

ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертацию Кулобизода Мирзо Ашурмад «Двоякопериодические решения для нагруженных уравнений обобщенных аналитических функций с дополнительными условиями», представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.3. - Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

1. Соответствие диссертации специальности и отрасли науки, по которым диссертация представляется к защите. Тема диссертации Кулобизода М.А. и её содержание соответствует специальности 1.1.3.- Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление, по которой диссертационному совету 6D.KOA-011 предоставлено право на рассмотрение и проведение защиты диссертаций. Работа соответствует паспорту данной научной специальности, её формуле, а также трём основным направлениям области исследования: 1) общая теория дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений; 2) начально-краевые и спектральные задачи для дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений; 3) нелинейные дифференциальные уравнения и систем нелинейных дифференциальных уравнений.

Диссертация Кулобизода М.А. относится к области фундаментальных математических исследований и соответствует приоритетным направлениям научной деятельности в Республике Таджикистан на 2021–2025 годы.

2. Актуальность темы исследования.

Диссертационная работа посвящена нахождению двоякопериодических решений для уравнения обобщенных аналитических с нагруженными членами, а также неизвестными параметрами в правой части, с дополнительными условиями переопределения. А также аналогичная задача (с такой постановкой) для равномерно эллиптической линейной системы и квазилинейной системы уравнений с дифференциальным оператором Бельтрами в главной части.

Исследуемые комплексные уравнения являются эллиптическими системами дифференциальных уравнений состоящей из двух вещественных уравнений на плоскости переменных (x, y) .

Нагруженные дифференциальные уравнения занимают важное место в теории дифференциальных уравнений. Интерес к нагруженным уравнениям обуславливается тем, что решение многих задач математической физики,

математической биологии, экологии, химии и задачи долгопрогнозирования по оптимальному управлению сводится к изучению таких уравнений.

В монографии А.М. Нахушева изучено уравнение обобщенных аналитических с нагруженными членами. В работах его учеников для нагруженных уравнения обобщенных аналитических функций исследованы граничные задачи Дирихле.

Исследуемые уравнения имеют важные приложения в задачах механики сплошных сред, задачи геометрии, теории упругости, газовой динамики и т.д.

Поэтому представляет интерес изучению уравнения обобщенных аналитических и равномерно эллиптической системы первого порядка на плоскости с нагруженными членами и дополнительными условиями в классе регулярных двоякопериодических функций и нахождение решения (единственного) в явном виде. Изучению исследуемых уравнений в диссертации без нагруженных членов в связи с многочисленными их приложениями посвящены десятки монографии и сотни научных статей. Однако по исследуемой задаче написаны лишь отдельные статьи и совсем мало изучены.

Поэтому исследуемая тема диссертационной работы Кулобизода М.А. является актуальным.

3. Степень научной новизны результатов диссертации и научных положений, выносимых на защиту

Все результаты полученные в диссертации автором самостоятельно являются новыми и заключаются в следующем:

1) для уравнения обобщенных аналитических функций с нагруженными членами и точечными условиями переопределения в терминах коэффициентов уравнения и нагруженных членов найдены необходимое и достаточное условие однозначной разрешимости задачи и явные виды решения посредством интегральными операторами с ядром эллиптические функции Вейерштрасса;

2) для уравнения обобщенных аналитических функций с нагруженными членами и неизвестными параметрами с дополнительными условиями найдены необходимые и достаточные условия обеспечивающие однозначной разрешимости задач. Выписаны явные формулы решения задачи;

3) для уравнения с главной частью оператором Бельтрами, с нагруженными членами и дополнительными условиями найдены необходимое и достаточное условия однозначной разрешимости. Выписаны

решения посредством интегральных операторов с ядрами обобщенных эллиптических функций Вейерштрасса ;

4) для уравнения с главной частью оператором Бельтрами в классе $\mathbb{C}_*^1$ с неизвестными параметрами в правой части и точечными условиями переопределения найдены необходимое и достаточное условие однозначной разрешимости задачи и выписаны явный вид решения.

4. Степень изученности научной темы. Степень достоверности результатов исследования обеспечивается использованием современных методов теории обобщенных аналитических функций комплексного и функционального анализа.

Все теоремы, леммы и выводы представленные в диссертации, строго доказаны и согласуются с известными результатами отечественных и зарубежных исследователей.

Достоверность результатов также подтверждается публикацией основных результатов в рецензируемых научных журналах, их апробацией на научных конференциях и возможность применения полученных результатов для дальнейшей развития теории нагруженных уравнений обобщенных аналитических функций.

5. Структура диссертации и объем. Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения и списка литературы из 134 наименований и 176 страниц машинописного текста, набранного в текстовом редакторе Microsoft Word. В диссертации применена сквозная нумерация теорем, замечаний и формул, имеющих тройную нумерацию в которой первая цифра совпадает с номером главы, вторая с номером параграфа, а третья порядковый номер теорем, замечаний или формул в данном параграфе.

Первая глава работы посвящена обзору и анализ литературы по теме диссертации. В основном приведены анализ работ, посвященных нагруженным дифференциальным уравнениям в частных производных, в частности с оператором Коши-Римана, а также некоторые сведения из теории двоякопериодических обобщенных аналитических функций.

Во второй главе работы исследуется задачи нахождения двоякопериодических решений с основными периодами $h_1, h_2, \operatorname{Im} \left(\frac{h_2}{h_1} \right) > 0$ для нагруженного уравнения

$$w_{\bar{z}} + aw(z) + \sum_{k=1}^n a_k w(z_k) = \sum_{k=1}^m c_k f_k(z) + f(z), \quad (1)$$

где $a = a(z), a_k = a_k(z), f(z), f_j(z)$ — заданные функции, $k = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}$, неизвестными вместе с решением $w(z)$ являются числа $w(z_k), c_j, k = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}$.

Требуется найти решение удовлетворяющие условиям переопределения

$$w(t_j) = e_j, \quad j = \overline{1, s}, \quad t_j \neq z_j. \quad (2)$$

Решение задачи (1), (2) ищется в классе C_*^1 регулярных (без полюсов) функций т.е. $w(z) \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, Ω — основной параллелограмм двоякопериодической группы

$$P = z + m_1 h_1 + m_2 h_2, \quad m_1, m_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Вводится обозначение

$$\Gamma = \{m_1 h_1 + m_2 h_2, \quad m_1, m_2 = \text{целые}\},$$

Γ — решетка периодов и $\Gamma_1 = \frac{\pi}{\Omega_0} \Gamma, \Omega_0 = \text{mes} \Omega = |h_1|^2 \text{Im} \left(\frac{h_2}{h_1} \right)$.

В §§2.1-2.2 уравнение (1) изучается в случае, когда $c_k = 0, k = \overline{1, m}$ и коэффициенты постоянные: $a(z) \equiv a, a_k(z) \equiv a_k$. Разрешимость этой задачи зависит от свойства число a : $a \notin \Gamma_1$ или $a \in \Gamma_1$.

Решая уравнения (1) методами работы Сафарова Д.С., при $a \notin \Gamma_1$, задача сводится к решению системы алгебраических уравнений с n неизвестными $w(z_1), w(z_2), \dots, w(z_n)$. Вопрос о разрешимости зависит от ранга некоторой матрицы A , составленной из коэффициентов уравнения. Показано, что при $\text{rang} A = n$ уравнение (1) однозначно разрешимо при любой правой части $f(z) \in H_*^\alpha, H_*^\alpha$ — пространство Гёльдера двоякопериодических функций с периодами $h_1, h_2, \alpha \in (0, 1)$. Решение выписывается в явном виде с помощью интегральных операторов $T_\sigma \rho(z), T_\zeta \rho(z)$, где $\zeta(z)$ — дзета, $\sigma(z)$ — сигма функций Вейерштрасса. В случае $a \notin \Gamma_1$ условия (2) не ставятся на решение уравнения.

При $a \in \Gamma_1$, ставится одно условие вида (2), $s = 1$. В этом случае разрешимость задачи (1), (2) сводится к решению системы алгебраических уравнений с $n + 1$ неизвестными: $w(z_1), w(z_2), \dots, w(z_n), c$ — неизвестная постоянная. Показано, что когда $\text{rang} A = n + 1$, то задача (1), (2) при $a \in \Gamma_1$ имеет единственное решение и решение найдено в явном виде.

В §§2.3-2.4 задача (1), (2) в классе C_*^1 исследована для переменных коэффициентов $a(z), a_k(z), k = \overline{1, n}$. Когда коэффициенты $a(z), a_k(z), f(z) \in H_*^\alpha$, разрешимость задачи (1), (2) зависит от свойства, число

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} a(z) d\Omega: \quad a_0 \in \Gamma \text{ или } a_0 \notin \Gamma,$$

Γ — решетка периодов.

Показано, что при $a_0 \notin \Gamma$ для разрешимости уравнения (1) не нужны условия (2). В этом случае для нахождения решения получается система алгебраических уравнений из n неизвестных и n — уравнений и матрица коэффициентов зависит от числа: $T_\zeta a(z_j), T_\sigma a_k(z), T_\sigma f(z), j = 1, n$ где $T_\zeta \rho(z)$ — интегральный оператор с ядром $\zeta(z)$, а $T_\sigma \rho(z)$ ядром $\sigma(z)$.

Показано, что при $\text{rang} A = n$ задача однозначно разрешима и решение найдено в явном виде.

При $a_0 \in \Gamma$ для разрешимости уравнения нужно одно условие, то есть $s = 1$. Решается система алгебраических уравнений из $n + 1$ уравнений с $n + 1$ неизвестными. Показано, что условие $\text{rang} A = n + 1$, обеспечивает однозначную разрешимость задачи. При этом решение находится в явном виде.

В §2.5 изучена задача (1), (2), когда все $a_k(z) = 0, k = \overline{1, n}$, и неизвестными являются функции $w(z)$ и постоянные $c_1, c_2, \dots, c_n$. В случае, когда a — постоянная и $a \notin \Gamma_1$ или $a \in \Gamma_1$ найдены необходимое и достаточное условие однозначной разрешимости при $s = n$. В случае $s \neq n$ однозначная разрешимость задач не будет.

В §2.6 изучается квазилинейное уравнение вида

$$w_{\bar{z}} + aw(z) + \left(b_0(z) + \sum_{k=1}^n c_k b_k(z) \right) w^m(z) = 0, \quad (3)$$

с условием переопределения (2).

Показано, что эта задача при $m = 2$ сводится к задаче изученной в §2.5 воспользуясь результатами §2.5 и условием $e_j \neq 0, j = \overline{1, s}$ доказана однозначность задачи и выписано решение в явном виде.

В §2.7 исследована задача (1), (2) в общем виде (при $f(z) \equiv 0$). Сперва изучено одномерный случай, то есть для уравнения

$$w_{\bar{z}} + a(z)w(z) + b(z)w(z_0) = f(z)e, \quad (4)$$

$$w(z_1) = e_1, \quad w(z_2) = e_2, \quad z_1, z_2 \in \Omega. \quad (5)$$

Для разрешимости задачи (4), (5) доказано, что если $a_0 \notin \Gamma$ и

$$\Delta = F_1(z_1)F_2(z_2) - F_2(z_1)F_1(z_2) \neq 0,$$

то задача (4), (5) имеет единственное решение вида

$$w(z) = F_1(z_2)w(z_0) + F_2(z_1)e,$$

где

$$F_1(z) = e^{-T_\zeta a(z)} T_\sigma(b e^{T_\zeta a}), \quad F_2(z) = e^{-T_\zeta a(z)} T_\sigma(f e^{T_\zeta a}).$$

В третьей главе исследуется задача нахождения двоякопериодических решений класса C_*^1 для равномерно эллиптической системы вида

$$w_{\bar{z}} - q(z)w_z + a(z)w(z) + \sum_{k=1}^n a_k(z)w(z_k) = f(z), \quad (6)$$

с условием переопределения

$$w(z_j) = e_j, \quad j = \overline{1, s} \quad (7)$$

и неизвестным решением $w(z)$ и числа $w(z_1), w(z_2), \dots, w(z_n)$.

В параграфе 3.1 в классе C_*^1 найдено решение неоднородного уравнения Бельтрами

$$w_{\bar{z}} - q(z)w_z = f(z), \quad |q| \neq 1, \quad q - \text{const.} \quad (8)$$

Показано, что если

$$\iint_{\Omega} f(z) d\Omega = 0,$$

то уравнение (8) имеет решение вида

$$w(z) = C + \frac{1}{\pi(1 - |q|^2)} \tilde{T}_{\zeta} f(z),$$

где

$$\tilde{T}_{\zeta} f(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega'} f(t) \zeta(\tau - q\bar{\tau} - z + q\bar{z}) d\Omega,$$

$\zeta(z + q\bar{z})$ — обобщённая дзета-функция Вейерштрасса.

В §3.2-3.3 изучено уравнение

$$w_{\bar{z}} - qw_z + aw(z) + bw(z_1) = f(z). \quad (9)$$

Сперва изучено случай $a = 0$, затем $a \neq 0$. Условия разрешимости задачи зависят от свойства число a : $a \in (1 - |q|^2)\Gamma^1$ или где $\Gamma^1 = \Gamma + q\bar{\Gamma} = \{m_1(h_1 + q\bar{h}_1) + m_2(h_2 + q\bar{h}_2), \}$ m_1, m_2 — целые числа, $m_1, m_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Показано, что при $a \in (1 - |q|^2)\Gamma^1$, без условия (2), для однозначной разрешимости уравнения, необходимо и достаточно, чтобы $a + b \neq 0$ и решение в точке z_1 принимало определенное значение, выражающие через интегралы $\tilde{T}_{\sigma}^{\omega} \rho(z)$ с ядром $\sigma(\omega(z)) = \sigma(z + q\bar{z})$, построенное на периодах $h^1 = h_1 + q\bar{h}_1$, $h^2 = h_2 + q\bar{h}_2$, $|q| \neq 1$.

Решение выписывается через интегрального оператора $\tilde{T}_{\sigma}^{\omega} \rho(\omega)$.

Когда $a \in (1 - |q|^2)\Gamma^1$, решение задачи (6), (7), при выполнении условия, однозначной разрешимости, находится в явном виде через интеграла $\tilde{T}_{\zeta}^{\omega} \rho(\omega)$ с ядром $\zeta(\omega) = \zeta(z + q\bar{z})$.

В параграфе 3.4 задача (6), (7) исследуется для постоянных коэффициентов.

При $a \in (1 - |q|^2)\Gamma^1$ разрешимость уравнения без дополнительной

условии сводится к решению системы алгебраических уравнений с n уравнений с n неизвестными $w(z_1), w(z_2), \dots, w(z_n)$. Когда $\text{rang} A = n$, A — основной матрицы, уравнение, имеет единственное решение и решение выписывается через интегральные операторы $\tilde{T}_\zeta^\omega \rho(z)$ с ядром обобщенной функции Вейерштрасса $\sigma(z + q\bar{z})$.

В случае $a \in (1 - |q|^2)\Gamma^1$ решение получается из системы $n + 1$ уравнений с $n + 1$ неизвестными. Показано, что при $\text{rang} \tilde{A} = n + 1$ задача имеет единственное решение вписываемый через интегрального оператора $\tilde{T}_\zeta^\omega \rho(z)$.

В §3.6 задача (6), (7) изучено для переменных коэффициентов. Разрешимость задачи зависит от свойства коэффициента

$$\tilde{a}_0 = \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \omega_z(z) a(z) d\Omega \in \Gamma^1 \quad \text{или} \quad \tilde{a}_0 \in \Gamma^1,$$

где $\omega_z(z) \in C_*^{1+\alpha}$ основной квазипериодической гомеоморфизм уравнения Бельтрами удовлетворяющей условиям

$$\omega(0) = 0, \quad \omega(z + h_j) = \omega(z) + \tilde{h}_j, \quad j = 1, 2,$$

$$\text{Im}(h_2/h_1) \neq 0, \quad \text{Im}(\tilde{h}_2/\tilde{h}_1) \neq 0,$$

$\tilde{h}_j$ — зависят как функционал от $q(z)$, $q(z) \in C_*^1$, $|q(z)| \leq q_0 < 1$.

Решение задача при $\tilde{a}_0 \in \Gamma$ получено с помощью интегральных оператора

$$\tilde{T}_\zeta \rho(z) = T_\zeta^\omega \rho(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \rho(t) H(t, s) d_t \Omega,$$

$$H(t, s) = \omega_t(t) [\zeta(\omega(t)) - \omega(z)] = \omega_t(t) \bar{\zeta}(t - z),$$

а при $\tilde{a}_0 \notin \Gamma^1$ через

$$\tilde{T}_\sigma^\omega \rho(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \rho(t) \omega_t(t) \frac{\sigma(\omega(t) - \omega(z) - \tilde{a}_0)}{\sigma(-\tilde{a}_0) \sigma(\omega(t) - \omega(z))} d_t \Omega,$$

$\zeta(\omega(z)), \sigma(\omega(z))$ — обобщенные эллиптические функции Вейерштрасса.

При $\tilde{a}_0 \notin \Gamma^1$ — условия переопределения не ставится, а при $\tilde{a}_0 \in \Gamma^1$ ставится одно условие. Для первого случая $\text{rang} \tilde{A} = n$, а для второго $\text{rang} \tilde{A} = n + 1$ является условиями однозначной разрешимости.

В параграфе 3.7 изучается нелинейное уравнение вида

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} - q(z) \frac{\partial w}{\partial z} + a(z) w(z) + (f_0(z) + b f_1(z)) w^n(z) = 0, \quad (10)$$

с условием

$$w(z_0) = A, \quad z_0 \in \Omega. \quad (11)$$

Показано, что при $n = 2$ эта задача сводится к задаче

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} - q(z) \frac{\partial \varphi}{\partial z} - a(z) \varphi(z) = f_0(z) + b f_1(z), \quad (12)$$

$$(z_0) = \frac{1}{A}, \quad A \neq 0. \quad (13)$$

В этой задаче неизвестными являются $\varphi(z)$ и постоянное b . Как в случае $n = 2$ находится необходимое и достаточное условие однозначной разрешимости при $\tilde{a}_0 \in \Gamma^1$ и $\tilde{a}_0 \in \Gamma^1$ и решение в обоих случаях находится в явном виде.

6. Научная и практическая значимость результатов диссертации.

Диссертация носит теоретический характер и посвящена развитию теории нагруженных уравнений обобщённых аналитических функций и краевых задач с дополнительными условиями. В ходе исследования доказаны новые теоремы об однозначной разрешимости нагруженных уравнений в классе S_*^1 , а также получены явные формулы решений для ряда рассматриваемых задач. Полученные результаты могут служить теоретической основой для дальнейшего развития теории краевых задач, исследования уравнений обобщённых аналитических функций и обобщённых уравнений Бельтрами с дополнительными условиями.

Практическая значимость диссертации заключается в том, что разработанные методы и полученные результаты могут быть использованы при исследовании близких по постановке задач, в том числе уравнений метааналитических функций высших порядков, систем многомерных эллиптических уравнений с нагруженными членами, задач с переопределёнными и интегральными условиями, а также других задач теории дифференциальных уравнений и комплексного анализа.

Результаты диссертации могут быть использованы в учебном процессе при разработке специальных курсов, чтении лекций и проведении практических занятий по дисциплинам «Комплексный анализ», «Обобщённые аналитические функции», «Дифференциальные уравнения» и «Краевые задачи» для студентов старших курсов, магистрантов, докторантов (PhD) и аспирантов высших учебных заведений.

Использование результатов исследования при решении задач математического и комплексного анализа, геометрии, механики и других направлений прикладной математики подтверждает теоретическую и научно-практическую значимость диссертации и создаёт предпосылки для их дальнейшего применения в научных исследованиях.

7. Публикации по теме диссертации. Основные результаты по теме диссертации опубликованы в 16 работах автора. Из них 5 опубликованы в

изданиях входящих в перечень ВАК при Президенте Республики Таджикистан, одна статья в другом издании, остальные в материалах республиканских и международных конференциях.

Результаты вынесены на обсуждение в ряде международных и республиканских конференциях, а также семинарах и прошли достаточную апробацию. Все это соответствует требованиям пунктов 34, 35 Порядка присуждения ученых степеней ВАК при Президенте Республики Таджикистан, утвержденного постановлением Правительства Республики Таджикистан от 30 июня 2021 г., №267, в редакции постановления от 26 июня 2023 г., №295.

8. Соответствие диссертации требованиям Комиссии. Диссертация и автореферат Кулобизода М.А. соответствуют требованиям порядка присуждения учёных степеней ВАК при Президенте Республики Таджикистан (приложение 2 к расположению председателя ВАК Президенте Республики Таджикистан от 27 декабря 2024 г., № 493).

Но следует отметить, что, в диссертации и автореферате имеются некоторые технические недостатки, ошибки грамматического и стилистического характера, например,

1. В диссертации на странице 53 снизу 7-ая строка вместо «связанные» написана «свезанные».

2. В диссертации на странице 113 а условии теоремы 3.5.1 выражение $E_k(\omega) = E(z + q\bar{z})$ нумерована (3.5.6), а должно быть (3.5.7).

3. В диссертации на странице 150 в 9-ой строке снизу вместо $|z| \neq 1$, должно быть $|q| \neq 1$.

Имеющиеся недостатки не снижают высокое научное качество диссертации и замечания в целом не снижают качество и положительную оценку данной диссертации и не оказывают отрицательного влияния на ее необходимый научный уровень.

В целом, диссертация Кулобизода М.А. на тему «Двоякопериодические решения для нагруженных уравнений обобщенных аналитических функций с дополнительными условиями», представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.3. - Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление выполнена на необходимом научном уровне, отвечает требованиям ВАК при Президенте Республики Таджикистан, соответствует требованиям п. 31, 33-35 Порядка присуждения ученых степеней, утвержденного постановлением Правительства Республики Таджикистан от 30 июня 2021 г., №267 (в редакции постановления от 26 июня 2023 г., №

295), а её автор заслуживает присуждения учёной степени кандидата физико-математических наук по указанной специальности.

Официальный оппонент:

доктор физико-математических наук
по специальности 1.1.3 – Дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление,
профессор, заведующий отделом дифференциальных
уравнений Института математики Национальной
академии наук Республики Таджикистана


Г. Джангибеков

Дата: « 2 » 09 2026г.

Адрес:

734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 299/4, Институт
математики им. А.Джураева НАН Таджикистана

Тел: (+992) 935 03 63 42;

E-mail: gulkhoja@list.ru

Подпись: Г. Джангибекова подтверждаю.

Начальник отдела кадров Института математики
им. А.Джураева НАН Таджикистана



З. Юсупова

Адрес:

Адрес: 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 299/4,
Институт математики им. А.Джураева НАН Таджикистана.

Тел: (+99237) -225 80 89

Дата: « 2 » 09 2026 г.