

ОТЗЫВ

**официального оппонента на диссертацию Кулобизода Мирзо Ашурмад
«Двоякопериодические решения для нагруженных уравнений
обобщенных аналитических функций с дополнительными условиями»,
представленную на соискание ученой степени кандидата физико-
математических наук по специальности 1.1.3. Дифференциальные
уравнения, динамические системы и оптимальное управление**

1. Соответствие диссертации специальности и отрасли науки, по которым диссертация представляется к защите. Тема диссертации Кулобизода М.А. и её содержание соответствует специальности 1.1.3.- Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление, по которой диссертационному совету 6D.KOA-011 предоставлено право на рассмотрение и проведение защиты диссертаций. Работа соответствует паспорту данной научной специальности, её формуле, а также трём основным направлениям области исследования: 1) общая теория дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений; 2) начально-краевые и спектральные задачи для дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений; 3) нелинейные дифференциальные уравнения и систем нелинейных дифференциальных уравнений.

Диссертация Кулобизода М.А. относится к области фундаментальных математических исследований и соответствует приоритетным направлениям научной деятельности в Республике Таджикистан на 2021–2025 годы.

2. Актуальность темы исследования.

Диссертационная работа посвящена нахождению двоякопериодических решений для уравнения обобщенных аналитических с нагруженными членами, а также неизвестными параметрами в правой части, с дополнительными условиями переопределения. А также аналогичная задача (с такой постановкой) для равномерно эллиптической линейной системы и квазилинейной системы уравнений с дифференциальным оператором Бельтрами в главной части.

Исследуемые комплексные уравнения являются эллиптическими системами дифференциальных уравнений состоящей из двух вещественных уравнений на плоскости переменных (x, y) .

Нагруженные дифференциальные уравнения занимают важное место в теории дифференциальных уравнений. Интерес к нагруженным уравнениям обуславливается тем, что решение многих задач математической физики,

математической биологии, экологии, химии и задачи долгопрогнозирования по оптимальному управлению сводится к изучению таких уравнений.

В монографии А.М. Нахушева изучено уравнение обобщенных аналитических с нагруженными членами. В работах его учеников для нагруженных уравнения обобщенных аналитических функций исследованы граничные задачи Дирихле.

Исследуемые уравнения имеют важные приложения в задачах механики сплошных сред, задачи геометрии, теории упругости, газовой динамики и т.д.

Поэтому представляет интерес изучению уравнения обобщенных аналитических и равномерно эллиптической системы первого порядка на плоскости с нагруженными членами и дополнительными условиями в классе регулярных двоякопериодических функций и нахождение решения (единственного) в явном виде. Изучению исследуемых уравнений в диссертации без нагруженных членов в связи с многочисленными их приложениями посвящены десятки монографии и сотни научных статей. Однако по исследуемой задаче написаны лишь отдельные статьи и совсем мало изучены.

Поэтому исследуемая тема диссертационной работы Кулобизода М.А. является актуальным.

3. Степень научной новизны результатов диссертации и научных положений, выносимых на защиту

Все результаты, полученные в диссертации автором, самостоятельно являются новыми и заключаются в следующем:

1) для уравнения обобщенных аналитических функций с нагруженными членами и точечными условиями переопределения в терминах коэффициентов уравнения и нагруженных членов найдены необходимое и достаточное условие однозначной разрешимости задачи и явные виды решения посредством интегральных операторов с ядром эллиптических функций Вейерштрасса;

2) для уравнения обобщенных аналитических функций с нагруженными членами и неизвестными параметрами с дополнительными условиями, найдены необходимые и достаточные условия, обеспечивающие однозначной разрешимости задач. Выписаны явные формулы решения задачи;

3) для уравнения с главной частью оператором Бельтрами, с нагруженными членами и дополнительными условиями найдены необходимое и достаточное условия однозначной разрешимости. Выписаны

решения посредством интегральных операторов с ядрами обобщенных эллиптических функций Вейерштрасса;

4) для уравнения с главной частью оператором Бельтрами в классе $\mathbb{C}_*^1$ с неизвестными параметрами в правой части и точечными условиями переопределения найдены необходимое и достаточное условие однозначной разрешимости задачи и выписаны явный вид решения.

4. Степень изученности научной темы. Степень достоверности результатов исследования обеспечивается использованием современных методов теории обобщенных аналитических функций комплексного и функционального анализа.

Все теоремы, леммы и выводы представление в диссертации, строго доказаны и согласуется с известными результатами отечественных и зарубежных исследователей.

Достоверность результатов также подтверждается публикацией основных результатов в рецензируемых научных журналах, их апробацией на научных конференциях и возможность применения полученных результатов для дальнейшей развития теории нагруженных уравнений обобщенных аналитических функций.

5. Структура диссертации и объем. Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения и списка литературы из 134 наименований и 176 страниц машинописного текста, набранного в текстовом редакторе Microsoft Word. В диссертации применена сквозная нумерация теорем, замечаний и формул, имеющих тройную нумерацию, в которой первая цифра совпадает с номером главы, вторая с номером параграфа, а третья порядковый номер теорем, замечаний или формул в данном параграфе.

В диссертации Кулобиева М.А. исследуются следующие нагруженные уравнения

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} + a(z)w + \sum_{k=1}^n a_k w(z_k) = f(z) + \sum_{j=1}^m d_j f_j(z), \quad (1)$$

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} + aw(z) + \left(b_0(z) + \sum_{k=1}^m c_k b_k(z) \right) w^n(z) = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} - q(z) \frac{\partial w}{\partial z} + a(z)w + \sum_{k=1}^n a_k w(z_k) = f(z) + \sum_{j=1}^m d_j f_j(z), \quad (3)$$

где $n > 1, m > 1$, с дополнительными условиями переопределения

$$w(t_j) = e_j, \quad j = \overline{1, s}, \quad (4)$$

t_j — точки из области определения искомого решения, Ω — основной параллелограмм периодов.

В уравнении (1) — (3) неизвестными вместе с $w(z), w(z_j)$ являются и постоянные d_k, c_k . В условии (4) e_j — известные постоянные. В уравнении (3) функция $q(z)$ — двоякопериодическая и удовлетворяет условию $|q(z)| \leq q_0 < 1$ (равномерной и эллиптичности).

Диссертационная работа состоит из четырёх глав и обсуждения полученных результатов.

Первая глава состоит из введения и обзора литературных источников по теме диссертации.

Вторая глава работы посвящена исследованию задач (1) — (4); (2) — (4) и состоит из восьми параграфов.

В §§ 2.1 — 2.2 исследуется уравнение (1) в случае, когда $a(z) \equiv a, a$ — постоянная и $d_k = 0$.

Сперва изучается случай $n = 1$ и затем в зависимости от условия $a \in \Gamma_1$ или $a \notin \Gamma_1$, где Γ_1 — решетка $\Gamma_1 = \frac{\pi}{|\Omega_0|} \{m_1 h_1 + m_2 h_2; m_1, m_2 — \text{целые}\}$ находится условия однозначной разрешимости и выписывается явный вид решения с помощью интегральных операторов $T_\zeta \rho, T_\sigma \rho$, с ядрами эллиптических функций Вейерштрасса $\zeta(z)$ и $\sigma(z)$.

В §§ 2.3 — §§ 2.4 задача (1) — (4) исследована в случае с переменными коэффициентами. В зависимости от условия $a_0 \in \Gamma$ или $a_0 \notin \Gamma$, где

$$\Gamma = \{m_1 h_1 + m_2 h_2; m_1, m_2 — \text{целые}\},$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} a(z) d\Omega,$$

найжены условия однозначной разрешимости, выписаны явные решения и доказаны соответствующие теоремы.

В § 2.5 изучена задача (1) — (4) в случае, когда все $a_k = 0, c_k \neq 0, (1 \leq k \leq m)$ и $a(z) \equiv a, a$ — постоянная.

Найдены условия однозначной разрешимости задачи и доказаны соответствующие теоремы. Выписан явный вид решения, когда $a \in \Gamma_1$ и $a \notin \Gamma_1$.

В § 2.6 исследуется задача (2) – (4). Показано, что если $n = 2$, то задачи (2) – (4) эквивалентны задаче (1) – (2) в котором $a_k = 0$ и $d_j \neq 0$.

Для случая постоянного a , когда $a \in \Gamma_1$ или $a \notin \Gamma_1$ найдено условие однозначной разрешимости в обоих случаях и доказаны соответствующие теоремы.

В каждом случае выписаны явного вида решения для рассматриваемых задач.

В § 2.7 изучается задача (1) – (2) в общем виде, $a_k \neq 0$, $c_k \neq 0$, $k \geq 1$. Сперва изучается случай $k = 1$. Для этого случая $a_0 \in \Gamma$ полностью дано решение задачи. Случай $a_0 \notin \Gamma$ исследуются аналогично. Если $a_0 \notin \Gamma$, то $s = m + n$, при $a_0 \in \Gamma$ и $s = m + n + 1$, и ранг основной матрицы B : $\text{rang} B = m + n$, при $a_0 \notin \Gamma$ и $\text{rang} B = m + n + 1$, если $a_0 \in \Gamma$.

В § 2.7 изучается уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} + aw(z) + bw(z_0) + d\overline{w(z_0)} = f(z).$$

Когда $a = 0$ или $a \neq 0$ найдено решение с условием $w(z_1) = e$, $z_1 \neq z_0$. В случае $a = 0$ для однозначной разрешимости уравнения не нужно дополнительное условие. А в случае $a \neq 0$ разрешимость задач зависит от условия $a \in \Gamma_1$ или $a \notin \Gamma_1$. Затем изучается случай переменных коэффициентов и доказаны теоремы 2.8.4 – 2.8.6. При этом найдены явный вид решения в обоих случаях.

В третьей главе исследуется задачи (3) – (4).

В первом параграфе получено решение неоднородного уравнения Бельтрами в классе C_*^1 с помощью обобщенной функции Вейерштрасса $\bar{\zeta}(z) = z(z + q\bar{z}) = \zeta(\omega)$, который носит вспомогательный характер, q – постоянная.

В § 3.2 найдено решение задачи (3) – (4) сперва в случае, когда $n = 1$ и все $c_k = 0$. Здесь в отличие от случая $q = 0$ решение задач получается на плоскости квазипериодического гомеоморфизма уравнения Бельтрами. Интегральные операторы $T_\zeta^\omega \rho$ и $T_\sigma^\omega \rho$, также вычисляются на плоскости гомеоморфизма $\mathbb{C}_\omega$, $\omega(z) = z + q\bar{z}$, $|q| \neq 1$.

В интегралах $T_{\zeta}^{\omega} \rho$, $T_{\sigma}^{\omega} \rho$, вместо ядра $\zeta(z)$ и $\sigma(z)$ используются обобщенные функции Вейерштрасса

$$\tilde{\zeta}(z) = \zeta(z + q\bar{z}) = \zeta(\omega), \tilde{\sigma}(z) = \sigma(z + q\bar{z}) = \sigma(\omega).$$

Находится условие однозначной разрешимости задачи и выписаны явный вид решения.

В § 3.3 находится двоякопериодические решения задачи (3) – (4) в случае, когда $n = 1$, a – постоянная. При отображение $\omega(z) = z + q\bar{z}$, $|q| = 1$, решетка периодов $\Gamma = \{m_1 h_1 + m_2 h_2; m_1, m_2 - \text{целые}\}$ переходит на решетку $\Gamma' = \Gamma + q\bar{\Gamma} = \{m_1 h_1 + m_2 h_2 + q(m_1 \bar{h}_1 + m_2 \bar{h}_2); m_1, m_2 - \text{целые}\}$.

Условия разрешимости задачи зависят от случая: $a \in (1 - |q|^2)\Gamma'$ или $a \notin (1 - |q|^2)\Gamma'$.

Показано, что в случае $a \notin (1 - |q|^2)\Gamma'$ для однозначной разрешимости уравнения достаточно выполнение условия $a + b \neq 0$, без условия переопределения. Когда $a \in (1 - |q|^2)\Gamma'$, найдено условие однозначной разрешимости задачи с одним условием переопределения и доказана соответствующая теорема.

В § 3.4 найдено решение задачи (3) – (4) в случае постоянных коэффициентов с многими n нагруженными членами, то есть, когда все $d_k = 0$ и a, a_k – постоянные. В зависимости от условия $a \notin (1 - |q|^2)\Gamma'$ или $a \in (1 - |q|^2)\Gamma'$ – решение задачи сводится к нахождению решений линейной алгебраической системы с некоторой матрицей B . Показано, что при $a \notin (1 - |q|^2)\Gamma'$ для однозначной разрешимости задачи необходимо и достаточно, чтобы $\text{rang} B = n$. В случае $a \in (1 - |q|^2)\Gamma'$ и при выполнении некоторого условия на правой части $f(z)$, для однозначной разрешимости должно выполняться условие $\text{rang} B = n + 1$, (то есть, условие в (4), $s = 1$).

В § 3.5 найдено решение задачи (3) – (4) с постоянными коэффициентами в котором все $a_k = 0$, $c_k \neq 0$, и в условие (4), $s > 1$.

В случае $a \notin (1 - |q|^2)\Gamma'$ разрешимость задачи сводится к решению алгебраической системы уравнений с некоторой матрицей A размерностью $n \times s$. Показано, что в этом случае для однозначной разрешимости задачи необходимо и достаточно, чтобы $s \geq n$ и $\text{rang} A = n$. Затем находится решение, когда $a \in (1 - |q|^2)\Gamma'$.

В § 3.6 находится решение обобщенного уравнения Бельтрами с нагруженными членами и с переменными коэффициентами.

Сперва, решение задачи приводится для случая $n = 1$, $d_k = 0$, так как, общий случай решается аналогичным образом.

Найдено условие разрешимости задачи и доказаны соответствующие теоремы об однозначной разрешимости. Для решения задачи используется построенный гомеоморфизм уравнения Бельтрами, отображающий квазиконформно параллелограмм Ω с вершинами z_0 , $z_0 + h_1$, $z_0 + h_1 + h_2$, $z_0 + h_2$ в четырёхсторонник с вершинами $\omega(z_0)$, $\omega(z_0) + h'_1$, $\omega(z_0) + h'_1 + h'_2$, $\omega(z_0) + h'_2$. Выписаны решения при помощи интегральных операторов $\bar{T}_\zeta \rho$ и $\tilde{T}_\sigma \rho$ с ядрами $\tilde{\zeta}(z) = \zeta(\omega(z))$, $\tilde{\sigma}(z) = \sigma(\omega(z))$.

Все полученные результаты являются новыми и доказаны впервые.

6. Научная и практическая значимость результатов диссертации.

Диссертация носит теоретический характер и посвящена развитию теории нагруженных уравнений обобщённых аналитических функций и краевых задач с дополнительными условиями. В ходе исследования доказаны новые теоремы об однозначной разрешимости нагруженных уравнений в классе C^1_* , а также получены явные формулы решений для ряда рассматриваемых задач. Полученные результаты могут служить теоретической основой для дальнейшего развития теории краевых задач, исследования уравнений обобщённых аналитических функций и обобщённых уравнений Бельтрами с дополнительными условиями.

Практическая значимость диссертации заключается в том, что разработанные методы и полученные результаты могут быть использованы при исследовании близких по постановке задач, в том числе уравнений метааналитических функций высших порядков, систем многомерных эллиптических уравнений с нагруженными членами, задач с переопределёнными и интегральными условиями, а также других задач теории дифференциальных уравнений и комплексного анализа.

Результаты диссертации могут быть использованы в учебном процессе при разработке специальных курсов, чтении лекций и проведении практических занятий по дисциплинам «Комплексный анализ», «Обобщённые аналитические функции», «Дифференциальные уравнения» и «Краевые задачи» для студентов старших курсов, магистрантов, докторантов (PhD) и соискателей высших учебных заведений.

Использование результатов исследования при решении задач математического и комплексного анализа, геометрии, механики и других направлений прикладной математики подтверждает теоретическую и

научно-практическую значимость диссертации и создаёт предпосылки для их дальнейшего применения в научных исследованиях.

7. Публикации по теме диссертации. Основные результаты по теме диссертации опубликованы в 16 работах автора. Из них 5 опубликованы в изданиях входящих в перечень ВАК при Президенте Республики Таджикистан, одна статья в другом издании, остальные в материалах республиканских и международных конференциях.

Результаты вынесены на обсуждение в ряде международных и республиканских конференциях, а также семинарах и прошли достаточную апробацию. Все это соответствует требованиям пунктов 34, 35 Порядка присуждения ученых степеней ВАК при Президенте Республики Таджикистан, утвержденного постановлением Правительства Республики Таджикистан от 30 июня 2021 г., №267, в редакции постановления от 26 июня 2023 г., №295.

8. Соответствие диссертации требованиям Комиссии. Диссертация и автореферат Кулобизода М.А. соответствуют требованиям порядка присуждения учёных степеней ВАК при Президенте Республики Таджикистан (приложение 2 к распоряжению председателя ВАК Президенте Республики Таджикистан от 27 декабря 2024 г., № 493).

Но следует отметить, что, в диссертации и автореферате имеются некоторые технические недостатки, ошибки грамматического и стилистического характера, например,

1. На странице 9 диссертации в первой строке сверху должно быть нагруженного уравнения (вместе ненагруженными уравнений).
2. На странице 15 диссертации сверху строка 16 должно быть принято, а написано не принять.
3. На странице 17 в уравнение Буссинекса должно быть $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2}$, а не $\frac{\partial^4 u}{\partial x \partial t^2}$.

Имеющиеся недостатки не снижают высокое научное качество диссертации и замечания в целом не снижают качество и положительную научную оценку данной диссертации и не оказывают отрицательного влияния на ее необходимый научный уровень.

В целом, диссертация Кулобизода М.А. на тему «Двоякопериодические решения для нагруженных уравнений обобщенных аналитических функций с дополнительными условиями», представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.3.

Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление выполнена на необходимом научном уровне, отвечает требованиям ВАК при Президенте Республики Таджикистан, соответствует требованиям п. 31, 33-35 Порядка присуждения ученых степеней, утвержденного постановлением Правительства Республики Таджикистан от 30 июня 2021 г., №267 (в редакции постановления от 26 июня 2023 г., № 295), а её автор заслуживает присуждения учёной степени кандидата физико-математических наук по указанной специальности.

Официальный оппонент:

кандидат физико-математических наук
по специальности 1.1.3 – Дифференциальные
уравнения, динамические системы
и оптимальное управление,
доцент кафедры математики и естественных наук
Филиала МГУ имени М.В. Ломоносова
в городе Душанбе

Э.Х. Джумаев

Дата: «02» сентября 2026г.

Адрес:

734003, Республика Таджикистан, город Душанбе, улица Бохтар, 35/1,
Филиал МГУ имени М.В. Ломоносова в г. Душанбе

Тел: (+992) 907-54-19-59;

E-mail: eraj59_59@mail.ru

Подпись: Э.Х. Джумаева подтверждаю.

Начальник ОКП и СР ФМГУ в г. Душанбе



С.М. Пирназар

Адрес:

Адрес: 734003, Республика Таджикистан, город Душанбе, улица Бохтар. 35/1,

Тел: +992 (37) 227-31-48;

E-mail: info@msu.tj

Дата: «02» сентября 2026г.