

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РЕСПУБЛИКИ
ТАДЖИКИСТАН
КУЛЯБСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
АБУАБДУЛЛОХ РУДАКИ**

На правах рукописи

УКД: 517.95



КУЛОБИЗОДА МИРЗО АШУРМАД
**ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ НАГРУЖЕННЫХ
УРАВНЕНИЙ ОБОБЩЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С
ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ**

ДИССЕРТАЦИЯ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.3. Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук,
профессор Сафаров Джумабой

Душанбе – 2026

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ.....	4
ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ИССЛЕДОВАНИЯ.....	8
ГЛАВА 1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ ПО ИССЛЕДУЕМОЙ ТЕМЕ.....	15
1.1. Нагруженные дифференциальные уравнения.....	15
1.2. Двоякопериодические обобщенные аналитические функции	27
ГЛАВА 2. ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ОБОБЩЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С НАГРУЖЕННЫМИ ЧЛЕНАМИ.....	39
2.1. Случай постоянных коэффициентов и с одним нагруженным членом.....	39
2.2. Двоякопериодические решения уравнения обобщенных аналитических со многими нагруженными членами и постоянными коэффициентами	46
2.3. Двоякопериодические решения нагруженного уравнения обобщенных аналитических функций с переменными коэффициентами	51
2.4. Двоякопериодические решения уравнения обобщенных аналитических функций со многими нагруженными членами и с переменными коэффициентами	56
2.5. Двоякопериодические решения уравнения обобщенных аналитических функций с неизвестными параметрами в правой части и дополнительными точечными условиями переопределения.....	60
2.6. Задача определения неизвестных параметров в квазилинейном уравнении обобщенных аналитических функций в классе двоякопериодических функций	65
2.7. Задача нахождения двоякопериодических решений для уравнения обобщенных аналитических функций с нагруженными членами и неизвестными параметрами в правой части и дополнительными условиями. 70	
2.8. Двоякопериодические решения уравнения обобщенных аналитических функций с нагруженными членами, содержащими комплексно - сопряженное искомое решение.....	77
ГЛАВА 3. ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПЕРВОГО ПОРЯДКИ С ГЛАВНОЙ ЧАСТЬЮ ОПЕРАТОРА БЕЛЬТРАМИ И НАГРУЖЕННЫМИ ЧЛЕНАМИ.....	85
3.1. Двоякопериодические решения неоднородного уравнения Бельтрами с постоянным коэффициентом	85
3.2. Двоякопериодическое решение неоднородного уравнения Бельтрами с нагруженным членом.....	89
3.3. Двоякопериодические решения обобщенного нагруженного уравнения Бельтрами.....	97

3.4. Двоякопериодические решения обобщенного уравнения Бельтрами с многими нагруженными членами	103
3.5. Двоякопериодические решения обобщенного неоднородного уравнения Бельтрами с неизвестными параметрами и условиями переопределения	109
3.6. Двоякопериодические решения обобщенного уравнения Бельтрами с нагруженными членами и переменными коэффициентами	116
3.7. Задача определения некоторого неизвестного параметра для квазилинейной равномерно эллиптической системы уравнений первого порядка на плоскости в классе двоякопериодических функций.....	131
ГЛАВА 4. ОБСУЖДЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ	142
ВЫВОДЫ	157
1. Основные научные результаты диссертации	157
2. Рекомендации по практическому использованию результатов	158
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	159
ПЕРЕЧЕНЬ НАУЧНЫХ ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ УЧЁНОЙ СТЕПЕНИ	173

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. В современной теории обобщённых аналитических функций исследование краевых задач для нагруженных уравнений является одним из важных направлений научных исследований. Особый интерес к этим задачам обусловлен тем, что они имеют не только теоретическое значение, но и применяются при моделировании физических, механических и других процессов естественно-научного характера.

Несмотря на достигнутые существенные результаты, вопросы однозначной разрешимости нагруженных уравнений обобщённых аналитических функций с дополнительными и переопределёнными условиями, а также построения явных формул их решений до настоящего времени исследованы недостаточно полно. В связи с этим изучение двоякопериодических решений для данного класса уравнений, доказательство новых теорем об однозначной разрешимости и получение явных формул решений имеют важное теоретическое значение и определяют актуальность темы диссертационного исследования.

Степень научной разработанности изучаемой темы. «В теории дифференциальных уравнений не менее важным разделом являются нагруженные дифференциальные уравнения. В литературе первые работы появились по нагруженным интегральным уравнениям. Этому классу нагруженных уравнений посвящены работы» [124,125], А. Кнесер, Л. Личтенштейн, Н.М. Гюнтера, Н.Н. Назарова. На важность изучения таких уравнений подчеркивали А.Н. Крылов, В.И. Смирнов, А.Н. Тихонов, А.А. Самарский, которые приводили примеры прикладных задач из техники и физики, сводящиеся к нагруженным интегральным уравнениям.

Интерес к нагруженным дифференциальным уравнениям, содержащим значения или её производные на многообразиях меньше размерности области определения искомой функции, обуславливается тем, что решение многих важных задач математической физики, математической биологии, экологии,

химии и долгопрогнозирования по оптимальному управлению сводится к изучению таких уравнений.

Большой вклад в разработку теории нагруженных дифференциальных уравнений внесли учёные» [39,81]: А.М. Нахушев, В.М. Будак, А.Д. Искандеров, А.В. Бородин, В.М.Казиев, А.М. Krall, А.А. Керефов [18, 24, 48, 57, 81, 125]. В последние годы, благодаря усилиям А.М. Нахушева и его последователей, а также М.Т. Дженалиева и его учеников теория нагруженных дифференциальных уравнений получила дальнейшее развитие.

В 1969 А.М. Нахушев при решении поставленной задачи А.В. Бицадзе поиска «корректно поставленных краевых задач для уравнения смешанного типа второго порядка установил, что решения задач со смешением связаны с нагруженными дифференциальными уравнениями» [71, 72, 73 74].

«Следует отметить, что задачи, связанные с нагруженными уравнениями, не являются классическими, так как наличие нагруженного слагаемого не всегда позволяет использовать известные ранее методы исследования, что приводит как к новым трудностям при решении задач, так и к потребности в разработке новых методов исследования. В этом и заключается актуальность исследования такого класса уравнений» [39,81].

Было обнаружено, что «нагруженные уравнения применяются, при решении нелокальных задач для дифференциальных уравнений в частных производных. Начало систематических исследований нелокальных краевых задач: задача нахождения периодических решений для эллиптических уравнений было» [72] положено в статье А.В. Бицадзе и А.А. Самарского.

По нелокальным задачам, отметим ещё работы В.А. Стеклова [28], А.И. Кожанова [61], Л.С. Пулькиной [98], А.М. Нахушева [75]. В этих работах отмечено, что «наличие нелокальных условий не позволяет применять или исследовать разрешимость задач классическими методами, разработанными для начально – краевых задач» [61,75,83, 98].

«В силу выше отмеченного, задача о нахождении решения уравнения, удовлетворяющего нелокальным условиям, или задача нахождения решения

нагруженного уравнения, удовлетворяющего классическим граничным условиям, является важной» [81,83].

В монографиях М.Т. Дженалиева, А.М. Нахушева «изучены краевые задачи для нагруженной системы эллиптического типа» [37, 81, 86]. А.Б. Бородин, Хо Хон Сун, пользуясь «представлением решения для нагруженного эллиптического уравнения второго рода, когда коэффициенты уравнения зависят от меньшего числа независимых переменных доказал, что задача Дирихле имеет единственное решение» [17,123]. Распространил результаты А.Б. Бородина на более общие уравнения. «Также он исследовал задачу Дирихле и обобщенную задачу Римана – Гильберта для модельной нагруженной обобщенной системы Коши – Римана» [124].

В связи с выше изложенными, исследование вопросов разрешимости нагруженной обобщенной системы Коши – Римана, а также равномерно эллиптической системы нагруженных уравнений первого порядка в классе двоякопериодических функций являются важными и актуальными.

В работах И.Н. Векуа [28], В.С. Виноградова [28], Э. Мухамадиева [71], Показеева В.И. [94], С. Байзаева [9], Сафарова Д.С. [105, 110] и других для уравнения обобщенных аналитических функций исследованы задачи существования и нахождения решения в классе ограниченных, двоякопериодических и почти – периодических функций.

Обобщенных аналитических функций с многочисленными их применениями построены в монографии академика Векуа И.Н. [25], и американского математика Берса Л. [11].

Теория двоякопериодических обобщенных аналитических функций с их некоторыми приложениями, построены в монографии Сафарова Д.С., [109]. Для построения таких функций, как расширения класса эллиптических функций, построены интегральные операторы $T_{\zeta}\rho(z)$ и $T_{\sigma}\rho(z)$ соответственно с ядром функциями Вейерштрасса $\zeta(z)$ – дзета и $\sigma(z)$ – сигма. Свойства этих операторов позволяли полностью описать двоякопериодические обобщенные аналитические функции и найти некоторые их приложения.

Для равномерно эллиптических систем первого порядка с оператором Бельтрами построены некоторый квазипериодический гомеоморфизм, который квазиконформно отображает основной параллелограмм периодов на четырехугольник плоскости гомеоморфизма. С помощью такого гомеоморфизма, изучение таких уравнений сведено к уравнению обобщенных аналитических функций. При этом на плоскости гомеоморфизма введены обобщенные эллиптические функции Вейерштрасса $\tilde{\zeta}(z) = \zeta(\omega(z))$, $\tilde{\sigma}(z) = \sigma(\omega(z))$, $\tilde{\rho}(z) = \rho(\omega(z))$, $\omega(z)$ – основной квазипериодический гомеоморфизм уравнения Бельтрами. Однако уравнения обобщенных аналитических функций.

В работах Нахушева А.М. [76, 78], Джениалиева М.Т. [37], Бородина А.В. [18]. Рамазонова М.И. [101]. [39], Хо Хон Сун [124, 125] и других изучены различные краевые задачи для эллиптических систем уравнений с нагруженными членами, главную часть которых составляет оператор Лапласа, Коши-Римана.

Заметим что нагруженной обобщение аналитические функций малых исследований, кроме одоление статье [77].

Связь работы с научными программами (проектами), темами. Содержание и научная направленность настоящего диссертационного исследования тесно связаны с государственными стратегическими программами и приоритетными направлениями научных исследований Республики Таджикистан. В частности, теоретические и практические результаты исследования соответствуют задачам, поставленным в Указе Президента Республики Таджикистан от 31 января 2020 года № 1445 «Об объявлении 2020–2040 годов Двадцатилетием изучения и развития естественных, точных и математических наук в сфере науки и образования», направленным на развитие фундаментальных исследований и повышение научного потенциала страны.

Кроме того, диссертационная работа выполнена в рамках перспективного плана научно-исследовательских работ кафедры математического анализа и

теории функций факультета физики, математики и информатики Кулябского государственного университета имени Абуабдуллоха Рудаки на 2021–2025 годы по теме: «Двоякопериодические решения нагруженных уравнений обобщённых аналитических функций с дополнительными условиями».

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ИССЛЕДОВАНИЯ

Цель исследования. Изучение проблем разрешимости нагруженной обобщенной системы Коши – Римана, а также нагруженной равномерно эллиптической системы первого порядка на плоскости в классе двоякопериодических функций.

Задачи исследования.

- обозначим через C_*^1 множество двоякопериодических с периодами $h_1, h_2, \operatorname{Im}\left(\frac{h_2}{h_1}\right) > 0$ функций из класса $C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, Ω – основной параллелограмм периодов, содержащий начало координат;
- нахождение в классе C_*^1 решения уравнения обобщенных аналитических (у.о.а) функций с нагруженными членами

$$w_{\bar{z}} + aw(z) + \sum_{k=1}^n a_k w(z_k) = f(z), \quad (1)$$

здесь $z = x + iy$ $2\partial_{\bar{z}} = \partial_x + i\partial_y$ – оператор Коши – Римана,

$a = a(z), a_k = a_k(z), f(z)$ – заданные двоякопериодические функции с периодами $h_1, h_2, z_k \in \bar{\Omega}$;

- нахождение в классе C_*^1 решения у.о.а. функций с нагруженными членами и неизвестными параметрами в правой части

$$w_{\bar{z}} - aw(z) + \sum_{k=1}^n a_k w(z_k) = \sum_{k=1}^m c_k f_k(z), \quad (2)$$

с условиями переопределения

$$w(t_j) = d_j, j = \overline{1, s}, \quad (3)$$

здесь a, d_j – известные, a_k, c_k – неизвестные числа;

- нахождение в классе C_*^1 единственного решения нагруженными уравнений обобщенных аналитических (н.у.о.а) функций

$$w_{\bar{z}} + aw + bw(z_0) + d\overline{w(z_0)} = f(z), \quad (4)$$

$a = a(z), b = b(z), d = d(z), f(z)$ – заданные двоякопериодические функции с периодами h_1, h_2 ;

- нахождение единственного решения из класса C_*^1 для нагруженного уравнения

$$w_{\bar{z}} - q(z)w_z + aw + \sum_{k=1}^n a_k w(z_k) = f(z), \quad (5)$$

где $q(z) \in C_*^1$ и $|q(z)| \leq q_0 < 1$, $Bw = w_{\bar{z}} - q(z)w_z$ – дифференциальный оператор Бельтрами;

- нахождение решения в классе C_*^1 нагруженного квазилинейного уравнения вида

$$w_{\bar{z}} - q(z)w_z + aw + \left(\sum_{k=1}^n a_k f(z) \right) w^n = 0, \quad (6)$$

где $n \geq 1$ – целое число, $|q(z)| \leq q_0 < 1$,

$$w(t_j) = d_j, \quad j = \overline{1, s}, \quad (7)$$

$$w_{\bar{z}} - q(z)w_z + aw + bw(z_0) + d\overline{w(z_0)} = f(z).$$

Объект исследования. Объектом исследования являются нагруженные уравнения обобщенных аналитических функций, а также нагруженные обобщенные уравнения Бельтрами с многими нагруженными членами.

Предмет исследования. Предметом исследования являются установление теорем об однозначной разрешимости и получение формул для решения выше указанных уравнений в классе двоякопериодических функций с дополнительными условиями переопределения.

Научная новизна исследования. В диссертации получены следующие результаты, которые являются новыми:

1. для нагруженными уравнений обобщенных аналитических (н.у.о.а) функций вида (1) найдены условия однозначной разрешимости в классе C_*^1 и получены явные формулы решения;
2. найдены условия однозначной разрешимости задач (2), (3) и получены формулы решения в классе C_*^1 ;
3. для н.у.о.а функций вида (4) найдены условия однозначной разрешимости и явный вид решения в классе C_*^1 , с дополнительными точечными условиями;
4. для нагруженного обобщенного уравнения Бельтрами (5) найдены условия однозначной разрешимости и явный вид решения в классе C_*^1 ;
5. найдены условия однозначной разрешимости задач (6), (7) при $n = 2$ и формулы единственного решения в классе C_*^1 .

Теоретическая и научно-практическая значимость работы.

Диссертация носит теоретический характер и посвящена развитию теории нагруженных уравнений обобщённых аналитических функций и краевых задач с дополнительными условиями. В ходе исследования доказаны новые теоремы об однозначной разрешимости нагруженных уравнений в классе C_*^1 , а также получены явные формулы решений для ряда рассматриваемых задач. Полученные результаты могут служить теоретической основой для дальнейшего развития теории краевых задач, исследования уравнений обобщённых аналитических функций и обобщённых уравнений Бельтрами с дополнительными условиями.

Практическая значимость диссертации заключается в том, что разработанные методы и полученные результаты могут быть использованы при исследовании близких по постановке задач, в том числе уравнений метааналитических функций высших порядков, систем многомерных эллиптических уравнений с нагруженными членами, задач с переопределёнными и интегральными условиями, а также других задач теории дифференциальных уравнений и комплексного анализа.

Результаты диссертации могут быть использованы в учебном процессе при разработке специальных курсов, чтении лекций и проведении практических занятий по дисциплинам «Комплексный анализ», «Обобщённые аналитические функции», «Дифференциальные уравнения» и «Краевые задачи» для студентов старших курсов, магистрантов, докторантов (PhD) и аспирантов высших учебных заведений.

Использование результатов исследования при решении задач математического и комплексного анализа, геометрии, механики и других направлений прикладной математики подтверждает теоретическую и научно-практическую значимость диссертации и создаёт предпосылки для их дальнейшего применения в научных исследованиях.

Положения, выносимые на защиту:

1. Установлено, что для нагруженных уравнений обобщённых аналитических функций вида (0.0.1) и (0.0.4) в классе S_*^1 существуют необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости как при наличии дополнительных переопределённых условий, так и без них, на основе которых получены явные формулы решений указанных уравнений.

2. Доказано, что задачи (0.0.2) и (0.0.3) в классе S_*^1 являются однозначно разрешимыми, а структура их решений определена в виде явных формул, что обеспечивает возможность непосредственного анализа существования, единственности и зависимости решения от исходных данных.

3. Установлено, что для нагруженного обобщённого уравнения Бельтрами вида (0.0.5) с дополнительными точечными переопределёнными условиями в классе S_*^1 определены условия однозначной разрешимости; доказано также, что для обобщённого уравнения Бельтрами с неизвестными коэффициентами и дополнительными точечными условиями установлены теоремы об однозначной разрешимости, а при $n=2$ получена явная формула единственного решения.

Степень достоверности результатов исследования. Степень достоверности результатов исследования обеспечивается использованием современных методов теории обобщённых аналитических функций,

комплексного и функционального анализа. Все теоремы, леммы и выводы, представленные в диссертации, строго доказаны и согласуются с известными результатами отечественных и зарубежных исследователей. Достоверность результатов также подтверждается публикацией основных результатов в рецензируемых научных изданиях, их апробацией на научных конференциях и возможностью применения полученных результатов при дальнейшем развитии теории нагруженных уравнений обобщённых аналитических функций.

Соответствие диссертации паспорту научной специальности (с обоснованием и указанием области исследования). Диссертационная работа выполнена по специальности 1.1.3. Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление. Содержание, научные результаты и направления исследования соответствуют следующим разделам паспорта данной научной специальности:

пункту 1. Общая теория дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений;

пункту 2. Начальные, краевые и спектральные задачи для дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений;

пункту 3. Качественный анализ дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений;

пункту 5. Нелинейные дифференциальные уравнения и системы нелинейных дифференциальных уравнений.

Личный вклад соискателя ученой степени. Личный вклад соискателя ученой степени заключается в выборе направления исследования, анализе научной литературы по теме диссертации, постановке научных задач, доказательстве новых теорем об однозначной разрешимости нагруженных уравнений обобщённых аналитических функций в классе C_*^1 , получении явных формул решений для ряда рассматриваемых задач, исследовании обобщённого уравнения Бельтрами с дополнительными условиями, а также в обобщении и анализе полученных научных результатов. Все основные научные результаты,

выводы и положения, представленные в диссертации, получены автором самостоятельно, теоретически обоснованы и выносятся на защиту.

Апробация и реализация результатов диссертации.

Основные результаты диссертации неоднократно докладывались и обсуждались на:

- семинарах кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений БГУ под руководством д.ф.м.-н., профессора Сафаров Дж.С. (Бохтар, 2019-2024 г);

- семинарах кафедры математического анализа и теории функций Кулябского государственного университета под руководством к.ф.м.-н., дотцента Каримовой Н.Ш. и к.ф.м.-н. дотцент Абдулазизова А. (г. Куляб, 2019-2024г);

- международной научно-практической конференции «Современные проблемы математики и методика её преподавания», посвященной 25-летию Конституции Республики Таджикистан и 80-летию доктора педагогических наук, профессора Шарифзода Джумъа Шариф. Бохтар, (18-19 октября 2019 г);

- республиканской научно-практической конференции, посвященной 80-летию д.ф.-м.н., профессора Рахмата Акбарова. (г.Куляб., 2019);

- республиканской научно-практической конференции, посвященной 30-летию независимости Республики Таджикистан и 25-летию Российско-Таджикского (Славянского) университета «Актуальные проблемы точных наук и информационных технологий» (Душанбе, 28 мая 2021г.);

- международной научно-практической конференции на тему «О применении дифференциальных уравнений при решении прикладных задач», Душанбе, 4 ноября 2021г.

- республиканской научно-практической конференции «Актуальные проблемы современной математики» посвященной “20-летию изучения и развития естественных, точных и математических наук в сфере науки и

образования (2020-2040 годы)” и 50-летию кафедры высшей математики ТНУ, (Душанбе, 14 октября 2022 года);

-международной научно-практической конференции «Комплексный анализ и его приложения», посвящённой “«Двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических наук в сфере науки и образования», 75-летию Заслуженного работника Таджикистана, чл. корр. НАНТ, д.ф.-м.н., профессора И.К. Курбанова и 70-летию д.ф.-м.н., профессора Дж.С. Сафарова, (г.Бохтар, 19 ноября 2022г.);

-международной научно-практической конференции, “Развитие математических, точных и естественных наук в современных условиях: Проблемы и перспективы”, (Дангара, 28-29 апреля 2023 года);

-международной конференции, посвящённой 50-летию Института математики им. А. Джурваева Национальной академии наук Таджикистана, (Душанбе, 26-27 мая 2023 года).

Публикации по теме диссертации. Основные результаты по теме диссертации опубликованы в 16 работах автора. Из них 5 статей опубликованы в изданиях, входящих в перечень ВАК при Президенте Республики Таджикистан, одна статья в другом издании, остальные в материалах республиканских и международных конференций.

Структура диссертации и объем. Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения и списка литературы, состоящего из 134 наименований. Общий объём диссертации составляет 176 страниц машинописного текста. Для удобства в диссертации применена сквозная нумерация теорем, замечаний и формул, имеющих тройную нумерацию, в которой первая цифра совпадает с номером главы, вторая указывает на номер параграфа, а третья на порядковый номер теорем, замечаний или формул в данном параграфе.

ГЛАВА 1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ ПО ИССЛЕДУЕМОЙ ТЕМЕ

Это глава посвящена обзору и анализу литературы по исследуемой теме.

К настоящему времени имеется огромное количество статей и монографий как по «теории эллиптических систем первого порядка на плоскости и нагруженные дифференциальные уравнения с частными производными», так и по их применению в различных задачах [1, 2, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 64, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 100, 101, 102, 103, 104, 105].

В основном мы приведем анализ работ, посвященных нагруженным и дифференциальным уравнениям в частных производных, в частности с оператором Коши-Римана, а также некоторые сведения из теории двоякопериодических обобщенных аналитических функций.

1.1. Нагруженные дифференциальные уравнения

1. Понятие нагруженных дифференциальных уравнений

Нагруженными дифференциальными уравнениями в литературе принято называть уравнения, содержащие значения решения или его производных на многообразиях меньшей размерности, чем размерность области определения искомой функций.

«Точнее, пусть A -дифференциальный оператор, заданный в n -мерной области $\Omega \subset R^n$ евклидова пространства точек $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$Au(x) = f(x), \quad (1)$$

$f(x)$ -известная функция.

Дифференциальное уравнение (1) называется нагруженным, если оно содержит след некоторых операций от искомого решения $u(x)$ на принадлежащих замыканию $\bar{\Omega}$ многообразиях размерности меньших n » [55].

Общее определение нагруженных дифференциальных операторов (уравнений) дано в монографии [102] и работе [82] А.М. Нахушева. Как заметил И.С. Ломов, «это определение включает как подкласс и дифференциальные граничные операторы» [67]. В работе А.М. Krall «дифференциальными граничными операторами назвал дифференциальные операторы L содержащие

в дифференциальном выражение L и неизвестную функцию $u(x)$ в фиксированных точках интервала» [131].

В своих работах А.Д. Искендеров «нагруженным дифференциальным уравнением называл дифференциальное уравнение, в которое входят также значения искомой функции и её производных в фиксированных точках области его задания» [45, 46].

В монографии М.Т. Дженалиева и М.И. Рамазонава «нагруженные дифференциальные уравнения изучены как возмущение дифференциальных уравнений» [40].

Многие явления в сложных эволюционных системах с памятью существенно зависят от предыстории эти системы. «Эти явления как правило, описываются нагруженными дифференциальными уравнениями, например, уравнениями следующих видов» [40]:

$$\begin{aligned}\Delta_* u(x, t) + N[u(x, t)] &= 0, \\ \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial z^2} &= \Delta_* u(x, t) + N[u(x, t)], \\ \frac{\partial u(x, t)}{\partial z} &= \Delta_* u(x, t) + \int_0^t k_0(t, \tau) \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial \tau},\end{aligned}\tag{2}$$

которые Вольтерра называл интегродифференциальными уравнениями эллиптического, гиперболического и параболического типов соответственно. Здесь Δ_* - оператор Лапласа по $x = (x_1, x_2, x_3)$;

$$\Delta_* u(x, t) = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_j^2}, \quad N[(x, t)] = \int_0^t \sum_{j=1}^3 k_j(x, \tau) \frac{\partial^2 u(x, \tau)}{\partial x_j^2} d\tau,$$

$k_0(t, \tau), k_j(t, \tau)$ – заданные функции.

При некоторых ограничениях на ядро $k_0(t, \tau)$, последнее уравнение можно записать в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_x u + a_m(t)u + \sum_{j=0}^m b_j(t)u(x, t_j).$$

В своих работах А.И. Кожанов «развил математическую технологию, основанную на переходе от обратной задачи и новой прямой краевой задаче для нагруженного уравнения с частными производными» [58, 59, 60, 61, 62].

В своей работе А.А. Крефов «анонсировал их связь с пространством нелокальных краевых задач для уравнений вида

$$u_{tt} - u_{xx} + c(x, t)u = f(x, t), 0 < x < 1, 0 < t < T»,$$

с начально-краевой задачей для существенно нагруженных уравнений вида

$$\omega_{tt} - \omega_{xx} + c(x, t)\omega + A(x, t)\omega_{xx}(0, t) + B(x, t)\omega_{xx}(1, t) = \phi(x, t, \omega)[57].$$

«Важным примером нагруженных дифференциальных уравнений является стационарное односкоростное уравнение переноса

$$\frac{1}{\alpha(x)} \sum_{j=1}^3 y_j \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x_j} + \varphi(x, y) = \frac{\lambda}{4\pi} \int_{|\xi|=1} \Theta(x, y, \xi) \varphi(x, \xi) d\xi + F(x, y)$$

в фазовой области $\{(x, y): x \in \Omega \subset R^3, |y|^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1\}$.

Здесь $\varphi(x, y)$ обозначает плотность частиц, летящих в направлении $y = (y_1, y_2, y_3)$ из точки $x = (x_1, x_2, x_3)$; $\alpha(x)$ – заданная в области Ω положительная и ограниченная функция, характеризующая положение среды, λ – спектральный параметр; $\Theta(x, y, \xi)$ и $F(x, y)$ – заданные функции» [55].

Примером нагруженного уравнения с частными производными является и уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = mc_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{-\infty}^t \exp\left(-\frac{t-\eta}{\tau_0}\right) \frac{\partial u(x, \eta)}{\partial \eta} d\eta, \quad (3)$$

Которое встречается в теории распространения волн в дисперцирующих средах. Здесь $u = u(x, t)$ – плотность, c_0 – скорость звука, m – масса и τ_0 – время релаксации.

При определенных допущениях уравнение (3) аппроксимируется уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = m\tau_0 c_0^2 \left(\tau_0 \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} - \frac{\partial^4 u}{\partial x \partial t^2} \right)$$

Частным случаем этого является уравнение Буссинекса

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^4 u}{\partial x \partial t^2},$$

Которое моделирует продольные волны в тонком упругом стержне с учётом эффектов поперечной инерции.

2. Нагруженные уравнения как метод введения обобщенных решений уравнений математической физики.

В монографиях «приведены различные применения нагруженных уравнений как метода исследования задач математической биологии, математической физики, теории математического моделирования нелокальных процессов и явлений, механики сплошных сред с памятью и физики фракталов, краевых задач со смещением и теории упругих оболочек» [36, 38, 70, 74, 90].

«Нагруженные уравнения выступают как метод решения локальных и нелокальных задач для уравнений с частными производными и обыкновенных дифференциальных уравнений» изучение в работах [70, 71, 84, 97].

В монографии А.М. Нахушева приведен пример: «пусть $\vartheta(x)$ – решение нагруженного уравнения

$$\vartheta''(x) = c(x) \left[\vartheta(x) - \frac{\vartheta'(0) - \mu_1 \vartheta'(1)}{1 - \mu_1} \left(\frac{\mu_0}{1 - \mu_0} + x \right) + \frac{\mu_0 \vartheta(1) - \vartheta(0)}{1 - \mu_0} \right]$$

с коэффициентом $c(x) \in C[0,1]$, μ_0 и μ_1 - постоянные, причем $\mu_0 \neq 1, \mu_1 \neq 1$ » [90].

Тогда, функция

$$u(x) = \vartheta(x) - \frac{\vartheta'(0) - \mu \vartheta'(1)}{1 - \mu_1} \left(\frac{\mu_0}{1 - \mu_0} + x \right) + \frac{\mu_0 \vartheta(1) - \mu(0)}{1 - \mu_0}$$

на интервале $0 < x < 1$ является решением задачи со смещением

$$\langle u(0) = \mu_0 u(1), u'(0) = \mu_1 u'(1) \rangle$$

для уравнения

$$u''(x) = c(x)u(x)$$

Нагруженные уравнения можно использовать и как метод введения обобщенных решений уравнений в частных производных [78], [82], [94].

Рассмотрим одномерное волновое уравнение» [25].

$$u_{yy} - u_{xx} = 0 \quad (3')$$

в области $\Omega = \{z: 0 < x + y < x - y < \vartheta\}$ плоскости R^2 «точек $z = (x, y)$.

В пространстве $C(\bar{\Omega})$ обобщенным решением этого уравнения можно назвать любую функцию $u(z) = u(x, y) \in C(\bar{\Omega})$, являющуюся решением нагруженного функционального уравнения» [25].

$$u(x, y) = u\left(\frac{x-y}{2}, \frac{y-x}{2}\right) + u\left(\frac{\tau+x+y}{2}, \frac{\tau-x-y}{2}\right) - u\left(\frac{\tau}{2}, -\frac{\tau}{2}\right).$$

«Это уравнение представляет собой специальную форму записи теоремы Даламбера о том, что любое регулярное в области (выпуклой) Ω решение уравнения (3') представимо в виде

$$u(z) = \varphi(x+y) + \psi(x-y).$$

В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{C}$ плоскости переменной $z = x + iy$, граница Γ которой состоит из конечного числа непересекающих кусочно-гладких замкнутых линий. В области Ω с границей Γ рассмотрим неоднородное уравнение Коши-Римана» [55].

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = f(z), \quad (4)$$

где

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

оператор Коши-Римана, $w(z) = u(x, y) + i\vartheta(x, y)$ – искомая, а $f(z)$ – заданная функция комплексной переменной $z = x + iy$.

«Обобщенное решение $w = w(z) \in C(\bar{\Omega})$ уравнения (4) с правой частью $f(z) \in C(\bar{\Omega})$ можно ввести как нагруженного интегрального уравнения» [25].

$$w(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{w(t)}{t-z} dt - \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d_{\zeta} \Omega. \quad (5)$$

Это формула есть следствие из известной формулы Бореля-Помкею [25, 41, 59]. Для любой функции $\varphi(z) \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ справедлива формула

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(t)}{t-z} dt - \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{\zeta}} \frac{d_{\zeta} \Omega}{\zeta-z}. \quad (6)$$

Если же $\varphi(z) \in C_0^1$, то есть $\varphi(z) \in C^1(\Omega)$ и $[\varphi(z)]_{\Gamma} = 0$, то формула Бореля-Помкею дает

$$\varphi(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{\zeta}} \frac{d_{\zeta} \Omega}{\zeta-z}.$$

Из этой формулы легко доказывается, что функция $w(z)$ по формуле (5) является обобщенным решением уравнения (4) в смысле Соболева

$$\iint_{\Omega} w(z) \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} d\Omega = - \iint_{\Omega} \varphi(z) f(z) d\Omega. \quad (7)$$

«Аналогично, если $f(z)$ двоякопериодическая функция с периодами $h_1, h_2, \text{Im}\left(\frac{h_2}{h_1}\right) > 0$ и $f(z) \in C(\bar{\Omega})$, Ω – основной параллелограмм с вершинами $z_1, z_0 + h_1, z_0 + h_1 + h_2, z_0 + h_2, z_0 \in \mathbb{C}$ », [33] то «обобщенным двоякопериодическим решением $w(z) \in C(\bar{\Omega})$ уравнения (4) определяется, как решение нагруженного интегрального уравнения» [94, 96]

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \left[\eta_1 \int_{z_0}^{z_0+h_2} w(t) dt - \eta_2 \int_{z_0}^{z_0+h_1} w(t) dt \right] - \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} f(\tau) \zeta(\tau-z) d_{\zeta} \Omega, \text{ при } \iint_{\Omega} f(\tau) d\Omega = 0. \quad (8)$$

Это формула следует из аналога формулы Бореля – Помпею для двоякопериодических функций, доказанная в работе Сафарова Д.С. [105].

Для любой функции $\varphi(z) \in C_*^1$ справедлива формула

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \left[\eta_1 \int_{z_0}^{z_0+h_2} \varphi(t) dt - \eta_2 \int_{z_0}^{z_0+h_1} \varphi(t) dt \right] - \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{\tau}} \zeta(\tau - z) d_{\tau} \Omega, \quad (9)$$

Здесь « $\zeta(z)$ »- дзета – функция Вейерштрасса, построенная на периодах h_1, h_2 », в работах [7, 32]. К параллелограмму периодов Ω включают стороны $[z_0, z_0 + h_1)$ и $[z_0, z_0 + h_2)$, то есть $\bar{\Omega} = \Omega \cup [z_0, z_0 + h_1) \cup [z_0, z_0 + h_2)$, C_*^1 - класс двоякопериодических функций с периодами h_1, h_2 и принадлежащих классу $C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$.

Если $\varphi(z) \in C_*^1$ и $[\varphi(z)] = 0$ при $z \in [z_0, z_0 + h_1) \cup [z_0, z_0 + h_2)$, то формула (6) принимает вид

$$\varphi(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{\tau}} \zeta(\tau - z) d_{\tau} \Omega. \quad (10)$$

Теперь на основании этой формулы легко доказать, что если

$$\iint_{\Omega} f(z) d\Omega = 0,$$

то функция $w(z)$, определенная как решение интегрального нагруженного уравнения, является двоякопериодической, непрерывной функцией, то есть $w(z) \in C_*^1$ и удовлетворяет уравнению (4) в смысле обобщённых производных и для $\varphi(z) \in C_0^1$

$$\iint_{\Omega} w(z) \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} d\Omega = - \iint_{\Omega} \varphi(z) f(z) d\Omega,$$

то есть удовлетворяется уравнение (1) для любой функции $\varphi(z) \in C_0^1$.

3. Нагруженные системы дифференциальных уравнений в частных производных с оператором Коши - Римана

Пусть Ω – область на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ переменной $z = x + iy$ содержащая начало координат. Уравнение обобщенной аналитической функции вида

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} + a(z)w(z) + b(z)\bar{w}(z) + c(z)w(Rez) + d(z)w(Imz) + A(z)\bar{w}(Rez) + B(z)\bar{w}(Imz) + \sum_{j=1}^p A_j(z)w(z_j) + \sum_{j=1}^q B_j(z)\bar{w}(z_j) = f(z), \quad (1)$$

где $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$ – «оператор Коши – Римана, относится к классу нагруженных эллиптических систем с двумя неизвестными функциями $u = Rew, v = Imw, z_1, z_2, z_3, \dots$ точки области Ω » [25].

Здесь $f(z), a(z), b(z), c(z), d(z), A_j(z), B_j(z)$ – заданные функции, неизвестными вместе с $w(z)$ являются $w(Rez), w(Imz), \bar{w}(Rez), \bar{w}(Imz)$ и $w(z_j), j = \overline{1, p}, \bar{w}(z_j), j = \overline{1, q}$.

В (1), когда $c(z) = d(z) = A(z) = B(z) = A_j(z) = B_j(z) = 0$ мы имеем уравнение обобщенных аналитических функций вида

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} + a(z)w(z) + b(z)\bar{w}(z) = f(z). \quad (2)$$

В работе И.Н. Векуа «построена общая теория функций $w(z) = u(x, y) + i v(x, y)$, удовлетворяющих в некотором обобщенном смысле уравнению вида (2)» [25], когда коэффициенты $a(z), b(z)$ и свободный член являются суммируемыми функциями в рассматриваемой ограниченной области Ω со степенью $p > 2$: то есть $a, b, f \in L_p(\bar{\Omega}), p > 2$. Когда область Ω совпадает со всей плоскостью $\mathbb{C}$, то $a, b, f \in L_{p,2}(\mathbb{C}), p > 2$. $L_{p,2}(\mathbb{C})$ – пространство функций $F(z)$, заданных на плоскостью $\mathbb{C}$ с нормой

$$\|f\|_{L_{p,2}(\mathbb{C})} = \|F\|_{L_p(E_1)} + \left\| \frac{1}{z^2} F\left(\frac{1}{z}\right) \right\|_{L_p(E_1)} < \infty,$$

где E_1 – единичный круг: $E_1\{z: |z| < 1\}$.

И.Н. Векуа показал, что «обобщенные решения однородного уравнения

$$Lw \equiv \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} + a(z)w + b(z)\bar{w} = 0, \quad (2')$$

где $a, b \in L_{p,2}(\mathbb{C})$, $p > 2$ или $a, b \in L_p(\Omega)$, $p > 2$, когда Ω – ограниченная»

область обладает основными классическими свойствами (теорема единственности, принцип аргумента и других) аналитических функций комплексного переменного. Эти решения однородного уравнения (13) названы им обобщенными аналитическими функциями, а уравнение (13) обобщенной системой Коши – Римана. В работе В.С. Виноградова «уравнение (13) названо уравнением обобщенной аналитической функций» [28].

«Теория обобщенных аналитических функций И.Н. Векуа нашла важные приложения к задачам анализа, геометрии (бесконечно малых изгибаний поверхностей) и механики сплошных сред, газовой динамики и существенно расширила рамки классической теории аналитических функций и ее применений» [8, 11, 12, 14, 24, 25, 26, 29, 34, 35, 41, 58, 59, 64, 83, 88, 91, 96, 116, 127, 131, 132].

Следует отметить, что применение аналитического аппарата теории обобщенных аналитических функций (в [14] называется методом Векуа) в ряде случаев позволяет изучить рассматриваемую задачу при самых общих (известных) условиях.

Теория обобщенных аналитических функций получила дальнейшее развитие и нашла многочисленные приложения в работах В.С. Виноградова [28], А.О. Джураева [42], Л.Г. Михайлова [70], З.Д. Усмонова [122], Н.Р. Раджабова [100], Э.М. Мухамадиева [71], С. Байзаева [8, 9], Д.С. Сафарова [96], А.П. Солдатов [116]. В монографии Н. Блиева уравнение (11) изучено в дробных пространствах Никольского – Бесова $B_{p,Q}^e$, $1 < p < \infty$, $1 \leq Q \leq \infty$, $e > 0$.

Как известно «основу теории обобщенных аналитических функций, то есть, теория однородного уравнения (13) составляют ряд формул и соотношений, посредством которых исследования редуцируется к

аналитическим функциям одной комплексной переменной» [11, 25, 26]. Одним из этих соотношений являются прежде всего двумерные интегральные уравнения, куда входят операторы, порожденные интегралами

$$T_G f = T f(z) = \frac{1}{\pi} \iint_G \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d_\zeta \Omega, \quad \Pi_G f = -\frac{1}{\pi} \iint_G \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d_\zeta \Omega,$$

где G – некоторая область плоскости $\mathbb{C}$, которая может совпасть с плоскостью $\mathbb{C}$, $d_\zeta G = dx dy$ – элемент площади.

Если $W_p^1(\Omega)$ – пространство Соболева, то

$$T_G: \{f \in L_p(G), p > 2\} \rightarrow W_p^1(G), p > 2,$$

$$\Pi_G: L_p(\mathbb{C}) \rightarrow L_p(\mathbb{C}), p > 1.$$

По теореме вложения Соболева [25], $W_p^1(G) \subset H^\alpha(G)$, $\alpha = \frac{p}{2} - 1$, $H^\alpha(G)$ – пространство Гельдера с показателем α , $0 < \alpha < 1$, причем $W_p^n(G) \in H^{n-\alpha}(\mathbb{C})$, $n \geq 1$ и, если $f(z) \in H^\alpha(G)$, то

$$T_G: \{f: f \in H^\alpha(G)\} \rightarrow C^1(\Omega) \cap H^\alpha(G), 0 < \alpha < 1,$$

$$\Pi_G: H^\alpha(G) \rightarrow H^\alpha(G).$$

Эти свойства операторов T_G и Π_G – доказаны в монографии Векуа [25].

Одним из основных формул для решения уравнения (2') является

$$w(z) = \Phi(z) e^{T_G g(z)}, \quad (2'')$$

где

$$g(z) = \begin{cases} a(z) + b(z) \frac{\overline{w(z)}}{w(z)}, & \text{если } w(z) \neq 0, z \in G, \\ a(z) + b(z), & \text{если } w(z) = 0, z \in G, \end{cases}$$

$\Phi(z)$ – аналитическая функция в области G .

В монографии А.М. Нахушева в случае, когда « Ω представляет собой круг $|z| < r$ » изучено уравнение вида

$$\frac{\partial w(z)}{\partial \bar{z}} = A(x)w(x) + B(x)\bar{w}(x), x = Rez, \quad (3)$$

которая является комплексной записью системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = a(x)w(x) + b(x)\vartheta(x), \\ \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = c(x)u(x) + d(x)\vartheta(x), \end{cases} \quad (4)$$

» [83].

Здесь $u = Rew, \vartheta = Imz, a(x), b(x), c(x), d(x)$ заданные функции точки $x \in [-r, r]$.

$$4A(x) = a(x) + d(x) + [c(x) + b(x)]i,$$

$$4B(x) = a(x) - d(x) + [c(x) + b(x)]i.$$

Для уравнения (3) изучена задача нахождения решения, удовлетворяющего краевому условию

$$w_y(z) = \varphi(z), \forall z \in \sigma, \sigma = \{z: |z| = r\}, w(-r) = c,$$

где $\varphi(z)$ – заданная непрерывная функция на σ , а c – заданное комплексное число.

В своих работах Хо Хон Сун и Bers L. исследовал «задачу Дирихле и обобщенную задачу Римана – Гильберта для модельной нагруженной обобщенной системы Коши – Римана (1)» [125, 128]:

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} + A_1(z)w(z) + A_2(z)\bar{w}(z) + A_3(z)w(Rez) + A_4(z)\bar{w}(Rez) = 0,$$

которая является частным случаем уравнения (1).

В работе А.М. Нахушева для «модельного уравнения (2)

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = \lambda(z)w(z_0), \quad (5)$$

где $\lambda(z)$ – аналитическая в круге Ω и непрерывная в $\bar{\Omega}$ функция, z_0 – фиксированная точка: $|z_0| < r$, изучена задача нахождения $w(z)$ -регулярного в Ω и непрерывного в $\bar{\Omega}$ решения уравнения, удовлетворяющего условию Дирихле» [90]

$$w(z)|_{|z|=R} = \psi(z), z \in \sigma. \quad (6)$$

Найдено решение задачи в явном виде и приведен алгоритм поиска решения задачи (5), (6):

1. Любое регулярное в круге Ω решение $w(z)$ уравнения (5), также

является «решением уравнения Бицадзе» [12]

$$\frac{\partial^2 w(z)}{\partial \bar{z}^2} = 0. \quad (7)$$

2. Все регулярные в односвязной области Ω решения уравнения (7) представляются формулой

$$w(z) = \bar{z}\Phi_0(z) + \Phi^+(z), \quad (8)$$

где $\Phi_0(z)$ и $\Phi^+(z)$ – произвольные голоморфные (аналитические) функции комплексного переменного $z \in \Omega$, [12].

3. Функция будет решением уравнения (5), тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = \Phi_0(z) = \lambda(z)[\bar{z}_0\Phi_0(z_0) + \Phi^+(z_0)] \equiv \lambda(z)w(z_0),$$

то есть, когда $w(z)$ – решение нагруженного функционального уравнения

$$w(z) = \lambda(z)\bar{z}w(z_0) + \Phi^+(z). \quad (9)$$

4. Решением уравнения (7) будет непрерывным в $\bar{\Omega}$, тогда и только тогда, когда функция $\Phi^+(z)$ будет непрерывной в $\bar{\Omega}$ и сведена к функции

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{\psi(t)}{t-z} dt$$

формулой

$$\begin{aligned} z\Phi^+(z) &= zF(z) + w(z_0)[\lambda(0) - \lambda(z)]r^2, \\ \Phi^+(z) &= w(z) - \lambda(z)\bar{z}w(z_0). \end{aligned} \quad (10)$$

5. Решение задачи (5), (6) определяется формулой

$$w(z) = F(z) + w(z_0) \left[\lambda(z)\bar{z} - \frac{\lambda(z) - \lambda(0)}{z} r^2 \right], \quad (11)$$

где $w(z_0)$ вычислена формулой

$$w(z_0) = \begin{cases} \frac{z_0 F(z_0)}{z_0 - \lambda(z_0)|z_0|^2 + [\lambda(z_0) - \lambda(0)]r^2}, & \text{при } z_0 \neq 0, \\ \frac{F(0)}{1 + \lambda^1(0)r^2} & \text{при } z_0 = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Для уравнения (12) «задача нахождения двоякопериодических решений с заданными периодами $h_1, h_2, \operatorname{Im}\left(\frac{h_2}{h_1}\right) > 0$ » [33] исследована в работах

Показеева В.И. , Д.С. Сафарова [94], [105], Э.М. Мухамадиева [72], С. Байзаева [9] и других.

1.2. Двоякопериодические обобщенные аналитические функции

«Задача существования и нахождения двоякопериодических решений для уравнения (2) с основными периодами $h_1, h_2, \operatorname{Im}\left(\frac{h_2}{h_1}\right) > 0$ изучена в работе» [33].

В монографии Сафарова Д.С. дано «полное решение задачи методом теории обобщенных аналитических функций Векуа, с привлечением аппарата теории эллиптических функций Вейерштрасса (как в теории Векуа)» [105] .

Основу теории двоякопериодических обобщенных аналитических функций составляет ряд формул и соотношений, с помощью которых исследования задачи существования и нахождения двоякопериодических решений однородного уравнения

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} + a(z)w + b(z)\bar{w} = 0, \quad (1)$$

связывают с нахождением эллиптической функции $\varphi(z)$, удовлетворяющей условию

$$\varphi(z + h_1) = \mu_1 \varphi(z), \varphi(z + h_2) = \mu_2 \varphi(z), \quad (2)$$

здесь μ_1, μ_2 - постоянные множители , h_1, h_2 – периоды решения уравнения (1).

«Функции, удовлетворяющие условиям (2), называют двоякопериодическими функциями второго рода» [104], «При $\mu_1 = \mu_2 = 1$ – просто двоякопериодическими функциями в обычном понимании периодичности» [124]. Заметим, что постоянные μ_1, μ_2 будут зависимыми как функционал от коэффициентов уравнения (1) и самого решения.

По аналогии с теорией Векуа, в работах Сафарва Д.С. «строятся интегральные операторы

$$a) T_{\zeta} \rho(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \rho(t) \zeta(t-z) d_t \Omega, \quad S_{\zeta} \rho(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \rho(t) \wp(t-z) d_t \Omega,$$

$$\begin{aligned}
b) T_\sigma \rho(z) &= -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \rho(t) \frac{\sigma(t-z-D)}{\sigma(-D)\sigma(t-z)} d_t \Omega, S_\sigma \rho(z) = \\
&= -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \rho(t) \left[\frac{\sigma'(t-z-D)}{\sigma(-D)\sigma(t-z)} - \frac{\sigma(t-z-D)\sigma'(t-z)}{\sigma(-D)\sigma^2(t-z)} \right] d_t \Omega, D \in \Gamma.
\end{aligned}$$

» [94, 95, 96, 107].

Интегралы берутся по основному параллелограмму периодов Ω двоякопериодической группы $\rho(z)$

$$\rho(z) = z + m_1 h_1 + m_2 h_2, \operatorname{Im} \left(\frac{h_2}{h_1} \right) \neq 0,$$

$m_1, m_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, Ω - параллелограмм с вершинами $z_0, z_0 + h_1, z_0 + h_1 + h_2, z_0 + h_2$, z_0 – фиксированная точка плоскости $\mathbb{C}$. В интеграле пункта b) D - постоянное и $D \in \Gamma$ а Γ – решетка периодов: $\Gamma = \{m_1 h_1 + m_2 h_2; m_1, m_2 - \text{целые}\}$. «Ядром подинтегральных выражений являются известные эллиптические функции Вейерштрасса» [7, 31, 121], $\zeta(z)$ – “дзета”, $\sigma(z)$ – “сигма” $\wp(z)$ – «пе» – функции, построенные на периодах h_1, h_2 .

Функции $\zeta(z), \wp(z)$ имеют вид

$$\begin{aligned}
\zeta(z) &= \frac{1}{z} + \sum' \left(\frac{1}{z-h} + \frac{1}{h} + \frac{z}{h^2} \right), \\
\wp(z) &= -\zeta'(z) = \frac{1}{z^2} - \sum' \left(\frac{1}{(z-h)^2} - \frac{1}{h^2} \right),
\end{aligned}$$

где $h = m_1 h_1 + m_2 h_2, m_1, m_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$,

Знак штрих в суммах означает, что двойное суммирование произведено по целым числам $m_1, m_2, m_1^2 + m_2^2 \neq 0$.

Функции $\zeta(z), \wp(z)$ являются мероморфными функциями на плоскости $\mathbb{C}$ с полюсами в точках $z = 0, z_{m_1, m_2} = m_1 h_1 + m_2 h_2, m_1, m_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$,

1) Функция $\zeta(z)$ является квазипериодической, то есть удовлетворяет условию

$$\zeta(z + h_1) = \zeta(z) + \eta_1, \quad \zeta(z + h_2) = \zeta(z) + \eta_2,$$

постоянные η_1, η_2 вычисляются формулами

$$\eta_1 = 2\zeta\left(\frac{h_1}{2}\right), \quad \eta_2 = 2\zeta\left(\frac{h_2}{2}\right).$$

Причем, числа « η_1, η_2 » названы циклическими постоянными, удовлетворяют вместе с периодами h_1, h_2 «соотношению Лежандра» [34].

$$\eta_1 h_2 - \eta_2 h_1 = 2\pi i \quad (3)$$

Это условие является условием существования для функции $\zeta(z)$. Функция $\zeta(z)$ – нечетная: $\zeta(-z) = -\zeta(z)$.

2) Функция $\wp(z)$ является двоякопериодической, то есть удовлетворяет условию

$$\wp(z + h_1) = \wp(z), \quad \wp(z + h_2) = \wp(z).$$

Функция $\wp(z)$ является решением важного нелинейного стационарного уравнения в нелинейной механике, уравнения Кортевега-де Фриза, то есть

$$\wp''' = 12\wp\wp',$$

Функция $\wp(z)$ - четная, $\wp(-z) = \wp(z)$

3) Функция $\sigma(z)$ связана с $\zeta(z)$ уравнением

$$\sigma'(z) = \zeta(z)\sigma(z)$$

и после интегрирования имеет вид

$$\sigma(z) = z \prod' \left(1 - \frac{z}{h}\right) \exp\left(\frac{z}{h} + \frac{z^2}{2h^2}\right), \quad h = m_1 h_1 + m_2 h_2;$$

$$m_1, m_2 = 0, \pm 1, \pm 2, ..$$

здесь штрих в знак произведения понимается как в сумме, то есть $h \neq 0$.

Функция $\sigma(z)$ является целой функцией и удовлетворяет условиям

$$\sigma(z + h_1) = -\sigma(z) \exp\left[\eta_1 \left(z + \frac{h_1}{2}\right)\right], \quad \sigma(z + h_2) = -\sigma(z) \exp\left[\eta_2 \left(z + \frac{h_2}{2}\right)\right]. \quad (4)$$

Функция, удовлетворяющая условию вида (4), называется двоякопериодической функцией третьего рода.

Из функции $\sigma(z)$ можно строить двоякопериодическую функцию второго рода

$$\varphi(z) = \frac{\sigma(z-b)}{\sigma(z-a)}, \quad (5)$$

где a и b – две произвольные числа. Из формулы (5) сразу получаем равенства

$$\varphi(z+h_1) = \varphi(z)e^{\eta_1(a-b)}, \quad \varphi(z+h_2) = \varphi(z)e^{\eta_2(a-b)}.$$

4) Для этих функций при стремлении z к нулю, имеет место предельные

соотношения

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0} \left(\zeta(z) - \frac{1}{z} \right) &= 0, \\ \lim_{z \rightarrow 0} \left(\wp(z) - \frac{1}{z^2} \right) &= 0, \\ \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sigma(z)}{z} &= 1. \end{aligned}$$

Эти свойства функций $\zeta(z)$, $\wp(z)$ и $\sigma(z)$ позволяли показать, что интегральные операторы

$$g_1(z) = T_\zeta f(z), \quad g_2(z) = T_\sigma f(z) \quad (6)$$

имеет дифференциальные и интегральные свойства интегрального оператора

Векуа [25]:

$$T_\Omega f(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \frac{f(z)}{t-z} d_t \Omega,$$

а именно

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} g_1(z) = \frac{\partial T_\zeta f(z)}{\partial \bar{z}} = f(z), \quad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} g_2(z) = \frac{\partial T_\sigma \rho(z)}{\partial \bar{z}} = \rho(z), \quad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} g_1(z) = \frac{\partial T_\zeta f(z)}{\partial z} = S_\zeta f(z), \quad (9)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} g_2(z) = \frac{\partial T_\sigma \rho(z)}{\partial z} = S_\sigma \rho(z). \quad (10)$$

Пусть C_*^1 и H_*^α – соответственно пространства двойкопериодических функций с периодами h_1, h_2 , принадлежащи классам $C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ и $H^\alpha(\bar{\Omega})$, $H^\alpha(\bar{\Omega})$ - пространство функций непрерывных по Гёльдеру со степенью $\alpha, \alpha \in (0,1)$.

«При $f(z) \in H_*^\alpha$ производные (7) – (10) понимаются в классическом смысле» [24, 25]. Приведем свойства функции $g_1(z) = T_\zeta f(z)$:

$$T_\zeta: \left\{ f \in H_*^\alpha, \iint_{\Omega} f(z) d\Omega = 0 \right\} \rightarrow C_*^{1+\alpha}, \quad (11)$$

$$C_*^{1+\alpha} = C_*^1 \cap H_*^\alpha.$$

Это означает, что если $f(z) \in H_*^\alpha$, то функция $g_1(z)$ при выполнении условия

$$\iint_{\Omega} f(z) d\Omega = 0 \quad (12)$$

является двойкопериодической функцией, допускающей производные по $\bar{z}$ и z , вычисляемые формулами (7), (9) и эти производные являются функциями класса $H_*^\alpha, \alpha \in (0,1)$.

Заметим, что если $f(z) \in L_p^*, p > 2$, L_p^* - пространство двойкопериодических функций с нормами в пространстве $L_p(\bar{\Omega})$, то производные (7), (9) существуют в смысле производной в пространстве Соболева $W_p^1(\bar{\Omega}), p > 2$.

Если W_p^{1*} – пространство Соболева двойкопериодических функций, $p > 2$, то справедливо

$$T_\zeta: \left\{ f \in L_p^*, \iint_{\Omega} f d\Omega = 0 \right\} \rightarrow W_p^{1*}, p > 2. \quad (13)$$

В силу «теоремы вложения Соболева» [26] при $p > 2$ $W_p^{1*} \subset H_*^\alpha, \alpha = \frac{p}{2} - 1$.

1) Приведем свойства функции

$$g_2(z) = T_\sigma \rho(z).$$

В работах Д.С. Сафарова показано, что «при условии $\rho(z) \in H^\alpha(\bar{\Omega})$ приведённая функция имеет частные производные по $\bar{z}$ и z » [105], [106]:

$$\frac{\partial g_2(z)}{\partial \bar{z}} = \rho(z), \quad \frac{\partial g_2(z)}{\partial z} = S_\sigma \rho(z), \quad (14)$$

причем $S_\sigma \rho(z) \in H_*^\alpha$.

Функция $g_2(z)$ вместе с этим и производными является двоякопериодической функцией второго рода, удовлетворяющая условию

$$g_2(z + h_j) = e^{\eta_j \cdot D} g_2(z), j = 1, 2. \quad (15)$$

Действительно, дифференцируя обе части (15) по $\bar{z}$, получим

$$\frac{\partial g_2(z + h_j)}{\partial \bar{z}} = \rho(z + h_j), j = 1, 2.$$

Так как

$$\frac{\partial g_2(z + h_j)}{\partial \bar{z}} = e^{\eta_j \cdot D} \frac{\partial g_2(z)}{\partial \bar{z}},$$

то, подставляя значения производных, получим

$$\rho(z + h_j) = e^{\eta_j \cdot D} \rho(z), j = 1, 2.$$

1. С помощью свойства функции $g_1(z)$ и $g_2(z)$ доказывается две теоремы для неоднородного уравнения Коши – Римана «

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = f(z). \quad (16)$$

Теорема 1. Пусть $f(z) \in H_*^\alpha$. Тогда, для разрешимости уравнения (1) в классе C_*^1 необходимо и достаточно, чтобы

$$\iint_{\Omega} f(z) d\Omega = 0.$$

При этом все решения уравнения (16) представляются формулой

$$w(z) = c + g_1(z) = c + T_\zeta f(z),$$

где c – произвольная постоянная.

Для уравнения (16) находятся двоякопериодические решения второго рода, удовлетворяющие условию

$$w(z + h_j) = \mu_j w(z), j = 1, 2, \quad (17)$$

μ_1, μ_2 – постоянные множители, $\operatorname{Im} \left(\frac{h_2}{h_1} \right) \neq 0$.

Теорема 2. Пусть функция $f(z)$ удовлетворяет условию (17), $f(z) \in H^\alpha(\bar{\Omega})$, $\alpha \in (0, 1)$ и число

$$D = \frac{1}{2\pi i} [h_2 \ln \mu_1 - h_1 \ln \mu_2] \notin \Gamma,$$

Γ – решетка периодов: $\Gamma = \{m_1 h_1 + m_2 h_2; m_1, m_2 \text{ – целые}\}$.

Тогда задача (16), (17) имеет одно единственное решение в классе $C^1(\Omega)$ и оно представимо в виде

$$w(z) = e^{az} T_\sigma(e^{-az} f(z)) = -e^{az} \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} e^{-at} f(t) \frac{\sigma(t - z - D)}{\sigma(-D) \sigma(t - z)} d\Omega, \quad (18)$$

где постоянная a вместе с D удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} ah_1 + D\mu_1 = \ln \mu_1, \\ ah_2 + D\mu_2 = \ln \mu_2. \end{cases}$$

Это система в силу соотношения Лежандра [7]

$$\eta_1 h_2 - \eta_2 h_1 = 2\pi i$$

имеет единственное решение» [94, 96].

2. Теперь рассмотрим неоднородное уравнение вида

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} + aw(z) = f(z), \quad (19)$$

где a – постоянная, $f(z) \in H_*^\alpha$. Полное решение этого уравнения в классе C_*^1 найдено в [94, 96].

Обозначим через Γ_1 - решетку вида

$$\Gamma_1 = \frac{\pi}{\Omega_0} \Gamma = \frac{\pi}{\Omega_0} \{m_1 h_1 + m_2 h_2; m_1, m_2 \text{ – целые}\}$$

Доказаны теоремы

Теорема 3. Пусть в уравнении (19) $a \in \Gamma_1$. Тогда однородное уравнение имеет двоякопериодическое решение

$$w_0(z) = e^{-a\bar{z} + \bar{a}z}.$$

Для разрешимости неоднородного уравнения необходимо и достаточно, чтобы

$$\iint_{\Omega} e^{a\bar{z} - \bar{a}z} f(z) d\Omega = 0.$$

При этом решения уравнения (19) представляются в виде

$$\begin{aligned} w(z) &= ce^{-a\bar{z} + \bar{a}z} + T_{\zeta} \left(e^{a(\bar{t}-z) - \bar{a}(t-z)} f(t) \right) = \\ &= ce^{-a\bar{z} + \bar{a}z} - \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} e^{a(\bar{t}-z) + \bar{a}(t-z)} f(t) \zeta(t-z) d_t \Omega, \end{aligned} \quad (20)$$

где c – произвольная постоянная.

Теорема 4. Пусть в уравнении (1) $a \notin \Gamma_1$. Тогда однородное уравнение (19) имеет лишь нулевое решение. Неоднородное уравнение, при любой $f(z) \in H_*^\alpha$, всегда имеет единственное решение в классе C_*^1 и оно имеет вид

$$\begin{aligned} w(z) &= e^{-a\bar{z} - dz} T_{\sigma} \left(e^{a\bar{z} + dz} f(z) \right) = \\ &= e^{-a\bar{z} - dz} \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} e^{a\bar{t} + dz} f(t) \frac{\sigma(t-z-\Delta)}{\sigma(-\Delta)\sigma(t-z)} d_t \Omega, \end{aligned} \quad (21)$$

где постоянные d и Δ – решение системы уравнений

$$\begin{cases} -dh_1 + \Delta\eta_1 = a\bar{h}_1, \\ -dh_2 + \Delta\eta_2 = a\bar{h}_2. \end{cases}$$

$$\Delta \cdot 2\pi i = a(\bar{h}_1 h_2 - \bar{h}_2 h_1),$$

$$\Delta \cdot 2\pi i = a|h_1|^2 2i \operatorname{Im} \frac{h_2}{h_1} = a2i\Omega_0,$$

$$\Delta = \frac{a\Omega_0}{\pi},$$

$$-d(h_1\eta_2 - h_2\eta_1) = a(\bar{h}_1\eta_2 - \bar{h}_2\eta_1),$$

$$d \cdot 2\pi i = a(\bar{h}_1\eta_2 - \bar{h}_2\eta_1).$$

3. Решение уравнения в случае переменного коэффициента $a = a(z)$.
Обозначим

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} a(z) d\Omega, \quad a(z) \in H_*^\alpha,$$

тогда возможны два случая: $a_0 \in \Gamma$ или $a_0 \notin \Gamma$, Γ – решетка периодов.

Теорема 5. Пусть в уравнении (19) $a = a(z) \in H_*^\alpha$ и $a_0 \in \Gamma$, тогда однородное уравнение (19) имеет решение вида

$$w_0(z) = e^{-T_\zeta a(z) + bz},$$

где постоянная b вместе с a_0 – решение системы уравнений

$$\begin{cases} a_0 \eta_1 + b h_1 = 2\pi i m_1, \\ a_0 \eta_2 + b h_2 = 2\pi i m_2, \end{cases}$$

m_1, m_2 – некоторые целые числа.

Для разрешимости неоднородного уравнения необходимо и достаточно, чтобы

$$\iint_{\Omega} f(z) e^{T_\zeta a(z) - bz} d\Omega = 0.$$

При этом все решения уравнения (19) в классе C_*^1 представимы в виде

$$w(z) = c w_0(z) + w_0(z) T_\zeta \left(\frac{f(z)}{w_0(z)} \right), \quad (22)$$

где c – произвольная постоянная.

Теорема 6. Пусть в уравнении (19) $a_0 \notin \Gamma$, тогда однородное уравнение имеет только нулевое решение. Неоднородное уравнение в классе C_*^1 при любой правой части $f(z) \in H_*^\alpha$ имеет, притом, одно единственное решение вида

$$\begin{aligned} w(z) &= e^{-T_\zeta a(z)} T_\sigma \left(e^{T_\zeta a(z)} f(z) \right) = \\ &= -e^{-T_\zeta a(z)} \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} e^{T_\zeta a(t)} f(t) \frac{\sigma(t - z - a_0)}{\sigma(-a_0) \sigma(t - z)} d_t \Omega. \end{aligned} \quad (23)$$

4. Теперь рассмотрим уравнение (19) в случае, когда $f(z) \equiv A$, A – постоянная

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} + aw = A. \quad (24)$$

Будем искать решение этого уравнения из класса C_*^1 при $a \neq 0$.

Это уравнение всегда имеет нетривиальное решение

$$w(z) = \frac{A}{a}, A \neq 0, a \neq 0 \quad (25)$$

и такое решение периодическое. При $a = 0, A \neq 0$ уравнение (24) не имеет периодического решения.

Рассмотрим однородное уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} + aw = 0 \quad (26)$$

и находим его решение при $a \neq 0$ и $a \in \Gamma_1$ или $a \in \bar{\Gamma}_1$.

Как показано в работах В.И. Показеева и Д.С. Сафарова «для всякого решения $w(z) \in C_*^1$ уравнение (26) справедлива формула

$$w(z) = \begin{cases} c \exp(\bar{a}z - a\bar{z}), & \text{если } a \in \Gamma_1, \\ 0, & \text{если } a \in \bar{\Gamma}_1, \end{cases} \quad (27)$$

где c – некоторая постоянная» [95, 107].

Теперь будем искать решение уравнения (24) в виде

$$w(z) = \psi(z)e^{-a\bar{z} + \bar{a}z}, a \in \Gamma_1 \quad (28)$$

где $\psi(z) \in C_*^1$ - искомая. Подставляя (34) в (26), для нахождения $\psi(z)$ получим неоднородное уравнение Коши – Римана

$$\frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}} = Ae^{a\bar{z} - \bar{a}z}. \quad (29)$$

Так как

$$\iint_{\Omega} Ae^{a\bar{z} - \bar{a}z} d\Omega = 0,$$

то, интегрируя (29), получим

$$\psi(z) = c + \frac{A}{a} e^{a\bar{z} - \bar{a}z}. \quad (30)$$

Подставляя $\psi(z)$ в формулу (28), получим решение уравнения (26) при $a \in \Gamma_1$ в виде

$$w(z) = ce^{-a\bar{z} + \bar{a}z} + \frac{A}{a}. \quad (31)$$

«Таким образом показано, что уравнение (24) в отличие от уравнения (19) безусловно разрешимо, причем однородное уравнение имеет ненулевое решение.

Таким образом, при $a \in \Gamma_1$ для уравнения (26) теоремы Фредгольма нарушаются и задача интегрирования уравнения (26) в классе C_*^1 является нетеровой» [45].

6. «Если $a \notin \Gamma_1$, то однородное уравнение имеет только нулевое решение и неоднородное уравнение имеет всегда решение вида (25)» [33].

7. Показано в работе В.И. Показеева, что «для всякого решения уравнения (1) из класса C_*^1 , когда $a(z), b(z) \in H_*^\alpha$ справедлива первая формула представления

$$w(z) = \Phi(z)e^{\varphi(z)}, \quad (32)$$

где $\varphi(z)$ имеет вид

$$\varphi(z) = -T_\zeta \left[a(z) + b(z) \frac{\bar{w}}{w} \right]$$

и удовлетворяет условию

$$\varphi(z + h_1) = \varphi(z) \exp(\eta_1 D), \varphi(z + h_2) = \varphi(z) \exp(\eta_2 D),$$

$$D = -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \left(a(z) + b(z) \frac{\bar{w}}{w} \right) d\Omega,$$

а функция $\Phi(z)$ – эллиптическая функция второго рода, удовлетворяющая условию

$$\Phi(z + h_1) = e^{-\eta_1 D} \Phi(z), \Phi(z + h_2) = e^{-\eta_2 D} \Phi(z) \quad (33)$$

» [96].

Формула (32) всякому решению уравнения (1) с точностью до постоянного множителя сопоставляет некоторую эллиптическую функцию второго рода, удовлетворяющую условию (33).

Из формулы (32) для решения уравнения (1) вытекает ряд свойств присущи к эллиптическим функциям (теорема Лиувилля, Абеля и других).

Показано в работе Сафарова Д.С., что «нелинейное интегральное уравнение

$$w(z) = \vartheta(z)e^{T\zeta\left(b\frac{\bar{w}}{w}\right)}, \quad (34)$$

где $\vartheta(z) = \Phi(z)e^{T\zeta a(z)}$ допускает обращение, то есть имеет решение и оно находится с помощью интегрирования ядра Коши, которые состоят из резольвентов некоторого интегрального уравнения Фредгольма второго рода» [96].

Затем находится решение неоднородного уравнения

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} + a(z)w + b\bar{w} = f(z) \quad (35)$$

в виде суммы решений $w_0(z)$ и $w_1(z)$, где $w_0(z)$ решение однородного уравнения (1) и $w_1(z)$ частное «решение уравнения (35), которое находится через резольвенты некоторого интегрального уравнения Фредгольма второго рода» [33].

ГЛАВА 2. ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ОБОБЩЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С НАГРУЖЕННЫМИ ЧЛЕНАМИ

2.1. Случай постоянных коэффициентов и с одним нагруженным членом

Рассмотрим на плоскости $\mathbb{C}$ уравнение вида

$$w_{\bar{z}} + aw(z) + bw(z_1) = f(z), \quad (2.1.1)$$

где a, b – постоянные $f(z)$ – заданная двоякопериодическая функция из класса $H_*^\alpha, 0 < \alpha \leq 1$.

«При $b = 0$ все двоякопериодические решения уравнения из класса C_*^1 найдены. Уравнение (2.1.1) в случае, когда $a = 0$ и $f(z) = 0$ изучено в монографии Сафарова Д.С. и для него исследована разрешимость задачи Дирихле» [109].

В работе Сафарова Д.С. показано что «разрешимость уравнения (2.1.1) в классе C_*^1 зависит от значения a : $a \in \Gamma_1$ или $a \notin \Gamma_1$, здесь

$$\Gamma_1 = \frac{\pi}{\Omega_0} \{m_1 h_1 + m_2 h_2, m_1, m_2 - \text{целые}\}, \Omega_0 = \text{mes} \Omega = |h_1|^2 \text{Im} \left(\frac{h_2}{h_1} \right).$$

»[95]

1. Рассмотрим случай $a = 0$.

«Сперва находим необходимое условие разрешимости. Если $w(z) \in C_*^1$ -решение уравнения (2.1.1), то интегрируя обе его части по параллелограмму Ω с вершинами $z_0, z_0 + h_1, z_0 + h_1 + h_2, z_0 + h_2$ имеем» [33].

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} d\Omega + bw(z_1) \iint_{\Omega} d\Omega = \iint_{\Omega} f(z) d\Omega, \quad (2.1.2)$$

В силу формулы Грина [1] и условие $w(z) \in C_*^1$ имеем

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} d\Omega = \int_{z_0}^{z_0+h_1} (w(z+h_2) - w(z)) dz - \int_{z_0}^{z_0+h_2} (w(z+h_1) - w(z)) dz = 0.$$

Так как в работе В.М. Абдуллаева « $\text{Im} \left(\frac{h_2}{h_1} \right) > 0$ и

$$\iint_{\Omega} d\Omega = \text{mes} \Omega = |h_1|^2 \text{Im} \left(\frac{h_2}{h_1} \right) = \Omega_0,$$

» [1], то при «обозначении

$$f_0 = \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} f(z) d\Omega,$$

из равенства (2.1.2) получим $bw(z_1)\Omega_0 = f_0$, $z_1 \in \Omega$.

Отсюда получим необходимое условие разрешимости

$$w(z_1) = \frac{f_0 \pi}{b\Omega_0}. \quad (2.1.3)$$

Таким образом показано, что если уравнение (2.1.1) разрешимо в классе C_*^1 , то необходимо, чтобы его решение $w(z)$ в точке z_1 имело значение (2.1.3).

Теперь покажем, что если в точке z_1 для решения уравнения (1) имеет место равенство (2.1.3), то его можно интегрировать в классе C_*^1 .

Согласно результатам работы [95], при выполнении условия (2.1.3), интегрируя уравнение (2.1.1), имеем

$$w(z) = \Phi(z) - bw(z_1)\bar{z} + T_{\zeta}f(z), \quad (2.1.4)$$

где $g(z) = T_{\zeta}f(z)$ — решение неоднородного уравнения Коши – Римана» [105]

$$\frac{\partial g(z)}{\partial \bar{z}} = f(z),$$

а $\Phi(z)$ — аналитическая функция, удовлетворяющая условиям

$$\Phi(z + h_1) = \Phi(z) - bw(z_1)\bar{h}_1 + \eta_1 f_0, \quad (2.1.5.)$$

$$\Phi(z + h_2) = \Phi(z) - bw(z_1)\bar{h}_2 + \eta_2 f_0,$$

где η_1, η_2 — циклические постоянные, $\eta_1 = 2\zeta\left(\frac{h_1}{2}\right)$, $\eta_2 = 2\zeta\left(\frac{h_2}{2}\right)$, связанные с периодами h_1, h_2 соотношением Лежандра

$$\eta_2 h_1 - \eta_1 h_2 = 2\pi i.$$

Таким образом надо найти квазидвойкопериодическую аналитическую функцию $\Phi(z)$ с условиями (2.1.5.).

Как в работе Д.С. Сафарова, «представим эту функцию в виде

$$\Phi(z) = \varphi(z) + dz.$$

Тогда для искомой аналитической функции $\varphi(z)$ и постоянной d получим условия

$$\varphi(z + h_1) = \varphi(z) - bw(z_1)\bar{h}_1 + \eta_1 f_0 + dh_1, \quad (2.1.6)$$

$$\varphi(z + h_2) = \varphi(z) - bw(z_1)\bar{h}_2 + \eta_2 f_0 + dh_2.$$

Теперь воспользуюсь соотношением Лежандра и равенством (2.1.3), берем постоянную d таким, чтобы система имела решение» [109]:

$$\begin{cases} -bw(z_1)\bar{h}_1 + \eta_1 f_0 + dh_1 = 0, \\ -bw(z_1)\bar{h}_2 + \eta_2 f_0 + dh_2 = 0. \end{cases} \quad (2.1.7)$$

Решая систему, получим

$$d = \frac{\pi}{2i\Omega_0} (\eta_1 \bar{h}_2 - \eta_2 \bar{h}_1) f_0, bw(z_1)\Omega_0 = f_0 \pi. \quad (2.1.7')$$

«Таким образом, постоянная d , вычисленная по формуле (2.1.7'), вместе с $bw(z_1)\Omega_0$ удовлетворяют системе уравнений (2.1.7). Тогда, из системы уравнений (2.1.6) находим, что $\varphi(z)$ – двоякопериодическая аналитическая функция, по теореме из теории эллиптических функций (теорема Лиувилля) получим, что $\varphi(z) \equiv c$, c – постоянная», [109].

Таким образом, всякое двоякопериодическое решение уравнения (2.1.1) из класса C_*^1 , при $a = 0$ представимо в виде

$$w(z) = c + dz - bw(z_1)\bar{z} + T_\zeta f(z), \quad (2.1.8)$$

где постоянная d и $bw(z_1)$ имеют вид (2.1.3) и (2.1.7'), а c – произвольная постоянная.

Подставляя в (2.1.8) $z = z_1$ и воспользуясь равенством (2.1.3), находим постоянную c :

$$c = \frac{f_0}{\Omega_0} + f_0 \bar{z}_1 - dz_1 - T_\zeta f(z_1). \quad (2.1.9)$$

Таким образом справедлива

Теорема 2.1.1. Пусть в уравнении (2.1.1) $a = 0$. Тогда для его разрешимости в классе C_*^1 необходимо и достаточно, чтобы решение $w(z)$ в точке $z = z_1$ принимало значение (2.1.3). При этом единственное его решение из класса C_*^1 представляется формулой (2.1.8), в котором постоянная c вычислено формулой (2.1.9), а постоянная d имеет вид (2.1.7').

2. Теперь разберем случай $a \neq 0$. В этом случае возможны два под случая $a \in \Gamma_1$ и $a \notin \Gamma_1$.

Пусть $a \in \Gamma_1$. Тогда, записывая уравнение (2.1.1) в виде

$$w_{\bar{z}} + aw(z) = -bw(z_1) + f(z) = F(z), \quad (2.1.10)$$

и считая правую часть известной и $F(z) \in H_*, 0 < \alpha \leq 1$, так как $f(z) \in H_*$, находим решение из класса C_*^1 .

Согласно результатам работы Д.С. Сафарова решение уравнения (2.1.10) представимо в виде «

$$w(z) = -\frac{b}{a}w(z_1) + \exp(-a\bar{z} - dz)T_\sigma[f_1(z)], \quad (2.1.11)$$

где $f_1(z) = \exp(a\bar{z} + dz)$, а $T_\sigma\rho(z)$ – имеет вид

$$T_\sigma f_1(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} f_1(z) \frac{\sigma(t - z - \Delta_0)}{\sigma(-\Delta_0)\sigma(t - z)} d_t \Omega, \quad \Delta_0 \in \Gamma, \quad (2.1.11')$$

$$(T_\sigma[f_1(z)])_{\bar{z}} = f_1(z),$$

причём постоянные d и Δ_0 имеют вид» [106]

$$d = \frac{a}{2\pi i} (\bar{h}_1 \eta_2 - \bar{h}_2 \eta_1) (mod \Gamma), \quad \Delta_0 = -\frac{a\Omega_0}{\pi} (mod \Gamma). \quad (2.1.11'')$$

Подставляя в формулу (2.1.11) $z = z_1$, находим $w(z_1)$:

$$w(z_1) = -\frac{b}{a}w(z_1) + F(z_1), \quad (2.1.12)$$

где через $F(z)$ обозначено

$$F(z) = \exp(-a\bar{z} - dz)T_\sigma[f_1(z)]. \quad (2.1.13)$$

Если $a + b \neq 0$, то из (2.1.12) находим $w(z_1)$ в виде

$$w(z_1) = \frac{a}{a + b} F(z_1).$$

Подставляя это значение в формулу (2.1.1), получим решение уравнения (2.1.10) в виде

$$w(z) = -\frac{b}{a + b} F(z_1) + F(z), \quad (2.1.14)$$

где $F(z)$ имеет вид (2.1.13).

Теорема 2.1.2. Пусть в уравнении (2.1.1) $a \in \Gamma_1$. Тогда для его однозначной разрешимости необходимо и достаточно, чтобы $a + b \neq 0$.

При этом единственное его решение выражается формулой (2.1.14), а $F(z)$ имеет вид (2.1.3).

2. Теперь исследуем под случай $a \in \Gamma_1$.

В этом под случае однородное уравнение имеет ненулевое решение.

В самом деле, отыскивая его решение в виде

$$w(z) = \varphi(z)e^{-a\bar{z}+\bar{a}z}, \quad (2.1.15)$$

для нахождения $\varphi(z) \in C_*^1$ получим уравнение вида

$$\varphi_{\bar{z}} = -bw(z_1)e^{a\bar{z}-\bar{a}z} = F(z). \quad (2.1.16)$$

Вычислим интеграл в правой части. При этом будем использовать формулу Грина

$$\iint_{\Omega} \Psi_{\bar{z}} d\Omega = 2i \int_{\Gamma} \Psi(z) dz,$$

$$\iint_{\Omega} \Psi_z d\Omega = -2i \int_{\Gamma} \Psi(z) d\bar{z},$$

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} F(z) d\Omega &= -bw(z_1) \iint_{\Omega} e^{a\bar{z}-\bar{a}z} d\Omega = bw(z_1) \frac{1}{a} \iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} e^{a\bar{z}-\bar{a}z} d\Omega = \\ &= bw(z_1) \frac{1}{a} \left[\int_0^{h_2} A(e^{a(\bar{z}+\bar{h}_1)-\bar{a}(z+h_1)} - e^{a\bar{z}-\bar{a}z}) dz \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{h_1} A(e^{a(\bar{z}+\bar{h}_2)-\bar{a}(z+h_2)} - e^{a\bar{z}-\bar{a}z}) dz \right] = \\ &= bw(z_1) \frac{1}{a} \left[\int_0^{h_2} Ae^{a\bar{z}-\bar{a}z} (e^{a\bar{h}_1-\bar{a}h_1} - 1) dz \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{h_1} Ae^{a\bar{z}-\bar{a}z} (e^{a\bar{h}_2-\bar{a}h_2} - 1) dz \right] = 0, \end{aligned}$$

где $A = \exp[a\bar{z}_0 - \bar{a}z_0]$.

Так как $a \in \Gamma_1$, то существуют целые числа m_1, m_2 такие, что справедливо равенство

$$a = \frac{\pi}{\Omega_0} [m_1 h_1 + m_2 h_2] \text{ и } \bar{a} = \frac{\pi}{\Omega_0} [m_1 \bar{h}_1 + m_2 \bar{h}_2].$$

Отсюда легко получим, что

$$\exp(a \bar{h}_1 - \bar{a} h_1) = \exp(a \bar{h}_2 - \bar{a} h_2) = 1.$$

Поэтому,

$$\iint_{\Omega} F(z) d\Omega = 0,$$

то есть уравнение (2.1.16) при $a \in \Gamma_1$ всегда имеет решение из класса C_*^1 .

Тогда, интегрируя (2.1.16), получим

$$\varphi(z) = -\frac{b}{a} w(z_1) \exp(a \bar{z} - \bar{a} z) + c,$$

c – произвольная постоянная.

Подставляя $\varphi(z)$ в (2.1.15), получим решение уравнения в виде

$$w(z) = c e^{-a \bar{z} + \bar{a} z} - \frac{b}{a} w(z_1). \quad (2.1.17)$$

Поэтому, как, принято «в теории нагруженных уравнений (или решение обратной задачи) надо налагать на решение условия переопределения. Условие переопределения означает, что значение решения задаётся в точках или в интегральном виде (2.1.17)» [37, 67].

Заменяя в этом равенстве z на z_1 , имеем

$$w(z_1) \left(1 + \frac{b}{a}\right) - c e^{-a \bar{z}_1 + \bar{a} z_1} = 0. \quad (2.1.17')$$

Получили одно уравнение с двумя неизвестными $w(z_1)$, c – произвольная постоянная. Такие уравнения всегда разрешимы. При произвольном c можно найти $w(z_1)$, что нарушается однозначность функции $w(z)$, как решение однородного уравнения в точке $z = z_1$, а это невозможно.

Поэтому, надо налагать на решение дополнительное точечное условие вида

$$w(z_0) = e_1, \quad e_1 - \text{постоянная} \quad (2.1.18)$$

Находим решение однородного уравнения при дополнительном условии (2.1.18), где e_1 — некоторое число, $z_0 \in \Omega$.

Подставляя в (2.1.17) $z = z_0$, с учетом условия (2.1.18), для определения $w(z_1)$ и постоянной c получим систему уравнений

$$\begin{cases} ce^{-a\bar{z}_0 + \bar{a}z_0} - \frac{b}{a}w(z_1) = e_1, \\ ce^{-a\bar{z}_1 + \bar{a}z_1} - \left(1 + \frac{b}{a}\right)w(z_1) = 0. \end{cases} \quad (2.1.19)$$

Отсюда получим, что если выполнено условие

$$(a + b)e^{-a\bar{z}_0 + \bar{a}z_0} \neq be^{-a\bar{z}_1 + \bar{a}z_1}, \quad (2.1.20)$$

то система уравнений однозначно разрешима, причем однородная задача, то есть когда $e_1 = 0$, имеет только тривиальное решение.

Теперь находим условие однозначной разрешимости неоднородного уравнения при условии (2.1.20).

В этом случае для разрешимости уравнения в классе C_*^1 необходимо и достаточно, чтобы

$$\iint_{\Omega} f(z) \exp(a\bar{z} - \bar{a}z) d\Omega = 0. \quad (2.1.21)$$

Тогда решение уравнения (2.1.1) в классе C_*^1 представимо в виде

$$w(z)ce^{-a\bar{z} + \bar{a}z} + \frac{b}{a}w(z_1) + e^{-a\bar{z} + \bar{a}z}T_{\zeta}[f_1(z)], \quad (2.1.22)$$

где c — произвольная постоянная, $f_1(z) = f(z)\exp(a\bar{z} - \bar{a}z)$.

Подставляя в эту формулу $z = z_0$ и $z = z_1$, для нахождения $w(z_1)$ и постоянной c получим систему уравнений

$$\begin{cases} ce^{-a\bar{z}_0 + \bar{a}z_0} - \frac{b}{a}w(z_1) = e_1 - \Phi(z_0), \\ ce^{-a\bar{z}_1 + \bar{a}z_1} - \left(1 + \frac{b}{a}\right)w(z_1) = -\Phi(z_1), \end{cases} \quad (2.1.23)$$

где через $\Phi(z)$ обозначено

$$\Phi(z) = e^{-a\bar{z} + \bar{a}z}T_{\zeta}[f_1(z)].$$

Выше обнаружили, что для однозначной разрешимости однородной системы, соответствующей (2.1.1), должно выполняться условие (2.1.20), причём при $e_1 = 0, \Phi(z_0) = \Phi(z_1) = 0$, однородная система имеет только нулевое решение $w(z_1) = 0, c = 0$.

Таким образом справедлива

Теорема 2.1.3. Пусть в уравнении (2.1.1) $a \in \Gamma$. Тогда для однозначной разрешимости уравнения (2.1.1) с дополнительным условием (2.1.18) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (2.1.20) и (2.1.21). При этом единственное решение задачи (2.1.1) и (2.1.18) представляется в виде (2.1.22), постоянные $w(z_1)$ и c определяются из системы уравнений (2.1.23).

2.2. Двоякопериодические решения уравнения обобщенных аналитических со многими нагруженными членами и постоянными коэффициентами

Рассмотрим уравнение вида

$$w_{\bar{z}} + aw(z) + \sum_{k=1}^n a_k w(z_k) = f(z), \quad (2.2.1)$$

где a, a_k — постоянные, $n \geq 2$.

Как в случае $n = 1$, исследование проведем в случаях:

$$a \bar{\in} \Gamma_1, \quad a \in \Gamma_1 \text{ и } a = 0.$$

1. Пусть $a \bar{\in} \Gamma_1, f(z) \in H_{\alpha}^*, 0 < \alpha \leq 1$. Решение уравнения будем искать в классе C_*^1 .

Считая, временно, значения $w(z_k)$ известными, согласно результатам работы [92], находим

$$w(z) = -\frac{1}{a} \sum_{k=1}^n a_k w(z_k) + F(z), \quad (2.2.2)$$

где

$$F(z) = \exp(-a\bar{z} + dz) T_{\sigma}[f_1(z)], f_1(z) = f(z) \exp(a\bar{z} - dz),$$

$$T_{\sigma} f_1(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} f_1(t) \frac{\sigma(t - z - \Delta_0)}{\sigma(-\Delta_0) \sigma(t - z)} d_t \Omega, \quad \Delta_0 \bar{\in} \Gamma,$$

постоянные d и Δ_0 вычислены формулами

$$d = \frac{1}{2\pi i} [\bar{h}_1 \eta_2 - \bar{h}_2 \eta_1] (mod \Gamma), \quad \Delta_0 = -\frac{a\Omega_0}{\pi} (mod \Gamma).$$

Для нахождения $w(z_k)$, поочередно в (2.2.2) подставляя $z = z_1, z_2, \dots, z_n$, получим систему уравнений

$$B\tilde{w} = b, \quad (2.2.3)$$

где

$$\tilde{w} = (w(z_1), w(z_2), \dots, w(z_n))^T, b = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T, b_j = aF(z_j), j = \overline{1, n},$$

B - матрица вида

$$B = aE + A,$$

E - единичная матрица, матрица A имеет одинаковые строки, то есть,

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}.$$

Так как $a \in \Gamma_1$, то $a \neq 0$ и справедлива следующая.

Теорема 2.2.1. Пусть в уравнении (2.2.1) $a \in \Gamma_1$. Тогда, для однозначной разрешимости уравнения (2.2.1) необходимо и достаточно, чтобы

$$\det B \neq 0.$$

При этом единственное решение уравнения (2.2.1) имеет вид (2.2.2), а $w(z_1), w(z_2), \dots, w(z_n)$ вычисляются формулами

$$w(z_j) = B^{-1}b_j, j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.2.4)$$

1. Теперь исследуем случай $a \in \Gamma_1$ и $a = 0$.

В случае $a \in \Gamma_1$ будем искать решение уравнения в виде

$$w(z) = \varphi(z)e^{-a\bar{z}+\bar{a}z}, \quad (2.2.5)$$

так как при $a \in \Gamma_1$, функция $e^{-a\bar{z}+\bar{a}z} \in C_*^\infty$, то подставляя эту функцию в (2.2.1) для нахождения $\varphi(z) \in C_*^1$ получим уравнение

$$\varphi_{\bar{z}} + e^{a\bar{z}-\bar{a}z} \sum_{k=1}^n a_k w(z_k) = f(z)e^{a\bar{z}-\bar{a}z}, \quad (2.2.6)$$

Если $\varphi(z)$ – решение этого уравнения, то интегрируя обе части этого равенства, в силу формулы Грина имеем

$$\iint_{\Omega} \varphi_{\bar{z}} d\Omega + \sum_{k=1}^n a_k w(z_k) \iint_{\Omega} e^{a\bar{z}-\bar{a}z} d\Omega = \iint_{\Omega} f(z) e^{a\bar{z}-\bar{a}z} d\Omega.$$

Согласно вычисленному в §2.2.1

$$\iint_{\Omega} \varphi_{\bar{z}} d\Omega = 0 \text{ и } \iint_{\Omega} e^{a\bar{z}-\bar{a}z} d\Omega = 0.$$

Поэтому необходимое условие разрешимости уравнения в классе C_*^1 примет вид

$$\iint_{\Omega} f(z) e^{a\bar{z}-\bar{a}z} d\Omega = 0. \quad (2.2.7)$$

При выполнении этого условия, интегрируя уравнение (2.2.5), получим

$$\varphi(z) = c + \frac{1}{a} e^{a\bar{z}-\bar{a}z} \sum_{k=1}^n a_k w(z_k) + T_{\zeta}[f_1(z)], \quad (2.2.8)$$

Подставляя $\varphi(z)$ в (2.2.3), получим общее решение уравнения при выполнении условия (2.2.7) в виде

$$w(z) = c e^{-a\bar{z}+\bar{a}z} - \frac{1}{a} \sum_{k=1}^n a_k w(z_k) + P(z), \quad (2.2.9)$$

где

$$P(z) = e^{-a\bar{z}+\bar{a}z} T_{\zeta}[f_1(z)], \quad f_1(z) = f(z) e^{a\bar{z}-\bar{a}z}, \quad c - \text{произвольная постоянная.}$$

В представлении (2.2.9) неизвестными являются постоянные

$$c, w(z_1), w(z_2), \dots, w(z_n).$$

Так как, однозначное решение уравнения мы ищем в классе однозначных функций из класса C_*^1 , то для нахождения постоянных, входящих в (2.2.9) надо налагать дополнительные условия как было указано в параграфе §2.2.1.

Требуем, чтобы решение уравнения (1) в точке $z = z_0 \in \Omega$ принимало значение c_1 :

$$w(z_0) = c_1, \quad c_1 \text{ — некоторая постоянная.} \quad (2.2.10)$$

Подставляя в (2.2.9) поочередно $z = z_0, z_1, \dots, z_n$ и введя обозначения относительно неизвестного вектора

$$\tilde{w} = (c_1, w(z_1), w(z_2), \dots, w(z_n))^T$$

получим систему уравнений

$$A\tilde{w} = \tilde{b}, \quad (2.2.11)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} d_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ d_1 & (a + a_1) & a_2 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_n & a_1 & a_2 & \dots & (a + a_n) \end{pmatrix},$$

$$\tilde{b} = a(b_1 - c_1, b_2, b_3, \dots, b_n), \quad d_j = -e^{-a\bar{z}_j + \bar{a}_j z_j}, \quad b_j = -P(z_j), \quad j = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Таким образом справедлива

Теорема 2.2.2. Пусть в уравнении (2.2.1) $a \in \Gamma_1, a \neq 0$ и выполнено условие (2.2.7). Тогда для однозначной разрешимости задачи (2.2.1), (2.2.10) в классе C_*^1 необходимо и достаточно, чтобы

$$\text{rang} A = n + 1.$$

При этом единственное решение задачи представляется в виде (2.2.9), где постоянные $c, w(z_1), \dots, w(z_n)$ находятся по формуле

$$\tilde{w} = A^{-1}\tilde{b}, \quad \tilde{w} = (c, w(z_1), \dots, w(z_n))^T,$$

A^{-1} — обратная матрица для A .

2. Исследуем случай $a = 0$. В этом случае для разрешимости уравнения согласно формуле Грина [25] интегрируя, получим необходимое условие разрешимости

$$\iint_{\Omega} w_{\bar{z}} d\Omega + \sum_{k=1}^n a_k w(z_k) \iint_{\Omega} d\Omega = \iint_{\Omega} f(z) d\Omega,$$

так как

$$\iint_{\Omega} w_{\bar{z}} d\Omega = 0 \text{ и } \iint_{\Omega} d\Omega = \Omega_0 = \text{mes} \Omega = |h_1|^2 \text{Im} \left(\frac{h_2}{h_1} \right),$$

то из последнего равенства находим

$$\sum_{k=1}^n a_k w(z_k) = \frac{\pi f_0}{\Omega_0}, \quad f_0 = \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} f(z) d\Omega. \quad (2.2.11')$$

При выполнении этого равенства решение уравнения представимо в виде

$$w(z) = -c - \sum_{k=1}^n a_k w(z_k) \bar{z} + dz + T_{\zeta} f(z), \quad (2.2.12)$$

где c — некоторая постоянная, постоянная d , как и в случае $a = 0, n = 1$, вычислена формулой

$$d = \frac{1}{2i\Omega_0} (\eta_1 \bar{h}_2 - \eta_2 \bar{h}_1) f_0.$$

Теперь в равенство (2.1.12) подставляя $z = z_1, z_2, \dots, z_n$, для нахождения $w(z_1), w(z_2), \dots, w(z_n)$ и постоянной c вместо с (2.2.11') получим систему $n + 1$ уравнений с $n + 1$ — неизвестными

$$B\tilde{w} = \tilde{b},$$

где $\tilde{w} = (c, w(z_1), w(z_2), \dots, w(z_n))^T$ — неизвестный вектор, матрица B имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & (1 + a_1 \bar{z}_1) & a_2 \bar{z}_1 & \dots & a_n \bar{z}_1 \\ 1 & a_1 \bar{z}_2 & (1 + a_2 \bar{z}_2) & \dots & a_n \bar{z}_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_1 \bar{z}_n & a_2 \bar{z}_n & \dots & (1 + a_n \bar{z}_n) \end{pmatrix},$$

$\tilde{b}$ — известный вектор

$$\tilde{b} = (b_0, dz_1 + b_1, dz_2 + b_2, \dots, dz_n + b_n)^T,$$

$$b_0 = \frac{\pi f_0}{\Omega_0}, b_j = T_{\zeta} f(z_j), j = 1, 2, \dots, n.$$

Таким образом становится очевидной

Теорема 2.2.3. Пусть в уравнении (2.2.1) $a = 0, n \geq 2$. Тогда для его однозначной разрешимости необходимо и достаточно, чтобы

$$\text{rang } \tilde{B} = n + 1.$$

При этом единственное решение уравнения (2.2.1) из класса C_*^1 представляется в виде (2.2.12), где постоянные $c, w(z_1), w(z_2), \dots, w(z_n)$ находятся по формуле

$$\tilde{w} = b^{-1}\tilde{b},$$

B^{-1} – обратная матрица к матрице B . Или

$$c = \frac{\Delta_0}{\Delta}, w(z_j) = \frac{\Delta_j}{\Delta}, j = 1, 2, \dots, n,$$

Δ_j – определитель, который получается из определителя $\Delta = \det B$ заменой j -го столбца столбцом «Свободных членов».

2.3. Двоякопериодические решения нагруженного уравнения обобщенных аналитических функций с переменными коэффициентами

1. Случай уравнения с одним нагруженным членом.

Рассмотрим уравнение вида

$$w_{\bar{z}} + a(z)w(z) + b(z)w(z_1) = f(z), \quad (2.3.1)$$

где $a(z), b(z), f(z) \in H_\alpha^*, 0 < \alpha \leq 1, z_1 \in \Omega$, Ω – основной параллелограмм периодов с вершинами $0, h_1, h_1 + h_2, h_2$. Решение уравнения (2.3.1) будем искать в классе C_*^1 . Находим условия существования единственного решения уравнения, то есть, такие решения, что при $f(z) \equiv 0, w(z) \equiv 0$.

1) Сперва рассмотрим уравнение вида

$$w_{\bar{z}} + b(z)w(z_1) = f(z). \quad (2.3.2)$$

Уравнение такого вида рассмотрено в монографии А.М. Нахушева и для него «исследована разрешимость задачи Дирихле» [82].

При отыскании решения уравнений (2.3.1) и (2.3.2), на протяжении всего параграфа, введем обозначения

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} a(z) d\Omega, \quad b_0 = \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} b(z) d\Omega, \quad f_0 = \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} f(z) d\Omega.$$

Разрешимость уравнения (2.3.2) зависит от случая $b_0 = 0$ или $b_0 \neq 0$.

Если $w(z) \in C_*^1$ – решение уравнения (2.3.2), то интегрируя обе части уравнения в силу формулы Грина, получим

$$b_0 w(z_1) = f_0. \quad (2.3.3)$$

При $b_0 \neq 0$ находим $w(z_1) = \frac{f_0}{b_0}$. Тогда общее решение уравнения запишется в виде

$$w(z) = -w(z_1)T_\zeta b(z) + T_\zeta f(z) + c, \quad (2.3.4)$$

c – произвольная постоянная.

Заменяя в (2.3.4) z на z_1 и подставляя $w(z_1) = \frac{f_0}{b_0}$, находим постоянную c в виде

$$c = w(z_1)[1 + T_\zeta b(z_1)] - T_\zeta f(z_1), \quad (2.3.5)$$

где $T_\zeta b(z_1), T_\zeta f(z_1)$ соответственно вычисляются формулами

$$T_\zeta b(z_1) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} b(t) \zeta(t - z_1) d_t \Omega, \quad T_\zeta f(z_1) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} f(t) \zeta(t - z_1) d_t \Omega.$$

Например, если

$$b(z) = e^{a\bar{z} - \bar{a}z} \text{ и } a = \frac{\pi}{\Omega_0} h_1 \text{ или } a = \frac{\pi}{\Omega_0} h_2, \text{ то } T_\zeta b(z_1) = \frac{1}{a} e^{a\bar{z} - \bar{a}z}.$$

Справедлива

Теорема 2.3.1. Пусть в уравнении (2.3.2) $b_0 \neq 0$. Тогда для его однозначной разрешимости необходимо и достаточно, чтобы в точке z_1 решение $w(z)$ принимало значение $w(z_1) = \frac{f_0}{b_0}$. При этом единственное решение уравнения (2.3.2) представимо в виде (2.3.4), в котором постоянная c вычисляется формулой (2.3.5).

Теперь как в случае $n = 1$, покажем, что при $b_0 = 0$ однозначная разрешимость уравнения (2.3.2) в классе C_*^1 нарушается.

В самом деле, если $b_0 = 0$, то из равенства (2.3.3) следует, что для разрешимости уравнения необходимо и достаточно, чтобы $f_0 = 0$. При этом его общее решение из класса C_*^1 запишется в виде (2.3.4).

Подставляя в (2.3.4) $z = z_1$, получим одно уравнение с двумя неизвестными $w(z_1)$ и постоянно c

$$c - w(z_1)[1 + T_\zeta b(z_1)] = T_\zeta f(z_1).$$

Отсюда следует, что при $f(z) \equiv 0$ однородное уравнение (2.3.2) имеет нетривиальное решение.

Как в § 2.1, в этом случае, налагаем условие переопределения, точечное условие

$$w(z_0) = e, z_0 \in \Omega.$$

Тогда для нахождения постоянных $w(z_1)$ и c получим систему уравнений

$$\begin{cases} c - w(z_1)T_\zeta b(z_0) = -T_\zeta f(z_0) + e, \\ c - w(z_1)[1 + T_\zeta b(z_1)] = -T_\zeta f(z_1). \end{cases}$$

Из этой системы находим условие однозначной разрешимости задачи в виде

$$\det \begin{vmatrix} 1 & -T_\zeta b(z_0) \\ 1 & -1 - T_\zeta b(z_1) \end{vmatrix} = -1 - T_\zeta b(z_1) + T_\zeta b(z_0) \neq 0$$

или

$$T_\zeta b(z_0) - T_\zeta b(z_1) \neq 1.$$

2) Случай $a(z) \neq 0$. В этом случае возможны случаи: $a_0 \in \Gamma$ или $a_0 \notin \Gamma$, Γ – решетка периодов.

Если $a_0 \in \Gamma$, то решение уравнения будем искать в виде

$$w(z) = \varphi(z) \exp(-T_\zeta a(z) - dz), \quad (2.3.6)$$

где $\varphi(z)$ – искомая, а постоянная d находится как решение уравнения

$$\exp(\eta_1 a_0 + dh_1) = \exp(\eta_2 a_0 + dh_2) = 1.$$

«Здесь η_1, η_2 – циклические постоянные, связанные с h_1, h_2 » [33],

«соотношением Лежандра $\eta_1 h_2 - \eta_2 h_1 = 2\pi i$ » [32, 59].

Если $a_0 = m_1 h_1 + m_2 h_2$, где m_1, m_2 – некоторые целые числа, то решая систему уравнений

$$\begin{cases} \eta_1 a_0 + dh_1 = 2\pi i m_2, \\ \eta_2 a_0 + dh_2 = -2\pi i m_1, \end{cases}$$

находим $d = -\eta_1 m_1 - m_2 \eta_2$.

Так как функция $\exp(T_\zeta a(z) + dz)$ – дwoякопериодическая (глава 1. §),

то $\varphi(z)$ – должна быть дwoякопериодической. Подставляя (2.3.6) в (2.3.1), для искомой функции $\varphi(z)$ получим уравнение вида (2.3.2)

$$\varphi_{\bar{z}} + b_1(z)\varphi(z_1) = f_1(z), \quad (2.3.7)$$

где

$$b_1(z) = b(z)\exp[(T_\zeta a(z) + dz) - T_\zeta a(z_1) - dz_1], f_1(z) = f(z)\exp(T_\zeta a(z) + dz).$$

Введем обозначения

$$b_1^0 = \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} b(z)\exp(T_\zeta a(z) + dz)d\Omega, \quad f_1^0 = \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} f(z)\exp(T_\zeta a(z) + dz)d\Omega.$$

Как выше, интегрируя уравнение (2.3.7), в силу формулы Грина получим необходимое условие его разрешимости в классе C_*^1

$$b_1^0 \varphi(z_1) = \exp(T_\zeta a(z_1) + dz_1) f_1^0. \quad (2.3.8)$$

При $b_1^0 \neq 0$, решение уравнения (2.3.7) обязано в точке z_1 принимать значение

$$\varphi(z_1) = \exp(T_\zeta a(z_1) + dz_1) \frac{f_1^0}{b_1^0}. \quad (2.3.8')$$

При выполнении этого условия из (2.3.7) получим

$$\varphi(z) = c - \varphi(z_1)T_\zeta b_1(z) + T_\zeta f_1(z),$$

где c – произвольная постоянная.

Подставляя значение $\varphi(z)$ в (2.3.6) получим представление решения уравнения (2.3.1) при выполнении условий $b_1^0 \neq 0$ и

$$w(z_1) = \frac{f_1^0}{b_1^0}, \quad (2.3.9)$$

в виде

$$w(z) = \exp(-T_\zeta a(z) - dz)[c - w(z_1)T_\zeta b_1(z_1) + T_\zeta f_1(z)], \quad (2.3.10)$$

Заменяя z на z_1 находим постоянную c в виде

$$c = w(z_1) \left[\exp(T_\zeta a(z_1) + dz_1 - T_\zeta b_1(z_1)) \right] - T_\zeta f_1(z_1). \quad (2.3.11)$$

Таким образом справедлива

Теорема 2.3.2. Пусть в уравнении (2.3.1) $a_0 \in \Gamma, b_1^0 \neq 0, f_1^0 \neq 0$. Тогда для его однозначной разрешимости необходимо и достаточно, чтобы решение в точке z_1 принимало значение (2.3.9). При этом единственное его решение представляется в виде (2.3.10), в котором постоянная c вычислена формулой (2.3.11).

При $a_0 \in \Gamma$, уравнение (2.3.1) запишем в виде

$$w_{\bar{z}} + a(z)w(z) = -b(z)w(z_1) + f(z) = F(z),$$

так как $F(z) \in H_*^\alpha, 0 < \alpha \leq 1$, то согласно результатам работы [92], как в § 2.1.1, для решения этого уравнения получим представление

$$\begin{aligned} w(z) &= w(z_1)e^{-T_\zeta a(z)}T_\sigma[be^{T_\zeta a(z)}] + e^{-T_\zeta a(z)}T_\sigma[f(z)e^{T_\zeta a(z)}] = \\ &= w(z_1)B(z) + F(z), \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

где

$$\begin{aligned} B(z) &= e^{-T_\zeta a(z)}T_\sigma[b(z)e^{T_\zeta a(z)}], \\ F(z) &= e^{-T_\zeta a(z)}T_\sigma[f(z)e^{T_\zeta a(z)}], \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

$$T_\sigma \rho(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \rho(t) \frac{\sigma(t-z-a_0)}{\sigma(-a_0)\sigma(t-z)} d_t \Omega.$$

Заменяя z на z_1 в равенство (2.3.12), имеем

$$w(z_1) = w(z_1)B(z_1) + F(z_1).$$

Отсюда получим условие разрешимости

$$B(z_1) \neq 1. \quad (2.3.14)$$

При выполнении условия (2.3.14) находим $w(z_1)$ в виде

$$w(z_1) = \frac{F(z_1)}{1 - B(z_1)}.$$

Подставляя это значение в (2.3.12), получим единственное решение уравнения (2.3.1)

$$w(z) = \frac{F(z_1)}{1 - B(z_1)} B(z) + F(z), \quad (2.3.15)$$

где $B(z), F(z), B(z_1), F(z_1)$ вычислены соотношениями (2.3.13).

Таким образом, имеет место

Теорема 2.3.3. Пусть в уравнении (2.3.1) $a_0 \notin \Gamma$. Тогда для его однозначной разрешимости необходимо и достаточно, чтобы в точке $z = z_1$ выполнялось условие (2.3.14). При этом единственное решение уравнения (2.3.1) из класса C_*^1 представляется в виде (2.3.15), в котором $B(z), F(z)$ соответственно имеют вид (2.3.13).

2.4. Двойкопериодические решения уравнения обобщенных аналитических функций со многими нагруженными членами и с переменными коэффициентами

Исследуем уравнение вида

$$w_{\bar{z}} + a(z)w(z) + \sum_{k=1}^n a_k(z)w(z_k) = f(z), \quad (2.4.1)$$

где $a(z), a_k(z), f(z) \in H_*^\alpha, 0 < \alpha \leq 1$.

Решение будем искать в классе C_*^1 – регулярных двойкопериодических (без полюсов) решений.

Как в случае $n = 1$ разберем случаи

$$a_0 \in \Gamma \text{ или } a_0 \notin \Gamma, \quad a_0 = \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} a(z) d\Omega.$$

Сперва исследуем случай $a_0 \notin \Gamma$.

В этом случае, считая $w(z_k)$ известными, запишем (2.4.1) в виде

$$w_{\bar{z}} + a(z)w(z) = F(z), \quad (2.4.2)$$

где

$$F(z) = - \sum_{k=1}^n a_k(z)w(z_k) + f(z).$$

При $a_0 \notin \Gamma$, решение уравнения (2.4.1) согласно результатам работы [111] представимо в виде

$$w(z) = \frac{e^{-T_\zeta a(z)}}{\pi} T_\sigma [F(z) e^{T_\zeta a(z)}], \quad (2.4.3)$$

где $T_\sigma \rho(z)$ – двойной интеграл с ядром $\sigma(z)$ – сигма – функция Вейерштрасса [31]

$$T_\sigma \rho(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \rho(t) \frac{\sigma(t-z-a_0)}{\sigma(-a_0)\sigma(t-z)} d_t \Omega.$$

Подставляя в (2.4.3) выражение $F(z)$ и вводя обозначения

$$B_j(z) = \frac{e^{-T_\zeta a(z)}}{\pi} \iint_{\Omega} a_j(t) e^{T_\zeta a(z)} \frac{\sigma(t-z-a_0)}{\sigma(-a_0)\sigma(t-z)} d_t \Omega, j = 1, 2, \dots, n,$$

$$F(z) = -\frac{e^{-T_\zeta a(z)}}{\pi} \iint_{\Omega} f(z) e^{T_\zeta a(z)} \frac{\sigma(t-z-a_0)}{\sigma(-a_0)\sigma(t-z)} d_t \Omega,$$

запишем (2.4.3) в виде

$$w(z) = B_1(z)w(z_1) + B_2(z)w(z_2) + \dots + B_n(z)w(z_n) + F(z). \quad (2.4.4)$$

Подставляя поочередно $z = z_1, z_2, \dots, z_n$, относительно $w(z_j)$ получим систему уравнений

$$A\tilde{w} = \tilde{b}, \quad (2.4.5)$$

$$\tilde{w} = (w(z_1), w(z_2), \dots, w(z_n))^T,$$

$$A = E - B,$$

где E – единичная матрица, а матрица B имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} B_1(z_1) & B_2(z_1) & \dots & B_n(z_1) \\ B_1(z_2) & B_2(z_2) & \dots & B_n(z_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_1(z_n) & B_2(z_n) & \dots & B_n(z_n) \end{pmatrix},$$

$\tilde{b}$ – известный вектор:

$$\tilde{b} = (F(z_1), F(z_2), \dots, F(z_n))^T.$$

Справедлива следующая

Теорема 2.4.1. Пусть в уравнении (2.4.1) $a_0 \in \Gamma$. Тогда для его однозначной разрешимости в классе C_*^1 необходимо и достаточно, чтобы число $\lambda = 1$ не являлось собственным значением для матрицы

$$A = \lambda E - B.$$

При этом единственное его решение имеет вид (2.4.4), в котором

$$w(z_j) = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (2.4.6)$$

где $\Delta = \det A$, Δ_j – определитель, полученный из определителя Δ заменой j – го столбца, столбцом «Свободных членов» $(F(z_1), F(z_2), \dots, F(z_n))^T$.

Разберем случай $a_0 \in \Gamma$. Как в предыдущем случае, обозначая через $F(z)$

$$F(z) = - \sum_{k=1}^n a_k(z) w_k(z) + f(z),$$

будем искать решение уравнения при известном $F(z)$ в виде

$$w(z) = \varphi(z) e^{-T_\zeta a(z) - dz}, \quad (2.4.7)$$

где $\varphi(z) \in C_*^1$ – искомая, а $\exp(-T_\zeta a(z) - dz) \in C_*^1$ и число d как в предыдущих параграфах.

При подстановке (2.4.7) в уравнение (2.4.2) получим неоднородное уравнение Коши – Римана

$$\varphi_{\bar{z}} = F(z) e^{-T_\zeta a(z) + dz}. \quad (2.4.8)$$

Условие разрешимости этого уравнения в классе C_*^1 имеет вид [93]

$$\iint_{\Omega} F(z) e^{T_\zeta a(z) + dz} d\Omega = 0. \quad (2.4.9)$$

При выполнении этого условия находим $\varphi(z)$ [105]

$$\varphi(z) = -c + T_\zeta [F(z) e^{T_\zeta a(z) + dz}].$$

Подставляя это значение $\varphi(z)$ в (2.4.7) и введя обозначения

$$b_0(z) = \exp(-T_\zeta a(z) - dz),$$

$$b_j(z) = -\frac{b_0(z)}{\pi} T_\zeta \left[\frac{a_j(z)}{b_0(z)} \right] = b_0(z) f_j(z),$$

$$f_1(z) = b_0(z) T_\zeta \left[\frac{f(z)}{b_0(z)} \right] = b_0(z) f_0,$$

получим представление решения (2.4.1) в виде

$$w(z) = -c b_0(z) + \sum_{j=1}^n b_j(z) w(z_j) + f_1(z). \quad (2.4.10)$$

При этом единственное решение уравнения (2.4.1) представляется в виде (2.4.10), в котором постоянные $c, w(z_1), w(z_2), \dots, w(z_n)$ определяются из системы уравнений (2.4.13), то есть

$$\tilde{w} = A^{-1} \tilde{b},$$

где A^{-1} обратная матрица к матрице A .

2.5. Двойкопериодические решения уравнения обобщенных аналитических функций с неизвестными параметрами в правой части и дополнительными точечными условиями переопределения

Рассмотрим вопрос нахождения вместе с решением класса C_*^1 правой части специального вида в уравнении обобщенных аналитических функций

$$w_{\bar{z}} + aw(z) = f(z) + \sum_{k=1}^n c_k f_k(z), \quad (2.5.1)$$

где a — постоянная, $f(z), f_k(z)$ — заданные функции класса $H_*^\alpha, \alpha \in (0, 1)$. В уравнении (1) искомыми являются решение $w(z)$ и постоянные числа $c_1, c_2, \dots, c_n$.

Это есть обратная задача с неизвестной правой частью. Для определения неизвестных $c_1, c_2, \dots, c_n$ на решение $w(z)$ налагаем условие переопределения

$$w(z_j) = d_j, \quad j = \overline{1, s}, \quad (2.5.2)$$

d_j — некоторые постоянные.

Подобные задачи изучены для уравнений первого порядка с «дифференциальных уравнений первого и второго порядка с интегральными условиями» в работе [49, 50, 51, 52, 89, 93].

При решении такой обратной задачи как выше, используем прямой путь нахождения решения уравнения (2.5.1) из класса C_*^1 и после удовлетворения условия (2.5.2) получим систему алгебраических уравнений относительно $c_1, c_2, \dots, c_n$.

Задача заключается в нахождении единственного решения задачи (1), (2) в классе C_*^1 , то есть надо найти условия однозначной разрешимости и явный вид решения задачи.

Так как $f(z), f_k(z) \in H_*^\alpha$, то при любых постоянных $c_1, c_2, \dots, c_n$

$$\Phi(z) = f(z) + \sum_{k=1}^n c_k f_k(z) \in H_*^\alpha, \quad \alpha \in (0,1).$$

Поэтому к уравнению

$$w_{\bar{z}} + aw = \Phi(z) \quad (2.5.3)$$

можно применить прямой путь нахождения решения $w(z) \in C_*^1$, [95, 96].

Как выше разберем случаи $a \in \Gamma_1$ или $a \notin \Gamma_1$,

$$\llbracket \Gamma_1 = \frac{\pi}{\Omega_0} \{m_1 h_1 + m_2 h_2; m_1, m_2 - \text{целые}\}, \Omega_0 = \text{mes} \Omega = |h_1|^2 \text{Im} \left(\frac{h_2}{h_1} \right) \rrbracket$$

[33].

1. Пусть сперва $a \notin \Gamma_1$. Тогда согласно результатам работы [96] из (2.5.3)

имеем

$$w(z) = e^{-a\bar{z}+dz} T_\sigma[\Phi(z) e^{a\bar{z}-dz}], \quad (2.5.4)$$

где, как раньше, постоянные d и Δ_0 в интеграле

$$T_\sigma \rho(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \rho(t) \frac{\sigma(t-z-\Delta_0)}{\sigma(-\Delta_0)\sigma(t-z)} d_t \Omega, \Delta_0 \notin \Gamma$$

вычислены формулами

$$d = \frac{1}{2\pi i} [\bar{h}_1 \eta_2 - \bar{h}_2 \eta_1], \quad \Delta_0 = \frac{\Omega_0}{\pi} a.$$

Подставляя значение $\Phi(z)$ в (2.5.4), вводя обозначения

$$F(z) = T_\sigma[f(z) e^{a\bar{z}-dz}] e^{-a\bar{z}+dz}, \quad (2.5.5)$$

$$F_j(z) = T_\sigma[f_j(z) e^{a\bar{z}-dz}] e^{-a\bar{z}+dz},$$

формулу запишем в виде

$$w(z) = F(z) + \sum_{k=1}^n c_k F_k(z), \quad (2.5.6)$$

Теперь, подставляя здесь поочередно $z = z_1, z_2, \dots, z_n$ и удовлетворяя условию переопределения (2) для нахождения $c_1, c_2, \dots, c_n$, получим систему алгебраических уравнений вида

$$\sum_{k=1}^n a_{jk} c_k = d_j + b_j, \quad j = \overline{1, s}, \quad (2.5.7)$$

где

$$a_{jk} = F_k(z_j), b_j = -F(z_j), j = \overline{1, s}.$$

Как известно для разрешимости систем уравнений должно быть $s \geq n$.

Справедлива следующая

Теорема 2.5.1. Пусть в уравнении (2.5.1) $a \in \Gamma_1, f(z), f_k(z) \in H_*^\alpha, \alpha \in (0, 1)$. Тогда для его однозначной разрешимости в классе C_*^1 необходимо и достаточно, чтобы $s = n$ и $\text{rang} A = n$, где A матрица коэффициентов $A = (a_{jk})$ в системе уравнений (2.5.7).

При этом единственное решение задачи (2.5.1), (2.5.2) представимо в виде

$$w(z) = F(z) + \sum_{k=1}^n \frac{\Delta_k}{\Delta} F_k(z), \quad (2.5.8)$$

где $\Delta = \det A$, Δ_k — определитель, полученный из определителя Δ заменой k -го столбца столбцом «свободных членов» из (13)

$$\begin{pmatrix} d_1 + b_1 \\ d_2 + b_2 \\ \dots \dots \dots \\ d_n + b_n \end{pmatrix}.$$

- **Замечание.** В случае $s \neq n$ или задача неразрешима или нарушается единственность решения.

2. Находим единственное решение задачи (2.5.1), (2.5.2) в случае, когда $a \in \Gamma_1$. «Отыскивая решение задачи в виде

$$w(z) = \varphi(z) e^{-a\bar{z} + \bar{a}z}, \quad (2.5.9)$$

для нахождения $\varphi(z) \in C_*^1$ получим неоднородное уравнение Коши – Римана» [104]:

$$\varphi_{\bar{z}} = e^{a\bar{z} - \bar{a}z} \Phi(z). \quad (2.5.10)$$

Условие разрешимости уравнения (2.5.10) в классе C_*^1 имеет вид

$$\iint_{\Omega} e^{-a\bar{z}-\bar{a}z} \left[f(z) + \sum_{k=1}^n c_k f_k(z) \right] d\Omega = 0. \quad (2.5.11)$$

Это есть первое уравнение разрешимости относительно неизвестных $c_1, c_2, \dots, c_n$, которое будем записывать в виде

$$c_1 f_1^0 + c_2 f_2^0 + \dots + c_n f_n^0 = f_0, \quad (2.5.12)$$

где

$$f_j^0 = \iint_{\Omega} e^{-a\bar{z}-\bar{a}z} f_j(z) d\Omega, j = 1, 2, \dots, n, \quad f_0 = - \iint_{\Omega} e^{a\bar{z}-\bar{a}z} f(z) d\Omega.$$

Заметим, что уравнение (2.5.12) при условии

$$|f_1^0| + |f_2^0| + \dots + |f_n^0| \neq 0, \quad (2.5.13)$$

всегда допускает решение.

При выполнении условия (2.5.12) общее решение уравнения (2.5.15) из класса C_*^1 представимо в виде

$$\varphi(z) = c + T_{\zeta}[e^{a\bar{z}-\bar{a}z} \Phi(z)], \quad (2.5.14)$$

где c — произвольная постоянная.

Подставляя (2.5.14) в (2.5.10), получим решение уравнения (2.5.1) в виде

$$w(z) = e^{-a\bar{z}+\bar{a}z} \left\{ c + T_{\zeta} \left[e^{a\bar{z}-\bar{a}z} \left(f(z) + \sum_{k=1}^n c_k f_k(z) \right) \right] \right\}. \quad (2.5.15)$$

В этом представлении число неизвестных постоянных равно

$$n + 1: c, c_1, c_2, \dots, c_n.$$

Для их нахождения подставляем (2.5.15) в условие переопределения (2.5.2). Введя соответствующие обозначения

$$\Phi_0(z) = -T_{\zeta}[f(z)e^{a\bar{z}-\bar{a}z}], \quad \Phi_j(z) = T_{\zeta}[f_j(z)e^{a\bar{z}-\bar{a}z}], j = 1, 2, \dots, n,$$

запишем равенство (2.5.15) в удобной форме

$$c + \sum_{j=1}^n c_j \Phi_j(z) = \Phi_0(z) + w(z)e^{a\bar{z}-\bar{a}z}. \quad (2.5.16)$$

Подставляя поочередно $z = z_1, z_2, \dots, z_n$, учитывая условие (2.5.2), получим систему алгебраических уравнений

$$c + \sum_{k=1}^n e_{jk} c_k = b_j + \tilde{d}_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (2.5.17)$$

где

$$e_{jk} = \Phi_k(z_j), \tilde{d}_j = d_j e^{a\bar{z}_j - \bar{a}z_j}, j = \overline{1, s}.$$

Присоединяя к этой системе уравнение (2.5.12), получим систему из $n + 1$ уравнений относительно неизвестного вектора

$$\begin{aligned} \tilde{c} &= (c, c_1, c_2, \dots, c_n), \\ A\tilde{c} &= \tilde{b}, \end{aligned} \quad (2.5.18)$$

где $\tilde{b} = (b_1 + \tilde{d}_1, b_2 + \tilde{d}_2, \dots, b_n + \tilde{d}_n)^T$, матрица A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & f_1^0 & \dots & f_n^0 \\ c & e_{11} & e_{12} & \dots & e_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c & e_{21} & e_{22} & \dots & e_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c & e_{s1} & e_{s2} & \dots & e_{sn} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, справедлива

Теорема 2.5.2. Пусть в уравнении (2.5.1) $a \in \Gamma_1, f(z), f_k(z) \in H_*^\alpha, \alpha \in (0, 1)$. Тогда для однозначной разрешимости задачи (2.5.1), (2.5.2) необходимо и достаточно, чтобы

$$s = n \text{ и } \text{rang} A = n + 1.$$

При этом единственное решение задачи представляется в виде

$$w(z) = e^{-a\bar{z} + \bar{a}z} \left[\frac{\Delta_k}{\Delta} + \sum_{k=1}^n \frac{\Delta_k}{\Delta} \Phi_k(z) + \Phi_0(z) \right],$$

где Δ_j — определитель, полученный из определителя $\Delta = \det A$ заменой j — го столбца столбцом «свободных членов» из системы (2.5.16)

$$\begin{pmatrix} f_0^0 \\ b_1 + \tilde{d}_1 \\ b_2 + \tilde{d}_2 \\ \dots \dots \dots \\ b_n + \tilde{d}_n \end{pmatrix}.$$

Если $s \neq n$, то нарушается единственность решения или задача неразрешима.

2.6. Задача определения неизвестных параметров в квазилинейном уравнении обобщенных аналитических функций в классе двоякопериодических функций

Пусть как выше Ω — основной параллелограмм двоякопериодической группы с основными периодами $h_1, h_2, \operatorname{Im}\left(\frac{h_2}{h_1}\right) > 0$.

Постановка задачи: найти неизвестные постоянные $c_1, c_2, \dots, c_n$ и функцию $w \in C_*^1$, связанные в области Ω уравнением

$$w_{\bar{z}} + aw(z) + \left(b_0(z) + \sum_{k=1}^n c_k b_k(z) \right) w^m(z) = 0, \quad n \geq 2, \quad (2.6.1)$$

где a — постоянная, $b_0(z), b_k(z)$ — заданные функции класса $H_*^\alpha, \alpha \in (0, 1)$.

Дополнительно, функция $w(z)$ должна удовлетворять условию переопределения

$$w(z_j) = d_j, j = \overline{1, s}, \quad (2.6.2)$$

Такая «задача с интегральными условиями для квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка» изучены в работах [4, 5, 49, 50, 51].

При $n = 2$, легко видеть, что если $w(z)$ решение задачи (2.6.1), (2.6.2), то функция

$$\varphi(z) = \frac{1}{w(z)} \quad (2.6.3)$$

и неизвестные постоянные $c_1, c_2, \dots, c_n$ будут в области Ω связаны уравнением

$$\varphi_{\bar{z}} - a\varphi(z) = b_0(z) + \sum_{k=1}^n c_k b_k(z). \quad (2.6.4)$$

Кроме того, функция $\varphi(z)$ должна удовлетворять условию переопределения

$$\varphi(z_j) = \frac{1}{d_j}, d_j \neq 0, j = \overline{1, s}. \quad (2.6.5)$$

Если потребовать, что решение задачи (2.6.1), (2.6.2) вовсе не допускает нули в области Ω , то в задаче (2.6.4), (2.6.5) нужно искать решения класса C_*^1 , то есть без полюсов [88, 102]. Если $N \subset \Omega$ множество нулей задачи (2.6.1), (2.6.2), то $N = \emptyset$.

Так как $b_0(z), b_k(z) \in H_*^\alpha$, то при любых постоянных $c_1, c_2, \dots, c_n$ функция

$$b(z) = b_0(z) + \sum_{k=1}^m c_k b_k(z) \in H_*^\alpha$$

и разрешимость уравнения

$$\varphi_{\bar{z}} - a\varphi(z) = b(z) \quad (2.6.6)$$

в классе C_*^1 зависит от свойства числа a : $a \in \Gamma_1$ или $a \notin \Gamma_1$.

1) При $a \notin \Gamma_1$ уравнение (2.6.6) при любой $b(z) \in H_*^\alpha$ разрешимо и единственное его решение представимо в виде

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= e^{a\bar{z}+dz} T_\sigma(b(z)e^{-a\bar{z}-dz}) = \\ &= -e^{a\bar{z}+dz} \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} b(t) e^{-a\bar{t}-dt} \frac{\sigma(t-z-\Delta_0)}{\sigma(-\Delta_0)\sigma(t-z)} d_t \Omega, \end{aligned} \quad (2.6.7)$$

где постоянные d и $\Delta_0 \in \Gamma$ определены формулами

$$d = \frac{a}{2\pi i} (\bar{h}_1 \eta_2 - \bar{h}_2 \eta_1) (mod \Gamma), \Delta_0 = -\frac{a\Omega_0}{\pi} (mod \Gamma). \quad (2.6.8)$$

Подставляя значение $b(z)$ в интеграл (2.6.7) и вводя новые обозначения, получим

$$\varphi(z) = B_0(z) + \sum_{k=1}^n c_k B_k(z), \quad (2.6.9)$$

$$B_j(z) = -e^{a\bar{z}+dz} T_\sigma[b_j(z)e^{-a\bar{z}-dz}], \quad j = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Требуем, чтобы полученное решение удовлетворяло условию переопределения (2.6.5).

Поочередно в (2.6.9), подставляя $z = z_1, z_2, \dots, z_n$, относительно неизвестных $c_1, c_2, \dots, c_n$ получим систему алгебраических уравнений вида

$$\sum_{k=1}^n c_k b_{jk} = \frac{1}{d_j} - \tilde{b}_j, j = \overline{1, s}, \quad (2.6.10)$$

$$b_{jk} = B_k(z_j), \tilde{b}_j = B_0(z_j), \overline{1, s}.$$

Таким образом, если $N = \emptyset$, то при $m = 2$ справедлива

Теорема 2.6.1. Пусть в уравнении (2.6.1) $a \in \Gamma_1, b_0(z), b_k(z) \in H_*^\alpha, \alpha \in (0,1)$ и в условии (2.6.2) все $d_j \neq 0, j = \overline{1, s}$. Тогда для однозначной разрешимости задачи (1), (2) необходимо и достаточно, чтобы

$$s = n \text{ и } \text{rang} B = n, \text{ где } B = (b_{jk}).$$

При этом единственное его решение имеет вид

$$w(z) = \frac{1}{\varphi(z)},$$

$$\varphi(z) = B_0(z) + \sum_{j=1}^n \frac{\Delta_j}{\Delta} B_k(z),$$

Δ_j — определитель, полученный из определителя $\Delta = \det B$, заменой j — го столбца столбцом «свободных членов»

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{d_1} - b_1 \\ \frac{1}{d_2} - b_2 \\ \dots \dots \dots \\ \frac{1}{d_n} - b_n \end{pmatrix}.$$

Если $s \neq n$ то задача неразрешима или нарушается её единственность решения.

2) Случай $a \in \Gamma_1$. В этом случае, отыскивая решение задачи (4), (5) в виде

$$\varphi(z) = \psi(z) e^{a\bar{z} - \bar{a}z}, \quad (2.6.11)$$

получим, что искомая функция $\psi(z)$ удовлетворяет уравнению

$$\psi_{\bar{z}}(z) = e^{-a\bar{z} + \bar{a}z} b(z), \quad (2.6.12)$$

где

$$b(z) = b_0(z) + \sum_{k=1}^n c_k b_k(z).$$

Условие разрешимости уравнения (2.6.12) в классе C_*^1 является выполнение равенства

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} e^{-a\bar{z}+\bar{a}z} b(z) &= \\ &= \iint_{\Omega} e^{-a\bar{z}+\bar{a}z} b_0(z) d\Omega + \sum_{k=1}^n c_k \iint_{\Omega} e^{-a\bar{z}+\bar{a}z} b_k(z) d\Omega = 0, \quad (2.6.13) \end{aligned}$$

При выполнении этого условия решение уравнения(2.6.12) представимо в виде

$$\psi(z) = N_0(z) + \sum_{k=1}^n c_k N_k(z) + c, \quad (2.6.14)$$

где c – произвольная постоянная, а через « $N_k(z)$ » обозначена интегральный оператор с ядром дзета – функции Вейерштрасса» [120] вида

$$N_k(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} e^{-a\bar{t} + \bar{a}t} b_k(t) \zeta(t-z) d_t \Omega, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Подставляя (2.6.14) в (2.6.11), получим представление решения (2.6.6) в виде

$$\varphi(z) = e^{a\bar{z} - \bar{a}z} \left(c + N_0(z) + \sum_{k=1}^n c_k N_k(z) \right). \quad (2.6.15)$$

Подставляя в $\varphi(z)$ поочередно $z = z_1, z_2, \dots, z_n$, для нахождения неизвестных постоянных $c, c_1, c_2, \dots, c_n$ получим систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} c + N_0(z_1) + \sum_{k=1}^n c_k N_k(z_1) = e^{-a\bar{z}_1 + \bar{a}z_1} \frac{1}{d_1} = \tilde{d}_1, \\ c + N_0(z_2) + \sum_{k=1}^n c_k N_k(z_2) = e^{-a\bar{z}_2 + \bar{a}z_2} \frac{1}{d_2} = \tilde{d}_2, \\ \dots\dots\dots \\ c + N_0(z_s) + \sum_{k=1}^n c_k N_k(z_s) = e^{-a\bar{z}_s + \bar{a}z_s} \frac{1}{d_s} = \tilde{d}_s. \end{array} \right. \quad (2.6.16)$$

Теперь принимая новые обозначения и объединяя уравнение (2.6.13) с системой уравнений (2.6.13), относительно неизвестных $c, c_1, c_2, \dots, c_n$ получим систему уравнений вида

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n c_k b_{0k} &= -b_{00}, \\ c + \sum_{k=1}^n c_k b_{jk} &= -b_{j0} + \tilde{d}_j, j = \overline{1, s}, \end{aligned} \right\} \quad (2.6.17)$$

$$\sum_{k=1}^n c_k b_{0k} = -b_{00}, \quad (2.6.17)$$

$$c + \sum_{k=1}^n c_k b_{jk} = -b_{j0} + \tilde{d}_j, j = \overline{1, s},$$

где

$$b_{0k} = \iint_{\Omega} e^{-a\bar{z} + \bar{a}z} b_k(z) d\Omega, \quad k = \overline{0, n},$$

$$b_{jk} = \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} e^{-a\bar{z} + \bar{a}z} b_k(t) \zeta(t - z_j) d\Omega,$$

здесь $j = \overline{1, s}, k = \overline{0, n}, \tilde{d}_j = e^{-a\bar{z}_j + \bar{a}z_j} \frac{1}{d_j}, j = \overline{1, s}.$

Систему уравнений (2.6.17) записываем в матричном виде относительно неизвестного вектора

$$\tilde{c} = (c, c_1, c_2, \dots, c_n)^T, \quad (2.6.18)$$

$$D\tilde{c} = \tilde{b},$$

где D — матрица вида

$$D = \begin{pmatrix} 0 & b_{01} & b_{02} & \dots & b_{0n} \\ 1 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 1 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & b_{s1} & b_{s2} & \dots & b_{sn} \end{pmatrix},$$

а $\tilde{b}$ — вектор свободных членов

$$\tilde{b} = (-b_{00}, b_{10} + \tilde{d}_1, \dots, b_{s0} + \tilde{d}_s)^T.$$

Таким образом, относительно разрешимости задачи (2.6.1), (2.6.2), когда $N = \emptyset$ и $m = 2$ справедлива

Теорема 2.6.2. Пусть выполнены условия теоремы 2.6.1 и $a \in \Gamma_1$. Тогда для однозначной разрешимости задачи (2.6.1), (2.6.2) при $d_j \neq 0$ и $n = 2$ необходимо и достаточно, чтобы

$$s = n \text{ и } \text{rang} D = n + 1.$$

При этом единственное решение задачи представимо в виде

$$w(z) = \frac{1}{\varphi(z)},$$

$$\varphi(z) = e^{-a\bar{z} + \bar{a}z} \left[\frac{\Delta_0}{\Delta} + \sum_{k=1}^n \frac{\Delta_k}{\Delta} N_k(z) + N_0(z) \right],$$

где Δ_j – определитель, полученный из определителя $\Delta = \det D$, заменой j -го столбца столбцом «свободных членов»

$$\begin{pmatrix} -b_{00} \\ -b_{10} + \tilde{d}_1 \\ -b_{20} + \tilde{d}_2 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ b_{n0} + \tilde{d}_n \end{pmatrix}.$$

Если же $s \neq n$, то задача либо неразрешима либо не имеет единственного решения.

В этом параграфе мы нашли решение задачи (2.6.1), (2.6.2) в классе регулярных двоякопериодических функций C_*^1 в случае, когда множество нулей уравнения $M = \emptyset$ – пустое множество. Однако решение задачи может допускать нули. Тогда нулям решения задачи (2.6.1), (2.6.2) будут отвечать полюсы решения задачи (2.6.4), (2.6.5). Нахождение таких решений требует применения «теории эллиптических функций», разработанной в работах [90, 97].

2.7. Задача нахождения двоякопериодических решений для уравнения обобщенных аналитических функций с нагруженными членами и

неизвестными параметрами в правой части и дополнительными условиями

Теперь находим решение уравнения вида

$$w_{\bar{z}} + a(z)w(z) + \sum_{k=1}^m a_k(z)w(z_k) = \sum_{j=1}^n c_j f_j(z), \quad (2.7.1)$$

удовлетворяющее условиям

$$w(t_j) = e_j, j = \overline{1, s}, t_j \in \Omega, z_n \in \Omega. \quad (2.7.2)$$

Здесь e_j – известные постоянные, а постоянные c_j в правой части неизвестные. Задача (1), (2) – обратная коэффициентная задача и задача с неизвестной правой частью.

1. Сперва исследуем случай $m = 1, n = 1$.

Такие задачи для «дифференциального уравнения первого и второго порядка» [49, 50, 51, 52] изучены, когда все $a_k(z) = 0, k = \overline{1, m}$.

Обратная задача. Найти функцию $w(z) \in C_*^1$ и постоянную e , связанные в области $\Omega \in \mathbb{C}$ уравнением

$$w_{\bar{z}} + a(z)w(z) + b(z)w(z_0) = f(z)e,$$

где $a(z), b(z), f(z)$ известные функции класса $H_*^\alpha, \alpha \in (0, 1), \Omega$ – основной параллелограмм периодов с вершинами

$$t_0, t_0 + h_1, t_0 + h_1 + h_2, t_0 + h_2, t_0 \in \mathbb{C}, \quad \text{Im} \left(\frac{h_2}{h_1} \right) > 0.$$

Неизвестными являются $w(z), w(z_0)$ и постоянная e .

Условия переопределения записываются в виде

$$w(z_1) = e_1, w(z_2) = e_2, \quad (2.7.3)$$

где e_1, e_2 – некоторые числа, $z_1, z_2 \in \Omega$.

Будем находить условие однозначной разрешимости задачи (2.7.1), (2.7.2) и явный вид решения.

Как в предыдущих параграфах воспользуемся представлением решения уравнения, считая временно, что $w(z_1)$ и e известные.

Затем их точные значения находим из условия переопределения (2.7.3).

Как раньше, разберем два случая: $a_0 \in \Gamma$ или $a_0 \notin \Gamma$, Γ – решетка периодов

$$\Gamma = \{m_1 h_1 + m_2 h_2; m_1, m_2 - \text{целые}\}, a_0 = \iint_{\Omega} a(z) d\Omega.$$

1). Случай $a_0 \notin \Gamma$. В этом случае решение уравнения (2.7.1) при любой правой части « $f_1(z) = f(z)e - b(z)w(z_1)$ »[97] представимо в виде

$$w(z) = F_1(z)w(z_0) + F_2(z)e, \quad (2.7.4)$$

где

$$F_1(z) = -e^{-T_\zeta a(z)} T_\sigma [b(z)e^{T_\zeta a(z)}], \quad F_2(z) = e^{-T_\zeta a(z)} T_\sigma [f(z)e^{T_\zeta a(z)}], \quad (2.7.5)$$

$$T_\sigma \rho(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \rho(t) \frac{\sigma(t-z-a_0)}{\sigma(-a_0)\sigma(t-z)} d_t \Omega, \quad a_0 \notin \Gamma.$$

Подставляя полученное решение в условие переопределения (2.7.3), имеем систему уравнений вида

$$\left. \begin{aligned} F_1(z_1)w(z_0) + F_2(z_1)e &= e_1, \\ F_1(z_2)w(z_0) + F_2(z_2)e &= e_2. \end{aligned} \right\}$$

Условие разрешимости этой системы является

$$\Delta = F_1(z_1)F_2(z_2) - F_2(z_1)F_1(z_2) \neq 0.$$

При этом

$$w(z_0) = \frac{1}{\Delta} [e_1 F_2(z_2) - e_2 F_2(z_1)], \quad e = \frac{1}{\Delta} (F_1(z_1)e_2 - F_1(z_2)e_1). \quad (2.7.6)$$

Справедлива следующая

Теорема 2.7.1. Пусть в уравнении (2.7.1)

$$a(z), b(z), f(z) \in H_*^\alpha, \alpha \in (0,1) \text{ и } a_0 \notin \Gamma.$$

Тогда для однозначной разрешимости задачи (2.7.1), (2.7.2) необходимо и достаточно, чтобы

$$\Delta = F_1(z_1)F_2(z_2) - F_2(z_1)F_1(z_2) \neq 0,$$

где $F_i(z_k)$ вычислены формулами (2.7.5). При этом единственное решение задачи (2.7.1), (2.7.2) представимо в виде (2.7.3), в котором $w(z_0)$ и e вычислены формулами (2.7.6).

1. Случай $a_0 \in \Gamma$. Исследование можно провести для случая $a_0 = 0$, так как при $a_0 \equiv 0(mod \Gamma)$, решение однородного уравнения

$$w_{\bar{z}} + a(z)w(z) = 0$$

в классе C_*^1 имеет вид

$$w(z) = c \exp(T_{\zeta} a(z) + dz)$$

и постоянные a_0 и d должны обеспечивать выполнение условия периодичности

$$w(z + h_j) = w(z), j = 1, 2,$$

то есть

$$\exp(a_0 \eta_j + d h_j) = 1, j = 1, 2.$$

Поэтому для краткости вычисления можно брать условие $a_0 = 0$, результаты вычисления и утверждений идентичны со случаем $a_0 \in \Gamma$. С учетом этого решение задачи (2.7.1), (2.7.2) будем искать в виде

$$w(z) = \varphi(z) e^{-T_{\zeta} a(z)}. \quad (2.7.7)$$

Тогда двоякопериодическая функция $\varphi(z) \in C_*^1$ должна удовлетворять уравнению

$$\varphi_{\bar{z}} + \tilde{b}(z)w(z_0) = \tilde{f}(z)e, \quad (2.7.8)$$

где $\tilde{b}(z)$ и $\tilde{f}(z)$ «имеют вид

$$\tilde{b}(z) = b(z) e^{T_{\zeta} a(z)}, \quad \tilde{f}(z) = f(z) e^{T_{\zeta} a(z)}.$$

Как известно» [104], «для разрешимости уравнения (2.7.8) в классе C_*^1 необходимо и достаточно, чтобы

$$-b_0 w(z_0) + f_0 e = 0, \quad (2.7.9)$$

где

$$b_0 = \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \tilde{b}(z) d\Omega, \quad f_0 = \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \tilde{f}(z) d\Omega.$$

» [93].

Это условие разрешимости выполняется одновременно для

$$b_0 = 0, f_0 = 0 \text{ или } b_0 \neq 0, \quad f_0 \neq 0.$$

При выполнении условия (2.7.9) решение уравнения (2.7.8) представимо в виде

$$\varphi = c - w(z_0)T_\zeta[\tilde{b}(z)] + T_\zeta[f(z)]e, \quad (2.7.10)$$

где c — произвольная постоянная, а $T_\zeta\rho(z)$ имеет вид

$$T_\zeta\rho(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \rho(t)\zeta(t-z)d_t\Omega.$$

Подставляя (2.7.9) в (2.7.6) и удовлетворяя условию переопределения (2.7.2), для нахождения $c, w(z_0)$ и e получим систему уравнений

$$\begin{cases} c + B(z_1)w(z_0) + F(z_1)e = \tilde{e}_1, \\ c + B(z_2)w(z_0) + F(z_2)e = \tilde{e}_2, \end{cases} \quad (2.7.11)$$

где $B(z_j), F(z_j)$ — постоянные, вычисленные формулами

$$B(z_j) = -T_\zeta[\tilde{b}(z_j)], F(z_j) = T_\zeta[\tilde{f}(z_j)], j = 1, 2,$$

$$\tilde{e}_1 = e_1 \exp T_\zeta a(z_1), e_2 = \exp T_\zeta a(z_2).$$

Если в условии (2.7.9) $b_0 \neq 0, f_0 \neq 0$, то присоединяя уравнение (2.7.9) к системе (2.7.11), относительно неизвестного вектора $\tilde{c}$

$$\tilde{c} = (c, w(z_0), e)^T$$

получим систему уравнений из трех уравнений в матричной форме

$$A\tilde{c} = d, \quad (2.7.12)$$

где A — матрица вида

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -b_0 & f_0 \\ 1 & B(z_1) & F(z_1) \\ 1 & B(z_2) & F(z_2) \end{pmatrix},$$

d — известный вектор — столбец - $d = (0, \tilde{e}_1, \tilde{e}_2)^T$.

Справедлива

Теорема 2.7.2. Пусть выполнены условия теоремы 2.7.1 и

$$a_0 = 0, b_0 \neq 0, f_0 \neq 0.$$

Тогда для однозначной разрешимости задачи (2.7.1), (2.7.2) необходимо и достаточно, чтобы

$$\text{rang} A = 3.$$

При этом единственное решение задачи (2.7.1), (2.7.2) представляется формулой

$$w(z) = e^{-T\zeta a(z)} [B(z)w(z_0) + F(z)e + c],$$

где постоянные $c, w(z_0), e$ вычислены формулами

$$c = \frac{\Delta_1}{\Delta}, w(z_0) = \frac{\Delta_2}{\Delta}, e = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \Delta = \det A,$$

Δ_j — определитель, полученный из определителя Δ заменой j -го столбца столбцом «свободных членов»

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{e}_1 \\ \tilde{e}_2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, однозначная разрешимость задачи (2.7.1), (2.7.2) обеспечивается при условии $b_0 \neq 0$ и $f_0 \neq 0$. Если $b_0 = f_0 = 0$, то для разрешимости задачи имеем систему из двух уравнений с тремя неизвестными и $\text{rang} B < 3$. В этом случае задача (2.7.1), (2.7.2) может не иметь единственного решения.

Для этого случая, к условию (2.7.2) надо добавить ещё одно условие $w(z_3) = e_3$.

Тогда можно обеспечить условие однозначной разрешимости задачи при $b_0 = f_0 = 0$ и когда $a_0 \notin \Gamma_1$.

II. Случай $m \geq 1, n > 1$.

Теперь рассмотрим уравнение со многими нагруженными членами и неизвестными параметрами в правой части

$$w_{\bar{z}} + a(z)w(z) + \sum_{k=1}^m a_k(z)w(z_k) = \sum_{j=1}^n f_j(z)c_j, \quad (2.7.13)$$

где $a_k(z), f_j(z) \in C_*^\alpha$, неизвестными являются решение $w(z), w(z_k)$ и постоянные c_k . Здесь требуется, чтобы решение удовлетворяло условию переопределения, необходимое для нахождения неизвестных параметров $c_1, c_2, \dots, c_n$

$$w(t_j) = e_j, j = 1, 2, \dots, s, \quad (2.7.14)$$

где $t_j \in \Omega$, а e_j — некоторые числа.

Как раньше, в случае $a_0 \in \Gamma$ или $a_0 \bar{\in} \Gamma$ находим условие однозначной разрешимости задачи (2.7.12), (2.7.13) и явный вид решения. При этом требуем, чтобы $a_k(z) \in H_*^\alpha, k = 1, 2, \dots, m; f_j \in H_*^\alpha, j = 1, 2, \dots, n, \alpha \in (0, 1)$

1) Случай $a_0 \bar{\in} \Gamma$. При выполнении этого условия уравнение

$$w_{\bar{z}} + a(z)w(z) = \Phi(z),$$

где

$$\Phi(z) = - \sum_{k=1}^m a_k(z)w(z_k) + \sum_{j=1}^n f_j(z)c_j,$$

при любой $\Phi(z) \in H_*^\alpha, \alpha \in (0, 1)$ имеет единственное решение вида

$$w(z) = e^{-T_\zeta a(z)} T_\sigma [\Phi(z) e^{T_\zeta a(z)}], \quad (2.7.15)$$

где

$$T_\zeta a(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} a(t) \zeta(t-z) d_t \Omega, \quad T_\sigma \rho(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \rho(t) \frac{\sigma(t-z-a_0)}{\sigma(-a_0)\sigma(t-z)} d_t \Omega.$$

Подставляя выражение для $\Phi(z)$ в правую часть (2.7.15) и введя обозначение

$$A_k(z) = T_\sigma [\tilde{a}_k(z)], \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad (2.7.16)$$

где $F_j = T_\sigma [\tilde{f}_j(z)], j = 1, 2, \dots, n$

$$\tilde{a}_k(z) = a_k(z) e^{T_\zeta a(z)}, \quad \tilde{f}_j(z) = f_j(z) e^{T_\zeta a(z)}, j = \overline{1, n}, k = \overline{1, m},$$

запишем решение (2.7.15) в развернутом виде

$$w(z) = e^{-T_\zeta a(z)} \left[\sum_{k=1}^m A_k(z) w(z_k) + \sum_{j=1}^n F_j(z) c_j \right]. \quad (2.7.17)$$

Теперь для нахождения неизвестных $w(z_k), c_j$ подставляем (2.7.17) в условие переопределения (2.7.14).

Тогда относительно неизвестного вектора

$$\tilde{c} = (w(z_1), w(z_2), \dots, w(z_m); c_1, c_2, \dots, c_n)^T$$

получим систему алгебраических уравнений

$$B\tilde{c} = d, \quad (2.7.18)$$

где матрица B имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} A_1(t_1) & A_2(t_1) & \dots & A_m(t_1) & F_1(t_1) & \dots & F_n(t_1) \\ A_1(t_2) & A_2(t_2) & \dots & A_m(t_2) & F_1(t_2) & \dots & F_n(t_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_1(t_s) & A_2(t_s) & \dots & A_m(t_s) & F_1(t_s) & \dots & F_n(t_s) \end{pmatrix},$$

а d — известный вектор: $d = (\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \dots, \tilde{e}_s)$, здесь $\tilde{e}_j = e_j e^{T\zeta a(t_j)}$, $j = \overline{1, s}$.

Таким образом, справедлива

Теорема 2.6.3. Пусть в уравнении (2.7.13) $a_k(z), f_j(z) \in H_*^\alpha$, $\alpha \in (0, 1)$ и $a_0 \in \Gamma$. Тогда для однозначной разрешимости задачи (2.7.13), (2.7.14) необходимо и достаточно, чтобы

$$s = m + n \text{ и } \text{rang} B = m + n.$$

При этом единственное решение задачи (2.7.13), (2.7.14) представляется формулой

$$w(z) = - \sum_{k=1}^m a_k(z) \frac{\Delta_j}{\Delta} + \sum_{j=1}^n f_j(z) \frac{\Delta_j}{\Delta},$$

где Δ_j — определитель, полученный из определителя $\Delta = \det B$ заменой k — го столбца и j — го столбца соответственно столбцами «свободных членов»

$$\begin{pmatrix} \tilde{e}_1 \\ \tilde{e}_2 \\ \dots \\ \tilde{e}_{m+n} \end{pmatrix}.$$

Если $s \neq m + n$, то задача (2.6.13) и (2.6.14) либо вообще неразрешима либо не имеет единственного решения.

Аналогичным образом исследуется случай $a_0 \in \bar{\Gamma}$.

2.8. Двойкопериодические решения уравнения обобщенных аналитических функций с нагруженными членами, содержащими комплексно - сопряженное искомое решение

1. Случай постоянных коэффициентов.

Рассмотрим уравнение вида

$$w_{\bar{z}} + aw(z) + bw(z_0) + d\overline{w(z_0)} = f(z), \quad (2.8.1)$$

где a, b, d – постоянные, « $f(z)$ – двоякопериодическая функция с основными периодами $h_1, h_2, \operatorname{Im} \left(\frac{h_2}{h_1} \right) > 0, z_0 \in \Omega, \Omega$ – основной параллелограмм периодов с вершинами $t_0, t_0 + h_1, t_0 + h_1 + h_2, t_0 + h_2$, содержащий начало координат» [33]. «Решение уравнения с заданными полюсами, a, b в классе C_*^1 найдено» в [95, 96].

Решение уравнения (1) будем искать в классе C_*^1 и как выше (§ 2.1.1) разберем случаи: $a = 0$ и $a \in \Gamma_1$ или $a \notin \Gamma_1, \Gamma_1$ – решетка периодов как в предыдущих параграфах.

Зададим условие переопределения в одной точке

$$w(z_1) = e, \quad z_1 \neq z_0, \quad (2.8.2)$$

e – некоторое число, в случае $a \in \Gamma_1$.

Разберем два случая: $a = 0$ и $a \neq 0$.

1. Пусть в уравнении (2.8.1) $a = 0$ и $w(z) \in C_*^1$ – решение задачи (2.8.1), (2.8.2).

Считая, что $w(z_0), \overline{w(z_0)}$ известны как постоянные, интегрируя обе части (2.8.1) по области Ω , в силу формулы Грина имеем

$$0 = \iint_{\Omega} w_{\bar{z}} d\Omega = - \iint_{\Omega} [(bw(z_0) + d\overline{w(z_0)}) - f(z)] d\Omega.$$

Из этого равенства имеем

$$b\Omega_0 w(z_0) + d\Omega_0 \overline{w(z_0)} = f_0, \quad (2.8.3)$$

где f_0 – значение интеграла, $\Omega_0 = \operatorname{mes} \Omega = |h_1|^2 \operatorname{Im} \left(\frac{h_2}{h_1} \right)$,

$$f_0 = \iint_{\Omega} f(z) d\Omega.$$

Равенство (3) является необходимым условием разрешимости уравнения в классе C_*^1 .

Взяв комплексно сопряженное в (2.8.3), для нахождения $w(z_0), \overline{w(z_0)}$ получим систему уравнений

$$\begin{cases} bw(z_0) + d\overline{w(z_0)} = \frac{1}{\Omega_0} f_0 = f_1, \\ \bar{d}w(z_0) + \bar{b}\overline{w(z_0)} = \frac{1}{\Omega_0} \bar{f}_0 = \bar{f}_1. \end{cases} \quad (2.8.4)$$

Для однозначной разрешимости этой системы необходимо и достаточно, чтобы

$$\Delta = |b|^2 - |d|^2 \neq 0. \quad (2.8.4')$$

Из (2.8.4) находим $w(z_0), \overline{w(z_0)}$ и подставляем в (2.6.1):

$$w(z_0) = \frac{1}{\Delta} [f_1 \bar{b} - \bar{f}_1 d], \quad \overline{w(z_0)} = \frac{1}{\Delta} [\bar{f}_1 b - f_1 \bar{d}], \quad (2.8.5)$$

$$w_z = \frac{b}{\Delta} [\bar{f}_1 d - f_1 \bar{b}] + \frac{d}{\Delta} [f_1 \bar{d} - \bar{f}_1 b] + f(z). \quad (2.8.6)$$

Таким образом, при $\Delta \neq 0$ для нахождения решения задачи (2.8.1), (2.8.2) мы получили задачу Коши для неоднородного уравнения Коши-Римана (2.8.6) с условием (2.8.5). Так как, условие (2.8.3) есть необходимое и достаточное условие разрешимости уравнения (2.8.1) при $d = 0$, то согласно результатам работы [97] и доказательству теоремы 2.1.1 «решение уравнения из класса C_*^1 представимо в виде

$$w(z) = c + A\bar{z} + Bz + T_\zeta f(z), \quad (2.8.7)$$

где c — произвольная постоянная, а постоянные A и B имеют вид»[25]

$$A = \frac{1}{\Delta\Omega_0} [b(\bar{f}_0 d - f_0 \bar{b}) + d(f_0 \bar{d} - \bar{f}_0 b)], \quad (2.8.8)$$

$$B = -\frac{f_0}{\Omega_0} (\eta_1 \bar{h}_2 - \eta_2 \bar{h}_1). \quad (2.8.8')$$

Теперь постоянную c находим из условия (2.8.5). Подставляя в формулу решения уравнения (2.8.7) $z = z_0$, имеем

$$E = A\bar{z}_0 + Bz_0 + T_\zeta f(z_0) + c.$$

$$\text{Отсюда находим } c: c = E - A\bar{z}_0 - Bz_0 - T_\zeta f(z_0), E = \frac{1}{\Delta} [f_1 \bar{b} - \bar{f}_1 d]$$

Подставляя значение c в (2.8.5), окончательно получим решение задачи (2.8.1), (2.8.2) в виде

$$w(z) = E + A(\bar{z} - \bar{z}_0) + B(z - z_0) -$$

$$-\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} f(t)[\zeta(t-z) - \zeta(t-z_0)]d\Omega. \quad (2.8.9)$$

Таким образом, справедлива

Теорема 2.8.1. Пусть в уравнении (2.8.1) $a = 0$.

Тогда для разрешимости задачи (2.8.1) в классе C_*^1 , необходимо и достаточно, чтобы $\Delta = |b|^2 - |d|^2 \neq 0$ и решение в точке z_0 принимало значение

$$w(z_0) = \frac{1}{\Delta \Omega_0} [f_0 \bar{b} - \bar{f}_0 d] = E, \quad \Omega_0 = \text{mes} \Omega.$$

При этом единственное решение задачи из класса C_*^1 представляется в виде

$$w(z) = E + A(\bar{z} - \bar{z}_0) + B(z - z_0) - \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} f(z)[\zeta(t-z) - \zeta(t-z_0)]d\Omega,$$

где постоянные A, B вычислены формулами (2.8.8), (2.8.8').

Из этой формулы получим, что если $f(z) \equiv 0$, то есть $f_0 = 0$, $E = 0$, тогда уравнение (2.8.1) имеет только нулевое решение $w(z) \equiv 0$.

2. Пусть $a \neq 0$ и $a \in \Gamma_1$, а уравнение (2.8.1) имеет решение класса C_*^1 .

Умножая обе части равенства (1) на периодическую функцию

$$\exp(a\bar{z} - \bar{a}z),$$

получим

$$\begin{aligned} w_{\bar{z}} e^{a\bar{z} - \bar{a}z} + aw(z) e^{a\bar{z} - \bar{a}z} + bw(z_0) e^{a\bar{z} - \bar{a}z} + d\overline{w(z_0)} e^{-a\bar{z} - \bar{a}z} = \\ = f(z) e^{a\bar{z} - \bar{a}z}. \end{aligned} \quad (2.8.1')$$

Так как

$$w_{\bar{z}} e^{a\bar{z} - \bar{a}z} + aw(z) e^{a\bar{z} - \bar{a}z} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (w(z) e^{a\bar{z} - \bar{a}z})$$

то последнюю уравнение можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} (w(z) e^{a\bar{z} - \bar{a}z}) = (f(z) - bw(z_0) - d\overline{w(z_0)}) e^{a\bar{z} - \bar{a}z}. \quad (2.8.12)$$

Так как для функции $\varphi(z) \in C_*^1$

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} d\Omega = 0,$$

то интегрируя обе части равенства (2.8.12), будем иметь

$$\iint_{\Omega} [f(z) - bw(z_0) - d\overline{w(z_0)}] e^{a\bar{z} - \bar{a}z} d\Omega = 0. \quad (2.8.13)$$

При постоянных a, b, d согласно формуле Грина, при $a \in \Gamma$

$$\iint_{\Omega} b e^{a\bar{z} - \bar{a}z} d\Omega = \iint_{\Omega} d e^{a\bar{z} - \bar{a}z} d\Omega = 0.$$

Поэтому, равенство (2.8.13) как необходимое условие разрешимости уравнения (2.8.1) возможно, если

$$\iint_{\Omega} f(z) e^{a\bar{z} - \bar{a}z} d\Omega = 0. \quad (2.8.14)$$

Это условие есть необходимое условия разрешимости уравнения (2.8.1) в классе C_*^1 .

При выполнении условия (2.8.14), интегрируя уравнение (2.8.12), получим

$$w(z) e^{a\bar{z} - \bar{a}z} = - \left(\frac{b}{a} w(z_0) + \frac{d}{a} \overline{w(z_0)} \right) e^{a\bar{z} - \bar{a}z} + T_{\zeta} [f(z) e^{a\bar{z} - \bar{a}z}] + c, \quad (2.8.15)$$

где $T_{\zeta} \rho(z)$ — как в предыдущих задачах т.е.

$$T_{\zeta} \rho(z) = - \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \rho(t) e^{a\bar{t} - \bar{a}t} \zeta(t - z) d_t \Omega,$$

c — произвольная постоянная. Из последнего уравнения (2.8.15) находим

$$w(z) = - \frac{b}{a} w(z_0) - \frac{d}{a} \overline{w(z_0)} + E(z) - c e^{\theta(z)}, \quad (2.8.16)$$

где $\theta(z) = \bar{a}z - a\bar{z}, \overline{\theta(z)} = -\theta(z)$,

$$E(z) = -e^{\theta(z)} \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} f(t) e^{-\theta(t)} \zeta(t - z) d_t \Omega.$$

Подставляя в (2.8.16) поочередно $z = z_0$ и $z = z_1$, будем иметь

$$\left(1 + \frac{b}{a}\right)w(z_0) + \frac{d}{a}\overline{w(z_0)} = E(z_0) - ce^{\theta(z_0)}, \quad (2.8.17)$$

$$\frac{b}{a}w(z_0) + \frac{d}{a}\overline{w(z_0)} = e + E(z_1) - ce^{\theta(z_1)}. \quad (2.8.18)$$

Получили два уравнения с тремя неизвестными $w(z_0), \overline{w(z_0)}, c$. Для нахождения этих постоянных в уравнениях (2.8.17), (2.8.18) берем комплексно сопряженное и присоединяя к (2.8.17), (2.8.18), получим систему уравнений с четырьмя неизвестными $w(z_0), \overline{w(z_0)}, c, \bar{c}$ и четырьмя уравнениями

$$\begin{cases} \left(1 + \frac{b}{a}\right)w(z_0) + \frac{d}{a}\overline{w(z_0)} + ce^{\theta(z_0)} = E(z_0), \\ \frac{b}{a}w(z_0) + \frac{d}{a}\overline{w(z_0)} + ce^{\theta(z_0)} = e + E(z_1), \\ \left(1 + \frac{\bar{b}}{a}\right)\overline{w(z_0)} + \frac{\bar{d}}{a}w(z_0) + \bar{c}e^{-\theta(z_0)} = \overline{E(z_0)}, \\ \frac{\bar{d}}{a}w(z_0) + \frac{\bar{b}}{a}\overline{w(z_0)} + \bar{c}e^{-\theta(z_1)} = \overline{E(z_1)} + \bar{e}. \end{cases}$$

Если вести обозначения $w^T = (w(z_0), \overline{w(z_0)}, c, \bar{c})^T$ и

$$D = \begin{pmatrix} \left(1 + \frac{b}{a}\right) & \frac{d}{a} + e^{\theta(z_0)} & 0 \\ \frac{b}{a} & \frac{d}{a} + e^{\theta(z_1)} & 0 \\ \frac{\bar{d}}{a} & \left(1 + \frac{\bar{b}}{a}\right) & 0 + e^{-\theta(z_0)} \\ \frac{\bar{d}}{a} & \frac{\bar{b}}{a} & 0 + e^{-\theta(z_1)} \end{pmatrix},$$

то полученную систему можно записать в матричной форме

$$Dw = F, \quad (2.8.19)$$

$$F = (E(z_0), e + E(z_1), \overline{E(z_0)}, \bar{e} + \overline{E(z_1)})^T$$

Таким образом, справедлива

Теорема 2.8.2. Пусть в уравнении (2.8.1) $a \neq 0$ и $a \in \Gamma_1$ и выполнено условие (2.8.14). Тогда для однозначной разрешимости задачи (2.8.1), (2.8.2) необходимо и достаточно, чтобы

$$\text{rang} D = 4.$$

При этом задача (2.8.1), (2.8.2) имеет единственное решение вида (2.8.16), в котором значения $w(z_0), \overline{w(z_0)}, c, \bar{c}$ находятся из системы уравнений (2.8.19).

3. Пусть теперь $a \in \Gamma_1$. Как в §§2.1- 2.2, интегрируя уравнение

$$w_{\bar{z}} + aw(z) = -bw_0 - d\overline{w(z_0)} + f(z), \quad (2.8.20)$$

получим

$$w(z) = -\frac{1}{a} (bw(z_0) + d\overline{w(z_0)}) + e^{-a\bar{z}-cz} T_{\sigma}[f_1(z)], \quad (2.8.21)$$

где

$$T_{\sigma}[f_1(z)] = -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} f(t) e^{a\bar{t}+ct} \frac{\sigma(t-z-\Delta_0)}{\sigma(-\Delta_0)\sigma(t-z)} d_t \Omega,$$

постоянные c и Δ_0 , $\Delta_0 \in \Gamma$ имеют вид

$$c = \frac{a}{2\pi i} (\bar{h}_1 \eta_2 - \bar{h}_2 \eta_1) (mod \Gamma), \Delta_0 = -\frac{a\Omega_0}{\pi} (mod \Gamma). \quad (2.8.22)$$

Подставляя в (2.8.21) $z = z_1$, получим алгебраическое уравнение вида

$$(a+b)w(z_0) + d\overline{w(z_0)} = aM(z), \quad (2.8.23)$$

где

$$M(z) = -e^{-a\bar{z}_0-cz_0} \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} f(t) e^{a\bar{t}+ct} \frac{\sigma(t-z-\Delta_0)}{\sigma(-\Delta_0)\sigma(t-z)} d_t \Omega.$$

Взяв комплексно-сопряженное в (2.8.23) и решая его вместе с уравнением

$$\bar{d}w(z_0) + (\overline{a+b})\overline{w(z_0)} = aM(z_0)$$

при $\Delta = (|a+b|^2 - |d|^2)w(z_0) = adM(z_0)(\overline{a+b}) - \bar{a}\overline{M(z)}(a+b)$, получим

$$w(z_0) = \frac{1}{\Delta} [aM(z_0)(a+b) - \bar{a}\overline{M(z_0)}(a+b)], \quad (2.8.24)$$

$$\overline{w(z_0)} = \frac{1}{\Delta} [\bar{a}\overline{M(z_0)}(\overline{a+b}) - aM(z_0)\overline{(a+b)}].$$

Подставляя эти значения $w(z_0)$ и $\overline{w(z_0)}$ в формулу (2.8.21), получим единственное решение уравнения (2.8.1) в классе C_*^1 при выполнении условия

$$\Delta = |a+b|^2 - |d|^2 \neq 0 \quad (2.8.25)$$

в виде (2.8.21).

Здесь постоянные c и Δ_0 заменены их значениями из (2.8.22).

Справедлива следующая

Теорема 2.8.3. Пусть в уравнении (2.8.1) $a \in \Gamma_1$ и $\Delta = |a + b|^2 - |d|^2 \neq 0$. Тогда для однозначной разрешимости уравнения (2.8.1), необходимо и достаточно, чтобы решение $w(z)$ в точке z_0 принимало значение (2.8.24).

При этом уравнении задача (2.8.1), имеет единственное решение вида (2.8.21), в котором значения $w(z_0), \overline{w(z)}$ поставлены из (2.8.24).

Замечание. При $|a + b| = |d|$ однозначная разрешимость задача не будет.

Из этой формулы легко заметить, что при $f(z) \equiv 0$ уравнение имеет только нулевое решение $w(z) \equiv 0$, так как $M(z) = M(z_0) = 0$.

Случай переменных коэффициентов для уравнения

$$w_{\bar{z}} + a(z)w(z) + b(z)w(z_0) + d(z)\overline{w(z_0)} = f(z), \quad (2.8.25)$$

где $a(z), b(z), d(z), f(z) \in H_*^\alpha, 0 < \alpha \leq 1$, аналогично исследуется.

ГЛАВА 3. ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПЕРВОГО ПОРЯДКИ С ГЛАВНОЙ ЧАСТЬЮ ОПЕРАТОРА БЕЛЬТРАМИ И НАГРУЖЕННЫМИ ЧЛЕНАМИ

3.1. Двоякопериодические решения неоднородного уравнения Бельтрами с постоянным коэффициентом

Следуя работе Сафарова Д.С. находим двоякопериодические решения неоднородного уравнения Бельтрами в случае постоянного коэффициента [109]

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} - q \frac{\partial w}{\partial z} = f(z), \quad (3.1.1)$$

где q — постоянная, $|q| < 1$, $f(z) \in H_*^\alpha$.

Решение уравнения (3.1.1) будем искать в классе C_*^1 .

Лемма 1. Если $w(z) \in C_*^1$ — решение уравнения (2.1.1), то необходимо, чтобы

$$\iint_{\Omega} f(z) d\Omega = 0. \quad (3.1.2)$$

В самом деле, интегрируя обе части (3.1.1) по области Ω , имеем

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} d\Omega - q \iint_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial z} d\Omega = \iint_{\Omega} f(z) d\Omega.$$

Для функций класса C_*^1 в силу формулы Грина имеем

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} d\Omega &= \frac{1}{2i} \int_{\Omega} w(z) dz = \frac{1}{2i} \int_{z_0}^{z_0+h_2} [w(z+h_1) - w(z)] dz - \\ &- \int_{z_0}^{z_0+h_1} [w(z_0+h_2) - w(z)] dz = 0. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial z} d\Omega = 0.$$

Поэтому, справедливо утверждение леммы, «то есть, имеет место равенство (3.1.2)» [104].

Теорема 3.1.1. *Для разрешимости уравнения в классе C_*^1 необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (3.1.2) .*

Докажем достаточность условие (3.1.2). С этой целью производим замену переменных

$$\tau = z + q\bar{z}, \quad \bar{\tau} = \bar{z} + \bar{q}z. \quad (3.1.3)$$

Так как $|q| < 1$, то при такой замене параллелограмм Ω переходит на плоскость $\mathbb{C}_\tau$ в параллелограмм Ω' с вершинами

$$\tau_0, \tau_0 + h_1 + q\bar{h}_1, \tau_0 + h_1 + q\bar{h}_1 + h_2 + q\bar{h}_2, \tau_0 + h_2 + q\bar{h}_2,$$

содержащий начало координат.

Вычислим производные сложной функции:

$$w(z) = w(z, \bar{z}) = \varphi(\tau, \bar{\tau}) = \varphi(\tau) = \varphi(z + q\bar{z}, \bar{z} + \bar{q}z), \quad (3.1.4)$$

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{\tau}} q, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{\tau}} \bar{q} + \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}$$

и подставляя эти производные в (3.1.1), имеем

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} - q \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{\tau}} + \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} q - q \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{\tau}} \bar{q} - q \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = (1 - |q|^2) \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{\tau}}.$$

Тогда уравнение (3.1.1) в переменных $\tau, \bar{\tau}$ приводится к неоднородному уравнению Коши - Римана

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{\tau}} = \frac{1}{1 - |q|^2} \tilde{f}(\tau), \quad (3.1.5)$$

Функция $\tilde{f}(\tau)$ – двоякопериодическая с периодами $h_1 + q\bar{h}_1, h_2 + q\bar{h}_2$ и в силу $|q| < 1$ легко видеть, что при $Im\left(\frac{h_2}{h_1}\right) > 0$

$$Im\left(\frac{h_2 + q\bar{h}_2}{h_1 + q\bar{h}_1}\right) > 0.$$

Как доказано в работе Сафарова Д.С. «для разрешимости уравнения (3.1.5) необходимо и достаточно, чтобы

$$\iint_{\Omega'} \tilde{f}(\tau) d\Omega' = 0. \quad (3.1.2')$$

С другой стороны, в силу формулы

$$d\Omega' = (1 - |q|^2) d\Omega, d\Omega' \text{ площадь } \Omega'$$

$$\iint_{\Omega'} \tilde{f}(\tau) d\Omega' = (1 - |q|^2) \iint_{\Omega} f(z) d\Omega.$$

» [94].

Поэтому, для функции $f(z)$ при квазиконформном отображении уравнения (3.1.3) условие (3.1.2) и (3.1.2') совпадают.

При выполнении условия (3.1.2) из уравнения (3.1.5) согласно формуле, работы [105] имеем

$$\varphi(\tau) = c - \frac{1}{\pi(1 - |q|^2)} T_{\zeta} \tilde{f}(\tau) = - \frac{1}{\pi(1 - |q|^2)} \iint_{\Omega'} \tilde{f}(t) \zeta(t - \tau) d_t \Omega',$$

где c — постоянная, а $\zeta(\tau)$ — дзета-функция Вейерштрасса, построенная на периодах $h_1^1 = h_1 + q\bar{h}_1$, $h_2^1 = h_2 + q\bar{h}_2$,

$$\zeta(\tau) = \frac{1}{\tau} + \sum'_{h^1 \neq 0} \left(\frac{1}{\tau - h} - \frac{1}{h} - \frac{\tau}{h^2} \right), \tau = z + q\bar{z}, h = h + q\bar{h},$$

где $h^1 = m_1 h_1^1 + m_2 h_2^1$, $m_1, m_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Покажем, что функция

$$g(z) = - \frac{1}{\pi(1 - |q|^2)} \tilde{T}_{\zeta} f(z),$$

$$\tilde{T}_{\zeta} f(z) = \iint_{\Omega'} \tilde{f}(t) \zeta(t - \tau) d\Omega' = \iint_{\Omega'} f(t) \zeta(t + q\bar{t} - z - q\bar{z}) d\Omega'$$

является двоякопериодическим решением уравнения (3.1.1) при выполнении условия (3.1.2).

В самом деле, функция $\zeta(\tau) = \zeta(z + q\bar{z})$ на периодах h_1, h_2 является квазипериодической

$$\zeta(\tau + h_1^1) = \zeta(\tau) + \eta_1^1,$$

$$\zeta(\tau + h_2^1) = \zeta(\tau) + \eta_2^1,$$

причём $\eta_1^1 = 2\zeta\left(\frac{h_1^1}{2}\right)$, $\eta_2^1 = 2\zeta\left(\frac{h_2^1}{2}\right)$, где $h_1^1 = h_1 + q\bar{h}_1$, $h_2^1 = h_2 + q\tilde{h}_2$ и числа η_1^1 , η_2^1 , h_1^1 , h_2^1 связаны соотношением Лежандра.

$$\eta_2^1 h_1^1 - \eta_1^1 h_2^1 = 2\pi i.$$

Поэтому, функция $g(z)$ на периодах h_1 , h_2 удовлетворяет условию

$$g(z + h_1) = g(z) + \eta_1^1 \iint_{\Omega'} f(\tau) d\Omega',$$

$$g(z + h_2) = g(z) + \eta_2^1 \iint_{\Omega'} f(\tau) d\Omega'.$$

Отсюда получим периодичность функции $g(z)$ при выполнении условия (3.1.2).

Вычислим производные функции $g(z)$ по z и $\bar{z}$.

Для функции $f(z) \in H_*^\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$ согласно свойствам интегрального оператора $T_\zeta \rho(z)$ имеем

$$\begin{aligned} g_{\bar{z}} &= \frac{\partial}{\partial \bar{\tau}} \left(\tilde{T}_\zeta f(z) \right) \cdot \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\tilde{T}_\zeta f(z) \right) \cdot \frac{\partial \tau}{\partial \bar{z}} = \\ &= \left[f(\tau) \cdot (\bar{z} + \bar{q}z)_{\bar{z}} + S_\zeta f(\tau) \cdot (z + q\bar{z})_{\bar{z}} \right] \frac{1}{1 - |q|^2} = \\ &= \left(f(z) + qS_\zeta f(\tau) \right) \frac{1}{1 - |q|^2} \\ g_z &= \frac{\partial}{\partial \bar{\tau}} \left(\tilde{T}_\zeta f(z) \right) \cdot \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\tilde{T}_\zeta f(z) \right) \cdot \frac{\partial \tau}{\partial z} = \\ &= \left[f(z)(\bar{z} + \bar{q}z)_z + S_\zeta f(z)(z + q\bar{z})_z \right] \frac{1}{1 - |q|^2} = \left(\bar{q}f(z) + S_\zeta f(z) \right) \frac{1}{1 - |q|^2}. \end{aligned}$$

Подставляя эти производные в уравнение (3.1.1), получим

$$\begin{aligned} g_{\bar{z}} - qg_z &= \frac{1}{1 - |q|^2} \left[f(z) + qS_\zeta f(z) - q \left(\bar{q}f(z) + S_\zeta f(z) \right) \right] = \\ &= \frac{1}{1 - |q|^2} \left(f(z) - |q|^2 f(z) + qS_\zeta f(z) - qS_\zeta f(z) \right) = \frac{f(z)(1 - |q|^2)}{1 - |q|^2} = f(z). \end{aligned}$$

Тем самым доказано, что при выполнении условия (3.1.2) уравнение (3.1.1) в классе C_*^1 имеет решение

$$w(z) = c + \frac{1}{\pi(1 - |q|^2)} \tilde{T}_z f(z), \quad (3.1.3)$$

c — произвольная постоянная.

3.2. Двоякопериодическое решение неоднородного уравнения Бельтрами с нагруженным членом

На комплексной плоскости $\mathbb{C}$ рассмотрим «уравнение вида

$$w_{\bar{z}} - qw_z + aw(z_1) = f(z), \quad (3.2.1)$$

где q, a — постоянные, $|q| \neq 0$, $f(z)$ — заданная двоякопериодическая функция с периодами h_1, h_2 , $Im\left(\frac{h_2}{h_1}\right) \neq 0$, $w(z)$ и $w(z_1)$ — искомые.

В случае $q = 0$, $f \equiv 0$, уравнение (3.2.1) изучено в §2.1.» [33].

Решение уравнения (3.2.1) будем искать в классе C_*^1 . Предположим, что двоякопериодическая функция $f(z)$, $f(z) \in H_*^\alpha$.

Для разрешимости уравнения (3.2.1) в классе C_*^1 , как в «случае неоднородного уравнения Коши-Римана, должно выполняться условие разрешимости на правой части. Тогда, по аналогии получим: если $w(z)$ — решение уравнения (3.2.1) из класса C_*^1 , то необходимо, чтобы в точке $z = z_1$, $w(z)$ принимало значение» [104]

$$w(z_1) = \frac{f_0}{a|\Omega_0|}, \quad a \neq 0, \quad f_0 = \iint_{\Omega} f(z) d\Omega. \quad (3.2.2)$$

Действительно, если $w(z)$ является решением уравнения (3.2.1) из класса C_*^1 и $f(z) \in H_*^\alpha$, $\alpha \in (0,1)$, то интегрируя обе части (3.2.1) по области Ω имеем

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} d\Omega - q \iint_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial z} d\Omega + a \iint_{\Omega} w(z_1) d\Omega = \iint_{\Omega} f(z) d\Omega.$$

Так как для функций класса C_*^1

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} d\Omega = \iint_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial z} d\Omega = 0 \text{ и } a \iint_{\Omega} w(z_1) d\Omega = aw(z_1) \iint_{\Omega} d\Omega = aw(z_1)mes\Omega,$$

а так как

$$|\Omega_0| = mes\Omega = |h_1|^2 Im\left(\frac{h_2}{h_1}\right),$$

то получим

$$aw(z_1)|\Omega_0| = f_0,$$

из которого исследует (3.2.2).

Покажем, что условие (3.2.2) является и достаточным для однозначной разрешимости уравнения в классе C_*^1 .

Для этого от переменных $z, \bar{z}$ переходим к переменным $\omega, \bar{\omega}$ формулами

$$\omega = z + q\bar{z}, \bar{\omega} = \bar{z} + \bar{q}z, |q| \neq 1. \quad (3.2.3)$$

При $|q| \neq 1$ отображение (3) является взаимно однозначным между плоскостями $\mathbb{C}_z$ и $\mathbb{C}_\omega$.

Если $|q| < 1$, то «параллелограмм Ω с вершинами $z_0, z_0 + h_1, z_0 + h_1 + h_2, z_0 + h_2$,» [33].

плоскости $\mathbb{C}_z$ переходит в параллелограмм Ω' с вершинами

$$\omega_0, \omega_0 + h_1^1, \omega_0 + h_1^1 + h_2^1, \omega_0 + h_2^1, h_1^1 = h_1 + q\bar{h}_1, h_2^1 = h_2 + q\bar{h}_2,$$

причем из условия $Im\left(\frac{h_2}{h_1}\right) > 0$ следует, что $Im\left(\frac{h_2^1}{h_1^1}\right) > 0$. Это означает, что параллелограммы Ω и Ω' имеют одинаковую ориентацию против часовой стрелки. При $|q| > 1$ параллелограммы Ω и Ω' имеют разные ориентации.

Далее в силу формулы анализа «можно вычислить площадь Ω' по формуле

$$mes\Omega' = |\Omega'_0| = \iint_{\Omega} (|\omega_z|^2 - |\omega_{\bar{z}}|^2) dx dy,$$

так как, якобиан отображения (3.2.3) равен

$$I(z) = |\omega_z|^2 - |\omega_{\bar{z}}|^2 = (1 - |q|^2)|\omega_z|^2,$$

то подставляя это значение в интеграл получим

$$|\Omega'_0| = mes\Omega^1 = (1 - |q|^2)mes\Omega = (1 - |q|^2)|\Omega_0| \gg [25, 60].$$

И вычисление даёт

$$|\Omega'_0| = (1 - |q|^2)|h_1|^2 Im\left(\frac{h_2}{h_1}\right) > 0.$$

Переходя в новых переменных $\omega, \bar{\omega}$

$$w(z) = w(z, \bar{z}) = \varphi(\omega) = \varphi(\omega, \bar{\omega}) = \varphi(z + q\bar{z}, \bar{z} + \bar{q}z), \quad (3.2.4)$$

как выше получим формулы

$$w_{\bar{z}} - qw_z = q\varphi_{\omega} + \varphi_{\bar{\omega}} - q\varphi_{\omega} - \varphi_{\bar{\omega}}|q|^2 = (1 - |q|^2)\varphi_{\bar{\omega}}.$$

Это формула связывает оператор Бельтрами с оператором Коши-Римана в обозначениях (3.2.4). Таким образом, если $w(z)$ – решение уравнения (3.2.1), то в переменных $\omega, \bar{\omega}$ новая функция $\varphi(\omega)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{\omega}} = -\frac{a}{1 - |q|^2} \varphi(\omega_1) + \frac{\tilde{f}(\omega)}{1 - |q|^2}, \quad (3.2.5)$$

где $\varphi(\omega_1) = w(z_1)$, $\tilde{f}(\omega) = f(z)$, функция $\varphi(\omega) \in C_*^1$ и $\varphi(\omega_1) = w(z_1)$ которая имеет вид (3.2.2).

Как следует из результатов работы А.М. Нахушева для «разрешимости уравнения (3.5.5) в классе C_*^1 необходимо и достаточно, чтобы

$$\iint_{\Omega'} \frac{a}{1 - |q|^2} \varphi(\omega_1) d\Omega' = \iint_{\Omega'} \frac{\tilde{f}(\omega)}{1 - |q|^2} d\Omega' \quad (3.2.6)$$

» [91].

Вычисление интегралов даёт

$$\begin{aligned}
\frac{a}{1-|q|^2} \iint_{\Omega'} \varphi(\omega_1) d\Omega' &= \frac{a}{1-|q|^2} \varphi(\omega_1) \iint_{\Omega'} d\Omega' = \\
&= \frac{a}{1-|q|^2} \varphi(\omega_1) |\Omega'_0| = \frac{a}{1-|q|^2} \varphi(\omega_1) \cdot (1-|q|^2) |\Omega_0| = a\omega(z_1) |\Omega_0| \\
\frac{1}{1-|q|^2} \iint_{\Omega'} \tilde{f}(\omega) d\Omega' &= \frac{1}{1-|q|^2} \iint_{\Omega'} \tilde{f}(\omega) \cdot (1-|q|^2) d\Omega = \iint_{\Omega} f(z) d\Omega = f_0.
\end{aligned}$$

Таким образом, условия (3.2.2) и (3.2.6) совпадают.

Если выполнено условие (3.2.6), то решение уравнения (3.2.5) как в §3.1 можно представить в виде

$$\begin{aligned}
\varphi(\omega) = c - \frac{a}{1-|q|^2} \varphi(\omega_1) \cdot \bar{\omega} + \frac{b}{1-|q|^2} \omega + \\
+ \frac{1}{1-|q|^2} \cdot (1-|q|^2) T_{\zeta}^{\omega} f_1(\omega),
\end{aligned} \tag{3.2.7}$$

где постоянные c и b определяются из условия единственности решения $\varphi(\omega)$ из класса C_*^1 ,

$$\begin{aligned}
T_{\zeta}^{\omega} \rho(\omega) &= -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega'} \rho(\tau) \zeta(\tau - \omega) d\Omega' = \\
&= -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega'} \rho(\tau) \zeta[\tau - z - q(\overline{\tau - z})] d\Omega', \rho \in H_*^{\alpha}.
\end{aligned}$$

Как в работе А.М. Нахушева в §3.1 нами показано, что «

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\omega}} (T_{\zeta}^{\omega} \rho(\omega)) = \rho(\omega), \quad \frac{\partial}{\partial \omega} (T_{\zeta}^{\omega} \rho(\omega)) = S_{\zeta}^{\omega} \rho(\omega),$$

причём $S_\zeta^\omega: H_*^\alpha \rightarrow H_*^\alpha$, $\alpha \in (0, 1)$ » [91] и «свойства $T_\zeta^\omega \rho(\omega)$, $S_\zeta^\omega \rho(\omega)$ » хорошо изучены в монографии [102].

Как в §3.1, функция

$$\psi(\omega) = \psi(z, \bar{z}) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega'} \rho(\tau) \zeta[\tau - z - q(\bar{\tau} - \bar{z})] d\Omega' \quad (3.2.7^1)$$

удовлетворяет неоднородному уравнению Бельтрами

$$\frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}} - q \frac{\partial \psi}{\partial z} = \rho_1(z), \quad \rho_1(z) = (1 - |q|^2) \rho(\omega). \quad (3.2.8)$$

Обобщенная дзета-функция Вейерштрасса $\zeta(\omega) = \zeta(z + q\bar{z}) = \bar{\zeta}(z)$

$$\zeta(\omega) = \frac{1}{\omega} + \sum_{h^1 \neq 0} \left(\frac{1}{\omega - h^1} + \frac{1}{h^1} + \frac{\omega}{h^{1^2}} \right),$$

$$\begin{aligned} \zeta(\omega) = \bar{\zeta}(z) = & \frac{1}{z + q\bar{z}} + \sum'_{h^1 \neq 0} \frac{1}{z + q\bar{z} - m_1 h_1^1 - m_2 h_2^1} + \frac{1}{m_1 h_1^1 + m_2 h_2^1} + \\ & + \frac{z + q\bar{z}}{(m_1 h_1^1 + m_2 h_2^1)^2}, \end{aligned}$$

причём $m_1^2 + m_2^2 \neq 0$, $m_1, m_2 = 0, \pm 1, \pm 2$,

$$\sum' = \sum_{m_1^2 + m_2^2 \neq 0} \sum$$

$$h^1 = m_1 h_1^1 + m_2 h_2^1, \quad h_1^1 = h_1 + q\bar{h}_1, \quad h_2^1 = h_2 + q\bar{h}_2, \quad m_1, m_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

при $\omega \neq 0$, $\omega \neq h^1$ является решением уравнения Бельтрами

$$\frac{\partial \zeta(\omega)}{\partial \bar{z}} - q \frac{\partial \zeta(\omega)}{\partial z} = 0,$$

когда

$$\omega \neq m_1 h_1^1 + m_2 h_2^1,$$

$$\langle \zeta(\omega + h_1^1) = \zeta(\omega) + \eta_1^1, \quad \zeta(\omega + h_2^1) = \zeta(\omega) + \eta_2^1,$$

где

$\eta_1^1 = 2\zeta\left(\frac{h_1^1}{2}\right), \eta_2^1 = 2\zeta\left(\frac{h_2^1}{2}\right) \gg$ [33] циклические постоянные, вместе с периодами h_1^1, h_2^1 связаны соотношением Лежандра [102]

$$\eta_1^1 h_2^1 - \eta_2^1 h_1^1 = 2\pi i. \quad (3.2.9)$$

При $q = 0$ обобщенная функция Вейерштрасса $\zeta(\omega)$ является обычной дзета – функцией Вейерштрасса $\zeta(z)$, то есть $\bar{\zeta}(z) \equiv \zeta(z)$.

При $h_1^1 = h_1, h_2^1 = h_2$ соотношение (3.2.9) совпадает с обычным соотношением Лежандра [7, 32, 59, 102]

$$\eta_1 h_2 - \eta_2 h_1 = 2\pi i.$$

Доказательство формулы (3.2.9) дано в работах Сафарова Д.С. [94, 102].

Из свойства квазипериодичности функции $\zeta(\tau - z)$ получим, что функция $\psi(z)$ удовлетворяет условиям

$$\psi(z + h_1) = \psi(\omega + h_1^1) = \psi(\omega) + \frac{\eta_1^1}{\pi} \iint_{\Omega'} \bar{f}(\omega) d\Omega',$$

$$\psi(z + h_2) = \psi(\omega + h_2^1) = \psi(\omega) + \frac{\eta_2^1}{\pi} \iint_{\Omega} \bar{f}(\omega) d\Omega'.$$

Отсюда получим, что для двоякопериодичности $\varphi(\omega)$ постоянная b вместе с $a\varphi(\omega_1)$ должны удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases} \varphi(\omega_1) \bar{h}_1^1 + b h_1^1 = -\frac{1}{\pi} \eta_1^1 \bar{f}_0, \\ a\varphi(\omega_1) \bar{h}_2^1 + b h_2^1 = -\frac{1}{\pi} \eta_2^1 \bar{f}_0, \end{cases} \quad (3.2.10)$$

где

$$\bar{f}_0 = \iint_{\Omega'} \bar{f}(\omega) d\Omega'.$$

Из системы уравнений (3.2.10) находим $a\varphi(\omega_1)$ и b . Для этого воспользуемся соотношением Лежандра (3.2.9).

Умножая первое уравнение на h_2^1 и второе на h_1^1 и вычитая их, получим

$$\varphi(\omega_1)(\overline{h_1^1} \cdot h_2^1 - \overline{h_2^1} \cdot h_1^1) = -\frac{1}{\pi}(\eta_1^1 h_2^1 - h_2^1 h_1^1)\overline{f_0},$$

так как

$$\begin{aligned}\varphi(\omega_1)(\overline{h_1^1} \cdot h_2^1 - \overline{h_2^1} \cdot h_1^1) &= |h_1^1|^2 2i \operatorname{Im} \left(\frac{h_2^1}{h_1^1} - \frac{\overline{h_2^1}}{\overline{h_1^1}} \right) = \\ &= \varphi(\omega_1) |h_1^1|^2 2i \operatorname{Im} \left(\frac{h_2^1}{h_1^1} \right) = \varphi(\omega_1) \cdot |\Omega'_0|,\end{aligned}$$

то в силу соотношения (3.2.9) имеем

$$a\varphi(\omega_1)|\Omega'_0| = \overline{f_0}.$$

$$\text{С другой стороны } |\Omega'_0| = (1 - |q|^2)|\Omega|$$

и

$$\overline{f_0} = \iint_{\Omega'} \tilde{f}(\omega) d\Omega' = (1 - |q|^2) \iint_{\Omega} f(z) d\Omega = (1 - |q|^2)f_0$$

и мы имеем равенство (3.2.6) (или (3.2.2)).

Теперь, умножая первое уравнение системы (3.2.10) на $\overline{h_2^1}$, а второе на $\overline{h_1^1}$ и вычитая их, с учетом соотношения (3.2.9) имеем

$$b = \frac{\tilde{f_0}}{2\pi i |\Omega_0|} (\overline{h_1^1} \eta_2^1 - \overline{h_2^1} \eta_1^1), \quad (3.2.11)$$

Таким образом, при выполнении условия (3.2.6) уравнение (3.2.5) имеет решение из класса C_*^1 в виде

$$\varphi(\omega) = c - \frac{1}{1 - |q|^2} [a\varphi(\omega_1)\overline{\omega} + b\omega + T_\zeta^\omega \tilde{f}(\omega)], \quad (3.2.12)$$

где постоянная b - вычислена формулой (3.2.11), $a\varphi(\omega_1)$ определяется по формуле (3.2.6) (или (3.2.2), $\varphi(\omega_1) = w(z_1)$).

Наконец находим постоянную c , заменяя в (3.2.12), z на z_1 . Подставляя найденное значение c в (3.2.12) получим

$$\begin{aligned} \varphi(\omega) = \varphi(\omega_1) - \frac{1}{1 - |q|^2} [a\varphi(\omega_1)(\bar{\omega} - \bar{\omega}_1) + b(\omega - \omega_1) + \\ + T_\zeta^\omega \tilde{f}(\omega) - T_\zeta^{\omega_1} \tilde{f}(\omega)] \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

Переходя в этой формуле к переменным z , z_1 , получим решение уравнения (3.2.1) в виде

$$\begin{aligned} w(z) = w(z_1) - \frac{1}{1 - |q|^2} [aw(z_1)(\bar{z} + q\bar{z} - \bar{z}_1 - q\bar{z}_1) + \\ + b(z + q\bar{z} - z_1 - q\bar{z}_1) + T_\zeta^\omega f(z) - T_\zeta^\omega f(z_1)], \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

где

$$\begin{aligned} T_\zeta^\omega f(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega'} \tilde{f}(t) \zeta(t - \omega) d_t \Omega' = -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega'} \tilde{f}(t) \zeta(t + q\bar{t} - z - q\bar{z}) d_t \Omega', \\ T_\zeta^\omega f(z_1) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega'} \tilde{f}(t) \zeta(t + q\bar{t} - z_1 - q\bar{z}_1) d_t \Omega'. \end{aligned}$$

В формуле (3.2.14) вместо $w(z_1)$ и b подставлены их значения

$$w(z_1) = \frac{f_0}{a|\Omega_1|}, \quad b = -\frac{f_0}{2\pi i|\Omega_0|} [\bar{h}_1^1 \eta_2^1 - \bar{h}_2^1 \eta_1^1],$$

$$h_1^1 = h_1 + q\bar{h}_1, h_2^1 = h_2 + q\bar{h}_2, \eta_1^1 = 2\zeta\left(\frac{h_1^1}{2}\right), \eta_2^1 = 2\zeta\left(\frac{h_2^1}{2}\right).$$

Таким образом, справедлива

Теорема 3.2.1. Пусть в уравнении (3.2.1) $a \neq 0$ и

$$f_0 = \iint_{\Omega} f(z) d\Omega, \quad f(z) \in H_*^\alpha, \alpha \in (0,1).$$

Тогда для его однозначной разрешимости необходимо и достаточно, чтобы в точке $z = z_1$ решение принимало значение

$$w(z_1) = \frac{f_0}{a|\Omega_0|}, \quad |\Omega_0| = \text{mes}\Omega.$$

При этом единственное его решение $w(z)$ представляется в виде (3.2.14), постоянная b вычислена формулой (2.2.11).

3.3. Двоякопериодические решения обобщенного нагруженного уравнения Бельтрами

В этом параграфе находим двоякопериодические регулярные решения класса C_*^1 для уравнения вида

$$w_{\bar{z}} - qw_z + aw(z) + bw(z_1) = f(z), \quad (3.3.1)$$

где q, a, b – постоянные, $0 < |q| < 1$, $z_1 \in \Omega$, $f(z)$ как в предыдущем параграфе.

Случай $q = 0$ изучен нами в главе 2, §§2.1-2.2.

Как выше, это уравнение в переменных

$$w(z) = \varphi(\omega), \quad \omega = z + q\bar{z}, \quad \bar{\omega} = \bar{z} + \bar{q}z \quad (3.3.2)$$

принимает вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{\omega}} + a_1 \varphi(\omega) + b_1(\omega_1) = \tilde{f}_1(\omega), \quad (3.3.3)$$

где

$$a_1 = \frac{a}{(1 - |q|^2)}, \quad b_1 = \frac{b}{(1 - |q|^2)}, \quad \tilde{f}_1 = \frac{\tilde{f}(\omega)}{(1 - |q|^2)},$$

$$f(z) = f\left(\frac{\omega - q\bar{\omega}}{1 - |q|^2}\right) = \tilde{f}(\omega),$$

$$w(z_1) = w\left(\frac{\omega_1 - q\bar{\omega}_1}{1 - |q|^2}\right) = \varphi(\omega_1),$$

$$w(z) = w\left(\frac{\omega - q\bar{\omega}}{1 - |q|^2}\right) = \varphi(\omega),$$

$$z = \frac{1}{1 - |q|^2}(\omega - q\bar{\omega}), \quad \bar{z} = \frac{1}{(1 - |q|^2)}(\bar{\omega} - \bar{q}\omega).$$

Причем, «параллелограмм Ω с вершинами

$$z_0, z_0 + h_1, z_0 + h_1 + h_2, z_0 + h_2» [33]$$

и её образ при отображении $\omega(z)$ переходит в параллелограмм $\Omega^1 = \omega(\Omega)$, который внутри начало координат, соответственно $z_0 = 0, \omega_0 = 0$, то есть параллелограмм с вершинами $\omega_0, \omega_0 + h_1^1, \omega_0 + h_1^1 + h_2^1, \omega_0 + h_2^1$.

Согласно формуле (3.3.2), если $w(z)$ имеет периоды $h_1, h_2, \text{Im}\left(\frac{h_2}{h_1}\right) > 0$, то функция $\varphi(\omega)$ имеет периоды $h_1^1 = h_1 + q\bar{h}_1, h_2^1 = h_2 + q\bar{h}_2$ и наоборот.

При отображении

$$(z, \bar{z}) \rightarrow (z + q\bar{z}, \bar{z} + \bar{q}z) = (\omega, \bar{\omega})$$

решетка периодов плоскости $\mathbb{C}_z$ Γ переходит в решетку

$$\Gamma^1 = \{m_1 h_1^1 + m_2 h_2^1 + q(m_1 \bar{h}_1^1 + m_2 \bar{h}_2^1), m_1, m_2 - \text{целые}\}$$

$$\text{или } \Gamma^1 = \Gamma + q\bar{\Gamma}, \omega_j^1 = q\bar{h}_j, j = 1, 2.$$

Согласно результатам работы [92] разрешимость уравнения (3.3.3) зависит от значения $\tilde{a}_1: \tilde{a}_1 \in \Gamma^1$ или $\tilde{a}_1 \notin \Gamma^1$. Разбираем эти случаи по отдельности.

1. Пусть сперва $a_1 \notin \Gamma^1$. Тогда, как следуют из результатов работы Д.С.

Сафарова «однородное уравнение (3.3.3) имеет лишь нулевое решение» [107], а неоднородное уравнение при любой правой части

$$F_1(\omega) = F(\omega) - b_1 \varphi(\omega_1) \in H_*^\alpha, \quad \alpha \in (0, 1)$$

имеет одно единственное решение вида

$$\varphi(\omega) = e^{-a_1 \bar{\omega} + d\omega} T_\sigma^\omega [e^{a_1 \bar{\omega} - d\omega} F_1(\omega)], \quad (3.3.4)$$

где $T_\sigma^\omega \rho(\omega)$ – интегральный оператор с ядром $\sigma(\omega)$ – сигма – функция Вейрштрасса, построенная на периодах $h_1^1 = h_1 + q\bar{h}_1, h_2^1 = h_2 + q\bar{h}_2$:

$$T_{\sigma}^{\omega} \rho(\omega) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega^1} \rho(t) \frac{\sigma(t - \omega - \Delta_0)}{\sigma(-\Delta_0)\sigma(t - \omega)} d\Omega^1, \quad \Delta_0 \in \Gamma^1$$

здесь постоянные d и Δ_0 находятся из системы уравнений

$$\begin{cases} d\omega_1^1 + \Delta_0\eta_1^1 = a_1\bar{\omega}_1^1 + 2\pi i m_1, \\ d\omega_2^1 + \Delta_0\eta_2^1 = a_1\bar{\omega}_2^1 + 2\pi i m_2, \end{cases}$$

где « m_1, m_2 — некоторые целые числа.

Это система, благодаря соотношению Лежандра (3.2.9) имеет единственное решение»[33].

$$\Delta_0 = \frac{a_1\Omega'_0}{\pi} [m_1\omega_1^1 + m_2\omega_2^1], \quad (3.3.5)$$

$$d = -\frac{a_1}{2\pi i} (\bar{\omega}_1^1\eta_2^1 - \bar{\omega}_2^1\eta_1^1) \{m_1\eta_1^1 + m_2\eta_2^1\}.$$

Подставляя значения $F_1(\omega)$ в (3.3.4), будем иметь

$$\varphi(\omega) = -\frac{b_1}{a} \varphi(\omega_1) + e^{-a_1\bar{\omega}+d\omega} T_{\sigma}^{\omega} [e^{a_1\bar{\omega}-d\omega} F(\omega)]. \quad (3.3.6)$$

Так как $T_{\zeta}^{\omega} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \bar{\omega}} \right) = \rho(\omega)$,

$$\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega'} e^{a\bar{\omega}+d\omega} \frac{\sigma(\tau - \omega - \Delta_0)}{\sigma(-\Delta_0)\sigma(\tau - \omega)} d\Omega' = \frac{1}{a} e^{a\bar{\omega}+d\omega}.$$

Из этого равенство находим $\varphi(\omega_1)$.

Заменяя ω на ω_1 , при $a_1 + b_1 \neq 0$ находим $\varphi(\omega_1)$:

$$\varphi(\omega_1) = \frac{a}{a+b} e^{-a_1\bar{\omega}_1+d\omega_1} T_{\sigma}^{\omega_1} [e^{a_1\bar{\omega}-d\omega} F(\omega_1)], \quad (3.3.7)$$

$$T_{\sigma}^{\omega_1} \rho(\omega_1) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega'} \rho(\tau) \frac{\sigma(t - \omega_1 - \Delta_0)}{\sigma(-\Delta_0)\sigma(t - \omega_1)} d_{\tau}\Omega',$$

здесь вместо Δ_0 и d подставлены их значения из (3.3.5). Так как по формуле (3.3.2) $w(z) = \varphi(\omega)$, то

$$w(z_1) = \frac{a}{a+b} \cdot \left(\frac{1}{(1-|q|^2)} e^{-a_1 \bar{\omega}_1 + d \omega_1} \right) T_{\sigma}^{\omega_1} [e^{a_1 \bar{\omega} - d \omega} \tilde{f}(\omega)] =$$

$$= -\frac{a}{\pi(a+b)(1-|q|^2)} e^{-a_1 \bar{\omega}_1 + d \omega_1} \iint_{\Omega'} e^{a_1 \bar{\tau} - d \tau} f(\tau) \frac{\sigma(\tau - \omega_1 - \Delta_0)}{\sigma(-\Delta_0) \sigma(\tau - \omega_1)} d_{\tau} \Omega'. \quad (3.3.8)$$

При $a+b \neq 0$ и $a \in (1-|q|^2) \in \Gamma^1$, единственное решение уравнения (3.3.1) имеет вид

$$w(z) = -\frac{b}{a} w(z_1) + \frac{e^{-a_1 \bar{\omega} + d \omega}}{(1-|q|^2)} T_{\sigma}^{\omega} [e^{\tilde{a} \bar{\omega} + d \omega} \tilde{f}(\omega)], \quad (3.3.9)$$

где вместо $w(z_1)$, d, Δ_0 подставлены их значения из (3.3.5) и (3.3.8), а

$$\omega = z + q \bar{z}, \bar{\omega} = \bar{z} + \bar{q} z.$$

Таким образом, справедлива

Теорема 3.3.1. Пусть в уравнении (3.3.1)

$$|q| < 1 \text{ и } a \in (1-|q|^2) \Gamma^1 = (1-|q|^2) [m_1 h_1 + m_2 h_2 + q(m_1 \bar{h}_1 + m_2 \bar{h}_2)],$$

m_1, m_2 — целые числа. Тогда для его однозначной разрешимости должна выполняться условие $a+b \neq 0$. При этом его решение представляется в виде (3.3.9), где $w(z_1)$ вычислена формулой (3.3.8).

Случай $a \neq 0$ и $\bar{a}_1 \in \Gamma^1$.

В этом случае, как в предыдущем параграфе, при замене (3.3.2) получим уравнение (3.3.3).

Считая, что в уравнении (3.3.3) $\varphi(\omega_1)$ — известно (временно), его решение будем искать в виде

$$\varphi(\omega) = e^{-a_1 \bar{\omega} + \bar{a}_1 \omega} \psi(z), a_1 = \frac{a}{(1-|q|^2)} \quad (3.3.10)$$

и подставляя в (3.3.3), для нахождения $\psi(z)$ получим

$$\psi_{\bar{\omega}} + b_1 e^{a_1 \bar{\omega} - \bar{a}_1 \omega} \psi(\omega_1) = f_1(\omega) e^{a_1 \bar{\omega} - \bar{a}_1 \omega} = \tilde{f}_1(\omega) \quad (3.3.11)$$

$$\tilde{f}_1(\omega) = \frac{\tilde{f}_1(\omega)}{(1 - |q|^2)}, \tilde{b}_1 = e^{-a_1 \bar{\omega}_1 - \bar{a}_1 \omega_1} \frac{b}{1 - |q|^2}.$$

Если $a_1 \in \Gamma^1$, то $\exp(a_1 \bar{\omega} - \bar{a}_1 \omega) \in C_*^1$, поэтому

$$\iint_{\Omega'} \exp(a_1 \bar{\omega} - \bar{a}_1 \omega) d\Omega' = 0.$$

В силу формулы Грина и условия двоякопериодичности функции

$$\exp[a_1(\bar{\omega} + \bar{h}_1^1) - \bar{a}_1(\omega + h_1^1)] = \exp(a_1 \bar{\omega} - \bar{a}_1 \omega),$$

$$\exp[a_1(\bar{\omega} + \bar{h}_2^1) - \bar{a}_1(\omega + h_2^1)] = \exp(a_1 \bar{\omega} - \bar{a}_1 \omega),$$

так как

$$\exp(a_1 \bar{h}_1^1 - \bar{a}_1 h_1^1) = \exp(2\pi i n) = 1,$$

$$\exp(a_1 \bar{h}_2^1 - \bar{a}_1 h_2^1) = \exp(2\pi i m) = 1, \quad n, m - \text{целые числа.}$$

Поэтому, интегрируя обе части (3.3.11) по области Ω' , в силу того, что $\varphi(\omega) \in C_*^1$ имеем

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega'} \varphi_{\bar{\omega}} d\Omega' &= \int_{\omega_0}^{\omega_0 + h_2^1} [\varphi(\omega + h_1^1) - \varphi(\omega)] d\omega - \\ &- \int_{\omega_0}^{\omega_0 + h_1^1} [\varphi(\omega + h_2^1) - \varphi(\omega)] d\omega = 0. \end{aligned}$$

Получим необходимое условие разрешимости уравнения в виде

$$\iint_{\Omega'} \tilde{f}(\omega) \exp(a_1 \bar{\omega} - \bar{a}_1 \omega) d\Omega' = 0. \quad (3.3.12)$$

Это условие является условием разрешимости уравнения (3.3.11) в классе C_*^1 и ещё не гарантирует однозначную разрешимость задачи. Как в

случае $q = 0$ и $a \in \Gamma_1$ и принято в теории нагруженных уравнений мы должны налагать условия переопределения (точечное условие)

$$w(z_0) = e_1, \text{ то есть } \varphi(\omega_0) = e_1, \quad (3.3.13)$$

e_1 - некоторое заданное число.

Как следует из работы Д.С. Сафарова, «если выполнено условие (3.3.12), то решение уравнения (3.3.11) из класса S_*^1 представляется в виде

$$\psi(\omega) = c - \frac{b}{a} \varphi(\omega_1) \exp(a_1 \bar{\omega} - \bar{a}_1 \omega) + T_\zeta^\omega [\tilde{f}_1(\omega)], \quad (3.3.13')$$

где c – произвольная постоянная» [96].

Подставляя $\psi(\omega)$ в формулу (3.3.10), получим решение уравнения (3.3.3) при $a_1 \in \Gamma^1$ в виде

$$\varphi(\omega) = e^{-a_1 \bar{\omega} + \bar{a}_1 \omega} \left(c + T_\zeta^\omega [\tilde{f}_1(\omega) \exp(a_1 \bar{\omega} - \bar{a}_1 \omega)] \right) - \frac{b}{a} \varphi(\omega_1). \quad (3.3.14)$$

В найденном решении уравнения (3.3.3) в классе S_*^1 присутствует две неизвестных: $\varphi(\omega_1)$ и постоянная c .

Для нахождения неизвестных в формулу (3.3.14) с учетом условия переопределения (3.3.13) подставляем поочередно $\omega = \omega_0$ и $\omega = \omega_1$.

Тогда относительно неизвестных $\varphi(\omega_1)$ и c получим систему уравнений

$$\begin{cases} c - \frac{b}{a} \varphi(\omega_1) \exp(\bar{a}_1 \omega_0 - \bar{a}_1 \omega_0) = e_1 + \exp(\bar{a}_1 \omega_0 - \bar{a}_1 \omega_0) + A(\omega_1), \\ c - \left(1 + \frac{b}{a}\right) \varphi(\omega_1) \exp(\bar{a}_1 \omega_1 - \bar{a}_1 \omega_1) = +A(\omega_0), \end{cases} \quad (3.3.15)$$

где

$$A(\omega) = T_\zeta^\omega [\tilde{f}_1(\omega) \exp(a_1 \bar{\omega} - \bar{a}_1 \omega)] = \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega'} \tilde{f}_1(\tilde{\omega}) \exp(\bar{a}_1 \tau - \bar{a}_1 \tau) \zeta(\tau - \omega) d_\tau \Omega',$$

$$\tilde{f}_1(\omega) = \frac{\tilde{f}(\omega)}{(1-|q|^2)}.$$

Разрешимость задачи (3.3.1), (3.3.13) зависит от условия однозначной разрешимости системы алгебраических уравнений (3.3.15).

Введя обозначение

$$B(\omega) = \exp(\bar{a}_1 \omega - a_1 \bar{\omega}),$$

получим, что для однозначной разрешимости системы уравнений (3.3.15) необходимо и достаточно, чтобы

$$-\left(1 + \frac{b}{a}\right)B(\omega_1) + \frac{b}{a}B(\omega_0) \neq 0$$

или

$$(a + b)B(\omega_1) \neq bB(\omega_0). \quad (3.3.16)$$

Это означает, что ω_0 и ω_1 не удовлетворяют уравнению

$$(a + b)B(\omega_1) = bB(\omega_0). \quad (3.3.17)$$

Теорема 3.3.2. Пусть выполнены условия теоремы 3.3.1, $a_1 \in \Gamma^1$ и выполнено условие (3.3.12). Тогда для однозначной разрешимости задачи (3.3.1), (3.3.13) необходимо и достаточно, чтобы в точке ω_0, ω_1 выполнялось условие

$$(a + b)\exp(\bar{a}_1 \omega_1 - a_1 \bar{\omega}_1) \neq b\exp(\bar{a}_1 \omega_0 - a_1 \bar{\omega}_0).$$

При этом единственное решение задачи представляется в виде

$$w(z) = e^{-\bar{a}_1 \bar{\omega} + \bar{a}_1 \omega} \left[c + T_{\zeta}^{\omega} [\tilde{f}_1(\omega) \exp(\bar{a}_1 \omega - \bar{a}_1 \omega)] - \frac{b}{a} w(z_1) \right],$$

где постоянные c и $w(z_1)$ - решение системы уравнений (3.3.15) и

$$\omega = z + q\bar{z}, \bar{\omega} = \bar{z} + \bar{q}z.$$

3.4. Двоякопериодические решения обобщенного уравнения Бельтрами с многими нагруженными членами

В этом параграфе находим в классе C_*^1 решение уравнения

$$w_{\bar{z}} - qw_z + aw(z) + \sum_{k=1}^n a_k w(z_k) = f(z), \quad (3.4.1)$$

с постоянными коэффициентами, причём $0 < |q| < 1$, точки $z_1, z_2, \dots, z_n \in \Omega$, Ω – параллелограмм периодов, содержащий начало координат, $f(z) \in H_*^\alpha$, $\alpha \in (0,1)$.

При замене

$$w(z) = \varphi(\omega), \omega = z + q\bar{z}, \bar{\omega} = \bar{z} + \bar{q}z, \quad (3.4.2)$$

как выше, уравнение (3.4.1) принимает вид

$$\varphi_{\bar{\omega}} + b\varphi(\omega) + \sum_{k=1}^n b_k \varphi(\omega_k) = \tilde{f}_1(\omega), \quad (3.4.3)$$

где

$$b = \frac{a}{(1-|q|^2)}, b_k = \frac{a_k}{(1-|q|^2)}, k = \overline{1, n},$$

$$\tilde{f}_1(\omega) = \frac{1}{1-|q|^2} f\left(\frac{\omega - q\bar{\omega}}{1-|q|^2}\right) = D(\omega), \varphi(\omega_k) = w\left(\frac{\omega_k - q\bar{\omega}_k}{1-|q|^2}\right).$$

При отображении (3.4.2) параллелограмм Ω переходит на плоскости $\mathbb{C}_\omega$ в параллелограмм Ω^1 , содержащий начало координат и решетка периодов

$\Gamma = \{m_1 h_1 + m_2 h_2, m_1, m_2 - \text{целые}\}$ - в решетку периодов

$$\Gamma^1 = \Gamma + q\bar{\Gamma} = \{m_1 h_1^1 + m_2 h_2^1 + q(m_1 \bar{h}_1 + m_2 \bar{h}_2), m_1, m_2 - \text{целые}\},$$

где

$$h_1^1 = h_1 + q\bar{h}_1, h_2^1 = h_2 + q\bar{h}_2.$$

Разрешимость уравнения (3.4.3) зависит от свойства числа

b : $b \in \Gamma^1, b \in \Gamma^1$ и $b = 0$.

1) Находим решение при $b \in \Gamma^1$. Как в [96], в этом случае из уравнения (3.4.3) «при условии, что

$$F(\omega) = \tilde{f}_1(\omega) - \sum_{k=1}^n b_k \varphi(\omega_k) \in H_*^\alpha, \quad \alpha \in (0,1)$$

» [96] находим

$$\varphi(\omega) = -\frac{1}{b} \sum_{k=1}^n b_k \varphi(\omega_k) + \frac{1}{b} T_{\sigma}^{\omega} [\tilde{f}_1(\omega)] e^{-b\bar{\omega}+d\omega}, \quad (3.4.4)$$

где $T_{\sigma}^{\omega} \rho(\omega)$ интегральный оператор:

$$T_{\sigma}^{\omega} \rho(\omega) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega'} \rho(t) \frac{\sigma(t - \omega - \Delta_0)}{\sigma(-\Delta_0)\sigma(t - \omega)} d\Omega', \Delta_0 \in \Gamma^1,$$

$$\Delta_0 = \frac{|\Omega_0^1|}{\pi} \{m_1 h_1^1 + m_2 h_2^1\}, d = -\frac{b}{2\pi i} (\bar{h}_1^1 \eta_2^1 - \bar{h}_2^1 \eta_1^1) \{m_1 h_1^1 + m_2 h_2^1\}.$$

Так как

$$\frac{b_k}{b} = \frac{a_k}{a} \text{ и } \frac{\tilde{f}_1(\omega)}{b} = \frac{\tilde{f}(\omega)}{a},$$

то решение $\varphi(\omega)$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} \varphi(\omega) &= -\frac{1}{a} \sum_{k=1}^n a_k \varphi(\omega_k) + \frac{1}{a} \exp(-b\bar{\omega} + d\omega) T_{\sigma}^{\omega} [\tilde{f}(\omega) \exp(b\bar{\omega} - d\omega)] = \\ &= -\frac{1}{a} \sum_{k=1}^n a_k \varphi(\omega_k) + A(\omega), \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

где

$$A(\omega) = \frac{1}{a} \exp(-b\bar{\omega} + d\omega) T_{\sigma}^{\omega} [\tilde{f}(\omega) \exp(b\bar{\omega} - d\omega)]. \quad (3.4.5')$$

Теперь, подставляя в (3.4.5) поочередно $\omega = \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$, относительно неизвестных $\varphi(\omega_1), \varphi(\omega_2), \dots, \varphi(\omega_n)$ получим систему уравнений

$$B\varphi^0 = A_1^0, \quad (3.4.6)$$

где

$$\varphi^0 = (\varphi(\omega_1), \varphi(\omega_2), \dots, \varphi(\omega_n))^T,$$

$$A_1^0 = a(A(\omega_1), A(\omega_2), \dots, A(\omega_n))^T,$$

матрица B имеет следующий вид:

$$B = \begin{pmatrix} a + a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a + a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1}a + a_n \end{pmatrix} = aE + B_1.$$

Если $a \in \Gamma^1$, то $a \neq 0$, поэтому справедлива следующая

Теорема 3.4.1. Пусть в уравнении (3.4.1)

$$0 < |q| < 1 \text{ и } a \in (1 - |q|^2)\Gamma^1 \text{ и } f(z) \in H_*^\alpha, \alpha \in (0,1).$$

Тогда для его однозначной разрешимости в классе C_*^1 , необходимо и достаточно, чтобы

$$\text{rang} B = n. \quad (3.4.7)$$

Матрица B_1 имеет одинаковые строки, поэтому $\det B_1 = 0$ и теорему можно перефразировать так: при выполнении условия теоремы для однозначной разрешимости уравнения (3.4.1) необходимо и достаточно, чтобы число $a \in (1 - |q|^2)\Gamma^1$ не совпадало с собственными значениями матрицы B_1 , так как $a \neq 0$.

При выполнении условия теоремы единственное решение уравнения (3.4.1) имеет вид

$$w(z) = -\frac{1}{a} \sum_{k=1}^n a_k w(z_k) + \frac{1}{a} \exp(-a\bar{\omega} + d\omega) T_\sigma^\omega [\tilde{f}(\omega) \exp(a\bar{\omega} + d\omega)], \quad (3.4.8)$$

где $\omega = z + q\bar{z}$, интегральный оператор T_σ^ω как в (3.4.4¹), постоянные

$$w(z_k) = \varphi(\omega_k), \quad k = 1, 2, \dots, n$$

находятся из системы уравнений (3.4.6).

2) Случай $b \in \Gamma^1$ или $a \in (1 - |q|^2)\Gamma^1$.

Произведя замену искомой функции

$$\varphi(\omega) = \psi(\omega) \exp(-b\bar{\omega} + \bar{b}\omega) \quad (3.4.9)$$

и подставляя в (3.4.3), для функции $\psi(\omega) \in C_*^1$, в силу того, что

$$\varphi(\omega) \in C_*^1, \quad \exp(-b\bar{\omega} + \bar{b}\omega) \in C_*^1,$$

получим уравнение вида

$$\psi_{\bar{\omega}} + \exp(b\bar{\omega} - \bar{b}\omega) \sum_{k=1}^n \tilde{b}_k \psi(\omega_k) = \tilde{f}_1(\omega) \exp(b\bar{\omega} - \bar{b}\omega), \quad (3.4.10)$$

где $\tilde{b}_k = \tilde{b}_k \exp(-b\bar{\omega}_k + \bar{b}\omega_k), k = 1, 2, \dots, n$.

Как в случае $n = 1$, интегрируем обе части равенства (3.4.10) по области Ω' и в «силу того, что

$$\iint_{\Omega'} \varphi_{\bar{\omega}} d\Omega' = 0, \quad \iint_{\Omega} \exp(b\bar{\omega} - \bar{b}\omega) d\Omega' = 0.$$

» [25, 96]. Так как $\varphi(\omega) \in C_*^1$ и $\exp(-b\bar{\omega} + \bar{b}\omega) \in C_*^1$, получим условие разрешимости уравнения (3.4.10) в виде

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega'} \tilde{f}_1(\omega) \exp(b\bar{\omega} - \bar{b}\omega) d\Omega' = \\ & = \frac{1}{1 - |q|^2} \iint_{\Omega'} \tilde{f}(\omega) \exp(b\bar{\omega} - \bar{b}\omega) d\Omega' = 0. \end{aligned} \quad (3.4.11)$$

Если считать $\psi(\omega_k)$ известными как постоянными, то условие (3.4.11) в силу работы [93] является необходимым и достаточным условием разрешимости уравнения (3.4.11) в классе C_*^1 .

При выполнении условия (3.4.11) общее решение уравнения (3.4.10) в классе C_*^1 представляется в виде «

$$\psi(\omega) = c - \frac{1}{b} \exp(b\bar{\omega} - \bar{b}\omega) \sum_{k=1}^n \tilde{b}_k \psi(\omega_k) + T_{\zeta}^{\omega}[\tilde{f}_1(\omega)], \quad (3.4.12)$$

где c – произвольная постоянная, а

$$\tilde{f}_1(\omega) = \frac{1}{1 - |q|^2} \tilde{f}(\omega) \exp(b\bar{\omega} - \bar{b}\omega),$$

$$T_{\zeta}^{\omega} \rho(\omega) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega'} \rho(\tau) \zeta(\tau - \omega) d_t \Omega', \quad \tau = t + q\bar{t}, \omega = z + q\bar{z}.$$

» [93]

Подставляя (3.4.12) в (3.4.9), получим решение уравнения (3.4.3) из класса C_*^1 в виде

$$\varphi(\omega) = \exp(-b\bar{\omega} + \bar{b}\omega) \left[c + T_{\zeta}^{\omega} (\tilde{f}_1(\omega)) \right] - \frac{1}{a} \sum_{k=1}^n a_k \varphi(\omega_k), \quad (3.4.13)$$

Так как $\frac{b_k}{b} = \frac{a_k}{a}$.

В полученном решении неизвестными являются постоянные $c, \varphi(\omega_1), \varphi(\omega_2), \dots, \varphi(\omega_n)$. Для нахождения этих неизвестных, как в случае $n = 1$, будем налагать условие переопределения (точечное условие)

$$w(z_0) = \varphi(\omega_0) = e_1, \quad (3.4.14)$$

e_1 – заданное число, $z_0 \in \Omega, z_1 \neq z_0$.

В обозначениях

$$\chi(\omega) = \exp(\bar{b}\omega - b\bar{\omega}), E(\omega) = -\exp(\bar{b}\omega - b\bar{\omega}) T_{\zeta}^{\omega} [\bar{f}_1(\omega)],$$

уравнение (3.4.13) можно переписать в виде

$$\varphi(\omega) = \chi(\omega) c - \frac{1}{a} \sum_{k=1}^n a_k \varphi(\omega_k) + E(\omega). \quad (3.4.14')$$

Подставляя в это равенство поочередно $\omega = \omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n$ получим систему уравнений относительно неизвестных $c, \varphi(\omega_0), \dots, \varphi(\omega_n)$ в матричной форме

$$A\varphi^0 = F, \quad (3.4.15)$$

где матрица A , векторы φ^0, F имеют соответственно вид

$$\varphi^0 = (c, \varphi(\omega_1), \varphi(\omega_2), \dots, \varphi(\omega_n)),$$

$$F = (e_1 - E(\omega_0), E(\omega_1), E(\omega_2), \dots, E(\omega_k)), \quad (3.4.15^1)$$

$$A = \begin{pmatrix} \chi(\omega_0) & \frac{a_1}{a} & \frac{a_2}{a}, \dots, \frac{a_n}{a} \\ \chi(\omega_1) & 1 + \frac{a_1}{a} & \frac{a_2}{a}, \dots, \frac{a_n}{a} \\ \chi(\omega_2) & \frac{a_1}{a} & 1 + \frac{a_2}{a}, \dots, \frac{a_n}{a} \\ \dots & \dots & \dots \\ \chi(\omega_n) & \frac{a_1}{a} & \frac{a_2}{a}, \dots, \frac{a_{n-1}}{a} & 1 + \frac{a_n}{a} \end{pmatrix}. \quad (3.4.16)$$

Из условия разрешимости системы (3.4.15) будем получена следующая

Теорема 3.4.2. Пусть выполнены условия теоремы 3.4.1,

$a \in (1 - |q|^2)\Gamma_1$ и условие (3.4.11). Тогда для однозначной разрешимости задачи (3.4.1), (3.4.14) в классе C_*^1 , необходимо и достаточно, чтобы

$$\text{rang} A = n + 1.$$

При этом единственное решение задачи представимо в виде

$$w(z) = \chi(\omega)c - \frac{1}{a} \sum_{k=1}^n a_k w(z_k) + E(\omega),$$

где постоянные $c, w(z_1), w(z_2), \dots, w(z_k)$ - решение системы уравнений (3.4.15) как компоненты вектора φ^0 :

$$\varphi^0 = B^{-1}F_1,$$

$$\varphi^0 = (c, w(z_1), w(z_2), \dots, w(z_k))^T, F_1 = (e - E(\omega_0), E(\omega_1), \dots, E(\omega_n)),$$

$E(\omega), \chi(\omega), \omega = z + q\bar{z}$ имеют вид (3.4.15¹), B^{-1} - обратная матрица к матрице B .

3.5. Двойкопериодические решения обобщенного неоднородного уравнения Бельтрами с неизвестными параметрами и условиями переопределения

В этом параграфе находим в классе C_*^1 решение уравнения вида

$$w_{\bar{z}} - qw_z + aw(z) = \sum_{k=1}^n c_k f_k(z), \quad (3.5.1)$$

где $q, a, c_1, c_2, \dots, c_n$ – постоянные, причем $0 < |q| < 1$, $f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z)$ функции и из класса $H_*^\alpha, \alpha \in (0,1)$.

В уравнении (1) неизвестными являются решение $w(z)$ и постоянные $c_1, c_2, \dots, c_n$.

Как принято в теории таких уравнений для определения постоянных $c_k, k = \overline{1, n}$, зададим точечные «условия

$$w(z_k) = e_k, k = \overline{1, s} \quad (3.5.2)$$

» [36, 66, 74].

Такая задача для ряда «уравнений в частных производных и обыкновенных дифференциальных уравнений» изучена в работах [37, 38, 50, 51].

Как прежде, в новых переменных

$$w(z) = \varphi(\omega), \omega = z + q\bar{z}, 0 < |q| < 1, \quad (3.5.3)$$

уравнение переходит в уравнение

$$\varphi_{\bar{\omega}} + \bar{a}\varphi(\omega) = \sum_{k=1}^n \tilde{c}_k \tilde{f}_k(\omega), \quad (3.5.4)$$

$$\tilde{f}_k(\omega) = f_k\left(\frac{\omega - q\bar{\omega}}{1 - |q|^2}\right) = f_k(z), k = 1, 2, \dots, n,$$

$$\varphi(\omega) = \varphi(z + q\bar{z}) = w(z),$$

где

$$\tilde{a} = \frac{a}{1 - |q|^2}, \quad \tilde{c}_k = \frac{c_k}{1 - |q|^2}.$$

Условие переопределения (3.5.2) примет вид

$$w(z_k) = \varphi(\omega_k) = \varphi(z_k + q\bar{z}_k) = e_k, \quad (3.5.5)$$

$k = 1, 2, \dots, s$, причем $z_k \in \Omega$, а $\omega_k \in \Omega'$, параллелограммы Ω и Ω' содержат внутри начало координат.

Разрешимость уравнения (3.5.4) при известной правой части зависит от значения число $\tilde{a}$: $\tilde{a} \in \Gamma_1^1$ или $\tilde{a} \notin \Gamma_1^1$:

$$\Gamma_1^1 = \frac{\pi}{|\Omega_0^1|} \Gamma^1, \Gamma^1 = \Gamma + q\bar{\Gamma}, \Gamma = \{m_1 h_1 + m_2 h_2; m_1, m_2 - \text{целые}\}$$

Заметим, что если $f_k \in H_*^\alpha$, то $c_k f_k(z) \in H_*^\alpha$ при любом значении постоянных c_k .

1. Если $\tilde{a} \in \Gamma_1^1$, то однородное уравнение (4) в классе C_*^1 имеет только нулевое решение $w(z) \equiv 0$, а неоднородное уравнение при любой правой части

$$F(\omega) = \sum_{k=1}^n \tilde{c}_k \tilde{f}_k(\omega) \in H_*^\alpha, \alpha \in (0,1)$$

имеет одно единственное решение вида

$$\varphi(\omega) = \exp(-a\bar{\omega} + d\omega) T_\sigma^\omega [F(\omega) \exp(a\bar{\omega} - d\omega)], \quad (3.5.6)$$

здесь

$$T_\sigma^\omega \rho(\omega) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega'} \rho(t) \frac{\sigma(t - \omega - \Delta_0)}{\sigma(-\Delta_0)(t - \omega)} d_t \Omega,$$

$$\Delta_0 = \frac{\tilde{a}|\Omega_0'|}{\pi} \{m_1 h_1^1 + m_2 h_2^1\}, \quad d = -\frac{\tilde{a}}{2\pi i} (\bar{h}_1^1 \eta_2^1 - \bar{h}_1^1 \eta_1^1) \{m_1 \eta_1^1 + m_2 \eta_2^1\},$$

причём в подынтегральном выражении подставлены значения Δ_0 и d .

Подставляя значение $F(z)$ в (3.5.6) и введя обозначение

$$E_k(\omega) = \frac{1}{1 - |q|^2} \exp(-a\bar{\omega} + d\omega) T_\sigma^\omega [\tilde{f}_k(\omega) \exp(a\bar{\omega} - d\omega)], \quad (3.5.7)$$

$k = 1, 2, \dots, n$, запишем решение (3.5.6) в виде

$$\varphi(\omega) = \sum_{k=1}^n c_k E_k(\omega). \quad (3.5.8)$$

Удовлетворяем условию переопределения (3.5.5)

$$\varphi(\omega_j) = \sum_{k=1}^n c_k E_k(\omega_j) = e_j, \quad j = \overline{1, s}. \quad (3.5.9)$$

Таким образом, для нахождения неизвестных $c_1, c_2, \dots, c_n$ получим систему уравнений

$$Ac = e, \quad (3.5.10)$$

где

$$c = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T, \quad e = (e_1, e_2, \dots, e_j)^T, \\ A = \begin{pmatrix} E_1(\omega_1) & E_2(\omega_1) & \dots & E_n(\omega_1) \\ E_1(\omega_2) & E_2(\omega_2) & \dots & E_n(\omega_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ E_1(\omega_k) & E_2(\omega_k) & \dots & E_n(\omega_j) \end{pmatrix}. \quad (3.5.11)$$

Таким образом, для разрешимости (однозначной) системы уравнений должны, чтобы $j = n$ и $\text{rang} A = n$.

Поэтому справедлива

Теорема 3.5.1. Пусть в уравнении (3.5.1)

$$0 < |q| < 1 \text{ и } a \in (1 - |q|^2)\Gamma_1^1, f_k(z) \in H_*^\alpha.$$

Тогда для однозначной разрешимости задачи (3.5.1), (3.5.2) необходимо и достаточно, чтобы $j = n$ и $\text{rang} A = n$.

При этом единственное решение задачи (3.5.1), (3.5.2) представляется в виде

$$w(z) = \sum_{k=1}^n c_k E_k(z + q\bar{z}),$$

$c_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}$, $\Delta = \det A$, Δ - определитель, полученный из определителя Δ заменой j -го столбца столбцом «свободных членов» из (3.5.10)

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \dots \\ e_n \end{pmatrix},$$

$E_k(\omega) = E(z + q\bar{z})$ имеет вид (3.5.6), в котором $\omega, \bar{\omega}$ заменены на

$$\omega = z + q\bar{z}, \quad \bar{\omega} = \bar{z} + \bar{q}z.$$

2. Теперь рассмотрим случай $\tilde{a}_1 \in \Gamma_1^1$ или $a \in (1 - |q|^2)\Gamma_1^1$.

В этом случае неизвестную функцию $\varphi(\omega)$ будем искать в виде

$$\varphi(\omega) = \exp(-a_1\bar{\omega} + \bar{a}_1\omega)\psi(\omega), \quad (3.5.12)$$

где

$a_1 = \tilde{a} = \frac{a}{1-|q|^2}$, $\psi(\omega)$ — искомая двоякопериодическая функция с периодами

$$h_1^1 = h_1 + q\bar{h}_1, \quad h_2^1 = h_2 + q\bar{h}_2.$$

Подставляя (3.5.12) в (3.5.4) и (3.5.5), получим

$$\psi_{\bar{\omega}} = \frac{1}{1-|q|^2} \sum_{k=1}^n c_k \tilde{f}_k(\omega) \exp(a_1\bar{\omega} - \bar{a}_1\omega) \quad (3.5.13)$$

и

$$\psi(\omega_k) = e_k \exp(a_1\bar{\omega}_k - \bar{a}_1\omega_k), \quad (3.5.14)$$

здесь $k = 1, 2, \dots, s$.

Сперва найдем решение уравнения (3.5.13) из класса C_*^1 , затем подставляя найденное решение в условие переопределения (3.5.4), находим постоянные $c_1, c_2, \dots, c_n$.

При выполнении условия [1]

$$\sum_{k=1}^n c_k \iint_{\Omega'} \tilde{f}_k(\omega) \exp(a_1\bar{\omega} - \bar{a}_1\omega) d\Omega' = 0, \quad (3.5.15)$$

так как, при любых постоянных e_k , $k = \overline{1, n}$ функция

Полученную систему запишем в матричной форме

$$Ac = b, \quad (3.5.20)$$

где $c = (c_0, c_1, c_2, \dots, c_j)^T, b = (0, \tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \dots, \tilde{e}_j)^T,$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & d_1^0 & d_2^0 & \dots & d_n^0 \\ 1 & d_1^1 & d_2^1 & \dots & d_n^1 \\ 1 & d_1^2 & d_2^2 & \dots & d_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & d_1^s & d_2^s & \dots & d_n^s \end{pmatrix},$$

матрица A имеет размерность $n \times j, j \geq n$.

Легко видеть, что для разрешимости уравнений (3.5.20) должно быть $j = n$ и $\text{rang} A = n + 1$.

Теорема 3.5.2. Пусть выполнены условия теоремы и $a \in (1 - |q|^2)\Gamma_1^1$, $\Gamma_1^1 = \frac{\bar{n}}{|\Omega^1|} \{\Gamma + q\bar{\Gamma}\}$, Γ – решетка вида $\Gamma = \{m_1 h_1 + m_2 h_2, m_1, m_2 - \text{целые}\}$.

Тогда для разрешимости задачи (3.5.1), (3.5.2) необходимо и достаточно, чтобы $s = n$ и $\text{rang} A = n + 1$.

При этом единственное решение задачи представляется в виде

$$w(z) = \exp(-a_1 \bar{\omega} + \bar{a}_1 \omega) \psi(\omega),$$

где

$$\omega = z + q\bar{z}, a_1 = \frac{a}{1 - |q|^2},$$

функция $\psi(\omega)$ имеет вид (3.5.10), в котором постоянные $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$ решение системы уравнений (3.5.20), находятся формулой

$$c_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, j = 0, 1, 2, \dots, n,$$

здесь $\Delta = \det A$, Δ_j – определитель, полученный из определителя Δ заменой j -го столбца столбцом «Свободных членов»

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{e}_1 \\ \tilde{e}_2 \\ \dots \\ \tilde{e}_n \end{pmatrix},$$

$$\tilde{e}_j = e_j \exp(a_1 \bar{\omega}_j + \bar{a}_1 \omega_j), \quad j = \overline{1, n}.$$

3.6. Двоякопериодические решения обобщенного уравнения Бельтрами с нагруженными членами и переменными коэффициентами

Двоякопериодические решения обобщенного уравнения Бельтрами с переменными коэффициентами и нагруженными членам

Рассмотрим уравнение с многими нагруженным членами вида

$$w_{\bar{z}} - q(z)w_z + a(z)w(z) + \sum_{k=1}^n b_k(z)w(z_k) = f(z), \quad (3.6.1)$$

здесь $q(z), a(z), b_k(z), f(z)$ – заданные двоякопериодические функции с периодами h_1, h_2 из класса $H_*^\alpha, \alpha \in (0, 1)$, причём,

$$q(z) \in C_*^1 \cap H_*^\alpha \text{ и } |q(z)| \leq 0 < 1. \quad (3.6.2)$$

Сперва находим решение уравнения (3.6.1) для случая $n = 1$, то есть находим решение уравнения

$$w_{\bar{z}} - q(z)w_z + a(z)w(z) + b(z)w(z_1) = f(z). \quad (3.6.3)$$

1. Случай $w(z_1) = 0$.

1. Все решения уравнения (3.6.1) «при $b(z) \equiv 0$ », т.е.

$$w_{\bar{z}} - q(z)w_z + a(z)w(z) = f(z), \quad (3.6.4)$$

получены в работах [98], [105].

Для получения решения этого уравнения надо найти некоторый основной гомеоморфизм $\omega(z)$, удовлетворяющий уравнению Бельтрами

$$\omega_{\bar{z}} - q(z)\omega_z = 0, |q(z)| \leq q_0 < 1, \quad (3.6.5)$$

и отображающей квазиконформно параллелограмм Ω плоскости $\mathbb{C}_z$ на четырехугольник Ω^1 плоскости $\mathbb{C}_\omega$.

Такой гомеоморфизм удовлетворяет условию

$$\omega(0) = 0, \quad \omega(z + h_j) = \omega(z) + \tilde{h}_j, j = 1, 2,$$

причём $\tilde{h}_1, \tilde{h}_2$ — постоянные, зависящие как функционал от $q(z)$ и $Im\left(\frac{\tilde{h}_2}{\tilde{h}_1}\right) \neq 0$.

Построение такого «гомеоморфизма методом теории сингулярных интегральных уравнений» дано в работе [102].

«Все двоякопериодические решения уравнения Бельтрами на плоскости квазипериодического гомеоморфизма $\omega(z)$ с заданными полюсами а также с заданными нулями и полюсами получены» в монографии Д.С. Сафарова [105, с 94-162].

Как следует из работ [102, 105] основной «гомеоморфизм $\omega(z)$ обладает свойствами:

1. Если $q(z) \in H_*^\alpha$, то $\omega(z) \in C^{1+\alpha}(\Omega)$, причём $\omega_z \neq 0$ всюду.

2. При отображении $\omega(z)$ решетка

$$\Gamma = \{m_1 h_1 + m_2 h_2, m_1, m_2 - \text{целые}\} \subset \mathbb{C}_z \text{ переходит в решетку}$$

$$\Gamma^1 = \{m_1 \tilde{h}_1 + m_2 \tilde{h}_2, m_1, m_2 - \text{целые}\} \subset \mathbb{C}_z, \text{ причем при}$$

$$\iint_{\Omega} \omega_z(z) q(z) d\Omega = 0$$

все точки решетки Γ являются для отображения $\omega(z)$ неподвижными, $\omega(\Gamma) = \Gamma$.

3. Конгруэнтные по модулю Γ точки z_1, z_2 плоскости $\mathbb{C}_z$ переходит в конгруэнтные по модулю Γ^1 точки $C, \omega(z_1), \omega(z_2)$, то есть, если

$$z_1 \equiv z_2(mod \Gamma), \text{ то } \omega(z_1) \equiv \omega(z_2)(mod \Gamma^1).$$

4. Если $q(z) \in C_*^1$ то $\omega_z, \omega_{\bar{z}} \in C_*^{1+\alpha}, C_*^{1+\alpha} = C_*^1 \cap H_*^\alpha, \alpha \in (0, 1)$,

$$\omega(t) - \omega(z) = \omega_t(z)[t - z + q(z)(\overline{t - z})] + O(|t - z|^\beta), \beta > 0.$$

5. На плоскости $\mathbb{C}_z$ построены так называемые обобщенные

эллиптически функции Вейерштрасса

$$\tilde{\zeta}(z) = \zeta(\omega(z)), \tilde{\wp}(z) = \wp(\omega(z)), \tilde{\sigma}(z) = \sigma(\omega(z)),$$

как обобщенные решения уравнения Бельтрами. Причем функция $\tilde{\zeta}(z)$ удовлетворяет условиям

$$1) \tilde{\zeta}(z+h) = \zeta(\omega(z) + \tilde{h}) = \tilde{\zeta}(z) + \tilde{\eta},$$

$$h = m_1 h_1 + m_2 h_2, \quad \tilde{h} = m_1 \tilde{h}_1 + m_2 \tilde{h}_2, \tilde{\eta} = m_1 \tilde{\eta}_1 + m_2 \tilde{\eta}_2,$$

$\tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2$ – циклические постоянные и связаны с периодами $\tilde{h}_1, \tilde{h}_2$ соотношением Лежандра [97]

$$\tilde{\eta}_1 \tilde{h}_2 - \tilde{\eta}_2 \tilde{h}_1 = 2\pi i, \quad (3.6.6)$$

$$2) \zeta(\omega(t) - \omega(z)) = O(|t-z|^{-1}), \text{ при } t \rightarrow z;$$

$$3) \tilde{\zeta}_z = -q\wp(z), \zeta_z = -\wp(z), \tilde{\wp}(z+h) = \tilde{\wp}(z);$$

$$\wp(\omega(t) - \omega(z)) = O(|t-z|^{-2}) \text{ при } t \rightarrow z;$$

$$4) \text{ функция } \tilde{\sigma}(z) \text{ удовлетворяет уравнению}$$

$$\tilde{\sigma}_z = \bar{\zeta}(z)\tilde{\sigma}_z, \text{ при } z \neq 0; \text{ и условию}$$

$$\tilde{\sigma}(z+h) = \varepsilon \tilde{\sigma}(z) \left(\omega(z) + \frac{\tilde{h}}{2} \right), \varepsilon = 1, \text{ при } \frac{\tilde{h}}{2} \in \Gamma^1 \text{ и } \varepsilon = -1 \text{ в противном}$$

случае.

В работе [98] доказана

Теорема А. Пусть $\omega(z)$ основной квазипериодический гомеоморфизм уравнения Бельтрами (3.6.5). Тогда для разрешимости уравнения (3.6.4) в классе C_*^1 необходимо и достаточно, чтобы

$$\iint_{\Omega} \omega_z(z) g(z) d\Omega = 0.$$

При этом его решение из класса C_*^1 представимо в виде

$$\varphi(z) = c - \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \omega_t(t) g(t) \zeta(\omega(t) - \omega(z)) d_t \Omega.$$

» [98] .

Интегральный оператор

$$\tilde{T}_\zeta \rho(z) = T_\zeta^\omega \rho(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \rho(t) H(t, z) d_t \Omega, \quad (3.6.7)$$

где $H(t, z) = \omega_t(t) \zeta(\omega(t) - \omega(z)) = \omega_t(t) \tilde{\zeta}(t - z)$ при $\rho(z) \in C_*^1$ обладает свойствами:

$$\alpha) \left(T_\zeta^\omega \rho(z) \right)_{\bar{z}} = \rho(z) + \omega_{\bar{z}}(z) S_\zeta^\omega \rho(z), \quad \left(T_\zeta^\omega \rho(z) \right)_z = \omega_z(z) S_\zeta^\omega \rho(z),$$

где $T_\zeta^\omega \rho(z)$ – двоякопериодическая функция с периодами и $S_\zeta^\omega \rho(z) \in C_*^1$;

$$\beta) T_\zeta^\omega(z + h) = T_\zeta^\omega \rho(z) + \tilde{\eta} \rho_0, \quad h = m_1 h_1 + m_2 h_2, \quad \tilde{\eta} = m_1 \tilde{\eta}_1 + m_2 \tilde{\eta}_2,$$

$$m_1, m_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad \tilde{\eta}_j = \tilde{\zeta}\left(\frac{\tilde{h}_j}{2}\right) - \tilde{\zeta}\left(-\frac{\tilde{h}_j}{2}\right), \quad j = 1, 2,$$

Разрешимость уравнения (3.6.3) в классе C_*^1 зависит от свойства числа $\tilde{a}_0$:

$$\tilde{a}_0 = \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \omega_z(z) a(z) d\Omega \in \Gamma^1 \text{ или } \tilde{a}_0 \notin \Gamma^1.$$

При исследовании уравнения (3.6.3) достаточно найти решения в случае $\tilde{a}_0 = 0$ и $\tilde{a}_0 \neq 0$, $\tilde{a}_0 \notin \Gamma^1$, так как случай $\tilde{a}_0 \equiv 0 \pmod{\Gamma^1}$ сводится к случаю $\tilde{a}_0 = 0$.

Теперь, отыскивая решение уравнения (3.6.3) в виде

$$w(z) = \psi(z) \exp \left[T_\zeta^\omega [\omega_z(z) a(z)] \right], \quad (3.6.8)$$

в силу свойств оператора $T_\zeta^\omega \rho(z)$ получим при $\rho(z) = \omega_z(z) a(z)$

$$w_{\bar{z}} = \psi_{\bar{z}} \exp \left[-T_\zeta^\omega (\omega_z(z) a(z)) \right] - \psi(z) [a(z) + \omega_{\bar{z}} S_\zeta^\omega \rho(z) S_\zeta^\omega \rho(z)] \exp$$

$$w_z = \psi_z \exp \left[-T_\zeta^\omega (\omega_z(z) a(z)) \right] - \omega_z \psi(z) S_\zeta^\omega \rho(z)$$

$$w_{\bar{z}} - qw_z = \psi_{\bar{z}} \exp(-T_{\zeta}^{\omega} \rho(z)) - \psi(z) \left[a(z) + \omega_{\bar{z}} S_{\zeta}^{\omega} \rho(z) \exp(-T_{\zeta}^{\omega} \varphi(z)) \right] + \\ + \psi(z) a(z) \exp(-T_{\zeta}^{\omega} \varphi(z)) + q \psi_z \exp(-T_{\zeta}^{\omega} \varphi(z)) + q \psi_z \omega_z S_{\zeta}^{\omega} \rho(z) \exp(-T_{\zeta}^{\omega} \rho(z))$$

или

$$\psi_{\bar{z}} - q\psi_z = f(z) \exp(T_{\zeta}^{\omega} \omega_z a(z)). \quad (3.6.9)$$

При

$$\tilde{a}_0 = \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \omega_z(z) a(z) d\Omega = 0,$$

$$w(z+h) = \psi(z+h) \exp(-T_{\zeta}^{\omega} \rho(z) + \tilde{\eta} \tilde{a}_0) = \psi(z) \exp(-T_{\zeta}^{\omega} \rho(z)) = w(z),$$

если, $\psi(z+h) = \psi(z)$.

Поэтому, если $\tilde{a}_0 = 0$ и функция $\psi(z)$ двоякопериодическая с периодами h_1, h_2 , то функция $w(z) \in C_*^1$.

В силу теоремы А для разрешимости уравнения (3.6.9), необходимо и достаточно, чтобы

$$\iint_{\Omega} f(z) \exp T_{\zeta}^{\omega} [\omega_z a(z)] d\Omega = 0.$$

При этом решение уравнений (3.6.9) в классе C_*^1 имеет вид

$$\psi(z) = c + T_{\zeta}^{\omega} (f \exp T_{\zeta}^{\omega} [\omega_z a(z)]), \quad (3.6.10)$$

c — произвольная постоянная.

Теперь, если обозначать через $\psi_0(z)$

$$\psi_0(z) = \exp[-T_{\zeta}^{\omega} (\omega_z(z) a(z))], \quad (3.6.11)$$

то при $\tilde{a}_0 = 0, \psi_0(z) \in C_*^1$ и является решением однородного уравнения

$$\frac{\partial \psi_0(z)}{\partial \bar{z}} - q(z) \frac{\partial \psi_0(z)}{\partial z} + a(z) \psi_0(z) = 0. \quad (3.6.12)$$

В случае $\tilde{a}_0 \in \Gamma^1$ доказана

Теорема В. Если $\tilde{a}_0 \in \Gamma^1$, то однородное уравнение (3.6.3) (или (3.6.12)) имеет только нулевое решение $w(z) \equiv 0$, а неоднородное уравнение имеет единственное решение вида

$$w(z) = \exp\left(-T_\zeta^\omega a(z)\right) T_\sigma^\omega(f \exp T_\zeta^\omega a), \quad (3.6.13)$$

где $T_\sigma^\omega \rho(z)$ – интегральный оператор

$$T_\sigma^\omega \rho(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \rho(t) \omega_t(t) \frac{\sigma(\omega(t) - \omega(z) - \tilde{a}_0)}{\sigma(-\tilde{a}_0) \sigma(\omega(t) - \omega(z))} d_t \Omega, \quad (3.6.13')$$

$\sigma(u)$ – сигма-функция Вейерштрасса [94].

Интегральный оператор

$$T_\sigma^\omega \rho(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \omega_t(t) \rho(t) H_0(t, z) d_t \Omega, \quad (3.6.14)$$

$$H_0(t, z) = \omega_t(t) \frac{\sigma(\omega(t) - \omega(z) - \tilde{a}_0)}{\sigma(-\tilde{a}_0) \sigma(\omega(t) - \omega(z))}$$

обладает свойствами «

- 1) $(T_\sigma^\omega \rho(z))_z = \omega_z(z) S_\sigma^\omega \rho(z)$, $(T_\sigma^\omega \rho(z))_{\bar{z}} = \rho(z) + \omega_z(z) S_\sigma^\omega \rho(z)$;
- 2) $T_\sigma^\omega \rho(z + h) = T_\sigma^\omega \rho(z) \exp[\tilde{\eta} \rho_0]$,

$$\rho_0 = \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \omega_z(z) a(z) d\Omega, \quad h = m_1 h_1 + m_2 h_2, \quad \tilde{\eta} = m_1 \tilde{\eta}_1 + m_2 \tilde{\eta}_2,$$

$$m_1, m_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \gg [94].$$

Все эти свойства интегрального оператора доказаны в монографии Сафарова Д.С. [107].

Теперь можно приступить к решению уравнения (3.6.1) в классе C_*^1 .

2. Решение уравнения (3.6.3) в случае $a(z) \equiv 0$.

В этом случае имеем уравнение

$$w_{\bar{z}} - q(z)w_z + b(z)w(z_1) = f(z). \quad (3.6.15)$$

Находим единственное решение этого уравнения из класса C_*^1 при

$$b(z), f(z) \in H_*^\alpha, \alpha \in (0,1), \text{ и } q(z) \in C_*^1, |q(z)| \leq q_0 < 1.$$

Введем оператор Бельтрами B в пространстве C_*^1

$$B[u] = u_{\bar{z}} - q(z)u_z, q(z) \in C_*^1. \quad (3.6.16)$$

Оператор B линейный и для него: $C_*^1 \rightarrow C_*, C_*$ — пространство двойкопериодических непрерывных функций.

Также введем формально сопряженный оператор

$$B^*[\vartheta] = \vartheta_{\bar{z}} - (q(z)\vartheta)_z. \quad (3.6.17)$$

Для функций класса $C^1(G), G \subset \mathbb{C}_z$ справедливо тождество

$$\vartheta B[u] - uB^*[\vartheta] = (u\vartheta)_{\bar{z}} - (uq\vartheta)_z. \quad (3.6.18)$$

Если $u, \vartheta \in C_*^1$, то интегрируя обе части этого тождества и применяя формулу Грина, получим

$$\iint_{\Omega} (\vartheta B[u] - uB^*[\vartheta]) d\Omega = 0. \quad (3.6.19)$$

Так как $u\vartheta \in C_*^1, uq\vartheta \in C_*^1$ [102], то

$$\iint_{\Omega} (u\vartheta)_{\bar{z}} d\Omega = \iint_{\Omega} (uq\vartheta)_z d\Omega = 0.$$

Если $\omega(z)$ — основной гомеоморфизм уравнения $B[\omega] = 0$, то при $q(z) \in C_*^1, \omega(z) \in C_*^2$ как показано в [36] « $\omega_z \neq 0$ и удовлетворяет формально сопряженному уравнению Бельтрами

$$B^*[\omega_z] = (\omega_z)_{\bar{z}} - (q\omega_z)_z = 0 \text{ » [36].}$$

Поэтому, принимая в равенстве (3.6.17) $\vartheta = \omega_z$ и $u \in C_*^1$, имеем

$$\iint_{\Omega} \omega_z B[u] d\Omega = 0. \quad (3.6.20)$$

Это равенство доказано в монографии [102].

Теперь, используя равенство (3.6.18), которое можно назвать формулой Грина, находим условие разрешимости уравнения (3.6.13) в классе C_*^1 .

Уравнение (3.6.13) запишем в виде

$$B[w] = -b(z)w(z_1) + f(z), \quad (3.6.21)$$

считая постоянной $w(z_1)$ пока известной.

Так как $b(z), f(z) \in H_*^\alpha$, то функция $F(z) = -b(z)w(z_1) + f(z) \in H_*^\alpha$ для постоянной $w(z_1)$ (и любой постоянной c).

Согласно условию (3.6.18) и вышеприведённой теореме о разрешимости неоднородного уравнения Бельтрами при выполнении условия

$$\iint_{\Omega} b(z) \omega_z(z) w(z_1) d\Omega = \iint_{\Omega} \omega_z(z) f(z) d\Omega, \quad (3.6.22)$$

решение уравнения (3.6.2) можно представить в виде

$$w(z) = c + T_\zeta^\omega [b(z)w(z_1) + f(z)], \quad (3.6.23)$$

где $T_\zeta^\omega \rho(z)$ имеет вид (3.6.7), c — произвольная постоянная.

В равенстве (3.6.22) возможны два случая

$$1) b_0 = \iint_{\Omega} \omega_z(z) b(z) d\Omega \neq 0; \quad 2) \iint_{\Omega} \omega_z(z) b(z) d\Omega = 0.$$

Разберем эти случаи по отдельности. Если $b_0 \neq 0$, то из (3.6.22) находим $w(z_1)$:

$$w(z_1) = \frac{f_0}{b_0}, \quad f_0 = \iint_{\Omega} \omega_z(z) f(z) d\Omega. \quad (3.6.24)$$

Подставляя значение $w(z_1)$, получим решение уравнения в виде

$$w(z) = c - \frac{f_0}{b_0} T_\zeta^\omega[b(z)] + T_\zeta^\omega[f(z)]. \quad (3.6.25)$$

Заменяя в этом равенстве z на z_1 и учитывая (3.6.24), находим постоянную c :

$$c = \frac{f_0}{b_0} + \frac{f_0}{b_0} T_\zeta^\omega[b(z_1)] - T_\zeta^\omega[f(z_1)]. \quad (3.6.26)$$

Таким образом, справедлива

Теорема 3.6.1. Пусть в уравнении (3.6.15) $q(z) \in C_*^1, b(z), f(z) \in H_*^\alpha$, $\alpha \in (0,1)$ и $\omega(z)$ – основной квазипериодический гомеоморфизм уравнения Бельтрами. Тогда для однозначной разрешимости уравнения (3.6.15) при $b_0 \neq 0$ необходимо и достаточно, чтобы в точке $z = z_1$ решение принимало значение вида (3.6.24). При этом единственное решение уравнения представляется формулой

$$w(z) = \frac{f_0}{b_0} - \frac{f_0}{b_0} (T_\zeta^\omega[b(z)] - T_\zeta^\omega[b(z_1)]) + T_\zeta^\omega[f(z)] - T_\zeta^\omega[f(z_1)], \quad (3.6.27)$$

где $T_\zeta^\omega \rho(z)$ имеет вид (3.6.7).

Легко показать, что решение (3.6.27) – единственно. В самом деле, достаточно показать, что если $f(z) \equiv 0$ то $w(z) \equiv 0$.

Действительно, пусть в уравнении (3.6.12) $f(z) \equiv 0$.

Тогда

$$f_0 = \iint_{\Omega} w_z f(z) d\Omega = 0 \text{ и } w(z_1) = 0.$$

Это означает, что решение $w(z) \in C_*^1$, $w(z_1) = 0$ и $w_{\bar{z}} - q(z)w_z = 0$.

Всякое решение этого уравнения в классе C_*^1 является тождественно постоянной $w(z) \equiv c$ и в силу $w(z_1) = 0$ получим, что $c = 0$ и $w(z) \equiv 0$.

Таким образом, кроме решения вида (3.6.27), уравнение (3.6.12) другого ненулевого решения не имеет, этим доказанна единственность найденного решения.

Аналогично исследуется случай

$$b_0 = \iint_{\Omega} \omega_z b d\Omega = 0,$$

с условием переопределения $w(z_0) = e_0$.

3. Случай $a(z) \neq 0$ и $\bar{a}_0 \in \Gamma^1$.

Теперь находим единственное решение уравнения (3.6.1) в классе C_*^1 , когда $\bar{a}_0 \in \Gamma^1$, функции $q(z), a(z), b(z), f(z)$ как выше: $q(z) \in C_*^1, a(z), b(z), f(z) \in H_*^\alpha$.

Уравнение (3.6.1) запишем в виде

$$w_{\bar{z}} - q(z)w_z + a(z)w(z) = -b(z)w(z_1) + f(z) = F(z). \quad (3.6.33)$$

Если считать, что $w(z_1)$ является постоянной и известной, то по теореме, которую выше привели, решение уравнения (3.6.33) представляется в виде

$$w(z) = \exp[-T_\zeta^\omega a(z)] T_\sigma^\omega [F(z) \exp T_\zeta^\omega], \quad (3.6.34)$$

где $T_\zeta^\omega \rho(z)$ и $T_\sigma^\omega \rho(z)$ имеют соответственно вид (3.6.7) и (3.6.13).

Функция

$$\chi(z) = \exp(-T_\zeta^\omega a(z)) \quad (3.6.35)$$

является решением однородного уравнения

$$\chi_{\bar{z}} - q(z)\chi_z + a(z)\chi(z) = 0,$$

удовлетворяющей условию

$$\chi(z + h_j) = \chi(z) \exp(\eta_j \tilde{a}_0), j = 1, 2,$$

$$\tilde{a}_0 = \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \omega_z(z) a(z) d\Omega \text{ и } \tilde{a}_0 \in \Gamma^1.$$

Подставляя значения $F(z)$ в интеграл правой части формулы (3.6.34), получим решение уравнения (3.6.1) в виде

$$w(z) = -w(z_1)\chi(z)T_\sigma^\omega[f(z)\chi^{-1}(z)] + \chi(z)T_\sigma^\omega[f(z)\chi^{-1}(z)]. \quad (3.6.36)$$

Ради кратких изложений, введя ещё обозначения

$$B(z) = T_\sigma^\omega[b(z)\chi^{-1}(z)], \quad F(z) = T_\sigma^\omega[f(z)\chi^{-1}(z)], \quad (3.6.37)$$

последнее равенство (3.6.33) можно записать в виде

$$w(z) = -\chi(z)B(z)w(z_1) + \chi(z)F(z).$$

Подставляя $z = z_1$, имеем

$$(1 + \chi(z_1)B(z_1))w(z_1) = \chi(z_1)F(z_1).$$

Отсюда при выполнении

$$\chi(z_1)B(z_1) \neq -1 \quad (3.6.38)$$

имеем

$$w(z_1) = \frac{1}{1 + \chi(z_1)B(z_1)} \chi(z_1)F(z_1), \quad (3.6.39)$$

Таким образом, имеет место

Теорема 3.6.2. Пусть в уравнении (3.6.1) $q(z) \in C_*^1$, $a(z), b(z), f(z) \in H_*^\alpha$ и $\omega(z)$ основной квазипериодический гомеоморфизм уравнения Бельтрами. Тогда, если $\tilde{a}_0 \in \Gamma^1$, то для однозначной разрешимости уравнения (3.6.1) в классе C_*^1 , необходимо и достаточно, чтобы в точке z_1 выполнялось условие (3.6.38) и решение $w(z)$ в точке $z = z_1$ имело значение (3.6.39).

При этом единственное его решение из класса C_*^1 представляется формулой

$$w(z) = -\frac{\chi(z)B(z)}{1 + \chi(z_1)B(z_1)} \chi(z_1)F(z_1) + \chi(z)F(z).$$

Легко видеть, что при $f(z) \equiv 0, w(z) \equiv 0$, то есть уравнение (3.6.1) других решений не имеет.

3. Случай $a(z) \neq 0$ и $\tilde{a}_0 = 0$ (или $\tilde{a}_0 \in \Gamma^1$), исследуется аналогично.

Функция $\chi(z)$ в обозначении (3.6.30) при $\tilde{a}_0 \in \Gamma^1$, точнее при $\tilde{a}_0 = 0$

является функцией класса C_* , тогда согласно теореме 1 из работы [102], при выполнении условия

$$\iint_{\Omega} \omega_z(z) F(z) \chi^{-1}(z) d\Omega = 0 \quad (3.6.40)$$

решение уравнения (3.6.1) из класса C_*^1 представляется в виде

$$w(z) = \chi(z) \left[c - w(z_1) T_{\zeta}^{\omega}[b(z)] + T_{\zeta}^{\omega}[f(z)] \right], \quad (3.6.41)$$

где c — некоторая постоянная.

Отсюда видно, что в точке $z = z_1$ имеем одно уравнение с двумя неизвестными c и $w(z_1)$.

Подставляя значение $F(z) = -b(z)w(z_1) + f(z)$ в (3.6.40), имеем

$$-w(z_1)b_0 + f_0 = 0, \quad (3.6.42)$$

где

$$b_0 = \iint_{\Omega} \omega_z(z) b(z) \chi^{-1}(z) d\Omega, \quad f_0 = \iint_{\Omega} \omega_z(z) f(z) \chi^{-1}(z) d\Omega.$$

а) При $b_0 \neq 0$ из (3.6.40) находим

$$w(z_1) = \frac{f_0}{b_0}. \quad (3.6.43)$$

Подставляя (3.6.43) в (3.6.41), а затем, полагая $z = z_1$, для c имеем (с учетом 3.6.43)

$$\frac{f_0}{b_0} \chi^{-1}(z_1) = c - \frac{f_0}{b_0} T_{\zeta}^{\omega}[b(z_1)] + T_{\zeta}^{\omega}[f(z_1)].$$

Отсюда находим постоянную c и подставляя в (3.6.41), получим решение уравнения (3.6.1) в виде

$$\begin{aligned} w(z) = \chi(z) \left\{ \frac{f_0}{b_0} \chi^{-1}(z_1) + \frac{f_0}{b_0} T_{\zeta}^{\omega}[b(z_1)] - T_{\zeta}^{\omega}[f(z_1)] - \right. \\ \left. - \frac{f_0}{b_0} T_{\zeta}^{\omega}[b(z)] + T_{\zeta}^{\omega}[f(z)] \right\}. \end{aligned} \quad (3.6.44)$$

Таким образом, имеет место

Теорема 3.6.3. Пусть выполнены условия предыдущей теоремы и $\tilde{a}_0 = 0$. Тогда при выполнении условия $b_0 \neq 0$, для его однозначной разрешимости необходимо и достаточно, чтобы решение $w(z)$ в точке z_1 принимало значение (3.6.43). При этом единственное его решение представляется в виде (3.6.44).

Теперь, рассмотрим случай $b_0 = 0$. Тогда и $f_0 = 0$. Как в случае $a(z) \equiv 0$ решение уравнения представляется в виде (3.6.41).

В этом случае решение уравнения (3.6.1) представимо в виде (3.6.41). В точке z_1 имеем одно уравнение с двумя неизвестными: c и $w(z_1)$.

Для определения этих постоянных требуем от решения (3.6.1), чтобы оно удовлетворяло условию переопределения (3.6.25), то есть

$$w(z_0) = e_0, \quad (3.6.45)$$

где e_0 — известное число.

Подставляя в (3.6.41) поочередно $z = z_0, z = z_1$, для нахождения c и $w(z_1)$ получаем

$$\begin{cases} c - T_\zeta^\omega[b(z_0)w(z_1)] = e_0\chi^{-1}(z_0) - T_\zeta^\omega[f(z_0)], \\ c - \chi^{-1}(z_1) + T_\zeta^\omega[b(z_1)]w(z_1) = -T_\zeta^\omega[f(z_0)]. \end{cases} \quad (3.6.46)$$

Для разрешимости системы уравнений необходимо и достаточно, чтобы

$$1 + \chi(z_1)T_\zeta^\omega[b(z_1)] \neq \chi(z_1)T_\zeta^\omega[b(z_0)]. \quad (3.6.47)$$

Таким образом, справедлива

Теорема 3.6.4. Пусть выполнены условия теоремы 3.6.4 и $b_0 = 0$. Тогда для однозначной разрешимости задачи (3.6.1), (3.6.25) необходимо и достаточно, чтобы в точках z_0, z_1 выполнялось условие (3.6.47).

При этом решение задачи представляется формулой (3.6.41), в котором неизвестные c и $w(z_1)$ находятся из системы уравнений (3.6.46).

Общий случай уравнения (3.6.1).

Теперь, используя исследование уравнения (3.6.1), для частных случаев проведем его изучение в случае $n > 1, a(z) \neq 0$.

Решение уравнения (3.6.1) будем искать в виде

$$w(z) = \varphi(z)\psi(z), \quad (3.6.48)$$

где $\psi(z)$ – решение уравнения

$$w_{\bar{z}} - q(z)w_z + a(z)w(z) = 0, \quad (3.6.49)$$

а $\varphi(z)$ – искомая.

Функция $\psi(z)$ согласно формуле (3.6.35) имеет вид

$$\psi(z) = \exp\left(-T_{\zeta}^{\omega} a(z)\right) \quad (3.6.50)$$

и удовлетворяет условию

$$\psi(z + h_j) = \psi(z) \exp(\tilde{\eta}_j a_0), \quad (3.6.51)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \omega_z(z) a(z) d\Omega.$$

Тогда, если вести функцию $F(z)$ в виде

$$F(z) = f(z) - \sum_{k=1}^n b_k(z)w(z_k), \quad (3.6.52)$$

и считая $w(z_k)$ как постоянными величинами, то для нахождения $\varphi(z)$ получим неоднородное уравнения Бельтрами

$$\varphi_{\bar{z}} - q(z)\varphi_z = F(z)\psi^{-1}(z) \quad (3.6.53)$$

в классе двоякопериодических решений, удовлетворяющих условию

$$\varphi(z + h_j) = \varphi(z) \exp(-\tilde{\eta}_j a_0). \quad (3.6.54)$$

Как в случае $n = 1$, приходится рассматривать два случая $a_0 \notin \Gamma^1$ или $a_0 \in$

Γ^1 (и $a_0 = 0$).

Случай $a_0 \in \Gamma^1$ исследуется аналогичным образом и на этот раз мы получим систему из $n + 1$ уравнений. Решая полученную систему методом Крамера, находим единственное решение уравнения (3.6.1) при $n > 1$.

3.7. Задача определения некоторого неизвестного параметра для квазилинейной равномерно эллиптической системы уравнений первого порядка на плоскости в классе двоякопериодических функций

Обозначим через C_*^1 и H_*^α классы двоякопериодических функций с основными периодами $h_1, h_2 (h_2/h_1) \neq 0$, соответственно, принадлежащие классам $C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ и $H^\alpha(\bar{\Omega})$, Ω — основной параллелограмм периодов двоякопериодической группы $P(z)$:

$$P(z) = z + m_1 h_1 + m_2 h_2, \quad m_1, m_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

с вершинами $0, h_1, h_1 + h_2, h_2, H^\alpha(\bar{\Omega})$ — класс непрерывных по Гёльдеру функций с показателем $\alpha, 0 < \alpha \leq 1$.

Обратная задача: найти функцию $w(z)$ из класса C_*^1 и число b такие, что в области Ω связаны комплексным уравнением вида [1]

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} - q(z) \frac{\partial w}{\partial z} + a(z)w(z) + (f_0(z) + bf_1(z))w^n(z) = 0 \quad (3.7.1)$$

и при этом для функции $w(z)$ выполняется условие

$$w(z_0) = A, z_0 \in \Omega, \quad (3.7.2)$$

где z_0 — фиксирования точка, $n \geq 1, A$ — постоянная, функции $q(z), a(z), f_0(z), f_1(z)$ — известные, $q(z), a(z), f_0(z), f_1(z) \in H_*^\alpha$, причем

$$|q(z)| \leq q_0 < 1. \quad (3.7.3)$$

Условие (3.7.3) «является условием равномерной эллиптичности системы уравнений (3.7.1)» [27] на плоскости.

В данной обратной задаче условие (3.7.2) является условием переопределения, необходимое для нахождения неизвестного параметра b [43, 62].

Заметим, что вместо условия (3.7.2) можно задавать интегральное условие вида

$$\iint_{\Omega} \Psi(z)w(z)d\Omega = E,$$

где $\Psi(z)$ функция класса C_*^1 , E - некоторое число [99,118].

Если $w(z) \neq 0$ и b удовлетворяет уравнению (3.7.1), то функция

$$\varphi(z) = \frac{1}{w^{n-1}(z)} \quad (3.7.4)$$

является решением уравнения

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} - q(z) \frac{\partial \varphi}{\partial z} + (1-n)a(z)\varphi(z) = (n-1)(f_0(z) + bf_1(z)). \quad (3.7.4')$$

Чтобы между решениями уравнения (3.7.1) и уравнения (3.7.4') иметь взаимно однозначное соответствие, надо чтобы

$$0 > \arg w(z) > -\frac{2\pi}{n-1}.$$

Будем предполагать, что аргумент решения уравнения (3.7.1) лежит в указанном секторе.

Так как в правой части уравнения (3.7.4') постоянная b – неизвестна, то $\varphi(z)$ является решением обратной задачи с неизвестной правой частью [2], [3] и дополнительным условием

$$\varphi(z_0) = \frac{1}{A^{n-1}},$$

здесь число A такое же как в (3.7.2).

Все двоякопериодические решения уравнения (3.7.4') с известной правой частью найдены в работах [112, 113].

Исследование задачи проведем в случае, когда $n = 2$, то есть для уравнения

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} - q(z) \frac{\partial \varphi}{\partial z} - a(z) \varphi(z) = f_0(z) + b f_1(z), \quad (3.7.5)$$

с условием

$$\varphi(z_0) = \frac{1}{A}, A \neq 0. \quad (3.7.6)$$

Пусть в уравнении (3.7.5) $a(z) \equiv 0$. Тогда имеем для неоднородного уравнения Бельтрами [1,5]

$$B[\varphi] \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} - q(z) \frac{\partial \varphi}{\partial z} = f_0(z) + b f_1(z), \quad (3.7.7)$$

обратную задачу с неизвестной правой частью [4], в классе двоякопериодических функций C_*^1 . В уравнении (3.7.7) $q(z), f_0(z), f_1(z)$ -заданные, а неизвестными являются $\varphi(z)$ и постоянная b , причем $\varphi(z)$ должна удовлетворять условию (3.7.6).

В работе Д.С. Сафарова показано, что «задача нахождения двоякопериодических решений в классе регулярных функций (без полюсов) для уравнения

$$B[v] \equiv \frac{\partial v}{\partial \bar{z}} - q(z) \frac{\partial v}{\partial z} = F(z), \quad (3.7.8)$$

» [111], где $q(z), F(z) \in H_*^\alpha, 0 < \alpha \leq 1$, причем $|q(z)| \leq q_0 < 1$, фредгольмова.

При изучении «уравнения Бельтрами основным вопросом является построение некоторого его гомеоморфизма для данной области Ω » [27, 111, 112]. Это следует из следующего утверждения: если $\omega(z)$ гомеоморфизм уравнения Бельтрами, реализующий топологическое отображение области Ω на область $\omega(\Omega)$, то всякое другое его решение имеет вид

$$f(z) = \Phi[\omega(z)], \text{ то есть } B[f] = 0,$$

где Φ – произвольная аналитическая функция в области $\omega(\Omega)$.

Построение гомеоморфизма уравнения Бельтрами для различных областей «методом теории двумерных сингулярных уравнений» дано в работах [27, 43].

В случае двоякопериодической группы такой гомеоморфизм построен в монографии Д.С. Сафарова, показано, что «если

$$q(z) \in H_*^\alpha, |q(z)| \leq q_0 < 1,$$

то уравнение Бельтрами имеет единственное квазипериодическое решение $\omega(z)$, удовлетворяющее условиям:

$$\omega(0) = 0, \omega(z + h) = \omega(z) + \tilde{h},$$

$$h = m_1 h_1 + m_2 h_2, \tilde{h} = m_1 \tilde{h}_1 + m_2 \tilde{h}_2, \operatorname{Im}(\tilde{h}_2 / \tilde{h}_1) \neq 0, \quad m_1, m_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad \gg$$

[112].

Функция $\omega(z) \in C^1(\Omega)$ осуществляет гомеоморфное отображение параллелограмма Ω на четырёх сторонник $\Omega' = \omega(\Omega)$ с вершинами

$$0, \tilde{h}_1, \tilde{h}_1 + \tilde{h}_2, \tilde{h}_2.$$

Такое решение названо основным квазидвоякопериодическим решением уравнения Бельтрами.

1. При отображении $\omega(z)$ решетка периодов на плоскости

$$\mathbb{C}_z, \Gamma = \{m_1 h_1 + m_2 h_2; m_1, m_2 - \text{целые}\} \text{ переходит на решетку}$$

$\Gamma' = \{m_1 \tilde{h}_1 + m_2 \tilde{h}_2; m_1, m_2 - \text{целые}\}$ плоскости $\mathbb{C}_\omega$, причём в случае, когда

$$\iint_{\Omega} \omega_z(z) q(z) d\Omega = 0,$$

то все точки решетки Γ являются неподвижными точками отображения $\omega(z)$

$$\omega(\Gamma) \equiv \Gamma.$$

2. Конгруэнтные по модулю Γ точки плоскости $\mathbb{C}_z$ переходят в

конгруэнтные по модулю Γ' точки $\omega(z_1), \omega(z_2)$, то есть, если

$$z_1 \equiv z_2 \pmod{\Gamma}, \text{ то } \omega(z_1) \equiv \omega(z_2) \pmod{\Gamma'}.$$

3. Если $q(z) \in C_*^1$, то $\omega_{\bar{z}}, \omega_z \in C_*^{1+\alpha}, C_*^{1+\alpha} = C_*^1 \cap H_*^\alpha, 0 < \alpha \leq 1$.

4. $\omega(t) - \omega(z) = \omega_t(z)[t - z + q(z)(\overline{t - z})] + O(|t - z|^\beta, \beta > 0.)$

На плоскости $\mathbb{C}_\omega$ построены так называемые обобщенные эллиптические функции Вейерштрасса $\bar{\zeta}(z) = \zeta(\omega(z)), \bar{\wp}(z) = \wp(\omega(z)), \bar{\sigma}(z) = \sigma(\omega(z))$, как обобщенные решения уравнения Бельтрами.

Приведем теорему, доказанную в работе Д.С. Сафарова

«**Теорема 3.7.1.** Пусть $\omega(z)$ основной квазипериодический гомеоморфизм уравнения Бельтрами $B[\omega(z)] = 0$. Тогда для разрешимости уравнения (3.7.8) в классе C_*^1 необходимо и достаточно, чтобы

$$\iint_{\Omega} \omega_z(z) F(z) d\Omega = 0. \quad (3.7.9)$$

При этом все его решения из класса C_*^1 представимы в виде

$$v(z) = c - \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \omega_t(t) \zeta(\omega(t) - \omega(z)) F(t) d_t \Omega, \quad (3.7.10)$$

где c - произвольная постоянная» [112].

Интегральный оператор

$$\tilde{T}_\zeta \rho(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \rho(t) H(t, z) d_t \Omega, \quad (3.7.11)$$

$H(t, z) = \omega_t(t) \zeta(\omega(t) - \omega(z)), \zeta(u(z))$ - дзета-функция Вейерштрасса [7], при $\rho \in C_*^1$ обладает свойствами:

$$1) \left(\tilde{T}_\zeta \rho(z) \right)_{\bar{z}} = \rho(z) + \omega_{\bar{z}}(z) \tilde{S}_\zeta \rho(z), \left(\tilde{T}_\zeta \rho(z) \right)_z = \omega_z(z) \tilde{S}_\zeta \rho(z),$$

где $\tilde{T}_\zeta \rho(z)$ - двоякопериодическая функция класса $H_*^\alpha, 0 < \alpha \leq 1$, при $q(z) \in C_*^1, \tilde{T}_\zeta \rho(z) \in C_*^{1+\alpha}$.

$$2) \tilde{T}_\zeta \rho(z+h) = \tilde{T}_\zeta \rho(z) + \tilde{\eta} \rho_0, h = m_1 h_1 + m_2 h_2, \tilde{\eta} = m_1 \tilde{\eta}_1 + m_2 \tilde{\eta}_2,$$

$\tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2$ – циклические постоянные

$$\tilde{\eta}_j = \tilde{\zeta}(\tilde{h}_j/2) - \tilde{\zeta}\left(-\frac{\tilde{h}_j}{2}\right), j = 1, 2,$$

связаны с периодами $\tilde{h}_1, \tilde{h}_2$ «соотношением Лежандра

$$\tilde{\eta}_1 \tilde{h}_2 - \tilde{\eta}_2 \tilde{h}_1 = 2\pi i \gg [7, 112]$$

Применяя эту теорему к уравнению (3.7.7), получим

Теорема 3.7.2. Пусть функции $f_0(z), f_1(z)$ в уравнении (3.7.7) такие, что

$$f_0^0 = \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \omega_z(z) f_0(z) d\Omega \neq 0, f_1^0 = \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \omega_z(z) f_1(z) d\Omega \neq 0.$$

Тогда уравнение (3.7.7) имеет единственное решение $b, v(z)$, удовлетворяющее условию (3.7.6), и оно имеет вид

$$b = -\frac{f_0^0}{f_1^0},$$

$$v(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \left(f_0(t) - \frac{f_0^0}{f_1^0} f_1(t) \right) [H(t, z) - H(t, z_0)] d_t \Omega + \frac{1}{A}.$$

Теперь находим решение задачи (3.7.5), (3.7.6), то есть $\varphi(z), b$.

Временно предполагаем, что правая часть уравнения (3.7.5) известна

$F(z) = f_0(z) + b f_1(z)$, так как при $f_0, f_1 \in H_*^\alpha, F(z) \in H_*^\alpha$, при любом b .

Разрешимость уравнения (3.7.5) зависит от свойства числа

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} a(z) \omega_z(z) d\Omega: a_0 \in \Gamma' \text{ или } a_0 \notin \Gamma'.$$

1. Если $a_0 \in \Gamma'$, то легко видеть, что однородное уравнение (3.7.5) имеет нетривиальное решение вида

$$\psi(z) = \exp[\tilde{T}_\zeta a(z) + d\omega(z)], \quad (3.7.12)$$

где постоянная d пока искомая.

Здесь $\psi_0(z) = \exp[\tilde{T}_\zeta a(z)]$ - решение однородного уравнения (3.7.5), функция $\exp[d\omega(z)]$ - решение уравнения Бельтрами.

Покажем, что в (3.7.12) постоянную d можно подобрать такой, чтобы $\psi(z) \in \mathbb{C}_*^1$, то есть, $\psi(z)$ - была двоякопериодической. Заменяя z на $z + h_j$, имеем

$$\begin{aligned} \psi(z + h_j) &= \exp[\tilde{T}_\zeta a(z + h_j) + d\omega(z + h_j)] = \\ &= \exp[\tilde{\eta}_j a_0 + d\tilde{h}_j + \tilde{T}_\zeta a(z) + d\omega(z)] = \exp(\tilde{\eta}_j a_0 + d\tilde{h}_j) \psi(z). \end{aligned}$$

Используя соотношение Лежандра, постоянные a_0, d подберем так, чтобы они удовлетворяли уравнению

$$\exp(\tilde{\eta}_1 a_0 + d\tilde{h}_1) = \exp(\tilde{\eta}_2 a_0 + d\tilde{h}_2) = 1.$$

Для этого надо найти a_0, d из системы уравнений

$$\begin{cases} \tilde{\eta}_1 a_0 + d\tilde{h}_1 = 2\pi i n, \\ \tilde{\eta}_2 a_0 + d\tilde{h}_2 = 2\pi i m, \end{cases}$$

где n, m - некоторые целые числа. В силу соотношения Лежандра

$$\tilde{\eta}_1 \tilde{h}_2 - \tilde{h}_1 \tilde{\eta}_2 = 2\pi i,$$

находим

$$a_0 = n\tilde{h}_2 - m\tilde{h}_1 \in \Gamma', \quad d = -(n\tilde{\eta}_2 - m\tilde{\eta}_1). \quad (3.7.13)$$

Следовательно, когда $a_0 \in \Gamma'$, то d имеет вид (3.7.13) и $\psi(z) \in \mathbb{C}_*^1$.

Теперь отыскиваем решение неоднородного уравнения (3.7.7) в виде

$$\varphi(z) = \chi(z)\psi(z), \quad (3.7.14)$$

где $\psi(z)$ имеет вид (3.7.12), $\chi(z)$ - искомая функция класса $\mathbb{C}_*^1$.

Подставляя (3.7.14) в (3.7.7), для нахождения $\chi(z)$ получим неоднородное уравнение Бельтрами

$$\frac{\partial \chi(z)}{\partial \bar{z}} - q(z) \frac{\partial \chi(z)}{\partial z} = (f_0(z) + b f_1(z)) \psi^{-1}(z). \quad (3.7.15)$$

Отсюда, согласно результатам теоремы 3.7.1, получим

Теорема 3.7.3. Пусть $\omega(z)$ – основной квазипериодический гомеоморфизм уравнения Бельтрами, $a_0 \in \Gamma'$ и $\psi(z) \in C_*^1$ - решение однородного уравнения (3.7.7), тогда, если

$$f_k^0 = \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} f_k(z) \omega_z(z) \psi^{-1}(z) d\Omega \neq 0, k = 0, 1,$$

то уравнение (3.7.7) имеет единственное решение $b = -\frac{f_0^0}{f_1^0}, \varphi(z)$, удовлетворяющее условию (3.7.6)

$$\varphi(z) = \frac{\psi(z)}{\psi(z_0)} \left[\frac{1}{A} - \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} F(z) \psi^{-1}(z) [H(t, z) - H(t, z)] \right] d_t \Omega, \quad (3.7.16)$$

где

$$F(z) = f_0(z) - \frac{f_0^0}{f_1^0} f_1(z).$$

2. Случай, когда $a_0 \notin \Gamma'$. В этом случае решение задачи (3.7.5), (3.7.6)

будем искать в виде

$$\varphi(z) = \chi(z) \exp[\tilde{T}_{\zeta} a(z)] = \chi(z) \psi_0(z), \quad (3.7.17)$$

где $\chi(z)$ - искомая функция, удовлетворяющая условию

$$\chi(z + \tilde{h}_j) = \exp[-\tilde{\eta}_j a_0] \chi(z), j = 1, 2. \quad (3.7.18)$$

Подставляя (3.7.17) в уравнение (3.7.5), получим, что $\chi(z)$ должна удовлетворять неоднородному уравнению Бельтрами

$$\frac{\partial \chi(z)}{\partial \bar{z}} - q(z) \frac{\partial \chi(z)}{\partial z} = F(z) \psi_0^{-1}(z) = F_1(z). \quad (3.7.19)$$

Можно считать, что функция $F(z) = f_0(z) - b f_1(z)$ известна, так как для любой постоянной $b, F(z) \in H_*, 0 < \alpha \leq 1$.

Согласно результатам работы Д.С. Сафарова, решение уравнения (3.7.19) представимо в виде «

$$\chi(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \omega_z(z) H_0(t, z) F_1(t) d_t \Omega = \tilde{T}_\sigma F(z), \quad (3.7.20)$$

» [111], « $\sigma(u)$ - сигма-функция Вейерштрасса, $\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} = \zeta(u)$, построенная на периодах $\tilde{h}_1, \tilde{h}_2$ ». В работах получена функция [7]

$$H_0(t, z) = \frac{\sigma[\omega(t) - \omega(z) - a_0]}{\sigma[-a_0] \sigma[\omega(t) - \omega(z)]}. \quad (3.7.20')$$

Функция $H_0(t, z)$ удовлетворяет условиям:

- 1) $H_0(t + h, z) = H_0(t, z) \exp[\tilde{\eta} a_0], H_0(t, z + h) = H_0(t, z) \exp[-\tilde{\eta} a_0].$ (3.7.21)
- 2) Функция $g(z) = \tilde{T}_\sigma \rho(z)$ допускает частные производные по z и $\bar{z}$, которые вычисляются формулами

$$(g)_z = \omega_z(z) \tilde{S}_\sigma \rho(z), (g)_{\bar{z}} = \rho(z) + \omega_{\bar{z}}(z) \tilde{S}_\sigma \rho(z),$$

причём функция $g_1(z) = \tilde{S}_\sigma \rho(z)$ удовлетворяет условию (3.7.21)

$$g_1(z) \in H^\alpha(\Omega), 0 < \alpha \leq 1.$$

Все эти «свойства функции $g(z)$ и $g_1(z)$ » в работе Д.С. Сафарова доказане [112].

Теперь, подставляя (3.7.20) и (3.7.17), получим решение неоднородного уравнения (3.7.5) и подставляя полученное решение в условие (3.7.6), имеем

$$\frac{1}{A} = \chi(z_0) \exp \tilde{T}_\zeta a(z_0),$$

или

$$\frac{1}{A} = (f_0^0 + bf_1^0)e^{\tilde{T}_\zeta a(z_0)} = (f_0^0 + bf_1^0)\tilde{a}_0, \quad (3.7.22)$$

где

$$\tilde{a}_0 = \exp \tilde{T}_\zeta a(z_0) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} a(t)H(t, z_0) d_t \Omega,$$

$$f_j^0(z_0) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \omega_t(t)H_0(t, z_0)f_j(t) d_t \Omega, \quad j = 0, 1.$$

Если $f_1^0(z_0) \neq 0, f_0^0(z_0) \neq 0$, то из (3.7.22) находим

$$b = \frac{1}{A\tilde{a}_0 f_1^0(z_0)} - \frac{f_0^0(z_0)}{f_1^0(z_0)}. \quad (3.7.22')$$

Подставляя это значение b в формулу (3.7.20), получим решение обратной задачи по формуле (3.7.17).

Теорема 3.7.4. Пусть выполнены условия теоремы 3.7.2, $a_0 \in \Gamma'$ и $\exp \tilde{T}_\zeta a(z)$ - решение однородного уравнения (3.7.5). Тогда, если в точке z_0 выполняются условия

$$f_j^0(z_0) = \tilde{T}_\sigma a(z_0) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \omega_t(t)H_0(t, z_0)f_j(t) d_t \Omega, \quad j = 0, 1, \quad (3.7.23)$$

здесь $H_0(t, z_0)$ имеет вид (3.7.20'), то задача (3.7.5), (3.7.6) имеет единственное решение $(\varphi(z), b)$, где $\varphi(z)$ - имеет вид (3.7.17), постоянная b вычислена по формуле (3.7.22'), функция $\chi(z)$ представляется в виде (3.7.20).

Используя теорему 3.7.3, для основной обратной задачи (3.7.1), (3.7.2), получим следующий результат.

Теорема 3.7.5. Пусть $\omega(z)$ - основной квазипериодический гомеоморфизм уравнения Бельтрами и $n = 2$.

Тогда: 1) при выполнении условий теоремы 3.7.2,

$$a_0 \in \Gamma',$$

задача (3.7.1), (3.7.2) имеет единственное решение вида

$$w(z) = \frac{1}{\varphi(z)}, b = -\frac{f_0^0}{f_1^0},$$

где функция $\varphi(z)$ представляется формулой (3.7.16);

2) если $a_0 \in \Gamma'$ и выполнены условия теоремы 3.7.2, то задача (3.7.1), (3.7.2) имеет единственное решение $w(z)$, b , вида

$$w(z) = \frac{1}{\varphi(z)}, b = \frac{1}{A\bar{a}_0 f_1^0(z_0)} - \frac{f_0^0(z_0)}{f_1^0(z_0)},$$

где функция $\varphi(z)$ представима в виде (3.7.17), в котором $\chi(z)$ имеет вид (3.7.20).

ГЛАВА 4. ОБСУЖДЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

В диссертации исследованы задачи существования и нахождения двоякопериодических решений для уравнения обобщенных аналитических с нагруженными членами и неизвестными параметрами, входящими в свободный член.

Исследованию уравнения обобщенных аналитических функций, связанным с ним задачам и приложениям посвящены монографии Векуа И.Н., [25], Берс Л. [11], Михайлов Л.Г. [61], Джураев А.Д. [40], Усмонова З.Д. [122], Нахушева А.М. [90], Сафарова Д.С. [109] и многочисленные статьи.

Во второй главе работы исследуются задачи «нахождения двоякопериодических решений с основными периодами $h_1, h_2, \operatorname{Im}\left(\frac{h_2}{h_1}\right) > 0$, для» [33] нагруженного уравнения вида

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} + aw(z) + \sum_{k=1}^n a_k(z)w(z_k) = \sum_{k=1}^m c_k f_k + f(z), \quad (4.1)$$

где $a = a(z), a_k(z), f(z), f_k(z)$ – заданные двоякопериодические функции с периодами h_1, h_2, z_k – фиксированные точки основного «параллелограмма Ω с вершинами $z_0, z_0 + h_1, z_0 + h_1 + h_2, z_0 + h_2$ » [33] содержащий начало координат, z_0 произвольная точка плоскости $\mathbb{C}$. Неизвестными являются $w(z_k)$ и постоянные $c_e, e = \overline{1, m}$.

Поставленную задачу можно трактовать как обратную задачу с неизвестными параметрами. Для определения неизвестных параметров как принято в теории этих задач надо поставить условия переопределения (точечное или интегральное). Будем требовать, чтобы решение $w(z)$ уравнения (4.1) удовлетворяло условиям

$$w(t_j) = e_j, \quad j = \overline{1, s}, \quad t_j \neq z_j, \quad (4.2)$$

где t_j – точки из Ω , e_j – некоторые известные числа.

Уравнение (4.1) «в классе как двоякопериодических регулярных (без полюсов) из C_*^1 , так и в классе обобщенных (с полюсами) решений исследованы» в работах Показеева В.И., Байзаева С., Сафарова Д.С. и других в общем виде

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} + a(z)w(z) + b(z)\overline{w(z)} = F(z). \quad (4.3)$$

Это уравнение можно записать в виде

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} + \left(a(z) + \frac{b(z)\overline{w(z)}}{w(z)} \right) w(z) = F(z). \quad (4.4)$$

В случае $b(z) = 0$ уравнение решается обычным методом с помощью интегрального оператора Векуа

$$T_\Omega f(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_\Omega \frac{f(t)}{t-z} d_t \Omega.$$

Решение уравнения находится «с помощью интегрирования ядра Коши из некоторого нелинейного интегрального уравнения» [102, 105].

Все двоякопериодические решения уравнения (4.1) построены «методом Векуа» с помощью найденных Д.С. Сафаровым [106] интегральных операторов

$$T_\zeta \rho(z) \text{ и } T_\sigma \rho(z)$$

$$T_\zeta \rho(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_\Omega \rho(t) \zeta(t-z) d_t \Omega,$$

$$T_\sigma \rho(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_\Omega \rho(t) \frac{\sigma(t-z-D)}{\sigma(-D)\sigma(t-z)} d_t \Omega,$$

где $D \in \Gamma$, Γ - решетка периодов, $\Gamma = \{m_1 h_1 + m_2 h_2, m_1, m_2 - \text{целые}\}$. $\zeta(z), \sigma(z)$ – «дзета» и «сигма» - функции Вейерштрасса, построенные на периодах h_1, h_2 .

При отыскании $2\pi, 2\pi i$ периодических решений уравнения (4.3) Байзаевым С. был применен «метод интегральных операторов с помощью рядов Фурье».

«Нагруженные уравнения обобщенных аналитических функций и связанные с ними граничные задачи частично» изучены в монографии Нахушева А.М. и работах Хо Хон Сун, Сафарова Д.С. [105, 124].

В основном при нахождении решений уравнения (4.1) мы опираемся на работы Сафарова Д.С., где находятся решения уравнения (4.3), в котором $b(z) \equiv 0$.

В **2.1-2.2** изучено уравнение (4.1) в виде

$$w_{\bar{z}} + aw(z) + \sum_{k=1}^n a_k w(z_k) = f(z), \quad (4.5)$$

где все a, a_k - постоянные, $n \geq 1$.

Сперва изучается случай $n = 1$. Разрешимость уравнения зависит от случая $a \in \Gamma_1$ или $a \notin \Gamma_1$, где Γ_1 - решетка вида

$$\Gamma_1 = \frac{\pi}{\Omega_0} \Gamma = \frac{\pi}{\Omega_0} \{m_1 h_1 + m_2 h_2; m_1, m_2 - \text{целые}\},$$

$$\Omega_0 = \text{mes} \Omega = |h_1|^2 \text{Im} \left(\frac{h_2}{h_1} \right) > 0.$$

В случае $a \notin \Gamma_1$ уравнение (4.5), при $a_k = 0$ имеет единственное решение. Воспользуюсь этим утверждением, разрешимость уравнения (4.5), без условия (4.2), сводится к решению системы n алгебраических уравнений с n неизвестными $w(z_1), w(z_2), \dots, w(z_k)$. Методом Крамера находятся эти неизвестные и вместе с ними $w(z)$.

В случае $a \in \Gamma_1$ однородное уравнение имеет нетривиальное решение, а для разрешимости неоднородного уравнения должно выполняться условие ортогональности на $f(z)$.

В этом случае в условии переопределения берется $s = 1$. Для нахождения неизвестных $w(z_k)$ и постоянного интегрирования получается система алгебраических уравнений порядка $(n + 1) \times (n + 1)$.

Из этой системы находятся неизвестные и после их подстановки в общее решение получается явное решение задачи (4.1) и (4.2) при $s = 1$.

В 2.3-2.4 исследуются задачи (4.1), (4.2) для уравнения

$$w_{\bar{z}} + a(z)w(z) + \sum_{k=1}^n a_k w(z_k) = f(z), \quad (4.6)$$

когда все коэффициенты $a(z), a_k(z)$ и правая часть функции класса H_*^α , то есть двойкопериодические и непрерывные по Гельдеру с показателем, $\alpha \in (0,1)$. Разрешимость уравнения (4.6) зависит от свойства числа $a_0 \in \Gamma$ или $a_0 \notin \Gamma$, где

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} a(z) d\Omega,$$

Γ - решетке периодов $\Gamma = \{m_1 h_1 + m_2 h_2; m_1, m_2 - \text{целые}\}$.

В случае $a_0 \notin \Gamma$, без условия (4.2), для нахождения $w(z_k)$, согласно представлению единственного решения уравнения (4.6) получается система алгебраических уравнений из n уравнений. Решение находится методом Крамера.

При $a_0 \in \Gamma$ решение задачи (4.6), (4.2), $s = 1$, при выполнении необходимого условия разрешимости сводится к решению алгебраических уравнений с $n + 1$ неизвестными и $n + s$ уравнениями. Показано, что при $s = 1$ и $\text{rang} A = n + 1$, A – основная матрица системы и решение задачи выписывается в явном виде через интегральные операторы $T_\zeta \rho(z)$ и $T_\sigma \rho(z)$.

В 2.5 исследуется задача (4.1) и (4.2) для уравнения

$$w_{\bar{z}} + aw(z) = f(z) + \sum_{k=1}^n c_k f_k(z). \quad (4.7)$$

При $a \in \Gamma_1$ как разрешимость уравнения (4.7) без условия (4.2) сводится к решению системы алгебраических уравнений с n неизвестными $c_1, c_2, \dots, c_n$ и n уравнениями. Решая полученную систему методом Крамера, находим единственное решение уравнения (4.7).

В случае $a \in \Gamma_1$ как выше при $s = n + 1$ получим систему алгебраических уравнений с $n + 1$ неизвестными. Из полученной системы находится все неизвестные и вместе с тем и решение уравнения (4.7).

В 2.6 изучается квазилинейное уравнение с неизвестными коэффициентами, a именно уравнение вида

$$w_{\bar{z}} + aw(z) + \left(b_0(z) + \sum_{k=1}^m c_k b_k(z) \right) w^n(z) = 0, \quad (4.8)$$

с условия (4.2), некоторые случаи этого уравнения изучены.

Если решение задачи (4.8), (4.2) вовсе не допускает нули и все $e_j \neq 0$, то при $n = 2$ функция

$$\varphi(z) = \frac{1}{w(z)} \quad (4.9)$$

является решением уравнения

$$\varphi_{\bar{z}} - a\varphi(z) = b_0(z) + \sum_{k=1}^m c_k b_k(z) \quad (4.10)$$

с условием

$$\varphi(z_j) = \frac{1}{e_j} = d_j. \quad (4.11)$$

Заметим, что задачи (4.8), (4.2) при замене (4.9) становятся эквивалентным и задачами (4.10), (4.11) и обратно, при $n = 2$.

Таким образом, дословно, повторяя результаты 2.5, мы получим единственное решение задачи (4.8) и (4.2) при $n = 2$. В зависимости от условия $a \in \Gamma_1$ или $a \in \Gamma_1$ находится единственное решение задачи (4.8), (4.2) по формуле (4.9).

В 2.7 исследуется задача нахождения решений уравнения

$$w_z + a(z)w(z) + \sum_{k=1}^m a_k(z)w(z_k) = \sum_{j=1}^n c_j f_j(z) \quad (4.12)$$

с условиями переопределения

$$w(t_j) = e_j, j = \overline{1, s}. \quad (4.13)$$

Сперва эта задача исследуется в случае $m = n = 1$.

Такая задача для вещественных дифференциальных уравнений, как обратная коэффициентная задача и задача с неизвестной правой частью, исследованы с интегральными условиями.

В случае $a_0 \in \Gamma$, Γ – решетка периодов, найдены условия разрешимости задачи в терминах коэффициентов $a(z), b(z), f(z)$ при $s = 2$ в точках $z_1, z_2, z_1 \neq z_0, z_2 \neq z_0$. Найдено единственное решение задачи, в котором значения $w(z_0)$ и e вычислены в явном виде.

Когда $a_0 \in \Gamma$ и $a_0 = 0$, то разрешимость задачи сведена при выполнении условия на правую часть к системе из трех уравнений с тремя неизвестными $w(z_0)$, e и c постоянное интегрирование. При $\text{rang} A = 3$, A - основная матрица системы найдены все неизвестные параметры и тем самым получено единственное решение задачи.

В случае $m > 1, n > 1$ будем считать, что $s \geq m + n$ и

$$t_j = z_{j+m}, j = \overline{1, s}.$$

Тогда разбираем случаи $a_0 \in \Gamma$ или $a_0 \in \Gamma$.

В случае $a_0 \in \Gamma$ получим систему уравнений из $m + n$ неизвестных из $s \geq m + n$ уравнений. Тогда при $s = m + n$ и $\text{rang} A = m + n$, A - основная матрица находится единственное решение задачи.

В случае $a_0 \in \Gamma$ получим систему уравнений с $m + n + 1$ неизвестными и $s > m + n$ уравнениями. Тогда при $s = m + n + 1$ и $\text{rang} B = m + n + 1$, B - основная матрица системы, находим единственное решение задачи.

Заметим, что при $s > m + n + 1$ единственность решения нарушается.

В 2.8 находится двоякопериодические решения уравнения

$$w_{\bar{z}} + aw(z) + bw(z_0) + d\overline{w(z_0)} = f(z), \quad (4.14)$$

с условием

$$w(z_1) = e, \quad z_1 \neq z_0. \quad (4.15)$$

В случае $a = 0$ (без условия (4.15)) найдены необходимое и достаточное условие однозначной разрешимости уравнения (4.14) и его явный вид.

В случае, когда $a \neq 0$ и $a \in \Gamma_1$, то разрешимость задачи (4.14), (4.15) сводится к решению системы алгебраических уравнений из четырех уравнений с четыре неизвестными $w(z_0), \overline{w(z_0)}, c, \bar{c}$, c – постоянное интегрирование, при условии ортогональности на правой части $f(z)$. При условии $\text{rang} D = 4$, D – основная матрица системы, найдено единственное решение задачи.

Затем исследуются случай переменных коэффициентов. При $a(z) \equiv 0$ исследуется возможные случаи:

- 1) $b_0 \neq 0$; $d_0 = 0$ и $b_0 = 0, d_0 \neq 0$;
- 2) $b_0 \neq 0, d_0 \neq 0$, 3) $b_0 = 0, d_0 = 0$.

Во всех указанных случаях установлены условия однозначной разрешимости и выписан явный вид решения задачи.

В третьей главе изучаются двоякопериодические решения для эллиптической системы уравнений с оператором Бельтрами с нагруженными членами.

В 3.1, который носит поучительный характер, находится двоякопериодическое решение в классе C_*^1 для неоднородного уравнения Бельтрами

$$w_{\bar{z}} - qw_z = f(z),$$

где q – постоянная и $|q| \neq 1$, $f(z) \in H_*^\alpha, \alpha \in (0,1)$.

При выполнении необходимого и достаточного условия

$$\iint_{\Omega} f(z) d\Omega = 0,$$

найденно решение уравнения в виде

$$w(z) = c + \frac{1}{\pi(1 - |q|^2)} \tilde{T}_\zeta f(z),$$

$$\tilde{T}_\zeta f(z) = - \iint_{\Omega} f(z) \zeta(\tau - q\bar{\tau} - z + q\bar{z}) d_\tau \Omega,$$

$$\zeta(z + q\bar{z}) = \frac{1}{z + q\bar{z}} + \sum' \left(\frac{1}{z + q\bar{z} - h - q\bar{h}} + \frac{1}{h} + \frac{z + q\bar{z}}{h^2} \right)$$

$$h = m_1(h_1 + q\bar{h}_1) + m_2(h_2 + q\bar{h}_2), m_1, m_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Во втором параграфе исследовано уравнение с одним нагруженным членом вида

$$w_{\bar{z}} - qw_z + aw(z_1) = f(z), \quad (4.16)$$

где $|q| \neq 1, a$ – постоянная, z_1 - фиксированная точка из области Ω .

Условие разрешимости уравнения (4.16) совпадает с условием разрешимости для случая $q = 0$,

$$w(z_1) = \frac{1}{\pi|\Omega_0|} \iint_{\Omega} f(z) d\Omega = \frac{f_0}{\pi|\Omega_0|}.$$

При выполнении этого условия найдены решения уравнения с помощью интегрального оператора $\tilde{T}_\zeta \rho(\omega)$, где $\omega = z + q\bar{z}$, $|z| \neq 1$, как в §3.1.

В 3.3 изучено уравнение

$$w_{\bar{z}} - qw_z + aw(z) + bw(z_1) = f(z), \quad (4.17)$$

с постоянными коэффициентами, $|z| \neq 1$.

В зависимости от условия

$$a \in (1 - |q|^2)\Gamma^1 \text{ или } a \in (1 - |q|^2)\Gamma^1,$$

где $\Gamma^1 = \Gamma + q\bar{\Gamma}$, $\Gamma = \{m_1 h_1 + m_2 h_2; m_1, m_2 - \text{целые}\}$

найжены условия однозначной разрешимости уравнения. Показано, что при $a \in (1 - |q|^2)\Gamma^1$ для однозначной разрешимости уравнения (4.17) необходимо и достаточно, чтобы $a + b \neq 0$ и $w(z_1)$ принимала определенное значение, выражающее через интегральные операторы $T_\sigma^\omega \rho(z)$ с ядром сигма-функции $\sigma(\omega)$, построенной на плоскости переменных $\omega = z + q\bar{z}$, $\sigma^1(\omega) = \sigma(\omega)\zeta(\omega)$, с периодами $h^1 = h_1 + q\bar{h}_1$, $h^2 = h_2 + q\bar{h}_2$, $|z| \neq 1$.

Решение уравнения выписано через интегральный оператор $T_\sigma^\omega \rho(\omega)$, причём ядро интеграла зависит от значения a .

В случае $a \in (1 - |q|^2)\Gamma^1$ найдено единственное решение уравнения с дополнительным условиям

$$w(z_0) = e_1, z_0 \neq z_1. \quad (4.18)$$

Выписано условие разрешимости и найдено решение при помощи интегрального оператора $T_\sigma^\omega \rho(\omega)$, $\omega = z + q\bar{z}$, $\zeta(\omega)$ – как в §§3.1-3.2.

В 3.4 найдено условие однозначной разрешимости уравнения

$$w_{\bar{z}} - qw_z + aw(z) + \sum_{k=1}^n a_k w(z_k) = f(z), \quad (4.19)$$

с постоянными коэффициентами при выполнении условия (4.18).

Когда $a \in (1 - |q|^2)\Gamma^1$ найдено единственное решение задачи (4.18), (4.19) при выполнении условия разрешимости.

В случае, когда $a \in (1 - |q|^2)\Gamma^1$ найдено единственное решение уравнения (4.19) без дополнительного условия.

В 3.5 исследована задача нахождения решения уравнения

$$w_z - qw_z + aw(z) = \sum_{k=1}^n c_k f_k(z), \quad (4.20)$$

удовлетворяющего условию переопределения

$$w(z_j) = e_j, j = \overline{1, s}, \quad (4.21)$$

где $|z| \neq 1, a, e_j$ - известные постоянные, а c_k - неизвестные.

Показано, что если в уравнении (4.20) $0 < |q| < 1$ и $a \in (1 - |q|^2)\Gamma^1$, то для однозначной разрешимости задачи (4.20) и (4.21) необходимо и достаточно, чтобы $j = n, rang A = n$, A - основная матрица системы алгебраических уравнений, к которой сводится задача.

А при $a \in (1 - |q|^2)\Gamma^1$ задача разрешима однозначно, когда

$$j = n + 1 \text{ и } rang A = n + 1.$$

В 3.6 изучается уравнение вида

$$w_{\bar{z}} - q(z)w_z + a(z)w(z) + \sum_{k=1}^n b_k(z)w(z_k) = f(z), \quad (4.22)$$

с переменными коэффициентами

$$q(z) \in C_*^1 \cap H_*^\alpha, |q(z)| \leq q_0 < 1 \text{ и } a(z), b_k(z), f(z) \in H_*^\alpha, \alpha \in (0,1).$$

Сперва как поучительно изучается случай $n = 1$ и $w(z_1) = 0$, то есть уравнение

$$w_{\bar{z}} - q(z)w_z + a(z)w(z) = f(z), \quad (4.23)$$

Все решения этого уравнения выписаны с помощью следующих интегральных операторов:

$$1. \quad \tilde{T}_{\zeta}\rho(z) = T_{\zeta}^{\omega}\rho(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \rho(t)H(t, z) d_z \Omega,$$

где ядро интеграла имеет вид

$$H(t, z) = \omega_t(t)\zeta(\omega(t) - \omega(z)) = \omega_t(t)\tilde{\zeta}(t - z).$$

Здесь $\omega(z)$ - основной квазипериодический гомеоморфизм уравнения Бельтрами

$$\omega_{\bar{z}} - q(z)w_z = 0, |q(z)| \leq 0 < 1,$$

удовлетворяющий условию

$$\omega(0) = 0, \omega(z + h_j) = \omega(z) + \tilde{h}_j, \quad j = 1, 2$$

$\tilde{h}_1, \tilde{h}_2$ —зависящий как функционал от $q(z)$ и удовлетворяющий условию

$$Im\left(\frac{\tilde{h}_2}{\tilde{h}_1}\right) \neq 0.$$

На плоскости $\mathbb{C}_{\omega}$ построены обобщенные функции Вейерштрасса $\tilde{\zeta}(z) = \zeta(\omega(z))$, $\tilde{\wp}(z) = \wp(\omega(z))$, $\tilde{\sigma}(z) = \sigma(\omega(z))$.

$$2. \quad \tilde{T}_{\sigma}\rho(z) = T_{\sigma}^{\omega}\rho(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \rho(t)H_0(t, z) d_z \Omega,$$

где ядро интеграла имеет вид

$$H_0(t, z) = \omega_t(t) \frac{\sigma(\omega(t) - \omega(z) - D)}{\sigma(-D)\sigma(\omega(t) - \omega(z))}, D \in \Gamma^1,$$

Γ^1 — решетка $\Gamma^1 = \{m_1\tilde{h}_1 + m_2\tilde{h}_2, m_1, m_2 - \text{целые}\}$.

Разрешимость уравнения (4.23) зависит от свойства числа $\tilde{a}_0: \tilde{a}_0 \in \Gamma^1$,

$$\tilde{a}_0 = \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \omega_z(z) a(z) dz,$$

причём $\omega_{\bar{z}}(z) \in C_*^1$.

Когда $\tilde{a}_0 \in \Gamma^1$ – решение получается исключительно , только через $\tilde{T}_{\zeta}\rho$, А, при $\tilde{a}_0 \notin \Gamma^1$ решение находится с помощью $\tilde{T}_{\zeta}\rho$ и $\tilde{T}_{\sigma}\rho$, причём для интегрального оператора ядро содержит $\tilde{a}_0$, $\tilde{a}_0 \notin \Gamma^1$.

Затем изучается случай уравнения

$$w_{\bar{z}} - q(z)w_z + b(z)w(z_1) = f(z), \quad (4.24)$$

с одним нагруженным членом.

Разрешимость уравнения (4.24) в классе C_*^1 зависит от свойства числа b_0

,

$$b_0 = \iint_{\Omega} \omega_z b(z) d\Omega \neq 0 \text{ или } b_0 = 0.$$

В случае $b_0 \neq 0$ необходимое и достаточное условие разрешимости уравнения (4.24) имеет вид

$$w(z_1) = \frac{f_0}{b_0}, f_0 = \iint_{\Omega} \omega_z(z) f(z) d\Omega. \quad (4.25)$$

Это означает, что решение в точке $z = z_1$ принимало значение, равное $\frac{f_0}{b_0}$.

При этом решение уравнения (4.24) представляется в виде

$$w(z) = \frac{f_0}{b_0} - \frac{f_0}{b_0} (T_{\zeta}^{\omega}[b(z)] - T_{\zeta}^{\omega}[b(z_1)]) + T_{\zeta}^{\omega}[f(z)] - T_{\zeta}^{\omega}[f(z_1)]$$

и это решение единственно, то есть при $f = 0$, $w(z) \equiv 0$.

В случае $b_0 = 0$ для получения единственного решения налагается условие переопределения

$$w(z_0) = e_0, \quad z_0 \neq z_1, \quad (4.26)$$

e_0 – некоторое известное число.

Показано, что при выполнении условия

$$1 + T_\zeta^\omega[b(z_0)] \neq T_\zeta^\omega[b(z_1)],$$

задача (4.24), (4.25) имеет единственное решение вида

$$w(z) = c + T_\zeta^\omega[b(z)w(z_1)] + T_\zeta^\omega[f(z)] = c + w(z_1)T_\zeta^\omega[b(z)] + T_\zeta^\omega[f(z)],$$

причём постоянная c и $w(z_1)$ однозначно находятся из системы уравнений с детерминантом Δ , равным

$$\Delta = 1 + T_\zeta^\omega[b(z_0)] - T_\zeta^\omega[b(z_1)].$$

Далее, находится решение уравнения

$$w_{\bar{z}} - q(z)w_z + a(z)w(z) + b(z)w(z_1) = f(z). \quad (4.27)$$

Функция

$$\chi(z) = \exp\left(-T_\zeta^\omega a(z)\right)$$

является решением уравнения

$$\chi_{\bar{z}} - q(z)\chi_z + a(z)\chi(z) = 0$$

и удовлетворяет условию

$$\chi(z + h_j) = \chi(z)\exp(\eta_j \tilde{a}_0), j = 1, 2,$$

$$\tilde{a}_0 = \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \omega_z(z) a(z) d\Omega,$$

Возможны два случая $\tilde{a}_0 \in \Gamma^1$ или $\tilde{a}_0 \in \Gamma^1$.

Если $\tilde{a}_0 \in \Gamma^1$, то решение уравнения (4.26) записывается в виде

$$w(z) = -\chi(z)B(z)w(z_1) + \chi(z)F(z), \quad (4.28)$$

где $B(z) = T_\sigma^\omega[b(z)\chi^{-1}(z)]$, $F(z) = T_\sigma^\omega[f(z)\chi^{-1}(z)]$.

Подставляя в (4.27) $z = z_1$, находится условие разрешимости уравнения в виде

$$\chi(z)B(z_1) \neq -1$$

и $w(z_1)$ находится в виде

$$w(z_1) = \frac{1}{1 + \chi(z_1)B(z_1)} \chi(z_1)F(z_1).$$

Подставляя это значение $w(z_1)$ в (4.28), находится точное единственное решение уравнения в виде

$$w(z) = -\frac{\chi(z)B(z)}{1 + \chi(z_1)B(z_1)} \chi(z_1)F(z_1) + \chi(z)F(z).$$

Если $\tilde{a}_0 = 0$ (или $\tilde{a}_0 \in \Gamma^1$) и $b_0 \neq 0$, то для разрешимости уравнения (4.26) необходимо и достаточно, чтобы в точке $z = z_1$ решение $w(z)$ принимала значение

$$w(z_1) = \frac{f_0}{b_0}.$$

При этом единственное решение уравнения (4.26) представляется в виде

$$w(z) = \chi(z) \left\{ \frac{f_0}{b_0} \chi^{-1}(z_1) + \frac{f_0}{b_0} T_\zeta^\omega[b(z_1)] - \right. \\ \left. - T_\zeta^\omega[f(z_1)] - \frac{f_0}{b_0} T_\zeta^\omega[b(z)] + T_\zeta^\omega[f(z)] \right\}.$$

Когда $\tilde{a}_0 = 0$ и $b_0 = 0$, то для однозначной разрешимости уравнения (4.26) требуется условие переопределения

$$w(z_0) = e_0, \quad z_0 \neq z_1, \quad (4.29)$$

e_0 — известное число.

В таком случае условие однозначной разрешимости уравнения имеет вид

$$1 + \chi(z_1)T_\zeta^\omega[b(z_1)] \neq \chi(z_1)T_\zeta^\omega[b(z_0)]. \quad (4.30)$$

При выполнении этого условия единственное решение задачи (4.26), (4.29) представляется в виде

$$w(z) = \chi(z) \left[c - w(z_1) T_{\zeta}^{\omega} [b(z)] + T_{\zeta}^{\omega} [f(z)] \right],$$

где постоянная c и $w(z_1)$ определяются из системы линейных уравнений

$$c - T_{\zeta}^{\omega} [b(z_0)] w(z_1) = e_0 \chi^{-1}(z_0) - T_{\zeta}^{\omega} [f(z_0)],$$

$$c - \chi^{-1}(z_1) + T_{\zeta}^{\omega} [b(z_1)] w(z_1) = -T_{\zeta}^{\omega} [f(z_1)],$$

определитель которой в силу условия (4.29) отличен от нуля.

ВЫВОДЫ

1. Основные научные результаты диссертации

В диссертации исследованы задачи об однозначной разрешимости уравнения обобщенных аналитических функций в классе двоякопериодических функций, с нагруженными членами и неизвестными параметрами при заданных точечных условий переопределения.

Также изучается равномерно эллиптическое уравнение с оператором Бельтрами с нагруженными членами и дополнительными условиями в классе регулярных двоякопериодических функций.

Основны научные результаты диссертационной работы заключаются в следующем:

- для уравнения (2.1.1) в случае, когда все $c_k = 0$, в классе C_*^1 найдены условия однозначной разрешимости и выписаны все решения с помощью интегральных операторов $T_\zeta \rho$ и $T_\sigma \rho$ [3-A, 5-A];

В одном случае решение находится без условия (2.0.2), а в другом случае с условием (2.1.2) при $s = 1$.

- для уравнения (4.1), когда все $a_k = 0$, $c_k \neq 0$ найдено условие однозначной разрешимости задачи (2.1.1), (2.1.2) в терминах коэффициентов уравнения и известных постоянных в условии (2.1.2) [2-A, 6-A];

- исследование задачи (2.1.2), (2.6.1) при $n = 2$ сведено к решению обратной задачи с неизвестными параметрами в правой части. Найдено условие однозначной разрешимости задачи и вычислены все входящие неизвестные постоянные [1-A, 4-A];

- проведено исследование задачи (2.1.1), (2.1.2) в общем виде, найдены условия однозначной разрешимости и выписаны решения задачи в явном виде [2-A, 7-A];

- дано полное исследование решения задачи (2.8.1), (2.8.2). Найдены условия однозначной разрешимости задачи и выписаны явный вид решения [3-A, 8-A];

- найдены условия однозначной разрешимости нагруженного уравнения (3.4.1) с оператором Бельтрами, как с постоянными, так и с переменными коэффициентами. Решение находится с помощью интегральных операторов $T_{\zeta}^{\omega} \rho$ и $T_{\sigma}^{\omega} \rho$ на плоскости основного квазипериодического гомеоморфизма уравнения Бельтрами [4-A, 9-A].

2. Рекомендации по практическому использованию результатов

1. Результаты, полученные в диссертационной работе могут быть использованы при дальнейшем исследовании нагруженных обобщенных аналитических функций с дополнительными интегральными условиями;

2. Разработанные методы можно применять и нагруженным уравнениям метааналитических функций высокого порядка как для постоянных коэффициентов, так и для переменных коэффициентов, с точечными и интегральными условиями (переопределения);

3. Результаты работы могут найти применения при математического моделирования нелокальных, в том числе периодические, а также фрактальных процессов и явлений. Так как математической физики фракталов, в особенности дробной динамики, стали нагруженные дифференциальные уравнения, демонстрирующие роль этих уравнений в различных отраслях современной науки, в частности математической биологии;

4. Материалы диссертации и методы исследования могут быть рекомендованы для использования в учебном процессе при чтении специальных курсов и проведения исследовательской работы для студентов, аспирантов и магистрантов по направлению комплексного анализа и дифференциальных уравнений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абдуллаев В.М. Решение дифференциальных уравнений с неразделенными многоточечными и интегральными условиями [Текст] / В.М.Абдуллаев // Сиб. журн. Индустр. математики. - 2012. - Т. 15, №3(51). - С. 3-15.
2. Абдуллаев В.М. Численный метод решения нагруженных нелокальных граничных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений [Текст] / В.М. Абдуллаев // Журн. Вычисл.матем. и матем.физ. - 2014. – Т. 54. - №7. - С. 1096-1109.
3. Айда-Заде К.Р., О численном решении нагруженных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с неразделенными многоточечными и интегральными условиями [Текст] / К.Р. Айда-Заде, В.М. Абдуллаев //Сиб. журн. Вычисл.матем. - 2014. - Т.17. - №1. - С.1-16.
4. Акбаров Р. Нагруженная краевая задача сопряжения обобщенных аналитических функций с дополнительными заданиями граничных моментов [Текст] / Р. Акбаров //ДАН РТ, 2008- Т. 51. № 9,- С. 633 - 637.
5. Акбаров Р. Нагруженная смешанная краевая задача с дополнительными заданиями граничных моментов [Текст] / Р. Акбаров // ДАН РТ, 2008, -Т. 51.- № 11, - С. 797- 802.
6. Аттаев А.Х. О некоторых задачах для нагруженного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка [Текст] / А.Х. Аттаев // Вестник Краунц. физ-мат. науки 2016.- №4-1(16). - С.9-14.
7. Ахиезер И.И. Элементы теории эллиптических функций [Текст] / И.И. Ахиезер. - М.: Наука, 1970. - 304 с.
8. Байзаев С. О необходимых и достаточных условиях существования синфического решения неоднородной системы Коши – Римана [Текст] / С. Байзаев, Г.Э. Гришина, Э.М. Мухаммадиев // Дифференциальные уравнения - 2018. - Т. 54. - №2. - С. 1 - 13.
9. Байзаев С. Об ограниченных решениях одного класса переопределенных систем уравнений в частных производных [Текст]

/С.Байзаев, М.А.Рахимова // Ученые записки Худжандского государственного Университета им. академика Б.Гафурова. серия: Естественные и экономические науки. 2016. - Т. 38. - №3. - С. 8-15.

10. Байзаев С. Эллиптические системы с ограниченными коэффициентами на плоскости [Текст] / С. Байзаев. - Новосибирск: Препринт, 1999г. - 74с.

11. Берс Л. Уравнения с частными производными [Текст] / Л. Берс, Ф. Джон, М. Шахтер. - М.: Мир, 1966. - 351 с.

12. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных [Текст] / А.В.Бицадзе -М., 1981. - 448 с.

13. Бицадзе А.В. Сборник задач по уравнениям математической физики [Текст] /А.В. Бицадзе, Д.Ф. Колинченко. - М.: «Наука», изд-во второе, -1985. - 432 с.

14. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных [Текст] /А.В. Бицадзе. - М.: Наука, 1981. - 448 с.

15. Бозиев О.Л. Краевые задачи для некоторых классов нагруженных уравнений гиперболического типа [Текст] / О.Л. Бозиев - Дис.. канд. физ.-мат. наук. - Нальчик, 2000. - 94 с.

16. Борисов В.Н., Нахушев, А.М. Краевые задачи для нагруженных параболических уравнений и их приложения к прогнозу уровня грунтовых вод [Текст] / Борисов В.Н. // Дифференц. уравнения. 1977. - Т. 13. - № 1. - С. 105 -110.

17. Бородин А.В. Дифференцируемость по параметру решений нелинейно нагруженных краевых задач для уравнений в частных производных второго порядка [Текст] / А.В. Бородин // Дифференц. уравнения. 1979. - Т. 15. -№ 1. - С. 18 – 26.

18. Бородин А.В. Дифференцируемость по параметру решений нелинейно нагруженных краевых задач для уравнений в частных производных второго порядка. I // Дифференциальные уравнения. 1979. - Т. 15, - №1. - С. 18-25.

19. Бородин А.В. Об одной оценке для эллиптических уравнений и ее приложений к нагруженным уравнениям // Дифференциальные уравнения. 1977. - Т. 13, - №1. - С. 17-22.
20. Борок В.М., Задача Коши для линейных нагруженных дифференциальных уравнений. 1. единственность // Известия вузов. Математика. 1981. - №9. - С. 5-12.
21. Борок В.М., О единственности решения задачи Коши для систем линейных нагруженных уравнений // Украинский математический журнал. 1985. - Т. 37, - №1. - С. 108-109.
22. Борок М.В., Задача Коши для линейных нагруженных дифференциальных уравнений. II. Корректность // Известия вузов. Математика. 1981. - №10. - С. 3-9.
23. Борок М.В., Задача Коши для одного класса нагруженных уравнений // Успехи математических наук. 1979. - Т. - 34. - №1(205). - С. 221-222.
24. Будак Б.М., Об одном классе обратных краевых задач с неизвестными коэффициентами [Текст] / Б.М. Будак, А.Д. Искендеров, // Докл. АН СССР. - 1967. - Т. 176. - № 1. - С. 20 – 24.
25. Векуа И.Н. Новые методы решения эллиптических уравнений [Текст] / И.Н. Векуа. - М.:1948. - 296 с.
26. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции [Текст] / И.Н. Векуа. - М.: Физ-мат.гиз, 1959. - 628 с.
27. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции [Текст] / И.Н. Векуа. - М.: Наука, 1988. - 512 с.
28. Виноградов В.С. Исследование граничных задач для эллиптических систем первого порядка: автореферат дис. на учёной степени д.ф.-м., наук [Текст] / В.С. Виноградов. - Москва: МИ им. В.А. Стеклова АН СССР. - 1972. - 24 с.

29. Виноградов В.С. О теоремах типа Лиувилля для уравнения обобщенных аналитических [Текст] / В.С. Виноградов // Дифф. уравн. 1980. - Т. XVI. - № 1. - С. 42-46.

30. Виноградов В.С. Об одной граничной задаче для эллиптической системы специального вида [Текст] / В.С. Виноградов // Дифф. уравн. 1971. - Т. VII. - № 7. - С. 1226-1234.

31. Волковский Л.И. Сборник задач по теории функции комплексного переменного [Текст] / Л.И. Волковский, Г.Л. Лунц, И.Т. Араманович. - М.: «Наука», 1970. - 521с.

32. Габиб-Заде А.Ш. Исследование одного класса линейных и нелинейных нагруженных интегральных уравнений с различными параметрами [Текст] / А.Ш. Габиб-Заде // Ученые записки АГУ. Сер. физ-мат. и хим. наук. - Баку. - 1958. - № 1. - С. 41 - 59.

33. Гаюров А.Т. Двоякопериодические обобщённые аналитические функции второго рода [Текст] / А.Т. Гаюров // Вестник ТНУ, Серия естественных наук. - 2015. - № 1-1. - С. 36 - 40.

34. Гурвиц А. Теория функций [Текст] / А. Гурвиц, Р. Курант. - М.: Наука, 1968. - 648 с.

35. Гюнтер Н.М. *Studia Mathematica*. 1932. - Т. - IV.

36. Джабборов А.А. Априорные оценки и существование ограниченных во всей плоскости решений вазилинейных эллиптических систем первого и второго порядка: автореф. дис. к.ф.-м. наук [Текст] / А.А. Джабборов. - Душанбе., 2006. - 20 с.

37. Дженалиев М.Т. Нагруженные уравнения как возмущение дифференциальных уравнений [Текст] / М.Т. Дженалиев - Алматы: Гылым, 2010. - 336с.

38. Дженалиев М.Т. К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений. Алматы: Компьютерный центр ИТПМ, - 1995. - 270 с.

39. Дженалиев М.Т. О нагруженных уравнениях с периодическими граничными условиями [Текст] / М.Т. Дженалиев// Труды Института математики НАН Беларуси. Минск. - 2001.-Т. 10. – С. 45 - 49.
40. Дженалиев М.Т., нагруженные уравнения как возмущения дифференциальных уравнений. Алматы: Ғылым, 2010. 334с.
41. Дженалиев М.Т. О разрешимости граничных задач для нагруженных уравнений [Текст] / М.Т. Дженалиев // Математический журнал.-2001. - Т1. - №1.- С. 21-29.
42. Джураев А.Д. Системы уравнений составного типа [Текст] / А.Д. Джураев. М.: Наука, 1972. -227 с.
43. Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач [Текст] / А.М. Денисов // М.: МГУ, 1994, с. 208.
44. Дикинов Х.Ж. Об одной краевой задаче для нагруженного уравнения теплопроводности [Текст] / Х.Ж. Дикинов, А.А. Кереев, А.М. Нахушев // Дифференц. уравнения. 1976. - Т.12. - № 1. - С. 177 – 179.
45. Искендеров А.Д. О первой краевой задаче для нагруженной системы квазилинейных параболических уравнений // Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7, №10. С. 1911-1913.
46. Искендеров А.Д. О смешанной задаче для нагруженных квазилинейных уравнений гиперболического типа // Докл. АН СССР. 1971. Т. 199, №6. С. 1237-1239.
47. Казиев В.М. Задача Гусса для одного нагруженного интегро-дифференциального уравнения //Дифференциальные уравнения. 1981. Т. 17, №2. С. 313-319.
48. Казиев В.М. Краевые задачи для нагруженных гиперболического и смешанного типов уравнений: дис. канд. физ.-мат. наук. [Текст] / В.М. Казиев // Нальчик, 1980. - 81 с.
49. Казиев В.М. О задаче Дарбу для одного нагруженного интегро-дифференциального уравнения второго порядка [Текст] / В.М. Казиев// Дифференц. уравнения. - 1978. - Т. 14. - № 1. - С. 181 - 185.

50. Кальменов Т. Ш. Критерий единственности решения задача Дарбу для одного вырождающегося гиперболического уравнения [Текст] / Т. Ш. Кальменов // Дифференц. уравнения. - 1971. - Т. 7. - №1.

51. Каримова Н. Нахождение решений неоднородного линейного дифференциального уравнения первого порядка с нагруженными свободными членами и с дополнительными условиями / Р.Акбаров, Н.Каримова // Доклады Академии наук Республики Таджикистан.-2013.-Т.56.-№1.-С.23-25.

52. Каримова Н. О решении линейного неоднородного дифференциального уравнения n -го порядка с нагруженными свободными членами и с дополнительными условиями / Р.Акбаров, Н.Каримова // Доклады Академии наук Республики Таджикистан.-2013.-Т.56.-№10.-С.773-778.

53. Каримова Н. О решении неоднородных линейных дифференциальных уравнений n -го порядка с нагруженными свободными членами и с некоторыми дополнительными условиями / Н.Каримова // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук.-2016.-№1 | 1 (192).- С.26-30.

54. Каримова Н. Интегральное представление решений неоднородных линейных дифференциальных уравнений первого порядка с одной сингулярной точкой, нагруженных свободными членами и с дополнительными условиями / Н.Каримова // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. -2018. -№2. -С.34-37.

55. Каримова Н.Ш. К теории одного класса вырождающиеся нагруженного дифференциального уравнения с интегральными условиями / Н.Раджабов, Н.Ш.Каримова // Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н., 2020. -№3 (160).-С.7-14.

56. Келдыш М.В. О некоторых случаях вырождения уравнения эллиптического типа на границе области [Текст] / М.В. Келдыш // Докл. АН СССР. – 1951. – Т. 77. - №2. – С. 181 – 183.

57. Керефов А.А. Краевые задачи для нагруженных параболических уравнений // Сборник научных трудов (межвуз). «Нелокальные задачи и их применения к автоматизированным системам». Нальчик: КБГУ, 1989. С. 136.

58. Кожанов А.И. Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи // Журнал вычисл. матем. и мат. физики. 2004. Т. 44. №4. С. 694-716.

59. Кожанов А.И. Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи [Текст] / А.И.Кожанов // ЖВМ и МФ. 2004. - Т. 44. № 4. - С. 694 - 716.

60. Кожанов А.И. Обратная задача для параболического уравнения с неизвестным коэффициентом специального типа // Несинфические уравнения математической физики: Труды семинара, посвященного 60-летию В.Н. Брагова. Новосибирск: Изд-во Института математики им. С.Л. Соболева, 2005. С. 167176.

61. Кожанов А.И. Уравнения составного типа и обратные задачи // Материалы Международного Российско-Азербайджанского симпозиума «Уравнения смешенного типа и родственные проблемы анализа и информатика» и VI Школы молодых ученых «Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатика». Эльбурс, 12-17 мая 2008 г. С. 95.

62. Кожанов А.И. Нелинейные обратные задачи для параболических и гиперболических уравнений, новые постановки, новые результаты //Математика в современном мире. Межд. конф., посвященная 60 - летию института математики им. С.Л. Соболева, Новосибирск, Россия, 14-19 авг., 2017, с. 312

63. Колосов Г.В. Применение комплексной переменной к теории упругости [Текст] / Г.В. Колосов. - М.: - Л - ОНТИ, 1935. - 224 с.

64. Лаврентьев М.А. Методы теории функции комплексного переменного [Текст] / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. - М.: 1973. - 736 с.
65. Ленг С. Эллиптические функции [Текст] / С. Ленг. - М.: Наука, 1984. - 311 с.
66. Лизоркин П.И. Курс дифференциальных и интегральных уравнений с дополнительными главами анализа [Текст] / П.И. Лизоркин. - М.: Наука, 1981. - 384 с.
67. Ломов И.С. Нагруженные дифференциальные операторы: сходимость спектральных разложений [Текст] / И.С. Ломов // Дифференц. уравнения. - 2014. - Т.50. - №8. - С. 1077-1086.
68. Мамфорд Д. Лекции о тета-функциях [Текст] / Д. Мамфорд. - М.: Мир, 1988.- 446 с.
69. Монахов В.И. Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений // Новосибирск: СО Наука, 1977, с. 424.
70. Михайлов Л. Г. Новый класс особых интегральных уравнений и его применение к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами [Текст] / Л.Г. Михайлов. -Душанбе: Дониш, 1963.-184 с.
71. Мухамадиев Э. М. Об обратимости дифференциальных операторов в частных производных эллиптического типа [Текст] / Э.М. Мухамадиев // ДАН СССР. – 1972. –Т.205. – С. 1292-1295.
72. Мухаммадиев Э.М. Избранные труды [Текст] / Э. Мухаммадиев // Вологда: ВОТГУ, 2011. – с. 550.
73. Назаров Н.Н. Об одном новом классе линейных интегральных уравнений [Текст] / Н.Н. Назаров // Труды Института математики и механики АН УЗССР. -Ташкент, 1948. Вып. № 4. С. 77-106.
74. Назаров Н.Н. Об одном новом классе линейных интегральных уравнений // Труды Ин-та мат. и мех. АН УЗССР. 1948. Вып.4. С. 77-106.
75. Нахушев А.М. К теории нагруженных уравнений в частных производных [Текст] / А.М. Нахушев // Short communication (Abstracts). Section 11 Partial Differential Equations. Warszawa, 1982. - P. 52.

76. Нахушев А.М. Краевые задачи для нагруженного интегро-дифференциального уравнения гиперболического типа и некоторые их приложения к прогнозу почвенной влаги [Текст] / А.М. Нахушев. // Дифференц. уравнения. - 1979. - Т. 15. - № 1. - С. 96 - 105.

77. Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их приложения [Текст] / А.М. Нахушев // Дифференц. уравнения. - 1983. - Т. 19. - № 1. - С. 86 - 94.

78. Нахушев А.М. Нелокальная задача и задача Гурса для нагруженного уравнения гиперболического типа и их приложения к прогнозу почвенной влаги [Текст] / А.М. Нахушев // Докл. АН СССР. 1978. - Т. 242. - № 5. - С. 1008 – 1011.

79. Нахушев А.М. О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа [Текст] / А.М. Нахушев // Дифференц. уравнения. - 1969. - Т. 5. - № 1. - С. 44 - 59.

80. Нахушев А.М. О нелокальных краевых задачах со смещением и их связи с нагруженными уравнениями [Текст] / А.М. Нахушев // Дифференц. уравнения. - 1985. - Т. 21. - № 1. - С. 92 - 101.

81. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. М., 1995. 301 с.

82. Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных [Текст] / А.М. Нахушев. - М.: Наука, 2006. – 287с.

83. Нахушев А.М. К теории нагруженных уравнений // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2008. Т. 10, №2.

84. Нахушев А.М. К теории нагруженных уравнений в частных производных // Short communication (Abstracts). Section 11. Partial Differential Equations. 1982.

85. Нахушев А.М. К теории нагруженных уравнений с частными производными // Материалы Международного Российско-Абхазского симпозиума «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики». Начальчик-Эльбрус, 17-22 мая 2009г.

86. Нахушев А.М. К теории нагруженных уравнений с частными производными // Труды Международной научной конференции «Современные проблемы вычислительной математики и математической физики», посвященной памяти академика А.А. Самарского. Москва, МГУ, 16-18 июня 2009г. академии наук. 2008. Т. 10, №2.

87. Нахушев А.М. Нагруженные дифференциальные уравнения и их приложения // Труды Всесоюзного симпозиума. Тбилиси, 1982. С. 183-188.

88. Нахушев А.М. Нагруженные дифференциальные уравнения и их приложения. Дифференциальные уравнения в частных производных и их приложения // Труды Всесоюзного симпозиума. Тбилиси, 1986.

89. Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их приложения // Дифференциальные уравнения. 1983. Т. 19, №1. С. 86-94.

90. Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их применение. - М.: Наука, 2012. - 231 с.

91. Нахушев А.М. О нелокальных краевых задачах со смещением и их связи с нагруженными уравнениями // Дифференциальные уравнения. 1985. Т. 21, №1. С. 92-102.

92. Нахушев А.М. Общие сведения о нагруженных уравнениях // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия математическая. 2008. №2(8).

93. Петровский Г. И. Лекции об уравнениях в частными производными [Текст] / Г.И. Петровский. - М.: Физматгиз, 1961. - 498 с.

94. Показеев В.И. Аналитические функции Аппеля в случае двоякопериодической группы [Текст] / В.И. Показеев // Деп., ВИНТИ 18.07.1983. - Т.43. - №40. - С. 25-33.

95. Показеев В.И. Об одном представлении обобщенных аналитических функций / В. И. Показеев // ДАН СССР. - 1963. - Т.155. - №3. - С. 528-531.

96. Показеев В.И. Простые обобщённые аналитические функции, автоморфные относительно элементарных групп. 1. Двоякопериодические

решения [Текст] / В.И. Показеев, Д.С. Сафаров // Изд-во АН РТ, отд. физ. мат и хим. наук - 1992.- Т. 4(4).- С.15-21.

97. Пулькина Л.С. Краевые задачи для гиперболического уравнения с нелокальными условиями I и II рода [Текст] / Л.С. Пулькина // Изв. вузов. Матем. - 2012. - №4. -С. 74-83.

98. Пулькина Л.С. Нелокальная задача с интегральным условием для гиперболических уравнений [Текст] / Л.С. Пулькина // Дифференц. уравнения. – 2004. - Т. 40. - № 7. - С. 887-892.

99. Прилепко А.И. Обратные задачи для уравнения первого порядка и задачи оптимального управления в банаховых пространствах // Международная конференция математика в современном мире, посвящённая 60–летию Института математики им. С.Л. Соболева, Новосибирск, Россия, 14-19 августа 2017, с. 321

100. Раджабов Н.Р. Интегральные представления и граничные задачи для одного класса систем дифференциальных уравнений высшего порядка [Текст] / Н.Р. Раджабов, А. Расулов // ДАН СССР. - 1985. -Т. 282. - №4. – С. 795-799.

101. Рамазанов М.И. О нелокальной задаче для нагруженного гипербола эллиптического типа в прямоугольной области [Текст] / М.И Рамазанов.// Математический журнал. 2002. - Т. 2. - № 4(6). - С. 75 – 81.

102. Расулов А.Б. В сб.: Дифференциальные и интегральные уравнения [Текст] / А.Б. Расулов, Н. Раджабов. - Душанбе, 1980. - вып.3 - С.72-76.

103. Сабитов К. Б. Начально-граничная задача для параболо гиперболического уравнения с нагруженными слагаемыми [Текст] / К. Б. Сабитов // Изв. вузов. Матем.- 2015. -№6. -С. 31-42.

104. Саидназаров Р.С. Обобщенные двоякопериодические решения одного класса эллиптических систем второго порядка [Текст] / Р.С. Саидназаров, Д.С. Сафаров // ДАН РТ.– 2013.– Т. 56. - №10. - С.779-788.

105. Сафаров Д.С. Двоякопериодические обобщенные аналитические функции и их приложения: дис. д.ф.-м., наук [Текст] / Д.С. Сафаров. – Душанбе, 2010. – 294 с.
106. [Сафаров Д.С. О двоякопериодических обобщенных голоморфных векторах [Текст] / Д.С. Сафаров //ДАН Тадж., ССР. - 1982. - Т. 25. - №4. - С.
107. Сафаров Д.С. Двоякопериодические обобщённые аналитические функции и их приложения [Текст] / Д.С. Сафаров. - Душанбе: Дониш, 2012. - 190 с.
108. Сафаров Д.С. Двоякопериодические решения для одного класса эллиптических систем второго порядка [Текст] / Д.С. Сафаров //Материалы международной конференции «Дифференциальные и интегральные уравнения и смежные вопросы анализа». Душанбе. –2005. – С.174 - 175.
109. Сафаров Д.С. Двоякопериодическое решение нелинейных дифференциальных уравнений. Алматы,1995. - 270 с.
110. Сафаров Д.С. Периодические решения эллиптических систем первого порядка [Текст] / Д.С. Сафаров //Дифферен. уравнения. -1981.- Т.17. - № 8 - С. 1468-1477.
111. Сафаров Д.С. Двоякопериодические решения равномерно эллиптической системы первого порядка на плоскости / Доклады АН, Россия, 2010, т. 430, №4, с. 454-457.
112. Сафаров Д.С. Двоякопериодические обобщенные аналитические функции и их приложения // Душанбе: Дониш, 2-ое издание, 2021, с. 230.
113. Сафаров Д.С. Двоякопериодические решения равномерно эллиптической системы первого порядка / ДАН РТ, 2009, т. 52, №6, с. 425-430.
114. Сербина Л.И. Нелокальные математические модели процессов переноса в системах с фрактальной структурой [Текст] / Сербина Л.И. - Нальчик, 2002. - 144 с.

115. Смирнов В.И. Курс высшей математики [Текст] / В.И. - Смирнов Т.2. М., 1974. - 655 с.
116. Солдатов А.П. Метод теории функций в краевых задачах на плоскости. 1. Гладкий случай. [Текст] / А.П Солдатов. Изд-во. АН СССР. сер. матем. -1991. - Т. 55. - № 5. - С.1070-1100.
117. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений [Текст] / В.В. Степанов// М.: Физ-мат. гиз, 1959. – 468с.
118. Сайфуллоева Р.Р. Задача определения некоторого неизвестного параметра в уравнении Соболевского типа [Текст] / Там же, с. 247
119. Токова А.А. Краевая задача для одного нагруженного дифференциального уравнения // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2005. Т. 7, №2. С. 56-61.
120. Токова А.А. О первой краевой задаче для одного нагруженного дифференциального уравнения // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2005. Т. 8, №1. С. 87-91.
121. Уитекер Е.Т. Курс современного анализа, часть 2. [Текст] / Е.Т. Уитекер, Г.Н. Ватсон // Перевод с английского под редакцией С.В. Широкова. Гос., изд-во физико–математической литературы. - Москва, - 1963. – 515 с.
122. Усмонов, З.Д. Обобщённые системы Коши – Римана с сингулярной точкой [Текст] / З.Д. Усмонову - Душанбе: Математический институт с ВЦ АН Тадж. ССР., 1993. – 244с.
123. Хо Хон Сун Задача Дирихле для одной системы нагруженных уравнений первого порядка. Нелокальные задачи и их приложения к автоматизированным системам // Межвуз. Сборник. Нальчик: КБГУ, 1989. С. 258-264.
124. Хо Хон Сун Задача Трикоми для нагруженной системы Эйлера-Дарбу-Пуассона. Нальчик, 1989. 16 с. Деп. в ВИНТИ 31.10.90 г., №546-890.

125. Хо Хон Сун Линейные краевые задачи для систем нагруженных дифференциальных уравнений первого порядка: Дис... канд.ф.-мат. наук. Нальчик, 1990. 87с.
126. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Ч.1. Функции нескольких переменных [Текст] / Б.В. Шабат. - М.: Наука, - 1976. – 400 с.
127. Эшдавлатов Э. Некоторые классы нагруженных уравнений с различными параметрами [Текст] / Э. Эшдавлатов -Дис. канд. физ.-мат. наук. Самарканд, 1979. - 104 с.
128. Bers L. Theory of pseudo analytic functions / L. Bers // New York. - 1958. -398 pp.
129. Knecher A. Belastete Integralgleichungen [Текст] / A. Knecher // Rendiconti del Circolo Mathematiko di Palermo. 38. 1914. - P. 169 – 197.
130. Knecher A. Die Integralgleichungen und ihre Anwendung in der matem. Phusik, 1922.
131. Krall A.M. The development of general differtial and general differential boundary systems // Rock. Moun. J. Math. 1975. V. 5, №4. P. 493-542.
132. Prilepko A.I. Methohs fov soluing inlerse problems in Mathematial physics // New Vork, 2000, 709.
133. Safarov D.S. On Double-Periodic Solutions of First Order elliptic Systems [Текст] / D.S. Safarov // Complex Variables. - 1994. -Vol.26. –PP. 177-187.
134. Safarov, D. S. Double-Periodic Solutionsof a Nonlinear Elliptic Second - Order Systems [Текст] / D. S. Safarov, M. S Shodiev // Lobachevskii Journal of Maathemftics, Pleiades Publishing, Ltd. -2018. -Vol. 39. - №2. -PP. 263 – 265.

ПЕРЕЧЕНЬ НАУЧНЫХ ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ УЧЁНОЙ СТЕПЕНИ

а) Статьи, опубликованные в рецензируемых изданиях КОА при Президенте Республики Таджикистан:

[1-А]. Кулобиев М.А. Двоякопериодическое решение нагруженного уравнения обобщенных аналитических функций / М. Кулобиев // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. -2019.- №3.-С.51-56.

[2-А]. Кулобиев М.А. Двоякопериодическое решение одной нагруженной квазилинейной системы уравнений первого порядка / М. Кулобиев // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. -2021.- №1.-С.102-110.

[3-А]. Кулобиев М.А. Двоякопериодические решения для равномерно эллиптической системы уравнений первого порядка на плоскости С нагруженным членом / Сафаров Д.С., Кулобиев М.А. // Вестник Бохтарского государственного университета имени Носира Хусрава. Серия естественных наук.-2022.- №2/1(96). С. 14-18.

[4-А]. Кулобиев М.А. Двоякопериодические решения уравнения обобщенных аналитических функций нагруженным членом / Д. Сафаров, М. Кулобиев // Вестник Бохтарского государственного университета имени Носира Хусрава. Серия естественных наук.-2022.- №2/3(102). С. 5-8.

[5-А]. Кулобиев М.А. Задача определения некоторого неизвестного параметра для квазилинейной равномерно эллиптической системы уравнений первого порядка на плоскости в классе двоякопериодических функций / Д.С. Сафаров., , М.А. Кулобиев // Известия национальной академии наук Таджикистан.-2023.-№1 (190) .-С.15-25.

б) Статьи, опубликованные в других изданиях:

[6-А]. Кулобиев М. Двоякопериодическое решение нагруженного уравнения обобщенных аналитических функций / Д. Сафаров // Вестник

Бохтарского государственного университета. Серия естественных наук. -2019. - №2/3(66). - С.5-8.

[7-А]. Кулобиев М. Двойкопериодическое решение нагруженного уравнения обобщенных аналитических функций / Д.С. Сафаров, М.А. Кулобиев //Материалы международной научно-практической конференции «Современные проблемы математики и методика её преподавания» посвященная 25-летию Конституции Республики Таджикистан и 80-летию доктора педагогических наук, профессора Шарифзода Джумъа Шариф. Бохтар, (18-19 октября 2019 г)- С.132-134.

[8-А]. Кулобиев М. Двойкопериодические решения нагруженного уравнения обобщенных аналитических функций / Д.С. Сафаров, М.А. Кулобиев //Материалы республиканской научно-практической конференции посвященной 80-летию д.ф.-м.н., профессора Рахмат Акбаров. (г.Куляб., 2019). -С.89-92.

[9-А]. Кулобиев М.А. Функсияҳои умумикардашудаи аналитики дудаврдошта бо сарбории иловагӣ / Д.С. Сафаров, М.А. Кулобиев // маводи конференсияи илмӣ-амалии ҷумҳуриявӣ дар мавзӯи «Масоили мубрами математика ва таълими он» бахшида ба бистсолаи омузиш ва рушди фанҳои табиатшиносӣ, дақиқ ва риёзи дар соҳаи илму маориф (2020-2040) ва 70-солагии корманди шоистаи Тоҷикистон, доктори илмҳои педагогӣ, профессор А.Э. Сатторов, Донишгоҳи давлатии Бохтар, соли 2020, сах. 55-57

[10-А]. Кулобиев М.А. Задача определения неизвестного коэффициента в уравнении обобщенных аналитических функций типа Риккати / М.А. Кулобиев // Сборник материалов Республиканской научно-практической конференции, посвященной 30-летию независимости Республики Таджикистан и 25-летию Российско-Таджикского (Славянского) университета, “Актуальные проблемы точных наук и информационных технологий” (Душанбе. - 28 мая 2021г.).— С.181-184.

[11-А]. Кулобиев М.А. Двоякопериодические решения для равномерно эллиптической системы уравнений первого порядка на плоскости S нагруженными членами / Д.С. Сафаров, М.А. Кулобиев // Сборник статей II международной научно-практической конференции на тему “О применении дифференциальных уравнений при решении прикладных задач” 4 ноября 2021г. С.-160-164, Душанбе – 2021

[12-А]. Кулобиев М.А. Задача определения неизвестного параметра в уравнении обобщенных аналитических функций в классе двоякопериодических функций / Д.С. Сафаров, М.А. Кулобиев // “Актуальные проблемы современной математики”, Сборник статей республиканской научно-практической конференции посвященной “20-летию изучения и развития естественных, точных и математических наук в сфере науки и образования (2020-2040 годы)” и 50-летию кафедры высшей математики ТНУ. (Душанбе, 14 октября 2022 года), стр. 83-85.

[13-А]. Кулобиев М.А. Задача нахождения Двоякопериодических решений для уравнения обобщенных аналитических функций с нагруженным членом и неизвестным параметром, содержащее в свободной правой части / М.А. Кулобиев //Материалы международной научно-практической конференции, “Комплексный анализ и его приложения”, посвящённой “Двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических наук в сфере науки и образования”, 75-летию Заслуженного работника Таджикистана, чл. Корр. НАНТ, д.ф.-м.н., профессора И.К. Курбанова и 70-летию д.ф.-м.н., профессора Дж.С. Сафарова, (г.Бохтар, 19 ноября 2022г.). - С.-102-103.

[14-А]. Кулобиев М.А. Двоякопериодические решения нагруженного уравнения обобщенных аналитических функций с постоянными коэффициентами /М.А. Кулобиев //Материалы международной научно-практической конференции, “Развитие математических, точных и естественных наук в современных условиях: Проблемы и перспективы”, (Дангара, 28-29 апреля 2023 года) -С. 245-248.

[15-А]. Кулобиев М.А. Двоякопериодические решения нагруженного уравнения обобщенных аналитических функций с постоянными коэффициентами /М.А. Кулобиев //Материалы международной научно-практической конференции, “Развитие математических, точных и естественных наук в современных условиях: Проблемы и перспективы”, (Дангара, 28-29 апреля 2023 года) -С. 245-248.

[16-А]. Кулобиев М.А. Двоякопериодические решения обобщённых аналитических функций со многими нагруженными членами /М.А. Кулобиев // Материалы международной конференции, посвящённой 50-летию Института математики им. А.Джурваева Национальной академии наук Таджикистана, (Душанбе, 26-27 мая 2023 года) –С. 110-111.