

## ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертацию

Мавлоназарова Марамбека Абдулназаровича «Решение экстремальных задач теории приближений периодических функций в  $L_2$ ».  
представленную на соискание ученой степени кандидата  
физико-математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный,  
комплексный и функциональный анализ

Диссертационная работа «Решение экстремальных задач теории приближений периодических функций в  $L_2$ » представляет собой тщательное исследование, посвященное проблеме наилучшего совместного приближения периодических функций в  $L_2$ -пространстве. Автор внимательно анализирует существующие методы приближения и предлагает новые подходы, основанные на глубоких теоретических основаниях.

Одним из главных достоинств работы является ее математическая строгость и систематический подход к изучению проблемы. Диссертант Мавлоназаров М.А. умело использует математическую технику, чтобы представить сложные методы в доступной форме, что делает диссертацию полезной для как академической, так и профессиональной аудитории.

Основные результаты и выводы диссертации представляют собой значимый вклад в область функционального анализа и прикладной математики. Предложенные методы приближения имеют потенциал для применения в различных областях, включая инженерные и научные задачи, связанные с обработкой сигналов, аппроксимацией функций и другими.

В диссертационной работе Мавлоназарова Марамбека Абдулназаровича изучаются точные неравенства типа Джексона–Стечкина в терминах усредненных обобщенных модулей непрерывности высшего порядка, а также находятся точные значения различных  $n$ -поперечников классов функций, задаваемых указанными характеристиками гладкости (либо их мажорантами) как самих функций, так и их производных. Установлены неулучшаемые оценки наилучших совместных приближений тригонометрическими полиномами посредством усредненных с весом значений модулей непрерывности произвольного порядка и даны их приложения в задаче отыскания точных значений различных  $n$ -поперечников некоторых классов функций в  $L_2$ .

В этом направлении наиболее важные результаты получены в работах Н.П. Корнейчука, Н.И. Черныха, В.И. Бердышева, В.В. Арестова, В.В. Жука, Л.В. Тайкова, А.А. Лигуна, А.Г. Бабенко, М.Ш. Шабозова и многих других. В периодическом случае обстоятельный обзор полученных результатов приведен, например, в работах В.И. Иванова, М.Ш. Шабозова и Г.А. Юсупова, С.Б. Вакарчука и В.И. Забутной.

Полученные в диссертации результаты являются новыми и, в частности, обобщают недавно полученные результаты С.Б. Вакарчука, В.И. Забутной, А.Н. Щитова, М.Ш. Шабозова и Г.А. Юсупова.

По сравнению с ранее полученными результатами в этом направлении диссертанту М.А. Мавлоназарову удалось получить более точные результаты, а именно: найдены точные константы в неравенствах типа Джексона–Стечкина между наилучшими приближениями и обобщенными модулями непрерывности; вычислены значения  $n$ -поперечников классов функций, задаваемых усредненными с весом значениями модулей непрерывности высших порядков  $r$ -ых производных; вычислены верхние грани наилучших совместных приближений некоторых классов функций в пространстве  $L_2$ .

Все утверждения теорем, научные положения, выводы и рекомендации, сформулированные в диссертации, а также полученные автором точные неравенства, полностью обоснованы.

Основные результаты диссертации носят теоретический характер и имеют важное значение для дальнейшего развития теории аппроксимации функций.

Диссертационная работа Мавлоназарова М.А. состоит из введения, двух глав и списка цитированной литературы из 84 наименований.

Во введении обосновывается актуальность темы диссертации и излагаются основные результаты, полученные автором.

В первой главе диссертации рассматриваются вопросы, связанные с наилучшим приближением  $2\pi$ -периодических дифференцируемых функций в пространстве  $L_2$  тригонометрическими полиномами порядка  $\leq n - 1$ . Доказываются точные неравенства типа Джексона–Стечкина в терминах усредненных с весом обобщенных модулей непрерывности высших порядков, принадлежащих гильбертовому пространству  $L_2$  (теоремы 1.1.1–1.2.3, следствия 1.1.1–1.2.3). Также в этой главе (теоремы 1.3.1–1.3.3) для любых  $m \in \mathbb{N}$ ,  $r \in \mathbb{Z}_+$ ,  $0 < p \leq +\infty$ , вычислены точные значения бернштейновских, колмогоровских, гельфандовских, линейных и проекционных  $n$ -поперечников классов

$$W_p^{(r)}(\Omega_m, \Phi) := \left\{ f \in L_2^{(r)} : \int_0^t \Omega_m^p(f^{(r)}, h) dh \leq \Phi^p(t), \quad t \in (0, 2\pi] \right\},$$

$$W^{(r)}(\Omega_m, h) := \left\{ f \in L_2^{(r)} : \int_0^h t \Omega_m^p(f^{(r)}, t) dt \leq 1, \quad h \in [0, 2\pi] \right\},$$

$$\mathcal{F}^{(r)}(\Omega_m, h) :=$$

$$:= \left\{ f \in L_2^{(r)} : \left\{ \Omega_m^{2/m}(f^{(r)}, h) + \frac{n^2}{h} \int_0^h \tau(h - \tau) \Omega_m^{2/m}(f^{(r)}, \tau) d\tau \right\}^{m/2} \leq 1, \quad h \in \left(0, \frac{3\pi}{4n}\right] \right\}.$$

Кроме того, в теореме 1.3.1 в качестве примера приведена мажорантная функции  $\Phi(t)$ , удовлетворяющая ограничению теоремы 1.3.1.



Здесь  $L_2^{(r)}$  ( $r \in \mathbb{Z}_+$ ,  $L_2^{(0)} = L_2$ ) обозначает множество функций  $f \in L_2$ , у которых производные  $(r - 1)$ -го порядка  $f^{(r-1)}$  абсолютно непрерывны, а производные  $r$ -го порядка  $f^{(r)}$  принадлежат пространству  $L_2$ .

Во второй главе диссертации автор рассматривает экстремальную задачу нахождения точных верхних граней наилучших совместных полиномиальных приближений определенных классов  $2\pi$ -периодических дифференцируемых функций, характеризующихся специальным обобщенным модулем непрерывности  $\Omega_m(f^{(r)}, h)$  в метрике пространства  $L_2$ .

Диссертация М.А. Мавлоназарова является самостоятельной, завершенной научной квалификационной работой.

В целом автореферат и диссертационная работа оформлены хорошо, однако имеется ряд замечаний.

1) При доказательстве теоремы 1.2.2 желательная ссылка на работу Л.В. Тайкова «Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности функций из  $L_2$ » // Матем. заметки. 1976. Т.20. С. 433-438.

2) На стр. 44, в неравенстве (1.3.16), при переходе на другую строку, во второй строке, пропущено знак неравенство.

3) Также в диссертации ряд несущественных опечаток, которые не считаю нужным перечислять в отзыве.

4) В диссертации есть только одна ссылка на работу (1994 г.) К.В. Руновского. Хотелось бы иметь более свежие ссылки на этого автора, который является общепризнанным специалистом по обобщенным модулям непрерывности и гладкости. Также заслуживают упоминания (и использования) результаты работ А.И. Козко, А.В. Рождественский, «О неравенстве Джексона в  $L_2$  с обобщенным модулем непрерывности», Матем. сб., 195:8 (2004), 3–46, А.И. Козко, А.В. Рождественский, «О неравенстве Джексона с обобщенным модулем непрерывности», Матем. заметки, 73:5 (2003), 783–788.

Тем не менее все эти замечания не умаляют высокой оценки полученных автором результатов.

В автореферате неточности не обнаружены. Автореферат соответствует требованиям ВАК при Президенте Республики Таджикистан, полно и правильно отражает основные положения диссертационной работы.

В целом, работа является важным вкладом в современную математическую науку и будет интересна как специалистам, так и студентам, интересующимся теорией приближений и функциональным анализом.

Диссертационная работа Мавлоназарова Марамбека Абдулназаровича «Решение экстремальных задач теории приближений периодических функций в  $L_2$ », представленная на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук является научно-квалификационной работой, в которой содержатся решения задач, имею-

щих существенное значение для теории приближения функций, и полностью соответствует требованиям ВАК при Президенте Республики Таджикистан и положения о присуждении ученых степеней, а ее автор заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — Вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Официальный оппонент  
доктор физико-математических наук,  
по специальности 01.01.01 – вещественный,  
комплексный и функциональный анализ,  
ведущий научный сотрудник лаборатории  
вычислительных методов  
механико-математического факультета  
ФГБОУ ВПО Московского государственного  
университета имени М.В. Ломоносова

  
Алимов  
Алексей Ростиславович  
06.06.2024

Адрес: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы,  
МГУ, д.1, Главное здание, механико-математический факультет  
Телефон: +7 (495) 939 56 32  
E-mail: alexey.alimov-msu@yandex.ru

Подпись А.Р. Алимова удостоверяю.

Декан механико-математического  
факультета МГУ имени М.В. Ломоносова  
член-корреспондент РАН, профессор



Шафаревич А.И.