

Отзыв

научного руководителя на диссертационную работу Кулобиева Мирзо Ашурмадовича на тему «Двоякопериодические решения для нагруженных уравнений обобщенных аналитических функций с дополнительными условиями»

В теории дифференциальных уравнений не менее важным разделом являются нагруженные дифференциальные уравнения.

Интерес к нагруженным дифференциальным уравнениям, содержащих значения или её производные на многообразиях меньше размерности области определения искомой функции, обуславливается тем, что решение многих важных задач математической физики, математической биологии, экологии, химии и задач долгопрогнозирования по оптимальному уравнению сводится к изучению таких уравнений.

Некоторые учёные под нагруженным дифференциальным уравнением понимают дифференциальное уравнение, в которое входят значения искомой функции и её производных в фиксированных точках области его задания. Также, понимают дифференциальное уравнение с неизвестными параметрами входящих в свободный член правой части. При этом на решения налагают дополнительные условия переопределения в виде интегрального условия или точечные значения искомой функции.

В монографии Нахушева А.М. «Нагруженные уравнения и их применение». – Москва, Наука, 2012, 232 с., изучены некоторые классы уравнения обобщенных аналитических функций вида

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} + a(z)w + b(z)\bar{w} + c(z)w(\operatorname{Re} z) + d(z)w(\operatorname{Im} z) + \\ + \sum_{j=1}^p A_j(z)w(z_j) + \sum_{j=1}^q B_j(z)\overline{w(z_j)} = f(z),$$

где $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$ – оператор Коши-Римана, $w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ – искомая функция, z_j – фиксированные точки.

Это комплексное уравнение эквивалентно системе двух уравнений в частных производных первого порядка с двумя неизвестными $u(x, y)$, $v(x, y)$ и её значениях в фиксированных точках.

Следует отметить, что задачи, связанные с нагруженными уравнениями не являются классическими, так как наличие нагруженного слагаемого не всегда позволяет использовать известные ранее методы исследования. Поэтому приходится искать новые методы решения и в этом, заключается исследования такого класса уравнений.

Нужно заметить, что уравнение.

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} + a(z)w + b(z)\bar{w} = f(z),$$

как частный случай выше приведенного имеет важные приложения в задачах механики, физики и геометрии, что свидетельствует из многочисленных опубликованных статей и написанных монографий, как зарубежном, так в и нашей республике (например в монографиях академиков Джураева А.Д., Михайлова Л. Г., Раджабова Н., Усмонова З.Д. и др. математиков).

В диссертации Кулобиева М.А. исследуются следующие нагруженные уравнения

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} + a(z)w + \sum_{k=1}^n a_k w(z_k) = f(z) + \sum_{j=1}^m d_j f_j(z), \quad (1)$$

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} + aw(z) + \left(b_0(z) + \sum_{k=1}^m c_k b_k(z) \right) w^n(z) = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} - q(z) \frac{\partial w}{\partial z} + a(z)w + \sum_{k=1}^n a_k w(z_k) = f(z) + \sum_{j=1}^m d_j f_j(z), \quad (3)$$

где $n > 1, m > 1$, с дополнительными условиями переопределения

$$w(t_j) = e_j, \quad j = \overline{1, s}, \quad (4)$$

t_j — точки из области определения искомого решения, Ω — основной параллелограмм периодов.

В уравнении (1) — (3) неизвестными вместе с $w(z), w(z_j)$ являются и постоянные d_k, c_k . В условии (4) e_j — известные постоянные. В уравнении (3) функции $q(z)$ — двоякопериодические и удовлетворяют условию $|q(z)| \leq q_0 < 1$ (равномерной и эллиптичности).

Диссертационная работа состоит из четырёх глав и обсуждения полученных результатов.

Первая глава состоит из введения и обзора литературных источников по теме диссертации.

Вторая глава работы посвящена исследованию задач (1); (4); (2); (4) и состоит из восьми параграфов.

В §§ 2.1 — 2.2 исследуется уравнение (1) в случае, когда $a(z) \equiv a, a$ — постоянная и $d_k = 0$.

Сперва изучается случай $n = 1$ и затем в зависимости от условия $a \in \Gamma_1$ или $a \notin \Gamma_1$, где Γ_1 — решетка $\Gamma_1 = \frac{\pi}{|\Omega_0|} \{m_1 h_1 + m_2 h_2 - m_1, m_2 - \text{целый}\}$ находится условия однозначной разрешимости и выписывается явный вид решения с помощью интегральных операторов $T_\zeta \rho, T_\sigma \rho$, с ядрами эллиптических функций Вейерштрасса $\zeta(z)$ и $\sigma(z)$.

В §§ 2.3 – §§2.4 задача (1), (4) исследована в случае с переменными коэффициентами. В зависимости от условия $a_0 \in \Gamma$ или $a_0 \notin \Gamma$, где

$$\Gamma = \{m_1 h_1 + m_2 h_2 - m_1, m_2 - \text{целый}\},$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} a(z) d\Omega,$$

найжены условия однозначной разрешимости, выписаны явные решения и доказаны соответствующие теоремы.

В § 2.5 изучена задача (1), (4) в случае, когда все $a_k = 0$, $c_k \neq 0$, ($1 \leq k \leq m$) и $a(z) \equiv a$, a – постоянная.

Найжены условия однозначной разрешимости задачи и доказаны соответствующие теоремы. Выписан явный вид решения, когда $a \in \Gamma_1$ и $a \notin \Gamma_1$.

В § 2.6 исследуется задача (2), (4). Показано, что если $n = 2$, то задачи (2), (4) эквивалентны задаче (1), (2) в котором $a_k = 0$ и $d_j \neq 0$.

Для случая постоянного a , когда $a \in \Gamma_1$ или $a \notin \Gamma_1$ найдено условие однозначной разрешимости в обоих случаях и доказаны соответствующие теоремы.

В каждом случае выписаны явного вида решения для рассматриваемых задач.

В § 2.7 изучается задача (1), (2) в общем виде, $a_k \neq 0$, $c_k \neq 0$, $k \geq 1$. Сперва изучается случай $k = 1$. Для этого случая $a_0 \in \Gamma$ полностью дано решение задачи. Случай $a_0 \notin \Gamma$ исследуются аналогично. Если $a_0 \notin \Gamma$, то $s = m + n$, при $a_0 \in \Gamma$ и $s = m + n + 1$, и ранг основной матрицы B : $\text{rang} B = m + n$, при $a_0 \notin \Gamma$ и $\text{rang} B = m + n + 1$, если $a_0 \in \Gamma$.

В § 2.7 изучается уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} + aw(z) + bw(z_0) + d\overline{w(z_0)} = f(z).$$

Когда $a = 0$ или $a \neq 0$ найдено решение с условием $w(z_1) = e$, $z_1 \neq z_0$. В случае $a = 0$ для однозначной разрешимости уравнения не нужно дополнительное условие. А в случае $a \neq 0$ разрешимость задач зависит от условия $a \in \Gamma_1$ или $a \notin \Gamma_1$. Затем изучается случай переменных коэффициентов и доказаны теоремы 2.8.4 – 2.8.6. Причем найден явный вид решения.

В третьей главе исследуется задачи (3), (4).

В первом параграфе получено решение неоднородного уравнения Бельтрами в классе C_*^1 с помощью обобщенной функции Вейерштрасса $\bar{\zeta}(z) = z(z + q\bar{z}) = \zeta(\omega)$, который носит вспомогательный характер, q – постоянная.

В § 3.2 найдено решение задачи (3), (4) сперва в случае, когда $n = 1$ и все $c_k = 0$. Здесь в отличие от случая $q = 0$ решение задач получается на плоскости квазипериодического гомеоморфизма уравнения Бельтрами. Интегральные операторы $T_\zeta^\omega \rho$ и $T_\sigma^\omega \rho$, также вычисляются на плоскости гомеоморфизма $\mathbb{C}_\omega$, $\omega(z) = z + q\bar{z}$, $|q| \neq 1$.

В интегралах $T_\zeta^\omega \rho$, $T_\sigma^\omega \rho$, вместо ядра $\zeta(z)$ и $\sigma(z)$ используются обобщенные функции Вейерштрасса

$$\tilde{\zeta}(z) = \zeta(z + q\bar{z}) = \zeta(\omega), \quad \tilde{\sigma}(z) = \sigma(z + q\bar{z}) = \sigma(\omega).$$

Находится условие однозначной разрешимости задачи и выписаны явный вид решения.

В § 3.3 находится двоякопериодические решения задачи (3), (4) в случае, когда $n = 1$, a — постоянная. При отображение $\omega(z) = z + q\bar{z}$, $|q| = 1$, решетка периодов $\Gamma = \{m_1 h_1 + m_2 h_2; m_1, m_2 — \text{целые}\}$ переходит на решетку $\Gamma' = \Gamma + q\bar{\Gamma} = \{m_1 h_1 + m_2 h_2 + q(m_1 \bar{h}_1 + m_2 \bar{h}_2); m_1, m_2 — \text{целые}\}$.

Условия разрешимости задачи зависит от случая: $a \in (1 - |q|^2)\Gamma'$ или $a \notin (1 - |q|^2)\Gamma'$.

Показано, что в случае $a \notin (1 - |q|^2)\Gamma'$ для однозначной разрешимости уравнения достаточно выполнение условия $a + b \neq 0$, без условия переопределения. Когда $a \in (1 - |q|^2)\Gamma'$, найдено условие однозначной разрешимости задачи с одним условием переопределения и доказана соответствующая теорема.

В § 3.4 найдено решение задачи (3), (4) в случае постоянных коэффициентов с многими n нагруженными членами, то есть, когда все $d_k = 0$ и a, a_k — постоянные. В зависимости от условия $a \notin (1 - |q|^2)\Gamma'$ или $a \in (1 - |q|^2)\Gamma'$ — решение задачи сводится к нахождению решений линейной алгебраической системы с некоторой матрицей B . Показано, что при $a \notin (1 - |q|^2)\Gamma'$ для однозначной разрешимости задачи необходимо и достаточно, чтобы $\text{rang} B = n$. В случае $a \in (1 - |q|^2)\Gamma'$ и при выполнении некоторого условия на правой части $f(z)$, для однозначной разрешимости должно выполняться условие $\text{rang} B = n + 1$, (то есть, условие в (4), $s = 1$).

В § 3.5 найдено решение задачи (3), (4) с постоянными коэффициентами в котором все $a_k = 0$, $c_k \neq 0$, и в условие (4), $s > 1$.

В случае $a \notin (1 - |q|^2)\Gamma'$ разрешимость задачи сводится к решению алгебраической системы уравнений с некоторой матрицей A размерность $n \times s$. Показано, что в этом случае для однозначной разрешимости задачи необходимо и достаточно, чтобы $s \geq n$ и $\text{rang} A = n$. Затем находится решение, когда $a \in (1 - |q|^2)\Gamma'$.

В § 3.6 находится решение обобщенного уравнения Бельтрами с нагруженными членами и с переменными коэффициентами.

Сперва, решение задачи приводится для случая $n = 1$, $d_k = 0$, так как, общий случай решается аналогичным образом.

Найдено условие разрешимости задачи и доказаны соответствующие теоремы об однозначной разрешимости. Для решения задачи используется построенный гомеоморфизм для уравнения Бельтрами, отображающий квазиконформно параллелограмм Ω с вершинами z_0 , $z_0 + h_1$, $z_0 + h_1 + h_2$, $z_0 + h_2$ в четырёхсторонник с вершинами $\omega(z_0)$, $\omega(z_0) + h'_1$, $\omega(z_0) + h'_1 + h'_2$, $\omega(z_0) + h'_2$. Выписаны решения при помощи интегральных операторов $\bar{T}_\zeta \rho$ и $\tilde{T}_\sigma \rho$ с ядрами $\tilde{\zeta}(z) = \zeta(\omega(z))$, $\tilde{\sigma}(z) = \sigma(\omega(z))$.

Все полученные результаты являются новыми и доказаны впервые.

Основные результаты диссертации своевременно опубликованы в 5 – и работах автора в рецензируемых изданиях рекомендованных ВАК при Президенте Республики Таджикистан. На основании вышеизложенного считаю, что диссертационная работа Кулобиева М.А. «Двоякопериодические решения для нагруженных уравнений обобщенных аналитических функций с дополнительными условиями», удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к диссертациям на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.3 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Научный руководитель,
доктор физико-математических наук,
по специальности 1.1.3 – дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление, профессор
735140, г. Бохтар, ул. Айни 67,
E-mail: safarov-5252@mail.ru

Подпись Дж.С. Сафарова
Заверяю.

Начальник ОК и СЧ БГУ им. Носира Хусрава

Сафаров Дж.С.

Нажмидинов М.М.



20.05.2025г.