

Заключение

экспертной комиссии Диссертационного совета 6D.КОА-011 при Таджикском национальном университете по диссертационной работе Кулобизода Мирзои Ашурмат на тему «Двоякопериодические решения для нагруженных уравнений обобщенных аналитических функций с дополнительными условиями», представленной на соискание учёной степени кандидата физико – математических наук по специальности

1.1.3. - Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное уравнение

Нагруженные дифференциальные уравнения являются одним из важных разделов теории дифференциальных уравнений. Интерес к данному направлению обусловлен тем, что к исследованию таких уравнений сводится решение многих важных задач математической физики, математической биологии, экологии, химии, а также задач долгосрочного прогнозирования и оптимального управления.

Под нагруженными дифференциальными уравнениями понимают дифференциальные уравнения, в которые входят значения искомой функции и (или) её производных в отдельных точках области определения, а также дифференциальные уравнения с неизвестными параметрами в свободных членах или с функционалами, заданными на многообразиях, размерность которых меньше размерности области определения. При этом на решение накладываются дополнительные условия переопределения, которые могут быть заданы в виде интегральных условий или условий на значения искомой функции в отдельных точках области. В монографии Нахушева А.М. «Нагруженные уравнения и их применение. – Москва, Наука, 2012, 232 с.», изучены некоторые классы уравнения обобщенных аналитических функций вида

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} + a(z)w + b(z)\bar{w} + c(z)w(\operatorname{Re} z) + d(z)w(\operatorname{Im} z) + \\ + \sum_{j=1}^p A_j(z)w(z_j) + \sum_{j=1}^q B_j(z)\overline{w(z_j)} = f(z),$$

где $2\partial_{\bar{z}} = \partial_x + i\partial_y$ – оператор Коши-Римана, $w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ – искомая функция, z_j – фиксированные точки.

Это комплексное уравнение эквивалентно системе двух дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка относительно двух неизвестных функций $u(x, y)$, $v(x, y)$, содержащей значения этих функций в фиксированных точках области определения.

Следует отметить, что уравнения обобщенных аналитических функций

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} + a(z)w + b(z)\bar{w} = f(z),$$

с многочисленными их приложениями в задачах геометрии, анализа и механики изучены в монографиях академика Векуа И.Н. и американского математика Берса Л., Векуа И.Н. “Обобщенные аналитические функций”, а также в работах наших учёных академиков Джуроева А.Д., Михайлова Л. Г., Раджабова Н., Усмонова З.Д. и др. математиков.

В диссертации Кулобиева М.А. исследуются следующие нагруженные уравнения:

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} + a(z)w + \sum_{k=1}^n a_k w(z_k) = f(z) + \sum_{j=1}^m d_j f_j(z), \quad (1)$$

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} + aw(z) + \left(b_0(z) + \sum_{k=1}^m c_k b_k(z) \right) w^n(z) = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} - q(z) \frac{\partial w}{\partial z} + a(z)w + \sum_{k=1}^n a_k w(z_k) = f(z) + \sum_{j=1}^m d_j f_j(z), \quad (3)$$

где $n > 1, m > 1$, с дополнительными условиями переопределения

$$w(t_j) = e_j, \quad j = \overline{1, s}, \quad (4)$$

t_j — точки из области определения искомого решения в классе двоякопериодических функций с основными периодами h_1, h_2 , $\text{Im}(h_2/h_1) \neq 0$.

Для уравнения

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} - q(z) \frac{\partial w}{\partial z} + aw(z) = f(z),$$

при $|q(z)| \leq q_0 < 1$ и случая, когда $q(z) = 0$ задача существования и нахождения двоякопериодических решений исследована в работах Сафарова Д.С. с привлечением аппарата теории эллиптических функций Вейерштрасса.

В уравнениях (1) – (3) неизвестными вместе с $w(z), w(z_j)$ являются и постоянные d_k, c_k . В условии (4) $e_j, j = \overline{1, s}$ — известные постоянные. В уравнении (3) функции $q(z)$ — двоякопериодическая и удовлетворяют условию $|q(z)| \leq q_0 < 1$ (равномерной эллиптичности).

Диссертационная работа состоит из четырёх глав и обсуждение полученных результатов.

Первая глава состоит из введения и обзора литературных источников по теме диссертации.

Вторая глава работы посвящена исследованию задач (1), (4); (2), (4) и состоит из восьми параграфов.

В §§ 2.1 – 2.2 исследуется уравнение (1) в случае, когда $a(z) \equiv a$, a – постоянная и $d_k = 0$.

Сперва изучается случай $n = 1$ и затем в зависимости от условия $a \in \Gamma_1$ или $a \notin \Gamma_1$, где Γ_1 – решетка $\Gamma_1 = \frac{\pi}{|\Omega_0|} \{m_1 h_1 + m_2 h_2 - m_1, m_2 - \text{целый}\}$, находится условия однозначной разрешимости и выписывается явный вид решения с помощью интегральных операторов $T_\zeta \rho$, $T_\sigma \rho$, с ядрами эллиптических функций Вейерштрасса $\zeta(z)$ и $\sigma(z)$.

В §§ 2.3 – §§ 2.4 задача (1), (4) исследована в случае с переменными коэффициентами. В зависимости от условия $a_0 \in \Gamma$ или $a_0 \notin \Gamma$, где

$$\Gamma = \{m_1 h_1 + m_2 h_2 - m_1, m_2 - \text{целый}\},$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} a(z) d\Omega,$$

найжены условия однозначной разрешимости, выписаны явные решения и доказаны соответствующие теоремы.

В § 2.5 изучена задача (1), (4) в случае, когда все $a_k = 0$, $c_k \neq 0$, ($1 \leq k \leq m$) и $a(z) \equiv a$, a – постоянная.

В § 2.6 исследуется задача (2), (4). Показано, что если $n = 2$, то задачи (2), (4) эквивалентны задаче (1), (2) в котором $a_k = 0$, $k = \overline{1, n}$ и $d_j \neq 0$, $j = \overline{1, m}$.

Найдено условие однозначной разрешимости задачи и выполнены явный вид решения.

В § 2.7 исследуется задача (1), (2) в общем виде, $a_k \neq 0$, $c_k \neq 0$, $k \geq 1$.

В третьей главе исследуется задачи (3), (4).

В первом параграфе получено решение неоднородного уравнения Бельтрами в классе C_*^1 с помощью обобщенной функции Вейерштрасса $\tilde{\zeta}(z) = z(z + q\bar{z}) = \zeta(\omega)$, который носит вспомогательный характер, q – постоянная.

В § 3.2 найдено решение задачи (3), (4) сперва в случае, когда $n = 1$ и все $c_k = 0$. Здесь в отличие от случая $q = 0$ решение задачи получается на плоскости квазипериодического гомеоморфизма уравнения Бельтрами. Интегральные операторы $T_\zeta^\omega \rho$ и $T_\sigma^\omega \rho$, также вычисляются на плоскости гомеоморфизма $\mathbb{C}_\omega$, $\omega(z) = z + q\bar{z}$, $|q| \neq 1$.

В интегралах $T_\zeta^\omega \rho$, $T_\sigma^\omega \rho$, вместо ядра $\zeta(z)$ и $\sigma(z)$ используются обобщенные функции Вейерштрасса

$$\tilde{\zeta}(z) = \zeta(z + q\bar{z}) = \zeta(\omega), \quad \tilde{\sigma}(z) = \sigma(z + q\bar{z}) = \sigma(\omega).$$

Находится условие однозначной разрешимости задачи и выписаны явный вид решения.

В § 3.3 находится двоякопериодическое решение задачи (3), (4) в случае, когда $n = 1$, a — постоянная. При отображении $\omega(z) = z + q\bar{z}$, $|q| = 1$, решетка периодов $\Gamma = \{m_1 h_1 + m_2 h_2; m_1, m_2 - \text{целые}\}$ переходит на решетку $\Gamma' = \Gamma + q\bar{\Gamma} = \{m_1 h_1 + m_2 h_2 + q(m_1 \bar{h}_1 + m_2 \bar{h}_2); m_1, m_2 - \text{целые}\}$.

Условия разрешимости задачи зависят от случая: $a \in (1 - |q|^2)\Gamma'$ или $a \notin (1 - |q|^2)\Gamma'$.

В каждом случае найдены условия однозначной разрешимости и выполнены решения в явном виде.

В § 3.4 найдено решение задачи (3), (4) в случае постоянных коэффициентов с многими n нагруженными членами, то есть, когда все $d_k = 0$ и $a, a_k, k \geq 1$ — постоянные. В зависимости от условия $a \notin (1 - |q|^2)\Gamma'$ или $a \in (1 - |q|^2)\Gamma'$ — решение задачи сводится к нахождению решений линейной алгебраической системы с некоторой матрицей B . Показано, что при $a \notin (1 - |q|^2)\Gamma'$ для однозначной разрешимости задачи необходимо и достаточно, чтобы $\text{rang} B = n$. В случае $a \in (1 - |q|^2)\Gamma'$ и при выполнении некоторого условия на правой части $f(z)$, для однозначной разрешимости должно выполняться условие $\text{rang} B = n + 1$ (то есть, условие (4), $s = 1$).

В § 3.5 найдено решение задачи (3), (4) с постоянными коэффициентами в котором все $a_k = 0$, $c_k \neq 0, k > 1$ и в условие (4), $s > 1$.

В § 3.6 находится решение обобщенного уравнения Бельтрами с нагруженными членами и с переменными коэффициентами.

Сперва, решение задачи приводится для случая $n = 1$, $d_k = 0, k \geq 1$ так как, общий случай решается аналогичным образом.

Найдено условие разрешимости задачи и доказаны соответствующие теоремы об однозначной разрешимости. Для решения задачи используется построенный гомеоморфизм для уравнения Бельтрами, отображающий квазиконформно параллелограмм Ω с вершинами $z_0, z_0 + h_1, z_0 + h_1 + h_2, z_0 + h_2$ в четырехсторонник Ω' с вершинами $\omega(z_0), \omega(z_0) + h'_1, \omega(z_0) + h'_1 + h'_2, \omega(z_0) + h'_2$. Выписаны решения при помощи интегральных операторов $\bar{T}_\zeta \rho$ и $\tilde{T}_\sigma \rho$ с ядрами $\tilde{\zeta}(z) = \zeta(\omega(z))$, $\tilde{\sigma}(z) = \sigma(\omega(z))$.

Все полученные результаты являются новыми и доказаны впервые.

В диссертации не обнаружено использования заимствованного материала без соответствующих ссылок на авторов или других источников. Материалы исследования достаточно полно изложены в 16 работах, опубликованных автором по теме диссертации, 5 из которых опубликованы в научных журналах, входящих в списки ВАК при Президенте Республики Таджикистан.

Диссертационный совет 6D.KOA-011 при Таджикском национальном университете состоит из 16-и членов совета, в том числе 5 докторов наук:

М. Илолов, Н.Р. Раджабов, С. Байзаев, Г. Джангибеков, Ф.М. Шамсудинов, являются специалистами по профилю рассматриваемой диссертации.

Экспертная комиссия предлагает назначить по рассматриваемой диссертации:

- ведущую организацию-Российско-Таджикский (Славянский) университет;

- официальных оппонентов:

Джангибекова Гулходжу - доктора физико-математических наук, профессора, заведующего отделом дифференциальных уравнений Института математики Национальной академии наук Республики Таджикистан;

Джумаева Эраджа Хакназаровича - кандидата физико-математических наук, доцента кафедры математики и естественных наук филиала Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова в городе Душанбе.

На основании рассмотрения диссертационной работы М.А. Кулобизода на тему «Двоякопериодические решения для нагруженных уравнений обобщенных аналитических функции с дополнительными условиями» заявленной на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.3 - дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление соответствует профилю Диссертационного совета 6D.KOA-011 при Таджикском национальном университете и может быть принята к защите.

Председатель экспертной комиссии:
доктор физико-математических наук, профессор

Абдукаримов М.

Члены экспертной комиссии:
доктор физико-математических наук и.о. профессора
кандидат физико-математических наук, доцент

Шамсудинов Ф.М.

Шоимкулов Б.

Подписи М. Абдукаримова и Б. Шоимкулова
заверяю
начальник ОК и СР ТНУ



Шодихонзода Э.Ш.

подпись Ф.М. Шамсудинова
заверяю



начальник ОК и СЧ БГУ им. Н. Хусрава

Исхокзода М.М.

16.07.26