamma} d_1(y),$$
$$d_2'(y) = i(\lambda - \mu) e^{-i\gamma} d_2(y).$$

Легко увидеть, что выражение $\varepsilon = -i(\lambda - \mu) e^{-i\gamma}$ является вещественным. Следовательно,

$$d_1'(y) = \varepsilon d_1(y),$$
$$d_2'(y) = -\varepsilon d_2(y)$$

и

$$d_1(y) = c_1 e^{\varepsilon y},$$
$$d_2(y) = c_2 e^{-\varepsilon y},$$

c_1, c_2 – произвольные вещественные постоянные.

Таким образом, при $\lambda + \mu \neq 0$ общее решение системы (3.16) или системы (3.13) имеет вид:

$$a = e^{i\gamma/2}\left[c_1 e^{|\lambda+\mu|x+\varepsilon y} + ic_2 e^{-|\lambda+\mu|x-\varepsilon y}\right] \tag{3.17}$$

и зависит от двух произвольных вещественных постоянных.

Пусть теперь $\lambda + \mu = 0$. Тогда из первого уравнения системы (3.16) следует, что функция a не зависит от x и аналогично случаю $\lambda + \mu \neq 0$, решая второе уравнение системы (3.16), находим

$$a = e^{i(2\alpha-\pi)/4}\left[c_1 e^{2|\lambda|y} + ic_2 e^{-2|\lambda|y}\right], \tag{3.18}$$

где $\alpha = \arg\lambda$, c_1, c_2 – произвольные вещественные постоянные.

Случай $\lambda = 0$ (тогда $\mu = 0$) можно включить в (3.18), считая $\alpha = 0$.

Итак, имеет место

Теорема 3.1. *Пусть матрица $C = A\bar{A} - B\bar{B}$ вырожденная и имеет один линейно независимый собственный вектор u_o, отвечающий нулевому собственному значению. Тогда общее решение системы (3.6) при $\|\bar{A}u_0\|_{C^n} = \|\bar{B}u_0\|_{C^n}$ имеет вид*

$$w(z) = a(z)u_o,$$

где $a(z)$ определяется формулой (3.17), если $\bar{A}u_0 \neq -\bar{B}u_0$ и формулой (3.18), если $\bar{A}u_0 = -\bar{B}u_0$. В случае $\|\bar{A}u_0\|_{C^n} \neq \|\bar{B}u_0\|_{C^n}$ система (3.6) имеет только нулевое решение.

Теперь рассмотрим общий случай. Пусть нулевому собственному значению матрицы C соответствуют m линейно независимые собственные векторы $u_1, \dots, u_m$. Будем считать, что вектора $u_1, \dots, u_m$ ортонормированы. Дополним эту систему векторов до ортонормированного базиса в C^n векторами $u_{m+1}, \dots, u_n$ (см. [27]).

Разлагая вектора $A\overline{u_j}$, $B\overline{u_j}$ $(j = \overline{1,m})$ по базису $\{u_k\}_{k=1}^n$

$$A\overline{u_j} = \alpha_{j1}u_1 + \dots + \alpha_{jn}u_n, \quad \alpha_{jk} = \left(A\overline{u_j},\ u_k\right), \tag{3.19}$$

$$B\overline{u_j} = \beta_{j1}u_1 + \dots + \beta_{jn}u_n, \quad \beta_{jk} = \left(B\overline{u_j},\ u_k\right), \tag{3.20}$$

и подставляя в систему (3.11), после приравнивания коэффициентов при u_k, получим

$$\begin{cases} \dfrac{\partial a_j}{\partial \bar{z}} = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \alpha_{jk}\overline{a_k}, \\ \dfrac{\partial a_j}{\partial z} = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \beta_{jk}\overline{a_k}, \end{cases} \qquad j = \overline{1,m}; \tag{3.21}$$

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \alpha_{jk}\overline{a_j}, \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \beta_{jk}\overline{a_j}, \end{cases} \qquad k = \overline{m+1,n}. \tag{3.22}$$

Итак, для нахождения функций $a_1(z), \dots, a_m(z)$ мы получили п.с. у.ч.п. (3.21) и систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) (3.22).

Введя вектор $a = (a_1, \dots, a_m)^T$ и матрицы

$$M = \left(\alpha_{jk}\right),\ \ N = \left(\beta_{jk}\right),\ \ j,k = \overline{1,m};$$

$$P = \left(\alpha_{jk},\ \beta_{jk}\right)^T,\ j = \overline{1,m},\ k = \overline{m+1,n},$$

системы (3.21) и (3.22) запишем в виде

$$\begin{cases} a_{\bar{z}} = M\bar{a}, \\ a_z = N\bar{a}, \end{cases} \tag{3.23}$$

$$P\bar{a} = 0. \tag{3.24}$$

Возможны два случая: $a)\ P = 0;\ \ b)\ P \neq 0$.

Пусть $P = 0$. В этом случае в правых частях представлений (3.19) и (3.20) количество слагаемых будет равно m и СЛАУ (3.24) превратится в тождество.

Покажем, что выполняется равенство

$$M\bar{M} = N\bar{N}. \tag{3.25}$$

В силу (2.19) имеем

$$A\bar{A}u_j = \sum_{k=1}^{m} \overline{\alpha_{kj}}\, A\overline{u_k} = \sum_{k=1}^{m} \overline{\alpha_{kj}} \sum_{l=1}^{m} \alpha_{lk} u_l =$$

$$= \sum_{l=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} \overline{\alpha_{kj}} \alpha_{kl} u_l\,,\ \ j = \overline{1,m}. \tag{3.26}$$

Аналогично в силу (3.20):

$$B\bar{B}u_j = \sum_{k=1}^{m} \overline{\alpha_{kj}}\, A\overline{u_k} = \sum_{k=1}^{m} \overline{\alpha_{kj}} \sum_{l=1}^{m} \alpha_{lk} u_l =$$

$$= \sum_{l=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} \overline{\beta_{kj}} \beta_{kl} u_l\,,\ \ j = \overline{1,m}. \tag{3.27}$$

Так как $A\bar{A}u_j = B\bar{B}u_j,\ j = \overline{1,m}$, то из равенств (3.26) и (3.27) получим

$$\sum_{k=1}^{m} \overline{\alpha_{kj}} \alpha_{lk} = \sum_{k=1}^{m} \overline{\beta_{kj}} \beta_{lk}\,, \;\; j, l = \overline{1, m}.$$

Эти равенства эквивалентны равенству (3.25).

Как было указано выше, равенство вида (3.25) является необходимым и достаточным у.п.р. системы (3.23) и общее решение этой системы имеет вид (см. [74], стр. 32):

$$a(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} (D\bar{D})^k \left(c + \frac{1}{2k+1} D\bar{c} \right), \tag{3.28}$$

где $D = M\bar{z} + Nz,\; c -$ произвольный вектор из C^m.

Итак, в случае $P = 0$ общее решение системы (3.6) представляется в виде (3.10), где $a_1, \dots, a_m$ являются компонентами вектор-функции $a(z)$, определяемая формулой (3.28).

Случай $P \neq 0$. Если $rangP = m$, то СЛАУ (3.24) имеет только нулевое решение и тогда система (3.6) будет иметь только тривиальное решение $w = 0$. Поэтому будем считать, что

$$rangP < m.$$

Пусть $e_1, \dots, e_p -$ фундаментальная ортонормированная система решений СЛАУ

$$\bar{P}e = 0, \qquad e \in C^m$$

и $p = m - rangP$. Тогда решение системы (3.24) должно иметь вид

$$a(z) = b_1(z)e_1 + \dots + b_p(z)e_p,$$

где $b_j(z)$ – скалярные функции. Подставляя $a(z)$ в систему (3.23) и умножая обе части полученных уравнений скалярно на вектор e_j, получим следующую систему

$$\begin{cases} b_{\bar{z}} = F\bar{b}, \\ b_z = G\bar{b}, \end{cases} \tag{3.29}$$

где

$$b = \left(b_1, b_2, \dots, b_p\ \right)^T,\ \ F = \left(c_{kj}\right),\ \ G = \left(d_{kj}\right),$$
$$c_{kj} = \left(M\overline{e_k}, e_j\right),\ \ d_{kj} = \left(N\overline{e_k}, e_j\right).$$

Эта система вида (3.6), но меньшего размера чем m ($p < m \leq n$). Если $F\bar{F} = G\bar{G}$, то общее решение можно записать формулой вида (3.28), если же $F\bar{F} \neq G\bar{G}$, то нужно повторить процедуру, проведенную для системы (3.6).

Пример. Рассмотрим переопределенную систему вида

$$\begin{cases} w_{\bar{z}} = A\bar{w}, \\ w_z = \bar{w}, \end{cases} \tag{3.30}$$

где $w \in C^3$, $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, A_1 – комплексная постоянная матрица порядка два.

В этом случае

$$C = A\bar{A} - E_3.$$

Будем предполагать, что $C \neq 0$. Очевидно

$$\det C = \det(A\bar{A} - E_3) = \det\begin{pmatrix} A_1\overline{A_1} - E_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

т.е. условие (3.9) выполняется.

Найдём собственные векторы $U = (u, v, w)^T$ матрицы C, отвечающие нулевому собственному значению, из СЛАУ

$$\begin{pmatrix} A_1\overline{A_1} - E_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U = 0. \tag{3.31}$$

Отсюда

$$\begin{cases} (A_1\overline{A_1} - E_2)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0, \\ 0 \cdot u + 0 \cdot v + 0 \cdot w = 0, \end{cases} \tag{3.32}$$

т.е. $w -$ произвольное комплексное число. В силу условия $C \neq 0$ имеем $D = A_1\overline{A_1} - E_2 \neq 0$. Поэтому $rangD = 1$ или 2.

Случай $rangD = 1$. Первое уравнение из (3.32) имеет одно линейно независимое решение $(u_o, v_o)^T$; можно считать, что $|u_o|^2 + |v_o|^2 = 1$. Так как $rang(A_1\overline{A_1} - E_2) = 1$, то система (3.31) имеет два линейно независимых решения. В качестве таких решений возьмём $U_1 = (u_o, v_o, 0)^T$, $U_2 = (0, 0, w_o)^T$, где $|w_o| = 1$.

Пусть $D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix}$ и первая строка этой матрицы ненулевая. Положим $U_3 = (u_1, v_1, 0)$, где

$$u_1 = d^{-1}\overline{d_{11}}, \quad v_1 = d^{-1}\overline{d_{12}}, \quad d = (|d_{11}|^2 + |d_{12}|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Очевидно, что $\|U_3\| = 1$, $(U_2, U_3) = 0$. Покажем, что $(U_1, U_3) = 0$. В силу первого уравнения системы (3.32) справедливо равенство

$$d_{11}u_o + d_{12}v_o = 0.$$

Поэтому $u_1\overline{u_o} + v_1\overline{v_o} = 0$. Левая часть этого равенства есть не что иное, как скалярное произведение векторов U_3 и U_1.

Итак, векторы U_1, U_2, U_3 образуют ортонормированный базис в C^3, причем U_1 и U_2 собственные векторы матрицы C, отвечающие нулевому собственному значению.

Теперь находим матрицы M, N и P, для чего нужно найти α_{jk}, β_{jk}, $j = 1, 2; k = 1, 2, 3$.

Считая $A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, имеем

$$\alpha_{11} = (A\overline{U_1},\ U_1) = a_{11}\overline{u_o}^2 + (a_{12} + a_{21})\overline{u_o}\,\overline{v_o} + a_{22}\overline{v_o}^2,$$

$$\alpha_{12} = (A\overline{U_1}, U_2) = 0,\ \ \alpha_{13} = (A\overline{U_1}, U_3) = (a_{11}\overline{u_1} + a_{21}\overline{v_1})\overline{u_o} +$$

$$+(a_{12}\overline{u_1} + a_{22}\overline{v_1})\overline{v_o},\ \ \alpha_{21} = (A\overline{U_2}, U_1) = 0 \quad \alpha_{22} = (A\overline{U_2}, U_2) = \overline{w_o}^2,$$

$$\alpha_{23} = (A\overline{U_2}, U_3) = 0;\ \beta_{11} = (\overline{U_1},\ U_1) = \overline{u_o}^2 + \overline{v_o}^2,$$

$$\beta_{12} = (\overline{U_1},\ U_2) = 0,\ \beta_{13} = (\overline{U_1},\ U_3)\overline{u_o}\,\overline{u_1} + \overline{v_o}\,\overline{v_1},\ \beta_{21} = (\overline{U_2},\ U_1) = 0,$$

$$\beta_{22} = (\overline{U_2},\ U_2) = \overline{w_o}^2,\ \beta_{23} = (\overline{U_2},\ U_3) = 0.$$

Следовательно,

$$M = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 \\ 0 & \overline{w_o}^2 \end{pmatrix},\ N = \begin{pmatrix} \overline{u_o}^2 + \overline{v_o}^2 & 0 \\ 0 & \overline{w_o}^2 \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} \alpha_{13} & 0 \\ \overline{u_o}\,\overline{u_1} + \overline{v_o}\,\overline{v_1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Определим решения систем (3.23) и (3.24). Система (3.24) имеет вид

$$\begin{cases} \alpha_{13}\overline{a_1(z)} = 0, \\ (\overline{u_o}\,\overline{u_1} + \overline{v_o}\,\overline{v_1})\overline{a_1(z)} = 0. \end{cases} \tag{3.33}$$

Если $|\alpha_{13}| + |u_0 u_1 + v_0 v_1| > 0$, то $a_1(z) = 0$. Тогда система (3.21) будет иметь вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial a_2}{\partial \bar{z}} = \overline{w_0}^2 \overline{a_2}, \\ \dfrac{\partial a_2}{\partial z} = \overline{w_0}^2 \overline{a_2}. \end{cases} \tag{3.34}$$

Вычитая эти уравнения, получим $\frac{\partial a_2}{\partial y} = 0$, т.е. a_2 зависит только от переменной x и следовательно

$$\frac{\partial a_2}{\partial x} = 2\overline{w_0}^2 \overline{a_2}. \tag{3.35}$$

Отсюда

$$\frac{\partial^2 a_2}{\partial x^2} = 2\overline{w_0}^2 \cdot \frac{\partial \overline{a_2}}{\partial x} = 2\overline{w_0}^2 \cdot \overline{\left(\frac{\partial a_2}{\partial x}\right)} = 4a_2,$$

так как $|w_0| = 1$. Поэтому $a_2 = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$, где $c_1, c_2 -$ комплексные постоянные. Подставим эту функцию в уравнение (3.35):

$$2(c_1 e^{2x} - c_2 e^{-2x}) = 2\overline{w_0}^2 (c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}).$$

Далее получим

$$c_1 = \overline{w_0}^2 \overline{c_1}, \quad -c_2 = \overline{w_0}^2 \overline{c_2}.$$

Пусть

$$w_{\text{o}} = e^{i\varphi_{\text{o}}}, \qquad c_j = \alpha_j e^{i\varphi_j}, \qquad j = 1, 2.$$

Тогда имеем следующие соотношения

$$e^{i\varphi_1} = e^{-i(2\varphi_{\text{o}}+\varphi_1)}, e^{i(\pi+\varphi_2)} = e^{-i(2\varphi_{\text{o}}+\varphi_2)},$$

из которых находим

$$\varphi_1 = \varphi_{1k} \equiv -\varphi_{\text{o}} + \frac{\pi k}{2}, \quad \varphi_2 = \varphi_{2k} \equiv -\varphi_{\text{o}} + \frac{\pi l}{2}, \quad k, l = 0, 1, 2, 3. \tag{3.36}$$

Итак, в рассматриваемом случае

$$a_1 = 0, \quad a_2 = d_1 e^{i\varphi_1} e^{2x} + d_2 e^{i\varphi_2} e^{-2x}, \tag{3.37}$$

где $d_1, d_2 -$ произвольные вещественные числа, и общее решение системы (3.30) имеет вид

$$w = a_1 U_1 + a_2 U_2 = \left(d_1 e^{i\varphi_1} e^{2x} + d_2 e^{i\varphi_2} e^{-2x}\right)\left(0, \ 0, \ e^{i\varphi_{\text{o}}}\right)^T.$$

Если числа α_{13} и $u_{\text{o}} u_1 + v_{\text{o}} v_1$ равны нулю, то система (3.33) превратится в тождество и мы рассмотрим систему (3.21):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial a_1}{\partial \bar{z}} = \alpha_{11} \overline{a_1}, \\ \dfrac{\partial a_1}{\partial z} = \left(\overline{u_{\text{o}}}^2 + \overline{v_{\text{o}}}^2\right) \overline{a_1}, \\ \dfrac{\partial a_2}{\partial \bar{z}} = \overline{w_{\text{o}}}^2 \overline{a_2}, \\ \dfrac{\partial a_2}{\partial z} = \overline{w_{\text{o}}}^2 \overline{a_2}. \end{cases} \tag{3.38}$$

Последние два уравнения – эта система (3.34), общее решение которой даётся в виде (3.37). Складывая и вычитая первые два уравнения, получим

$$\begin{cases} \dfrac{\partial a_1}{\partial x} = \mu\overline{a_1}, \\ \dfrac{\partial a_1}{\partial y} = \nu\overline{a_1}, \end{cases} \tag{3.39}$$

где

$$\mu = \alpha_{11} + \overline{u_0}^2 + \overline{v_0}^2,$$
$$\nu = -i\left(\alpha_{11} - \overline{u_0}^2 - \overline{v_0}^2\right).$$

Первое уравнение этой системы решается как уравнение (3.35) и

$$a_1 = C_1(y)e^{|\mu|x} + C_2(y)e^{-|\mu|x}, \tag{3.40}$$

где $C_1(y), C_2(y)$ – произвольные функции класса $C^1(R)$. Отсюда и из второго уравнения системы (3.39), имеем:

$$C_1'(y)e^{|\mu|x} + C_2'(y)e^{-|\mu|x} = \nu\left[\overline{C_1(y)}e^{|\mu|x} + \overline{C_2(y)}e^{-|\mu|x}\right].$$

Отсюда имеем $C_1'(y) = \nu\overline{C_1(y)}$, $C_2'(y) = \nu\overline{C_2(y)}$ или

$$C_j(y) = d_j e^{|\nu|y} + e_j e^{-|\nu|y}, \quad j = 1, 2, \tag{3.41}$$

здесь d_j, e_j – произвольные комплексные постоянные.

Таким образом, в рассматриваемом случае a_1 определяется с помощью формул (3.40) и (3.41), a_2 – формулы (3.37) и общее решение системы (3.30) даётся в виде

$$w = a_1 U_1 + a_2 U_2.$$

Случай $rangD = 2$. В этом случае первое уравнение системы (3.32) имеет только нулевое решение $u = v = 0$ и общее решение системы (3.31) имеет вид $U = (0, 0, w)^T$, где $w \in C^1$. Далее из (3.10) получим

$$w(z) = \left(0, 0, w_0 a(z)\right)^T, \tag{3.42}$$

где $|w_0| = 1$, $a(z) -$ скалярная функция, подлежащая определению. Выражение (3.42) подставляя в систему (3.30), получим

$$\begin{cases} w_0 a_{\bar{z}} = \overline{w_0}\, \bar{a}, \\ w_0 a_z = \overline{w_0}\, \bar{a}. \end{cases}$$

Эта система похожа на систему (3.34) и его общее решение даётся формулой типа (3.37).

Итак, в случае $rangD = 2$ общее решение системы (3.30) имеет вид

$$w(z) = \left(0, 0, d_1 e^{i\varphi_1} e^{2x} + d_2 e^{i\varphi_2} e^{-2x}\right)^T,$$

где $d_1, d_2 -$ произвольные вещественные числа, а φ_1 и φ_2 определяются формулой (3.36).

§3.3. Об общем решении переопределенной системы двух комплексных уравнений с частными производными

3.3.1. Рассмотрим п.с. вида

$$\begin{cases} w_{\bar{z}_1} + a(z_1, z_2)w = f(z_1, z_2), \\ w_{\bar{z}_2} + b(z_1, z_2)w = g(z_1, z_2). \end{cases} \tag{3.43}$$

где $w = w(z_1, z_2)$ – искомая, $a,\ b,\ f$ и g – заданные комплекснозначые функции двух комплексных переменных z_1, z_2 $\left(z_j = x_j + iy_j\right)$,

$$2w_{\bar{z}_j} = w_{x_j} + iw_{y_j}.$$

За $C_{2\pi}$ сохраним обозначение пространства непрерывных в C^2 функций $f(z_1, z_2)$, удовлетворяющих условиям:

$$f(z_1 + h_1, z_2) = f(z_1, z_2), \qquad f(z_1, z_2 + h_2) = f(z_1, z_2) \tag{3.44}$$

здесь $h_j \in \{2\pi,\ 2\pi i\}$. Функцию, удовлетворяющую условиям (3.44) называют двояко-периодической (см. [95]).

Если коэффициенты и правые части системы (3.43) имеют частные производные первого порядка, то необходимыми и достаточными у.п.р. (см. [44], стр. 86) являются следующие два равенства

$$\frac{\partial a}{\partial \bar{z}_2} = \frac{\partial b}{\partial \bar{z}_1}, \tag{3.45}$$

$$-ag + bf + f_{\bar{z}_2} - g_{\bar{z}_1} = 0. \tag{3.46}$$

В [42] системы вида (3.43) из n уравнений рассмотрены в полицилиндре и получено представление общего решения через интегральные операторы Векуа и Коши.

Д. Сафаровым для обобщенной системы Коши-Римана со многими переменными и двоякопериодическими коэффициентами исследована задача о двоякопериодических решениях и установлены соответствующие теоремы существования и представления решений (см. [80], стр. 143). Мы будем исследовать задачу об общем решении системы (3.43) с коэффициентами из пространства $C_{2\pi}$, применяя операторы T_j (см. п. 3.1).

В дальнейшем будем считать, что для коэффициентов и правых частей системы (3.43) выполнены условия (3.44) - (3.46).

3.3.2. Для однородной системы

$$\begin{cases} w_{\bar{z}_1} + a(z_1, z_2)w = 0, \\ w_{\bar{z}_2} + b(z_1, z_2)w = 0 \end{cases} \tag{3.47}$$

справедлива следующая теорема о представлении общего решения.

Теорема 3.2. *Пусть коэффициенты системы (3.47) удовлетворяют условиям (3.44) и (3.45). Тогда общее решение этой системы даётся формулой*

$$w(z_1, z_2) = e^{2iIm(\overline{a_0}z_1 + \overline{b_0}z_2)}\omega_1(z_1, z_2)\omega_2(z_2)\Phi(z_1, z_2), \tag{3.48}$$

где a_0, $b_0 -$ *средние значения функций* a, b *соответственно,* $\omega_1 = e^{-S_1 a}$, $\omega_2 = e^{-S_2 b_0^1}$, $\Phi -$ *произвольная аналитическая по* z_1, z_2 *функция,*

$$b_0^1(z_2) = \frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_K b(z_1, z_2)dz_1\,. \tag{3.49}$$

Доказательство. Если в первом уравнении системы (3.47) зафиксировать переменную z_2, то решения этого уравнения имеют вид (см. лемму 3.1):

$$w(z_1, z_2) = e^{-T_1 a}\varphi(z_1, z_2), \tag{3.50}$$

где $\varphi -$ аналитическая по z_1 функция. Подставим $w(z_1, z_2)$ во второе уравнение системы (3.47):

$$e^{-T_1 a}\left[-(T_1 a)_{\bar{z}_2}\varphi + \varphi_{\bar{z}_2}\right] + be^{-T_1 a}\varphi = 0$$

или

$$-(T_1 a)_{\bar{z}_2}\varphi + \varphi_{\bar{z}_2} + b\varphi = 0. \tag{3.51}$$

Покажем, что коэффициенты Фурье a_0^1 и b_0^2 являются постоянными. Действительно, в силу условия (3.45) и формулы Грина в комплексной форме, имеем

$$4\pi^2 \frac{\partial a_0^1}{\partial \bar{z}_2} = \iint\limits_K \frac{\partial a(z_1, z_2)}{\partial \bar{z}_2} dz_1 = \iint\limits_K \frac{\partial b(z_1, z_2)}{\partial \bar{z}_1} dz_1 = \frac{1}{2i} \int\limits_{\partial K} b(t_1, z_2) dt_1, \tag{3.52}$$

здесь $\partial K -$ граница квадрата K. В силу периодичности функции b по переменной z_1 контурный интеграл в (3.52) равен нулю, поэтому $\frac{\partial a_0^1}{\partial \bar{z}_2} = 0$, т.е. функция $a_0^1(z_2)$ является аналитической и так как она ограниченная в C^1, то согласно теореме Лиувилля она будет постоянной. Аналогично можно показать, что $b_0^2 \equiv const$ и легко увидеть, что $a_0^1 = a_0,\ b_0^2 = b_0$.

Далее имеем

$$(T_1 a)_{\bar{z}_2} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_2}\left[a_0^1 \bar{z}_1 - 2i \sum_{k \neq 0} \frac{a_k^1(z_2)}{k} e^{i(k, z_1)}\right] = T_1\left(\frac{\partial a}{\partial \bar{z}_2}\right) =$$

$$= T_1\left(\frac{\partial b}{\partial \bar{z}_1}\right) = b(z_1, z_2) - b_0^1(z_2),$$

в силу (3.45) и второго равенства из (3.3). Отсюда и из (3.51) получим

$$\varphi_{\bar{z}_2} + b_0\varphi = 0,$$

следовательно, в силу леммы 3.1

$$\varphi(z_1, z_2) = e^{-T_2 b_0^1}\psi(z_1, z_2),$$

здесь $\psi -$ произвольная аналитическая по z_1, z_2 функция. Тогда формула (3.50) примет вид

$$w(z_1, z_2) = e^{-T_1 a - T_2 b_0^1}\psi(z_1, z_2). \tag{3.53}$$

Докажем, что это функция (3.53) удовлетворяет системе (3.47). Действительно, в силу первого равенства из (3.3) и аналитичности функции ψ, имеем

$$w_{\bar{z}_1} = e^{-T_1 a - T_2 b_0^1}(-T_1 a)_{\bar{z}_1}\psi(z_1, z_2) = -aw,$$

т.е. первое уравнение системы (3.47) удовлетворяется.

Далее с учетом условия (3.45) и второго равенства из (3.3) получим:

$$(T_1 a)_{\bar{z}_2} = T_1\left(a_{\bar{z}_2}\right) = T_1\left(b_{\bar{z}_1}\right) = b_1 - b_0^1, \;\; (T_2 b_0^1)_{\bar{z}_2} = b_0^1.$$

Поэтому

$$w_{\bar{z}_2} = e^{-T_1 a - T_2 b_0^1}(-T_1 a - T_2 b_0^1)_{\bar{z}_2}\psi(z_1, z_2) =$$

$$= e^{-T_1 a - T_2 b_0^1}\left[-b + b_0^1 - (T_2 b_0^1)_{\bar{z}_2}\right]\psi(z_1, z_2) = -be^{-T_1 a - T_2 b_0^1}\psi(z_1, z_2) = -bw,$$

т.е. w удовлетворяет и второму уравнению системы (3.47).

Таким образом, формула (3.53) определяет общее решение системы (3.47).

Осталось привести формулу (3.53) к виду (3.48). Так как

$$T_1 a = S_1 a + a_0 \bar{z}_1, \quad T_2 b_0^1 = S_2 b_0^1 + b_0 \bar{z}_2,$$

то из (3.53) имеем

$$w(z_1, z_2) = e^{-S_1 a - S_2 b_0^1} e^{-a_0 \bar{z}_1 - b_0 \bar{z}_2}\, \psi(z_1, z_2).$$

Пусть $\Phi(z_1, z_2) = e^{-\overline{a_0} z_1 - \overline{b_0} z_2}\, \psi(z_1, z_2)$, тогда

$$w(z_1, z_2) = e^{-S_1 a - S_2 b_0^1} e^{-a_0 \bar{z}_1 - b_0 \bar{z}_2 + \overline{a_0} z_1 + \overline{b_0} z_2} \Phi(z_1, z_2),$$

откуда получаем представление (3.48).

Теорема 3.2 доказана.

В представлении (3.48) общего решения системы (3.47) первый множитель является почти-периодической, второй – периодической, а третий – аналитической функцией по $z_1,\ z_2$.

3.3.3. Ограниченные и периодические решения однородной системы. Если $w(z_1, z_2)$ ограниченное во всем C^2 решение системы (3.47), то аналитическая функция $\Phi(z_1, z_2)$ будет ограниченной в C^2 и в силу теоремы Лиувилля $\Phi(z_1, z_2) \equiv c,\ c -$ постоянная. Поэтому все ограниченные в C^2 решения системы (3.47) даются формулой

$$w(z_1, z_2) = e^{2iIm(\overline{a_0} z_1 + \overline{b_0} z_2)} \omega_1(z_1, z_2) \omega_2(z_2) c. \tag{3.54}$$

Все эти решения являются почти-периодическими.

Если $2a_0,\ 2b_0 \in Z^2$, то все $w \in C_{2\pi}$, в противном случае система (3.47) в пространстве $C_{2\pi}$ имеет только нулевое решение. Если только $2a_0 \in Z^2$ (или $2b_0 \in Z^2$), то все решения (3.54) будут периодическими по z_1 (или по z_2).

Если нас интересуют решения $w(z_1, z_2)$, имеющие рост на бесконечности не быстрее полинома, т.е. удовлетворяющие условию

$$|w(z_1, z_2)| \leq M(1 + |z_1| + |z_2|)^N,$$

$M -$ положительная постоянная, зависящая от w, $N -$ целое неотрицательное число, то опять в силу теоремы Лиувилля функция $\Phi(z_1, z_2)$ будет полиномом $P_N(z_1, z_2)$ по z_1 и z_2 степени не выше N и решения системы (3.47) имеют вид

$$w(z_1, z_2) = e^{2iIm(\overline{a_0}z_1 + \overline{b_0}z_2)}\omega_1(z_1, z_2)\omega_2(z_2)P_N(z_1, z_2). \tag{3.55}$$

Аналогично формулам (3.48), (3.54) и (3.55) можно получить другие формулы общего, ограниченных и решений степенного роста системы (3.47):

$$w(z) = e^{2iIm(\overline{a_0}z_1 + \overline{b_0}z_2)}\Omega_1(z_1)\Omega_2(z_1, z_2)\psi(z), \tag{3.56}$$

$$w(z) = e^{2iIm(\overline{a_0}z_1 + \overline{b_0}z_2)}\Omega_1(z_1)\Omega_2(z_1, z_2)c, \tag{3.57}$$

$$w(z) = e^{2iIm(\overline{a_0}z_1 + \overline{b_0}z_2)}\Omega_1(z_1)\Omega_2(z_1, z_2)Q_N(z_1, z_2), \tag{3.58}$$

где

$$\Omega_1 = e^{-S_1 a_0^1}, \qquad \Omega_2 = e^{-S_2 b}, \qquad a_0^1(z_1) = \frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_K a(z_1, z_2)dz_2,$$

$\psi(z_1, z_2) -$ произвольная аналитическая по z_1 и z_2 функция, $c -$ произвольная постоянная, $Q_N(z_1, z_2) -$ произвольный полином по z_1 и z_2 степени не выше N.

3.3.4. Общее решение неоднородной системы. Предположим, что в системе (3.43) $a,\ b,\ f,\ g \in C_{2\pi} \cap C^1$, выполнены у.п.р. (3.45), (3.46) и средние значения a_0, b_0 функций $a(z_1, z_2),\ b(z_1, z_2)$ равны нулю.

Первое уравнение системы (3.43) перепишем в виде

$$(we^{T_1 a})_{\bar{z}_1} = e^{T_1 a} f. \tag{3.59}$$

В силу условия $a_0 = 0$ правая часть соотношения (3.59) принадлежит пространству $C_{2\pi}$, поэтому учитывая первое равенство из (3.3) имеем

$$we^{T_1 a} = T_1(e^{T_1 a} f) + \varphi(z_1, z_2),$$

где $\varphi -$ аналитическая по z_1 функция.

Далее из формулы

$$w = e^{-T_1 a}[T_1(e^{T_1 a} f) + \varphi] \tag{3.60}$$

и второго уравнения системы (3.43), имеем:

$$e^{-T_1 a}\{-(T_1 a)_{\bar{z}_1}[T_1(e^{T_1 a} f) + \varphi] + [T_1(e^{T_1 a} f) + \varphi]_{\bar{z}_1} +$$

$$+b[T_1(e^{T_1 a} f) + \varphi]\} = g. \tag{3.61}$$

Находим нужные производные, используя условия (3.45), (3.46) и равенства (3.3):

$$(T_1 a)_{\bar{z}_2} = T_1\left(a_{\bar{z}_2}\right) = T_1\left(b_{\bar{z}_1}\right) = b(z_1, z_2) - b_0^1(z_2); \tag{3.62}$$

$$[T_1(e^{T_1 a} f)]_{\bar{z}_2} = T_1\left[(e^{T_1 a} f)_{\bar{z}_2}\right] = T_1\left\{e^{T_1 a}\left[(T_1 a)_{\bar{z}_2} f + f_{\bar{z}_2}\right]\right\} =$$

$$= T_1\left\{e^{T_1 a}\left[(b - b_0^1) f + f_{\bar{z}_2}\right]\right\} = T_1\left\{e^{T_1 a}\left(ag + g_{\bar{z}_1}\right) - e^{T_1 a} b_0^1 f\right\} =$$

$$= T_1\left[(e^{T_1 a} g)_{\bar{z}_1}\right] - b_0^1 T_1(e^{T_1 a} f) = e^{T_1 a} g - h(z_2) - b_0^1 T_1(e^{T_1 a} f), \tag{3.63}$$

где b_0^1 определяется по формуле (3.49), $h(z_2)$ – среднее значение функции $e^{T_1 a} g$ по переменной z_1. Подставляя найденные производные в (3.61), получим

$$(-b + b_0^1)[T_1(e^{T_1 a} f) + \varphi] + e^{T_1 a} g - h - b_0^1 T_1(e^{T_1 a} f) + \varphi_{\overline{z_2}} +$$

$$+ b[T_1(e^{T_1 a} f) + \varphi] = e^{T_1 a} g.$$

Отсюда после сокращений, будем иметь

$$\varphi_{\bar{z}_2} + b_0^1 \varphi = h.$$

Подобно тому как была получена формула (3.60), находим

$$\varphi = e^{-T_2 b_0^1}\left[T_2\left(e^{T_2 b_0^1} h\right) + \psi\right],$$

где ψ – аналитическая по z_1 и z_2 функция. Подставляя выражение для φ в (3.60), имеем

$$w(z) = e^{-T_1 a}\left\{T_1(e^{T_1 a} f) + e^{-T_2 b_0^1}\left[T_2\left(e^{T_2 b_0^1} h\right) + \psi(z)\right]\right\} \qquad (3.64)$$

где $\psi(z)$ аналитическая по $z = (z_1, z_2)$ функция.

Используя свойства операторов T_1 и T_2 и условия (3.45), (3.46) и равенство (3.3) проверим, что для любой аналитической функции $\psi(z)$, $z = (z_1, z_2)$ формула (3.61) определяет решение системы (3.43).

Достаточно проверить, что функция

$$\omega(z_1, z_2) = e^{-T_1 a}\left[T_1(e^{T_1 a} f) + e^{-T_2 b_0^1} T_2\left(e^{T_2 b_0^1} h\right)\right]$$

является частным решением системы (3.43). Имеем

$$\omega_{\bar{z}_1} = -(T_1 a)_{\bar{z}_1} e^{-T_1 a} T_1(e^{T_1 a} f) + f -$$

$$-e^{-T_1 a - T_2 b_0^1}\left[a + (T_2 b_0^1)_{\bar{z}_1}\right] T_2\left(e^{T_2 b_0^1} h\right) + e^{-T_1 a - T_2 b_0^1}\left[T_2\left(e^{T_2 b_0^1} h\right)\right]_{\bar{z}_1}.$$

Учитывая, что b_0^1 и h зависят только от z_2 и первое соотношение из (3.3), получим

$$\omega_{\bar{z}_1} = -a e^{-T_1 a}\left[T_1(e^{T_1 a} f) + e^{-T_2 b_0^1} T_2\left(e^{T_2 b_0^1} h\right)\right] + f$$

или

$$\omega_{\bar{z}_1} = -a\omega + f,$$

т.е. $\omega(z_1, z_2)$ удовлетворяет первому уравнению системы (3.43).

Далее находим

$$\omega_{\bar{z}_2} = -(T_1 a)_{\bar{z}_2} e^{-T_1 a} T_1(e^{T_1 a} f) + e^{-T_1 a}[T_1(e^{T_1 a} f)]_{\bar{z}_2} -$$

$$-\left\{(T_1 a + T_2 b_0^1)_{\bar{z}_2} T_2\left(e^{T_2 b_0^1} h\right) - \left[T_2\left(e^{T_2 b_0^1} h\right)\right]_{\bar{z}_2}\right\} e^{-T_1 a - T_2 b_0^1}.$$

В силу (3.62) и (3.63) справедливы равенства

$$(T_1 a)_{\bar{z}_2} = b - b_0^1,$$

$$[T_1(e^{T_1 a} f)]_{\bar{z}_2} = e^{T_1 a} g - h - b_0^1 T_1(e^{T_1 a} f),$$

здесь использовано условие (3.46). Поэтому

$$\omega_{\bar{z}_2} = (b_0^1 - b) e^{-T_1 a} T_1(e^{T_1 a} f) + e^{-T_1 a}[e^{T_1 a} g - h - b_1^0 T_1(e^{T_1 a} f)] -$$

$$-\left[(b-b_0^1)T_2\left(e^{T_2 b_0^1}h\right)+b_0^1 T_2\left(e^{T_2 b_0^1}h\right)-e^{T_2 b_0^1}h\right]e^{-T_1 a-T_2 b_0^1}$$

или после сокращений

$$\omega_{\bar{z}_2}=-be^{-T_1 a}\left[T_1(e^{T_1 a}f)+e^{-T_2 b_0^1}T_2\left(e^{T_2 b_0^1}h\right)\right]+g=-b\omega+g,$$

т.е. $\omega(z_1,z_2)$ удовлетворяет и второму уравнению системы (3.43).

Итак, мы получили следующую теорему.

Теорема 3.3. *Пусть в системе (3.43)* $a,\ b,\ f,\ g\in C_{2\pi}\cap C^1$, *выполнены условия полной разрешимости (3.45), (3.46) и средние значения функций* a *и* b *равны нулю. Тогда общее решение этой системы даётся формулой (3.64), в которой* $\psi(z)$, $z=(z_1,z_2)$ *произвольная аналитическая функция переменной* z, b_0^1, $h-$ *средние значения функций* b *и* $e^{T_1 a}g$ *по переменной* z_1 *соответственно, операторы* T_1 *и* T_2 *определяются по формуле (3.1).*

§3.4. Нахождение решений обобщенной системы Коши-Римана с несколькими переменными

Рассмотрим общую систему с n независимыми переменными $z = (z_1, \dots, z_n)$

$$w_{\bar{z}_j} + a_j w = f_j(z), \quad j = \overline{1,n}, \tag{3.64}$$

где a_j и f_j − заданные функции переменной z, определённые во всем пространстве C^n.

По аналогии с системой (3.43), при условии, что функции a_j и f_j гладкие, необходимыми и достаточными у.п.р. системы (3.64) будут равенства (см. [44], стр. 86):

$$\frac{\partial a_j}{\partial \bar{z}_k} = \frac{\partial a_k}{\partial \bar{z}_j}, \tag{3.65}$$

$$\frac{\partial f_j}{\partial \bar{z}_k} - \frac{\partial f_k}{\partial \bar{z}_j} + a_k f_j - a_j f_k = 0, \quad j \neq k. \tag{3.66}$$

Ниже приведем утверждение о преставлении общего решения однородной системы

$$w_{\bar{z}_k} + a_k w = 0, \quad k = \overline{1,n}, \tag{3.67}$$

когда коэффициенты a_k принадлежат пространству $C_{2\pi}$.

Для функций $a_k \in C_{2\pi}$ введем следующие средние значения

$$a_{k,j} = \gamma_j \int\limits_{K^j} a_k(z) d\omega_j, \quad 1 \leq j \leq n, \tag{3.68}$$

где

$$\gamma_j = (2\pi)^{-2j}, \;\; d\omega_j = dz_1 \cdots dz_j, \;\; K_j = \{(z_1, \dots, z_j) : z_t \in K, \;\; t = 1, \dots, j\}.$$

Положим $a_{k,0} = a_k(z)$, среднее значение функции $a \in C_{2\pi}$ по переменной z_j обозначим через $[a]_j$. Очевидно, что $[a_k]_1 = a_{k,1}$.

Справедлива следующая

Теорема 3.4. *Пусть коэффициенты однородной системы (3.67) принадлежат $C_{2\pi}$ и выполнены условия (3.65). Тогда общее решение этой системы представляется в виде*

$$w(z) = e^{-\Omega(z)}\varphi(z), \tag{3.69}$$

где

$$\Omega(z) = \sum_{j=1}^{n} T_j \, a_{j,j-1}, \tag{3.70}$$

$\varphi(z)$ *– произвольная аналитическая по* z *функция.*

Доказательство. Пусть функция $w(z)$ – решение системы (3.67). Покажем, что найдется аналитическая по z функция $\varphi(z)$ для которой верно представление (3.69).

Доказательство проведем методом математической индукции. При $n = 2$ справедливость представления вида (3.69) установлено в теореме 3.2 (формула (3.48)).

Пусть представление (3.69) верно для $n > 2$. Покажем справедливость этого представление для $n + 1$. Так как

$$w_{\bar{z}_k} + a_k(z_1, \dots, z_{n+1})w = 0, \quad k = \overline{1, n+1}, \tag{3.71}$$

то в силу индуктивного предположения существует такая аналитическая по $z_1, \dots, z_n$ функция $\varphi(z_1, \dots, z_{n+1})$, что верно равенство

$$w = e^{-\Omega_n}\varphi, \tag{3.72}$$

где

$$\Omega_n = \sum_{j=1}^{n} T_j a_{j,j-1}.$$

Рассмотрим первые n уравнения, переменную z_{n+1} будем считать фиксированным. Подставим (3.72) в $(n+1)-$ое равенство из (3.71):

$$e^{-\Omega_n}\left[\left(-\frac{\partial\Omega_n}{\partial\bar{z}_{n+1}}\varphi + \varphi_{\bar{z}_{n+1}}\right) + a_{n+1}\varphi\right] = 0$$

или

$$\varphi_{\bar{z}_{n+1}} + \left(a_{n+1} - \frac{\partial\Omega_n}{\partial\bar{z}_{n+1}}\right)\varphi = 0. \tag{3.73}$$

Далее имеем

$$\frac{\partial\Omega_n}{\partial\bar{z}_{n+1}} = \sum_{j=1}^{n} T_j\left(\frac{\partial}{\partial\bar{z}_{n+1}} a_{j,j-1}\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \gamma_{j-1} T_j\left[\int\limits_{K^{j-1}} \frac{\partial}{\partial\bar{z}_{n+1}} a_j(z_1, \dots, z_{n+1})\, dz_1 \cdots dz_{j-1}\right].$$

В силу (3.65) верно равенство

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_{n+1}} a_j(z_1, \dots, z_{n+1}) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} a_{n+1}(z_1, \dots, z_{n+1}),$$

поэтому с учетом второго равенство из (3.3), получим

$$\frac{\partial \Omega_n}{\partial \bar{z}_{n+1}} = \sum_{j=1}^{n} \gamma_{j-1} T_j \left[\int\limits_{K^{j-1}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} a_{n+1}(z_1, \dots, z_{n+1})\, dz_1 \cdots dz_{j-1} \right] =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \gamma_{j-1} \int\limits_{K^{j-1}} \left\{ a_{n+1}(z_1, \dots, z_{n+1}) - [a_{n+1}]_j \right\} dz_1 \cdots dz_{j-1}.$$

Отсюда учитывая определения выражений a_{kj} и $[a]_j$ будем иметь

$$\frac{\partial \Omega_n}{\partial \bar{z}_{n+1}} = \sum_{j=1}^{n} \left(a_{n+1,j-1} - a_{n+1,j} \right) = a_{n+1,0} - a_{n+1,n} = a_{n+1} - a_{n+1,n}.$$

Теперь подставим это выражение в (3.73):

$$\varphi_{\bar{z}_{n+1}} + a_{n+1,n} \varphi = 0.$$

Поэтому

$$\varphi = e^{-T_{n+1} a_{n+1,n}} \psi, \tag{3.74}$$

где $\psi -$ аналитическая по z_{n+1} функция или в силу (3.72)

$$w = e^{-\Omega_n - T_{n+1} a_{n+1,n}} \psi = e^{-\Omega_{n+1}} \psi. \tag{3.75}$$

Так как $\varphi -$ аналитическая по $z_1, \dots, z_n$ и $a_{n+1,n}$ при $n > 1$ не зависит от $z_1, \dots, z_n$, то из (3.74) следует, что функция ψ является аналитической по $z_1, \dots, z_n$. Тогда соотношение (3.75) показывает, что функция w представляется в виде (3.69).

Теперь покажем, что функция $w(z)$ из (3.69) удовлетворяет системе (3.67). Имеем

$$w_{\bar{z}_k} = -e^{-\Omega}\Omega_{\bar{z}_k}\varphi, \tag{3.76}$$

$$\Omega_{\bar{z}_k} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}\left(T_j a_{j,j-1}\right). \tag{3.77}$$

Обозначим

$$B_{kj} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}\left(T_j a_{j,j-1}\right), \;\; 1 \le k \le n. \tag{3.78}$$

Тогда по свойству оператора T_j

$$B_{11} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}\left(T_1 a_{1,0}\right) = a_{1,0} = a_1(z) \tag{3.79}$$

и при $k > 1$

$$B_{k1} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}\left(T_1 a_{1,0}\right) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}(T_1 a_1) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}([a_1]_1 \bar{z}_1) - 2i \sum_{l \neq 0} \frac{1}{l} \frac{\partial a_{1l}^1}{\partial \bar{z}_1} e^{i(l,\ z_1)}. \tag{3.80}$$

Подставляя в (3.80) выражения для коэффициентов Фурье a_{1l}^1 с учетом (3.65), получим

$$B_{k1} = \gamma_1 \left[\bar{z}_1 \int\limits_K \frac{\partial a_1}{\partial \bar{z}_k} dz_1 - 2i \sum_{l \neq 0} \frac{1}{l} \left(\int\limits_K \frac{\partial a_1}{\partial \bar{z}_k} e^{-i(l,\ z_1)} dz_1 \right) e^{i(l,\ z_1)} \right] =$$

$$= \gamma_1 \left[\bar{z}_1 \int\limits_K \frac{\partial a_k}{\partial \bar{z}_1} dz_1 - 2i \sum_{l \neq 0} \frac{1}{l} \left(\int\limits_K \frac{\partial a_k}{\partial \bar{z}_1} e^{-i(l,\ z_1)}\, dz_1 \right) e^{i(l,\ z_1)} \right]. \qquad (3.81)$$

Для интегралов, входящих в (3.81) применяя формулу Грина и учитывая периодичность функций $a_k(z)$ и $a_k(z)e^{-i(l,\ z_1)}$, получим

$$\int\limits_K \frac{\partial a_k}{\partial \bar{z}_1} dz_1 = \frac{1}{2i} \int\limits_\Gamma a_k dt_1 = 0, \quad \Gamma - \text{граница } K, \qquad (3.82)$$

$$\int\limits_K \frac{\partial a_k}{\partial \bar{z}_1} e^{-i(l,\ z_1)}\, dz_1 = \int\limits_K \left[\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} \left(a_k e^{-i(l,\ z_1)} \right) + \frac{il}{2} a_k e^{-i(l,\ z_1)} \right] dz_1 =$$

$$= \frac{1}{2i} \int\limits_\Gamma a_k e^{-i(l,\ t_1)} dt_1 + \frac{il}{2} \int\limits_K a_k e^{-i(l,\ z_1)} dz_1 = \frac{il}{2\gamma_1} a_{kl}^1. \qquad (3.83)$$

Отсюда и из (3.81) будем иметь

$$B_{k1} = \sum_{l \neq 0} a_{kl}^1\, e^{i(l,\ z_1)} = a_k(z) - a_{k,1}, \ \ k > 1. \qquad (3.84)$$

Функция $a_{j,j-1}$ при $j > 1$ не зависит от переменных $z_1, \dots, z_{j-1}$, поэтому

$$B_{kj} = 0 \ \text{ при } \ j > k. \qquad (3.85)$$

Пусть теперь $1 < j < k$. Тогда с учетом (3.65) и (3.68) имеем

$$B_{kj} = \gamma_{j-1}\gamma_1 \left\{ \bar{z}_j \int\limits_K \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} \left(\int\limits_{K^{j-1}} a_j(z) d\omega_{j-1} \right) dz_j \right.$$

$$\left. - 2i \sum_{l \neq 0} \frac{1}{l} e^{i(l,\ z_j)} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} \left[\int\limits_K \left(\int\limits_{K^{j-1}} a_j(z) d\omega_{j-1} \right) e^{-i(l,\ z_j)}\, dz_j \right] \right\} =$$

$$= \gamma_{j-1}\gamma_1 \left\{ \bar{z}_j \int\limits_{K^{j-1}} \left(\int\limits_K \frac{\partial a_k}{\partial \bar{z}_j} dz_j \right) d\omega_{j-1} \right.$$

$$\left. - 2i \sum_{l \neq 0} \frac{1}{l} e^{i(l,\ z_j)} \int\limits_{K^{j-1}} \left[\int\limits_K \frac{\partial a_k}{\partial \bar{z}_j} e^{-i(l,\ z_j)} dz_j \right] d\omega_{j-1} \right\}.$$

Подобно равенствам (3.82) и (3.83), находим

$$\int\limits_K \frac{\partial a_k}{\partial \bar{z}_j} dz_j = 0, \quad \int\limits_K \frac{\partial a_k}{\partial \bar{z}_j} e^{-i(l,\ z_j)} dz_j = \frac{il}{2\gamma_1} a_{kl}^j.$$

Следовательно, с учетом (3.68)

$$B_{kj} = \gamma_{j-1}\gamma_1 \left(-2i \sum_{l \neq 0} \frac{1}{l} e^{i(l,\ z_j)} \int\limits_{K^{j-1}} \frac{il}{2\gamma_1} a_{kl}^j d\omega_{j-1} \right) =$$

$$= \gamma_{j-1} \int\limits_{K^{j-1}} \left[a_{kl}^j e^{i(l,\ z_j)} \right] d\omega_{j-1} =$$

$$= \gamma_{j-1} \int\limits_{K^{j-1}} \left[a_k(z) - [a_k]_j \right] d\omega_{j-1} = a_{k,j-1} - \gamma_{j-1}\gamma_1 \int\limits_{K^{j-1}} \left(\int\limits_K a_k(z) dz_j \right) d\omega_{j-1} =$$

$$= a_{k,j-1} - \gamma_j \int\limits_{K^j} a_k(z) d\omega_j = a_{k,j-1} - a_{k,j}, \quad 1 < j < k. \qquad (3.86)$$

Наконец при $j = k$ находим

$$B_{kk} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}\left(T_k a_{k,k-1}\right) = a_{k,k-1}. \tag{3.87}$$

Формулы (3.79), (3.83) – (3.87) определяют все значения B_{kj}. Поэтому в силу этих формул и (3.87), получим

$$\Omega_{\bar{z}_1} = B_{11} = a_1(z),$$
$$\Omega_{\bar{z}_2} = B_{21} + B_{22} = \left[a_2(z) - a_{2,1}\right] + a_{2,1} = a_2(z),$$

и т.д.

$$\Omega_{\bar{z}_k} = B_{k1} + B_{k2} + \cdots + B_{k,k-1} + B_{kk} = \left[a_k(z) - a_{k,1}\right] + \left[a_{k,1} - a_{k,2}\right] + \cdots$$
$$\ldots + \left[a_{k,k-2} - a_{k,k-1}\right] + a_{k,k-1} = a_k(z).$$

Таким образом,

$$w_{\bar{z}_k} = -e^{\Omega} a_k \varphi,$$

т.е.

$$w_{\bar{z}_k} + a_k w = 0.$$

Итак, формула (3.69) определяет общее решение системы (3.67).

Теорема 3.4 доказана.

§3.5. О решениях одного класса двух уравнений с частными производными второго порядка

Рассмотрим переопределенную комплексную систему у.ч.п. вида

$$\begin{cases} w_{\bar{z}\bar{z}} + aw + b\overline{w} = 0, \\ \overline{w}_{\bar{z}\bar{z}} + cw + d\overline{w} = 0, \end{cases} \tag{3.88}$$

с комплексными постоянными коэффициентами. Каждое уравнение этой системы является обобщением уравнения метааналитических функций [117].

Будем изучать задачу о нахождении всех решений этой системы. Через P обозначим множество всех решений системы (3.88). Система (3.88) является линейной над полем вещественных чисел R, поэтому множество P будет линейным пространством над R.

Если все коэффициенты системы (3.88) равны нулю, то каждое из уравнений этой системы является уравнением Бицадзе, общее решение которого имеет вид

$$w(z) = \varphi(z) + \bar{z}\psi(z), \tag{3.89}$$

где φ, ψ − произвольные аналитические функции. Подставляя функцию вида (3.89) в систему (3.88), легко определить аналитические функции φ и ψ и общее решение системы (3.88) даётся формулой

$$w(z) = c_1 + c_2 z + c_3 \bar{z}, \tag{3.90}$$

где c_j − произвольные комплексные постоянные.

Итак, в случае $a = b = c = d = 0$ пространство P состоит из функций вида (3.90) и размерность этого пространства равна 6.

В дальнейшим рассмотрим случай, когда матрица коэффициентов $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ненулевая. Введя вектор $\omega = (w,\ \overline{w})^T$, систему (3.88) запишем в виде

$$\omega_{\bar{z}\bar{z}} + A\omega = 0. \tag{3.91}$$

Далее от этой системы перейдем к системе первого порядка. Пусть $\omega_{\bar{z}} = \nu,\ \ U = (\omega,\ \nu)^T$. Тогда в силу (3.91)

$$\nu_{\bar{z}} + A\omega = 0$$

и для четырехмерного вектора U получим систему

$$U_{\bar{z}} = BU, \tag{3.92}$$

где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & E_2 \\ -A & 0 \end{pmatrix}.$$

Лемма 3.3. *Если функция $w(z)$ является решением системы (3.88), то вектор-функция $U = (w,\ \overline{w},\ w_{\bar{z}}, \overline{w}_{\bar{z}})^T$ будет удовлетворять системе (3.92). Если вектор-функция $U = (u_1, u_2, u_3, u_4)^T$ является решением системы (3.92) и первые две её компоненты комплексно сопряжены, т.е. $\overline{u_1} = u_2$, то первая из них u_1 будет удовлетворять системе (3.88).*

Как известно (см. лемму 3.2), общее решение системы (3.92) имеет вид

$$U(z) = e^{B\bar{z}}\Phi(z), \tag{3.93}$$

где $\Phi(z)$ – произвольная аналитическая четырёхмерная вектор функция. Из формулы (3.93) находя первые две компоненты вектора $U = (u_1, u_2, u_3, u_4)^T$ и используя соотношение $\overline{u_1} = u_2$ можно определить все решения системы (3.88).

Ниже будет изложена схема нахождения всех решений системы (3.88) и одновременно определяется и размерность пространства P.

Коэффициенты системы (3.88) определяют точку $\xi = (a, b, c, d)$ пространства C^4. Определим следующие множества в C^4.

$$M_1 = \{\xi: 0 \neq a = d, b = c = 0\}, \qquad M_2 = \{\xi: bc \neq 0, |a - d| = 2|b|\},$$

$$M_3 = \{\xi: b = c = 0 \neq a \neq d\}, \qquad M_4 = \{\xi: d \neq a = b = c = 0\},$$

$$N_1 = \{\xi: b = 0, ac \neq 0, |a - d| = |c|\}, \qquad N_2 = \{\xi: a = b = 0, |c| = |d| \neq 0\},$$

$$N_3 = \{\xi: bd \neq 0, c = 0, |a - d| = |b|\}, \qquad N_4 = \{\xi: c = d = 0, |a| = |b| \neq 0\}.$$

Положим

$$M = \bigcup_{k=1}^{4} M_k,\ N = \bigcup_{k=1}^{4} N_k.$$

Из формулы (3.93) будем определять первые две компоненты вектора U. Нетрудно установить, что

$$B^{2k} = (-1)^k \begin{pmatrix} A^k & 0 \\ 0 & A^k \end{pmatrix},\ \ B^{2k+1} = (-1)^{k+1} \begin{pmatrix} 0 & -A^k \\ A^{k+1} & 0 \end{pmatrix}, \qquad k = 0,1, \ldots$$

Поэтому

$$e^{B\bar{z}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\bar{z}^k B^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^k \bar{z}^{2k}}{(2k)!} \begin{pmatrix} A^k & 0 \\ 0 & A^k \end{pmatrix} + \frac{(-1)^{k+1} \bar{z}^{2k+1}}{(2k+1)!} \begin{pmatrix} 0 & -A^k \\ A^{k+1} & 0 \end{pmatrix} \right]$$

и если положить $\Phi = (\varphi,\ \psi)^T$, $\varphi, \psi -$ аналитические двухмерные вектор-функции, то имеем

$$\omega(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k A^k \left[\frac{\bar{z}^{2k}}{(2k)!} \varphi(z) + \frac{\bar{z}^{2k+1}}{(2k+1)!} \psi(z) \right]. \tag{2.94}$$

Пусть $\Lambda -$ каноническая жорданова форма матрицы A (см. [13], стр. 60). Тогда $A = S\Lambda S^{-1}$, где $S -$ матрица, столбцы которой собственные и присоединенные векторы матрицы A. Следовательно,

$$A^k = S\Lambda^k S^{-1}$$

и формулу (3.94) можно записать в виде

$$\omega(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k S\Lambda^k S^{-1} \left[\frac{\bar{z}^{2k}}{(2k)!} \varphi(z) + \frac{\bar{z}^{2k+1}}{(2k+1)!} \psi(z) \right]. \tag{3.95}$$

Теперь будем определять матрицы Λ, S и S^{-1}. Собственные значения матрицы A определяются из уравнения

$$\det(A - \lambda E) \equiv \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0, \tag{3.96}$$

а собственные векторы – из системы уравнений $(A - \lambda E)\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 0$, т.е.

$$\begin{cases} (a-\lambda)u_1 + bu_2 = 0, \\ cu_1 + (d-\lambda)u_2 = 0. \end{cases} \tag{3.97}$$

Из (3.96) находим

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(a + d \pm \sqrt{D}\right),$$

где

$$D = (a + d)^2 - 4(ad - bc) = (a - d)^2 + 4bc.$$

Рассмотрим в начале случай $D = 0$. Тогда $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}(a + d)$ и система (3.97) примет вид

$$\begin{cases} (a - d)u_1 + 2bu_2 = 0, \\ 2cu_1 + (d - a)u_2 = 0. \end{cases} \tag{3.98}$$

Пусть $A_1 = \begin{pmatrix} a - d & 2b \\ 2c & d - a \end{pmatrix}$. Имеются два случая:

1) $rangA_1 = 0$;

2) $rangA_1 = 1$.

В первом случае $a = d,\ b = c = 0,\ \lambda_1 = \lambda_2 = a$ и система (3.98) имеет два линейно независимых решения: $U_1 = (1,\ 0)^T,\ U_2 = (0,\ 1)^T$. Поэтому

$$S = S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E, \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \qquad \Lambda^k = \begin{pmatrix} a^k & 0 \\ 0 & a^k \end{pmatrix} = a^k E$$

и

$$\omega(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a^k \left[\frac{\bar{z}^{2k}}{(2k)!}\varphi(z) + \frac{\bar{z}^{2k+1}}{(2k+1)!}\psi(z)\right].$$

Отсюда суммируя находим первую компоненту вектор-функции $\omega(z)$:

$$w(z) = \cos\left(\sqrt{a}\bar{z}\right)\varphi_1(z) + \sin\left(\sqrt{a}\bar{z}\right)\varphi_2(z),$$

где φ_1, φ_2 − произвольные скалярные аналитические функции.

Подставим функцию $w(z)$ во второе уравнение системы (3.88):

$$\bar{w}_{\bar{z}\bar{z}} + a\bar{w} \equiv \cos\left(\sqrt{\bar{a}}z\right)\overline{\varphi_1''} + \sin\left(\sqrt{\bar{a}}z\right)\overline{\varphi_2''} +$$
$$+a\left[\cos\left(\sqrt{\bar{a}}z\right)\overline{\varphi_1} + \sin\left(\sqrt{\bar{a}}z\right)\overline{\varphi_2}\right] = 0$$

или

$$\cos\left(\sqrt{\bar{a}}z\right)\left(\overline{\varphi_1''} + a\overline{\varphi_1}\right) + \sin\left(\sqrt{\bar{a}}z\right)\left(\overline{\varphi_2''} + a\overline{\varphi_2}\right) = 0.$$

Это равенство возможно только при

$$\overline{\varphi_j''} + a\overline{\varphi_j} = 0,\ j = 1, 2.$$

Тогда

$$\varphi_j = c_j e^{i\mu z} + d_j e^{-i\mu z},$$

где $\mu = \sqrt{\bar{a}},\ c_j,\ d_j$ − произвольные комплексные числа.

Поэтому

$$w(z) = \left(c_1 e^{-i\sqrt{\bar{a}}z} + d_1 e^{i\sqrt{\bar{a}}z}\right)\cos\left(\sqrt{a}\bar{z}\right) +$$
$$+\left(c_2 e^{-i\sqrt{\bar{a}}z} + d_2 e^{i\sqrt{\bar{a}}z}\right)\sin\left(\sqrt{a}\bar{z}\right). \qquad (3.99)$$

Итак, в случае $rangA_1 = 0$ общее решение системы (3.88) даётся формулой (3.99) и $\dim P = 8$.

Пусть $rangA_1 = 1$. Тогда система (3.97) имеет одно линейно независимое решение $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ и

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \qquad \lambda = \frac{1}{2}(a + d).$$

Для составления матрицы S мы должны определить присоединённые векторы $V = (v_1, v_2)^T$ из системы уравнений $(A - \lambda E)V = U$, т.е.

$$\begin{cases} (a - d)v_1 + 2bv_2 = 2u_1, \\ 2cv_1 + (d - a)v_2 = 2u_2. \end{cases} \tag{3.100}$$

Рассмотрим возможные ситуации:

$\alpha)$ $a = d, b \neq 0, c = 0$;

$\beta)$ $a = d, b = 0, c \neq 0$;

$\gamma)$ $a \neq d, bc \neq 0$.

В ситуации $\alpha)$ возьмём

$$U = (b,\ 0)^T,\ V = (0,\ 1)^T.$$

Тогда

$$S = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad S^{-1} = \frac{1}{b}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

Так как

$$\lambda = a, \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \qquad \Lambda^k = \begin{pmatrix} a^k & ka^{k-1} \\ 0 & a^k \end{pmatrix},$$

то

$$S\Lambda^k S^{-1} = \begin{pmatrix} a^k & ka^{k-1}b \\ 0 & a^k \end{pmatrix}$$

и из (3.95) следует:

$$\omega(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \begin{pmatrix} a^k & ka^{k-1}b \\ 0 & a^k \end{pmatrix} \left[\frac{\bar{z}^{2k}}{(2k)!} \varphi(z) + \frac{\bar{z}^{2k+1}}{(2k+1)!} \psi(z) \right]. \qquad (3.101)$$

Отсюда при условии $a \neq 0$, суммируя находим вторую компоненту вектор-функции $\omega(z)$:

$$\overline{w(z)} = \cos\left(\sqrt{a}\bar{z}\right)\varphi_1(z) + \sin\left(\sqrt{a}\bar{z}\right)\varphi_2(z)$$

где φ_1, φ_2 − произвольные скалярные аналитические функции.

Функцию $w(z)$ подставим в первое уравнение системы (3.88):

$$w_{\bar{z}\bar{z}} + aw + b\overline{w} = \cos\left(\sqrt{\bar{a}}z\right)\left(\overline{\varphi_1''} + a\overline{\varphi_1}\right) + \sin\left(\sqrt{\bar{a}}z\right)\left(\overline{\varphi_2''} + a\overline{\varphi_2}\right)$$

$$+b\left[\cos\left(\sqrt{a}\bar{z}\right)\varphi_1(z) + \sin\left(\sqrt{a}\bar{z}\right)\varphi_2(z)\right] = 0. \qquad (3.102)$$

Продифференцируем это равенство два раза по z:

$$-\bar{a}\cos\left(\sqrt{\bar{a}}z\right)\left(\overline{\varphi_1''} + a\overline{\varphi_1}\right) - \bar{a}\sin\left(\sqrt{\bar{a}}z\right)\left(\overline{\varphi_2''} + a\overline{\varphi_2}\right) +$$

$$+b\left[\cos\left(\sqrt{a}\bar{z}\right)\varphi_1''(z) + \sin\left(\sqrt{a}\bar{z}\right)\varphi_2''(z)\right] = 0. \qquad (3.103)$$

Умножая равенство (3.102) на $\bar{a}$ и складывая с равенством (3.103), имеем

$$b\left[\cos\left(\sqrt{a}\bar{z}\right)(\bar{a}\varphi_1 + \varphi_1'') + \sin\left(\sqrt{a}\bar{z}\right)(\bar{a}\varphi_2 + \varphi_2'')\right] = 0$$

и далее

$$\varphi_j'' + \bar{a}\varphi_j = 0, \qquad j = 1, 2.$$

Отсюда и из (3.103) следует, что

$$\cos\left(\sqrt{\bar{a}}\bar{z}\right)\varphi_1 + \sin\left(\sqrt{\bar{a}}\bar{z}\right)\varphi_2 = 0,$$

и в свою очередь $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, т.е. $w(z) \equiv 0$.

При $a = 0$ из (3.101) будем иметь

$$\omega(z) = \varphi(z) + \bar{z}\psi(z),$$

т.е.

$$w(z) = \varphi_1(z) + \bar{z}\varphi_2(z),$$

здесь $\varphi_1,\ \varphi_2 -$ аналитические функции. Подставляя функцию $w(z)$ в первое уравнение системы (3.88) получим:

$$b(\overline{\varphi_1} + z\overline{\varphi_2}) = 0,$$

т.е. $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ и опять $w(z) \equiv 0$.

Итак, в случае α) система (3.88) имеет только нулевое решение, т.е. $P = \{0\}$.

В случае β) будем иметь:

$$U = (0,\ \ c)^T,\ \ V = (1,\ \ 0)^T,\ \ S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c & 0 \end{pmatrix},$$

$$S^{-1} = \frac{1}{c}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c & 0 \end{pmatrix},\ \ S\Lambda^k S^{-1} = \begin{pmatrix} a^k & 1 \\ cka^{k-1} & a^k \end{pmatrix}.$$

Аналогично ситуации α) можно получить:

$$w(z) = \cos\left(\sqrt{a}\bar{z}\right)\varphi_1(z) + \sin\left(\sqrt{a}\bar{z}\right)\varphi_2(z),$$

где $\varphi_1,\ \varphi_2 -$ аналитические функции. Отсюда и из второго уравнения системы (3.88) легко получить, что $w(z) \equiv 0$ т.е. и в этом случае также $P = \{0\}$.

В случае γ) будем иметь:

$$U = (2b,\ \ d-a)^T, \qquad V = (0,\ \ 2)^T, \quad S = \begin{pmatrix} 2b & 0 \\ d-a & 2 \end{pmatrix},$$

$$S^{-1} = \frac{1}{4b}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ a-d & 2b \end{pmatrix}.$$

Обозначим

$$\varphi_1(z) = S^{-1}\varphi(z), \qquad \varphi_2(z) = S^{-1}\psi(z).$$

Тогда из формулы (3.95) получим

$$S^{-1}\omega(z) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\Lambda^k\left[\frac{\bar{z}^{2k}}{(2k)!}\varphi_1(z) + \frac{\bar{z}^{2k+1}}{(2k+1)!}\varphi_2(z)\right]. \tag{3.104}$$

Так как

$$\Lambda^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & \lambda^k \end{pmatrix}, \qquad S^{-1}\omega = S^{-1}\begin{pmatrix} w \\ \overline{w} \end{pmatrix} = \frac{1}{4b}\begin{pmatrix} 2w \\ (a-d)w + 2b\overline{w} \end{pmatrix},$$

то при $\lambda \neq 0$ из (3.96) находим

$$u_1 = 2bF(z,\bar{z}),\ \ u_2 = (d-a)F(z,\bar{z}) + f(z,\bar{z}), \tag{3.105}$$

где

$$F(z,\bar{z}) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \left[\frac{\bar{z}^{2k}}{(2k)!}(\lambda^k\varphi_1 + k\lambda^{k-1}\varphi_2) + \right.$$

$$\left. + \frac{\bar{z}^{2k+1}}{(2k+1)!}(\lambda^k\psi_1 + k\lambda^{k-1}\psi_2)\right], \tag{3.106}$$

$$f(z,\bar{z}) = 2\overline{f_a}\varphi_2 + \frac{2}{\sqrt{\lambda}}\overline{g_a}\psi_2\,,$$

$\varphi_j,\ \psi_j$ – аналитические функции. Случай $\lambda = 0$ рассмотрим позднее.

Соотношение $\overline{u_1} = u_2$ будет иметь вид:

$$2\bar{b}\bar{F} = (d-a)F + f.$$

Далее имеем следующую СЛАУ относительно F и $\bar{F}$:

$$\begin{cases}(d-a)F - 2\bar{b}\bar{F} = -f,\\ 2bF - \left(\bar{d}-\bar{a}\right)\bar{F} = \bar{f}.\end{cases} \tag{3.107}$$

Определитель этой системы равен: $\Delta = |d-a|^2 - 4|b|^2$.

Рассмотрим случай $\Delta \neq 0$. Тогда

$$F = -\Delta^{-1}\left[2\bar{b}\bar{f} + \left(\bar{d}-\bar{a}\right)f\right]$$

и

$$u_1 = -2b\Delta^{-1}\left[2\bar{b}\bar{f} + \left(\bar{d} - \bar{a}\right)f\right].$$

Подставим функцию u_1 в первое уравнение системы (3.88) и произведя несложные преобразования, имеем

$$4\bar{b}\left[f_\lambda\left(\overline{\varphi_2''} + \lambda\overline{\varphi_2}\right) + \frac{1}{\sqrt{\bar{\lambda}}}g_\lambda\left(\overline{\psi_2''} + \lambda\overline{\psi_2}\right)\right] + m\left[\bar{f}_\lambda\varphi_2 + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\overline{g_\lambda}\psi_2\right] = 0, \qquad (3.108)$$

где

$$m = 2\left(\bar{a} - \bar{d}\right) - 2a(a - d) + 4|b|^2.$$

К этому равенству применим оператор ∂_{zz} и к полученному равенству прибавим (3.108) умноженное на λ:

$$m\left[\bar{f}_\lambda\left(\varphi_2'' + \bar{\lambda}\varphi_2\right) + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\overline{g_\lambda}\left(\psi_2'' + \bar{\lambda}\psi_2\right)\right] = 0.$$

Отсюда имеем:

$$\varphi_2'' + \bar{\lambda}\varphi_2 = 0, \;\; \psi_2'' + \bar{\lambda}\psi_2 = 0,$$

т.е.

$$\varphi_2 = c_1 f_\lambda + d_1 g_\lambda, \;\; \psi_2 = c_2 f_\lambda + d_2 g_\lambda.$$

Поэтому

$$u_1 = -\frac{2b}{\Delta}\left(\alpha f_\lambda\bar{f}_\lambda + \beta f_\lambda\overline{g_\lambda} + \gamma\bar{f}_\lambda g_\lambda + \delta\bar{f}_\lambda\overline{g_\lambda}\right),$$

здесь

$$\alpha = 4\bar{b}\overline{c_1} + 2\left(\bar{d} - \bar{a}\right)c_1, \qquad \beta = 4\bar{b}\overline{d_1} + \frac{2\left(\bar{d} - \bar{a}\right)}{\sqrt{\lambda}}c_2,$$

$$\gamma = 2\left(\bar{d} - \bar{a}\right)d_1 + \frac{4\bar{b}}{\sqrt{\bar{\lambda}}}\overline{c_2}, \qquad \delta = \frac{4\bar{b}}{\sqrt{\bar{\lambda}}}\overline{d_2} + \frac{2\left(\bar{d} - \bar{a}\right)}{\sqrt{\lambda}}d_2.$$

Подставим функцию u_1 в первое уравнение системы (3.88), после несложных преобразований, приходим к следующим равенствам:

$$(a - d)\alpha + 2\bar{b}\bar{\alpha} = 0,$$

$$(a - d)\beta + 2\bar{b}\bar{\gamma} = 0,$$

$$2b\beta + (\bar{a} - \bar{d})\bar{\gamma} = 0,$$

$$(a - d)\delta + 2\bar{b}\bar{\delta} = 0.$$

В силу того, что $|a - d| \neq 2|b|$, имеем $\Delta \neq 0$. Поэтому из последних равенств получим: $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$. Поэтому, $u_1 = 0$.

Пусть теперь $\Delta = 0$. СЛАУ (3.107) имеет решение, если

$$2bf + (d - a)\bar{f} = 0, \tag{3.109}$$

Применяя к (3.109) оператор ∂_{zz} и добавляя к полученному равенству последнее соотношение, предварительно умноженное на число $\bar{\lambda}$, приходим к уравнению

$$\varphi'' + \bar{\lambda}\varphi = 0.$$

Определяя функции φ_2, ψ_2, с учётом (3.109), имеем:

$$2bc_1 + (d - a)\overline{c_1} = 0,$$

$$2bd_1 + \frac{d-a}{\sqrt{\lambda}}\overline{c_2} = 0,$$

$$(d-a)\overline{d_1} + \frac{2b}{\sqrt{\lambda}}c_2 = 0,$$

$$\frac{2b}{\sqrt{\lambda}}d_2 + \frac{d-a}{\sqrt{\bar{\lambda}}}\overline{d_2} = 0.$$

Отсюда c_1 и d_2 находятся с точностью одной вещественной постоянной, c_2 – произвольная комплексная постоянная, а d_1 выражается через c_2. Итак, коэффициенты функций φ_2, ψ_2 определяются с помощью четырех произвольных вещественных постоянных.

Выполнив суммирование в (3.106), с учётом формулы (3.105) имеем:

$$u_1 = 2b\left[\overline{f_\lambda}\,\varphi_1 - \frac{\bar{z}}{2\sqrt{\lambda}}\,\overline{g_\lambda}\,\varphi_2 + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\overline{g_\lambda}\,\psi_1 - \frac{1}{2\lambda}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\overline{g_\lambda} - \bar{z}\overline{f_\lambda}\right)\psi_2\right],$$

$$u_2 = \overline{f_\lambda}[(d-a)\varphi_1 + 2\varphi_2] - \frac{d-a}{2\sqrt{\lambda}}\overline{zg_\lambda}\varphi_2 + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\overline{g_\lambda}[(d-a)\psi_1 + 2\psi_2] -$$

$$-\frac{d-a}{2\lambda\sqrt{\lambda}}\overline{g_\lambda}\psi_2 + \frac{d-a}{2\lambda}\bar{z}\overline{f_\lambda}\psi_2.$$

Используя равенство $\overline{u_1} = u_2$, повторяя выше проведённые действия, после некоторых преобразований, для получаем неоднородные дифференциальные уравнения, решая которых находим функций φ_1, ψ_1:

$$\varphi_1 = c_3 f_\lambda + d_3 g_\lambda + z[\mu_1 f_\lambda + \mu_2 g_\lambda],$$

$$\psi_1 = c_4 f_\lambda + d_4 g_\lambda + z[\mu_3 f_\lambda + \mu_4 g_\lambda],$$

где d_j – произвольные комплексные постоянные,

$$\mu_1 = \gamma d_1,\ \ \mu_2 = -\gamma c_1,\ \ \mu_3 = \gamma d_2,$$
$$\mu_4 = -\gamma c_2,\ \ \gamma = \frac{\bar{a} - \bar{d}}{(a-d)\sqrt{\bar{\lambda}}}.$$

Используя представление функций $\varphi_1, \psi_1, \varphi_2, \psi_2$ и равенство $\overline{u_1} = u_2$, можно убедится, что в определении c_j, d_j $(j = 3, 4)$ будут участвовать четыре произвольные вещественные постоянные.

Таким образом, при $\Delta = 0$ в формуле общего решения системы (3.88) участвуют восемь произвольных вещественных постоянных, т.е. $\dim P = 8$.

Рассмотрим в ситуации $\gamma)$ случай $\lambda = 0$, т.е. $a = -d \neq 0$. В этом случае

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \Lambda^k = 0 \text{ при } k \geq 2$$

и из (3.104) имеем

$$S^{-1}\omega = \varphi_1(z) + \bar{z}\varphi_2(z) - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\left(\frac{\bar{z}^2}{2!}\varphi_1(z) + \frac{\bar{z}^3}{3!}\varphi_2(z)\right).$$

Отсюда выделяя первые компоненты, находим

$$w = \psi_1(z) + \bar{z}\psi_2(z) + \bar{z}^2\psi_3(z) + \bar{z}^3\psi_4(z),$$

где ψ_j– аналитические функции.

Подставим функцию $w(z)$ в первое уравнение системы (3.88):

$$w_{\bar{z}\bar{z}} + aw + b\overline{w} \equiv 2\psi_3 + 6\bar{z}\psi_4 + a(\psi_1 + \bar{z}\psi_2 + \bar{z}^2\psi_3 + \bar{z}^3\psi_4) +$$
$$+b(\overline{\psi_1} + z\overline{\psi_2} + z^2\overline{\psi_3} + z^3\overline{\psi_4}) = 0$$

или

$$a\psi_1 + 2\psi_3 + b\overline{\psi_1} + \bar{z}(a\psi_2 + 6\psi_4) +$$
$$+a\bar{z}^2(\psi_3 + \bar{z}\psi_4) + bz(\overline{\psi_2} + z\overline{\psi_3} + z^2\overline{\psi_4}) = 0 \qquad (3.110)$$

Применим к этому равенству оператор $\frac{\partial^3}{\partial \bar{z}^3}$:

$$6a\psi_4 + bz\left(\overline{\psi_2'''} + z\overline{\psi_3'''} + z^2\overline{\psi_4'''}\right) = 0 \qquad (3.111)$$

Теперь к равенству (3.111) применим оператор $\frac{\partial^3}{\partial z^3}$:

$$6a\psi_4''' + 6b\overline{\psi_4'''} = 0$$

Отсюда следует, что ψ_4''' является постоянной, т.е.

$$\psi_4 = c_0 z^3 + c_1 z^2 + c_2 z + c_3,$$

$c_j -$ постоянные.

Подставляя ψ_4 в (3.111) и применяя оператор $\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ получаем, что $\psi_3''' \equiv const$ и далее $\psi_2''' \equiv const$. Тогда из (3.110) после подстановки выражений для ψ_2, ψ_3, ψ_4 и применения $\frac{\partial^3}{\partial z^3}$ будем иметь: $\psi_1''' \equiv const$.

Таким образом, все функции $\psi_j(z), j = \overline{1,4}$ должны быть полиномами по z порядка не выше 3. Следовательно, функцию $w(z)$ можно представить в виде

$$w(z) = \sum_{j=0}^{4} P_j(z, \bar{z}), \qquad (3.112)$$

где P_j – однородный полином по z и $\bar{z}$ порядка j, т.е.

$$P_j(z,\bar{z}) = \sum_{k=0}^{j} p_{j-k,k} z^{j-k}\,\bar{z}^k, \;\; p_{j-k,k} \in C. \tag{3.113}$$

Подставим w в систему (3.88) и выделяя слагаемые одинакового порядка, получим следующие восемь соотношений (нужно учесть, что $a = -d \neq 0$)

$$\frac{\partial^2 P_2}{\partial \bar{z}^2} + aP_0 + b\overline{P_0} = 0, \tag{3.114}$$

$$\frac{\partial^2 P_3}{\partial \bar{z}^2} + aP_1 + b\overline{P_1} = 0, \tag{3.115}$$

$$aP_2 + b\overline{P_2} = 0, \tag{3.116}$$

$$aP_3 + b\overline{P_3} = 0, \tag{3.117}$$

$$\frac{\partial^2 \overline{P_2}}{\partial \bar{z}^2} + cP_0 - a\overline{P_0} = 0, \tag{3.118}$$

$$\frac{\partial^2 \overline{P_3}}{\partial \bar{z}^2} + cP_1 - a\overline{P_1} = 0, \tag{3.119}$$

$$cP_2 - c\overline{P_2} = 0, \tag{3.120}$$

$$cP_3 - c\overline{P_3} = 0. \tag{3.121}$$

Если $|a| \neq |b|$, то из (3.116) и (3.117) следует, что $P_2 = P_3 = 0$. Тогда из (3.114) и (3.115) подучаем: $P_0 = P_1 = 0$

Следовательно, при $|a| \neq |b|$, в ситуации γ) и $\lambda = 0$ система (3.88) имеет только нулевое решение.

Пусть $|a| = |b|$, тогда $|b| = |c|$ (это следует из равенства $a^2 + bc = 0$). Подставляя выражение для P_2 из (3.113) в (3.116) и (3.120), получим следующие соотношения:

$$\begin{cases} ap_{20} + b\overline{p_{02}} = 0, \\ \bar{b}p_{20} + \bar{a}\overline{p_{02}} = 0, \end{cases} \tag{3.122}$$

$$\begin{cases} cp_{20} - a\overline{p_{02}} = 0, \\ \bar{a}p_{20} - \overline{cp_{02}} = 0, \end{cases} \tag{3.123}$$

$$\begin{cases} ap_{11} + b\overline{p_{11}} = 0, \\ cp_{11} - a\overline{p_{11}} = 0, \end{cases} \tag{3.124}$$

Определители систем (3.122) и (3.123) равны нулю, поэтому задавая P_{20}, находим: $P_{02} = -\frac{\bar{a}}{\bar{b}}\overline{P_{20}}$ (заметим, что $\frac{a}{b} = -\frac{c}{a}$). У системы (3.124) определитель также равен нулю: $-a^2 - bc = 0$ и так как $|a| = |b|$, то $P_{11} = q_{11}e^{i\gamma}$, где q_{11} – произвольное вещественное число, а $2\gamma = arg a - arg c$.

Теперь из (3.114) и (3.118) имеем:

$$\begin{cases} ap_{00} + b\overline{p_{00}} = -2p_{02}, \\ cp_{00} - a\overline{p_{00}} = -2\overline{p_{20}}. \end{cases} \tag{3.125}$$

Так как определитель этой системы равен нулю, и в силу второго соотношения из (3.122) выполняется условие разрешимости:

$$-2p_{02}a - 2\overline{p_{20}}\, b = 0,$$

то система (3.125) разрешима, причем при определении P_{00} возникает одна произвольная вещественная постоянная.

Подставим выражения для P_1 и P_3 в (3.115), (3.117), (3.119) и (3.121), в результате приходим к следующим соотношениям:

$$\begin{cases} ap_{10} + b\overline{p_{01}} = -2p_{12}, \\ \bar{b}p_{10} + \bar{a}\overline{p_{01}} = -6\overline{p_{03}}, \end{cases} \tag{3.126}$$

$$\begin{cases} cp_{10} - a\overline{p_{01}} = -2\overline{p_{21}}, \\ -\bar{a}p_{10} + \overline{c0}\overline{p_{01}} = -6p_{30}, \end{cases} \tag{3.127}$$

$$\begin{cases} ap_{30} + b\overline{p_{03}} = 0, \\ \bar{b}p_{30} + \bar{a}\overline{p_{03}} = 0, \end{cases} \tag{3.128}$$

$$\begin{cases} ap_{21} + b\overline{p_{12}} = 0, \\ \bar{b}p_{21} + \bar{a}\overline{p_{12}} = 0. \end{cases} \tag{3.129}$$

Условия разрешимости систем (3.126) и (3.127) имеют вид соответственно

$$-2\bar{a}p_{12} + 6b\overline{p_{03}} = 0$$
$$-2\bar{a}\,\overline{p_{21}} - 6cp_{30} = 0.$$

Отсюда и из (3.128), (3.129) видно, что если задать P_{30}, то P_{03}, P_{12}, P_{21} определяются так:

$$P_{03} = -\frac{\bar{a}}{\bar{b}}\overline{P_{30}}\ , \qquad P_{12} = -\frac{3\bar{c}}{c}\overline{P_{30}}, \qquad P_{21} = -\frac{3\bar{c}}{a}\overline{P_{30}}$$

Далее из (3.126) задавая P_{10}, находим P_{01}.

Таким образом, коэффициенты P_{10}, P_{20}, P_{30} задаются произвольно, в определении P_{11}, P_{00} имеется одна произвольная вещественная постоянная, остальные коэффициенты определяются однозначно. Итак, $\dim P = 8$.

Рассмотрим случай $D \neq 0$. Тогда $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Покажем, что ранг матрицы $A - \lambda_j E$ равен единице. Действительно, в силу $\det(A - \lambda_j E) = 0$ имеем: $rang(A - \lambda_j E) < 2$. Если $rang(A - \lambda_1 E) = 0$, то

$$a - \lambda_1 = b = c = d - \lambda_1 = 0.$$

Отсюда $a = d$ и поэтому $D = (a-d)^2 + 4bc = 0$. Следовательно, $rang(A - \lambda_1 E) = 1$. Аналогично $rang(A - \lambda_2 E) = 1$. Отсюда получаем, что у системы (3.97) при $\lambda = \lambda_j$ есть только одно линейно независимое решение ω.

Если изучим сначала случай $b = 0$, тогда $D = (a-d)^2$. Возьмем $\omega_1 = \begin{pmatrix} a-d \\ c \end{pmatrix}, \omega_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Поэтому

$$\Lambda = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, \ \ \Lambda^k = \begin{pmatrix} a^k & 0 \\ 0 & d^k \end{pmatrix}, \ \ S = \begin{pmatrix} a-d & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}, \ \ S^{-1} = \frac{1}{a-d}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -c & a-d \end{pmatrix}.$$

Подставляя матрицы Λ^k, S и S^{-1} в (3.95), легко получим

$$w(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a^k \left[\frac{\bar{z}^{2k}}{(2k)!}\varphi_1(z) + \frac{\bar{z}^{2k+1}}{(2k+1)!}\varphi_2(z) \right],$$

где φ_1, φ_2 – произвольные скалярные аналитические функции. Суммируя при $a \neq 0$ имеем

$$w(z) = \cos\left(\sqrt{a}\bar{z}\right)\varphi_1(z) + \sin\left(\sqrt{a}\bar{z}\right)\varphi_2(z), \tag{3.130}$$

если $a = 0$, то

$$w(z) = \varphi_1(z) + \bar{z}\varphi_2(z).$$

Вводя обозначения $\alpha = \cos(\sqrt{a}\bar{z}), \beta = \sin\left(\sqrt{a}\bar{z}\right)$ и подставляя функцию $w(z)$ во второе уравнение системы (3.88), будем иметь

$$\bar{\alpha}\left(\overline{\varphi_1''} + d\overline{\varphi_1}\right) + \bar{\beta}\left(\overline{\varphi_2''} + d\overline{\varphi_2}\right) + c(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) = 0, \ \ a \neq 0. \tag{3.131}$$

Применим к этому равенству оператор $\frac{\partial^2}{\partial z^2}$:

$$-\bar{a}\left[\bar{\alpha}\left(\overline{\varphi_1''}+d\overline{\varphi_1}\right)+\bar{\beta}\left(\overline{\varphi_2''}+d\overline{\varphi_2}\right)\right]+c(\alpha\varphi_1+\beta\varphi_2)=0,\ \ a\neq 0.$$

Отсюда и из (3.131) следует, что

$$c[\bar{a}(\alpha\varphi_1+\beta\varphi_2)+\alpha\varphi_1''+\beta\varphi_2'']=0$$

или

$$c[\alpha(\varphi_1''+\bar{a}\varphi_1)+\beta(\varphi_2''+\bar{a}\varphi_2)]=0. \qquad (3.132)$$

Так как функции α и β аналитические, то из (3.131) и (3.132) получаем:

$$\varphi_j''+\bar{d}\varphi_j=0 \quad \text{при} \quad c=0, \qquad (3.133)$$

$$\varphi_j''+\bar{a}\varphi_j=0 \quad \text{при} \quad c\neq 0. \qquad (3.134)$$

При $c\neq 0$ находя функции φ_j из (3.134), подставим в (3.131) имеем

$$-\bar{\alpha}(-a\overline{\varphi_1}+d\overline{\varphi_1})+\bar{\beta}(-a\overline{\varphi_2}+d\overline{\varphi_2})+c(\alpha\varphi_1+\beta\varphi_2)=$$

$$=(d-a)\left[\bar{\alpha}\left(\overline{c_1}\alpha+\overline{d_1}\beta\right)+\bar{\beta}\left(\overline{c_2}\alpha+\overline{d_2}\beta\right)\right]+$$

$$+c\left[\alpha\left(c_1\bar{\alpha}+d_1\bar{\beta}\right)+\beta\left(c_2\bar{\alpha}+d_2\bar{\beta}\right)\right]=0,$$

отсюда для постоянных c_j, d_j получаем СЛАУ:

$$\begin{cases}(d-a)\overline{c_1}+cc_1=0,\\(d-a)\overline{d_1}+cc_2=0,\\(d-a)\overline{c_2}+cd_1=0,\\(d-a)\overline{d_2}+cd_2=0.\end{cases}$$

Решая эту СЛАУ имеем:

1) если $|d-a|\neq|c|$, то $c_j=d_j=0$, следовательно $\varphi_j=0, j=1,2$;
2) если $|d-a|=|c|$, то

$$c_1=c_1'e^{i\nu_1}, d_2=d_2'e^{i\nu_1},\ c_1',d_2'\in R,\quad \nu_1=\frac{1}{2}(\arg(d-a)-\arg c+\pi),$$

c_2 – произвольное комплексное число, $d_1=\frac{a-d}{c}c_2$.

Итак, при $c\neq 0$ размерность пространство P определяется следующим образом:

$$\dim P=\begin{cases}0 & \text{при}\ \ |d-a|\neq|c|,\\4 & \text{при}\ \ |d-a|=|c|.\end{cases}$$

При $c=0$ функции φ_j находим из (3.133)

$$\varphi_j(z)=c_j\cos\left(\sqrt{\bar{d}}z\right)+d_j\sin\left(\sqrt{\bar{d}}z\right),$$

c_j, d_j – произвольные комплексные постоянные и подставляя в (3.130) получим общее решение системы (3.88), при этом $\dim P=8$.

Если $a=0$, то подставляя функцию $w=\varphi_1(z)+\bar{z}\varphi_2(z)$ во второе уравнение системы (3.88), имеем

$$\overline{\varphi_1''}+z\overline{\varphi_2''}+c\varphi_1+c\bar{z}\varphi_2+d\overline{\varphi_1}+dz\overline{\varphi_2}=0. \qquad (3.135)$$

Применим к этому равенству оператор $\frac{\partial^2}{\partial z^2}$:

$$c(\varphi_1'' + \bar{z}\varphi_2'') = 0.$$

Отсюда следует, что $\varphi_1'' = \varphi_2'' = 0$ при $c \neq 0$. Тогда из (3.135) получим

$$c(\varphi_1 + \bar{z}\varphi_2) + d(\overline{\varphi_1} + z\overline{\varphi_2}) = 0 \tag{3.136}$$

и далее $\varphi_1 + \bar{z}\varphi_2 \equiv 0$, если $|c| \neq |d|$, поэтому $w = 0$. При $|c| = |d|$ подставляя в равенство (3.136) $\varphi_j = c_j z + d_j$ имеем:

$$c[c_1 z + d_1 + \bar{z}(c_2 z + d_2)] + d\left[\bar{c_1}\bar{z} + \overline{d_1} + z\left(\bar{c_2}\bar{z} + \overline{d_2}\right)\right] = 0.$$

Для коэффициентов c_j, d_j получаем СЛАУ вида

$$\begin{cases} cd_1 + d\overline{d_1} = 0, \\ cc_1 + d\overline{d_2} = 0, \\ \bar{d}c_1 + \bar{c}\overline{d_2} = 0, \\ cc_2 + d\bar{c_2} = 0. \end{cases}$$

Решая эту СЛАУ имеем: c_1 − произвольная комплексная постоянная,

$$d_2 = -\frac{\bar{d}}{\bar{c}}\bar{c_1}, \qquad d_1 = d_1' e^{i\nu}, \qquad c_2 = c_2' e^{i\nu}$$

где

$$c_2', d_1' \in R, \qquad \nu = \frac{1}{2}(\pi + \arg d - \arg c).$$

Если $c = 0$, то переписывая (3.135) в виде

$$\varphi_1'' + \bar{d}\varphi_1 = -\bar{z}\left(\varphi_2'' + \bar{d}\varphi_2\right),$$

заключаем, что φ_1, φ_2 удовлетворяют уравнению вида (3.133).

Таким образом, при $a = 0$ получаем, что общее решение системы (3.88) имеет вид

$$w = \varphi_1(z) + \bar{z}\varphi_2(z),$$

где аналитические функции φ_j в зависимости от коэффициентов c и d либо линейные, либо тригонометрические вида

$$c_1 \cos\left(\sqrt{\bar{d}}z\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\bar{d}}z\right),$$

либо тождественно равны нулю. Размерность пространства решений определятся так:

$$\dim P = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad 0 \neq |c| \neq |d|, \\ 4 & \text{при} \quad |c| = |d|, \\ 8 & \text{при} \quad c = 0. \end{cases}$$

Теперь изучим случай $b \neq 0$. Тогда

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(a + d \pm \sqrt{D}\right),$$

в качестве решений СЛАУ (3.97) возьмем: $\omega_j = \left(b, \ \ \lambda_j - a\right)^T$. Тогда

$$S = \begin{pmatrix} b & b \\ \lambda_1 - a & \lambda_2 - a \end{pmatrix}, \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \qquad \Lambda^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{pmatrix}.$$

Подставляя эти матрицы в (3.95), после суммирования имеем

$$w(z) = \alpha_1\varphi_1(z) + \beta_1\psi_1(z) + \alpha_2\varphi_2(z) + \beta_2\psi_2(z), \tag{3.137}$$

где

$$\alpha_j = \cos\left(\sqrt{\lambda_j}\bar{z}\right), \qquad \beta_j = \sin\left(\sqrt{\lambda_j}\bar{z}\right)$$

$\varphi_j(z),\ \psi_j(z)$ – произвольные аналитические функции.

Функции (3.137) подставим в уравнения системы (3.88) и в результате получим следующие равенства:

$$(a - \lambda_1)(\alpha_1\varphi_1 + \beta_1\psi_1) + (a - \lambda_2)(\alpha_2\varphi_2 + \beta_2\psi_2) +$$

$$+b\left(\overline{\alpha_1\varphi_1} + \overline{\beta_1\psi_1} + \overline{\alpha_2\varphi_2} + \overline{\beta_2\psi_2}\right) = 0, \tag{3.138}$$

$$\alpha_1\left(\varphi_1'' + \bar{d}\varphi_1\right) + \beta_1\left(\psi_1'' + \bar{d}\psi_1\right) + \alpha_2\left(\varphi_2'' + \bar{d}\varphi_2\right) + \beta_2\left(\psi_2'' + \bar{d}\psi_2\right) +$$

$$+\bar{c}\left(\overline{\alpha_1\varphi_1} + \overline{\beta_1\psi_1} + \overline{\alpha_2\varphi_2} + \overline{\beta_2\psi_2}\right) = 0. \tag{3.139}$$

Считая $c \neq 0$, умножим равенство (3.138) на $-\bar{c}$, а (3.139) на b и складывая, получим

$$\alpha_1\Phi_1 + \beta_1\Psi_1 + \alpha_2\Phi_2 + \beta_2\Psi_2 = 0, \tag{3.140}$$

где

$$\Phi_j = b\varphi_j'' + \left[b\bar{d} - \bar{c}\left(a - \lambda_j\right)\right]\varphi_j, \;\; \Psi_j = b\psi_j'' + \left[b\bar{d} - \bar{c}\left(a - \lambda_j\right)\right]\psi_j,$$
$$j = 1, 2. \qquad (3.141)$$

Применим к равенству (3.140) оператор $\frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2}$:

$$-\lambda_1(\alpha_1\Phi_1 + \beta_1\Psi_1) - \lambda_2(\alpha_2\Phi_2 + \beta_2\Psi_2) = 0.$$

Отсюда и из (3.140) в силу $\lambda_1 \neq \lambda_2$ следует, что $\alpha_j\Phi_j + \beta_j\Psi_j = 0,\; j = 1, 2$. В свою очередь из последних равенств в силу антианалитичности функций α_j, β_j получим: $\Phi_j = \Psi_j \equiv 0,\; j = 1, 2$. Далее из (3.141) находим:

$$\varphi_j = a_j \cos\mu_j z + b_j \sin\mu_j z\,, \qquad \psi_j = c_j \cos\mu_j z + d_j \sin\mu_j z$$

где $\mu_j = \left[\bar{d} - \frac{\bar{c}}{b}\left(a - \lambda_j\right)\right]^{\frac{1}{2}}, a_j, b_j, c_j, d_j -$ произвольные комплексные постоянные.

Подставляя φ_j в равенство (3.138) и перегруппируя слагаемые, получим следующие соотношения:

$$\left(a - \lambda_j\right)\left(a_j\alpha_j + c_j\beta_j\right) = 0,$$

$$\left(a - \lambda_j\right)\left(b_j\alpha_j + d_j\beta_j\right) = 0,$$

$$b\left(\bar{a}_j\bar{\alpha}_j + \bar{c}_j\bar{\beta}_j\right) = 0, \qquad (3.142)$$

$$b\left(\bar{b}_j\bar{\alpha}_j + \bar{d}_j\bar{\beta}_j\right) = 0, \;\; j = 1, 2. \qquad (3.143)$$

Если $\lambda_j \neq 0, j = 1, 2$, то из (3.142) и (3.143) следует, что $a_j = b_j = c_j = d_j = 0$, т.е. $\varphi_j = \psi_j = 0$, следовательно, $w(z) = 0$. Если $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0$, то $a_j = b_j = c_1 = d_1 = 0$ и поэтому

$$\varphi_j = \psi_1 = 0,\ j = 1,2,\ \psi_2 = c_2 \cos \mu_2 z + d_2 \sin \mu_2 z.$$

Но так как $\beta_2 \equiv 0$, то $w(z) \equiv 0$. Аналогично в случае $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$ имеем: $w(z) = 0$.

Итак, в случае $b \neq 0, c \neq 0$ у системы (3.88) есть только нулевое решение.

Пусть $c = 0$. Тогда

$$\lambda_1 = a, \quad \lambda_2 = d, \quad S = \begin{pmatrix} b & b \\ 0 & d-a \end{pmatrix}, \quad \Lambda^k = \begin{pmatrix} a^k & 0 \\ 0 & d^k \end{pmatrix}.$$

В этом случае считая $d \neq 0$, из формулы (3.95) найдем $\overline{w}$:

$$\overline{w} = \alpha\varphi_1(z) + \beta\varphi_2(z),$$

где $\alpha = \cos\left(\sqrt{d}\bar{z}\right)$, $\beta = \sin\left(\sqrt{d}\bar{z}\right)$, $\varphi_1, \varphi_2 -$ аналитические функции. Отметим, что при этом второе уравнение системы превращается в тождество. Подставим функцию w в первое уравнение этой системы:

$$w_{\bar{z}\bar{z}} + aw + b\overline{w} = \bar{\alpha}\overline{\varphi_1''} + \bar{\beta}\overline{\varphi_2''} +$$

$$+a\left(\bar{\alpha}\overline{\varphi_1} + \bar{\beta}\overline{\varphi_2}\right) + b(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) = 0. \qquad (3.144)$$

Продифференцируем это равенство дважды по z:

$$-\bar{d}\left[\bar{\alpha}\left(\overline{\varphi_1''} + a\overline{\varphi_1}\right) + \bar{\beta}\left(\overline{\varphi_2''} + a\overline{\varphi_2}\right)\right] + b(\alpha\varphi_1'' + \beta\varphi_2'') = 0. \qquad (3.145)$$

Так ка $d \neq 0$, то из соотношений (3.144) и (3.145) получим

$$\bar{d}(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) + \alpha\varphi_1'' + \beta\varphi_2'' = 0$$

или

$$\alpha\left(\varphi_1'' + \bar{d}\varphi_1\right) + \beta\left(\varphi_2'' + \bar{d}\varphi_2\right) = 0.$$

Отсюда $\varphi_j'' + \bar{d}\varphi_j = 0$, т.е. $\varphi_j = c_j\bar{\alpha} + d_j\bar{\beta},\ c_j, d_j -$ постоянные, $j = 1, 2$, и следовательно из (3.144) имеем

$$(a-d)\left[\bar{\alpha}\left(\overline{c_1}\alpha + \overline{d_1}\beta\right) + \bar{\beta}\left(\overline{c_2}\alpha + \overline{d_2}\beta\right)\right] +$$

$$+b\left[\alpha\left(c_1\bar{\alpha} + d_1\bar{\beta}\right) + \beta\left(c_2\bar{\alpha} + d_2\bar{\beta}\right)\right] = 0. \qquad (3.146)$$

Легко показать, что если $|a-d| \neq |b|$, то $c_j = d_j = 0, j = 1, 2$ и поэтому $w(z) \equiv 0$. Считая $|a-d| = |b|$ из (3.146) для c_j, d_j получим СЛАУ вида

$$\begin{cases} (a-d)\overline{c_1} + bc_1 = 0, \\ (a-d)\overline{d_1} + bc_2 = 0, \\ (a-d)\overline{c_2} + bd_1 = 0, \\ (a-d)\overline{d_2} + bd_2 = 0. \end{cases}$$

Решая эту СЛАУ находим:

$$c_1 = c_1' e^{i\nu_1}, \qquad d_2 = d_2' e^{i\nu_1},$$

где

$$c_2', d_1' \in R, \qquad \nu_1 = \frac{1}{2}(\pi + \arg(a-d) - \arg b),$$

$c_2 -$ произвольное комплексное число,

$$d_1 = \frac{d-a}{b} c_2.$$

Итак, в случае $d \neq 0$ справедлива формула

$$\dim P = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad |a-d| \neq |b|, \\ 4 & \text{при} \quad |a-d| = |b|. \end{cases}$$

При $d = 0$ из второго уравнения системы (3.88) имеем:

$$\overline{w} = \varphi_1(z) + \bar{z}\varphi_2(z),$$

где $\varphi_1, \varphi_2 -$ аналитические функции. Подставляя функцию $w(z)$ в первое уравнение системы (3.88), применяя к полученному равенству оператор $\partial^2/\partial z^2$, видим, что $\varphi_1'' = \varphi_2'' = 0$, т.е. функции φ_j имеют вид $c_j z + d_j$ и далее определяем постоянные c_j и d_j. Формула размерности пространства P выглядит так

$$\dim P = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad |a| \neq |b|, \\ 4 & \text{при} \quad |a| = |b|. \end{cases}$$

Таким образом, мы исследовали всевозможные случаи значения коэффициентов системы (3.88). При этом определили множество всех решений и размерность пространства решений. Ниже приведем теорему о размерности пространства $P -$ всех решений системы (3.88).

Теорема 3.5. *Размерность пространства P при $A \neq 0$ определяется формулой:*

$$\dim P = \begin{cases} 8 \quad \text{при} \quad (a,b,c,d) \in M, \\ 6 \quad \text{при} \quad a = bc = d = 0, \\ 4 \quad \text{при} \quad (a,b,c,d) \in N, \\ 0 \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Пример. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} w_{\bar{z}\bar{z}} + w + \overline{w} = 0, \\ \overline{w}_{\bar{z}\bar{z}} - w - \overline{w} = 0, \end{cases}$$

здесь $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Для этой системы $\lambda = 0$; $D = 0$; $|a| = |b| = |c|$.

Вещественная форма системы:

$$\begin{cases} u_{xx} - u_{yy} - 2v_{xy} + 8u = 0, \\ v_{xx} - v_{yy} + 2u_{xy} = 0, \\ u_{xx} - u_{yy} + 2v_{xy} - 8u = 0, \\ v_{xx} - v_{yy} - 2u_{xy} = 0. \end{cases}$$

Общее решение имеет вид:

$$u = C_1(x^2 + y^2) + C_2 x + C_3 y + C_4,$$
$$v = \frac{4C_1}{3}(x^3 y + xy^3) + 2(C_2 x^2 y + C_3 x y^2) + \frac{2C_4}{3}(x^3 + y^3) +$$
$$+ C_5(x^2 + y^2) + C_6 x + C_7 y + C_8$$

где C_j – вещественные постоянные. Следовательно, $\dim P = 8$.

ГЛАВА 4. ОБСУЖДЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

В диссертации исследованы п.с. линейных у.ч.п. первого и второго порядков с вещественными и комплексными переменными. Эти системы в основном изучены в пространствах функций, определенных в пространстве R^3 и её неограниченных областях, а также во всем комплексном пространстве C^n, в частности на всей комплексной плоскости. Исследований по п.с. линейных у.ч.п. первого и второго порядков в случаях, когда коэффициенты определены в всем пространстве, на всей плоскости или в неограниченных областях

Во второй главе работы для п.с. линейных у.ч.п.

$$grad\ U + A(x_1, x_2, x_3)U = F(x_1, x_2, x_3), \tag{4.1}$$

здесь $U = U(x_1, x_2, x_3) -$ искомая функция, $grad\ U = \left(U_{x_1}, U_{x_2}, U_{x_3}\right)$, $A = (A_1,\ A_2,\ A_3)$ – вектор коэффициентов, $F = (f_1, f_2, f_3) -$ вектор правых частей, исследованы задачи нахождения решений из пространства $P_N -$ класс непрерывных в R^3 функций $u(x_1, x_2, x_3)$, удовлетворяющих условию

$$|u(x_1, x_2, x_3)| \leq K(1 + |x_1| + |x_2| + |x_3|)^N, \tag{4.2}$$

где K – положительная постоянная, зависящая от u, N – неотрицательное целое число, а также решений, определенных в неограниченном цилиндре $\Omega = \{(x_1, x_2, x_3);\ (x_1, x_2) \in G,\ \ x_3 > 0\}$, $G -$ ограниченная область на плоскости R^2, принадлежащих классу $P_N(\Omega)$, т.е. удовлетворяющих условию роста:

$$|u(x_1, x_2, x_3)| \leq M(1 + x_3)^N. \tag{4.3}$$

Двумерные системы вида (4.1), т.е. п.с. двух линейных у.ч.п. первого порядка, рассматривались в работах С. Байзаева и М.А. Рахимовой (см., например, [67] - [69]). Для этого случая получены критерии однозначной разрешимости системы в пространствах типа P_N и периодических функций.

Развивая методику выше указанных работ в настоящей диссертации, получены критерии однозначной разрешимости задач (4.1), (4.2) и (4.1), (4.3), а также формулы для соответствующих решений. Эти условия выражаются в терминах коэффициентов системы. Интересно заметить, что задача (4.1), (4.3) в одном случае однозначно разрешима, а в другом – безусловно рарешима.

Дополнительно изучены первая группа условий полной интегрируемости (см. условия (2.2), гл. 2, п. 2.1), которые в трудах других авторов не были исследованы. Найдено общее решение системы уравнений (2.2). Следует отметить, что в ходе доказательств теорем о разрешимости системы (4.1) в пространствах типа P_N и периодических функций, из i-го равенства второй группы у.п.р. (см. условия (2.3), гл. 2, п. 2.1) функция f_i будет однозначно выражена через другую правую часть системы. Поэтому в формуле решения системы (4.1) входит только одна из правых частей системы (см. формулу (2.17), п. 2.3, гл. 2).

Отметим, что вторая группа условий полной интегрируемости для п.с. систем линейных у.ч.п. первого порядка вида (4.1) не исследовалась отдельно.

Также исследована задача нахождения решений, имеющих рост на бесконечности не быстрее полинома, двумерной системы в угле $D = \{(x_1, x_2): 0 < x_1 < +\infty,\ \lambda_1 x_1 < x_2 < \lambda_2 x_2\},\ \lambda_1, \lambda_2 -$ постоянные. Здесь также получены необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости задачи на языке коэффициентов и явная формула решения в полярных координатах. Следует отметить, что задача в угле ранее никем не рассматривалась.

В этой главе использованы качественные методы дифференциальных уравнений и методы оценки и вычисления несобственных интегралов первого рода, зависящих от параметра.

Основными результатами второй главы являются теоремы 2.1 - 2.5. Полученные в этой главе результаты опубликованы в работах [1-А], [2-А], [6-А], [7-А], [8-А], [14-А], [15-А].

В третьей главе исследованы переопределённые системы двух и более комплексных у.ч.п. первого и второго порядков с одной или несколькими комплексными переменными. Такие системы рассмотрены во всей комплексной плоскости и во всем комплексном пространстве C^n.

В работе С. Байзаева и М.А. Рахимовой [74] рассматривалась многомерная п.с. вида

$$\begin{cases} w_{\bar{z}} = A\overline{w}, \\ w_z = B\overline{w}, \end{cases} \tag{4.4}$$

где $w \in C^n$, $A, B -$ комплексные матрицы порядка n. Критерием полной интегрируемости системы (4.4) является равенство

$$A\bar{A} = B\bar{B}. \tag{4.5}$$

В указанной работе при выполнении условия (4.5) найдено общее решение системы (4.4).

В настоящей диссертации система изучена в случае, когда условие (4.5) не выполняется. В этом случае разработана схема нахождения многообразия решений системы (4.4). Здесь же установлена теорема 3.1 об общем решении этой системы. При этом использованы методы дифференциальных уравнений и теории матриц. Случай невыполнения равенства (4.5) ранее не был исследован.

Далее в диссертации рассмотрены п.с. двух комплексных линейных у.ч.п. первого порядка с двумя комплексными переменными

$$\begin{cases} w_{\bar{z}_1} + a(z_1, z_2)w = f(z_1, z_2), \\ w_{\bar{z}_2} + b(z_1, z_2)w = g(z_1, z_2) \end{cases} \tag{4.6}$$

с двоякопериодическими по каждой переменной коэффициентами и правыми частями с основными периодами 2π, $2\pi i$. Построены операторы T_j и $S_j f = f_0^j \overline{z_j} - T_j f$ через коэффициенты Фурье, f_0^j −среднее значение функции f по переменной z_j; эти операторы используются для нахождения общего решения системы.

Отметим, что операторы T_j и S_j являются аналогами операторов T и S, построенные С. Байзаевым (см. [10], стр. 44) для случая двоякопериодических функций одной переменной. Установлена теорема 3.2 об общем решении, с явной формулой для соответствующей (4.6) однородной системы:

$$w(z_1, z_2) = e^{2iIm(\overline{a_o}z_1 + \overline{b_o}z_2)}\omega_1(z_1, z_2)\omega_2(z_2)\Phi(z_1, z_2), \tag{4.7}$$

где a_o, $b_o -$ средние значения функций a, b соответственно, $\omega_1 = e^{-S_1 a}$, $\omega_2 = e^{-S_2 b_o^1}$, $\Phi -$ произвольная аналитическая по z_1, z_2 функция.

Заметим, что в правой части формулы (4.7) первый множитель, в общем случае, является почти-периодической, второй множитель – двоякоперидической по переменным z_1, z_2, а третий множитель – двоякоперидической по переменной z_2, с основными периодами 2π и $2\pi i$. В частности, первый множитель может быть также двоякоперидической, в зависимости от средних значений функций a, b.

Используя теорему Лиувилля из теории функций комплексной переменной, из формулы (4.7) выведены формулы для ограниченных во всей комплексной плоскости решений, а также решений, имеющих рост на бесконечности не быстрее чем $|z_1|^N + |z_2|^N$.

Представление (4.7) общего решения однородной системы, соответствующей (4.6), а также формулы ограниченных во всей комплексной плоскости решений и решений, имеющих рост на бесконечности не быстрее чем полином, напоминают

представления решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений из теории Флоке [48].

Получено представление общего решения неоднородной системы в следующем виде

$$w(z) = e^{-T_1 a}\{T_1(e^{T_1 a} f) + e^{-T_2 b_0^1}[T_2(e^{T_2 b_0^1} h) + \psi(z)]\}, \tag{4.8}$$

где $\psi(z)$, $z = (z_1, z_2)$ произвольная аналитическая функция переменной z, b_0^1, $h -$ средние значения функций b и $e^{T_1 a} g$ по переменной z_1 соответственно. В диссертации представление общего решения в виде (4.8) имеется в теореме 3.3.

Нахождение общего решения, а также ограниченных решений п.с. вида (4.6) с двоякопериодическими коэффициентами ранее не было исследовано. Для обобщенной системы Коши-Римана с несколькими переменными задача о двоякопериодических решениях было изучено в работах Д. Сафарова и его учеников (см., например, [22], [23], [80], [83]). В этих работах используются в основном эллиптические функции и их разновидности.

В четвертом параграфе рассмотрены п.с. комплексных линейных у.ч.п. первого порядка вида

$$w_{\bar{z}_j} + a_j(z) w = 0, \quad j = \overline{1, n} \tag{4.9}$$

с n независимыми переменными $z = (z_1, \dots, z_n)$. Каждое из уравнений (4.9) является обобщением системы Коши-Римана. Относительно коэффициентов системы (4.9) предполагается, что они являются двоякопериодическими по каждой переменной с основными периодами 2π, $2\pi i$, т.е. $a_j \in C_{2\pi}, j = 1, 2, \dots, n$.

Случай $a_j = 0$ впервые с помощью L^2-метода рассматривали С. Морри и Дж. Кон (см. монографию Л. Хёрмандера [91]). Когда a_j и f_j заданы в полицилиндре и

удовлетворяют условиям полной интегрируемости система (4.9) исследована в работах Л.Г. Михайлова и его учеников (см., например, [44]), в которых получено представление общего решения через интегральные операторы Векуа и Коши.

В диссертации рассмотрен случай двоякопериодических коэффициентов системы (4.9) и впервые исследована задача о нахождении общего решения. Развивая метод третьего параграфа, построено общее решение этой системы (теорема 3.4). Это общее решение зависит от произвольной аналитической по z функции.

В пятом параграфе исследована система вида

$$\begin{cases} w_{\bar{z}\bar{z}} + aw + b\overline{w} = 0, \\ \overline{w}_{\bar{z}\bar{z}} + cw + d\overline{w} = 0, \end{cases} \tag{4.10}$$

с комплексными постоянными коэффициентами. Каждое из уравнений этой системы является обобщением уравнений Бицадзе и метааналитических функций. При $b = 0$ первое уравнение будет уравнением метааналитических функций, а при $c = 0$ – таковым будет второе уравнение (см., например, [17]). Множество P – всех решений системы (4.10) будет линейным пространством над полем вещественных чисел R.

Проведен полный анализ системы (4.10) по следующей схеме:

1) Путем замен

$$\omega = (w,\ \overline{w})^T,\ \ \omega_{\bar{z}} = \nu,\ \ U = (\omega,\ \nu)^T$$

эта система приводится к системе первого порядка для четырехмерного вектора U

$$U_{\bar{z}} = BU, \tag{4.11}$$

где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & E_2 \\ -A & 0 \end{pmatrix}.$$

2) Выписывается общее решение системы (4.11) по известной формуле (см. лемму 3.1):

$$U = e^{\bar{z}B}\varphi(z),$$

где $\varphi(z)$ −произвольная четырехмерная аналитическая вектор-функция.

3) Из решений системы (4.11) определяется первая компонента w.

4) Найденная компонента вставляется в уравнения системы (4.10) и окончательно определяется явный вид решения этой системы.

Такая схема нахождения решений, определения структуры пространства P и его размерности проводится впервые, что является новшеством.

Ясно, что структура пространства P и его размерность естественно зависят от коэффициентов системы. Коэффициенты системы (4.10) определяют точку $\xi = (a, b, c, d)$ пространства C^4. Определены восемь множеств M_j и $N_j, j = 1, 2, 3, 4$ из C^4. Каждое из этих множеств определяется посредством некоторых соотношений (равенств, неравенств), выписываемых непосредственно через коэффициенты системы. Эти множества попарно не пересекаются. Множества $M = \cup M_j$ и $N = \cup N_j$ не содержат нулевую точку, не пересекаются и их объединение не совпадает с пространством C^4. Размерность пространства P определяется следующим образом:

$$\dim P = \begin{cases} 8 & \text{при} \quad (a, b, c, d) \in M, \\ 6 & \text{при} \quad a = b = c = d = 0, \\ 4 & \text{при} \quad (a, b, c, d) \in N, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

В диссертации эта формула приведена в теореме 3.5. Она показывает, что общее решение системы (4.10), в зависимости от коэффициентов, может содержать 4, 6 или 8 произвольных постоянных или состоять только из нулевой функции.

Основными результатами второй главы являются теоремы 3.1 - 3.5. Полученные в этой главе результаты опубликованы в работах [3-А, 4-А, 5-А, 9-А, 10-А, 11-А, 12-А, 13-А, 16-А].

ВЫВОДЫ

В диссертации исследованы задачи о разрешимости п.с. вещественных линейных у.ч.п. первого порядка в пространствах функций, определённых в R^3 и её неограниченных областях, а также вопросы разрешимости п.с. линейных у.ч.п. с одной или несколькими комплексными переменными на всей комплексной плоскости и во всём комплексном пространстве C^n.

Основные научные результаты диссертационной работы заключаются в следующем:

- для п.с. вида (4.1) получены условия однозначной разрешимости в пространствах P_N и $P_N(\Omega)$, и построены формулы для решений [1-А; 2-А];

- для п.с. двух линейных у.ч.п. первого порядка в угле $D = \{(x_1, x_2): 0 < x_1 < +\infty,\ \lambda_1 x < x_2 < \lambda_2 x\}$, $\lambda_1, \lambda_2 -$ постоянные, найдены условия однозначной разрешимости в пространстве функций, имеющие рост на бесконечности не быстрее полинома [7-А];

- найдено общее решение п.с. вида (4.4) в случае, когда у.п.р. не выполнено [3-А];

- построено общее решение п.с. вида (4.6) с двоякопериодическими коэффициентами и правой частью [5-А];

- найдены решения, имеющие рост на бесконечности не быстрее полинома, в частности ограниченные и периодические решения однородной системы, соответствующей (4.6) [5-А];

- построено общее решение п.с. (4.9) с двоякопериодическими коэффициентами [5-А];

- найдено общее решение, в частности решения из пространства типа P_N, п.с. вида (4.10) и получена формула для размерности пространства P_N [4-А].

Рекомендации по практическому использованию результатов.

Полученные в диссертации результаты носят теоретический характер. Методы, разработанные в диссертации и полученные результаты, могут быть применены для исследования других классов п.с. у.ч.п. в различных пространствах функций. Отдельные части диссертации могут быть использованы при чтении специальных курсов для студентов и магистрантов, обучающихся по специальности «Математика» и «Прикладная математика».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

А) Список использованных источников

1. Аккерман, В.Б. Снижение размерности в уравнениях гидродинамики [Текст] / В.Б. Аккерман, М.Л. Зайцев // ЖВМ и МФ. 2011. – Т.51. №8.
2. Аккерман, В.Б. Гипотеза об упрощении переопределенных систем дифференциальных уравнений и ее применение к уравнениям гидродинамики [Текст] / В.Б. Аккерман, М.Л. Зайцев // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. – 2015. – № 2. – С. 5–27.
3. Аккерман, В.Б. Еще один способ нахождения частных решений уравнений математической физики [Текст] / В.Б. Аккерман, М.Л. Зайцев // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1. Математика. Физика. – 2016. – № 6 (37). – С. 119–127.
4. Аккерман, В.Б. Редукция переопределенных систем дифференциальных уравнений математической физики [Текст] / В.Б. Аккерман, М.Л. Зайцев // Математическая физика и компьютерное моделирование. – 2017. – Т. 20, № 4. – С. 43–67.
5. Аккерман, В.Б. Преобразование систем уравнений в частных производных к системам квазилинейных и линейных дифференциальных уравнений. Их редукция и унификация Текст] / В.Б. Аккерман, М.Л. Зайцев // Математическая физика и компьютерное моделирование. – 2018. – Т. 21, № 1. – С. 18–33.
6. Аккерман, В.Б. Алгоритм нахождения решений переопределенных систем дифференциальных уравнений в явном виде. [Текст] / В.Б. Аккерман, М.Л. Зайцев // Bulletin of the South Ural State University Ser. Mathematics. Mechanics. Physics, 2020, vol. 12, no. 4, pp. 5–18.

7. Ализаде, М.И. О разрешимости одной переопределенной системы дифференциальных уравнений с частными производными [Текст] / М.И. Ализаде // Вестник Бакинского университета, сер. физ.-мат. наук. 2006. №1. – С. 75–83.

8. Арман, Ж. Л. Приложения теории оптимального управления системами [Текст] / Ж. Л. Арман – М.: Мир, 1977. – 142 с.

9. Байзаев, С. О медленно растущих решениях одной многомерной эллиптической системы [Текст] / С. Байзаев // Доклады АН ТаджССР. 1991. – Т. 34. №6. – С. 329–332.

10. Байзаев, С. Эллиптические системы с ограниченными коэффициентами на плоскости [Текст] / С. Байзаев – Новосибирск: НИИ дискретной математики и информатики, 1999. – 74 с.

11. Байзаев, С. О решениях полиномиального роста многомерной обобщенной системы Коши-Римана [Текст] / С. Байзаев // Уфимский математический журнал. 2015. – Т. 7. № 3. – С. 3–8.

12. Байзаев, С. О некоторых функциональных уравнениях в пространствах Шварца и их приложениях [Текст] / С. Байзаев, М.А. Рахимова // Уфимский математический журнал. 2018. – Том 10. №1. – С. 3 – 13.

13. Беллман, Р. Введение в теорию матриц [Текст] / Р. Беллман – М.: Наука, 1976. – 351 с.

14. Берс, Л. Уравнения с частными производными [Текст] / Л. Берс, Ф. Джон, М. Шехтер. – М.: Мир, 1966. – 351 с.

15. Боголюбов, Н. Н. Введение в теорию квантованных полей [Текст] / Н. Н. Боголюбов, Д. В. Широков – М.: ГИТТЛ, 1957. – 444 с.

16. Бровко, Г.Л. Необходимые и достаточные условия однородно-простой деформации [Текст] / Г.Л. Бровко // ПММ. 1978. – Т. 42. – С. 701 –710.

17. Векуа, И.Н. Обобщенные аналитические функции [Текст] / И.Н. Векуа. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1988. – 513 с.

18. Гайшун, И.В. Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения [Текст] / И.В. Гайшун. – Минск: Наука и техника, 2004. –272 с.

19. Гайшун, И.В. Линейные уравнения в полных производных [Текст] / И.В. Гайшун. – Минск: Наука и техника, 1989. – 273 с.

20. Гайшун, И.В. Минимальная реализация вполне разрешимых линейных дифференциальных систем наблюдения [Текст] / И.В. Гайшун, В.В. Горячкин // Автоматика и телемеханика. 2003. №3. – С. 52 – 60.

21. Гайшун, И.В. Устойчивость линейных гамильтоновых систем в полных дифференциалах с периодическими коэффициентами. [Текст] 134 / И.В. Гайшун // Дифференциальные уравнения. 2005. – Т. 41. №1. – С. 33 – 40.

22. Гаюров А.Т. Квазипериодические решения второго рода неоднородной системы Коши – Римана [Текст] / Д.С. Сафаров, А.Т. Гаюров // ДАН РТ. – 2014. –Т.57. – №6. – С. 459 – 466.

23. Гаюров А.Т. Двоякопериодические обобщённые аналитические функции второго рода [Текст] / А.Т. Гаюров // Вестник ТНУ. Серия естественных наук. – 2017. – № 2, С. 54–59.

24. Дудников, П.И. О нетеровости краевых задач для переопределенных систем уравнений с частными производными [Текст] / П.И. Дудников, С.Н. Самборский // Препринт АН УССР. Институт математики. 1981. №81.47. – С.1 – 24.

25. Захаров, В. Е. Теория солитонов: метод обратной задачи [Текст] / В.Е. Захаров, С.В. Манаков, С.П. Новиков, Л.П. Питаевский – М.: Наука, 1980. – 319 с.

26. Иззатуллоев, Д. Переопределенные линейные системы двух и трех дифференциальных уравнений первого порядка с сингулярной и сверхсингулярной точками [Текст] / Д. Иззатуллоев // Автореферат диссертации … канд. физ. мат. наук. – Душанбе. 2012. – 23 с.

27. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа [Текст] / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. – М.: Наука, 1976. –544 с.

28. Коровина, М.В. Задачи Коши для переопределенных систем линейных дифференциальных уравнений [Текст] / М. В. Коровина // Докл. АН СССР. 1989. Т.309. №1. – С. 31–34.

29. Коровина, М. В. Некоторые результаты касающейся задачи Коши для переопределенных систем линейных дифференциальных уравнений [Текст] / М.В. Коровина // Вестник МГУ. 1990. – Т. 26. №1. – С. 75 –85.

30. Коровина, М.В. Некоторые результаты, касающиеся задачи Коши для переопределенных систем линейных дифференциальных уравнений [Текст] / М. В. Коровина // Дифференц. уравнения. 1990. Т.26. №1. – С. 75–85.

31. Коровина, М.В. О конечности число условия согласования задачи Коши для переопределенных систем нелинейных дифференциальных уравнений [Текст] / М. В. Коровина // Дифференц. уравнения. 1991. Т.27. №1. – С. 163–164.

32. Коровина, М.В. О разрешимости задачи Коши на флаге для переопределенных систем нелинейных дифференциальных уравнений [Текст] / М.В. Коровина // Дифференц. уравнения. 1994. Т.30. №11. – С. 1988–1993.

33. Красносельский, М.А. Естественные решения стохастических дифференциальных уравнений [Текст] / М.А. Красносельский, А.В. Покровский // ДАН СССР. 1978. – Т. 240. № 2. с. 264 – 267.

34. Лурье, К.А. Оптимальное управление в задачах математической физики [Текст] / К.А. Лурье – М.: Наука, 1975. – 480 с.

35. Магомедов, Г.А. Обобщенные аналитические функции многих переменных [Текст] / Г.А. Магомедов, П.Н. Паломодов // Мат. сб. 1978. – Т. 106 (148). №4 (8). – С. 515 – 543.

36. Маликов, Х.М. Переопределенная система линейных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами [Текст] / Х.М. Маликов // Дифференциальные уравнения. 1973. – Том 9. №12. – С. 2265–2266.

37. Михайлов, Л.Г. Обобщенная система Коши – Римана со многими независимыми переменными [Текст] / Л. Г. Михайлов, А.В. Абросимов // Доклады АН СССР. 1973. – Т. 210. №1.

38. Михайлов, Л.Г. Об одном способе исследования обобщенной системе Коши – Римана с двумя независимыми комплексными переменными [Текст] / Л. Г. Михайлов // Доклады АН ТаджССР. 1974. – Т. 17. №9.

39. Михайлов, Л.Г. О некоторых переопределенных системах уравнений с частными производных второго порядка [Текст] /Л.Г. Михайлов // Доклады АН ТаджССР. 1978. – Т. 21. №4 – С. 6 – 8.

40. Михайлов, Л.Г. О совместности некоторых переопределенных систем уравнений в частных производных с двумя неизвестными функциями [Текст] / Л.Г. Михайлов // Доклады АН СССР. 1978. – Т. 238. №6. – С. 1291 – 1294.

41. Михайлов, Л.Г. О некоторых системах уравнений с частными производными первого порядка [Текст] / Л.Г. Михайлов, Б.М. Бильман // Доклады АН ТаджССР. 1979. – Т. 22. №2. – С. 88 – 92.

42. Михайлов, Л.Г. Об условиях совместности и многообразии решений обобщённой системы Коши – Римана со многими переменными [Текст] / Л.Г. Михайлов // Доклады АН СССР. 1979. – Т. 249. №6. – С.1313 – 1317.

43. Михайлов, Л.Г. Переопределенная система дифференциальных уравнений Бельтрами [Текст] / Л.Г. Михайлов // Доклады АН ТаджССР. 1981. – Т.24. №6. – С. 335 – 338.

44. Михайлов, Л.Г. Некоторые переопределенные системы уравнений в частных производных с двумя неизвестными функциями [Текст] / Л.Г. Михайлов. – Душанбе: Дониш, 1986. – 116 с.

45. Михайлов, Л. Г. Об условиях совместности и многообразиях решений некоторых переопределенных систем уравнений в частных производных с тремя неизвестными функциями [Текст] / Л.Г. Михайлов, Р.Пиров // Доклады АН России. 2013. – Т. 451. №3. – С. 251 – 254.

46. Мохамед эл Саид. Исследование представления решений для некоторых переопределенных систем уравнений в частных производных, содер-

жащие гиперболическое уравнение второго порядка с сингулярными и сверхсингулярными линиями [Текст] / Эл Саид Мохамед // Автореферат диссертации … канд. физ. мат. наук. Душанбе. 2011. – 23 с.

47. Мухамадиев, Э. Избранные труды [Текст] / Э. Мухамадиев. – Вологда: ВО ТГУ, 2011. – 550 с.

48. Мухамадиев, Э. О фредгольмовости скалярных дифференциальных операторов в пространстве ограниченных на оси функций [Текст] / Э. Мухамадиев // Доклады ТаджССР. 1974. – Т. 17. №5. – С. 3 – 6.

49. Назаров, Ф. К вопросу о полной разрешимости многомерных дифференциальных уравнений [Текст] / Ф.К. Назаров // Доклады АН ТаджССР. 1970. – Т. 13. №12. – С. 8 – 11.

50. Ниренберг, Л. Лекции о линейных дифференциальных уравнениях с частными производными [Текст] / Л. Ниренберг // Успехи математических наук. 1975. – Т. 30. – Выпуск 4.

51. Паламодов, В.П. Линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами [Текст] / В.П. Паламодов – М.: Наука, 1967. – 487 с.

52. Перов, Н.И. Новые условия полной разрешимости и вопросы приводимости [Текст] / Н.И. Перов // Доклады АН СССР. 1969. –Т.186. – №1. – С. 26 – 29.

53. Пиров, Р. О некоторых системах трёх дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с двумя неизвестными функциями на плоскости [Текст] / Р. Пиров // Доклады АН ТаджССР. 1983 . – Т.26. №3. – С.138 – 142.

54. Пиров, Р. О некоторых нелинейных системах четырех уравнений в частных производных первого порядка с двумя неизвестными функциями от трех переменных [Текст] / Р. Пиров // Доклады АН ТаджССР. 1987. – Т.30. №3. – С.145 – 149.

55. Пиров, Р. Об исследовании некоторых переопределенных систем, дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, частично разрешенных и неразрешенных относительно производных [Текст] / Р. Пиров // Доклады АН РТ. 2005. – Т. 48, №3-4. – С. 60 – 65.

56. Пиров, Р.К теории нелинейных переопределенных систем, состоящих из трех и четырех дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с одной неизвестной функцией в пространстве [Текст] / Р. Пиров // Известия АН РТ. 2015. №1 (158). – С.32 – 41.

57. Пиров, Р. Об одном способе исследования решения систем уравнений в частных производных возникающей в трехмерной теории поля [Текст] / Р. Пиров // Вест. Воронеж. гос. у-та, серия физика, математика. 2015. №4. – С. 175 – 180.

58. Пиров, Р. Об условиях совместности и многообразиях решений некоторых классов переопределенных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка [Текст] / Р. Пиров // Уфимский математический журнал. 2016. – Т.8. №2. – С. 59 – 65.

59. Пиров, Р. О некоторых переопределенных системах дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка [Текст] / Р. Пиров // Ученые записки Казанского университета, серия физико-математической науки. 2016. – Т.158. №4. – С. 544 – 556.

60. Пиров, Р. О некоторых нелинейных системах дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка [Текст] / Р. Пиров // Известия вузов. Математика. 2017. №1. – С. 97 – 100.

61. Плещинский, Н.Б. Переопределенные граничные задачи для эллиптических у.ч.п. и их применение в теории дифракции волн [Текст] / Н.Б. Плещинский, И.Е. Плещинская // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки, 2005, том 147, книга 3. – С. 4–33.

62. Плещинский, Н.Б. Переопределенная граничная задача для систем уравнения Максвелла в полубесконечной цилиндрической области и ее при-

ложения [Текст] / Н.Б. Плещинский // Тр. Матем. центра имени Н.И. Лобачевского. Т. 32. Матем. моделирование и матем. физика. – Казань: Изд-во Казан. матем. о-ва, 2005 – С. 19–30.

63. Понтрягин, Л. С. Непрерывные группы [Текст] / Л.С. Понтрягин – М.: Наука, 1973. – 520 с.

64. Раджабов, Н. Введение в теорию дифференциальных уравнений в частных производных со сверхсингулярными коэффициентами [Текст] / Н. Раджабов – Душанбе: 1992. – 236 с.

65. Раджабов, Н. Переопределенная линейная система второго порядка с сингулярными и сверхсингулярными линиями [Текст] / Н. Раджабов, Мохамед эл Саид – LAP. LAMBEPT. Academik Publishig. 2011. – 234 с.

66. Рахимова, М.А. Об ограниченных решениях одного класса переопределенных систем уравнений в частных производных [Текст] / С.Байзаев, М.А. Рахимова // Учёные записки. Серия: естественные и экономические науки. Учредитель: Худжандский государственный университет имени академика Б. Гафурова. – Худжанд: Нури маърифат, 2016. №3(38). – С. 8 – 14.

67. Рахимова, М.А. О необходимых и достаточных условиях существования ограниченных решений переопределенных систем уравнений с частными производными [Текст] / С. Байзаев, М.А. Рахимова // Учёные записки. Серия: естественные и экономические науки. Учредитель: Худжандский государственный университет имени академика Б. Гафурова. – Худжанд: Нури маърифат, 2017. №3(42). – С. 3 – 12.

68. Рахимова, М.А. Периодические решения одной переопределенной системы уравнений с частными производными [Текст] / С.Байзаев, М.А.Рахимова // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. – Душанбе: ТНУ, – 2017. №1/5. – С.18 – 21.

69. Рахимова, М.А. Полиномиальные решения переопределенных систем уравнений в частных производных с сингулярными коэффициентами [Текст] / М.А. Рахимова // Известия Академии наук Республики Таджикистан. Отделение физ.-мат., хим., геол. и тех. наук. 2017. №4 (169) – С. 35 – 39.

70. Рахимова, М.А. Ограниченные и периодические решения одного класса переопределенных систем линейных уравнений с частными производными первого порядка [Текст] / С. Байзаев, М.А. Рахимова // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. Воронеж: ВГЛУ им. Г.Ф. Морозова, – 2017. – Т. 5. №10(36). – С. 44 – 47.

71. Рахимова, М.А. О решениях некоторых переопределенных систем уравнений с частными производными [Текст] / С. Байзаев, М.А.Рахимова // Развитие науки в период независимости Республики Таджикистан. Материалы научно-практической конференции ТГУПБП. Серия: естественные и экономические науки. – Худжанд. 2017. – С. 329 – 332.

72. Рахимова, М.А. Ограниченные решения одной переопределенной системы линейных уравнений с частными производными [Текст] / С.Байзаев, М.А. Рахимова // Дифференциальные уравнения, математический анализ и теория чисел. Материалы международной научной конференции, посвященной 25-летию XVI сессии Верховного Совета Республики Таджикистан. – Курган-Тюбе. – 2017 г. – С. 29 – 32.

73. Рахимова, М.А. О критериях существования ограниченных решений переопределенных систем уравнений с частными производными [Текст] / С. Байзаев, М.А. Рахимова // Современные проблемы естественных наук. Материалы Республиканской научно-практической конференции. – Душанбе. 2017. – С. 6 – 8.

74. Рахимова, М.А. Об общем решении одной многомерной переопределенной комплексной системы уравнений с частными производными [Текст] / С. Байзаев, М.А. Рахимова // Дифференциальные и интегральные уравнения с сингулярными коэффициентами и краевые задачи теории функций. Материалы международной научной конференции, посвященной 90-летию академика Л.Г. Михайлова. – Душанбе, 2018. – С. 32–33.

75. Рахимова, М.А. Полиномиальные решения переопределенных систем уравнений с сингулярными коэффициентами [Текст] / С. Байзаев,

М.А. Рахимова // Современные проблемы математики и её приложений. Материалы международной научной конференции, посвященной 70-летию академика АН Республики Таджикистан, доктора физико-математических наук, профессора Илолова М. – Душанбе: Дониш, 2018. – С. 80 – 81.

76. Рахимова, М.А. Об условиях совместности и общем решении одного класса многомерных переопределенных систем уравнений с частными производными [Текст] / С. Байзаев, М.А. Рахимова // Современные проблемы математики и их приложения. Материалы международной научно-теоретической конференции, посвященной 70-летию Таджикского национального университета и 80-летию академика АН Республики Таджикистан, профессора Раджабова Н. – Душанбе, 2018. – С. 9 – 15.

77. Рашевский, П. К. Геометрическая теория уравнений с частными производными [Текст] / П.К. Рашевский – М.: УРСС, 2003. – 354 с.

78. Рудых, Г.А. Исследование совместности переопределенной системы для многомерного уравнения нелинейной теплопроводности (частный случай) [Текст] / Г.А. Рудых, Э.И. Семенов // Известия Иркутского государственного университета, сер. мат. 2006. Т. 18. – С. 93–109.

79. Рузметов, Э. Дифференциальные уравнения с параметром и их приложения к исследованию некоторых переопределенных систем уравнений в частных производных [Текст] / Э. Рузметов. – Душанбе: Типография, 1994. Ч.1. №1. – 241 с.

80. Сафаров, Д. Двоякопериодические обобщенные аналитические функции и их приложения [Текст] / Д. Сафаров. – Душанбе: Дониш, 2012 г. – 190 с.

81. Сафаров, Д. О размерности пространства решений степенного роста для одного класса эллиптических систем [Текст] / Д. Сафаров // Дифференциальные уравнения. 1979. – Т.15. №1. – С. 112 – 115. 137

82. Сафаров, Д. О размерности пространства решений степенного роста для одного класса переопределенных эллиптических систем [Текст] / Д. Сафаров // Дифференциальные уравнения. 1979. – Т.15. №8. – С. 1526 – 1528.

83. Сафаров, Д. Двоякопериодические решения равномерно эллиптической системы первого порядка [Текст] / Д. Сафаров // Доклады РАН. – 2010. – Т. 430, №4. – С. 454 – 457.

84. Смирнов, В. И. Курс высшей математики [Текст] / В.И. Смирнов. – М.: Наука, 1981. – Т. 4. – Ч. 2. – 551 с.

85. Спенсер, Д. Переопределенные системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных [Текст] / Д. Спенсер // Математика. 1970. – Т.14. Вып.3. – С. 99 – 126.

86. Тасмамбетов, Ж.Н. Система типа Римана состоящей из трех уравнений [Текст] / Ж.Н. Тасмамбетов // Актуальные проблемы чистой и прикладной математики. Алмата: ИМММ, 2017. – С. 100 – 101.

87. Фиников, С.П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии (теория совместности систем дифференциальных уравнения в п.д. и в частных производных) [Текст] / С.П. Фиников. – М.: ОГИЗ, ГИТТЛ, 1948. – 432 с.

88. Хартман, Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения [Текст] / Ф. Хартман. – М.: Мир, 1970. – 720 с.

89. Хёрмандер, Л. Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных [Текст] / Л. Хёрмандер. – М.: Мир, 1968. – 404 с.

90. Хёрмандер, Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными [Текст] / Л. Хёрмандер. – М.: Мир, 1987. – Т.2. – 694 с.

91. Хёрмандер, Л. Линейные дифференциальные операторы с частными производными [Текст] / Л. Хёрмандер. – М.: Мир, 1965. – 424 с.

92. Холов, Н. А. О разрешимости переопределенной системы линейных дифференциальных уравнений в пространстве почти периодических функций [Текст] / Н. А. Холов // Известия АН ТаджССР. 1987. №1. – С. 71 – 73.

93. Холов, Н.А. Об условиях полной разрешимости линейных переопределенных систем дифференциальных уравнений в частных производных

с непрерывными коэффициентами [Текст] / Н.А. Холов // Доклады АН Тадж-ССР. – 1989. Т. 32№1. – С. 12 – 15. 138

94. Холов, Н.А. Исследование полной интегрируемости и нелокальной разрешимости переопределенных систем дифференциальных уравнений [Текст] / Н.А. Холов // Автореферат диссертации … канд. физ. мат. наук. Душанбе. 1991. – 13 с.

95. Шабат, Б.В. Введение в комплексный анализ [Текст] / Б.В. Шабат. – М.: Наука, 1969. – 576 с.

96. Шамсудинов, Ф.М. Об одной переопределенной системе уравнений второго порядка с сильной особенностью [Текст] / Ф.М. Шамсудинов // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. – 2014. – Т. 15, № 1. – С. 40 – 46.

97. Шамсудинов, Ф.М. Интегральные представления решений для одной переопределенной системы дифференциальных уравнений второго порядка с сингулярными коэффициентами [Текст] / Ф.М. Шамсудинов // Известия АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и тех. н. – 2014. № 4 (157). – С. 32 – 41.

98. Шамсудинов, Ф.М. Об исследовании одной переопределенной системы дифференциальных уравнений второго порядка со сверх сингулярными коэффициентами [Текст] / Ф.М. Шамсудинов // Доклады АН РТ. – 2015. – Т. 58, № 6. – С. 465 – 475.

99. Шамсудинов, Ф.М. Интегральные представления решений для одной переопределенной системы второго порядка с сингулярной точкой [Текст] / Ф.М. Шамсудинов // Вестник ТНУ. 2015. № 1.1(156). – С. 60 – 65.

100. Шамсудинов, Ф.М. Об одной переопределенной системе дифференциальных уравнений второго порядка с сингулярной точкой [Текст] / Ф.М. Шамсудинов // Вестник Волгоградского гос. у-та. Сер. 1. Мат. Физ. - 2016. № 6 (37). – С. 99 – 107.

101. Шарипов, Б. О некоторых переопределенных системах дифференциальных уравнений в частных производных, интегрируемых в квадратурах [Текст] / Б. Шарипов //Доклады АН ТаджССР. 1980. – Т. 23. №10.

102. Шарипов, Б. О некоторых системах в полных дифференциалах с сингулярными точками [Текст] / Б. Шарипов //Доклады АН РТ. 2010. – Т. 53. №10. – С. 759 – 765.

103. Шарипов, Б. О формулах представления решений некоторых нелинейных систем в полных дифференциалах с сингулярной точкой [Текст] / Б. Шарипов // Доклады АН РТ. 2011. – Т.54. №6. – С. 687 – 693.

104. Ширинбеков, М. О некоторых квазилинейных дифференциальных системах на плоскости [Текст] / М. Ширинбеков // Доклады АН России. – 2003. – Т. 392. №4.

105. Шоймкулов, Б.М. Некоторые задачи с начальными данными для переопределенных систем второго порядка с двумя сверхсингулярными линиями [Текст] / Б.М. Шоймкулов // Сб. материалов межд. конф. посв. 85 академика Михайлова Л.Г. – Душанбе. 2013. – С. 156 – 157.

106. Шоймкулов Б.М. К теории переопределенных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с одной сингулярной линией и двумя сверх сингулярными линиями [Текст] / Б.М. Шоймкулов // Вестник Таджикского национального университета (серия естественных наук). Душанбе. – 2018. № 3. – С. 32 – 43.

107. Шоймкулов, Б.М. Переопределенная система дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с одной сингулярной и одной сверхсингулярной точкой [Текст] / Б.М. Шоймкулов // Вестник Пермского университета. – 2020. Математика. Механика. Информатика. Вып. 3(50). – С. 17 – 23.

108. Шоймкулов, Б.М. К теории переопределенных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с одной сингулярной линией в общем случае [Текст] / Б.М. Шоймкулов, Р.М.С. Лукмон // Вестник Пермского университета. – 2021. Математика. Механика. Информатика. Вып. 2(53). – С. 10 – 15.

109. Goursat, E. Lecons sur l’inteqration des equations aux derives partielles du premier order [Text] / E. Goursat. – Paris: 1921. – 454 p.

110. Haak, W. Partial and Pfaffian Differential Equations Pergamon [Текст] / W. Haak , W. Wendland. – Pres. 1972.

111. Hopf, E. Statistical hydromechanics and functional calculus [Текст] / E. Hopf // – J . Rat. Mech. Anal. 1952. – V. 87. №1. – P. 19 – 43.

112. Koohara, A. Similarity principle of the generalized Cauchy–Riemann equation for several complex variables [Текст] / A. Koohara. J. Math. Soc. Jpn. 1971. 23 (2).

113. Michailov, L.G. An overdetermined system of partial differential equations [Текст] / L.G. Michailov // Dokl. Acad. Nauk USSR. 1976. V. 228. – P. l286–1289.

114. Son, Le Hung. Fortsctzungssaetzc von Hartogsschen Typ fuer verallgemeinerteanalytische Funktionen mehrerer komplexer Variabler [Текст] / L.H. Son // Math. Nachr. 1979. V. 93. – P. 117–186.

115. Spencer, D. Overdetermined systems of linear partial differential equations [Текст] / D. Spencer // Matematika, 1970, Volume 14, Issue 3. – P. 99–126.

116. Taghizadeh, N. Generalization of some overdetermined systems of complex partial differential equations [Текст] / N. Taghizadeh, A. Neirameh // Journal of King Saud University – Science (2011)23. – P. 175–177.

117. Vekua, I.N. On one of the elliptic systems with singularities [Текст] / I.N. Vekua // Proc. Intern. Conf. on Functional Analysis and Related Topics. Tokio. 1969. – P. 142 – 147.

Б) РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. В журналах, зарегистрированных в реестре ВАК при Президенте Республики Таджикистан:

1-А. Джумаев Б.М. О решениях степенного роста переопределенной системы трёх уравнений с частными производными [Текст] / С. Байзаев, Б.М. Джумаев // Учёные записки. Серия: естественные и экономические

науки. Учредитель: Худжандский государственный университет имени академика Б. Гафурова. – Худжанд: Нури маърифат, 2019. №3(50). – С. 3 – 7.

2-А. Джумаев Б.М. О пространстве решений степенного роста преопределенной системы трёх уравнений в частных производных с ограниченными коэффициентами [Текст] / С. Байзаев, Б.М. Джумаев // Учёные записки. Серия: естественные и экономические науки. Учредитель: Худжандский государственный университет имени академика Б. Гафурова. – Худжанд: Нури маърифат, 2020. №3(54). – С. 3 – 11.

3-А. Джумаев Б.М. О решениях одной многомерной переопределенной системы без условия полной интегрируемости [Текст] / С. Байзаев, М.Б. Джумаев // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. – Душанбе: ТНУ, – 2020. №4. – С. 66 – 73.

4-А. Джумаев Б.М. Общее решение одного класса переопределенных систем уравнений с частными производными второго порядка [Текст] / М.Б. Джумаев // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. – Душанбе: ТНУ, – 2021. №4. – С. 98 – 109.

5-А. Джумаев Б.М. Об общем решении переопределенной системы уравнений в частных производных с комплексными периодическими коэффициентами [Текст] / С. Байзаев, Б.М. Джумаев // Известия Академии наук Республики Таджикистан. Отделение физ.-мат., хим., геол. и тех. наук. 2022. №3 (188). – С. 43 – 53.

2. В других изданиях:

6-А. Ҷумаев Б.М. Оиди ҳалли се муодилаи бо ҳосилаҳои хусусии тартиби яки се тағйирёбандадор [Матн] / М.Б. Ҷумаев // Маводи конференсияи илмӣ – амалии ҷумҳуриявии «Муаммоҳои муосири илмҳои дақиқ ва нақши он дар ташаккули ҷаҳонбинии илмии ҷомеа» (26-27 октябри с. 2018), ш. Хуҷанд. – С. 146 – 147.

7-А. Джумаев Б.М. Об ограниченных решениях одной переопределенной системы трёх уравнений с частными производными [Текст] / С. Байзаев, Б.М. Джумаев // Международная открытая конференция «Современные проблемы анализа динамических систем. Приложения в технике и технологиях». Воронеж: ВГЛУ им. Г.Ф. Морозова, – 2019. – С. 31 – 32.

8-А. Джумаев Б.М. Полиномиальные на угле решения переопределенных систем уравнений с частными производными [Текст] / С. Байзаев, Б.М. Джумаев // Международная научно-практическая конференция «Современные проблемы математики и его методики преподавания», посвященная 80-летию профессора Дж.Ш. Шарифзода (18-19 октября 2019 г.), г. Бохтар. – С. 91 – 92.

9-А. Джумаев Б.М. Общее решение многомерной невполне разрешимой переопределенной системы уравнений с частными производными [Текст] / С. Байзаев, М.Б. Джумаев // Современные проблемы теории дифференциальных уравнений. Материалы республиканской научно-практической конференции, посвященной 80-летию профессора М. Исмати и «20-летию развития естественных, точных и математических наук» (26 сентября 2020 г.), г. Душанбе. – С. 34-37.

10-А. Джумаев Б.М. Об общем решении переопределенной системы двух комплексных уравнений с частными производными [Текст] / С. Байзаев, Б.М. Джумаев // Международная научная конференция «Уфимская осенняя математическая школа – 2020» (11 – 14 ноября 2020 г.). Уфа: Аэтерна, 2020. – С. 86 – 88.

11-А. Джумаев Б.М. О существовании решений степенного роста переопределенной системы трёх уравнений в частных производных с ограниченными коэффициентами [Текст] / С. Байзаев, Б.М. Джумаев // Международная открытая конференция «Современные проблемы анализа динамических систем. Приложения в технике и технологиях». Воронеж: ВГЛУ им. Г.Ф. Морозова, – 2020. – С. 25 – 28.

12-А. Джумаев Б.М. Общее решение одного класса переопределенных систем уравнений с частными производными второго порядка [Текст] / С. Байзаев, Б.М. Джумаев // Международная конференция «Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений», посвященная 70-летию академика К.Х. Бойматова (25 – 26 декабря 2020 г.), г. Душанбе. – С. 52 – 53.

13-А. Джумаев Б.М. О разрешимости некоторых классов переопределенных систем уравнений с частными производными в неограниченных областях [Текст] / С. Байзаев, Б.М. Джумаев // Международная научная конференция «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики»: Нальчик – Эльбрус, Кабардино-Балкарская Республика, Россия, 2021. – С. 38.

14-А. Джумаев Б.М. О нахождении общего решения одного класса переопределенных систем уравнений с частными производными [Текст] / М.Б. Джумаев // Материалы республиканской научно-практической конференции, посвященной 30-летию день независимости Республики Таджикистана и «20-летию развития естественных, точных и математических наук» (30 октября 2020 г.). г. Худжанд. – С. 100 – 102.

15-А. Джумаев Б.М. Общее и ограниченные решения одного класса переопределенных систем уравнений с частными производными [Текст] / С. Байзаев, М.Б. Джумаев // Сборник статей II международной научно-практической конференции на тему «О применении дифференциальных уравнений при решении прикладных задач» (4 ноября 2021 г.), г. Душанбе. – С. 29 – 33.

16-А. Джумаев Б.М. Об общем решении обобщённых уравнений Коши-Римана со многими переменными и периодическими коэффициентами [Текст] / С. Байзаев, Б.М. Джумаев // Международная конференция «Современные проблемы математического анализа и теории функций», посвященная 70-летию академика М.Ш. Шабозова (24-25 июня 2022 г.), г. Душанбе. – С. 199 – 201.