Министерство образования и науки
Республики Таджикистан
Хорогский государственный университет
им. М.Назаршоева

УДК 517.5

На правах рукописи

Мавлоназаров Марамбек Абдулназарович

РЕШЕНИЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЙ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В L_2

Д И С С Е Р Т А Ц И Я

на соискание учёной степени кандидата
физико-математических наук по специальности
01.01.01 — Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
доцент Г.А. Юсупов

Д У Ш А Н Б Е – 2024

Оглавление

Введение **3**

ГЛАВА 1. Точные неравенства между наилучшими приближениями и специальными модулями гладкости в метрике пространства L_p $(0 < p \leq \infty)$ **9**

§ 1.1. Предварительные обозначения и определения 12

1.1.1. Наилучшие приближения функций $f \in L_2$ и известные результаты 12

1.1.2. Основная теорема и её следствия 18

§ 1.2. Об обобщении одной экстремальной характеристики для модуля непрерывности (1.1.12) 30

§ 1.3. Точные значения n-поперечников некоторых классов периодических функций в L_2 39

ГЛАВА 2. Совместное приближение периодических функций и их производных в метрике пространства L_2 **56**

§ 2.1. Совместное приближение функций в L_2. Решение экстремальной задачи (1.1.3) для класса функций $W^{(r)}_{p,m}(\Phi)$ 58

§ 2.2. Решение экстремальной задачи (1.1.3) для классов функций $\mathscr{F}^{(r)}_m(h)$ и $W^{(r)}_m(h)$ 62

§ 2.3. Об одном специальном случае экстремальной характеристики (1.1.16) 65

Заключение **71**

Список литературы **72**

Введение

Актуальность и степень разработанности темы исследования. Теория аппроксимации функций изучает практические задачи, связанные с приближением сложных функций более простыми. Чаще всего рассматривается приближение сложных функций функциями из некоторого n-параметрического множества. В настоящее время теория аппроксимации имеет дело с приближением отдельных функций и классов функций при помощи заданных подпространств, каждое из которых состоит из функций, являющихся в каком-то смысле более простыми, чем аппроксимируемые функции. Обычно роль таких подпространств играет множество алгебраических полиномов или же в периодическом случае множество тригонометрических полиномов заданного порядка n.

В становлении теории аппроксимации функций важную роль сыграла работа К.Вейерштрасса [73], вышедшая в 1885 году, согласно которой для любой непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$ последовательность её наилучших приближений многочленами порядка $\leq n$ сходится к нулю при $n \to \infty$. Затем, после этого результата, вышли работы Ш.Ж.Валле Пуссена [62], С.Н.Бернштейна [8] и Д.Джексона [63], где была изучена скорость сходимости к нулю последовательности наилучших приближений.

Параллельно исследованиям по приближению функций, заданных и определённых на отрезке алгебраическими многочленами, интенсивно велись исследования по приближению периодических функций тригонометрическими многочленами. По приближению классов периодических функций отметим известные работы А.Н.Колмогорова [64], Ж.Фавара [68] и С.М.Никольского [29], опубликованные в 30-х и 40-х годах прошлого века. В настоящее время задачи теории приближений находят широкое применение в разных областях науки и техники, в частности, в вычислительной математике, дискретной математике, теории чисел и др.

Среди актуальных задач теории аппроксимации функций наиболее важной является задача отыскания точных констант в неравенствах типа Джексона – Стечкина. Под неравенствами типа Джексона – Стечкина в широком смысле понимают неравенства, в которых величина наилучшего приближения функций конечномерным подпространством оценивается через некоторые её характеристики гладкости самой функции или некоторой её производной. В качестве такой характеристики обычно рассматривают модуль непрерывности функции.

Наиболее важные результаты в этом направлении исследования получены в работах Н.П.Корнейчука [25], Н.И.Черных [41], В.И.Бердышева [7] В.В.Арестова и Н.И.Черных [59], В.В.Жука [19], Л.В.Тайкова [34], А.А.Лигуна [27], А.Г.Бабенко [4], С.Б.Вакарчука [11], М.Ш.Шабозова [44] и других математиков. Обстоятельный обзор полученных в периодическом случае результатов приведён, например, в работах В.И.Иванова [20, 23], М.Ш.Шабозова и Г.А.Юсупова [45], С.Б.Вакарчука и В.И.Забутной [15].

Диссертационная работа посвящена экстремальным задачам теории наилучших приближений периодических функций тригонометрическими полиномами в гильбертовом пространстве $L_2 := L_2[0, 2\pi]$. Полученные в диссертационной работе результаты развивают и дополняют исследования указанных авторов в этом направлении. Здесь установлены окончательные оценки наилучших приближений периодических функций тригонометрическими полиномами посредством модулей непрерывности произвольного порядка или их модификаций и даны их приложения в задаче отыскания точных значений n-поперечников функциональных классов.

В работе также изучены и решены некоторые экстремальные задачи теории наилучших полиномиальных совместных приближений функций и их производных тригонометрическими полиномами и их соответствующими производными в гильбертовом пространстве $L_2[0, 2\pi]$, не решенные до недавнего времени. Найдены точные константы в неравенствах типа Джексона – Стечкина между величиною наилучшего совместного приближения функций и усреднёнными с весом обобщёнными модулями непрерывности высшего порядка r-ых производных функций в пространстве L_2. Вычислены точные значения верхних граней наилучших совместных приближений некоторых классов функций. Этим объясняется целесообразность и актуальность выбора темы исследования диссертационной работы.

Объект исследования и связь работы с научными программами (проектами) и темами. Исследование в диссертационной работе выполнено в рамках реализации перспективного плана научно-исследовательской работы кафедры математического анализа Хорогского государственного университета им. М.Назаршоева на 2018-2023 гг. по теме «Теория приближения функций».

Общая характеристика работы

Цель и задачи исследования. Основная цель диссертационной работы заключается в решении ряда экстремальных задач, связанных с:

- нахождением точных констант в неравенствах типа Джексона – Стечкина между наилучшими приближениями и обобщёнными модулями непрерывности;
- вычислением значений n-поперечников классов функций, задаваемых усреднёнными с весом значениями модулей непрерывности высших порядков r-ых производных;
- вычислением верхних граней наилучших совместных приближений некоторых классов функций в пространстве L_2.

Основные методы исследования. В диссертационной работе широко используются современные методы теории аппроксимации вариационного содержания в нормированных пространствах и методы решения экстремальных задач теории функций, базирующиеся на идеях функционального анализа, а именно метод Н.П.Корнейчука оценки сверху наилучших приближений классов функций подпространством полиномов заданной размерности и разработанная В.М.Тихомировым оценка снизу поперечников множеств в различных банаховых пространствах.

Научная новизна исследований. В диссертации получены следующие основные результаты:

- найдены точные константы в неравенствах типа Джексона – Стечкина между наилучшими приближениями и обобщёнными модулями непрерывности;
- вычислены значения n-поперечников классов функций, задаваемых усреднёнными с весом значениями модулей непрерывности высших порядков r-ых производных;
- вычислены верхние грани наилучших совместных приближений некоторых классов функций в пространстве L_2.

Положения, выносимые на защиту:

- теоремы о точном неравенстве типа Джексона – Стечкина для наилучшего среднеквадратического приближения посредством усреднённой характеристики гладкости $\Omega_m(f^{(r)}, t)$;
- теоремы о точных значениях n-поперечников некоторых классов 2π-периодических функций в метрике пространства L_2;
- теоремы о верхних гранях наилучшего совместного полиномиального приближения классов функций.

Теоретическая и научно-практическая значимость работы. Работа носит теоретический характер. Полученные в диссертационной работе результаты и методы их доказательств можно применять при решении экстремальных задач теории приближения функций многих переменных и функций комплексных переменных, принадлежащих банаховым пространствам Харди и Бергмана.

Личный вклад автора. Задачи исследования и выбор метода доказательств сформулированны научным руководителем. Все приведённые в диссертационной работе результаты получены лично автором.

Апробация результатов диссертации. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на:

- семинарах кафедры математического анализа Хорогского государственного университета им. М.Назаршоева (Хорог, 2017-2023 гг.);
- семинарах кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений Таджикского национального университета под руководством академика Национальной академии наук Таджикистана, профессора М.Ш.Шабозова (Душанбе, 2017-2023 гг.);
- международной научной конференции «Современные проблемы теории чисел и математического анализа», посвящённой 80-летию со дня рождения доктора физ.-мат. наук, профессора Дододжона Исмоилова (Душанбе, 29-30 апреля 2022 г.);
- международной научной конференции «Современные проблемы математического анализа и теории функций», посвящённой 70-летию академика Национальной академии наук Таджикистана М.Ш.Шабозова (Душанбе, 24-25 июня 2022 г.);
- международной республиканской научно-практической конференции «Актуальные проблемы и перспективы развития естественных и точных

наук» (Душанбе, 28-29 октября 2022 г.);

- международной научно-теоретической конференции «Развитие науки и образования в условиях глобализации на примере горных условий: проблемы, новые подходы и актуальные исследования», посвящённой 30-летию XVI-й сессии Верховного Совета Республики Таджикистан и 30-летию Хорогского государственного университета им. Моёншо Назаршоева (Хорог, 11-12 ноября 2022 г.);
- международной научной конференции «Современные проблемы математики», посвящённой 50-летию Института математики им. А.Джураева НАН Таджикистана (Душанбе, 26-27 мая 2023 г.).
- международной научной-практической конференции «Математика в современном мире» (Худжанд, 19-20 апреля 2024 г.).

Публикации по теме диссертации. Результаты исследований автора по теме диссертационной работы опубликованы в 11 научных работах, из них 5 статьей опубликованы в изданиях, входящих в действующий перечень ВАК при Президенте Республики Таджикистан, 6 – в трудах международных конференций. Из совместных с научным руководителем Г.А.Юсуповым [1-А, 2-А, 5-А, 8-А, 11-А] работ на защиту выносятся лишь только те результаты, полученные лично автором.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, двух глав, библиографического списка, содержащего 84 наименования, занимает 81 страницы машинописного текста и набрана на LaTeX 2_ε. Для удобства в диссертации применена сквозная нумерация теорем, лемм, следствий и формул. Они имеют тройную нумерацию, в которой первая цифра совпадает с номером главы, вторая указывает на номер параграфа, а третья — на порядковый номер теорем, лемм, следствий или формул в данном параграфе.

ГЛАВА 1. Точные неравенства между наилучшими приближениями и специальными модулями гладкости в метрике пространства L_p $(0 < p \leq \infty)$

На протяжении многих десятилетий решения экстремальных задач и их приложения интересовали многих математиков, поскольку эти задачи имеют разнообразные приложения при решении различных задач прикладной математики оптимизационного содержания. В экстремальных задачах, как обычно, требуется найти точную верхнюю грань погрешности приближения заданным методом на определенном классе функций или указать для этого класса наилучший аппарат приближения. В последнее время в решении экстремальных задач достигнуты значительные успехи.

Важный шаг в развитии экстремальных задач был сделан знаменитым русским математиком П.Л.Чебышёвым [39], заложившим в 50-е годы XIX века основы теории приближений. Принципиальную роль в становлении теории приближения функций сыграла теорема Вейерштрасса [73], согласно которой для любой непрерывной на отрезке функции последовательность её наилучших приближений многочленами порядка n сходится к нулю при $n \to \infty$. Теорема Вейерштрасса неконструктивна в том плане, что не содержит оценки скорости приближения. Таким образом появилась задача получения таких вид оценок. Фундаментальные результаты, связанные с изучением скорости убывания величины наилучших приближений функции в зависимости от её структурных свойств, были получены в работах А.Лебега [65], Ш.Ж.Валле Пуссена [62], Д.Джексона [63], С.Н.Бернштейна [8], Ж.Фавара [68], А.Н.Колмогорова [64], С.М.Никольского [29] и С.Б.Стечкина [32]. В дальнейшем развитием теории приближении как для практических приложений, так и теоретических основ, занимались многие математики.

В некоторых банаховых пространствах решение экстремальных задач доведено до точных констант, то есть получены окончательные результаты. Наиболее значимый прогресс указанных методов проявляется при решении экстремальных задач в нормированных пространствах для классов 2π-периодических дифференцируемых функций.

Одной из центральных экстремальных задач теории аппроксимации функций является задача о нахождении точных констант в неравенствах типа Джексона – Стечкина. Неравенствами типа Джексона – Стечкина в любом нормированном пространстве X принято называть неравенства вида

$$E_{n-1}(f)_X \leq \chi\, n^{-r}\omega_m(f^{(r)}, \tau/n)_X, \quad r \in \mathbb{Z}_+,\ \tau > 0,$$

в которых погрешность приближения индивидуальной функции f оценивается через заданную характеристику гладкости ω_m самой приближаемой функции или некоторой её производной $f^{(r)} \in X$. Известно, что наилучшая константа χ, вообще говоря, может зависеть как от пространства X, так и от m, n, r и τ. Здесь сразу возникает экстремальная задача нахождения точных констант в неравенстве типа Джексона – Стечкина, то есть задача получения неравенств между величиной наилучшего приближения и значением модулей непрерывности в точках $\tau_n = t/n$ $(0 < t \leq \pi)$, являющихся неулучшаемыми в метрике различных банаховых пространств на заданных классах функций.

По поводу важности получения точной константы в неравенствах Джексона – Стечкина, в монографии В.И.Иванова и О.И.Смирнова [21] отмечается, что «Интерес к точным константам, который сложился вокруг неравенств Джексона – Стечкина, возможно, не был бы столь оправданным, если бы каждый новый случай не требовал привлечения новых идей и методов, которые затем оказывались полезными и при решении других экстремальных задач». Первые точные константы в неравенстве Джексона были получены Н.П.Корнейчуком [25] для пространства $C(0, 2\pi]$ в 1962 г. и для пространства $L_2(0, 2\pi]$ Н.И.Черных [40, 41] в 1967 г. После результатов Н.П.Корнейчука и Н.И.Черных появился интерес к получению точных констант в неравенствах типа Джексона – Стечкина и в других банаховых пространствах. В 1992 г. Н.И.Черных [42] доказал точное неравенство Джексона – Стечкина в пространстве $L_p(0, 2\pi),\ 1 \leq p < 2$. Точные значения констант, используемых в неравенствах Джексона, зависят от размерности подпространства, в котором происходит приближение, а также от значения аргумента в модуле непрерывности, применяемого в данном приближении. В 1979 г. Н.И.Черных [59] нашёл минимальное значение аргумента в модуле непрерывности, при котором точная константа в неравенстве Джексона – Стечкина в пространстве $L_p(-\pi, \pi]$ выходит на свой глобальный минимум. Нахождение таких аргументов, называемых оптимальными аргументами или точками Черныха, становится важной экстремальной задачей в теории приближения функций.

Следует отметить, что в разное время этой тематикой занимались В.И.Бердышев [7], В.В.Жук [19], В.В.Арестов и В.Ю.Попов [3], А.Г.Бабенко [4–6], В.И.Иванов [20–24], А.А.Лигун [26, 27], Л.В.Тайков [34–36], В.А.Юдин [54], С.Б.Вакарчук [10, 11], С.Б.Вакарчук и В.И.Забутная [60], В.В.Шалаев [53], М.Ш.Шабозов [43, 44], М.Ш.Шабозов и С.Б.Вакарчук [47] и многие другие математики.

§ 1.1. Предварительные обозначения и определения

1.1.1. Наилучшие приближения функций $f \in L_2$ и известные результаты

Приводим известные факты, обозначения и определения, которыми будем пользоваться в дальнейшем.

Всюду далее в диссертационной работе приняты следующие обозначения: $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел; $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$; $\mathbb{R}_+$ – множество положительных чисел вещественной оси $\mathbb{R} = (-\infty; +\infty)$; $\mathbb{Z}$ – множество целых чисел.

Пусть $L_2 := L_2[0, 2\pi]$ — пространство суммируемых с квадратом функций, у которых норма

$$\|f\| := \|f\|_{L_2} = \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} < \infty.$$

Через $\mathscr{T}_{2n-1}$ обозначим подпространство тригонометрических полиномов

$$T_{n-1}(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \big(\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx\big)$$

порядка $\leq n-1$ $(n \in \mathbb{N})$. Для произвольной функции $f \in L_2$, имеющей разложение в ряд Фурье

$$f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k(f) \cos\big(kx + \gamma_k\big), \tag{1.1.1}$$

где равенство понимается в смысле сходимости в пространстве L_2, величина её наилучшего приближения элементами $T_{n-1} \in \mathscr{T}_{2n-1}$ равна

$$E_{n-1}(f) := \inf\Big\{\|f - T_{n-1}\| : \ T_{n-1}(x) \in \mathscr{T}_{2n-1}\Big\} =$$

$$= \|f - S_{n-1}(f)\| = \left\{\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f)\right\}^{1/2}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1.1.2}$$

где $\rho_k^2(f)=a_k^2(f)+b_k^2(f)$, $a_k(f)$, $b_k(f)$ — косинус и синус-коэффициенты Фурье функции $f\in L_2$. Здесь

$$S_{n-1}(f,x)=\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\rho_k(f)\cos\big(kx+\gamma_k\big)$$

— частная сумма $(n-1)$-го порядка ряда Фурье (1.1.1) функции f.

Через $L_2^{(r)}$ $(r\in\mathbb{N})$ обозначим множество функций $f\in L_2$, у которых производные $(r-1)$-го порядка абсолютно непрерывны, а производные r-го порядка $f^{(r)}$ принадлежат пространству L_2.

Хорошо известно, что для произвольной функции $f\in L_2^{(r)}$ её промежуточные производные $f^{(s)}$ $(s=1,2,3,\ldots,r-1;\ r\geq 2,r\in\mathbb{N},f^{(0)}=f)$ также принадлежат пространству L_2, а потому представляет несомненный интерес изучение поведения величин $E_{n-1}(f^{(s)})$ на самом классе $L_2^{(r)}$ или на некотором его подклассе $\mathfrak{M}^{(r)}\subset L_2^{(r)}$.

Таким образом задача наилучшего совместного приближения класса $\mathfrak{M}^{(r)}\subset L_2^{(r)}$ формулируется следующим образом: требуется найти точное значение величины

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(s)}\big(\mathfrak{M}^{(r)}\big):=\sup\Big\{E_{n-1}(f^{(s)}):\ f\in\mathfrak{M}^{(r)}\Big\}. \tag{1.1.3}$$

Заметим, что если $f\in L_2^{(r)}$, то при всех $s=\overline{0,r}$ справедливо равенство [50]

$$E_{n-1}\big(f^{(s)}\big)=\left\{\sum_{k=n}^{\infty}k^{2s}\rho_k^2(f)\right\}^{1/2}. \tag{1.1.4}$$

Далее приводим конкретный вид модификации модулей непрерывности в пространстве L_2, с которыми связаны результаты настоящей диссертационной работы.

Для характеризации структурных свойств функции $f\in L_2$, мы пользуемся понятием модуля непрерывности m-го порядка, который определяется равенством

$$\omega_m(f,t) := \sup\Big\{\|\Delta_h^m f(\cdot)\| : \ |h| \le t\Big\}, \tag{1.1.5}$$

где

$$\Delta_h^m f(x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} f(x + (m-k)h)$$

— конечная разность m-го порядка функции f в точке x с шагом h.

Используя равенство Парсеваля, для функции $f \in L_2$ легко доказать соотношение

$$\|\Delta_h^m f(\cdot)\|^2 = \left\| \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} f(\,\cdot + (m-k)h) \right\|^2 =$$

$$= 2^m \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^2(f)(1 - \cos kh)^m.$$

Отсюда, в силу равенства (1.1.5), получаем

$$\omega_m^2(f,t) = 2^m \sup\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^2(f)(1-\cos kh)^m : \ |h| \le t \right\}. \tag{1.1.6}$$

Если функция $f \in L_2^{(r)}$ ($r \in \mathbb{Z}_+$, $L_2^{(0)} = L_2$), то исходя из формального равенства

$$f^{(r)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^r \left(a_k(f) \cos\left(kx + \frac{r\pi}{2}\right) + b_k(f) \sin\left(kx + \frac{r\pi}{2}\right)\right)$$

легко вычислить, что

$$\omega_m^2(f^{(r)},t) = 2^m \sup\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} k^{2r} \rho_k^2(f)(1-\cos kh)^m : \ |h| \le t \right\}. \tag{1.1.7}$$

При решении задач теории приближения в пространстве L_2 вопросы вычисления точных констант

$$\chi_{m,n,r}(t) := \sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\neq \mathrm{const}}} \frac{n^r E_{n-1}(f)}{\omega_m\big(f^{(r)}, t/n\big)}, \quad 0 < t \le 2\pi \tag{1.1.8}$$

в неравенствах типа Джексона – Стечкина

$$E_{n-1}(f) \le \chi\, n^{-r}\omega_m(f^{(r)}, t/n)$$

в различных нормированных пространствах исследовались Н.П.Корнейчуком [25], Н.И.Черных [40–42], В.А.Юдиным [54], А.А.Лигуном [26, 27], В.И.Ивановым и О.И.Смирновым [21], Л.В.Тайковым [34–36], А.Г.Бабенко [4, 5], С.Н.Васильевым [16], В.И.Бердышевым [7], В.В.Арестовым и Н.И.Черных [59], В.В.Арестовым и В.Ю.Поповым [3], В.В.Шалаевым [53], С.Б.Вакарчуком [10, 11, 14], М.Ш.Шабозовым [43, 44, 50], М.Ш.Шабозовым и Г.А.Юсуповым [45, 46, 49, 70, 72], и многими другими. Обстоятельный обзор и истории неравенства Джексона – Стечкина приведён в статье В.И.Иванова [23].

В последнее время при решении ряда экстремальных задач теории аппроксимации функций вместо классического модуля непрерывности m-го порядка (1.1.5) часто используют различные модификации классического модуля непрерывности. Использование различных модификаций модуля непрерывности продиктовано специфическими условиями рассматриваемых задач и позволяет получить содержательные результаты, раскрывающие сущность исследуемых проблем.

Одна модификация модуля непрерывности (1.1.5) основана на применении оператор – функции Стеклова

$$S_h(f,x) = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} f(x+\tau)d\tau, \quad h > 0.$$

Полагаем $S_{h,k}(f) := S_h\big(S_{h,k-1}(f)\big)$, где $k \in \mathbb{N}$ и $S_{h,0}(f) \equiv f$, $\mathbb{I}$ — единичный оператор в пространстве L_2. Определим согласно работе [2] обобщённые разности первых и высших порядков следующим образом:

$$\widetilde{\Delta}_h^1(f,x) := S_h(f,x) - f(x) = \big(S_h - \mathbb{I}\big)(f,x),$$

$$\widetilde{\Delta}_h^k(f,x) := \widetilde{\Delta}_h^1\big(\widetilde{\Delta}_h^{k-1}(f,x)\big) = \big(S_h - \mathbb{I}\big)^k(f,x) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}S_{h,k}(f,x),$$

где $n = 2, 3, \ldots$. Для указанных обозначений рассматривается характеристика гладкости вида

$$\widetilde{\Omega}_m(f,t) := \sup\Big\{\big\|\widetilde{\Delta}_h^k(f,\cdot)\big\| : \ 0 < h \le t\Big\}, \tag{1.1.9}$$

которая называется *специальным модулем непрерывности m-го порядка* функции $f \in L_2$.

Простые вычисления с привлечением равенства Парсеваля позволяют найти явный вид модуля непрерывности (1.1.9) (см., например, [43])

$$\widetilde{\Omega}_m\big(f,t\big)_2 = \sup_{|h|\le t}\sum_{k=1}^{\infty}\rho_k^2(f)\left(1 - \frac{\sin kh}{kh}\right)^{2m}. \tag{1.1.10}$$

Учитывая соотношение (1.1.10), для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ запишем

$$\widetilde{\Omega}_m\big(f^{(r)},t\big)_2 = \sup_{|h|\le t}\sum_{k=1}^{\infty}k^{2r}\rho_k^2(f)\left(1 - \frac{\sin kh}{kh}\right)^{2m}. \tag{1.1.11}$$

При решении некоторых экстремальных задач теории приближения вместо классического модуля непрерывности m-го порядка функции $f \in L_2$ иногда удобнее использовать следующую эквивалентную величине (1.1.5) характеристику гладкости

$$\Omega_m(f,t)_2 = \left\{ \frac{1}{t^m} \int\limits_0^t \cdots \int\limits_0^t \|\Delta_{\overline{h}}^m f(\cdot)\|^2 dh_1 \cdots dh_m \right\}^{1/2}, \qquad (1.1.12)$$

где $t > 0$, $\overline{h} := (h_1, \cdots, h_m)$; $\Delta_{\overline{h}}^m = \Delta_{h_1}^1 \circ \cdots \circ \Delta_{h_m}^1$;

$$\Delta_{h_j}^1 f(x) := f(x+h_j) - f(x), \; j = \overline{1,m},$$

а потому определённый интерес представляет также вычисление точной константы

$$\mathbb{K}_{m,n,r}(t) := \sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f \neq \text{const}}} \frac{n^r E_{n-1}(f)}{\Omega_m\big(f^{(r)}, t/n\big)}, \quad 0 < t \leq 2\pi \qquad (1.1.13)$$

в неравенстве типа Джексона – Стечкина вида

$$E_{n-1}(f) \leq \mathbb{K}_{m,n,r}(t) \frac{1}{n^r} \Omega_m\big(f^{(r)}, t/n\big).$$

Отметим, что С.Б.Вакарчук [10] доказал, что при любых $n, m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ и $t \in (0, \pi/2]$ справедливы равенства

$$\mathbb{K}_{m,n,r}(t) = \left\{ 2\left(1 - \frac{\sin t}{t}\right) \right\}^{-m/2} \qquad (1.1.14)$$

и, в частности,

$$\mathbb{K}_{m,n,r}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left\{ \frac{\pi}{2(\pi-2)} \right\}^{-m/2}. \qquad (1.1.15)$$

Следует отметить, что в ходе исследования важных вопросов приближения в метрическом пространстве L_p $(0 < p < 1)$ усредненная характеристика гладкости функций вида (1.1.12) рассматривалась К.В.Руновским [30] и Э.А.Стороженко, В.Г.Кротовым, П.Освальдом [33].

Заметим, что усредненные модули непрерывности иного вида ранее изучались Р.М.Тригубом и Е.С.Белинским (см., например, [67]) в пространствах

L_p $(p \geq 1)$ и была показана их слабая эквивалентность обычным модулям непрерывности. Также отметим, что подробные свойства характеристики гладкости (1.1.12) изучены в работе С.Б.Вакарчука, М.Ш.Шабозова и В.И.Забутной [13].

Отметим основные свойства $\Omega_m(f,t)$ [13], поскольку они, по нашему мнению, представляют определенный интерес и будут использованы в дальнейшем.

1. $\lim\limits_{t\to 0}\Omega_m(f,t)=0.$

2. Функция $\Omega_m(f,t)$ непрерывна при $t>0$.

3. $\Omega_m(f,t)\leq 2^m\big\|f\big\|$.

4. $\Omega_m(f_1+f_2,t)\leq 2\big(\Omega_m(f_1,t)+\Omega_m(f_2,t)\big)$.

5. $\Omega_m(f,nt)\leq n^m\,\Omega_m(f,t)$.

6. $\widetilde{C}_m\Omega_m(f,t)\leq\omega_m(f,t)\widetilde{C}^*\Omega_m(f,t)$, где $\widetilde{C}_m$ и $\widetilde{C}^*$ — некоторые постоянные, не зависящие от t и $f\in L_2$.

7. Функция $\Omega_m(f,t)$ является почти возрастающей, то есть существует константа C, не зависящая от f и t, такая, что для любых $0<t_1<t_2$ имеет место неравенство

$$\Omega_m(f,t_1)\leq C\,\Omega_m(f,t_2).$$

1.1.2. Основная теорема и её следствия

Условимся, что в соотношениях общего характера при вычислении верхней грани по всем функциям $f\in L_2^{(r)}$ предполагается, что $f\neq\mathrm{const}$. Далее под весовой функцией на отрезке $[0,h]$ будем понимать неотрицательную суммируемую функцию φ, не эквивалентную нулю на этом же отрезке.

С целью обобщения всех результатов [1, 10, 11, 34–36, 40, 41, 44, 53, 55–58]

М.Ш.Шабозов и Г.А.Юсупов [45] рассмотрели экстремальную характеристику следующего вида

$$\chi_{m,n,r,p}(\varphi,h) := \sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h \omega_m^p\big(f^{(r)},t\big)\varphi(t)dt\right)^{1/p}}, \tag{1.1.16}$$

где $m,n\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $0<p\le 2$, $0<h\le\pi/n$, φ — неотрицательная суммируемая на отрезке $[0,h]$ не эквивалентная нулю функция (весовая функция). В работе [45] доказано, что для $0<p\le 2$, $0<h\le\pi/n$ имеет место двойное неравенство

$$\left\{A_{n,m}^{r,p}(\varphi,h)\right\}^{-1} \le \chi_{m,n,r,p}(\varphi,h) \le \left\{\inf_{n\le k<\infty} A_{k,m}^{r,p}(\varphi,h)\right\}^{-1}, \tag{1.1.17}$$

где

$$A_{k,m}^{r,p}(\varphi,h) := 2^{m/2}\left(k^{rp}\int\limits_0^h (1-\cos kt)^{mp/2}\varphi(t)dt\right)^{1/p}. \tag{1.1.18}$$

Двойное неравенство (1.1.17) является обобщением одного результата А.А.Лигуна [26], вытекающее из него при $p=2$.

Обозначим $\mathrm{sinc\,t} := \dfrac{\sin t}{t}$ $(t\neq 0)$, доопределив данную функцию значением 1 в точке $t=0$, то есть полагая $\mathrm{sinc}\,0=1$.

По аналогии с характеристикой (1.1.16), введём в рассмотрение следующую экстремальную аппроксимационную характеристику

$$\mathscr{K}_{m,n,r,p}(\varphi,h) := \sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{2^{m/2}E_{n-1}(f)_2}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p\big(f^{(r)},t\big)\,\varphi(t)dt\right)^{1/p}}, \tag{1.1.19}$$

где $m,n\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $0<p\leq\infty$, $0<nh\leq 3\pi/4$, $\varphi(t)\geq 0$ — весовая на отрезке $[0,h]$ функция, $\Omega_m^p\bigl(f^{(r)},t\bigr)$ определена в (1.1.12).

В [61] доказано, что если $m,n\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $0<p\leq 2$, $0<h<\pi/n$, φ — весовая на $[0,h]$ функция, то имеет место двойное неравенство

$$\Bigl\{\mathscr{B}_{n,h,p}^{r,m}(\varphi)\Bigr\}^{-1}\leq\mathscr{K}_{m,n,r,p}(\varphi,h)\leq\Bigl\{\inf_{n\leq k<\infty}\mathscr{B}_{k,h,p}^{r,m}(\varphi)\Bigr\}^{-1}, \qquad (1.1.20)$$

где

$$\mathscr{B}_{k,h,p}^{r,m}(\varphi)=\left(k^{rp}\int\limits_0^h\bigl(1-\operatorname{sinc}\mathrm{kt}\bigr)^{mp/2}\varphi(t)dt\right)^{1/p}. \qquad (1.1.21)$$

При этом требовалось выяснить условия, при выполнении которых имеет место равенство

$$\inf_{n\leq k<\infty}\mathscr{B}_{k,h,p}^{r,m}(\varphi)=\mathscr{B}_{n,h,p}^{r,m}(\varphi). \qquad (1.1.22)$$

В [61] также доказано, что если весовая функция $\varphi\in C^{(1)}[0,h]$ и при всех $1/r<p\leq 2$, $r\in\mathbb{N}$ и $0<t\leq h$ выполняется дифференциальное неравенство

$$(rp-1)\varphi(t)-t\varphi'(t)\geq 0, \qquad (1.1.23)$$

то имеет место равенство (1.1.22). Ясно, что класс весовых функций, удовлетворяющих неравенство (1.1.23), является весьма узким, а потому это неравенство используется в редких случаях.

С.Б.Вакарчуком, М.Ш.Шабозовым и В.И.Забутной в [13] доказано, что при любых $m,n,r\in\mathbb{N}$, $1/r<p\leq 2$, $h\in\bigl(0,3\pi/(4n)\bigr]$ имеет место соотношение

$$\mathscr{K}_{m,n,r,p}(\varphi,h)=\Bigl\{\inf_{n\leq k<\infty}\mathscr{B}_{k,h,p}^{r,m}(\varphi)\Bigr\}^{-1}=\Bigl\{\mathscr{B}_{n,h,p}^{r,m}(\varphi)\Bigr\}^{-1}, \qquad (1.1.24)$$

где по-прежнему $\mathscr{B}_{k,h,p}^{r,m}(\varphi)$ определяется равенством (1.1.21).

Приводим простое доказательство равенства (1.1.24). Пусть весовая функция $\varphi(t)$ удовлетворяет неравенству (1.1.23). Тогда, обозначив

$$y(k) := k^{rp} \int\limits_0^h \bigl(1 - \operatorname{sinc} \mathrm{kt}\bigr)^{mp/2} \varphi(t) dt$$

и дифференцируя функцию непрерывного аргумента

$$y(x) := x^{rp} \int\limits_0^h \bigl(1 - \operatorname{sinc} xt\bigr)^{mp/2} \varphi(t) dt \tag{1.1.25}$$

по аргументу x, получаем

$$\frac{d}{dx} y(x) = rpx^{rp-1} \int\limits_0^h \bigl(1 - \operatorname{sinc} xt\bigr)^{mp/2} \varphi(t) dt +$$

$$+ x^{rp} \int\limits_0^h \frac{d}{dx} \bigl(1 - \operatorname{sinc} xt\bigr)^{mp/2} \varphi(t) dt. \tag{1.1.26}$$

Пользуясь тождеством

$$\frac{d}{dx} \bigl(1 - \operatorname{sinc} xt\bigr)^{mp/2} = \frac{t}{x} \cdot \frac{d}{dt} \bigl(1 - \operatorname{sinc} xt\bigr)^{mp/2}$$

и выполнив интегрирование по частям во втором интеграле соотношения (1.1.26), с учётом неравенства (1.1.23), имеем

$$\frac{d}{dx} y(x) = rpx^{rp-1} \int\limits_0^h \bigl(1 - \operatorname{sinc} xt\bigr)^{mp/2} \varphi(t) dt +$$

$$+ x^{rp-1} \int\limits_0^h \frac{d}{dt} \bigl(1 - \operatorname{sinc} xt\bigr)^{mp/2} t\varphi(t) dt = x^{rp-1} \Biggl\{ \bigl(1 - \operatorname{sinc} ht\bigr)^{mp/2} h\varphi(h) +$$

$$+ \bigl[(rp-1)\varphi(t) - t\varphi'(t)\bigr] \int\limits_0^h \bigl(1 - \operatorname{sinc} xt\bigr)^{mp/2} dt \Biggr\} \geq 0.$$

Так как по условию

$$(rp-1)\varphi(t) - t\varphi'(t) \geq 0,$$

то очевидно, что $\dfrac{d}{dx}y(x) = y'(x) \geq 0$ и в силу монотонного возрастания функции $y(x)$

$$\min_{k\geq n} y(x) = y(n) := n^{rp}\int\limits_0^h \bigl(1-\operatorname{sinc}\mathrm{nt}\bigr)^{mp/2}\varphi(t)dt,$$

откуда и следует соотношение (1.1.22).

Здесь мы докажем равенство (1.1.22) без предположения дифференцируемости весовой функции $\varphi(t)$ при всех $0<p\leq\infty$.

Имеет место следующая общая

Теорема 1.1.1. *Пусть* $m,n\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $0<p\leq\infty$, $h\in(0,3\pi/(4n)]$, φ *— весовая на* $[0,h]$ *функция. Тогда справедливо равенство*

$$\mathscr{K}_{m,n,r,p}(\varphi,h) := \sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{2^{m/2}n^r E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p\bigl(f^{(r)},t\bigr)\varphi(t)dt\right)^{1/p}} =$$

$$= \left\{\int\limits_0^h \bigl(1-\operatorname{sinc} nt\bigr)^{mp/2}\varphi(t)dt\right\}^{-1/p}. \tag{1.1.27}$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что в равенстве (1.1.19) для параметра p, удовлетворяющего условию $0<p\leq\infty$, функционал $\|\Omega_m\varphi^{1/p}\|_p$ определен соотношениями

$$\bigl\|\Omega_m\varphi^{1/p}\bigr\|_p = \left(\int\limits_0^h \Omega_m^p\bigl(f^{(r)},t\bigr)_2\,\varphi(t)dt\right)^{1/p}, \quad \text{если} \quad 0<p<\infty,$$

$$\bigl\|\Omega_m\bigr\|_\infty = \max\Bigl\{\Omega_m\bigl(f^{(r)},t\bigr)_2:\ t\in(0,h),\ 0<h\leq 3\pi/4\Bigr\}, \quad \text{если} \quad p=\infty.$$

При этом указанный функционал при $1 \le p \le \infty$ является нормой.

Используя формулы Эйлера, представим ряд Фурье функции $f \in L_2$ в комплексной форме

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f)e^{ikx}, \tag{1.1.28}$$

где $c_k(f)$ и $c_{-k}(f)$ — взаимно сопряженные числа, и так как функции $\{e^{ikx}\}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ образуют на $[0, 2\pi]$ ортогональную систему, то, применяя равенство Парсеваля к соотношению (1.1.28), запишем

$$\left\|\Delta_{\overline{h}}^m f(x)\right\|^2 = \left\|\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f)\Delta_{\overline{h}}^m\big(e^{ikx}\big)\right\|_2^2 =$$

$$= 2^m \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^2(f) \prod_{\nu=1}^{m} \big(1 - \cos kh_\nu\big). \tag{1.1.29}$$

Подставляя полученное выражение (1.1.29) в правую часть (1.1.12), получим

$$\Omega_m(f,t)_2 = \left\{\frac{1}{t^m}\int\limits_0^t \cdots \int\limits_0^t \|\Delta_{\overline{h}}^m f(\cdot)\|^2 dh_1 \cdots dh_m\right\}^{1/2} =$$

$$= \left\{\frac{1}{t^m}\int\limits_0^t \cdots \int\limits_0^t \left(2^m \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^2(f) \prod_{\nu=1}^{m} \big(1 - \cos kh_\nu\big)\right) dh_1 \cdots dh_m\right\}^{1/2} =$$

$$= \left\{ 2^m \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^2(f) \underbrace{\left(\frac{1}{t} \int\limits_0^t \big(1 - \cos kh_1\big) dh_1 \right) \cdots \left(\frac{1}{t} \int\limits_0^t \big(1 - \cos kh_m\big) dh_m \right)}_{m-\text{раз}} \right\}^{1/2} =$$

$$= \left\{ 2^m \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^2(f) \left(1 - \frac{\sin kt}{kt} \right)^m \right\}^{1/2}.$$

Таким образом для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$

$$\Omega_m^2\big(f, t\big)_2 = 2^m \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^2(f) \big(1 - \mathrm{sinc\,kt}\big)^m. \qquad (1.1.30)$$

Для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ запишем

$$f^{(r)}(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (ik)^r c_k(f) e^{ikx},$$

и, учитывая, что $c_k(f^{(k)}) := (ik)^r c_k(f)$, в силу (1.1.30) получаем

$$\Omega_m^2\big(f^{(r)}, t\big)_2 = 2^m \sum_{k=1}^{\infty} k^{2r} \rho_k^2(f) \big(1 - \mathrm{sinc\,kt}\big)^m. \qquad (1.1.31)$$

Учитывая тот факт, что [34, с.435]

$$\max\Big\{ |\mathrm{sinc\,u}| : \ u \geq nt \Big\} =$$

$$= \max\Big\{ \Big| \frac{\sin u}{u} \Big| : \ u \geq nt \Big\} = \frac{\sin nt}{nt} = \mathrm{sinc\,nt}, \quad 0 < nt \leq 3\pi/4,$$

будем иметь

$$\min\Big\{|1-\mathrm{sinc\,u}|:\ u\geq nt\Big\}=1-\mathrm{sinc\,nt},\quad 0<nt\leq 3\pi/4.$$

Воспользовавшись последним равенством, из (1.1.31) получаем

$$\Omega_m^2\big(f^{(r)},t\big)\geq 2^m\sum_{k=n}^{\infty}k^{2r}\rho_k^2(f)\big(1-\mathrm{sinc\,kt}\big)^m\geq$$

$$\geq 2^m\min_{k\geq n}k^{2r}\big(1-\mathrm{sinc\,kt}\big)^m\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2(f)=$$

$$=2^m n^{2r}\big(1-\mathrm{sinc\,nt}\big)^m E_{n-1}^2(f). \tag{1.1.32}$$

Таким образом для произвольной функции $f\in L_2^{(r)}$ имеет место неравенство

$$\Omega_m^2\big(f^{(r)},t\big)\geq 2^m n^{2r}\big(1-\mathrm{sinc\,nt}\big)^m E_{n-1}^2(f). \tag{1.1.33}$$

Теперь переходим к доказательству равенства (1.1.27).

Для случая $0<p\leq 2$ при любых числах $m,n\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $0<p\leq 2$, $0<h\leq 3\pi/4$ доказательство (1.1.27) приведено в [61, стр.7, следствие 1]. Поэтому приводим доказательство соотношения (1.1.27) в случае $r\in\mathbb{Z}_+$, $2\leq p\leq\infty$. С этой целью обе части неравенства (1.1.32) возведём в степень $p/2$ $(2\leq p\leq\infty)$, для $0<nt\leq 3\pi/4$ будем иметь

$$\Omega_m^p\big(f^{(r)},t\big)_2\geq 2^{mp/2}n^{rp}\big(1-\mathrm{sinc\,kt}\big)^{mp/2}E_{n-1}^p(f)_2. \tag{1.1.34}$$

Умножая обе части полученного неравенства (1.1.34) на вес φ и интегрируя по отрезку $[0,h],\ 0<h\leq 3\pi/(4n)$, получаем

$$\int\limits_0^h \Omega_m^p\big(f^{(r)},t\big)_2\varphi(t)dt \geq 2^{mp/2}n^{rp}E_{n-1}^p(f)_2\int\limits_0^h \big(1-\mathrm{sinc\,nt}\big)^{mp/2}\varphi(t)dt. \quad (1.1.35)$$

Так как неравенство (1.1.35) имеет место для произвольной функции $f\in L_2^{(r)}$, то запишем оценку сверху величины, расположенной в левой части равенства (1.1.27)

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{2^{m/2}E_{n-1}(f)_2}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p\big(f^{(r)},t\big)_2\varphi(t)dt\right)^{1/p}}\leq$$

$$\leq\frac{1}{\left(n^{rp}\int\limits_0^h \big(1-\mathrm{sincnt}\big)^{mp/2}\varphi(t)dt\right)^{1/p}}, \quad (1.1.36)$$

или, что то же,

$$\mathscr{K}_{m,n,r,p}(\varphi,h)\leq\left\{n^{rp}\int\limits_0^h \big(1-\mathrm{sinc\,nt}\big)^{mp/2}\varphi(t)dt\right\}^{-1/p}. \quad (1.1.37)$$

Таким образом оценка сверху для величины, расположенной в левой части равенства (1.1.27), получена. С целью получения соответствующей оценки снизу указанной величины, введём в рассмотрение функцию $f_0(x)=\cos nx\in L_2^{(r)}$, для которой

$$f_0^{(r)}(x)=n^r\cos\left(nx+\frac{r\pi}{2}\right)$$

и в силу формул (1.1.2) и (1.1.31) запишем

$$E_{n-1}(f_0)_2=1,\quad \Omega_m\big(f_0^{(r)},t\big)_2=2^{m/2}n^r\big(1-\mathrm{sinc\,nt}\big)^{m/2}, \quad (1.1.38)$$

$$\left(\int_0^h \Omega_m^p\big(f_0^{(r)},t\big)_2\varphi(t)dt\right)^{1/p} =$$

$$= 2^{m/2}n^r\left(\int_0^h \big(1-\operatorname{sinc}\mathrm{nt}\big)^{mp/2}\varphi(t)dt\right)^{1/p}. \qquad (1.1.39)$$

Пользуясь равенствами (1.1.38) и (1.1.39), получаем оценку снизу

$$\mathscr{K}_{m,n,r,p}(\varphi,h) \geq \sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{2^{m/2}E_{n-1}(f_0)_2}{\left(\int_0^h \Omega_m^p\big(f_0^{(r)},t\big)_2\,\varphi(t)dt\right)^{1/p}} =$$

$$= \frac{2^{m/2}\cdot 1}{2^{m/2}\left(n^{rp}\int_0^h \big(1-\operatorname{sinc}\mathrm{nt}\big)^{mp/2}\,\varphi(t)dt\right)^{1/p}} =$$

$$= \left\{n^{rp}\int_0^h \big(1-\operatorname{sinc}\mathrm{nt}\big)^{mp/2}\varphi(t)dt\right\}^{-1/p}. \qquad (1.1.40)$$

Требуемое равенство (1.1.27) получаем из сопоставления неравенств (1.1.37) и (1.1.40), чем и завершаем доказательство теоремы 1.1.1.

Следствие 1.1.1. *В условиях теоремы 1.1.1 при любых* $m,n\in\mathbb{N}$, $p=2/m$, $h=\pi/(2n)$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $\varphi(t)=t$ *справедливо равенство*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{n^{r-m}E_{n-1}(f)}{\left(\int_0^{\pi/(2n)} t\,\Omega_m^{2/m}\big(f^{(r)},t\big)dt\right)^{m/2}} = \left\{\frac{4}{\pi^2-8}\right\}^{m/2}.$$

Доказательство. В самом деле, полагая в (1.1.27) $p=2/m$, $h=\pi/(2n)$ и $\varphi(t)=t$, получим

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{2^{m/2}n^rE_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^{\pi/(2n)}t\,\Omega_m^{2/m}\big(f^{(r)},t\big)dt\right)^{m/2}}=$$

$$=\left\{\int\limits_0^{\pi/(2n)}t\left(1-\frac{\sin nt}{nt}\right)dt\right\}^{-m/2}=\left\{\int\limits_0^{\pi/(2n)}tdt-\frac{1}{n}\int\limits_0^{\pi/(2n)}\sin ntdt\right\}^{-m/2}=$$

$$=\left\{\frac{\pi^2}{8n^2}-\frac{1}{n^2}\right\}^{-m/2}=n^m\left\{\frac{8}{\pi^2-8}\right\}^{m/2},$$

откуда получаем

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{n^{r-m}E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^{\pi/(2n)}t\,\Omega_m^{2/m}\big(f^{(r)},t\big)dt\right)^{m/2}}=\left\{\frac{4}{\pi^2-8}\right\}^{m/2}.$$

Следствие 1.1.1 доказано.

Следствие 1.1.2. *Пусть* $m,n\in\mathbb{N}$, $p=2/m$, $h=\pi/(2n)$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $r\geq m/2$, $\varphi(t)\equiv 1$. *Тогда из* (1.1.27) *следует равенство*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{2^{m/2}n^{r-m/2}E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^{\pi/(2n)}\Omega_m^{2/m}\big(f^{(r)},t\big)dt\right)^{m/2}}=\left\{\left(\frac{\pi}{2}\right)-Si\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}^{-m/2},$$

где $Si(u):=\int\limits_0^u sinc\,t\,dt$ — *интегральный синус.*

Доказательство. В действительности в равенстве (1.1.27), полагая $p = 2/m$, $h = \pi/(2n)$ и $\varphi(t) = 1$, имеем

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{2^{m/2}n^r E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^{\pi/(2n)} \Omega_m^{2/m}\big(f^{(r)}, t\big)dt\right)^{m/2}} =$$

$$= \left\{\int\limits_0^{\pi/(2n)} \left(1 - \frac{\sin nt}{nt}\right) dt\right\}^{-m/2} = \left\{\int\limits_0^{\pi/(2n)} dt - \int\limits_0^{\pi/(2n)} \frac{\sin nt}{nt}dt\right\}^{-m/2} =$$

$$= \left\{\frac{\pi}{2n} - \frac{1}{n}\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{t}dt\right\}^{-m/2} = n^{m/2}\Big\{\frac{\pi}{2} - Si\left(\frac{\pi}{2}\right)\Big\}^{-m/2},$$

или

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{2^{m/2}n^{r-m/2} E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^{\pi/(2n)} \Omega_m^{2/m}\big(f^{(r)}, t\big)dt\right)^{m/2}} = \left\{\left(\frac{\pi}{2}\right) - Si\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}^{-m/2}.$$

Следствие 1.1.2 доказано.

§ 1.2. Об обобщении одной экстремальной характеристики для модуля непрерывности (1.1.12)

В работе [9] с целью обобщения некоторых результатов Л.В.Тайкова [34] была введена в рассмотрение экстремальная характеристика

$$\mathcal{L}_{n,m,r}(t) := \sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{n^r E_{n-1}(f)}{\left(\omega_m^{2/m}(f^{(r)},t) + n^2\displaystyle\int_0^t (t-\tau)\omega_m^{2/m}\big(f^{(r)},\tau\big)d\tau\right)^{m/2}},$$

содержащая модуль непрерывности m-го порядка $\omega_m\big(f^{(r)},\tau\big)$ не только под знаком определённого интеграла, но и вне интеграла. Там же доказано, что при любых $n,m\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$ и любых $t\in(0,\pi/n]$ справедливы равенства

$$\mathcal{L}_{n,m,r}(t) = (nt)^{-m}. \tag{1.2.1}$$

Из (1.2.1) в качестве следствия при любых $t\in(0,\pi/n]$ выведены неравенство

$$\frac{1}{(nt)^m}\cdot\frac{1}{n^r} \le \sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{E_{n-1}(f)}{\omega_m(f^{(r)},t)} \le \frac{1}{n^r}\left(\frac{1}{(nt)^2}+\frac{1}{2}\right)^{m/2}. \tag{1.2.2}$$

Неравенство (1.2.2) при $m=1$ ранее было доказано Л.В.Тайковым [34], а для $m\ge 2$, $m\in\mathbb{N}$ представляет собой своеобразное обобщение неравенства Л.В.Тайкова.

Представляет определённый интерес ввести аналогичную $\mathscr{L}_{n,m,r}(t)$ экстремальную характеристику, где вместо модуля непрерывности m-го порядка $\omega_m(f^{(r)},t)$ фигурирует обобщённый модуль непрерывности $\Omega_m(f^{(r)},t)$.

С этой целью, введём в рассмотрение следующую экстремальную характеристику

$$\mathscr{L}_{n,m,r}(t) := \sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{n^r E_{n-1}(f)}{\left(\Omega_m^{2/m}(f^{(r)},t) + \dfrac{n^2}{t}\displaystyle\int_0^t \tau(t-\tau)\Omega_m^{2/m}\big(f^{(r)},\tau\big)d\tau\right)^{m/2}}. \tag{1.2.3}$$

Справедлива следующая

Теорема 1.2.1. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$. *Тогда при всех числах* t, *удовлетворяющих условию* $0 < t \le 3\pi/(4n)$, *справедливо равенство*

$$\mathscr{L}_{n,m,r}(t) = \left(\frac{\sqrt{3}}{nt}\right)^m. \tag{1.2.4}$$

Доказательство. Прежде всего докажем, что для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ имеет место неравенство

$$E_{n-1}^2(f) \le \sum_{k=n}^{\infty} \mathrm{sinc}kt\, \rho_k^2(f) + \Big(E_{n-1}^2(f)\Big)^{1-1/m} \frac{1}{2n^{2r/m}}\, \Omega_m^{2/m}\big(f^{(r)}, t\big). \tag{1.2.5}$$

В самом деле, в силу (1.1.2) имеем

$$E_{n-1}^2(f) - \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f)\, \mathrm{sinc}kt = \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f)\,(1 - \mathrm{sinc}kt) =$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} \big(\rho_k^2(f)\big)^{1-1/m} \big(\rho_k^2(f)\,(1 - \mathrm{sinc}kt)^m\big)^{1/m}. \tag{1.2.6}$$

Применяя неравенство Гёльдера для сумм [69, с.35] к правой части равенства (1.2.6), полагая $p = \dfrac{m}{m-1}$, $q = m$, $m \ne 1$, имеем

$$E_{n-1}^2(f) - \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f)\, \mathrm{sinc}kt \le$$

$$\le \left(\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f)\right)^{1-1/m} \left(\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f)\,(1 - \mathrm{sinc}kt)^m\right)^{1/m} \le$$

$$\le \left(\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f)\right)^{1-1/m} \frac{1}{2n^{2r/m}} \left(2^m \sum_{k=n}^{\infty} k^{2r} \rho_k^2(f)\,(1 - \mathrm{sinc}kt)^m\right)^{1/m} \le$$

$$\le \big(E_{n-1}^2(f)\big)^{1-1/m} \frac{1}{2n^{2r/m}}\, \Omega_m^{2/m}\big(f^{(r)}, t\big), \tag{1.2.7}$$

откуда и вытекает неравенство (1.2.5).

Умножая обе части неравенства (1.2.7) на t и интегрируя по t в пределах от 0 до τ, будем иметь

$$\frac{\tau^2}{2}E_{n-1}^2(f) \le$$

$$\le \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1-\cos k\tau}{k^2}\rho_k^2(f) + \Big(E_{n-1}^2(f)\Big)^{1-1/m} \frac{1}{2n^{2r/m}} \int\limits_0^{\tau} t\, \Omega_m^{2/m}\big(f^{(r)}, t\big)dt. \quad (1.2.8)$$

Полученное неравенство снова проинтегрируем по τ в пределах от 0 до h. В итоге приходим к следующему неравенству

$$\frac{h^3}{6}E_{n-1}^2(f) \le \sum_{k=n}^{\infty} \frac{kh-\sin kh}{k^3}\rho_k^2(f) +$$

$$+\Big(E_{n-1}^2(f)\Big)^{1-1/m} \frac{1}{2n^{2r/m}} \int\limits_0^{h} \int\limits_0^{\tau} t\, \Omega_m^{2/m}\big(f^{(r)}, t\big)dt d\tau. \quad (1.2.9)$$

Пользуясь формулой интегрирования по частям, интеграл в правой части неравенства (1.2.9) запишем в виде

$$\int\limits_0^{h} \int\limits_0^{\tau} t\, \Omega_m^{2/m}\big(f^{(r)}, t\big)dt d\tau = \int\limits_0^{h} \tau(h-\tau)\Omega_m^{2/m}\big(f^{(r)}, \tau\big)d\tau. \quad (1.2.10)$$

Учитывая равенство (1.2.10), неравенству (1.2.9) придадим вид

$$\frac{h^3}{6}E_{n-1}^2(f)\le\sum_{k=n}^{\infty}\frac{kh-\sin kh}{k^3}\rho_k^2(f)+$$

$$+\Big(E_{n-1}^2(f)\Big)^{1-1/m}\frac{1}{2n^{2r/m}}\int\limits_0^h\tau(h-\tau)\Omega_m^{2/m}\big(f^{(r)},\tau\big)d\tau. \qquad (1.2.11)$$

Поделив обе части неравенства (1.2.11) на h и заменив под знаком суммы число $1/k^2$ $(k\ge n)$ на $1/n^2$, будем иметь

$$\frac{t^2}{6}E_{n-1}^2(f)\le\frac{1}{n^2}\left(E_{n-1}^2(f)-\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2(f)\,\mathrm{sinc}kh\right)+$$

$$+\Big(E_{n-1}^2(f)\Big)^{1-1/m}\frac{1}{2t\,n^{2r/m}}\int\limits_0^t\tau(t-\tau)\,\Omega_m^{2/m}\big(f^{(r)},\tau\big)d\tau. \qquad (1.2.12)$$

Применив к выражению в круглых скобках первого слагаемого в правой части (1.2.12) неравенство (1.2.5) и выполнив простые арифметические операции, получаем

$$\frac{t^2}{6}E_{n-1}^2(f)\le\Big(E_{n-1}^2(f)\Big)^{1-1/m}\frac{1}{2n^{2+2r/m}}\left(\Omega_m^{2/m}\big(f^{(r)},t\big)+\right.$$

$$\left.+\frac{n^2}{t}\int\limits_0^t\tau(t-\tau)\,\Omega_m^{2/m}\big(f^{(r)},\tau\big)d\tau\right). \qquad (1.2.13)$$

Из неравенства (1.2.13) для произвольной $f\in L_2^{(r)}$ следует, что

$$\frac{n^rE_{n-1}(f)}{\left(\Omega_m^{2/m}(f^{(r)},t)+\dfrac{n^2}{t}\displaystyle\int\limits_0^t\tau(t-\tau)\Omega_m^{2/m}\big(f^{(r)},\tau\big)d\tau\right)^{m/2}}\le\left(\frac{\sqrt{3}}{nt}\right)^m. \qquad (1.2.14)$$

Оценка сверху для величины, стоящей в правой части (1.2.4), после замены h на t следует из неравенства (1.2.14)

$$\mathscr{L}_{n,m,r}(t) \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{nt}\right)^{m}. \tag{1.2.15}$$

Для получения соответствующей оценки снизу указанной величины введём в рассмотрение функцию $f_0(x) = \cos nx \in L_2^{(r)}$. Так как в силу формул (1.1.2) и (1.1.31)

$$E_{n-1}^2(f_0) = 1, \quad \Omega_m^2\big(f_0^{(r)}, t\big)_2 = 2^m n^{2r}\big(1 - \mathrm{sinc} nt\big)^m, \tag{1.2.16}$$

то мы имеем

$$\mathscr{L}_{n,m,r}(t) \geq \frac{n^r E_{n-1}(f_0)}{\left(\Omega_m^{2/m}(f_0^{(r)}, t) + \dfrac{n^2}{t}\displaystyle\int\limits_0^t \tau(t-\tau)\Omega_m^{2/m}\big(f_0^{(r)}, \tau\big)d\tau\right)^{m/2}} =$$

$$= \frac{n^r \cdot 1}{\left(2\, n^{2r/m}\big(1 - \mathrm{sinc}\, nt\big) + \dfrac{n^{2+2r/m}}{t}\displaystyle\int\limits_0^t \tau(t-\tau)\Omega_m^{2/m}\big(f_0^{(r)}, \tau\big)d\tau\right)^{m/2}} =$$

$$= \frac{n^r}{\left(2\, n^{2r/m}\big(1 - \mathrm{sinc}\, nt\big) + \dfrac{n^{2+2r/m}\, t^2}{3} - 2n^{2r/m}\big(1 - \mathrm{sinc}\, nt\big)\right)^{m/2}} =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{nt}\right)^{m}. \tag{1.2.17}$$

Требуемое равенство (1.2.4) получаем из сравнения неравенств (1.2.15) и (1.2.17), чем и завершаем доказательство теоремы 1.2.1.

Как мы ранее отметили, результат теоремы 1.2.1 является распространением и обобщением известного результата С.Б.Вакарчука и А.Н.Щитова [9], доказанного для классического модуля непрерывности m-го порядка $\omega_m\big(f^{(r)},t\big)$ на случай обобщённого модуля непрерывности $\Omega_m\big(f^{(r)},t\big)$ функций $f\in L_2^{(r)}$. Из доказанной теоремы 1.2.1 вытекает

Следствие 1.2.1. *В условиях теоремы 1.2.1 при всех* $t\in(0,3\pi/(4n)]$ *имеет место неравенство*

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{nt}\right)^m\le\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{n^rE_{n-1}(f)}{\Omega_m(f^{(r)},t)}\le\left(\frac{\sqrt{3}}{nt}\right)^m\left(1+\frac{(nt)^2}{6}\right)^{m/2}. \qquad (1.2.18)$$

В частности, из (1.2.18) *при* $t=\pi/(2n)$ *следует двусторонняя оценка для константы Джексона – Стечкина*

$$\left(\frac{2\sqrt{3}}{\pi}\right)^m\le\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{n^rE_{n-1}(f)}{\Omega_m(f^{(r)},\pi/(2n))}\le\left(\frac{2\sqrt{3}}{\pi}\right)^m\left(1+\frac{\pi^2}{24}\right)^{m/2}. \qquad (1.2.19)$$

Доказательство. Из неравенства (1.2.14), пользуясь тем, что $\Omega_m(f^{(r)},t)$ возрастает на $(0,3\pi/(4n)]$, получаем

$$E_{n-1}(f)\le\left(\frac{\sqrt{3}}{nt}\right)^m\cdot\frac{1}{n^r}\,\Omega_m(f^{(r)},t)\left(1+\frac{(nt)^2}{6}\right)^{m/2},$$

откуда и следует оценка сверху

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{n^rE_{n-1}(f)}{\Omega_m(f^{(r)},t)}\le\left(\frac{\sqrt{3}}{nt}\right)^m\left(1+\frac{(nt)^2}{6}\right)^{m/2}. \qquad (1.2.20)$$

Оценку снизу получаем для ранее рассмотренной нами функции $f_0(x)=\cos nx\in L_2^{(r)}$, для которой имеют место равенства (1.2.16), пользуясь которыми, запишем

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{n^rE_{n-1}(f)}{\Omega_m(f^{(r)},t)}\ge\frac{n^rE_{n-1}(f_0)}{\Omega_m(f_0^{(r)},t)}=2^{-m/2}\big(1-\operatorname{sinc}(nt)\big)^{-m/2}. \qquad (1.2.21)$$

Но так как при $t \in (0, 3\pi/(4n)]$, $\sin t > t - \dfrac{t^3}{6}$, то очевидно, что

$$\big(1 - \operatorname{sinc} t\big)^{-1} \geq \frac{6}{t^2},$$

а потому запишем

$$\big(1 - \operatorname{sinc}(nt)\big)^{-m/2} \geq \left(\frac{\sqrt{6}}{nt}\right)^m, \quad 0 < nt \leq 3\pi/(4n),\ m, n \in \mathbb{N}.$$

Пользуясь этим неравенством из (1.2.21) получаем

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^r E_{n-1}(f)}{\Omega_m(f^{(r)}, t)} \geq \left(\frac{\sqrt{3}}{nt}\right)^m. \tag{1.2.22}$$

Требуемое двойное неравенство (1.2.18) получаем из (1.2.20) и (1.2.22).

Справедлива также следующая

Теорема 1.2.2. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < nh \leq \pi/2$. *Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{2^{m/2} n^r E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h t\, \Omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t) dt\right)^{m/2}} = \left(\frac{h^2}{2} - \frac{1 - \cos nh}{n^2}\right)^{-m/2}. \tag{1.2.23}$$

Доказательство. Так как

$$\max\left\{\frac{1 - \cos u}{u^2} :\ u \geq nh\right\} = \frac{1}{2} \max\left\{\left(\frac{\sin(u/2)}{(u/2)}\right)^2 :\ u \geq nh\right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \max\left\{\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2 :\ u \geq \frac{nh}{2}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin^2(nh/2)}{(nh/2)^2} = \frac{1 - \cos nh}{n^2}, \quad \text{при} \quad 0 < nh \leq \pi/2, \tag{1.2.24}$$

то, используя (1.2.24), из неравенства (1.2.8) имеем

$$\left(\frac{h^2}{2}-\frac{1-\cos nh}{n^2}\right)E_{n-1}^2(f)\leq$$

$$\leq\Big(E_{n-1}^2(f)\Big)^{1-1/m}\frac{1}{2n^{2r/m}}\int\limits_0^h t\,\Omega_m^{2/m}\big(f^{(r)},t\big)dt.$$

Отсюда

$$\left(\frac{h^2}{2}-\frac{1-\cos nh}{n^2}\right)\big(E_{n-1}^2(f)\big)^{2/m}\leq\frac{1}{2n^{2r/m}}\int\limits_0^h t\,\Omega_m^{2/m}\big(f^{(r)},t\big)dt,$$

или, что то же,

$$\left(\frac{h^2}{2}-\frac{1-\cos nh}{n^2}\right)^{m/2}E_{n-1}(f)\leq\frac{1}{2^{m/2}}\cdot\frac{1}{n^r}\left(\int\limits_0^h t\,\Omega_m^{2/m}\big(f^{(r)},t\big)dt\right)^{m/2}.$$

Так как полученное неравенство верно для произвольной функции $f\in L_2^{(r)}$, то из него следует, что

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{2^{m/2}n^rE_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h t\,\Omega_m^{2/m}(f^{(r)},t)dt\right)^{m/2}}\leq\left(\frac{h^2}{2}-\frac{1-\cos nh}{n^2}\right)^{-m/2}. \tag{1.2.25}$$

Для функции $f_0(x)=\cos nx\in L_2^{(r)}$, учитывая (1.2.16), имеем

$$\left(\int\limits_0^h t\,\Omega_m^{2/m}\big(f_0^{(r)},t\big)dt\right)^{m/2}=2^{m/2}n^r\left(\frac{h^2}{2}-\frac{1-\cos nh}{n^2}\right)^{m/2}. \tag{1.2.26}$$

Пользуясь равенством (1.2.26), запишем оценку снизу

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{2^{m/2}n^rE_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h t\,\Omega_m^{2/m}(f^{(r)},t)dt\right)^{m/2}}\geq$$

$$\geq\frac{2^{m/2}n^rE_{n-1}(f_0)}{\left(\int\limits_0^h t\,\Omega_m^{2/m}(f_0^{(r)},t)dt\right)^{m/2}}=\left(\frac{h^2}{2}-\frac{1-\cos nh}{n^2}\right)^{-m/2}. \qquad (1.2.27)$$

Из сопоставления неравенств (1.2.25) и (1.2.27) вытекает требуемое равенство (1.2.23) и теорема 1.2.2 доказана.

§ 1.3. Точные значения n-поперечников некоторых классов периодических функций в L_2

В этом параграфе сначала излагаем необходимые определения и обозначения, которыми будем пользоваться в дальнейшем.

Пусть X — произвольное банахово пространство, $\mathfrak{M} \subset X$ — некоторый класс функций и пусть $L_n \subset X$ — некоторое подпространство заданной размерности n. Величину

$$E_n(\mathfrak{M})_X := E(\mathfrak{M}, L_n)_X = \sup\{E(f, L_n)_X : \ f \in \mathfrak{M}\} =$$

$$= \sup\left\{\inf\left\{\left\|f - g\right\|_X : \ g \in L_n\right\} : \ f \in \mathfrak{M}\right\} \tag{1.3.1}$$

называют наилучшим приближением класса $\mathfrak{M}$ подпространством L_n заданной размерности n. Величина (1.3.1) характеризует отклонение класса $\mathfrak{M}$ от подпространства L_n в метрике пространства X.

Если обозначить через $\mathcal{L}(X, L_n)$ — множество всех непрерывных операторов $A : \ X \to L_n$, действующих из X в произвольно заданное подпространство $L_n \subset X$ размерности n, то возникает следующая задача: найти величину

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{M})_X := \mathcal{E}(\mathfrak{M}, L_n)_X =$$

$$= \inf\left\{\sup\left\{\left\|f - Af\right\|_X : \ f \in \mathfrak{M}\right\} : \ A \in \mathcal{L}(X, L_n)\right\} \tag{1.3.2}$$

и указать оператор $A_* \subset \mathcal{L}(X, L_n)$, реализующий точную нижнюю грань в равенстве (1.3.2):

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{M})_X = \sup\left\{\left\|f - A_*f\right\|_X : \ f \in \mathfrak{M}\right\}.$$

Задачу (1.3.2) можно рассматривать в более узком смысле: нижнюю грань искать не по всему множеству $\mathcal{L}(X, L_n)$ непрерывных операторов $A : X \to L_n$, а только по некоторому классу таких операторов, которые определяются тем или иным способом задания. В частности, можно выделить в $\mathcal{L}(X, L_n)$ класс линейных непрерывных операторов $A : X \to L_n$ и рассматривать величину

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{M})_X := \mathcal{E}(\mathfrak{M}, L_n)_X =$$

$$= \inf\Big\{ \sup\Big\{ \Big\| f - Af \Big\|_X : \ f \in \mathfrak{M} \Big\} : \ A \subset \mathcal{L}(X, L_n) \Big\}. \tag{1.3.3}$$

Если существует оператор $A^* : \ X \to L_n$, для которого достигается внешняя нижняя грань в (1.3.3), то такой оператор определяет наилучший линейный метод приближения в задаче (1.3.3), то есть

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{M})_X = \sup\Big\{ \Big\| f - A^* f \Big\|_X : \ f \in \mathfrak{M} \Big\}.$$

Если же в $\mathcal{L}(X, L_n)$ выделить класс $\mathcal{L}^\perp(X, L_n)$ операторов A линейного проектирования на подпространство L_n, то есть таких, что $Af = f$ при условии $f \in L_n$, то принято рассматривать величину

$$\mathcal{E}_n^\perp(\mathfrak{M})_X := \mathcal{E}^\perp(\mathfrak{M}, L_n)_X =$$

$$= \inf\Big\{ \sup\Big\{ \Big\| f - Af \Big\|_X : \ f \in \mathfrak{M} \Big\} : \ A \subset \mathcal{L}^\perp(X, L_n) \Big\}. \tag{1.3.4}$$

С величинами (1.3.1) – (1.3.4) связана задача отыскания значения n-поперечников для различных классов функций $\mathfrak{M}$.

Напомним определения n-поперечников, значения которых для конкретных классов $\mathfrak{M}$ вычислим в следующей параграфе.

n-поперечником в смысле А.Н.Колмогорова [64] класса функций $\mathfrak{M}$ в пространстве X называют величину

$$d_n(\mathfrak{M}, X) = \inf\left\{E(\mathfrak{M}, L_n) :\ L_n \subset X\right\}, \tag{1.3.5}$$

где нижняя грань берётся по всем подпространствам заданной размерности n из пространства X.

Если исходить из наилучшего линейного приближения $\mathcal{E}(\mathfrak{M}, L_n)_X$, то величину

$$\delta_n(\mathfrak{M}, X) = \inf\left\{\mathcal{E}(\mathfrak{M}, L_n)_X :\ L_n \subset X\right\} \tag{1.3.6}$$

называют *линейным n-поперечником* класса $\mathfrak{M}$ в пространстве X.

Аналогичным образом, взяв за основу величину (1.3.4), вводят в рассмотрение *проекционный n-поперечник*

$$\Pi_n(\mathfrak{M}, X) = \inf\left\{\mathcal{E}^{\perp}(\mathfrak{M}, L_n)_X :\ L_n \subset X\right\}. \tag{1.3.7}$$

Существует ещё две величины, известные в теории приближений под названиями *«n-поперечник по Гельфанду» и «n-поперечник по Бернштейну».*

Пусть S — единичный шар в пространстве X, то есть

$$S = \left\{x \in X, \|x\|_X \leq 1\right\}.$$

Величину

$$d^n(\mathfrak{M}, X) = \inf\left\{\inf\left\{\mathfrak{M} \cap L^n \subset \varepsilon S : \varepsilon > 0\right\} :\ L^n \subset X\right\}, \tag{1.3.8}$$

где внешний инфимум берётся по всем подпространствам L^n коразмерности n, называют *n-поперечником по Гельфанду,* а величину

$$b_n(\mathfrak{M}, X) = \sup\left\{\sup\left\{\varepsilon S \cap L_{n+1} \subset \mathfrak{M} :\ \varepsilon > 0\right\} :\ L_{n+1} \subset X\right\} \tag{1.3.9}$$

называют *n-поперечником по Бернштейну.*

Очевидно, что между величинами (1.3.5) – (1.3.9) выполняются соотношения

$$b_n(\mathfrak{M}, X) \leq \begin{matrix} d_n(\mathfrak{M}, X) \\ d^n(\mathfrak{M}, X) \end{matrix} \leq \delta_n(\mathfrak{M}, X) \leq \Pi_n(\mathfrak{M}, X).$$

Если X — гильбертово пространство, то между вышеперечисленными n-поперечниками выполняются неравенства [38, 66]:

$$b_n(\mathfrak{M}, X) \leq d^n(\mathfrak{M}, X) \leq d_n(\mathfrak{M}, X) = \delta_n(\mathfrak{M}, X) = \Pi_n(\mathfrak{M}, X). \qquad (1.3.10)$$

Первое неравенство $b_n(\mathfrak{M}, X) \leq d^n(\mathfrak{M}, X)$ в (1.3.10) можно найти в монографии A.Pinkus [66], а все остальные в монографии В.М.Тихомирова [38].

Используя характеристику гладкости $\Omega_m(f, t)$, рассмотрим следующие классы функций.

Пусть $\Phi(t)$ $(t \geq 0)$ — непрерывная возрастающая функция, такая, что $\Phi(0) = 0$. Всюду далее её будем называть мажорантой. Символом $W_{p,m}^{(r)}(\Phi) := W_p^{(r)}(\Omega_m, \Phi)$, где $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < p \leq +\infty$, обозначим множество функций $f \in L_2^{(r)}$, для которых при любом $t \in (0, 2\pi]$ выполняется неравенство

$$\int_0^t \Omega_m^p\big(f^{(r)}, h\big) dh \leq \Phi^p(t).$$

Через $W_m^{(r)}(h) := W^{(r)}(\Omega_m, h)$ $\ (m \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Z}_+)$ обозначим множество функций $f \in L_2^{(r)}$, для которых при любом $h \in [0, 2\pi]$ выполняется неравенство

$$\int_0^h t\, \Omega_m^p\big(f^{(r)}, t\big) dt \leq 1.$$

Аналогичным образом будем рассматривать класс $\mathscr{F}_m^{(r)}(h) := \mathscr{F}^{(r)}(\Omega_m, h)$ функций $f \in L_2^{(r)}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ при всех $h \in (0, 3\pi/(4n)]$, удовлетворяющих усло-

вию
$$\left\{\Omega_m^{2/m}(f^{(r)},h)+\frac{n^2}{h}\int\limits_0^h\tau(h-\tau)\Omega_m^{2/m}\big(f^{(r)},\tau\big)d\tau\right\}^{m/2}\le 1.$$

Положим ещё
$$E_{n-1}\big(W_{p,m}^{(r)}(\Phi)\big):=\sup\Big\{E_{n-1}(f):\ f\in W_{p,m}^{(r)}(\Phi)\Big\}.$$

Следуя работам [10, 13], обозначим через t_* величину аргумента t из интервала $(0,\infty)$ функции $\operatorname{sinc} nt$, при котором она достигает своего наименьшего значения. Очевидно, что t_* есть наименьший из положительных корней уравнения $t-\operatorname{tg}t=0$ $(4,49<t_*<4,51)$. При этом также полагаем
$$\big(1-\operatorname{sinc} nt\big)_*:=\begin{cases}1-\operatorname{sinc} nt, & \text{если}\quad 0<t\le t_*,\\ 1-\operatorname{sinc} nt_*, & \text{если}\quad t\ge t_*.\end{cases}\tag{1.3.11}$$

Теорема 1.3.1. *Пусть $m,n\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $0<p\le\infty$ и мажоранта Φ при любом $h\in[0,2\pi]$ удовлетворяет условию*
$$\frac{\Phi(h)}{\Phi\big(\pi/(2n)\big)}\ge\frac{\left(\int\limits_0^h\big(1-\operatorname{sinc} nt\big)_*^{mp/2}dt\right)^{1/p}}{\left(\int\limits_0^{\pi/(2n)}\big(1-\operatorname{sinc} nt\big)^{mp/2}dt\right)^{1/p}}.\tag{1.3.12}$$

Тогда справедливы равенства
$$\lambda_{2n}\big(W_{p,m}^{(r)}(\Phi),L_2\big)=\lambda_{2n-1}\big(W_{p,m}^{(r)}(\Phi),L_2\big)=E_{n-1}\big(W_{p,m}^{(r)}(\Phi)\big)=$$
$$=\frac{1}{2^{m/2}n^r}\cdot\frac{\Phi\big(\pi/(2n)\big)}{\left(\int\limits_0^{\pi/(2n)}\big(1-\operatorname{sinc} nt\big)^{mp/2}dt\right)^{1/p}},\tag{1.3.13}$$

где $\lambda_n(\cdot)$ — *любой из вышеперечисленных* n*-поперечников. При этом множество мажорант, удовлетворяющих условию* (1.3.12), *не пусто.*

Доказательство. Из неравенства (1.1.36) для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ и $h \in (0, 3\pi/(4n)]$ запишем

$$E_{n-1}(f) \leq \frac{1}{2^{m/2}n^r} \cdot \frac{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(f^{(r)}, t)\varphi(t)dt\right)^{1/p}}{\left(\int\limits_0^h \left(1 - \mathrm{sinc} nt\right)^{mp/2}\varphi(t)dt\right)^{1/p}}. \tag{1.3.14}$$

Полагая в правой части неравенства (1.3.14) $\varphi(t) = 1$, $h = \pi/(2n)$, в предположении $f \in W_{p,m}^{(r)}(\Phi)$, получаем

$$E_{n-1}\big(W_{p,m}^{(r)}(\Phi)\big) := \sup\left\{E_{n-1}(f) : \ f \in W_{p,m}^{(r)}(\Phi)\right\} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2^{m/2}n^r} \cdot \frac{\Phi\big(\pi/(2n)\big)}{\left(\int\limits_0^{\pi/(2n)} \left(1 - \mathrm{sinc}\,\mathrm{nt}\right)^{mp/2}dt\right)^{1/p}}. \tag{1.3.15}$$

Из (1.3.15) сразу следует оценка сверху всех n-поперечников класса $W_{p,m}^{(r)}(\Phi)$:

$$\lambda_{2n}\big(W_{p,m}^{(r)}(\Phi), L_2\big) \leq \lambda_{2n-1}\big(W_{p,m}^{(r)}(\Phi), L_2\big) \leq$$

$$d_{2n-1}\big(W_{p,m}^{(r)}(\Phi), L_2\big) \leq E_{n-1}\big(W_{p,m}^{(r)}(\Phi)\big) \leq$$

$$\leq \frac{1}{2^{m/2}n^r} \cdot \frac{\Phi\big(\pi/(2n)\big)}{\left(\int\limits_0^{\pi/(2n)} \left(1 - \mathrm{sinc}\,\mathrm{nt}\right)^{mp/2}dt\right)^{1/p}}, \tag{1.3.16}$$

Для получения оценки снизу n-поперечников рассмотрим на множестве $\mathscr{T}_{2n+1}\cap L_2$ следующий $(n+1)$-мерный шар полиномов

$$\mathscr{B}_{2n+1}:=\left\{T_n\in\mathscr{T}_{2n+1}:\ \big\|T_n\big\|\le\frac{2^{-m/2}n^{-r}\Phi\big(\pi/(2n)\big)}{\left(\int\limits_0^{\pi/(2n)}\big(1-\operatorname{sinc}\mathrm{nt}\big)^{mp/2}dt\right)^{1/p}}\right\}$$

и покажем справедливость включения $\mathscr{B}_{2n+1}\subset W^{(r)}_{p,m}(\Phi)$. Учитывая поведение функции $\operatorname{sinc}(\cdot)$, для любого натурального $1\le k\le n$ и $h\in(0,2\pi]$ имеем

$$1-\operatorname{sinc}(kh)\le\big(1-\operatorname{sinc}(nh)\big)_*. \tag{1.3.17}$$

Используя неравенство (1.3.17), для произвольного полинома $T_n\in\mathscr{T}_{2n+1}$ получаем

$$\Omega_m^2\big(T_n^{(r)},\tau\big)=2^m\sum_{k=1}^n k^{2r}\rho_k^2(T_n)\big(1-\operatorname{sinc}(k\tau)\big)^m\le$$
$$\le 2^m n^{2r}\big(1-\operatorname{sinc}(n\tau)\big)_*^m\sum_{k=1}^n\rho_k^2(T_n)=2^m n^{2r}\big(1-\operatorname{sinc}(n\tau)\big)_*^m\big\|T_n\big\|^2,$$

или, что то же,

$$\Omega_m\big(T_n^{(r)},\tau\big)\le 2^{m/2}n^r\big(1-\operatorname{sinc}n\tau\big)_*^{m/2}\big\|T_n\big\|. \tag{1.3.18}$$

Обе части неравенства (1.3.18) возведем в степень p, где $0<p\le\infty$ и, проинтегрировав их по переменной τ в пределах от 0 до t $(0<t\le2\pi)$, имеем

$$\int\limits_0^t\Omega_m^p\big(T_n^{(r)},\tau\big)d\tau\le\big\|T_n\big\|^p2^{mp/2}n^{rp}\int\limits_0^t\big(1-\operatorname{sinc}n\tau\big)_*^{mp/2}d\tau. \tag{1.3.19}$$

Учитывая ограничения (1.3.12) для любого полинома $T_n \in \mathscr{B}_{2n+1}$, из неравенства (1.3.19) получаем

$$\int\limits_0^t \Omega_m^p\big(T_n^{(r)},\tau\big)d\tau \le \frac{\Phi^p\big(\pi/(2n)\big)\displaystyle\int\limits_0^t \big(1-\operatorname{sinc}\mathrm{n}\tau\big)_*^{mp/2}d\tau}{\displaystyle\int\limits_0^{\pi/(2n)} \big(1-\operatorname{sinc}\mathrm{n}\tau\big)^{mp/2}d\tau} \le \Phi^p(t).$$

Отсюда, в силу определения класса $W_{p,m}^{(r)}(\Phi)$, следует, что $\mathscr{B}_{2n+1} \subset W_{p,m}^{(r)}(\Phi)$ и, пользуясь определением бернштейновского n-поперечника, запишем оценку снизу всех n-поперечников

$$\lambda_{2n}\big(W_{p,m}^{(r)}(\Phi), L_2\big) \ge b_{2n}\big(W_{p,m}^{(r)}(\Phi), L_2\big) \ge b_{2n}\big(\mathscr{B}_{2n+1}, L_2\big) \ge$$

$$\ge 2^{-m/2}n^{-r}\left\{\int\limits_0^{\pi/(2n)} \big(1-\operatorname{sinc}\mathrm{nt}\big)^{mp/2}dt\right\}^{-1/p}\Phi\big(\pi/(2n)\big). \tag{1.3.20}$$

Сопоставляя оценку сверху (1.3.16) с аналогичной оценку снизу (1.3.20), получаем требуемые равенства (1.3.13).

Переходя к доказательству второй части теоремы 1.3.1 покажем, что множество мажорант $\{\Phi\}$, удовлетворяющих условию (1.3.12) не пусто.

Для этого вводим в рассмотрение функцию $\Phi_*(t) := t^{\alpha/p}$, где

$$\alpha := \frac{(\pi-2)^{mp/2}}{2\pi^{mp/2-1}\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2}\big(1-\operatorname{sinc}h\big)^{mp/2}dh} \tag{1.3.21}$$

и убедимся, что для неё неравенство (1.3.12) при любых $m, n \in \mathbb{N}$, $0 < p \le \infty$ и $t \in (0, 2\pi]$ выполняется.

Покажем, что после подстановки Φ_* в соотношение (1.3.12) будет справедливым неравенство

$$\left(\frac{2nt}{\pi}\right)^{\alpha} \geq \frac{\int\limits_0^{nt} \left(1-\operatorname{sinc} h\right)_*^{mp/2} dh}{\int\limits_0^{\pi/2} \left(1-\operatorname{sinc} h\right)^{mp/2} dh}.$$

Полагая в полученном неравенстве $u = nt$, где $0 \leq u < \infty$, получаем неравенство

$$u^{\alpha} \geq \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\alpha} \cdot \frac{\int\limits_0^{u} \left(1-\operatorname{sinc} h\right)_*^{mp/2} dh}{\int\limits_0^{\pi/2} \left(1-\operatorname{sinc} h\right)^{mp/2} dh}, \tag{1.3.22}$$

которое требуется доказать. Для этого, исходя из неравенства (1.3.22), введём вспомогательную функцию

$$\mathrm{g}(u) = u^{\alpha} - \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\alpha} \cdot \frac{\int\limits_0^{u} \left(1-\operatorname{sinc} h\right)_*^{mp/2} dh}{\int\limits_0^{\pi/2} \left(1-\operatorname{sinc} h\right)^{mp/2} dh}.$$

Учитывая формулу (1.3.21), перепишем функцию $\mathrm{g}(u)$ в виде

$$\mathrm{g}(u) = u^{\alpha} - \alpha \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\alpha} \cdot \frac{2\pi^{mp/2-1}}{(\pi-2)^{mp/2}} \int\limits_0^{u} \left(1-\operatorname{sinc} h\right)_*^{mp/2} dh. \tag{1.3.23}$$

Таким образом надо показать неотрицательность функции $\mathrm{g}(u)$ при всех значениях $u \in [0, +\infty)$.

Сначала получим оценки сверху величины α. Для нахождения оценки сверху воспользуемся неравенством [14, с.524]

$$1 - \mathrm{sinc} h \geq \frac{4(\pi-2)}{\pi^3} \cdot h^2, \quad 0 \leq h \leq \pi/2. \tag{1.3.24}$$

Используя (1.3.24) и формулу (1.3.21), получаем

$$\alpha < \frac{(\pi-2)^{mp/2}}{2\,\pi^{mp/2-1} \int\limits_0^{\pi/2} \Big(4(\pi-2)h^2/\pi^3\Big)^{mp/2} dh} \leq mp + 1. \tag{1.3.25}$$

Аналогичным образом, учитывая (1.3.24), после несложных вычислений получим, что при всех $0 < h \leq \pi/2$ число

$$\alpha > mp + \frac{1}{2}. \tag{1.3.26}$$

Дальнейшие наши рассуждения, связанные с доказательством неравенства (1.3.22), приведём в три этапа:

$$\text{а)}\ \ 0 \leq u \leq \pi/2\,; \quad \text{б)}\ \ \pi/2 \leq u \leq t_*\,; \quad \text{с)}\ \ t_* \leq u \leq \infty\,.$$

Пусть а) $0 \leq u \leq \pi/2$. Воспользуясь формулой

$$\sin h \geq h - \frac{1}{6}h^3, \quad \text{где} \quad 0 \leq h \leq \pi/2,$$

на основании формулы (1.3.23) имеем

$$\mathrm{g}(u) = u^\alpha - \alpha \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^\alpha \cdot \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{\pi-2}\right)^{mp/2} \int\limits_0^u \left(1 - \mathrm{sinc}\, h\right)_*^{mp/2} dh \geq$$

$$\geq u^\alpha - \alpha \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\alpha-1} \left(\frac{\pi}{\pi-2}\right)^{mp/2} \left(\frac{1}{6}\right)^{mp/2} \int\limits_0^u h^{mp} dh =$$

$$= u^{\alpha} - \alpha \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\alpha-1} \left(\frac{\pi}{\pi-2}\right)^{mp/2} \left(\frac{1}{6}\right)^{mp/2} \cdot \frac{u^{mp+1}}{mp+1} =$$

$$= u^{\alpha} \left\{ 1 - \alpha \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\alpha-1} \left(\frac{\pi}{\pi-2}\right)^{mp/2} \frac{1}{mp+1} \cdot u^{mp+1-\alpha} \right\}. \qquad (1.3.27)$$

Из (1.3.27) с учётом (1.3.25) получаем, что при $v \to 0+0$ функция g принимает положительные значения.

Покажем, что функция g является знакопостоянной на интервале $(0, \pi/2)$. Для этого, рассуждая от противного, полагаем, что существует некоторая точка из множества $(0, \pi/2)$ в которой g меняет свой знак. Из формулы (1.3.23) с учётом (1.3.21) получаем $\mathrm{g}(0) = \mathrm{g}(\pi/2) = 0$.

Отсюда, на основании теоремы Ролля, следует, что производная первого порядка

$$\mathrm{g}'(u) = \alpha \left\{ u^{\alpha-1} - \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\alpha-1} \cdot \left(\frac{\pi}{\pi-2}\right)^{mp/2} \left(1 - \operatorname{sinc} u\right)^{mp/2} \right\} \qquad (1.3.28)$$

должна иметь на интервале $(0, \pi/2)$ не менее двух нулей. Из формулы (1.3.28) получаем, что аналогичное количество нулей и в тех же точках из интервала $(0, \pi/2)$ будет иметь и функция

$$\mathrm{g}_1(u) = \frac{1}{u} \left\{ u^{\frac{2(\alpha-1)}{mp}+1} - \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{2(\alpha-1)}{mp}} \cdot \left(\frac{\pi}{\pi-2}\right) (u - \sin u) \right\} = \frac{1}{u} G(u). \qquad (1.3.29)$$

Указанный факт относительно количества нулей на $(0, \pi/2)$ для g_1 касается и функции G, определённой соотношением (1.3.29). Поскольку

$$G(0) = G\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

то производная первого порядка

$$G'(u) = \left(\frac{2(\alpha-1)}{mp}+1\right)u^{\frac{2(\alpha-1)}{mp}} - \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{2(\alpha-1)}{mp}}\frac{\pi}{\pi-2}\big(1-\cos u\big) \qquad (1.3.30)$$

на основании теоремы Ролля должна обращаться в нуль на множестве $(0, \pi/2)$ не менее чем в трёх различных точках. Учитывая, что $G(0) = 0$, в силу аналогичных соображений из (1.3.30) получаем, что производная второго порядка

$$G''(u) = \left(1+\frac{2(\alpha-1)}{mp}\right)\cdot\frac{2(\alpha-1)}{mp}u^{\frac{2(\alpha-1)}{mp}-1} - \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{2(\alpha-1)}{mp}}\frac{\pi}{\pi-2}\sin u \qquad (1.3.31)$$

также должна иметь на $(0, \pi/2)$ не менее трёх различных нулей. Поскольку на основании (1.3.21) $G''(0) = 0$, то при помощи подобных рассуждений получаем, что производная третьего порядка

$$G'''(u) = \left(1+\frac{2(\alpha-1)}{mp}\right)\cdot\frac{2(\alpha-1)}{mp}\left(\frac{2(\alpha-1)}{mp}-1\right)u^{\frac{2(\alpha-1)}{mp}-2} -$$

$$- \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{2(\alpha-1)}{mp}}\frac{\pi}{\pi-2}\cos u \qquad (1.3.32)$$

должна обращаться в нуль на интервале $(0, \pi/2)$ также не менее чем в трёх различных точках. Но, как следует из формул (1.3.32) и (1.3.21), это не так, поскольку из чисто геометрических соображений G''', как разность двух функций, одна из которых монотонно убывающая и выпуклая вниз, а другая монотонно убывающая и выпуклая вверх, может иметь на множестве $(0, \pi/2)$ не более двух различных нулей.

Полученное противоречие доказывает неравенство (1.3.22) для любого $u \in [0, \pi/2]$.

б) Пусть далее $\pi/2 \le u \le t_*$. Из формулы (1.3.32) следует, что на указанном множестве функция G'' принимает наименьшее значение в точке

$u = \pi/2$, причём

$$G''\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{2(\alpha-1)}{2m}} \left\{ \left(\frac{2(\alpha-1)}{mp} + 1 \right) \frac{4(\alpha-1)}{mp\pi} - \frac{\pi}{\pi-2} \right\} > 0,$$

то есть G'' на отрезке $[\pi/2, t_*]$ принимает только положительные значения и функция G' является монотонно возрастающей на множестве $[\pi/2, t_*]$. Из формул (1.3.30) и (1.3.21) следует, что

$$G'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{2(\alpha-1)}{2m}} \left\{ 1 + \frac{2(\alpha-1)}{mp} - \frac{\pi}{\pi-2} \right\} > 0.$$

Следовательно $G'(u) > 0$ для любого $u \in [\pi/2, t_*]$, откуда $G(u)$ – монотонно возрастающая функция на рассматриваемом множестве. Поскольку $G(\pi/2) = 0$, то $G(u) > 0$ на всём множестве $\pi/2 < u \leq t_*$. Это же касается и производной g'. Так как $\mathrm{g}(\pi/2) = 0$, то функция $\mathrm{g}(u) > 0$ при $\pi/2 < u \leq t_*$, что доказывает справедливость неравенства (1.3.22) в случае б).

c) Пусть теперь $t_* \leq u < \infty$. Тогда из формулы (1.3.23) имеем

$$\mathrm{g}(u) = u^\alpha - \alpha \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\alpha-1} \left(\frac{\pi}{\pi-2}\right)^{mp/2} \times$$

$$\times \left\{ \int\limits_0^{t_*} \left(1 - \operatorname{sinc} h\right)_*^{mp/2} dh + (u - t_*)\bigl(1 - \operatorname{sinc} t_*\bigr)^{mp/2} \right\}.$$

Отсюда следует

$$\mathrm{g}'(u) = \alpha u^{\alpha-1} - \alpha \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\alpha-1} \left(\frac{\pi}{\pi-2}\right)^{mp/2} \bigl(1 - \operatorname{sinc} t_*\bigr)^{mp/2} =$$

$$= \alpha \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\alpha-1} \left\{ \left(\frac{2u}{\pi}\right)^{\alpha-1} - \left(\frac{\pi}{\pi-2}\right)^{mp/2} \bigl(1 - \operatorname{sinc} t_*\bigr)^{mp/2} \right\}. \qquad (1.3.33)$$

С учётом соотношения (1.3.26) и (1.3.33) для любого $t_* \le u < \infty$ получаем $g'(u) \ge g'(t_*) > 0$, то есть функция g является монотонно возрастающей на рассматриваемом множестве. Поскольку, как следует из пункта б) $g(t_*) > 0$, то $g(u) > 0$ при любом $u \in (t_*, \infty)$, то есть неравенство (1.3.22) справедливо в рассматриваемом случае, чем и завершаем доказательство теоремы 1.3.1.

Из доказанной теоремы 1.3.1 вытекает следующее

Следствие 1.3.1. *В условиях теоремы 1.3.1 при* $p = 2/m$, $m \in \mathbb{N}$ *справедливы равенства*

$$\lambda_{2n}\big(W^{(r)}_{2/m,m}(\Phi), L_2\big) = \lambda_{2n-1}\big(W^{(r)}_{2/m,m}(\Phi), L_2\big) =$$

$$= E_{n-1}\big(W^{(r)}_{2/m,m}(\Phi)\big) = \frac{1}{2^{m/2}n^{r-m/2}}\left\{\frac{\pi}{2} - Si\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}^{-m/2}\Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right),$$

где $\lambda_n(\cdot)$ *— любой из вышеперечисленных* n*-поперечников.*

Теорема 1.3.2. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$. *Тогда при всех* $h \in (0, 3\pi/(4n)]$ *справедливы равенства*

$$\lambda_{2n}\big(\mathscr{F}^{(r)}_m(h), L_2\big) = \lambda_{2n-1}\big(\mathscr{F}^{(r)}_m(h), L_2\big) =$$

$$= E_{n-1}\big(\mathscr{F}^{(r)}_m(h)\big) = \left(\frac{\sqrt{3}}{nh}\right)^m \frac{1}{n^r}, \tag{1.3.34}$$

где $\lambda_n(\cdot)$ *— любой из вышеперечисленных* n*-поперечников.*

Доказательство. Из неравенства (1.2.14) для произвольной функции $f \in L^{(r)}_2$ имеем

$$E_{n-1}(f) \le$$

$$\le \left(\frac{\sqrt{3}}{nh}\right)^m \frac{1}{n^r}\left(\Omega^{2/m}_m(f^{(r)}, h) + \frac{n^2}{h}\int\limits_0^h \tau(h-\tau)\Omega^{2/m}_m\big(f^{(r)}, \tau\big)d\tau\right)^{m/2}. \tag{1.3.35}$$

Используя определение класса $\mathscr{F}_m^{(r)}(h)$, из неравенства (1.3.35) для любого $h \in (0, 3\pi/(4n)]$ запишем оценку сверху для всех рассматриваемых n-поперечников

$$\lambda_{2n-1}\big(\mathscr{F}_m^{(r)}(h), L_2\big) \le d_{2n-1}\big(\mathscr{F}_m^{(r)}(h), L_2\big) \le$$
$$\le \sup\Big\{E_{n-1}(f):\ f \in \big(\mathscr{F}_m^{(r)}(h)\big)\Big\} \le \left(\frac{\sqrt{3}}{nh}\right)^m \frac{1}{n^r}. \qquad (1.3.36)$$

Для получения оценки снизу бернштейновского n-поперечника класса $\mathscr{F}_m^{(r)}(h)$ вводим в рассмотрение $(2n+1)$-мерный шар полиномов

$$\sigma_{2n+1} = \left\{T_n(x):\ \big\|T_n\big\| \le \left(\frac{\sqrt{3}}{nh}\right)^m \frac{1}{n^r}\right\}$$

и покажем, что имеет место включение $\sigma_{2n+1} \subset \mathscr{F}_m^{(r)}(h)$. Для этого требуется доказать, что для произвольного тригонометрического полинома $T_n \in \sigma_{2n+1}$ выполняется неравенство

$$\left\{\Omega_m^{2/m}(T_n^{(r)}, h) + \frac{n^2}{h}\int\limits_0^h \tau(h-\tau)\Omega_m^{2/m}\big(T_n^{(r)}, \tau\big)d\tau\right\}^{m/2} \le 1. \qquad (1.3.37)$$

Воспользовавшись неравенством (1.3.18) имеем

$$\left\{\Omega_m^{2/m}(T_n^{(r)}, h) + \frac{n^2}{h}\int\limits_0^h \tau(h-\tau)\Omega_m^{2/m}\big(T_n^{(r)}, \tau\big)d\tau\right\}^{m/2} \le$$

$$\le \Big\{2n^{2r/m}\big(1 - \operatorname{sinc} nh\big)\big\|T_n\big\|^{2/m} +$$

$$+\frac{n^2}{h}\cdot 2n^{2r/m}\big\|T_n\big\|^{2/m}\int\limits_0^h \tau(h-\tau)\big(1-\operatorname{sinc} n\tau\big)d\tau\Bigg\}^{m/2} =$$

$$= 2^{m/2}n^r\big\|T_n\big\|\left\{\big(1-\operatorname{sinc} nh\big)+\frac{n^2}{h}\int\limits_0^h \tau(h-\tau)\big(1-\operatorname{sinc} n\tau\big)d\tau\right\}^{m/2} \le$$

$$\le \Big(\frac{\sqrt{3}}{nh}\Big)^m\left\{2\big(1-\operatorname{sinc} nh\big)+\frac{(nh)^2}{3}-2\big(1-\operatorname{sinc} nh\big)\right\}^{m/2} =$$

$$= \Big(\frac{\sqrt{3}}{nh}\Big)^m\cdot\Big(\frac{nh}{\sqrt{3}}\Big)^m = 1.$$

и тем самым неравенство (1.3.37) доказано.

Доказанное неравенство означает, что шар σ_{2n+1} принадлежит классу $\mathscr{F}_m^{(r)}(h)$, а потому, учитывая определение бернштейновского n-поперечника, запишем оценку снизу всех n-поперечников

$$\lambda_{2n-1}\big(\mathscr{F}_m^{(r)}(h),L_2\big) \ge \lambda_{2n}\big(\mathscr{F}_m^{(r)}(h),L_2\big) \ge$$

$$\ge b_{2n}\big(\mathscr{F}_m^{(r)}(h),L_2\big) \ge b_{2n}\big(\sigma_{2n+1},L_2\big) \ge \Big(\frac{\sqrt{3}}{nh}\Big)^m\frac{1}{n^r}. \qquad (1.3.38)$$

В силу неравенств между n-поперечниками (1.3.10) и сопоставления неравенств (1.3.36) и (1.3.38), получаем утверждение теоремы 1.3.2.

Аналогичным образом доказывается

Теорема 1.3.3. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $r > m$. *Тогда при всех* $h \in (0, \pi/n]$ *имеют место равенства*

$$\lambda_{2n}\big(W_m^{(r)}(h), L_2\big) = \lambda_{2n-1}\big(W_m^{(r)}(h), L_2\big) =$$

$$= E_{n-1}\big(W_m^{(r)}(h)\big) = \frac{1}{2^{m/2}n^r}\left(\frac{h^2}{2} - \frac{1-\cos nh}{n^2}\right)^{-m/2}, \qquad (1.3.39)$$

где $\lambda_n(\cdot)$ — *любой из вышеперечисленных* n*-поперечников.*

В частности, из равенств (1.3.39), *следует, что*

$$\lambda_{2n}\left(W_m^{(r)}\Big(\frac{\pi}{2n}\Big), L_2\right) = \lambda_{2n-1}\left(W_m^{(r)}\Big(\frac{\pi}{2n}\Big), L_2\right) =$$

$$= E_{n-1}\left(W_m^{(r)}\Big(\frac{\pi}{2n}\Big)\right) = \left(\frac{4}{\pi^2 - 8}\right)^{m/2}\frac{1}{n^{r-m}}.$$

ГЛАВА 2. Совместное приближение периодических функций и их производных в метрике пространства L_2

В этой главе изучаются экстремальные задачи, связанные с наилучшим совместным приближением периодических функций и их последовательных производных тригонометрическими полиномами в метрике пространства $L_2 := L_2[0, 2\pi]$. Отметим, что впервые задача совместного приближения периодических функций и их производных тригонометрическими полиномами в равномерной метрике в 1960 г. была исследована А.Л.Гаркави [17].

Затем в том же году А.Ф.Тиман [37] исследовал указанную задачу для приближении функций, определённых на всей оси целыми функциями экспоненциального типа. В более общей ситуации задача совместного приближения функций и их производных как алгебраическими, так и тригонометрическими полиномами рассматривается в монографии В.Н.Малозёмова [28], где приведены и обобщены некоторые классические теоремы теории приближения функций на случай совместного приближения функций и их производных. Для некоторых классов периодических функций в пространстве L_2, усреднённый с весом обобщённый модуль непрерывности высшего порядка которых ограничен сверху заданной мажорантой, сформулированную задачу рассматривали С.Б.Вакарчук и В.И.Забутная [12], М.Ш.Шабозов и А.А.Шабозова [48], М.Ш.Шабозов [50].

Аналогичная задача для некоторых классов аналитических в единичном круге функций, принадлежащих пространству Харди H_2 рассмотрена в [49, 51], а в пространстве Бергмана в [52].

Здесь мы продолжим указанную тематику и решим задачу совместного приближения функций и их производных в пространстве L_2, характеристики гладкости которых определяется обобщённым модулем непрерывности m-го порядка, определённым равенством (1.1.12). Отметим, что некоторые экстремальные задачи наилучшего приближения функций в метрике пространства L_2 с использованием характеристики гладкости (1.1.12) ранее рассматривались, например, в работах С.Б.Вакарчука [10], С.Б.Вакарчука, В.И.Забутная [12], М.Ш.Шабозова [43], С.Б.Вакарчука, М.Ш.Шабозова, В.И.Забутная [13].

В цитированных работах экстремальная задача наилучшего совместного приближения функций и их последовательных производных не рассматривалась. В целом следует отметить, что по сформулированной задаче о совместном приближении функций имеется немного результатов и в общем она находится на начальной стадии развития.

В этой главе рассматривается экстремальная задача нахождения точных верхних граней наилучших совместных полиномиальных приближений некоторых классов периодических дифференцируемых функций, характеризующихся специальным обобщённым модулем непрерывности (1.1.12) в пространстве L_2. Поскольку для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$, $(r \in \mathbb{Z}_+,\ L_2^{(0)} = L_2)$, кроме самой функции и её r-й производной, также все промежуточные производные $f^{(s)}$ $(s = 1, 2, \ldots, r-1,\ r \in \mathbb{N},\ r \geq 2)$ принадлежат пространству L_2, то имеет смысл изучать поведение величины наилучшего совместного приближения $E_{n-1}(f^{(s)})$ на классе функций $L_2^{(r)}$ или на некотором подклассе функций $\mathfrak{M}^{(r)} \subset L_2^{(r)}$. Точнее, требуется найти точное значение величины

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(s)}\big(\mathfrak{M}^{(r)}\big) := \sup\Big\{E_{n-1}(f^{(s)}):\ f \in \mathfrak{M}^{(r)}\Big\} \tag{2.0.1}$$

на некотором классе r-раз дифференцируемых функций $\mathfrak{M}^{(r)} \subseteq L_2^{(r)}$. Для классов функций, для которых вычислены точные значения n-поперечников в третьем параграфе первой главы, удалось решить экстремальную задачу (2.0.1) в данной главе. Задача (2.0.1) также решается для некоторых других классов функций в параграфе 2.2.

§ 2.1. Совместное приближение функций в L_2. Решение экстремальной задачи (1.1.3) для класса функций $W^{(r)}_{p,m}(\Phi)$

В этом параграфе некоторые результаты, полученные для наилучшего среднеквадратического полиномиального приближения функций, приведённые в первой главе, обобщаются на случай совместного приближения функций и их промежуточных производных, принадлежащих пространству L_2. Решается экстремальная задача (1.1.3) для классов функций, определение которых приведено в четвёртом параграфе первой главы.

Из доказанной теоремы 1.1.1 вытекает следующее важное следствие, которое одновременно является и её обобщением.

Теорема 2.1.1. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$, $0 < p \leq \infty$, $0 < h \leq 3\pi/(4n)$, φ *— весовая на* $[0, h]$ *функция. Тогда имеет место равенство*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{2^{m/2} n^{r-s} E_{n-1}(f^{(s)})}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p\big(f^{(r)}, t\big)\varphi(t)dt\right)^{1/p}} =$$

$$= \left\{\int\limits_0^h \big(1 - \operatorname{sinc} nt\big)^{mp/2}\varphi(t)dt\right\}^{-1/p}. \qquad (2.1.1)$$

Доказательство. В левой части равенства (2.1.1) полагаем $f^{(s)}(t) = g(t)$, откуда имеем $f^{(r)}(t) = g^{(r-s)}(t)$. Таким образом, если $f \in L_2^{(r)}$, то функция $g \in L_2^{(r-s)}$, и мы, в силу равенства (1.1.27), получаем

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{2^{m/2} n^{r-s} E_{n-1}(f^{(s)})}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p\big(f^{(r)}, t\big)\varphi(t)dt\right)^{1/p}} =$$

$$= \sup_{g\in L_2^{(r-s)}} \frac{2^{m/2}n^{r-s}E_{n-1}(g)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p\big(g^{(r-s)},t\big)\varphi(t)dt\right)^{1/p}} = \left\{\int\limits_0^h \big(1-\operatorname{sinc}\mathrm{nt}\big)^{mp/2}\varphi(t)dt\right\}^{-1/p},$$

откуда следует равенство (2.1.1). Теорема 2.1.1 доказана.

Приведём решение экстремальной задачи (1.1.3) для класса функций $W_{p,m}^{(r)}(\Phi)$. Имеет место следующая

Теорема 2.1.2. *Пусть* $m,n\in\mathbb{N}$, $r,s\in\mathbb{Z}_+$, $r\ge s$, $0<p\le\infty$ *и мажоранта* Φ *удовлетворяет условию*

$$\frac{\Phi^p(h)}{\Phi^p\big(\pi/(2n)\big)} \ge \frac{\int\limits_0^h \big(1-\operatorname{sinc} nt\big)_*^{mp/2}dt}{\int\limits_0^{\pi/(2n)} \big(1-\operatorname{sinc} nt\big)^{mp/2}dt}. \tag{2.1.2}$$

Тогда справедливо равенство

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(s)}\big(W_{p,m}^{(r)}(\Phi)\big) =$$

$$= 2^{-m/2}n^{-(r-s)}\left\{\int\limits_0^{\pi/(2n)} \big(1-\operatorname{sinc} nt\big)^{mp/2}dt\right\}^{-1/p}\Phi\big(\pi/(2n)\big). \tag{2.1.3}$$

Доказательство. Из равенства (2.1.1) для величины совместного приближения $E_{n-1}(f^{(s)})$ произвольной функции $f\in L_2^{(r)}$ при $h=\pi/(2n)$, $\varphi(t)=1$ имеет место неравенство

$$E_{n-1}(f^{(s)}) \le$$

$$\le \frac{1}{2^{m/2}n^{r-s}}\cdot\left(\int\limits_0^{\pi/(2n)} \Omega_m^p\big(f^{(r)},t\big)dt\right)^{1/p}\left(\int\limits_0^{\pi/(2n)} \big(1-\operatorname{sinc}\mathrm{nt}\big)^{mp/2}dt\right)^{-1/p}.$$

Отсюда, учитывая определение класса $W^{(r)}_{p,m}(\Phi)$, получаем оценку сверху величины, стоящей в левой части (2.1.3)

$$\mathscr{E}^{(s)}_{n-1}\big(W^{(r)}_{p,m}(\Phi)\big) \le$$

$$\le 2^{-m/2} n^{-(r-s)} \left\{ \int\limits_0^{\pi/(2n)} \big(1-\operatorname{sinc} \mathrm{nt}\big)^{mp/2} dt \right\}^{-1/p} \Phi\big(\pi/(2n)\big). \tag{2.1.4}$$

В предыдущей главе было показано (см. доказательство теоремы 1.3.1), что если мажоранта Φ удовлетворяет условию (2.1.2) и множество тригонометрических полиномов $T_n \in \mathscr{T}_{2n+1}$ удовлетворяет условию

$$\|T_n\| \le \frac{2^{-m/2} n^{-r} \Phi\big(\pi/(2n)\big)}{\left(\int\limits_0^{\pi/(2n)} \big(1-\operatorname{sinc} \mathrm{nt}\big)^{mp/2} dt \right)^{1/p}},$$

то сфера $\mathscr{B}_{2n+1}$, введённая при доказательстве теоремы 1.3.1, принадлежит классу $W^{(r)}_{p,m}(\Phi)$. Рассмотрим функцию

$$f_1(x) = \frac{2^{-m/2} n^{-r} \Phi\big(\pi/(2n)\big)}{\left(\int\limits_0^{\pi/(2n)} \big(1-\operatorname{sinc} \mathrm{nt}\big)^{mp/2} dt \right)^{1/p}} \cdot \sin nx.$$

Так как

$$\|f_1\| = \frac{2^{-m/2} n^{-r} \Phi\big(\pi/(2n)\big)}{\left(\int\limits_0^{\pi/(2n)} \big(1-\operatorname{sinc} \mathrm{nt}\big)^{mp/2} dt \right)^{1/p}},$$

то функция f_1 принадлежит сфере $\mathscr{B}_{2n+1}$, а потому принадлежит классу

$W^{(r)}_{p,m}(\Phi)$. Кроме того, при любом $s=0,1,\cdots,r$

$$f_1^{(s)}(x)=\frac{2^{-m/2}n^{-(r-s)}\Phi\big(\pi/(2n)\big)}{\left(\int\limits_0^{\pi/(2n)}\big(1-\operatorname{sinc}\mathrm{nt}\big)^{mp/2}dt\right)^{1/p}}\cdot\sin\left(nx+\frac{s\pi}{2}\right)$$

и, в силу (1.1.4),

$$E_{n-1}\big(f_1^{(s)}\big)=\frac{2^{-m/2}n^{-(r-s)}\Phi\big(\pi/(2n)\big)}{\left(\int\limits_0^{\pi/(2n)}\big(1-\operatorname{sinc}\mathrm{nt}\big)^{mp/2}dt\right)^{1/p}}. \tag{2.1.5}$$

Учитывая соотношение (2.1.5), получаем оценку снизу указанной величины

$$\mathscr{E}^{(s)}_{n-1}\big(W^{(r)}_{p,m}(\Phi)\big)\ge E_{n-1}\big(f_1^{(s)}\big)=$$

$$=2^{-m/2}n^{-(r-s)}\left\{\int\limits_0^{\pi/(2n)}\big(1-\operatorname{sinc}\mathrm{nt}\big)^{mp/2}dt\right\}^{-1/p}\Phi\big(\pi/(2n)\big). \tag{2.1.6}$$

Требуемое равенство (2.1.3) получаем из сравнения оценки сверху (2.1.4) с аналогичной оценкой снизу (2.1.6), чем и завершаем доказательство теоремы 2.1.2.

§ 2.2. Решение экстремальной задачи (1.1.3) для классов функций $\mathscr{F}_m^{(r)}(h)$ и $W_m^{(r)}(h)$

Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}$, $r \geq s$ и $h \in (0, \pi/n]$. По аналогии с величиной (1.2.3), введём в рассмотрение следующую экстремальную характеристику

$$\mathscr{L}_{n,m,r}^{(s)}(h) :=$$

$$:= \sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^{r-s} E_{n-1}(f^{(s)})}{\left(\Omega_m^{2/m}(f^{(r)}, h) + \dfrac{n^2}{h}\displaystyle\int_0^h \tau(h-\tau)\Omega_m^{2/m}\big(f^{(r)}, \tau\big)d\tau\right)^{m/2}}. \tag{2.2.1}$$

Теорема 2.2.1. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$ *и* $h \in (0, 3\pi/(4n)]$. *Тогда справедливо равенство*

$$\mathscr{L}_{n,m,r}^{(s)}(h) = \left(\frac{\sqrt{3}}{nh}\right)^m. \tag{2.2.2}$$

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 1.2.1, равенство (2.2.2) вытекает из следующей цепочки равенств

$$\mathscr{L}_{n,m,r}^{(s)}(h) := \sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^{r-s} E_{n-1}(f^{(s)})}{\left(\Omega_m^{2/m}(f^{(r)}, h) + \dfrac{n^2}{h}\displaystyle\int_0^h \tau(h-\tau)\Omega_m^{2/m}\big(f^{(r)}, \tau\big)d\tau\right)^{m/2}} =$$

$$= \sup_{\mathrm{g} \in L_2^{(r-s)}} \frac{n^{r-s} E_{n-1}(\mathrm{g})}{\left(\Omega_m^{2/m}(\mathrm{g}^{(r-s)}, h) + \dfrac{n^2}{h}\displaystyle\int_0^h \tau(h-\tau)\Omega_m^{2/m}\big(\mathrm{g}^{(r-s)}, \tau\big)d\tau\right)^{m/2}} =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{nh}\right)^m \tag{2.2.3}$$

и (2.2.2) доказано.

Теорема 2.2.2. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$ *и* $0 < h \leq 3\pi/(4n)$. *Тогда справедливо равенство*

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(s)}\big(\mathscr{F}_m^{(r)}(h)\big) = \left(\frac{\sqrt{3}}{nh}\right)^m \cdot \frac{1}{n^{r-s}}. \tag{2.2.4}$$

В частности, из (2.2.4) *при* $h = \pi/(2n)$ *вытекает равенство*

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(s)}\left(\mathscr{F}_m^{(r)}\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right) = \left(\frac{2\sqrt{3}}{\pi}\right)^m \cdot \frac{1}{n^{r-s}}.$$

Доказательство. Из равенства (2.2.1) для произвольной $f \in L_2^{(r)}$ получаем

$$E_{n-1}(f^{(s)}) \leq$$

$$\leq \left(\frac{\sqrt{3}}{nh}\right)^m \frac{1}{n^{r-s}} \left(\Omega_m^{2/m}(f^{(r)}, h) + \frac{n^2}{h}\int\limits_0^h \tau(h-\tau)\Omega_m^{2/m}\big(f^{(r)}, \tau\big)d\tau\right)^{m/2}. \tag{2.2.5}$$

Из (2.2.5) в предположении $f \in \mathscr{F}_m^{(r)}(h)$ имеем

$$E_{n-1}\big(\mathscr{F}_m^{(r)}(h)\big) = \sup\Big\{E_{n-1}(f): \ f \in \mathscr{F}_m^{(r)}(h)\Big\} \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{nh}\right)^m \frac{1}{n^{r-s}}. \tag{2.2.6}$$

При доказательстве 1.3.2 было показано, что множество тригонометрических полиномов $T_n(x) \in \sigma_{2n+1}$, норма которых удовлетворяет неравенству

$$\big\|T_n\big\| \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{nh}\right)^m \frac{1}{n^r},$$

принадлежит классу $\mathscr{F}_m^{(r)}(h)$. Учитывая этот факт, рассмотрим функцию

$$\mathrm{g}_1(x) = \left(\frac{\sqrt{3}}{nh}\right)^m \frac{1}{n^r}\sin nx \in \sigma_{2n+1} \cap L_2^{(r)}.$$

Так как

$$\|\mathrm{g}_1\| = \left(\frac{\sqrt{3}}{nh}\right)^m \frac{1}{n^r},$$

то функция $\mathrm{g}_1 \in \mathscr{F}_m^{(r)}(h)$ и, в силу равенства

$$\mathrm{g}_1^{(s)}(x) = \Big(\frac{\sqrt{3}}{nh}\Big)^m \frac{1}{n^{r-s}} \sin\Big(nx + \frac{s\pi}{2}\Big),$$

из (1.1.4) получаем

$$E_{n-1}\big(\mathrm{g}_1^{(s)}\big) = \Big(\frac{\sqrt{3}}{nh}\Big)^m \frac{1}{n^{r-s}}. \tag{2.2.7}$$

Пользуясь равенством (2.2.7), запишем оценку снизу величины, расположенной в левой части (2.2.4)

$$E_{n-1}\big(\mathscr{F}_m^{(r)}(h)\big) \geq E_{n-1}\big(\mathrm{g}_1^{(s)}\big) = \Big(\frac{\sqrt{3}}{nh}\Big)^m \frac{1}{n^{r-s}}. \tag{2.2.8}$$

Сопоставляя оценку сверху (2.2.6) с оценкой снизу (2.2.8), получаем требуемое равенство (2.2.4). Теорема 2.2.2 доказана.

Не вдаваясь в излишние подробности, приводим решение экстремальной задачи (1.1.3) для класса функций $W_m^{(r)}(h)$, исходя из результата теоремы 1.3.3.

Теорема 2.2.3. *Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$, $r \geq m + s$. Тогда при всех $h \in (0, \pi/n]$ имеет место равенство*

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(s)}\big(W_m^{(r)}(h)\big) = \frac{1}{2^{m/2}\, n^{r-s}} \left(\frac{h^2}{2} - \frac{1 - \cos nh}{n^2}\right)^{-m/2}. \tag{2.2.9}$$

В частности, из (2.2.9) имеем

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(s)}\Big(W_m^{(r)}\Big(\frac{\pi}{2n}\Big)\Big) = \left(\frac{4}{\pi^2 - 8}\right)^{m/2} \frac{1}{n^{r-(m+s)}}.$$

§ 2.3. Об одном специальном случае экстремальной характеристики (1.1.16)

В первом параграфе первой главы была введена экстремальная характеристика следующего вида

$$\chi_{m,n,r,p}(\varphi,h):=\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h\omega_m^p\big(f^{(r)},t\big)\varphi(t)dt\right)^{1/p}}.$$

Там же была отмечено, что если весовая функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условие

$$(rp-1)\varphi(t)-t\varphi'(t)\geq 0,$$

то имеет место равенство

$$\chi_{m,n,r,p}(\varphi,h)=2^{-m/2}n^{-r}\left(\int\limits_0^h\big(1-\cos nt\big)^{mp/2}\varphi(t)dt\right)^{-1/p}.$$

Последнее равенство можно записать в виде

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{2^{m/2}\,n^rE_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h\omega_m^p\big(f^{(r)},t\big)\varphi(t)dt\right)^{1/p}}=\left(\int\limits_0^h\big(1-\cos nt\big)^{mp/2}\varphi(t)dt\right)^{-1/p}. \quad (2.3.1)$$

В работе [40] Н.И.Черных отметил, что поскольку функционал

$$\left\{\frac{n}{2}\int\limits_0^{\pi/n}\omega_1(f,t)\sin ntdt\right\}^{1/2} \quad (2.3.2)$$

меньше джексоновского функционала $\omega_1(f,\pi/n)$, $f\neq\mathrm{const}$, то очевидно (2.3.2) более естествен для оценки сверху величины наилучшего полиномиального приближения $E_{n-1}(f)$ периодических функций.

Аналогичную ситуацию можно разъяснить для общего функционала следующего вида

$$\left\{\int\limits_0^h \omega_m^p(f^{(r)}, t)\varphi(t)dt\right\},$$

где $f \neq \mathrm{const},\ 0 < p \leq 2,\ h > 0$, в случае $\int\limits_0^h \varphi(t)dt \leq 1$, φ — неотрицательная суммируемая на отрезке $[0, h]$ не эквивалентной нулю функция, поскольку этот функционал не превосходит величину $\omega_m(f^{(r)}, h)$.

Далее через $W_p^{(r)}(\omega_m; \varphi, h)$, где $r \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{N}$, $0 < p \leq 2$, обозначим класс функций $f \in L_2^{(r)}$, у которых производные r-го порядка $f^{(r)}$ удовлетворяют условие

$$\int\limits_0^h \omega_m^p(f^{(r)}, t)\varphi(t)dt \leq \int\limits_0^h \varphi(t)dt.$$

При этом в случае $r = 0$ полагаем

$$W_p(\omega_m; \varphi, h) = W_p^{(0)}(\omega_m; \varphi, h).$$

Основной результат данного параграфа является следующая

Теорема 2.3.1. *Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $h \in (0, \pi/n]$. Тогда имеют место равенства*

$$\lambda_{2n}\big(W_p^{(r)}(\omega_m; \varphi, h), L_2\big) = \lambda_{2n-1}\big(W_p^{(r)}(\omega_m; \varphi, h), L_2\big) =$$

$$= E_{n-1}\big(W_p^{(r)}(\omega_m; \varphi, h)\big) =$$

$$= \frac{1}{2^{m/2}n^r}\left\{\frac{\int\limits_0^h \varphi(t)dt}{\int\limits_0^h (1-\cos nt)^{mp/2}\varphi(t)dt}\right\}^{1/p}, \qquad (2.3.3)$$

где $\lambda_n(\cdot)$ — *любой из* n*-поперечников: бернштейновский* $b_n(\cdot)$, *колмогоровский* $d_n(\cdot)$, *гельфандовский* $d^n(\cdot)$, *линейный* $\delta_n(\cdot)$, *проекционный* $\Pi_n(\cdot)$.

Доказательство. Из равенства (2.3.1) для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ получаем

$$E_{n-1}(f) \le \frac{1}{2^{m/2}n^r} \cdot \frac{\left(\int\limits_0^h \omega_m^p(f^{(r)},t)\varphi(t)dt\right)^{1/p}}{\left(\int\limits_0^h (1-\cos nt)^{mp/2}\varphi(t)dt\right)^{1/p}}.$$

Отсюда, учитывая определение класса $W_p^{(r)}(\omega_m;\varphi,h)$, для любой функции $f \in W_p^{(r)}(\omega_m;\varphi,h)$ будем иметь

$$E_{n-1}(f) \le \frac{1}{2^{m/2}n^r} \left\{ \frac{\int\limits_0^h \varphi(t)dt}{\int\limits_0^h (1-\cos nt)^{mp/2}\varphi(t)dt} \right\}^{1/p}. \tag{2.3.4}$$

Учитывая соотношения (1.3.10) между всеми перечисленными выше n-поперечниками, из неравенства (2.3.4) запишем оценку сверху всех n-поперечников и точной верхней грани класса $W_p^{(r)}(\omega_m;\varphi,h)$:

$$\lambda_{2n}\big(W_p^{(r)}(\omega_m;\varphi,h),L_2\big) \le \lambda_{2n-1}\big(W_p^{(r)}(\omega_m;\varphi,h),L_2\big) \le$$

$$\le E_{n-1}\big(W_p^{(r)}(\omega_m;\varphi,h)\big) \le$$

$$\le \frac{1}{2^{m/2}n^r} \left\{ \frac{\int\limits_0^h \varphi(t)dt}{\int\limits_0^h (1-\cos nt)^{mp/2}\varphi(t)dt} \right\}^{1/p}. \tag{2.3.5}$$

Для получения оценки снизу на множестве $\mathscr{T}_{2n+1} \cap L_2$ рассмотрим шар

$$\mathscr{B}_{2n+1} := \left\{ T_n \in \mathscr{T}_{2n+1} : \ \|T_n\| \leq \frac{1}{2^{m/2} n^r} \left(\frac{\int\limits_0^h \varphi(t)dt}{\int\limits_0^h (1-\cos nt)^{mp/2} \varphi(t)dt} \right)^{1/p} \right\}$$

и покажем, что $\mathscr{B}_{2n+1}$ содержится в классе $W_p^{(r)}(\omega_m; \varphi, h)$. Для этого требуется доказать, что для произвольного полинома $T_n \in \mathscr{T}_{2n+1}$, согласно определению класса $W_p^{(r)}(\omega_m; \varphi, h)$, выполняется неравенство

$$\int\limits_0^h \omega_m^p(T_n^{(r)}, t) \varphi(t) dt \leq \int\limits_0^h \varphi(t) dt. \tag{2.3.6}$$

Так как для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ модуль непрерывности m-го порядка вычисляется равенством [44]

$$\omega_m^2(f^{(r)}, t) = 2^m \sup_{|h| \leq t} \sum_{k=1}^{\infty} k^{2r} \rho_k^2(f)(1-\cos kh)^m,$$

то, из этой формулы для произвольного полинома $T_n \in \mathscr{T}_{2n+1}$, получаем

$$\omega_m^2(T_n^{(r)}, t) = 2^m \sup \left\{ \sum_{k=1}^{n} k^{2r} \rho_k^2(T_n)(1-\cos kh)^m : \ |h| \leq t \right\} \leq$$

$$\leq 2^m n^{2r} \big(1-\cos nt\big)^m \sum_{k=1}^{n} \rho_k^2(T_n) = 2^m n^{2r} \big(1-\cos nt\big)^m \big\|T_n\big\|^2,$$

или, что тоже

$$\omega_m(T_n^{(r)}, t) \leq 2^{m/2} n^r \big(1-\cos nt\big)^{m/2} \big\|T_n\big\|. \tag{2.3.7}$$

Возведя обе части неравенства (2.3.7) в степень p $(0 < p \leq 2)$, умножая полученное выражение на весовую функцию $\varphi(t)$ и интегрируя по t от 0 до h, получаем

$$\int\limits_0^h \omega_m^p(T_n^{(r)},t)\varphi(t)dt \le 2^{mp/2}n^{rp}\left\|T_n\right\|^p \int\limits_0^h \big(1-\cos nt\big)^{mp/2}\varphi(t)dt \le$$

$$\le \frac{\int\limits_0^h \varphi(t)dt}{\int\limits_0^h \big(1-\cos nt\big)^{mp/2}\varphi(t)dt}\cdot\int\limits_0^h \big(1-\cos nt\big)^{mp/2}\varphi(t)dt = \int\limits_0^h \varphi(t)dt,$$

и таким образом неравенство (2.3.6) доказано и, тем самым включение $\mathscr{B}_{2n+1}\subset W_p^{(r)}(\omega_m;\varphi,h)$ имеет место. Поэтому, в силу определения бернштейновского n-поперечника, имеем

$$b_{2n+1}\big(W_p^{(r)}(\omega_m;\varphi,h),L_2\big) \ge b_{2n+1}\big(\mathscr{B}_{2n+1},L_2\big) \ge$$

$$\ge \frac{1}{2^{m/2}n^r}\left\{\frac{\int\limits_0^h \varphi(t)dt}{\int\limits_0^h (1-\cos nt)^{mp/2}\varphi(t)dt}\right\}^{1/p}. \qquad (2.3.8)$$

Сопоставляя оценки сверху (2.3.5) с оценкой снизу (2.3.8) перечисленных n-поперечников получаем равенство (2.3.3). Теорема 2.3.1 доказана.

Из теоремы 2.3.1 вытекают ряд результатов, полученные ранее другими математиками.

Следствие 2.3.1. *Пусть* $m,n\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $p=2$, $h=\pi/n$ *и* $\varphi(t)=\sin nt$. *В этом случае справедливо равенство*

$$\lambda_{2n}\big(W_2^{(r)}(\omega_m;\sin\cdot,\pi/n),L_2\big)=\lambda_{2n-1}\big(W_2^{(r)}(\omega_m;\sin\cdot,\pi/n),L_2\big)=$$

$$=E_{n-1}\big(W_2^{(r)}(\omega_m;\sin\cdot,\pi/n)\big)=$$

$$=2^{-m/2}n^{-r}\left(\frac{n}{2}\int\limits_0^{\pi/n}(1-\cos nt)^m\sin ntdt\right)^{-1/2}=$$

$$=2^{-m-1/2}n^{-r}\left(\int\limits_0^{\pi}\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{2m}\sin tdt\right)^{-1/2}. \qquad (2.3.9)$$

Равенство (2.3.9) ранее доказано в работе М.Ш.Шабозова и Г.А.Юсупова [45], а при $m=1$, ещё ранее Н.И.Черных [40].

Следствие 2.3.2. *Пусть* $m,n\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $0<p\le 2$, $h>0$, $\varphi(t)=h-t$, $0<t\le h$. *Тогда справедливо равенство*

$$\lambda_{2n}\big(W_p^{(r)}(\omega_m;h-\cdot,h),L_2\big)=\lambda_{2n-1}\big(W_p^{(r)}(\omega_m;h-\cdot,h),L_2\big)=$$

$$=E_{n-1}\big(W_p^{(r)}(\omega_m;h-\cdot,h)\big)=$$

$$=2^{-m}n^{-r}\left(h^2\int\limits_0^{h}(h-t)\big(1-\cos nt\big)^{mp/2}dt\right)^{-1/p}. \qquad (2.3.10)$$

Равенство (2.3.10) ранее было получено в работе М.Ш.Шабозова и К.К.Палавонова [71].

Заключение

Основные научные результаты диссертационной работы

Основные научные результаты работы заключаются в следующем:

- найдены точные константы в неравенствах типа Джексона – Стечкина между наилучшими приближениями и обобщёнными модулями непрерывности [1-A, 2-A, 3-A, 4-A, 5-A];
- вычислены значения n-поперечников классов функций, задаваемых усреднёнными с весом значениями модулей непрерывности высших порядков r-ых производных [2-A, 5-A, 6-A, 7-A, 8-A];
- вычислены верхние грани наилучших совместных приближений некоторых классов функций в пространстве L_2 [8-A, 9-A, 10-A, 11-A].

Рекомендации по практическому использованию результатов

Полученные в диссертационной работе результаты имеют теоретическое значение и могут быть применены при нахождении точных верхних граней наилучших полиномиальных приближений классов функций многих переменных. Главы диссертации в отдельности могут быть использованы при чтении специальных курсов для студентов старших курсов высших учебных заведений по специальности «Математика».

Список литературы

А) Список использованных источников

[1] Айнуллоев Н. О поперечниках дифференцируемых функций в L_2 // Доклады АН ТаджССР. – 1985. – Т.28. – №6. – С.309-313.

[2] Абилов В.А., Абилова Ф.В. Некоторые вопросы приближения 2π-периодических функций суммами Фурье в пространстве $L_2(2\pi)$ // Матем. заметки. – 2004. – Т.76. – №6. – С.803-811.

[3] Арестов В.В., Попов В.Ю. Неравенство Джексона на сфере в L_2 // Известия вузов. – 1995. – №8. – С.13-20.

[4] Бабенко А.Г. О точной константе в неравенстве Джексона в L^2 // Матем. заметки. – 1986. – Т.39. – №5. – С.651-664.

[5] Бабенко А.Г. Точное неравенство Джексона – Стечкина в пространстве $L^2(\mathbb{R}^m)$ // Труды Ин-та математики и механики УрО РАН. – 1998. – Т.5. – С.183-198.

[6] Бабенко А.Г., Черных Н.И., Шевалдин В.Т. Неравенства Джексона – Стечкина в L_2 с тригонометрическим модулем непрерывности // Матем. заметки. – 1999. – Т.65. – №6. – С.928-932.

[7] Бердышев В.И. О теореме Джексона в L_p // Труды Матем. ин-та АН СССР. – 1967. – Т.88. – С.3-16.

[8] Бернштейн С.Н. О наилучшем приближении непрерывных функций на всей вещественной оси при помощи целых функций данной степени // Собр. соч. М.: Изд-во АН СССР. – 1952. – Т.II. – С.371-375.

[9] Вакарчук С.Б., Щитов А.Н. Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 и поперечники некоторых классов функций // Укр. матем. журнал. – 2004. – Т.56. – №11. – С.1458-1466.

[10] Вакарчук С.Б. Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников функциональных классов из L_2 // Матем. заметки. – 2005. – Т.78. – №5. – С.792-796.

[11] Вакарчук С.Б. Неравенства типа Джексона и поперечники классов функций в L_2 // Матем. заметки. – 2006. – Т.80. – №1. – С.11-19.

[12] Вакарчук С.Б., Забутная В.И. Неравенства типа Джексона-Стечкина для специальных модулей непрерывности и поперечники функциональных классов в пространстве L_2 // Матем. заметки. – 2012. – Т.92. – №4. – С.497-514.

[13] Вакарчук С.Б., Шабозов М.Ш., Забутная В.И. Структурные характеристики функций из L_2 и точные значения поперечников некоторых функциональных классов // Укр. мат. вестник. – 2014. – Т.11. – №3. – С.417-441.

[14] Вакарчук С.Б. Обобщенные характеристики гладкости в неравенствах типа Джексона и поперечники классов функций в L_2 // Мат. заметки. – 2015. – Т.98. – №4. – С.511-529.

[15] Вакарчук С.Б., Забутная В.И. Неравенства между наилучшими полиномиальными приближениями и некоторыми характеристиками гладкости в пространстве L_2 и поперечники классов функций // Матем. заметки. – 2016. – Т.99. – №2. – С.215-238.

[16] Васильев С.Н. Точное неравенство Джексона-Стечкина в L_2 с модулем непрерывности, порожденным произвольным конечноразностным оператором с постоянными коэффициентами // Докл. РАН. – 2002. – Т.385. – №1. – С.11-14.

[17] Гаркави А.Л. О критерии элемента наилучшего приближения // Сиб. матем. журнал. – 1964. – №5. – С.472-476.

[18] Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. — М.: Наука. – 1977. – 511 с.

[19] Жук В.В. О некоторых точных неравенствах между наилучшими приближениями и модулями непрерывности // Сиб. матем. журнал. – 1971. – Т.12. – №6. – С.1283-1291.

[20] Иванов В.И. Прямые и обратные теоремы теории приближений в метрике L_p для $0 < p < 1$ // Матем. заметки. – 1975. – Т.18. – №5. – С.641-658.

[21] Иванов В.И., Смирнов О.И. Константы Джексона и константы Юнга в пространствах L_p. — Тула: ТулГУ. – 1995. – 192 с.

[22] Иванов В.И., Чертова Д.В., Лю Юнпин. Точное неравенство Джексона в пространстве L_2 на отрезке $[-1, 1]$ со степенным весом // Труды Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2008. – Т.14. – №3. – С.112-126.

[23] Иванов В.И. Прямые и обратные теоремы теории приближения периодических функций в работах С.Б.Стечкина и их развитие // Труды Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2010. – Т.16. №4. – С.5-17.

[24] Иванов В.И. Точные L_2-неравенства Джексона – Черных – Юдина в теории приближений // Изв. Тульского госуниверситета. Естественные науки. – 2012. – №3. – С.19-28.

[25] Корнейчук Н.П. Точная константа в теореме Д.Джексона о наилучшем равномерном приближении непрерывных периодических функций // ДАН СССР. – 1962. – Т.145. – №3. – С.514-516.

[26] Лигун А.А. Некоторые неравенства между наилучшими приближениями и модулями непрерывности в пространстве L_2 // Матем. заметки. – 1978. – Т.24. – №6. – С.785-792.

[27] Лигун А.А. Точные неравенства типа Джексона для периодических функций в пространстве L_2 // Матем. заметки. – 1988. – Т.43. – №6. – С.757-769.

[28] Малозёмов В.Н. Совместное приближение функции и ее производных. – Л.: Изд-во ЛГУ. – 1973. – 112 с.

[29] Никольский С.М. Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1946. – Т.10. – С.295-332.

[30] Руновский К.В. О приближении семействами линейных полиномиальных операторов в пространствах $L_p, 0 < p < 1$ // Матем. сборник. – 1994. – Т.185. – №8. – С.81-102.

[31] Сендов Б., Попов В. Усредненные модули гладкости. — М.: Мир. – 1988. – 328 с.

[32] Стечкин С.Б. О порядке наилучших приближений непрерывных функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1951. – Т.15. – С.219-242.

[33] Стороженко Э.А., Кротов В.Г., Освальд П. Прямые и обратные теоремы типа Джексона в пространствах $L_p, 0 < p < 1$ // Матем. сборник. – 1975. – Т.98(140). – №3(11). – С.395-415.

[34] Тайков Л.В. Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности функций из L_2 // Матем. заметки. – 1976. – Т.20. – №3. – С.433-438.

[35] Тайков Л.В. Наилучшие приближения дифференцируемых функций в метрике пространства L_2 // Матем. заметки. – 1977. – Т.22. – №4. – С.535-542.

[36] Тайков Л.В. Структурные и конструктивные характеристики функций из L_2 // Матем. заметки. – 1979. – Т.25. – №2. – С.217-223.

[37] Тиман А.Ф. Теория приближения функций действительного переменного. — М.: Физматгиз. – 1960. – 624 с.

[38] Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений. — М.: МГУ. – 1976. – 325 с.

[39] Чебышёв П.Л. Вопросы о наименьших величинах, связанные с приближённым представлением функций (1859) // Собр. соч., М. – Л., 1947, Изд-во АН СССР. – Т.II. – С.151-235.

[40] Черных Н.И. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 // Матем. заметки. – 1967. – Т.2. – №5. – С.513-522.

[41] Черных Н.И. О неравенстве Джексона в L_2 // Приближение функций в среднем. Сборник работ. Тр. МИАН СССР. – 1967. – Т.88. – С.71-74.

[42] Черных Н.И. Неравенство Джексона в $L_2(0, 2\pi)$ $(1 \leq p < 2)$ с точной константой // Труды Математического института РАН. – 1992. – Т.198. – С.232-241.

[43] Шабозов М.Ш. Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения n-поперечников некоторых классов функций из L_2 // Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н. – 2010. – №4(141). – С.7-24.

[44] Шабозов М.Ш. Поперечники некоторых классов периодических дифференцируемых функций в пространстве $L_2[0, 2\pi]$ // Мат. заметки. – 2010. – Т.87. – №4. – С.616-623.

[45] Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 некоторых классов 2π-периодических функций и точные значения их поперечников // Мат. заметки. – 2011. – Т.90. – №5. – С.764-775.

[46] Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников некоторых классов функций в L_2 // Сибир. мат. журнал. – 2011. - Т.52. – №6. – С.1414-1427.

[47] Шабозов М.Ш., Вакарчук С.Б. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами и точных значениях поперечников функциональных классов в L_2 // Analysis Mathematica. – 2012. – Tomus 38. – P.154-165.

[48] Шабозов М.Ш., Шабозова А.А. Некоторые точные неравенства типа Джексона – Стечкина для периодических дифференцируемых в смысле Вейля функций в L_2 // Труды Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2019. – Т.25. – №4. – С.255-264.

[49] Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А., Заргаров Дж.Дж. О наилучшей совместной полиномиальной аппроксимации функций и их производных в пространстве Харди // Труды Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2021. – Т.27. – №4. – С.239-254.

[50] Шабозов М.Ш. Неравенства между наилучшими полиномиальными приближениями и некоторыми характеристиками гладкости функций в L_2 // Мат. заметки. – 2021. – Т.110. – №3. – С.450-458.

[51] Шабозов М.Ш. О наилучшем совместном приближении функций в пространстве Харди // Труды Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2023. – Т.29. – №4. – С.283-291.

[52] Шабозов М.Ш. О наилучшем совместном приближение функций в пространстве Бергмана B_2 // Мат. заметки. – 2023. – Т.114. – №3. – С.435-446.

[53] Шалаев В.В. О поперечниках в L_2 классов дифференцируемых функций, определяемых модулями непрерывности высших порядков // Укр. матем. журнал. – 1991. – Т.43. – №1. – С.125-129.

[54] Юдин В.А. К теоремам Джексона в L_2 // Мат. заметки. – 1987. – Т.41. – №1. – С.43-47.

[55] Юссеф Х. О наилучших приближениях функций и значениях поперечников классов функций в L_2 // Применение функционального анализа в теории приближений. Сб. научн. трудов. Калининский гос. ун-т. Калинин. – 1988. – С.100-114.

[56] Юсупов Г.А. Наилучшие полиномиальные приближения в пространстве $L_2[0,2\pi]$ и точные значения n-поперечников // ДАН РТ. – 2008. – Т.51. – №11. – С.803-809.

[57] Юсупов Г.А. Наилучшее приближение и значение поперечников множеств в пространстве L_2 // ДАН РТ. – 2011. – Т.54. – №3. – С.173-180.

[58] Юсупов Г.А. Точные значения поперечников некоторых классов функций из L_2 и минимизация констант в неравенствах типа Джексона – Стечкина // Модел. и анализ инф. систем. – 2013. – Т.20. – №5. – С.106-116.

[59] Arestov V.V., Chernykh N.I. On the L_2-approximation of periodic functions by trigonometric polynomials // Approximation and functions spaces. Proc. Conf. Gdan'sk. 1979. Amsterdam: North-Holland. – 1981. – P.25-43.

[60] Vakarchuk S.B., Zabutna V.I. Widths of function classes from L_2 and exact constants in Jackson type inequalities // East Journal on Approximations. – 2008. – V.14. – №4. – P.411-421.

[61] Vakarchuk S.B., Shabozov M.Sh., Zabutna V.I. Structural characteristics of functions from L_2 and the exact values of widths of some functional classes // Journal of Mathematical Sciences. – 2015. – Vol.206. – №1. – PP.97-114.

[62] Vallee-Poussin Ch.J. de la. Sur les polinômes d'approximation à une variable complexe // Bull. Acad Roy Belg. CI. Sc. – 1911. – P.199-211.

[63] Jackson D. Über die Genauigkeit der Annäherunger stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen gegebenen Grades und trigonometrische Summen gegebener Ordnung // Preisschrift und Dissertation. Universitat Göttingen, – 1911.

[64] Kolmogoroff A.N. Über die besste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionklassen // Ann. of Math. – 1936. – V.37. – P.107-110.

[65] Lebesgue H. Sur la representation trigonometrique approchee des fonctions satisfaisant a une condition de Lipschitz // Bull. S. V. F. – 1910. – V.38. – P.184-210.

[66] Pinkus A. n-Widths in Approximation Theory. — Berlin: Springer-Verlag. Heidelberg. New York, Tokyo. – 1985. – 252 p.

[67] Trigub R.M., Bellinsky E.S. Fourier Analysis and Approximation of Functions. — Dordrecht Boston London: Kluwer Academic Publishers. – 2004.

[68] Favar J. Sur les meilleurs prosedes d'approximation de certains classes de functions par des polynomes trigonometriques // Bull Sci. Math. – 1937. – V.61. – 209-224. – PP.243-256.

[69] Hardy G.G., Littlewood J.E., Polya G. Inequality. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press. – 1952. – 346 p.

[70] Shabozov M.Sh., Yusupov G.A. Widths of Certain Classes of Periodic Functions in L_2 // Journ. of Approx. Theory. – 2012. – V.164. – Issue 1. – PP.869-878.

[71] Shabozov M.Sh., Palavonov K.K. Exact values of widths of certain classes of periodic differentiable functions in the space $L_2[0, 2\pi]$ // Analysis Mathematica. – 2015. – Tomus 41. – P.103-115.

[72] Shabozov M.Sh., Yusupov G.A., Temurbekova S.D. n-Widths of Certain Function Classes Defined by the Modulus of Continuity // Journ. of Approx. Theory. – 2017. – V.215. – Issue 1. – PP.145-162.

[73] Weierstrass K. Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Funktionen einer reelen Veränderlichen // Der Sitzungsberichte der Königl. Akademie der Wissennschaften. – 1885. – S.633-639, 789-805.

Б) РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. В журналах, входящих в перечень ВАК при Президенте Республики Таджикистан:

[1-А] Мавлоназаров М.А. Точные значения поперечников некоторых функциональных классов в L_2 [Текст] / Г.А.Юсупов, М.А.Мавлоназаров // Доклады НАН Таджикистана. – 2021. – Т.64. – №11-12. – С.628-636.

[2-А] Мавлоназаров М.А. О совместном приближении периодических функций и её производных в L_2 [Текст] / Г.А.Юсупов, М.А.Мавлоназаров // Известия НАН Таджикистана. Отделение физ.-мат., хим., геол. и тех. наук. – 2022. – №3(188). – С.7-17.

[3-А] Мавлоназаров М.А. Некоторые точные неравенства между наилучшими приближениями и интегралами, содержащими специальные модули непрерывности [Текст] / М.А.Мавлоназаров // Доклады НАН Таджикистана. – 2022. – Т.65. – №5-6. – С.294-303.

[4-А] Мавлоназаров М.А. Некоторые точные неравенства между наилучшими приближениями и интегралами, содержащими специальные модули непрерывности в пространстве L_2 [Текст] / М.А.Мавлоназаров // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. – 2022. – №4. – С.194-204.

[5-А] Мавлоназаров М.А. О среднеквадратических совместных приближениях 2π-периодических функций в L_2 [Текст] / Г.А.Юсупов, М.А.Мавлоназаров // Доклады НАН Таджикистана. – 2023. – Т.66. – №11-12. – С.642-649.

2. В других изданиях:

[6-А] Мавлоназаров М.А. Совместное приближение периодических функций в гильбертовом пространстве L_2 [Текст] / М.А.Мавлоназаров // Материалы международной конференции «Современные проблемы теории чисел и математического анализа», посвящённой 80-летию со дня рождения доктора физ.-мат. наук, профессора Дододжона Исмоилова (г.Душанбе, 29-30 апреля 2022 г.). – С.130-134.

[7-А] Мавлоназаров М.А. О точных значениях неравенств наилучших приближений и интегралах, содержащих обобщенные модули непрерывности [Текст] / М.А.Мавлоназаров // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математического анализа и теории функций», посвящённой 70-летию академика НАН Таджикистана М.Ш.Шабозова (Душанбе, 24-25 июня 2022 г.). – С.85-91.

[8-А] Мавлоназаров М.А. Совместное приближение 2π-периодических функций и их производных в метрике L_2 [Текст] / Г.А.Юсупов, М.А.Мавлоназаров // Материалы республиканской научно-практической конференции «Актуальные проблемы и перспективы развития естественных и точных наук» (г.Душанбе, 28-29 октября 2022 г.). – С.76-79.

[9-А] Мавлоназаров М.А. Совместное полиномиальное приближение периодических функций и их производных [Текст] / М.А.Мавлоназаров // Сборник научных статей Международной научно-теоретической конференции на тему: «Развитие науки и образования в условиях глобализации на примере горных условий: проблемы, новые подходы и актуальные исследования», посвящённой 30-летию XVI-й сессии Верховного Совета Республики Таджикистан и 30-летию Хорогского государственного университета им. М.Назаршоева (г.Хорог, 11-12 ноября 2022 г.). – С.96-99.

[10-А] Мавлоназаров М.А. Значения поперечников классов периодических функций в метрике пространства L_2 [Текст] / М.А.Мавлоназаров // Материалы международной конференции «Современные проблемы математики», посвящённой 50-летию Института математики им. А.Джураева Национальная академия наук Таджикистана (г.Душанбе, 26-37 мая 2023 г.). – С.128-131.

[11-А] Мавлоназаров М.А. Среднеквадратические приближения 2π-периодических функций в пространстве L_2 [Текст] / Г.А.Юсупов, М.А.Мавлоназаров // Материалы международной научной-практической конференции «Математика в современном мире» (г.Худжанд, 19-20 апреля 2024 г.). – С.195-199.