ДОНИШГОҲИ МИЛЛИИ ТОҶИКИСТОН

Бо ҳуқуқи дастнавис

ВБД 517.923; 517.926.4

МИРЗОЗОДА ҶУНАЙДУЛЛОҲ АБДУЛЛО

ТАҲҚИҚИ БАЪЗЕ СИНФҲОИ МУОДИЛАҲОИ ДИФФЕРЕНСИАЛИИ ТАНАЗЗУЛЁБАНДАИ НАМУДИ ЭЙЛЕР ВА ТАТБИҚИ ОНҲО ДАР ҲАЛЛИ МУОДИЛАҲОИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНСИАЛИИ СИНГУЛЯРӢ

ДИССЕРТАТСИЯ

барои дарёфти дараҷаи илмии номзади илмҳои физикаю математика аз рӯйи ихтисоси 1.1.3. Муодилаҳои дифференсиалӣ, системаҳои динамикӣ ва идоракунии оптималӣ

Роҳбарони илмӣ:

доктори илмҳои физика ва математика,

профессор $\boxed{\textbf{Мустафоқулов Раҳмонқул,}}$

доктори илмҳои физика ва математика,

дотсент **Зарифзода Сарвар Қаҳрамон**

Душанбе – 2026

МУНДАРИҶА

МУҚАДДИМА

Мубрамии мавзуи таҳқиқот. Дар нимаи дуюми асри XIX инкишофи босуръати назарияи муодилаҳои дифференсиалӣ ба назар мерасад. Дар он замон диққати асосӣ ба омӯзиши муодилаҳои дифференсиалӣ бо коэффисиентҳои махсус ё сингулярӣ равона гардида буд. Ин синфи муодилаҳо баъдтар ба номи олими бузурги немис И.Л. Фукс номи «муодилаҳои синфи Фукс»-ро гирифт.

Натиҷаҳои бунёдӣ дар ин самт дар корҳои Л. Эйлер [137], К.Ф. Гаусс [1], Б. Риман [125], А. Пуанкаре [13], И.Л. Фукс [6], Ф. Клейн [11], Ф.Г. Фробениус [5] ва дигарон ба даст оварда шудааст.

Баъдтар диққати олимон ба таҳқиқи муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ, ки коэффисиентҳояшон дорои нуқтаҳои махсус буданд, равона гардидааст. Яке аз муодилаҳои маъмул дар ин самт ин муодилаи Эйлер-Пуассон-Дарбу мебошад, ки ба таҳқиқи он корҳои олимони зиёд ба мисли R.W. Carroll [2, 3], J.B. Diaz [4], R.P. Gilbert [8, 9], A.A. Kilbas [12], E.L. Shishkina [25], А.В. Глушак [38], Х.Ш. Ҷураев [42], Н. Раҷабов [96-99], М.С. Салоҳиддинов [127], С.А. Сатторов [128] ва дигарон бахшида шудааст.

Натиҷаҳои илмии фундаменталӣ оид ба ҳалли муодилаҳои дифференсиалии намуди эллиптикӣ бо коэффисиентҳои таназзулёбанда дар корҳои олимон К.Х. Бойматов [32], Н.А. Вирченко [33], М.И. Вишик [34], О.А. Вихрева [35], В.Н. Врагов [37], Джураев А.Д. [37], В.М. Ивакин [62], С.А. Исхоков [65], Н.Б. Келдиш [71], И.А. Киприянов [72], [73], Л.Д. Кудрявсев [74], П.И. Лизоркин [77], Е.И.Моисеев [81], Л.Г. Михайлов [79], А.Мухсинов [92], С.М. Николский [93], Л.С. Пулкина [95], О.А. Репин [124], К.Б. Сабитов[126], М.М. Смирнов [130], А.К. Уринов [131], З.Д. Усмонов [132] ба даст оварда шудааст.

Мубрамияти мавзуъ дар он аст, ки муодилаҳои дифференсиалии таназзулёбандаи намуди Эйлер бо нуқтаҳои махсуси иррегулярӣ (сингулярӣ) дар моделсозии математикии равандҳои муосири физикӣ ва механикӣ мавқеи калидиро ишғол менамоянд. Сарфи назар аз аҳаммияти амалии онҳо, масъалаи ёфтани ҳалли ин муодилаҳо дар шакли ошкор ва таҳияи алгоритмҳои табдилдиҳии онҳо ба муодилаҳои дорои коэффисиентҳои доимӣ то ҳол дар назарияи умумии муодилаҳои дифференсиалӣ ҳамчун масъалаи кушода ва пурра ҳалнашуда боқӣ мемонад.

Дарачаи таҳқиқоти мавзуи илмӣ. Ба муодилаҳои дифференсиалии синфи Фукс чунин муодилаҳои дифференсиалие дохил мешаванд, ки ҳамаи коэффисиентҳояшон дорои нуқтаҳои махсуси регулярӣ мебошанд ва ин муодилаҳо дорои чунин ҳалҳое мебошанд, ки нуқтаҳои махсуси ин ҳалҳо низ нуқтаҳои махсуси регулярӣ мебошанд. Ин синфи муодилаҳо аввалин бор дар корҳои Л. Эйлер [137], К.Ф. Гаусс [1], Б. Риман [125] пайдо шуда, баъдтар омӯзиши густардаи онҳо аз тарафи И.Л. Фукс [6, 7] гузаронида мешавад ва ин сабабгори ба худ касб намудани номи *«муодилаҳои дифференсиалии синфи Фукс»* мегардад.

«Соли 1865 дар корҳои И.Л. Фукс шартҳои зарурӣ ва кифоягии тааллуқ доштани муодилаи дифференсиалӣ ба синфи Фукс муайян карда шуда буд» [6, 7].

Агар муодилаи дифференсиалии хаттии тартиби дуюм дар намуди каноникии

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = 0 \tag{0.1}$$

дода шуда бошад ва нуқтаи $x = 0$ нуқтаи махсуси регулярӣ барои коэффисиентҳои $p(x), q(x)$-и ин муодила бошад, ғайр аз ин $p(x)$ дорои нуқтаи қутбии дараҷааш аз 1 калон набуда, $q(x)$ дорои нуқтаи қутбии дараҷааш аз 2 калон набуда бошад, пас муодилаи намуди:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + xP(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0,$$

ё

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{P(x)}{x} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{Q(x)}{x^2} y = 0$$

муодилаи дифференсиалии синфи Фукс номида мешавад.

Хотирнишон менамоем, ки нуқтаи махсуси муодилаи (0.1) *нуқтаи махсуси регулярӣ номида мешавад,* агар шарти зерин иҷро гардад:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0} (x - x_0)p(x) - \text{маҳдуд}, \\ \lim\limits_{x \to x_0} (x - x_0)^2 q(x) - \text{маҳдуд}. \end{cases} \tag{0.2}$$

«Нуқтаи махсуси муодилаи (0.1) *нуқтаи махсуси сингулярӣ ё иррегулярӣ номида мешавад,* агар шартҳои

$$\lim_{x \to x_0} (x - x_0)p(x) - \text{номаҳдуд}$$

ва

$$\lim_{x \to x_0} (x - x_0)^2 q(x) - \text{номаҳдуд}$$

иҷро гардад» [134].

Дар адабиётҳо муодилаҳои синфи Фукс бо миқдори зиёди нуқтаҳои махсус ба таври муфассал омӯхта шудааст. Масалан, муодилаи намуди умумии

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{P(x)}{\prod_{k=1}^{n}(x - a_k)} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{Q(x)}{\prod_{k=1}^{n}(x - a_k)^2} y = 0,$$

омӯхта шудааст, ки дар ин ҷо $P(x), Q(x) -$ ягон бисёраъзогиҳо буда, $a_k -$ координатаҳои нуқтаҳои махсус мебошанд.

Агар дар муодилаи синфи Фукс миқдори нуқтаҳои махсуси муодила ба 1 баробар бошад, пас ин гуна муодила бо ёрии гузориш ба муодилаи дифференсиалии одитарини тартиби дуюми намуди $y'' = 0$ оварда мешавад, ки ба он диққати махсус ҷудо намудан зарурат надорад. Агар муодила дорои ду нуқтаҳои махсуси a_1 ва a_2 бошад, пас ин гуна муодила баъд аз табдилдиҳиҳои муайян ба муодилаи намуди Эйлер оварда мешавад, ки чунин намуд дорад:

$$y'' + \frac{A_1}{x} \cdot y' + \frac{B_1}{(a_2 - a_1)^2} \cdot \frac{y}{x^2} = 0.$$

Агар микдори нуқтаҳои махсуси муодила ба 3 баробар бошад, пас чунин муодила бо ёрии табдилдиҳиҳои мувофиқ ба намуди муодилаи гипергеометрии Гаусс оварда мешавад, ки дар квадратура ҳалшаванда намебошад S.K. Zarifzoda [29], В.В. Голубев [39], И.Е. Егоров [43]. Барои ёфтани ҳалли ин гуна муодилаҳо дар аксар адабиётҳо ба мисли C.F. Gauss [1], Q. Frobenius [5], D. Karp [10], аз қаторҳои гипергеометрӣ истифода бурда мешавад.

«Зинаи навбатӣ аз рӯйи мушкилии таркибӣ ва аз рӯйи мушкилии методикаи таҳқиқоти муодилаҳои дифференсиалии синфи Фукс ин муодилаҳои дифференсиалӣ бо коэффисиентҳои махсуси иррегулярӣ ё сингулярӣ мебошад» С. Байзаев [30], А.А. Бободжонов [31], Я.И. Житомирский [44], Ш.Т. Каримов [69], В.В. Катрахов [70], С.З. Курбаншоев [75], Л.Г. Михайлов [79, 80], Э.М. Мухаммадиев [91], С.М. Ситник [129], В.В. Хорошилов [134].

Ба ин синфи муодилаҳо муодилаи зерин дохил мебошад:

$$[\omega(x)]^2 y'' + a_1[\omega(x)]y' + a_2 y = f(x), \tag{0.3}$$

ки дар ин ҷо $a_1, a_2 -$ коэффисиентҳои доимӣ, $f(x) -$ функсияи додашудаи бефосила дар интервали $\Gamma = \{x: 0 < x < \infty\}$ буда, $\omega(x) -$ функсияе мебошад, ки дар ягон нуқтаи интервали Г дорои сифри дараҷааш калон аз як мебошад.

«Агар дар ин муодила $\omega(x) = x$ гузорем, пас муодилаи ҳосилшуда, тавре пештар қайд намуда будем, муодилаи маълуми Эйлер мегардад» [36].

«Агар $\omega(x) = (x-a)^{\alpha}$ бошад, ки дар ин ҷо $\alpha > 0$ аст, пас барои коэффисиентҳои муодилаи (0.3) шарти (0.2) иҷро намегардад ва бинобар ин муодилаи (0.3) муодилаи дифференсиалӣ бо нуқтаи махсуси иррегулярӣ дар нуқтаи $x = a$ мебошад» [39].

Маълум мегардад, ки барои омӯзиши васеи муодилаи (0.3), тартиб додан ва таҳқиқ намудани муодилаи моделии ба он мувофиқоянда, масъалаи муҳим мебошад.

Чунин тарзи таҳқиқи муодилаҳои дифференсиалӣ бо коэффисиентҳои махсус дар корҳои илмии Н. Раҷабов [14-23], [96-116] ва шогирдонаш М.Я. Дадоджонова [40], S.K. Zarifzoda [26-28], [45-61], Г.М. Кадиров [66-68], А.Г. Олимов [94], Л.Н. Раджабова [117-123], Ф.М. Шамсудинов [135], В.В. Шевчук [136] васеъ истифода бурда мешавад.

Масалан, «дар кори Н. Раҷабов муодилаи намуди (0.3), ки бо ёрии оператори дифференсиалии $D_x^{\alpha} = (x-a)^{\alpha}\frac{d}{dx}$ сохта шудааст, таҳқиқ гардида буд»[108]. Инчунин, дар корҳои «Н. Раҷабов ва Г.М. Қодиров муодилаи моделии тартиби дуюм ва сеюми намуди (0.3), ки бо оператори дифференсиалии D_x^{α} сохта шудааст»[112-114], таҳқиқ гардида буд. Баъзе ҳолатҳои муодилаи тартиби n низ дар корҳои М.М. Маламуд [78], Н. Раҷабов [115] таҳқиқ гардидаанд.

Дар ин корҳо дар асоси омӯзиши хосиятҳои оператори дифференсиалии D_x^{α}, муодилаи таҳқиқшаванда бо ёрии методи вариатсияи доимиҳои ихтиёрӣ ҳал карда мешавад.

Дар фарқият ба ин, дар диссертатсияи илмии мазкур муодилаи намуди (0.3) бо ёрии методи ба муодилаи дифференсиалии одӣ бо коэффисиентҳои доимӣ овардани он, таҳқиқ карда мешавад.

Инчунин, муодилаи тартиби олии ба (0.3) мувофиқоянда низ таҳқиқ карда шуда, ҳалли он бо ёрии функсияҳои элементарӣ ифода карда мешавад.

Маълум мегардад, ки ҳангоми омӯзиши муодилаҳои намуди (0.3) масъалаи муҳим ин тартиб додан ва омӯхтани муодилаи моделии мувофиқоянда мебошад. Агар муодилаи моделӣ дуруст тартиб дода шавад, пас ёфтани ҳалҳои муодилаи таҳқиқшаванда дар намуди ошкор имконпазир мегардад. Ин яке аз воситаҳои асосӣ барои таҳқиқи муодилаҳои ғайримоделӣ мебошад.

Чунин методи таҳқиқоти «муодилаҳои дифференсиалӣ бо коэффисиентҳои сингулярӣ ва барзиёд сингулярӣ дар корҳои Н. Раҷабов» [14-23], [96-116] ва шогирдонаш S.K. Zarifzoda [26-28], [45-61], Г.М. Кадиров [66-68], Л.Н. Раджабова [117-123] ба таври васеъ паҳн гардидааст.

«Баъзе натиҷаҳо оид ба ёфтани ҳалли умумии муодилаҳои дифференсиалии тартиби дуюм бо ду нуқтаҳои махсус дар корҳои С.К. Зарифзода ба даст оварда шудааст»[45-54]. «Дар корҳои минбаъдаи ӯ як синфи васеи муодилаҳои интегро-дифференсиалӣ бо ядроҳои махсусияташон гуногун низ таҳқиқ карда шудааст» [55-58].

Дар корҳои Р. Мустафоқулов [82]-[89] муодилаи намуди (0.3)-и тартибаш гуногун таҳқиқ гардида буд. Дар ин корҳо шартҳои зарурӣ ва кифоягии овардашаванда будани муодилаи (0.3) ба муодилаи дифференсиалӣ бо коэффисисентҳои доимӣ, муайян карда шудааст. Ин натиҷаҳо баъдтар дар кори Р. Мустафоқулов [90] барои муодилаҳои тартиби олӣ идома дода шудааст.

Дар корҳои муаллиф баъзе натиҷаҳо оид ба ҳалшавандагии як синфи муодилаҳои дифференсиалии таназзулёбандаи намуди Эйлер, ба даст оварда шудааст. Ин натиҷаҳо дар мақолаҳои [1-М], [2-М], [3-М], [4-М], [5-М], [6-М], [7-М], [8-М], [9-М], [10-М], [11-М], [12-М], [13-М], [14-М] ба чоп расонида шудаанд.

Аз таҳлили натиҷаҳои ба мавзуи диссертатсия наздик бармеояд, ки мавзуъ ва объекти интихобгардидаи кори таҳқиқотии мазкур муҳим ва саривақтӣ мебошад.

Робитаи таҳқиқот бо барномаҳо (лоиҳаҳо) ва мавзуъҳои илмӣ. Таҳқиқоти илмии мазкур дар чаҳорчӯбаи амалисозии нақшаи дурнамои корҳои илмӣ-таҳқиқотии кафедраҳои математикаи олӣ, таҳлили функсионалӣ ва муодилаҳои дифференсиалӣ ва инчунин кафедраи математикаи ҳисоббарорӣ ва механикаи факултети механика ва математикаи Донишгоҳи миллии Тоҷикистон барои солҳои 2015-2020 ва 2020-2025 дар мавзуъҳои «Таҳқиқоти аналитикӣ, таҳлили сифатӣ ва ҳалли ададии масъалаҳои математикаи амалӣ ва механика» ва «Муодилаҳо ва системаи муодилаҳои дифференсиалии таназзулёбанда» амалӣ карда шудааст.

ТАВСИФИ УМУМИИ ТАҲҚИҚОТ

Мақсади таҳқиқот. Мақсади кори мазкур ба даст овардани тасвири интегралии бисёршаклаи ҳал барои як синфи муодилаи дифференсиалии одии моделӣ ва ғайримоделӣ бо нуқтаи махсуси иррегулярӣ, бо истифода аз методи овардани ин муодилаҳо ба муодилаи дифференсиалии одӣ бо коэффисиентҳои доимӣ, иборат мебошад.

Вазифаҳои таҳқиқот. Мувофиқи мақсади гузошташуда масъалаҳои зеринро ҷудо менамоем:

- ба даст овардани тасвири интегралии бисёршаклаи ҳал барои муодилаи тартиби якум намуди Эйлер;
- ба даст овардани тасвири интегралии бисёршаклаи ҳал барои муодилаи тартиби дуюми намуди Эйлер;
- ба даст овардани тасвири интегралии бисёршаклаи ҳал барои муодилаи умумикардашудаи тартиби дуюми ғайримоделии намуди Эйлер;

- таҳқиқи муодилаи дифференсиалии одии таназзулёбанда бо коэффисиентҳои доимӣ;
- таҳқиқи муодилаи дифференсиалии одии таназзулёбанда бо коэффисиентҳои тағйирёбанда;
- сохтани функсияи Коши барои муодилаи дифференсиалии одии таназзулёбандаи ғайриякҷинса;
- ба даст овардани тасвири интегралии ҳал барои як синфи муодилаҳои интегро-дифференсиалии дученака бо ядрои барзиёд сингулярӣ.

Объекти таҳқиқоти диссертатсияи илмии мазкур инҳо мебошанд:

- муодилаи намуди Эйлер;
- муодилаи дифференсиалии таназзулёбандаи моделӣ бо коэффисиентҳои доимӣ;
- муодилаи дифференсиалии таназзулёбандаи ғайримоделӣ бо коэффисиентҳои тағйирёбанда;
- муодилаи интегро-дифференсиалии дученака бо ядрои барзиёд сингулярӣ.

Мавзуи таҳқиқот. Дар кор методҳои умумии назарияи муодилаҳои дифференсиалӣ ва интегро-дифференсиалӣ, методи ба даст овардани тасвири интегралии ҳал барои муодилаҳои дифференсиалии одӣ ва инчунин методи сохтани функсияи Коши барои муодилаҳои дифференсиалии одӣ, истифода бурда мешавад.

Навгонии илмии таҳқиқот. Натиҷаҳои диссертатсияи илмӣ нав буда, аз тарафи муаллиф мустақилона ба даст оварда шудааст ва аз инҳо иборат мебошад:

- ҳалли ошкорои муодилаи дифференсиалии моделӣ ва ғайримоделии тартиби якуми намуди Эйлер ёфта шудааст;
- интеграли умумии муодилаи умумикардашудаи намуди Эйлер сохта шудааст;

- ➢ теорема оид ба овардашаванда будани муодилаи дифференсиалӣ бо коэффисиентҳои тағйирёбанда ба муодилаи дифференсиалӣ бо коэффисиентҳои доимӣ исбот карда шудааст;
- ➢ ҳалли умумии муодилаи моделии намуди Эйлери тартиби олӣ ёфта шудааст;
- ➢ ҳалли умумии муодилаи ғайримоделӣ бо ёрии резолвентаи муодилаи интегралии намуди Волтерра ба даст оварда шудааст;
- ➢ функсияи Коши барои муодилаи ғайриякҷинсаи моделии тартиби олӣ сохта шудааст;
- ➢ ҳалли умумии муодилаи интегро-дифференсиалии дученака бо ядрои барзиёд сингулярӣ ёфта шудааст.

Аҳамияти назариявӣ ва илмию амалии таҳқиқот. Таҳқиқотҳои дар ин диссертатсияи илмӣ оид ба ҳалшавандагии баъзе синфҳои муодилаҳои дифференсиалии таназзулёбанда ва муодилаи интегро-дифференсиалии сингулярӣ гузаронидашуда, характери назариявӣ доранд. Натиҷаҳои илмии бадастовардашуда барои инкишофи минбаъдаи назарияи муодилаҳои дифференсиалии таназзулёбандаи ғайримоделӣ, барои муодилаҳои дифференсиалӣ бо миқдори зиёди нуқтаҳои махсус ва инчунин дар қисматҳои дигари илмҳои амалӣ ба мисли физика, механика ва ғайра истифода бурда мешаванд. Маводи диссертатсияи илмии мазкурро ҳангоми хондани курсҳои махсус барои донишҷӯёни курсҳои болоӣ, магистрон ва докторантони мактабҳои олӣ, ки аз рӯйи ихтисосҳои математика, математикаи амалӣ ва механика таҳсил менамоянд, истифода бурдан мумкин аст.

Нуктаҳои ба ҳимоя пешниҳодшаванда:

- ➢ Исботи теорема оид ба шартҳои зарурӣ ва кифоягии овардашаванда будани муодилаи дифференсиалӣ бо коэффисиентҳои тағйирёбанда ба муодилаи дифференсиалӣ бо коэффисисентҳои доимӣ гузаронида шудааст;

- Дар хусуси ба даст овардани ҳалҳои ошкорои муодилаи дифференсиалии ғайриякҷинсаи моделии намуди Эйлери тартиби олӣ теоремаҳо исбот карда шудааст;
- Ҳалли умумии муодилаи интегро-дифференсиалии дученака ба ядрои барзиёд сингулярӣ дар намуди ошкор ба даст оварда шудааст.

Дараҷаи эътимоднокии натиҷаҳои диссертатсия. Эътимоднокии натиҷаҳои илмии дар ин диссертатсия бадастовардашуда, бо ёрии ҳисобкуниҳои аниқи математикӣ ва исботҳои дақиқ, ки ба методҳои назарияи муодилаҳои дифференсиалӣ, таҳлили функсионалӣ ва назарияи муодилаҳои интегралӣ такя мекунанд, пурра асоснок карда шудаанд. Ин натиҷаҳо аҳамияти зиёд барои омӯзиши минбаъдаи ҳалшавандагии муодилаҳои дифференсиалӣ бо коэффисиентҳои сингулярӣ доранд ва метавонанд барои ҳалли масъалаҳои назариявӣ ва амалӣ дар соҳаҳои гуногуни илм ва техника муфид бошанд. Ҳамаи теоремаҳои асосӣ бо риояи қатъии шарти зарурӣ ва кифоягӣ исбот гардидаанд. Ҳалҳои ошкорои муодилаҳо тавассути истифодаи табдилдиҳиҳои мувофиқ, формулаҳои асимптотика ва резолвентаҳои муодилаҳои интегралии Волтерра ба даст оварда шудаанд.

Мутобиқати диссертатсия ба шиносномаи ихтисоси илмӣ. Диссертатсияи илмӣ аз рӯйи ихтисоси 1.1.3. Муодилаҳои дифференсиалӣ, системаҳои динамикӣ ва идоракунии оптималӣ таълиф гардидааст ва пурра ба формулаи он (муодилаҳои дифференсиалии одӣ) ва се қисми соҳаи таҳқиқот

1. Назарияи умумии муодилаҳои дифференсиалӣ ва системаи муодилаҳои дифференсиалӣ;

2. Масъалаҳои ибтидоию канорӣ ва спектрӣ барои муодилаҳои дифференсиалӣ ва системаи муодилаҳои дифференсиалӣ;

3. Назарияи муодилаҳои операторӣ-дифференсиалӣ

мувофиқат мекунад. Диссертатсияи мазкурро қисми таҳлили ҳақиқӣ, комплексӣ ва функсионалӣ (ихтисоси ҳамгиро 1.1.2. Таҳлили ҳақиқӣ, комплексӣ ва функсионалӣ) шуморидан мумкин аст.

Саҳми шахсии довталаби дараҷаи илмӣ дар он зоҳир мегардад, ки ҳамаи натиҷаҳои илмии ба ҳимоя пешниҳодшаванда, аз тарафи ӯ мустақилона ба даст оварда шудаанд. Муаллиф шахсан формулаҳои ивази тағйирёбандаро ёфта, теоремаҳои зарурӣ ва кифоягиро исбот кардааст, ҳалҳои ошкорои муодилаҳои моделию ғайримоделӣ, функсияи Коши ва ҳалҳои муодилаҳои интегро-дифференсиалиро сохтааст.

Дар корҳои якҷоя бо роҳбарон ва ҳамкорон ҳамаи ҳисобкуниҳои математикӣ, исботи теоремаҳо ва таҳлилҳои асимптотикӣ пурра ба довталаб тааллуқ доранд.

Дар корҳои илмии якҷоя бо роҳбари илмии якум таълифгардида, муодилаҳои дифференсиалии намуди Эйлер таҳқиқ гардидааст.

Дар корҳои илмии бо роҳбари дуюм таълифгардида, натиҷаҳои пештар ба даст овардашуда дар таҳқиқи як синфи муодилаҳои интегро-дифференсиалии сингулярӣ татбиқ шудааст.

Тасвиб ва амалисозии натиҷаҳои диссертатсия. Натиҷаҳои асосии диссертатсия борҳо дар конференсияҳои ҷумҳуриявӣ ва байналмилалии зерин маъруза гардидааст:

- конференсияи илмӣ-амалӣ дар мавзуи «7-умин хониши Ломоносовӣ» (ш. Душанбе, Тоҷикистон, 28-29 апрели соли 2017);
- конференсияи байналмилалии илмию амалӣ дар мавзуи «XXVIII-умин хониши Понтрягинӣ» (ш. Воронеж, Федератсияи Россия, 3-9 майи соли 2017);
- конференсияи илмӣ-амалии байналмилалӣ дар мавзуи «Масъалаҳои мубрами математикаи муосир» (ш. Душанбе, Тоҷикистон, 25-26 июни соли 2018);
- конференсияи илмӣ-амалии байналмиллалӣ дар мавзуи «Масъалаҳои мубрам ва татбиқи назарияи ададҳо ва таҳлили математикӣ» (ш. Душанбе, Тоҷикистон, соли 2019);

- конференсияи илмӣ-амалии байналмиллалӣ дар мавзуи «Масъалаҳои муосири таҳлили функсионалӣ ва муодилаҳои дифференсиалӣ» (ш. Душанбе, Тоҷикистон, соли 2020);
- конференсияи илмӣ-амалии байналмиллалӣ дар мавзуи «Масъалаҳои муосири математика ва татбиқи он» (ш. Душанбе, Тоҷикистон, 20-21 октябри соли 2020);
- конференсияи илмӣ-амалии байналмиллалӣ дар мавзуи «Масъалаҳои муосири математика ва татбиқи он» (ш. Душанбе, Тоҷикистон, соли 2022);
- конференсияи илмӣ-амалии ҷумҳуриявӣ дар мавзуи «Масъалаҳои мубрами тараққиёти илмҳои табиӣ, дақиқ ва математикӣ дар шароити муосир» (ш. Душанбе, Тоҷикистон, соли 2022);
- конференсияи илмии байналмилалӣ дар мавзуи «Масъалаҳои муосири математика ва татбиқи он» (ш. Душанбе, Тоҷикистон, 2023 с.).

Интишорот аз рӯйи мавзуи диссертатсия. Натиҷаҳои асосии диссертатсияи илмӣ дар 14 корҳои илмии муаллиф ба чоп расонида шудааст, ки аз онҳо 5-тояш мақолаҳои илмии дар маҷаллаҳои тақризшавандаи Комиссияи олии аттестатсионии назди Президенти Ҷумҳурии Тоҷикистон ба нашр расида ва 9-тои боқимондаашро мақолаҳои дар маҷмуаи маводи конференсияҳои илмии сатҳашон гуногун нашршуда ташкил медиҳанд. Дар корҳои якҷоя бо муаллифи дуюм пешниҳодгардида, ҳамаи ҳисобкуниҳо ва исботи теоремаҳо пурра ба муаллифи диссертатсия тааллуқ дорад.

Сохтор ва ҳаҷми диссертатсия. Диссертатсия аз бахшҳои муқаддима, тавсифи умумии таҳқиқот, чор боб, бахши хулосаҳо бо натиҷаҳои асосии илмии диссертатсия ва тавсияҳо оид ба истифодаи амалии натиҷаҳо, рӯйхати адабиёт бо феҳристи сарчашмаҳои истифодашуда ва феҳристи интишороти илмии довталаби дарёфти дараҷаи илмӣ иборат аст.

Ҳаҷми умумии диссертатсия аз 152 саҳифаи матни компютерӣ, ки бо ёрии протсессори матнии Microsoft Word ҳуруфчинӣ гардидааст, иборат буда, рӯйхати адабиёти истифодашуда 137 номгӯйро ташкил медиҳад.

БОБИ 1. БАРРАСИИ НАТИҶАҲО ОИД БА ТАҲҚИҚИ МУОДИЛАҲОИ ДИФФЕРЕНСИАЛӢ БО КОЭФФИСИЕНТҲОИ МАХСУС

1.1. Маълумоти умумӣ оид ба баъзе муодилаҳои дифференсиалӣ бо коэффисиентҳои махсус

Масъалаи интегронидани муодилаҳои дифференсиалӣ яке аз масъалаҳои асосии назарияи муодилаҳои дифференсиалӣ ба ҳисоб меравад. Дар ибтидои пайдоиши назарияи муодилаҳои дифференсиалӣ кӯшиши бештар ба он харҷ дода мешуд, ки ё ҳалли муодилаҳои дифференсиалӣ бо ёрии функсияҳои элементарӣ ифода карда шавад, ё интегронидани муодилаи дифференсиалӣ ба гирифтани интеграл аз функсияҳои маълум оварда шавад. Натиҷаҳои асосӣ дар ин самт аз тарафи олимони асри XVIII ба мисли Эйлер, Бернулли, Клеро, Лагранж, Коши ва дигарон ба даст оварда шуда буд. Дар бораи ин натиҷаҳо маълумотҳои ибтидоиро дар курсҳои муқаррарии ба муодилаҳои дифференсиалӣ бахшидашуда, дастрас намудан мумкин аст.

Натиҷаҳои бунёдӣ дар ин самт дар корҳои Л. Эйлер [137], К.Ф. Гаусс [1], Б. Риман [125], А. Пуанкаре [13], И.Л. Фукс [6], Ф. Клейн [11], Ф.Г. Фробениус [5], R.W. Carroll [2], [3], J.B. Diaz [4], R.P. Gilbert [8], [9], A.A. Kilbas [12], E.L. Shishkina [25], А.В. Глушак [38], Х.Ш. Ҷураев [42], Н. Раҷабов [96]-[99], М.С. Салоҳиддинов [127], С.А. Сатторов [128], К.Х. Бойматов [32], Н.А. Вирченко [33], М.И. Вишик [34], О.А. Вихрева [35], В.Н. Врагов [37], Джураев А.Д. [37], В.М. Ивакин [62], С.А. Исхоков [65], Н.Б. Келдиш [71], И.А. Киприянов [72], [73], Л.Д. Кудрявсев [74], П.И. Лизоркин [77], Е.И.Моисеев [81], Л.Г. Михайлов [79], А.Мухсинов [92], С.М. Николский [93], Л.С. Пулкина [95], О.А. Репин [124], К.Б. Сабитов[126], М.М. Смирнов [130], А.К. Уринов [131], З.Д. Усмонов [132] ба даст оварда шудааст.

Бо вуҷуди ин дар бисёр ҳолатҳо ҳалли муодилаҳои дифференсиалиро дар намуди ошкор бо ёрии функсияҳои элементарӣ ифода кардан ғайриимкон мебошад. Масалан, барои муодилаҳои дифференсиалии тартиби якум, ҳалли муодилаи Рикати, яъне

$$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$$

-ро бо ёрии функсияҳои элементарӣ ифода кардан номумкин аст.

Барои муодилаҳои дифференсиалии тартиби олӣ бошад, ин масъала мушкилии боз ҳам зиёдтарро ба худ касб менамояд. Масалан, ҳалли муодилаи дифференсиалии тартиби олӣ бо коэффисиентҳои тағйирёбандаи:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x) \tag{1.1.1}$$

-ро танҳо дар ҳолати $p_i(x) = p_i = const$ будан, дар намуди ошкор ба воситаи коэффисисентҳои p_i ва тарафи рости он $f(x)$ ифода намудан мумкин аст. Аз ин рӯ, кушишҳои олимон бештар ба он равона мегардид, ки ҳалли муодилаи (1.1.1) ақаллан барои баъзе қиматҳои хусусии функсияҳои $p_i(x)$ дар намуди ошкор ёфта шавад. Натиҷаҳои назаррас дар ин самт барои баъзе муодилаҳои дифференсиалии тартиби дуюм бо коэффисисентҳои тағйирёбандаи намуди махсус ба даст оварда шуда буд. Месазад дар ин ҷо хотиррасон намоем оид ба баъзе муодилаи дифференсиалии коэффисиентҳояшон тағйирёбанда, ки дар амалия татбиқи васеъ ёфтаанд.

1. Муодилаи дифференсиалии гипергеометрии Гаусс, намуди зеринро дорад:

$$x(1-x)y'' + [c - (a+b+1)x]y' - aby = 0. \tag{1.1.2}$$

Муодилаи (1.1.2) дар байни муодилаҳои дифференсиалии коэффисиентҳояшон тағйирёбанда маъруфияти хосса дошта, ба таҳқиқи он диққати олимони зиёд ҷалб гардидааст. Муодилаи (1.1.2) мисоли содатарини муодилаи дифференсиалии тартиби дуюми якҷинса бо се нуқтаҳои махсуси регулярӣ мебошад, ки дар намуди умумӣ интегронидашаванда намебошад. Нуқтаҳои махсуси ин муодила 0, 1 ва ∞ мебошанд. Яке аз сабабҳои маъруфияти муодилаи гипергеометрии (1.1.2) дар он аст, ки ҳама гуна муодилаҳои дифференсиалии тартиби дуюм бо се нуқтаи махсус бо ёрии гузоришҳои мувофиқ ба ин намуд оварда мешаванд. Ҳалли муодилаи (1.1.2) аввалин бор соли 1778 аз тарафи Эйлер ба воситаи қатори

$$F(a,b,c;x) = 1 + \frac{a \cdot b}{1 \cdot c}x + \frac{a(a+1)b(b+1)}{1 \cdot 2 \cdot c(c+1)}x^2 + \cdots \qquad (1.1.3)$$

дар фазои тағйирёбандаҳои ҳақиқӣ, ифода карда шуда буд. Қатори (1.1.3), ки аввалин бор аз тарафи Й. Пфафф қатори гипергеометрӣ номида шуда буд, баъдтар бо номи қатори гипергеометрии Гаусс машҳур гашта, дар назарияи муодилаҳои дифференсиалӣ мавқеи хоссаро касб намудааст. Қайд намудан лозим аст, ки ибораи «*қатори гипергеометрӣ*» аввалин бор аз тарафи Валлис дар кори ӯ «*Arithmetica infinitorum*» (соли 1655) барои қатори аъзои умумиаш

$$u_n = \frac{a(a+b)(a+2b)\cdots(a+(n-1)b)}{b \cdot 2b \cdots (n-1)b}$$

истифода шуда буд, ки ин охиронро ҳамчун ҳолати хусусии қатори гипергеометрии Гаусс дар намуди $aF\left(\frac{a}{b}+1,1,1;1\right)$ навиштан мумкин аст.

2. Муодилаи дифференсиалии Лежандр. Ин муодила чунин намуд дорад:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0. \qquad (1.1.4)$$

Муодилаи Лежандр низ дорои се нуқтаҳои махсуси регулярӣ буда, ин нуқтаҳо -1, 1 ва ∞ мебошанд. Тавре пештар қайд намуда будем, муодилаи (1.1.4) бо ёрии гузориши мувофиқ $\left(t = \frac{1-x}{2}\right)$ ба муодилаи гипергеометрии Гаусс оварда шуда, ҳалли он бо ёрии қаторҳои гипергеометрии мувофиқ ифода карда мешавад.

Қайд менамоем, ки ҳангоми дар муодилаи (1.1.4) адади бутуни мусбат будани индекси n ҳалли он ба бисёразогии дараҷаи n мубаддал мегардад. Ин бисёраъзогӣ бисёраъзогии Лагранжи дараҷааш n ном дошта, бо ёрии формулаи Родриго дар намуди зерин ифода карда мешавад

$$y_1 = P_n(x) = F\left(-n, n+1, 1; \frac{1-x}{2}\right) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}((x^2-1)^n).$$

3. Муодилаи дифференсиалии Чебишев. Ин муодила чунин намуд дорад:

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0. \qquad (1.1.5)$$

Муодилаи Чебишев низ дорои се нуқтаҳои махсуси регулярӣ буда, ин нуқтаҳои махсус ба мисли муодилаи Лежандр нуқтаҳои -1, 1 ва ∞ мебошанд. Аз ин рӯ муодилаи Чебишев низ бо ёрии гузориши $t = \frac{1-x}{2}$ ба муодилаи гипергеометрии Гаусс оварда мешавад.

Дар муодилаи Чебишев низ агар n – адади бутуни мусбат бошад, пас ҳалли якуми он бисёраъзогии дараҷаи n мебошад, ки он бисёраъзогии Чебишев номида мешавад

$$y_1 = T_n(x) = F\left(-n, n, \frac{1}{2}; \frac{1-x}{2}\right).$$

1.2. Оид ба муодилаҳои дифференсиалии тартиби олӣ бо коэффисиентҳои тағйирёбанда

Тавре пештар қайд намудем, муодилаҳои дифференсиалӣ бо коэффисиентҳои тағйирёбандаи тартиби олӣ на ҳамеша бо воситаи функсияҳои элементарӣ дар намуди ошкор ҳалшаванда мебошанд. Агар бо ёрии ивази тағйирёбанда муодилаи дифференсиалӣ бо коэффисисентҳои тағйирёбандаро ба муодилаи дифференсиалӣ бо коэффисисентҳои доимӣ овардан мумкин бошад, пас бо ёрии гузориши баръакс ҳалли муодилаи додашударо бо ёрии функсияҳои элементарӣ ифода намудан мумкин аст.

Яке аз муодилаҳои тартиби олӣ бо коэффисиентҳои тағйирёбанда, ки ҳалашро ба воситаи функсияҳои элементарӣ ифода намудан мумкин аст, ин муодилаи дифференсиалии Эйлер мебошад, ки чунин намуд дорад:

$$x^n y^{(n)} + p_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} x y' + p_n y = f(x). \tag{1.2.1}$$

Муодилаи (1.2.1) дар ҳолати $x > 0$ будан, бо ёрии гузориши

$$x = e^t \tag{1.2.2}$$

ба намуди муодилаи дифференсиалӣ бо коэффисиентҳои доимӣ оварда мешавад.

Синфи дигари муодилаҳои дифференсиалии тартиби олӣ бо коэффисиентҳои тағйирёбанда, ки бо ёрии гузориши мувофиқ ба муодилаи дифференсиалӣ бо коэффисиентҳои доимӣ оварда мешавад, ин муодилаи дифференсиалии намуди

$$(ax+b)^n y^{(n)} + p_1 (ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(ax+b) y' + p_n y = f(x) \tag{1.2.3}$$

мебошад. Муодилаи (1.2.3) низ дар ҳолати $ax + b > 0$ будан, бо ёрии гузориши

$$ax + b = e^t \tag{1.2.4}$$

ба намуди муодилаи дифференсиалӣ бо коэффисиентҳои доимӣ оварда мешавад.

Аз рӯйи мушкилии ёфтани ҳалли муодилаҳои дифференсиалӣ ба воситаи функсияҳои элементарӣ, марҳилаи навбатӣ ин марҳилаи омӯзиши муодилаҳои дифференсиалӣ бо коэффисиентҳои иррегулярӣ ё сингулярӣ мебошад.

Дар назарияи аналитикии муодилаҳои дифференсиалӣ ба синфи муодилаҳое, ки дорои нуқтаҳои махсуси иррегулярӣ мебошанд, муодилаҳои зерин дохил карда мешаванд:

1. Муодилаи Ламе;
2. Муодилаи Матё;
3. Муодилаи Бессел;
4. Муодилаи Вебер, Эрмит;
5. Муодилаи Стокс.

Қайд намудан лозим аст, ки муодилаҳои дар боло номбаршуда ин муодилаҳои дифференсиалии тартиби дуюм мебошанд. Оид ба ёфтани ҳалли ин гурӯҳи муодилаҳо бо ёрии қаторҳои дараҷагӣ аз тарафи олимон натиҷаҳои зиёд ба даст оварда шудааст.

Ҳамзамон таҳқиқотҳо нишон медиҳанд, ки оид ба ёфтани ҳалли муодилаҳои дифференсиалии тартиби олӣ бо коэффисиентҳои иррегулярӣ то замони муосир натиҷаҳои камтар ба чоп расонида шудааст. Аз ин рӯ, таҳқиқ намудан ва ёфтани ҳалҳои муодилаҳои дифференсиалӣ бо коэффисиентҳои иррегулярии тартиби олӣ дар намуди ошкор ба худ махсусияти хосеро касб менамояд.

1.3. Натиҷаҳо оид ба муодилаҳои дифференсиалӣ бо коэффисиентҳои махсус

Пеш аз ҳама қайд менамоем, ки дар аксар адабиётҳои ватанӣ мафҳуми нуқтаи махсуси иррегулярӣ ё сингулярӣ, ки дар назарияи аналитикии муодилаҳои дифференсиалӣ дохил карда шудаанд, ба мафҳуми нуқтаи махсуси барзиёд сингулярӣ иваз карда шудааст. Аз ин рӯ, ин анъанаро нигоҳ дошта, дар оянда мо низ мафҳуми нуқтаи махсуси барзиёд сингуляриро бештар истифода мебарем.

Муодилаи дифференсиалии зеринро дида мебароем:

$$y' + \frac{p(x)}{(x-a)^\alpha} y = \frac{f(x)}{(x-a)^\alpha}. \tag{1.3.1}$$

Маълум аст, ки барои коэффисиенти назди y ва тарафи рости муодилаи (1.3.1) нуқтаи $x = a$ нуқтаи махсус буда, тартиби нуқтаи махсус ба α баробар аст.

Дар «монографияи Н. Раҷабов [96] гурӯҳбандии зерини муодилаҳои дифференсиалӣ бо коэффисиентҳои сингулярӣ дохил карда шудааст:

Таърифи 1.3.1. *Агар тартиби нуқтаи махсуси муодилаи дифференсиалӣ аз тартиби муодилаи дифференсиалӣ хурд бошад, пас нуқтаи махсуси* $x = a$ *нуқтаи сингулярнокиаш сусти муодилаи дифференсиалии (1.3.1) номида мешавад.*

Таърифи 1.3.2. *Агар тартиби нуқтаи махсуси муодилаи дифференсиалӣ ба тартиби муодилаи дифференсиалӣ баробар бошад, пас нуқтаи махсуси* $x = a$ *нуқтаи сингулярии муодилаи дифференсиалии (1.3.1) номида мешавад.*

Таърифи 1.3.3. *Агар тартиби нуқтаи махсуси муодилаи дифференсиалӣ аз тартиби муодилаи дифференсиалӣ калон бошад, пас* *нуқтаи махсуси* $x = a$ *нуқтаи барзиёд сингулярии муодилаи дифференсиалии (1.3.1) номида мешавад*» [14].

Дар мувофиқа ба ин се таърифҳои овардашуда, муодилаи дифференсиалии (1.3.1) дар ҳолатҳои $\alpha < 1,\ \alpha = 1$ ва $\alpha > 1$ мувофиқан муодилаи дифференсиалии тартиби якум бо коэффисиентҳои сингулярнокиаш суст, сингулярӣ ва барзиёд сингулярӣ номида мешавад.

Муодилаи дифференсиалии (1.3.1) ва системаи чунин муодилаҳо дар корҳои Н. Раҷабов махсусан дар монографияи ӯ [14] ба таври муфассал таҳқиқ карда шуда, ҳалли ошкорои он ба воситаи тарафи рости ин муодила ифода карда шудааст.

Муодилаи дифференсиалии тартиби дуюм бо коэффисиентҳои махсус намуди зеринро дорад:

$$y'' + \frac{p(x)}{(x-a)^{\alpha}} y' + \frac{q(x)}{(x-a)^{2\alpha}} y = \frac{f(x)}{(x-a)^{2\alpha}}. \qquad (1.3.2)$$

Барои муодилаи (1.3.2) низ гурӯҳбандии дар боло овардашуда ҷой дорад. Қайд менамоем, ки муодилаи (1.3.2) барои ихтиёрӣ коэффисиентҳои $p(x)$ ва $q(x)$ дар шакли ошкоро ҳалшаванда намебошад. Вале ҳолатҳои хусусие вуҷуд дорад, ки дар ин ҳолатҳо муодилаи (1.3.2) дар шакли ошкоро ҳалшаванда мегардад. Ин ҳолатҳо дар корҳои Н. Раҷабов [100-110] дида баромада шудааст.

Муодилаи дифференсиалии тартиби сеюм бо нуқтаи барзиёд сингулярӣ дар корҳои Л.Н. Раҷабова [117-123] таҳқиқ шудааст.

Дар корҳои Н. Раҷабов, Г.М. Кодиров [111-115] методи дигари ҳалли модилаҳои дифференсиалӣ бо коэффисиентҳои барзиёд сингулярӣ пешниҳод карда шудааст. «Дар ин корҳо оператори дифференсиалии намуди:

$$D_x^{\alpha} = (x-a)^{\alpha} \frac{d}{dx}$$

дохил карда шуда, бо ёрии он муодилаи дифференсиалии

$$(D_x^\alpha)^n y + p_1 (D_x^\alpha)^{n-1} y + \cdots + p_{n-1} D_x^\alpha y + p_n y = f(x) \qquad (1.3.3)$$

сохта мешавад»[111-115]. Дар корҳои Г.М. Кадиров [66, 67], Н. Раджабов [114] муодилаҳои дифференсиалии тартиби сеюм ва чоруми намуди (1.3.3) таҳқиқ шудааст.

«Муодилаи дифференсиалии тартиби n-уми (1.3.3) дар як ҳолат, ҳангоми решаҳои муодилаи характеристикии мувофиқоянда ҳақиқӣ ва гуногун будан, дар кори» Г.М. Кадиров [68], Н. Раджабов [115] таҳқиқ шудааст.

Омӯзиши системаи муодилаҳои дифференсиалии тартиби якум ва дуюм бо коэффисиентҳои сингулярӣ ва барзиёд сингулярӣ дар корҳои Н. Раҷабов ва О. Меликов [103] дида баромада шудааст.

Ба омӯзиши муодилаҳои дифференсиалии тартиби дуюм бо ҳосилаҳои хусусии намуди гиперболӣ ва бо коэффисиентҳои сингулярӣ ва барзиёд сингулярӣ ба корҳои Н. Раҷабов, Л.Н. Раҷабова [117-123] ва Ф. Шамсудинов [135] бахшида шудааст.

Дар корҳои Ф. Шамсудинов [135] махсусан дар диссертатсияи доктории ӯ системаи муодилаҳои дифференсиалии барзиёдмуайяншуда бо нуқтаи сингулярӣ ва барзиёд сингулярӣ таҳқиқ карда шудааст.

Дар диссертатсияи доктории С.К. Зарифзода «як синфи муодилаҳои интегро-дифференсиалӣ бо ядрои сингулярӣ ва барзиёд сингулярӣ бо ёрии методи оператсионӣ таҳқиқ гардидааст» [26-28]. Дар ин диссертатсия ду табдилотҳои интегралии нав S_{11} – табдилоти интегралӣ ва S_α – табдилоти интегралӣ сохта шуда, бо ёрии ин табдилотҳои интегралӣ барои операторҳои дифференсиалии:

$$D_x^{11} = x(1-x)\frac{d}{dx}, D_x^{\alpha} = x^{\alpha}\frac{d}{dx}$$

асосҳои ҳисоби оператсионӣ гузошта шудааст С.К. Зарипов [56]. Пайдоиши ин табдилотҳои интегралӣ, махсусан S_{α} – табдилоти интегралӣ имконият фароҳам меорад, то ки муодилаи (1.3.3) бо истифода аз методи оператсионӣ таҳқиқ карда шавад.

«Дар корҳои муаллифи диссертатсия муодилаи дифференсиалии тартиби дуюм бо нуқтаи барзиёд сингулярии намуди:

$$[\omega(x)]^2 y'' + a_1\omega(x)y' + a_2 y = f(x)$$

таҳқиқ карда шудааст»[2-М], [3-М], [7-М], [8-М], [9-М]. Натиҷаҳо оид ба таҳқиқи муодилаи дифференсиалии тартиби n – ум бо нуқтаи барзиёд сингулярии намуди Эйлери:

$$[\omega(x)]^n y^{(n)} + a_1[\omega(x)]^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\omega(x)y' + a_n y = f(x),$$

дар корҳои [4-М], [5-М], [6-М], [11-М], [12-М] ба даст оварда шудааст.

Оид ба методи ҳалли муодилаи интегро-дифференсиалии дученака бо ядрои барзиёдсингулярии

$$D_x^{\alpha} D_y^{\beta} U(x,y) + \int_a^x \frac{A}{(t-a)^{\alpha}} D_y^{\beta} U(t,y)dt + \int_b^y \frac{B}{(s-b)^{\beta}} D_x^{\alpha} U(x,s)ds +$$
$$+ \int_a^x \frac{C}{(t-a)^{\alpha}} \int_b^y \frac{1}{(s-b)^{\beta}} U(t,s)dtds = f(x,y)$$

натиҷаҳои муайян дар корҳои [4-М], [5-М], ба даст оварда шудааст.

БОБИ 2. ТАҲҚИҚИ МУОДИЛАҲОИ ДИФФЕРЕНСИАЛИИ БАРЗИЁД ТАНАЗЗУЛЁБАНДА

2.1. Таҳқиқи муодилаи моделӣ

Бигузор $\Gamma = \{x: 0 < x < \infty\} -$ маҷмуи нуқтаҳо дар тири ҳақиқӣ бошанд. Дар Γ муодилаи барзиёд таназзулёбандаи тартиби n-уми зеринро дида мебароем:

$$[\omega(x)]^n y^{(n)} + a_1[\omega(x)]^{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\omega(x)y' + a_n y = f(x), \qquad (2.1.1)$$

ки дар ин ҷо $a_i \ (i = \overline{1,n}) -$ ададҳои доимӣ, $f(x) -$ функсияи додашудаи бефосила дар Γ, $\omega(x) -$ функсияе мебошад, ки дар ягон нуқтаи интервали Γ ба сифр мубаддал мегардад ва $y = y(x) -$ функсияи номаълум мебошад.

Муодилаи (2.1.1) – ро муодилаи таназзулёбанда меномем, зеро он ҳангоми ба сифр баробар гаштани функсияи $\omega(x)$ ба муодилаи одии алгебравии:

$$a_n y = f(x)$$

мубаддал мегардад.

Қайд менамоем, ки муодилаи (2.1.1) ҳангоми $\omega(x) = x$ будан, муодилаи маълуми Эйлер мебошад, ки бо ёрии методи овардани он ба муодилаи дифференсиалӣ бо коэффисиентҳои доимӣ, дар шакли охирнок интегронидашаванда мегардад. Дар баробари ин метод муодилаи Эйлерро мустақиман, бе овардани он ба муодилаи диференсиалӣ бо коэффисиентҳои доимӣ, ҳал намудан мумкин аст.

Дар поён муодилаи (2.1.1)-ро барои функсияи ихтиёрии $\omega(x)$ дида мебароем. Чунин муодилаaро дар оянда муодилаи намуди Эйлер меномем ва кушиш менамоем, онро низ бо роҳи ба муодилаи дифференсиалӣ бо коэффисиентҳои доимӣ овардан ҳал намоем. Бо ин мақсад дар аввал муодилаҳои дифференсиалии тартибашон пасти намуди (2.1.1)-ро дида мебароем.

2.2. Таҳқиқи муодилаи умумикардашудаи тартиби якуми намуди Эйлер

Дар Г муодилаи умумикардашудаи Эйлери тартиби якумро дида мебароем:

$$\omega(x)y' + a_1 y = f(x), \tag{2.2.1}$$

ки дар ин ҷо a_1 − адади доимӣ ва $f(x)$ − функсияи додашуда дар Г мебошад.

Барои овардани муодилаи (2.2.1) ба муодилаи дифференсиалӣ бо коэффисиентҳои доимӣ дар (2.2.1) ивази зерини тағйирёбандаро мегузаронем:

$$t = \mu(x) \tag{2.2.2}$$

Он гоҳ

$$y(x) = y[\mu^{-1}(t)] = z(t) = z\big(\mu(x)\big),$$

ки дар ин ҷо $\mu^{-1}(t)$ функсияи баръакс ба функсияи $\mu(x)$ мебошад. Ҳангоми гузориши (2.2.2) интервали Г ба $\Gamma^* = \{t\colon\ \mu(0) < t < \mu(\infty)\}$ иваз мешавад. Барои ҳосилаи y' дорем:

$$y'(x) = z'(t)\mu'(x).$$

Ин қиматҳоро ба (2.2.1) гузошта ҳосил мекунем:

$$\omega(x) \cdot z'(t)\mu'(x) + a_1 z(t) = F(t), \tag{2.2.3}$$

ки дар ин ҷо $F(t) = F\big(\mu(x)\big) = f(\mu^{-1}(t)) = f(x)$.

Ду тарафи муодилаи (2.2.3)-ро ба $\omega(x) \cdot \mu'(x)$ тақсим намуда, ба муодилаи зерин меоем:

$$z'(t) + \frac{a_1}{\omega(x)\mu'(x)} \cdot z(t) = F(t). \tag{2.2.4}$$

Барои он ки ин муодила, муодилаи дифференсиалӣ бо коэффисиентҳои доимӣ бошад, зарур аст функсияи $\mu(x)$-ро чунин интихоб намоем, ки коэффисиенти назди $z(t)$ доимӣ бошад, яъне

$$\frac{a_1}{\omega(x)\mu'(x)} = \text{c}. \tag{2.2.5}$$

Агар с $= a_1$ ҳисоб намоем, пас аз (2.2.5) ҳосил мекунем

$$\omega(x)\mu'(x) = 1 \Rightarrow \mu'(x) = \frac{1}{\omega(x)}.$$

Аз ин ҷо гузориши зеринро ҳосил менамоем:

$$t = \mu(x) = \int \frac{dx}{\omega(x)}, \tag{2.2.6}$$

ки дар натиҷаи он муодилаи (2.2.4) намуди зеринро мегирад:

$$z'(t) + a_1 z(t) = F(t). \tag{2.2.7}$$

Ҳамин тавр, тасдиқоти зерин ҷой дорад.

Теоремаи 2.2.1. *Агар муодилаи (2.2.1) бо роҳи ивази тағйирёбанда ба муодилаи дифференсиалӣ бо коэффисиенти доимӣ оварда шавад, пас зарур аст, ки интеграли*

$$\int \frac{dx}{\omega(x)}$$

мавҷуд бошад ва формулаи ивази тағйирёбанда намуди (2.2.6)-ро дошта бошад.

Акнун, дар асоси назарияи умумии муодилаҳои дифференсиалии хаттии тартиби якум бо коэффисиентҳои доимӣ, ҳалли умумии муодилаи ғайриякҷинсаи (2.2.7)-ро дар намуди зерин тасвир мекунем:

$$z(t) = ce^{-a_1 t} + \int_{t_0}^{t} e^{-a_1(t-\tau)} F(\tau) d\tau, \qquad (2.2.8)$$

ки дар ин ҷо c – адади доимии ихтиёрӣ, $t_0 \in \Gamma^*$ – адади қайдкардашуда, $t > t_0$ дар ҳудуди Γ^* тағйир меёбад.

Баъдан ба тағйирёбандаи аввалаи x баргашта, бо назардошти гузориши (2.2.2) ҳалли муодилаи (2.2.1)-ро дар намуди зерин ҳосил мекунем:

$$z\big(\mu(x)\big) = ce^{-a_1 \mu(x)} + \int_{\mu(x_0)}^{\mu(x)} e^{-a_1(\mu(x)-\mu(\tau))} F\big(\mu(\tau)\big) d(\mu(\tau)),$$

ё ин ки

$$y(x) = ce^{-a_1\mu(x)} + \int\limits_{\mu(x_0)}^{\mu(x)} e^{-a_1(\mu(x)-\mu(\tau))} f\big(\mu^{-1}(\tau)\big) d\big(\mu(\tau)\big). \qquad (2.2.9)$$

Нишон медиҳем, ки ҳалли ҳосилшудаи (2.2.9) дар ҳақиқат муодилаи (2.2.1)-ро қаноат менамояд. Бо ин мақсад аз (2.2.9) y'-ро меёбем:

$$y' = -ce^{-a_1\mu(x)} \cdot \frac{a_1}{\omega(x)} - \frac{a_1}{\omega(x)} \int\limits_{\mu(x_0)}^{\mu(x)} e^{-a_1(\mu(x)-\mu(\tau))} f\big(\mu^{-1}(\tau)\big) d\big(\mu(\tau)\big) +$$

$$+\frac{1}{\omega(x)} f(x).$$

Ин қиматҳоро ба (2.2.1) гузошта, ҳосил мекунем:

$$-ca_1e^{-a_1\mu(x)} - a_1 \int\limits_{\mu(x_0)}^{\mu(x)} e^{-a_1(\mu(x)-\mu(\tau))} f\big(\mu^{-1}(\tau)\big) d\big(\mu(\tau)\big) + f(x) +$$

$$+ca_1e^{-a_1\mu(x)} + a_1 \int\limits_{\mu(x_0)}^{\mu(x)} e^{-a_1(\mu(x)-\mu(\tau))} f\big(\mu^{-1}(x)\big) d\big(\mu(\tau)\big) = f(x).$$

Аз ин ҷо:

$$f(x) \equiv f(x).$$

Ҳамин тавр, теоремаи зерин исбот карда шуд.

Теоремаи 2.2.2. *Бигузор дар муодилаи* (2.2.1) $a_1 -$ *адади доимӣ ва* $f(x) \in C(\Gamma)$ *бошад. Инчунин, фарз мекунем, ки ҳангоми* $x \in \Gamma$, $\omega(x) \neq 0$ *бошад. Он гоҳ муодилаи* (2.2.1) *барои ихтиёрӣ функсияи* $\omega(x)$, *ки барояш* *интеграли* (2.2.6) *мавҷуд аст, ҳалшаванда мебошад ва ҳалли умумии он ба воситаи формулаи* (2.2.9) *дода мешавад.*

2.3. Таҳқиқи муодилаи умумикардашудаи тартиби якуми намуди Эйлер бо коэффисиенти тағйирёбанда

Дар Г муодилаи тартиби якуми намуди Эйлер бо коэффисиенти тағйирёбандаи зеринро дида мебароем:

$$\omega(x)y' + a_1(x)y = f(x), \tag{2.3.1}$$

ки дар ин ҷо $a_1(x), f(x) \in C(\Gamma)$.

Агар $\omega(x)$ барои ихтиёрӣ $x \in \Gamma$ ба сифр баробар набошад, пас ҳарду тарафи муодилаи (2.3.1)-ро ба $\omega(x)$ тақсим намуда, ба ҳалли муодилаи зерин меоем:

$$y' + \frac{a_1(x)}{\omega(x)}y = \frac{f(x)}{\omega(x)}\,. \tag{2.3.2}$$

Муодилаи (2.3.2) муодилаи дифференсиалии хаттии тартиби якум бо коэффисиенти бефосила ва бо тарафи рости бефосила мебошад. Ҳалли умумии он мувофиқи назарияи умумӣ, ба воситаи формулаи зерин дода мешавад:

$$y = ce^{-\int_{x_0}^{x}\frac{a_1(t)}{\omega(t)}dt} + \int\limits_{x_0}^{x} e^{-\left(\int_{x_0}^{x}\frac{a_1(t)}{\omega(t)}dt - \int_{t_0}^{t}\frac{a_1(\tau)}{\omega(\tau)}d\tau\right)}\frac{f(t)}{\omega(t)}dt.$$

Акнун фарз менамоем, ки функсияи $\omega(x)$ дар нуқтаи $x = 0$ дорои сифри дараҷааш α мебошад, яъне умумиятро маҳдуд накарда, фарз менамоем, ки функсияи $\omega(x)$ намуди $\omega(x) = x^{\alpha}$-ро дорад, ки дар ин ҷо $\alpha > 1$ аст. Дар ин ҳолат муодилаи

$$y' + \frac{a_1(x)}{x^{\alpha}} y = \frac{f(x)}{x^{\alpha}} \tag{2.3.3}$$

дар кори Н.Радҷабов [14] таҳқиқ гардида буд. Дар мувофиқа бо ин кор, ҳалли умумии муодилаи (2.3.3) чунин намуд дорад:

$$y(x) = ce^{-W_a(x)+w_\alpha(x)} + \int_0^x e^{-(W_a(x)-W_a(t))+w_\alpha(x)-w_\alpha(t)} \frac{f(t)}{t^{\alpha}} dt,$$

ки дар ин ҷо

$$W_a(x) = \int_0^x \frac{a_1(t) - a_1(0)}{t^{\alpha}} dt, \ \ w_\alpha(t) = \frac{a_1(0)}{(\alpha - 1)x^{\alpha-1}}.$$

2.4. Таҳқиқи муодилаи умумикардашудаи тартиби дуюми намуди Эйлер

Дар Г муодилаи тартиби дуюми намуди Эйлери зеринро дида мебароем:

$$[\omega(x)]^2 y'' + a_1 \omega(x) y' + a_2 y = f(x), \tag{2.4.1}$$

ки дар ин ҷо $a_1, a_2 -$ ададҳои доимии додашуда, $f(x) -$ функсияи додашудаи бефосила дар Г мебошад.

Ба мисли параграфи 2 амал намуда, барои овардани муодилаи (2.4.1) ба муодилаи дифференсиалӣ бо коэффисиентҳои доимӣ гузориши (2.2.2)-ро истифода мебарем. Ҳангоми ин гузориш барои ҳосилаҳои y' ва y'' ҳосил мекунем:

$$y'(x) = z'(t) \cdot \mu'(x),$$
$$y''(x) = z'(t) \cdot \mu''(x) + z''(t) \cdot [\mu'(x)]^2.$$

Ин қиматҳои ҳосилаҳо ва қимати функсияи $y(x)$-ро ба (2.4.1) гузошта, ҳосил мекунем:

$$[\omega(x)]^2 z'(t)\mu''(x) + [\omega(x)]^2 z''(t)[\mu'(x)]^2 + a_1\omega(x)z'(t)\mu'(x) + a_2 z(t) =$$
$$= F(t).$$

Ҳарду тарафи ин баробариро ба $[\omega(x)]^2[\mu'(x)]^2$ тақсим мекунем:

$$z''(t) + \left[\frac{a_1}{\omega(x)\cdot\mu'(x)} + \frac{\mu''(x)}{[\mu'(x)]^2}\right] z'(t) + \frac{a_2}{[\omega(x)\cdot\mu'(x)]^2} z(t) =$$
$$= \frac{F(t)}{[\omega(x)\cdot\mu'(x)]^2}. \qquad (2.4.2)$$

Барои он ки ин муодила, муодилаи дифференсиалӣ бо коэффисиентҳои доимӣ бошад, зарур аст функсия $\mu(x)$-ро чунон интихоб намоем, ки коэффисиенти назди $z(t)$ адади доимӣ гардад. Аз ин рӯ, дар (2.4.2) коэффисиенти назди $z(t)$-ро доимӣ қабул менамоем, яъне:

$$\frac{a_2}{[\omega(x)\cdot\mu'(x)]^2} = c.$$

Аз ин ҷо, агар $a_2 = c$ шуморем, пас $\mu'(x) = \frac{1}{\omega(x)}$ ё

$$\mu(x) = \int \frac{dx}{\omega(x)}.$$

Теоремаи 2.4.1. (шарти зарурӣ). *Барои он ки муодилаи (2.4.1) бо ёрии ивази тағйирёбанда ба муодилаи дифференсиалӣ бо коэффисиентҳои доимӣ оварда шавад, пас зарур аст интеграли* $\int \frac{dx}{\omega(x)}$ *мавҷуд бошад ва формулаи ивази тағйирёбанда намуди зеринро дошта бошад:*

$$t = \mu(x) = \int \frac{dx}{\omega(x)}. \tag{2.4.3}$$

Ин теорема танҳо шарти зарурии овардашаванда будани муодилаи (2.4.1) ба муодилаи дифференсиалӣ бо коэффисиентҳои доимиро нишон медиҳад. Барои ёфтани шарти кифоягӣ, талаб менамоем, ки ҳамаи коэффисиентҳои муодилаи (2.4.2) ҳангоми

$$\mu'(x) = \frac{1}{\omega(x)} \tag{2.4.4}$$

будан, доимӣ бошанд. Барои ин як маротиба дифференсиронидашаванда будани функсияи $\omega(x)$-ро фарз намуда, бо назардошти (2.4.4) ҳосил мекунем:

$$\frac{\mu''(x)}{[\mu'(x)]^2} = -\left[\frac{1}{\mu'(x)}\right]' = -\omega'(x).$$

Он гоҳ муодилаи (2.4.2) чунин намуд мегирад:

$$z''(t) + [a_1 - \omega'(x)]z'(t) + a_2 z = F(t). \tag{2.4.5}$$

Аз ин ҷо, барои он ки коэффисиентҳои муодилаи (2.4.5) доимӣ бошанд, кифоя аст, ки

$$a_1 - \omega'(x) = c_1$$

шавад ($c_1 -$ адади доимӣ).

Агар $a_1 - c_1 = c_2$ ишора намоем, пас:

$$\omega'(x) = c_2$$

ва аз ин ҷо:

$$\omega(x) = c_2 x + c_3, \qquad (2.4.6)$$

ки дар ин ҷо c_2, $c_3 -$ ададҳои доимӣ мебошанд. Аз ин ҷо, намуди умумии функсияи $\omega(x)$ муайян карда шуд, ки барои чунин $\omega(x)$-ҳо муодилаи (2.4.1) ба муодилаи Эйлер мубаддал мегардад.

Ҳамин тавр, теоремаи зерин исбот карда шуд.

Теоремаи 2.4.2. (шарти зарурӣ ва кифоягӣ). *Барои он ки муодилаи (2.4.1) ба муодилаи дифференсиалӣ бо коэффисиентҳои доимӣ оварда шавад, зарур ва кифоя аст, ки функсияи $\omega(x)$ намуди* (2.4.6)*-ро дошта бошад ва формулаи ивази тағйирёбанда дар муодилаи* (2.4.1) *бо ёрии формулаи* (2.4.3) *амалӣ карда шавад.*

Ин теорема тасдиқ менамояд, ки муодилаи (2.4.1)-ро танҳо ва танҳо дар он ҳолат ба муодилаи дифференсиалӣ бо коэффисиентҳои доимӣ овардан мумкин аст, агар ин муодила муодилаи Эйлер бошад.

Агар дар муодилаи (2.4.1) функсияи $\omega(x)$ намуди (2.4.6)-ро надошта бошад, пас ин муодиларо ба муодилаи дифференсиалӣ бо коэффисиентҳои доимӣ овардан мумкин нест ва бинобар ин савол дар бораи ҳалшавандагии он низ то ҳол кушода боқӣ мемонад.

Акнун муодилаи зеринро дида мебароем:

$$[\omega(x)]^2 y'' + A_1(x)[\omega(x)]y' + A_2(x)y = f(x), \qquad (2.4.7)$$

ки он аз муодилаи (2.4.1) бо он фарқ менамояд, ки коэффисиентҳояш тағйирёбанда буда, ин коэффисиентҳо чунин муайян карда мешаванд:

$$\begin{cases} A_1(x) = a_1 + \omega'(x), \\ A_2(x) = a_2. \end{cases} \qquad (2.4.8)$$

Нишон медиҳем, ки «бо коэффисиентҳои намуди (2.4.8) муодилаи (2.4.7) бо ёрии гузориши (2.2.6) ба муодилаи дифференсиалӣ бо коэффисиентҳои доимӣ оварда мешавад»[4-М].

Дар ҳақиқат муодилаи (2.4.7)-ро дар намуди

$$[\omega(x)]^2 y'' + [a_1 + \omega'(x)] \cdot \omega(x)y' + a_2 y = f(x)$$

навишта, дар он тағйирёбандаҳоро бо ёрии формулаи (2.2.6) иваз менамоем:

$$y'(x) = z'(t) \cdot \mu'(x) = z'(t) \cdot \frac{1}{\omega(x)},$$

$$y''(x) = z'(t) \cdot \mu''(x) + z''(t) \cdot [\mu'(x)]^2 = -z'(t) \cdot \frac{\omega'(x)}{\omega^2(x)} + z''(t) \cdot \frac{1}{\omega^2(x)}.$$

Он гоҳ

$$z''(t) - \omega'(x)z'(t) + a_1 z'(t) + \omega'(x)z'(t) + a_2 z(t) = F(t)$$

ё

$$z''(t) + a_1 z'(t) + a_2 z(t) = F(t), \qquad (2.4.9)$$

ки дар ин ҷо $a_1,\ a_2 -$ коэффисиентҳои доимӣ мебошанд.

Муодилаи (2.4.7)-ро, ки коэффисиентҳояш $A_i(x)$ $(i = 1,2)$ аз рӯйи формулаи (2.4.8) муайян карда мешаванд, муодилаи моделии ба муодилаи (2.4.1) мувофиқоянда меномем.

Ҳамин тавр, теоремаи зерин ҷой дорад.

Теоремаи 2.4.3. *Муодилаи моделии* (2.4.7) *бо ёрии ивази тағйирёбанда аз рӯйи формулаи* (2.2.6) *ба муодилаи дифференсиалӣ бо коэффисиентҳои доимии зерин оварда мешавад:*

$$L(z) \equiv z'' + a_1 z' + a_2 z = F(t). \tag{2.4.10}$$

Аз ин теорема мебарояд, ки барои ёфтани ҳалли муодилаи моделии (2.4.7) кифоя аст, муодилаи дифференсиалӣ бо коэффисиентҳои доимии (2.4.10)-ро ҳал намоем ва дар ҳалли ёфташудаи $z(t),\ t = \mu(x)$ гузорем.

Маълум аст, «ки агар ҳалли муодилаи якҷинсаи:

$$z'' + a_1 z' + a_2 z = 0 \tag{2.4.11}$$

-ро дар намуди $z = e^{\lambda t}$ ҷустуҷу намоем, пас нисбат ба λ муодилаи характеристикии зеринро ҳосил менамоем»[60]:

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0. \tag{2.4.12}$$

Аз ин ҷо, «вобаста аз решаҳои муодилаи характеристикии (2.4.12), ҳалли муодилаи моделии якҷинсаи

$$[\omega(x)]^2 y'' + [a_1 + \omega'(x)] \cdot \omega(x) y' + a_2 y = 0 \tag{2.4.13}$$

-ро»[87] дар намуди $y = e^{\lambda \mu(x)}$ ҳосил менамоем.

Ҳолатҳои гуногуни решаҳои муодилаи ҳарактеристикии (2.4.12)-ро дида мебароем.

I. «Бигузор дар муодилаи (2.4.12) $D = a_1^2 - 4a_2 > 0$ ва λ_1, λ_2 $(\lambda_1 < \lambda_2) -$ решаҳои ҳақиқӣ ва гуногуни муодилаи (2.4.12) бошанд»[87]. Он гоҳ муодилаи якҷинсаи (2.4.13) дорои ду ҳалҳои хаттӣ новобастаи

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 \mu(x)}; \quad y_2(x) = e^{\lambda_2 \mu(x)}$$

буда, ҳалли умумии он намуди зеринро дорад:

$$\bar{y} = c_1^1 e^{\lambda_1 \mu(x)} + c_2^1 e^{\lambda_2 \mu(x)},$$

ки дар ин ҷо $c_1^1,\ c_2^1 -$ ададҳои доимии ихтиёрӣ мебошанд.

II. Бигузор дар муодилаи (2.4.12) $D = 0$ ва $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -\frac{a_1}{2}$ бошад. Он гоҳ муодилаи якҷинсаи (2.4.13) дорои ду ҳалҳои хаттӣ новобастаи

$$y_1(x) = e^{\lambda \mu(x)}; \quad y_2(x) = \mu(x) e^{\lambda \mu(x)}$$

мебошад. Дар ин ҳолат ҳалли умумии муодилаи якҷинсаи (2.4.13) чунин намуд мегирад:

$$\bar{y} = c_1^2 e^{\lambda \mu(x)} + c_2^2 \mu(x) e^{\lambda \mu(x)},$$

ки дар ин ҷо $c_1^2, c_2^2 -$ ададҳои доимии ихтиёрӣ мебошанд.

III. «Бигузор дар муодилаи (2.4.12) $D < 0$ ва $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ бошад, ки дар ин ҷо $\alpha = -\frac{a_1}{2}, \beta = \frac{\sqrt{4a_2 - a_1^2}}{2}$. Он гоҳ ҳалҳои хусусии муодилаи якҷинсаи (2.4.13) намуди:

$$y_1(x) = e^{\alpha\mu(x)}\cos[\beta\mu(x)]; \quad y_2(x) = e^{\alpha\mu(x)}\sin[\beta\mu(x)]$$

ва ҳалли умумии он намуди:

$$\bar{y} = c_1^3 e^{\alpha\mu(x)}\cos[\beta\mu(x)] + c_2^3 e^{\alpha\mu(x)}\sin[\beta\mu(x)],$$

-ро мегирад, ки дар ин ҷо $c_1^3, c_2^3 -$ ададҳои доимии ихтиёрӣ мебошанд»[87].

2.5. Ёфтани ҳалли умумии муодилаи моделии ғайриякҷинса

Муодилаи моделии ғайриякҷинсаи зеринро дида мебароем:

$$[\omega(x)]^2 y'' + [a_1 + \omega'(x)] \cdot \omega(x) y' + a_2 y = f(x), \qquad (2.5.1)$$

ки дар ин ҷо $f(x) -$ функсияи дар интервали $(a; b)$ бефосила мебошад. Аз назарияи умумии муодилаҳои дифференсиалии одӣ маълум аст, ки ҳалли умумии муодилаи ғайриякҷинсаи (2.5.1) $y(x)$ аз рӯйи формулаи

$$y(x) = \bar{y}(x) + \tilde{y}(x), \qquad (2.5.2)$$

муайян карда мешавад, ки дар ин ҷо $\bar{y}(x) -$ ҳалли умумии муодилаи якҷинсаи (2.4.13) ва $\tilde{y}(x) -$ ягон ҳалли хусусии муодилаи ғайриякҷинсаи (2.5.1) мебошад. Дар боло $\bar{y}(x)$ дар се ҳолат вобаста аз аломати дискриминанти D-и муодилаи характеристикии (2.4.12) муайян шуда буд. Дар ҳар кадом аз ин ҳолатҳо ҳалли муодилаи ғайриякҷинсаи (2.5.1)-ро меёбем.

Барои ёфтани $\tilde{y}(x)$ леммаи зерини ёрирасонро истифода мебарем, ки аз методи вариатсияи доимиҳои ихтиёрӣ мебарояд.

Леммаи 2.5.1. *Бигузор* $y_1(x), y_2(x) -$ *системаи фундаменталии ҳалҳои муодилаи якҷинсаи* (2.4.13) *бошанд. Агар* $c_1(x), c_2(x)$ *ҳалҳои системаи муодилаҳои*

$$\begin{cases} y_1(x)c_1'(x) + y_2(x)c_2'(x) = 0, \\ y_1'(x)c_1'(x) + y_2'(x)c_2'(x) = \dfrac{f(x)}{[\omega(x)]^2}, \end{cases} \tag{2.5.3}$$

-ро ташкил диҳанд, пас функсияи

$$y = y_1(x)c_1(x) + y_2(x)c_2(x), \tag{2.5.4}$$

ҳалли умумии муодилаи ғайриякҷинсаи (2.5.1) *мебошад.*

Мувофиқи ин лемма барои ёфтани ҳалли $\tilde{y}$ системаи муодилаҳои (2.5.3)-ро ҳал намуда, $c_1(x), c_2(x)$-ро меёбем ва қиматҳои ёфташударо ба баробарии (2.5.4) мегузорем.

Муайянкунандаи системаи (2.5.3) *муайянкунандаи Вронский* мебошад ва бинобар ин он ғайрисифрӣ мебошад, яъне:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Аз ин рӯ, системаи (2.5.3) дорои ҳалли ягонаи зерин мебошад:

$$c_1'(x) = -\frac{y_2(x)}{W(x)} \cdot \frac{f(x)}{[\omega(x)]^2}, \quad c_2'(x) = \frac{y_1(x)}{W(x)} \cdot \frac{f(x)}{[\omega(x)]^2}.$$

1. **Ҳолати решаҳои муодилаи характеристикӣ ҳақиқӣ ва гуногун будан.**

Дар ҳолати $D > 0$ будан, барои муайянкунандаи $W(x)$ ҳосил мекунем:

$$W(x) = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\omega(x)} e^{(\lambda_1 + \lambda_2)\mu(x)}$$

ва аз ин ҷо $c_1'(x)$, $c_2'(x)$-ро чунин муайян мекунем:

$$\begin{cases} c_1'(x) = -\dfrac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 \mu(x)} \dfrac{f(x)}{\omega(x)}, \\ c_2'(x) = \dfrac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_2 \mu(x)} \dfrac{f(x)}{\omega(x)}. \end{cases}$$

Аз ин ҷо меёбем:

$$\begin{cases} c_1(x) = -\dfrac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \displaystyle\int_a^x e^{-\lambda_1 \mu(t)} \dfrac{f(t)}{\omega(t)} dt + c_1^1, \\ c_2(x) = \dfrac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \displaystyle\int_a^x e^{-\lambda_2 \mu(t)} \dfrac{f(t)}{\omega(t)} dt + c_2^1 . \end{cases}$$

Ин қиматҳои $c_1(x)$, $c_2(x)$-ро ба (2.5.4) гузошта, пас аз соданамоӣ ҳалли умумии муодилаи ғайриякҷинсаи (2.5.1)-ро дар намуди зерин меёбем:

$$y = c_1^1 e^{\lambda_1 \mu(x)} + c_2^1 e^{\lambda_2 \mu(x)} -$$

$$-\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \int_a^x \left[e^{\lambda_1 (\mu(x) - \mu(t))} - e^{\lambda_2 (\mu(x) - \mu(t))} \right] \frac{f(t)}{\omega(t)} dt. \qquad (2.5.5)$$

Интеграли тарафи рости ин баробариро дар маънои Стилтиеса чунин навиштан мумкин аст:

$$y(x) = c_1^1 e^{\lambda_1 \mu(x)} + c_2^1 e^{\lambda_2 \mu(x)} -$$

$$-\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\int_a^x\left[e^{\lambda_1(\mu(x)-\mu(t))}-e^{\lambda_2(\mu(x)-\mu(t))}\right]f(t)d(\mu(t)). \qquad (2.5.6)$$

Ҳамин тавр, теоремаи зерин исбот карда шуд:

Теоремаи 2.5.1. «*Бигузор, дар муодилаи* (2.5.1) *коэффисиентҳои* a_1 *ва* a_2 *чунин бошанд, ки решаҳои муодилаи характеристикии* (2.4.12) λ_1, λ_2 – *решаҳои ҳақиқӣ ва гуногун буда,* $\lambda_1 < \lambda_2$ *бошад. Ғайр аз ин, функсияи* $f(x) \in C[a,b]$ *ва* $\omega(x)$ *дар порчаи* $[a,b]$ *дорои сифр набошад. Он гоҳ муодилаи моделии* (2.5.1) *дар синфи* $C^2[a,b]$ *ҳалшаванда мебошад ва ҳалли умумии он бо ёрии формулаи* (2.5.5) *ё* (2.5.6) *ёфта мешавад»*[87].

Бигузор дар теоремаи 2.5.1 функсияи $\omega(x)$ дар ягон нуқтаи порчаи $[a,b]$ ба сифр мубаддал гардад. Дар ин маврид барои наздикшавандагии интеграл дар тарафи рости (2.5.5) аз функсияи $f(x)$ шартҳои муайян талаб намудан лозим аст. Муфассал ба дида баромадани ин ҳолат мегузарем.

Умумиятро маҳдуд накарда фарз менамоем, ки функсияи $\omega(x)$ дар нуқтаи a-и порчаи $[a,b]$ дорои сифри дараҷааш α мебошад, яъне он чунин намуд дорад:

$$\omega(x)=(x-a)^{\alpha}.$$

Дар ин ҳолат муодилаи моделии (2.5.1) чунин намуд мегирад:

$$(x-a)^{2\alpha}y''+[a_1+\alpha(x-a)^{\alpha-1}](x-a)^{\alpha}y'+a_2y=f(x). \qquad (2.5.7)$$

Ҳалли умумии ин муодила бо ёрии формулаи зерин дода мешавад:

$$y(x)=c_1^1e^{\lambda_1\mu(x)}+c_2^1e^{\lambda_2\mu(x)}-$$

$$-\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\int_a^x\left[e^{\lambda_1(\mu(x)-\mu(t))}-e^{\lambda_2(\mu(x)-\mu(t))}\right]f(t)d\big(\mu(t)\big)\equiv$$

$$\equiv E_1[c_1^1, c_2^1, f(x)], \quad (2.5.8)$$

ки дар ин ҷо:

$$\mu(x) = -\frac{1}{(\alpha-1)(x-a)^{\alpha-1}}.$$

Дар ҳолати $\lambda_2 > 0$ будан, фарз менамоем, ки функсияи $f(x)$ дар нуқтаи $x = a$ аз рӯйи формулаи ассимптотикии зерини характери экспоненсиалӣ дошта, ба сифр майл менамояд:

$$f(x) = \mathrm{o}\left[e^{\delta_1 \mu(x)}\right], \delta_1 > \lambda_2, \text{ҳангоми } x \to a. \quad (2.5.9)$$

Ҳангоми иҷрошавии шарти (2.5.9) интеграли тарафи рости (2.5.8) наздикшаванда мебошад ва ҳалли умумии муодилаи (2.5.7) бо ёрии формулаи (2.5.8) дода мешавад.

Ҳамин тавр, теоремаи зерин ҷой дорад.

Теоремаи 2.5.2. «*Бигузор, дар муодилаи* (2.5.1) *коэффисиентҳои* a_1 *ва* a_2 *чунин бошанд, ки решаҳои муодилаи характеристикии*(2.4.12) *ҳақиқӣ ва гуногун буда,* $\lambda_1 < \lambda_2$ *бошад. Функсияи* $\omega(x)$ *дар нуқтаи* a*-и порчаи* $[a, b]$ *дорои сифри дараҷааш* $\alpha > 1$ *бошад, яъне* $\omega(x) = (x-a)^{\alpha}$. *Инчунин, функсияи* $f(x) \in C(a, b]$ *ва дар ҳолати* $\lambda_2 > 0$ *будан, дар нуқтаи* $x = a$ *аз рӯйи формулаи ассимптотикии* (2.5.9) *ба сифр майл намояд. Он гоҳ муодилаи моделии* (2.5.7) *дар синфи* $C^2[a, b]$ *ҳалшаванда мебошад ва ҳалли умумии он бо ёрии формулаи* (2.5.8) *дода мешавад»*[87].

2. Ҳолати решаҳои муодилаи характеристикӣ ҳақиқӣ ва якхела будан.

Дар ҳолати решаҳои муодилаи характеристикии (2.4.12) ҳақиқӣ ва якхела будан, дар асоси леммаи 2.5.1, системаи муодилаҳои зеринро ҳосил мекунем:

$$\begin{cases} e^{\lambda\mu(x)}c_1'(x) + \mu(x)e^{\lambda\mu(x)}c_2'(x) = 0, \\ \lambda e^{\lambda\mu(x)}c_1'(x) + (\lambda\mu(x)+1)e^{\lambda\mu(x)}c_2'(x) = \dfrac{f(x)}{\omega(x)}, \end{cases} \tag{2.5.10}$$

ки дар ин ҷо $c_1'(x)$, $c_2'(x)$ номаълум мебошанд.

Муайянкунандаи системаи (2.5.10) *муайянкунандаи Вронский* мебошад ва азбаски он ғайрисифрӣ аст, пас системаи (2.5.10) дорои ҳалли ягона мебошад. Аз ин ҷо мувофиқи қоидаи Крамер меёбем:

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{\lambda\mu(x)} & \mu(x)e^{\lambda\mu(x)} \\ \lambda e^{\lambda\mu(x)} & (\lambda\mu(x)+1)e^{\lambda\mu(x)} \end{vmatrix} = e^{2\lambda\mu(x)},$$

$$\Delta_{c_1'(x)} = \begin{vmatrix} 0 & \mu(x)e^{\lambda\mu(x)} \\ \dfrac{f(x)}{\omega(x)} & (\lambda\mu(x)+1)e^{\lambda\mu(x)} \end{vmatrix} = -\mu(x)e^{\lambda\mu(x)}\frac{f(x)}{\omega(x)},$$

$$\Delta_{c_2'(x)} = \begin{vmatrix} e^{\lambda\mu(x)} & 0 \\ \lambda e^{\lambda\mu(x)} & \dfrac{f(x)}{\omega(x)} \end{vmatrix} = e^{\lambda\mu(x)}\frac{f(x)}{\omega(x)}.$$

Аз ин ҷо:

$$c_1'(x) = -\frac{\mu(x)}{e^{\lambda\mu(x)}} \cdot \frac{f(x)}{\omega(x)},$$

$$c_2'(x) = \frac{1}{e^{\lambda\mu(x)}} \cdot \frac{f(x)}{\omega(x)},$$

ё ин ки

$$c_1(x) = -\int_a^x \frac{\mu(t)}{e^{\lambda\mu(t)}} \cdot \frac{f(t)}{\omega(t)} dt + c_1^2,$$

$$c_2(x) = \int_a^x \frac{1}{e^{\lambda\mu(t)}} \cdot \frac{f(t)}{\omega(t)} dt + c_2^2.$$

Ин қиматҳои $c_1(x), c_2(x)$-ро ба (2.5.4) гузошта, бо назардошти он ки:

$$y_1(x) = e^{\lambda\mu(x)}, \quad y_2(x) = \mu(x)e^{\lambda\mu(x)}$$

ҳосил мекунем:

$$y(x) = c_1^2 e^{\lambda\mu(x)} + c_2^2 \mu(x) e^{\lambda\mu(x)} - \int_a^x e^{\lambda(\mu(x)-\mu(t))} \mu(t) \frac{f(t)}{\omega(t)} dt +$$
$$+ \int_a^x e^{\lambda(\mu(x)-\mu(t))} \mu(x) \frac{f(t)}{\omega(t)} dt.$$

Ин баробариро сода менамоем:

$$y(x) = \left(c_1^2 + c_2^2 \mu(x)\right) e^{\lambda\mu(x)} + \int_a^x e^{\lambda(\mu(x)-\mu(t))} \left(\mu(x) - \mu(t)\right) \frac{f(t)}{\omega(t)} dt \equiv$$
$$\equiv E_2[c_1^2, c_2^2, f(x)] \quad (2.5.11)$$

ё ин ки

$$y(x) = \left(c_1^2 + c_2^2 \mu(x)\right) e^{\lambda\mu(x)} + \int_a^x e^{\lambda(\mu(x)-\mu(t))} \left(\mu(x) - \mu(t)\right) f(t) d\left(\mu(t)\right) \equiv$$
$$\equiv E_2[c_1^2, c_2^2, f(x)]. \, (2.5.12)$$

Ҳамин тавр, теоремаи зерин ҷой дорад.

Теоремаи 2.5.3. «*Бигузор, решаҳои муодилаи характеристикии* (2.4.12) *ҳақиқӣ ва якхела бошанд, яъне* $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. *Инчунин, функсияи* $f(x) \epsilon C[a,b]$ *буда,* $\omega(x)$ *дар порчаи* $[a,b]$ *дорои сифр набошад. Он гоҳ муодилаи* (2.5.1) *дар синфи* $C^2[a,b]$ *ҳалшаванда аст ва ҳалли умумии он ба воситаи формулаи* (2.5.11) *ё* (2.5.12) *дода мешавад»*[87].

Агар $\omega(x)$ дар $[a,b]$ дорои сифри дараҷааш α бошад, яъне $\omega(x) = (x-a)^{\alpha}$, пас ҳалли муодилаи (2.5.7) низ ба воситаи формулаи (2.5.11) ё (2.5.12) дода мешавад, ки дар ин маврид $\mu(x) = -\frac{1}{(\alpha-1)(x-a)^{\alpha-1}}$ мебошад.

Дар ин маврид, агар $\lambda > 0$ бошад, пас барои наздикшавандагии интеграл дар тарафи рости (2.5.12) талаб менамоем, ки функсияи $f(x)$ дар нуқтаи $x = a$ аз рӯйи формулаи ассимптотикии зерин ба сифр майл намояд:

$$f(x) = o\left[\frac{e^{\delta_2 \mu(x)}}{\mu(x)}\right], \delta_2 > \lambda, \text{ ҳангоми } x \to a. \qquad (2.5.13)$$

Ҳамин тавр, исбот карда шуд.

Теоремаи 2.5.4. «*Бигузор, решаҳои муодилаи характеристикии* (2.4.12) *ҳақиқӣ ва якхела бошанд. Функсия* $\omega(x)$ *намуди* $\omega(x) = (x-a)^{\alpha}, \alpha > 1$*-ро дошта бошад. Инчунин, функсияи* $f(x) \in C[a,b]$ *ва ҳангоми* $\lambda > 0$ *будан, дар нуқтаи* $x = a$ *аз рӯйи формулаи ассимптотикии (2.5.13) ба сифр майл намояд. Он гоҳ муодилаи моделии (2.5.7) дар синфи* $C^2[a,b]$ *ҳалшаванда мебошад ва ҳалли умумии он бо ёрии формулаи (2.5.12) дода мешавад»*[87].

Қайди 2.5.1. *Агар дар теоремаи* 2.5.4. *шарти* $\lambda > 0$ *ба* $\lambda < 0$ *иваз карда шавад, он гоҳ барои наздикшавандагии интеграли тарафи рости* (2.5.12) *аз функсияи* $f(x)$ *дар нуқтаи* $x = a$ *сифри тартиби зеринро талаб намудан кифоя мебошад:*

$$f(x) = o\left[\frac{1}{[\mu(x)]^{1+\varepsilon}}\right], \varepsilon > 0, \text{ ҳангоми } x \to a.$$

3. Ҳолати решаҳои муодилаи характеристикӣ ададҳои комплексии ҳамроҳшуда будан.

Бигузор решаҳои муодилаи характеристикии (2.4.12) ададҳои комплексии ҳамроҳшуда бошад ва онҳо чунин ишора карда шуда бошанд:

$$\lambda_{1,2} = \alpha_1 \pm i\beta_1,$$

ки дар ин ҷо

$$\alpha_1 = -\frac{a_1}{2}, \quad \beta_1 = \frac{\sqrt{4a_2 - a_1^2}}{2a}.$$

Дар ин ҳолат системаи (2.5.3) чунин намуд мегирад:

$$\begin{cases} e^{\alpha_1\mu(x)}\cos[\beta_1\mu(x)] \cdot c_1'(x) + e^{\alpha_1\mu(x)}\sin[\beta_1\mu(x)] \cdot c_2'(x) = 0, \\ e^{\alpha_1\mu(x)}\big[\alpha_1\cos[\beta_1\mu(x)] - \beta_1\sin[\beta_1\mu(x)]\big] \cdot c_1'(x) + \\ \quad +e^{\alpha_1\mu(x)}\big[\alpha_1\sin[\beta_1\mu(x)] + \beta_1\cos[\beta_1\mu(x)]\big] \cdot c_2'(x) = \dfrac{f(x)}{\omega(x)}. \end{cases}$$

Аз рӯйи қоидаи Крамер $c_1'(x), c_2'(x)$-ро меёбем:

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{\alpha_1\mu(x)}cos[\beta_1\mu(x)] & e^{\alpha_1\mu(x)}sin[\beta_1\mu(x)] \\ e^{\alpha_1\mu(x)}\begin{bmatrix}\alpha_1 cos[\beta_1\mu(x)] - \\ -\beta_1 sin[\beta_1\mu(x)]\end{bmatrix} & e^{\alpha_1\mu(x)}\begin{bmatrix}\alpha_1 sin[\beta_1\mu(x)] + \\ +\beta_1 cos[\beta_1\mu(x)]\end{bmatrix} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{2\alpha_1\mu(x)}[\alpha_1 sin[\beta_1\mu(x)]cos[\beta_1\mu(x)] + \beta_1 cos^2[\beta_1\mu(x)] -$$

$$-\alpha_1 sin[\beta_1\mu(x)]cos[\beta_1\mu(x)] + \beta_1 sin^2[\beta_1\mu(x)]\big] = \beta_1 e^{2\alpha_1\mu(x)}(cos^2[\beta_1\mu(x)] +$$

$$+sin^2[\beta_1\mu(x)]) = \beta_1 e^{2\alpha_1\mu(x)},$$

$$\Delta_{c_1'(x)} = \begin{vmatrix} 0 & e^{\alpha_1\mu(x)}sin[\beta_1\mu(x)] \\ \dfrac{f(x)}{\omega(x)} & e^{\alpha_1\mu(x)}\big[\alpha_1 sin[\beta_1\mu(x)] + \beta_1 cos[\beta_1\mu(x)]\big] \end{vmatrix} =$$

$$= -e^{\alpha_1\mu(x)} sin[\beta_1\mu(x)] \cdot \frac{f(x)}{\omega(x)},$$

$$\Delta_{c_2'(x)} = \begin{vmatrix} e^{\alpha_1\mu(x)} cos[\beta_1\mu(x)] & 0 \\ e^{\alpha_1\mu(x)}\left[\alpha_1 cos[\beta_1\mu(x)] - \beta_1 sin[\beta_1\mu(x)]\right] & \frac{f(x)}{\omega(x)} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{\alpha_1\mu(x)} cos[\beta_1\mu(x)] \cdot \frac{f(x)}{\omega(x)}.$$

Аз ин ҷо

$$c_1'(x) = \frac{\Delta_{c_1'(x)}}{\Delta} = -\frac{1}{\beta_1} \cdot \frac{sin[\beta_1\mu(x)]}{e^{\alpha_1\mu(x)}} \cdot \frac{f(x)}{\omega(x)}$$

$$c_2'(x) = \frac{\Delta_{c_2'(x)}}{\Delta} = \frac{1}{\beta_1} \cdot \frac{cos[\beta_1\mu(x)]}{e^{\alpha_1\mu(x)}} \cdot \frac{f(x)}{\omega(x)}.$$

Пас

$$c_1(x) = -\frac{1}{\beta_1}\int_a^x \frac{sin[\beta_1\mu(t)]}{e^{\alpha_1\mu(t)}} \cdot \frac{f(t)}{\omega(t)} dt + c_1^3$$

$$c_2(x) = \frac{1}{\beta_1}\int_a^x \frac{cos[\beta_1\mu(t)]}{e^{\alpha_1\mu(t)}} \cdot \frac{f(t)}{\omega(t)} dt + c_2^3.$$

Ин қиматҳоро ба (2.5.4) гузошта, бо назардошти он ки

$$y_1(x) = e^{\alpha_1\mu(x)} cos[\beta_1\mu(x)],\;\; y_2(x) = e^{\alpha_1\mu(x)} sin[\beta_1\mu(x)]$$

аст, ҳосил мекунем:

$$y(x) = e^{\alpha_1\mu(x)} cos[\beta_1\mu(x)] c_1^3 + e^{\alpha_1\mu(x)} sin[\beta_1\mu(x)] c_2^3 -$$

$$-\frac{1}{\beta_1}\int_a^x e^{\alpha_1(\mu(x)-\mu(t))} cos[\beta_1\mu(x)] \cdot sin[\beta_1\mu(t)] \frac{f(t)}{\omega(t)} dt +$$

$$+\frac{1}{\beta_1}\int_a^x e^{\alpha_1(\mu(x)-\mu(t))} sin[\beta_1\mu(x)]\cdot cos[\beta_1\mu(t)]\frac{f(t)}{\omega(t)}dt,$$

ё ин ки

$$y(x)=e^{\alpha_1\mu(x)}cos[\beta_1\mu(x)]c_1^3+e^{\alpha_1\mu(x)}sin[\beta_1\mu(x)]c_2^3+$$

$$+\frac{1}{\beta_1}\int_a^x e^{\alpha_1(\mu(x)-\mu(t))} sin\big[\beta_1\big(\mu(x)-\mu(t)\big)\big]\frac{f(t)}{\omega(t)}dt\equiv E_3[c_1^3,c_2^3,f(x)].\ (2.5.14)$$

Интеграли тарафи рости ин баробариро дар маънои Стилтиеса чунин навиштан мумкин аст:

$$y(x)=e^{\alpha_1\mu(x)}cos[\beta_1\mu(x)]c_1^3+e^{\alpha_1\mu(x)}sin[\beta_1\mu(x)]c_2^3+$$

$$+\frac{1}{\beta_1}\int_a^x e^{\alpha_1(\mu(x)-\mu(t))} sin\big[\beta_1\big(\mu(x)-\mu(t)\big)\big]f(t)d\big(\mu(t)\big)\equiv$$

$$\equiv E_3[c_3^1,c_3^2,f(x)].\ (2.5.15)$$

Ҳамин тавр, исбот карда шуд.

Теоремаи 2.5.5. «*Бигузор, решаҳои муодилаи характеристикии* (2.4.12) *ададҳои комплексӣ бошанд, яъне* $\lambda_{1,2}=\alpha_1\pm i\beta_1$. *Инчунин, функсияи* $f(x)\in C[a,b]$ *буда,* $\omega(x)$ *дар порчаи* $[a,b]$ *дорои сифр набошад. Он гоҳ муодилаи моделии* (2.5.1) *дар синфи* $C^2[a,b]$ *ҳалшаванда мебошад ва ҳалли умумии он бо ёрии формулаи* (2.5.14) *ё* (2.5.15) *дода мешавад»*[87].

Акнун, фарз мекунем, ки $\omega(x)=(x-a)^\alpha$ бошад, он гоҳ $\mu(x)=-\frac{1}{(\alpha-1)(x-a)^{\alpha-1}}$ ва бинобар ин интеграл дар тарафи рости баробарии (2.5.14) ё (2.5.15) ҳангоми $\alpha_1>0$ будан, дар нуқтаи $t=a$ дорои махсусияти экспоненсиалии дараҷаи α мебошад.

Аз ин рӯ, дар ҳолати $\alpha_1 > 0$ талаб менамоем, ки функсияи $f(x)$ дар нуқтаи $x = a$ аз рӯйи формулаи ассимптотикии зерин ба сифр майл намояд:

$$f(x) = \mathrm{o}\left[e^{-\delta_3 \mu(x)}\right], \;\; \delta_3 > \alpha_1, \;\; \text{ҳангоми } \; x \to a. \qquad (2.5.16)$$

Ҳамин тавр, теоремаи зерин ҷой дорад.

Теоремаи $\mathbf{2.5.6}$. «*Бигузор, решаҳои муодилаи характеристикии* $(2.4.12)$ *ададҳои комплексии ҳамроҳшуда бошанд. Функсияи* $\omega(x)$ *дар порчаи* $[a, b]$ *дорои сифри дараҷааш* $\alpha > 1$ *бошад, яъне* $\omega(x) = (x-a)^\alpha$, $\alpha > 1$. *Инчунин, функсияи* $f(x) \in C[a, b]$ *ва дар ҳолати* $\alpha_1 > 0$ *будан дар нуқтаи* $x = a$ *аз рӯйи формулаи ассимптотикии* $(2.5.16)$ *ба сифр майл намояд. Он гоҳ муодилаи моделии* $(2.5.7)$ *дар синфи* $C^2[a, b]$ *ҳалшаванда аст ва ҳалли умумии он бо ёрии формулаи* $(2.5.15)$ *дода мешавад»*[87].

2.6. Ёфтани ҳалли умумии муодилаи ғайримоделӣ

Дар ин зербоб ба дида баромадани муодилаи $(2.4.1)$ бармегардем:

$$[\omega(x)]^2 y'' + a_1[\omega(x)]y' + a_2 y = f(x) \qquad (2.6.1)$$

ва ин муодиларо дар ҳолати нисбатан муҳими:

$$\omega(x) = (x-a)^\alpha, \;\; \alpha > 1$$

дида мебароем.

Муодилаи (2.6.1)-ро дар чунин намуд менависем:

$$[\omega(x)]^2 y'' + [a_1 + \omega'(x)][\omega(x)]y' + a_2 y = F(x), \qquad (2.6.2)$$

ки дар ин ҷо

$$F(x) = f(x) + \omega(x)\omega'(x)y'. \tag{2.6.3}$$

Ба муодилаи (2.6.2) муодилаи якҷинсаи зерин мувофиқ меояд:

$$[\omega(x)]^2 y'' + [a_1 + \omega'(x)][\omega(x)]y' + a_2 y = 0. \tag{2.6.4}$$

Ба муодилаи якҷинсаи (2.6.4) бошад муодилаи характеристикии зерин мувофиқ меояд:

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0. \tag{2.6.5}$$

Дар муодилаи (2.6.2) функсияи $F(x)$-ро функсияи маълум ҳисобида, вобаста аз решаҳои муодилаи характеристикии (2.6.5), дар асоси натиҷаҳои зербоби 2.5, ҳалли умумии муодилаи (2.6.2)-ро дар се ҳолати зерин ҳосил менамоем.

I. Ҳолати $D > 0$ ва $\lambda_1 < \lambda_2$:

$$y(x) = \bar{y} + \int_a^x K_1\big(\mu(x), \mu(t)\big)F(t)d\big(\mu(t)\big) \equiv E_1[c_1^1, c_2^1, F(x)], \tag{2.6.6}$$

ки дар ин ҷо

$$K_1\big(\mu(x), \mu(t)\big) = \frac{1}{\sqrt{D}}\left[e^{\lambda_1(\mu(x)-\mu(t))} - e^{\lambda_2(\mu(x)-\mu(t))}\right] \tag{2.6.7}$$

функсияи Кошии муодилаи (2.6.2) дар ҳолати решаҳои муодилаи характеристикии (2.6.5) ҳақиқӣ ва гуногун будан, $\bar{y}-$ ҳалли умумии муодилаи якҷинсаи (2.6.4) мебошад.

Интеграли тарафи рости баробарии (2.6.6)-ро дар алоҳидагӣ дида мебароем:

$$\int_a^x K_1\big(\mu(x),\mu(t)\big)F(t)d\big(\mu(t)\big) = \int_a^x K_1\big(\mu(x),\mu(t)\big)f(t)d\big(\mu(t)\big) +$$

$$+\int_a^x K_1\big(\mu(x),\mu(t)\big)\omega(t)\omega'(t)y'(t)d\big(\mu(t)\big).$$

Дар интеграли дуюм $\omega(x)=(x-a)^{\alpha}, \alpha>1$ гузошта, пас аз қисм ба қисм интегронидан ҳосил мекунем:

$$\int_a^x K_1\big(\mu(x),\mu(t)\big)\omega(t)\omega'(t)y'(t)d\big(\mu(t)\big) =$$

$$=\alpha\int_a^x K_1\big(\mu(x),\mu(t)\big)(t-a)^{\alpha-1}y'(t)dt = \alpha K_1\big(\mu(x),\mu(t)\big)(t-a)^{\alpha-1}y(t)\Big|_a^x -$$

$$-\alpha\int_a^x \left[\frac{\partial K_1\big(\mu(x),\mu(t)\big)}{\partial t}(t-a)^{\alpha-1} + (\alpha-1)K_1\big(\mu(x),\mu(t)\big)(t-a)^{\alpha-2}\right]y(t)dt.$$

Ифодаи берун аз интегралӣ ба сифр баробар аст, зеро $K_1\big(\mu(x),\mu(t)\big)=0$ ва $K_1\big(\mu(x),\mu(t)\big)(t-a)^{\alpha-1}y(t)=0$, ҳангоми $t\to a$ ва $\lambda_2<0$. Ин бевосита аз формулаи (2.6.7), ки барои функсияи Кошии $K_1\big(\mu(x),\mu(t)\big)$ ҳосил карда шуда буд, мебарояд.

Аз ин ҷо

$$\int_a^x K_1\big(\mu(x),\mu(t)\big)\omega(t)\omega'(t)y'(t)d\big(\mu(t)\big) =$$

$$= -\alpha\int_a^x \left[\frac{\partial K_1\big(\mu(x),\mu(t)\big)}{\partial t}(t-a)^{\alpha-1}\right.$$

$$\left. + (\alpha-1)K_1\big(\mu(x),\mu(t)\big)(t-a)^{\alpha-2}\right] y(t)dt =$$

$$= -\alpha\int_a^x \left[\frac{\partial K_1\big(\mu(x),\mu(t)\big)}{\partial t}(t-a)^{2\alpha-1}\right.$$

$$\left. + (\alpha-1)K_1\big(\mu(x),\mu(t)\big)(t-a)^{2\alpha-2}\right] y(t)d(\mu(t))$$

ва баробарии (2.6.6) намуди зеринро мегирад:

$$y(x) + \alpha\int_a^x K_1^1\big(\mu(x),\mu(t)\big)y(t)d(\mu(t)) = E_1[c_1^1, c_2^1, f(x)], \qquad (2.6.8)$$

ки дар ин ҷо

$$K_1^1\big(\mu(x),\mu(t)\big) = \frac{\partial K_1\big(\mu(x),\mu(t)\big)}{\partial t}(t-a)^{2\alpha-1} +$$
$$+(\alpha-1)K_1\big(\mu(x),\mu(t)\big)(t-a)^{2\alpha-2}.$$

Маълум аст, ки агар $\lambda_2 < 0$ бошад, пас муодилаи интегралии (2.6.8) муодилаи интегралии Волтерра бо ядро ва тарафи рости бефосила мебошад ва ҳалли он мувофиқи назарияи умумии ин гуна муодилаҳо бо ёрии формулаи зерин дода мешавад:

$$y(x) = E_1[c_1^1, c_2^1, f(x)] - \alpha \int_a^x \Gamma_1\big(\mu(x), \mu(t)\big) E_1[c_1^1, c_2^1, f(t)] d\big(\mu(t)\big), \quad (2.6.9)$$

ки дар ин ҷо $\Gamma_1\big(\mu(x), \mu(t)\big)$ – резолвентаи муодилаи интегралии (2.6.8) мебошад.

Агар $\lambda_2 > 0$ бошад, ва азбаски $K_1^1\big(\mu(a), \mu(a)\big) = \infty$, пас муодилаи (2.6.8) дар синфи $C^2[a, b]$ ҳалшаванда намебошад.

Ҳамин тавр, теоремаи зерин исбот карда шуд.

Теоремаи $\mathbf{2.6.1}$. «*Бигузор, коэффисиентҳои* a_1, a_2 *-и муодилаи* (2.6.1) *чунин бошанд, ки решаҳои муодилаи характеристикии* (2.6.5) *ҳақиқӣ ва гуногун бошанд. Ғайр аз ин функсияи* $f(x) \in C[a, b]$. *Он гоҳ муодилаи ғайримоделии* (2.6.1), *танҳо дар ҳолати* $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ *ҳалшаванда мебошад ва ҳалли умумии он ба воситаи резолвентаи муодилаи интегралии намуди Волтерраи* (2.6.8) *дар намуди* (2.6.9) *дода мешавад»*[87].

II. Ҳолати $D = 0$.

Дар ин ҳолат ҳалли умумии муодилаи ғайриякҷинсаи (2.6.2) бо ёрии формулаи зерин дода мешавад:

$$y(x) = \bar{y} + \int_a^x K_2\big(\mu(x), \mu(t)\big) F(t) d\big(\mu(t)\big) \equiv E_2[c_1^2, c_2^2, F(x)], \quad (2.6.10)$$

ки дар ин ҷо

$$K_2\big(\mu(x), \mu(t)\big) = e^{\lambda(\mu(x) - \mu(t))}\big(\mu(x) - \mu(t)\big)$$

функсияи Кошии муодилаи (2.6.2) дар ҳолати решаҳои муодилаи характеристикии (2.6.5) ҳақиқӣ ва якхела будан, мебошад.

Барои интеграли тарафи рости (2.6.10) дорем:

$$\int_a^x K_2\big(\mu(x),\mu(t)\big)F(t)d\big(\mu(t)\big) = \int_a^x K_2\big(\mu(x),\mu(t)\big)f(t)d\big(\mu(t)\big) +$$

$$+\int_a^x K_2\big(\mu(x),\mu(t)\big)\omega(t)\omega'(t)y'(t)d\big(\mu(t)\big).$$

Дар ин ҳолат низ $\omega(x) = (x-a)^\alpha$ гузошта, қисм ба қисм интеграл мегирем

$$\int_a^x K_2\big(\mu(x),\mu(t)\big)\omega(t)\omega'(t)y'(t)d\big(\mu(t)\big) = \int_a^x K_2\big(\mu(x),\mu(t)\big)\omega'(t)y'(t)dt =$$

$$= \alpha\int_a^x K_2\big(\mu(x),\mu(t)\big)(t-a)^{\alpha-1}y'(t)dt = \alpha K_2\big(\mu(x),\mu(t)\big)(t-a)^{\alpha-1}y(t)\Big|_a^x -$$

$$-\alpha\int_a^x \left[\frac{\partial K_2\big(\mu(x),\mu(t)\big)}{\partial t}(t-a)^{\alpha-1} + (\alpha-1)K_2\big(\mu(x),\mu(t)\big)(t-a)^{\alpha-2}\right]y(t)dt =$$

$$= -\alpha\int_a^x \left[\frac{\partial K_2\big(\mu(x),\mu(t)\big)}{\partial t}(t-a)^{2\alpha-1}\right.$$

$$\left. + (\alpha-1)K_2\big(\mu(x),\mu(t)\big)(t-a)^{2\alpha-2}\right]y(t)d\big(\mu(t)\big).$$

Дар ин ҷо ба назар гирифта шудааст, ки дар ҳолати $\lambda < 0$, ҳангоми $x \to a$ ҷамъшавандаи берун аз интеграл ба сифр баробар мешавад.

Ҳамин тавр, баробарии (2.6.10) чунин намуд мегирад:

$$y(x) + \alpha\int_a^x K_2^1\big(\mu(x),\mu(t)\big)y(t)d(\mu(t)) = E_2[c_1^2, c_2^2, f(x)], \qquad (2.6.11)$$

ки дар ин ҷо

$$K_2^1\big(\mu(x),\mu(t)\big)=\frac{\partial K_2\big(\mu(x),\mu(t)\big)}{\partial t}(t-a)^{2\alpha-1}+$$
$$+(\alpha-1)K_2\big(\mu(x),\mu(t)\big)(t-a)^{2\alpha-2}.$$

Муодилаи интегралии (2.6.11) танҳо дар ҳолати $\lambda<0$ будан, муодилаи интегралии Волтерра бо ядро ва тарафи рости бефосила буда, ҳалли он бо ёрии формулаи

$$y(x)=E_2[c_1^2,c_2^2,f(x)]-\alpha\int_a^x \Gamma_2\big(\mu(x),\mu(t)\big)E_2[c_1^2,c_2^2,f(t)]d\big(\mu(t)\big) \quad (2.6.12)$$

дода мешавад, ки дар ин ҷо $\Gamma_2\big(\mu(x),\mu(t)\big)$ – резолвентаи муодилаи интегралии (2.6.11) мебошад.

Ҳамин тавр, исбот карда шуд.

Теоремаи 2.6.2. «*Бигузор, коэффисиентҳои* a_1, a_2*-и муодилаи (2.6.1) чунин бошанд, ки решаҳои муодилаи характеристикии* (2.6.5) *ҳақиқӣ ва якхела буда, ғайр аз ин функсияи* $f(x)\in C[a,b]$. *Он гоҳ муодилаи ғайримоделии* (2.6.1), *танҳо дар ҳолати* $\lambda<0$ *ҳалшаванда мебошад ва ҳалли умумии он бо ёрии резолвентаи муодилаи интегралии Волтерраи* (2.6.11) *ба воситаи формулаи* (2.6.12) *дода мешавад»*[87].

III. Ҳолати $D<0$.

Дар ин ҳолат ҳалли умумии муодилаи ғайриякҷинсаи (2.6.2) ба воситаи формулаи:

$$y(x)=\bar{y}+\int_a^x K_3\big(\mu(x),\mu(t)\big)F(t)d\big(\mu(t)\big)\equiv E_3[c_1^3,c_2^3,F(x)], \quad (2.6.13)$$

дода мешавад, ки дар ин ҷо

$$K_3\big(\mu(x),\mu(t)\big)=\frac{1}{\beta}e^{\alpha_1(\mu(x)-\mu(t))}\sin\big[\beta_1\big(\mu(x)-\mu(t)\big)\big]$$

функсияи Кошии муодилаи (2.6.2) дар ҳолати решаҳои муодилаи характеристикии (2.6.5) ададҳои комплексии ҳамроҳшуда будан, мебошад.

Ба мисли ҳолатҳои якум ва дуюм амал намуда, ба ҳалли муодилаи интегралии зерин меоем:

$$y(x)+\alpha\int_a^x K_3^1\big(\mu(x),\mu(t)\big)y(t)d(\mu(t))=E_3[c_1^3,c_2^3,f(x)],\qquad(2.6.14)$$

ки дар ин ҷо

$$K_3^1\big(\mu(x),\mu(t)\big)=\frac{\partial K_3\big(\mu(x),\mu(t)\big)}{\partial t}(t-a)^{2\alpha-1}+$$
$$+(\alpha-1)K_3\big(\mu(x),\mu(t)\big)(t-a)^{2\alpha-2}.$$

Дар ин ҳолат низ барои ҳалшавандагии муодилаи (2.6.14) бояд шарти $\alpha_1<0$ иҷро гардад. Агар шарти $\alpha_1<0$ иҷро шавад, пас ҳалли муодилаи (2.6.14) ба воситаи резолвентаи муодилаи интегралии намуди Волтерра ба воситаи формулаи зерин дода мешавад:

$$y(x)=E_3[c_1^3,c_2^3,f(x)]-\alpha\int_a^x \Gamma_3\big(\mu(x),\mu(t)\big)E_3[c_1^3,c_2^3,f(t)]d\big(\mu(t)\big),\quad(2.6.15)$$

ки дар ин ҷо $\Gamma_3\big(\mu(x),\mu(t)\big)$ ин резолвентаи муодилаи интегралии (2.6.14) мебошад.

Ҳамин тавр, исбот карда шуд.

Теоремаи $\mathbf{2.6.3}$. «*Бигузор, коэффисиентҳои* a_1, a_2*-и муодилаи* $(2.6.1)$ *чунин бошанд, ки решаҳои муодилаи характеристикии* $(2.6.5)$ *ададҳои комплексии ҳамроҳшуда бошанд. Инчунин, функсияи* $f(x) \in C[a,b]$. *Он гоҳ муодилаи ғайриякҷинсаи* $(2.6.1)$ *танҳо дар ҳолати* $\alpha_1 < 0$ *ҳалшаванда мебошад ва ҳалли умумии он ба воситаи резолвентаи муодилаи интегралии* $(2.6.14)$ *ба воситаи формулаи* $(2.6.15)$ *дода мешавад»*[87].

Хулосаҳои боби дуюм

Дар ин боб муодилаи дифференсиалии умумикардашудаи намуди Эйлер мавриди таҳқиқот қарор гирифтааст. Аввалан муодилаи намуди Эйлери тартиби якум таҳқиқ шуда, ҳалли он дар намуди ошкор ёфта шудааст. Баъдан муодилаи тартиби дуюми намуди Эйлер таҳқиқ карда шудааст. Дар ин маврид теорема дар бораи шарти зарурӣ ва кифоягии овардашаванда будани муодилаи таҳқиқшаванда ба муодилаи дифференсиалӣ бо коэффисиентҳои доимӣ исбот карда шудааст.

Минбаъд, муодилаи моделии ғайриякҷинсаи намуди Эйлер, дар се ҳолат, вобаста аз решаҳои муодилаи характеристикии мувофиқоянда, таҳқиқ гардидааст. Оид ба натиҷаҳои дар ин ҷо бадастовардашуда теоремаҳои 2.5.1, 2.5.2, 2.5.3, 2.5.4, 2.5.5 ва 2.5.6 исбот карда шудааст.

Пас аз ёфтани ҳалҳои муодилаи моделӣ муодилаи ғайримоделӣ таҳқиқ гардидааст. Нишон дода шудааст, ки муодилаи ғайримоделӣ дар се ҳолат, вобаста аз аломати решаи калонтарини муодилаи характеристикӣ, ҳалшаванда мебошад ва ҳалли он ба воситаи резолвентаи муодилаҳои интегралии Волтерраи мувофиқоянда, ифода карда мешавад. Натиҷаҳои асосии дар ин қисмати диссертатсия бадастовардашуда дар теоремаҳои 2.6.1, 2.6.2, ва 2.6.3 инъикоси худро ёфтаанд.

Натиҷаҳои асосии дар ин боб бадастовардашуда дар корҳои [2-М], [3-М], [7-М], [8-М], [9-М] ба чоп расонида шудааст.

БОБИ 3. ТАҲҚИҚИ МУОДИЛАҲОИ ДИФФЕРЕНСИАЛИИ ОДИИ БАРЗИЁД-ТАНАЗУЛЁБАНДАИ ТАРТИБИ ОЛӢ

3.1. Таҳқиқи муодилаи моделии таназзулёбандаи тартиби олӣ

Бигузор $\Gamma = \{x\colon\ 0 < x < \infty\}$ маҷмуи нуқтаҳо дар тири ҳақиқӣ бошад. Дар Γ муодилаи дифференсиалии барзиёд таназулёбандаи тартиби n-уми зеринро дида мебароем:

$$[\omega(x)]^n y^{(n)} + a_1[\omega(x)]^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\omega(x)y' + a_n y = f(x), \quad (3.1.1)$$

ки дар ин ҷо $a_i\ (i = \overline{1,n}) -$ ададҳои доимӣ, $f(x) -$ функсияи додашудаи бефосила дар Г, $\omega(x) -$ функсияи додашуда дар Г мебошад, ки метавонад дар ягон нуқтаи ин интервал ба сифр баробар шавад.

Маълум аст, ки ҳангоми $\omega(x) = x$ муодилаи (3.1.1) ба муодилаи Эйлери тартиби n-ум мубаддал мегардад. Барои муодилаи Эйлер маълум аст, ки онро бо ёрии гузориши мувофиқ ба муодилаи дифференсиалии одӣ бо коэффисиентҳои доимӣ овардан мумкин аст.

Таҳқиқи ин саволро барои муодилаи (3.1.1) дида мебароем, яъне чунин саволро дида мебароем: оё чунин гузориши мувофиқе вуҷуд дорад, ки бо истифода аз он муодилаи (3.1.1) ба муодилаи дифференсиалӣ бо коэффисиентҳои доимӣ оварда шавад?

Якҷоя бо муодилаи (3.1.1) муодилаи якҷинсаи зеринро дида мебароем:

$$[\omega(x)]^n y^{(n)} + a_1[\omega(x)]^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\omega(x)y' + a_n y = 0. \quad (3.1.2)$$

Леммаи ёрирасони зерин ҷой дорад.

Леммаи $3.1.1$. *Бигузор функсияи $y = y(x)$ k –маротиба бефосила дифференсиронидашаванда бошад. Он гоҳ барои ёфтани ҳосилаи тартиби k – юми функсияи мураккаби*

$$y(x) = y(\mu^{-1}(t)) = z(t),$$

ки дар ин ҷо $t = \mu(x)$ аст, формулаи зерин ҷой дорад:

$$y^{(k)}(x) = \sum_{i=1}^{k} z^{(i)}(t) P_k^i(x), \tag{3.1.3}$$

ки дар ин ҷо

$$P_k^i(x) = P_k^i\big(\mu'(x), \mu''(x), \dots, \mu^{(k)}(x)\big), (i = \overline{1,k})$$

-ҳо аз муносибатҳои рекурентии зерин муайян карда мешаванд:

$$P_k^1(x) = \mu^{(k)}(x), \quad P_k^k(x) = [\mu'(x)]^k;$$
$$P_k^i(x) = \mu'(x) P_{k-1}^{i-1}(x) + \left(P_{k-1}^i(x)\right)', \quad (i = 2,3, \dots, k-1).$$

Исбот: Аз рӯйи қоидаи дифференсиронии функсияи мураккаб доро мешавем:

$$y'(x) = z'(t) t'_x = z'(t) \cdot \mu'(x) = z'(t) \cdot P_1^1(x),$$
$$y''(x) = z''(t)[\mu'(x)]^2 + z'(t)\mu''(x) = z'(t) P_2^1(x) + z''(t) P_2^2(x),$$
$$y'''(x) = z'''(t)[\mu'(x)]^3 + z''(t) \cdot 3\mu'(x)\mu''(x) + z'(t)\mu'''(x)$$
$$= z'(t) P_3^1(x) + z''(t) P_3^2(x) + z'''(t) P_3^3(x),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Фарз менамоем, ки дурустии формулаи (3.1.3) барои ҳосилаи тартиби $k-1$ исбот карда шудааст. Онро барои ҳосилаи тартиби k исбот менамоем. Дар ҳақиқат, бигузор

$$y^{(k-1)}(x)=\sum_{i=1}^{k-1} z^{(i)}(t)P_{k-1}^{i}(x),$$

ки дар ин ҷо $P_{k-1}^{1}(x)=\mu^{(k-1)}(x)$, $P_{k-1}^{k-1}(x)=[\mu'(x)]^{k-1}$. Аз ин ифода бори дигар аз рӯйи x ҳосила мегирем:

$$y^{(k)}(x)=\sum_{i=1}^{k-1}\left[z^{(i+1)}(t)\mu'(x)P_{k-1}^{i}(x)+z^{(i)}(t)\left(P_{k-1}^{i}(x)\right)'\right]=$$

$$=\sum_{i=1}^{k-1} z^{(i+1)}(t)\mu'(x)P_{k-1}^{i}(x)+\sum_{i=1}^{k-1} z^{(i)}(t)\left(P_{k-1}^{i}(x)\right)'.$$

Ҷамъшавандаҳои ҳарду суммаро, ки тартиби якхелаи ҳосилаҳои $z^{(i)}(t)$-ро доро мебошанд, якҷоя менамоем:

$$y^{(k)}(x)=\sum_{i=2}^{k-1} z^{(i)}(t)\left[\mu'(x)P_{k-1}^{i-1}(x)+\left(P_{k-1}^{i}(x)\right)'\right]+$$

$$+z^{(k)}(t)\mu'(x)P_{k-1}^{k-1}(x)+z'(t)\left(P_{k-1}^{1}(x)\right)'. \qquad (3.1.4)$$

Азбаски

$$z^{(k)}(t)\mu'(x)P_{k-1}^{k-1}(x)=z^{(k)}(t)\mu'(x)[\mu'(x)]^{k-1}=z^{(k)}(t)[\mu'(x)]^{k},$$

$$z'(t)\left(P_{k-1}^{1}(x)\right)'=z'(t)\left[\mu^{(k-1)}(x)\right]'=z'(t)\mu^{(k)}(x),$$

пас ишораҳои зеринро дохил намуда:

$$P_k^1(x) = \mu^{(k)}(x), \quad P_k^k(x) = [\mu'(x)]^k;$$
$$P_k^i(x) = \mu'(x)P_{k-1}^{i-1}(x) + \left(P_{k-1}^i(x)\right)', (i = 2,3,\dots,k-1),$$

барои ихтиёрӣ $k = 2,3,\dots,n$ аз (3.1.4) ҳосил менамоем:

$$y^{(k)}(x) = \sum_{i=1}^{k} z^{(i)}(t)P_k^i(x). \tag{3.1.5}$$

Леммаи 3.1.1 исбот гардид.

Акнун, дар муодилаи (3.1.2) ивази тағйирёбандаро бо ёрии формулаи $t = \mu(x)$ мегузаронем, ки дар ин ҷо $\mu(x) -$ функсияи кифоя маротиба дифференсиронидашаванда мебошад. Он гоҳ барои функсияи мураккаби $y(x) = y(\mu^{-1}(t)) = z(t)$ шартҳои леммаи 3.1.1 иҷро мегардад. (3.1.5)-ро ҳангоми $k = 1,2,\dots,n$ ба муодилаи (3.1.2) гузошта, ҳосил мекунем:

$$[\omega(x)]^n \sum_{i=1}^{n} z^{(i)}(t)P_n^i(x) + a_1[\omega(x)]^{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} z^{(i)}(t)P_{n-1}^i(x) +$$
$$+ \cdots + a_{n-1}\omega(x)z'(t)P_1^1(x) + a_n z(t) = 0.$$

Ин баробариро ба намуди стандартии зерин меорем:

$$[\omega(x)]^n P_n^n(x) z^{(n)} + [\omega(x)]^{n-1} P_{n-1}^{n-1}(x)\left(a_1 + \omega(x)\frac{P_n^{n-1}(x)}{P_{n-1}^{n-1}(x)}\right) z^{(n-1)} + \cdots +$$
$$+\omega(x)P_1^1(x)\left(a_{n-1} + a_{n-2}\omega(x)\frac{P_2^1(x)}{P_1^1(x)} + \cdots + a_1[\omega(x)]^{n-2}\frac{P_{n-1}^1(x)}{P_1^1(x)} +\right.$$
$$\left. +[\omega(x)]^{n-1}\frac{P_n^1(x)}{P_1^1(x)}\right) z' + a_n z = 0. \tag{3.1.6}$$

Баробарии (3.1.6)–ро ба ифодаи $[\omega(x)]^n P_n^n(x) = [\omega(x)]^n [\mu'(x)]^n$ тақсим намуда, ҳосил мекунем:

$$z^{(n)} + \frac{1}{\omega(x)\mu'(x)}\left(a_1 + \omega(x)\frac{P_n^{n-1}(x)}{P_{n-1}^{n-1}(x)}\right)z^{(n-1)} + \cdots +$$
$$+\frac{1}{[\omega(x)]^{n-1}[\mu'(x)]^{n-1}}\left(a_{n-1} + a_{n-2}\omega(x)\frac{P_2^1(x)}{P_1^1(x)} + \cdots + a_1[\omega(x)]^{n-2}\frac{P_{n-1}^1(x)}{P_1^1(x)} +\right.$$
$$\left.+[\omega(x)]^{n-1}\frac{P_n^1(x)}{P_1^1(x)}\right)z' + \frac{a_n}{[\omega(x)]^n[\mu'(x)]^n}z = 0.$$

Аз ин ҷо дида мешавад, ки барои он ки ин муодила ба муодилаи дифференсиалӣ бо коэффисиентҳои доимӣ оварда шавад, зарур аст, ки функсияи $\mu(x)$-ро чунин интихоб намоем, ки коэффисиенти назди z адади доимӣ бошад.

Мегузорем:

$$\frac{a_n}{[\omega(x)]^n[\mu'(x)]^n} = c \ (c - const).$$

Он гоҳ

$$\mu'(x) = \sqrt[n]{\frac{a_n}{c}} \cdot \frac{1}{\omega(x)}.$$

Дар ин ҷо $c = a_n$ гирифта, гузориши зеринро ҳосил менамоем:

$$t = \mu(x) = \int \frac{dx}{\omega(x)}. \qquad (3.1.7)$$

Ҳамин тавр, тасдиқоти зерин ҷой дорад.

Теоремаи 3.1.1. *Муодилаи* (3.1.2) *бо ёрии ивази тағйирёбанда ба муодилаи дифференсиалӣ бо коэффисиентҳои доимӣ танҳо бо ёрии формулаи (3.1.7) оварда мешавад*.

Бигузор дар муодилаи (3.1.2) ивази тағйирёбанда бо ёрии формулаи (3.1.7) гузаронида шудааст. Он гоҳ бо дарназардошти он ки

$$[\omega(x)]^k P_k^k(x) = [\omega(x)]^k [\mu'(x)]^k = [\omega(x)]^k \cdot \frac{1}{[\omega(x)]^k} = 1,$$

аз (3.1.6) ҳосил мекунем:

$$z^n + \left(a_1 + [\omega(x)]^n P_n^{n-1}(x)\right) z^{(n-1)} + \cdots + (a_{n-1} + a_{n-2}[\omega(x)]^2 P_2^1(x) + \cdots$$
$$+ a_1[\omega(x)]^{n-1} P_{n-1}^1(x) + [\omega(x)]^n P_n^1(x)\big) z' + a_n z = 0.$$

Ин муодилаи дифференсиалӣ бо коэффисиентҳои доимӣ мебошад, агар

$$a_1 + [\omega(x)]^n P_n^{n-1}(x) = c_1 \ (c_1 - const).$$

бошад. Аз ин ҷо, азбаски

$$P_n^{n-1}(x) = \frac{n(n-1)}{2} [\mu'(x)]^{n-2} \mu''(x),$$

пас

$$a_1 + [\omega(x)]^n \cdot \frac{n(n-1)}{2} [\mu'(x)]^{n-2} \mu''(x) = c_1,$$

$$\frac{n(n-1)}{2} [\omega(x)]^n \cdot \frac{1}{[\omega(x)]^{n-2}} \cdot \left[\frac{1}{\omega(x)}\right]' = c_1 - a_1,$$

$$[\omega(x)]^2 \cdot \left[-\frac{\omega'(x)}{\omega^2(x)}\right] = \frac{2(c_1 - a_1)}{n(n-1)},$$

$$\omega'(x) = \frac{2(a_1 - c_1)}{n(n-1)} = c_2.$$

Аз ин ҷо

$$\omega(x) = c_2 x + c_3.$$

Ин нишон медиҳад, ки муодилаи (3.1.2)-ро бо ёрии гузориши (3.1.7) ба муодилаи дифференсиалӣ бо коэффисиентҳои доимӣ овардан мумкин аст, агар $\omega(x)$ функсияи хаттӣ аз тағйирёбандаи x бошад, яъне муодилаи (3.1.2) муодилаи Эйлер бошад.

Ҳамин тавр, теоремаи зерин ҷой дорад.

Теоремаи 3.1.2. *Агар функсияи* $\omega(x)$ *дар муодилаи* (3.1.2) *аз функсияи хаттӣ фарқ намояд, пас барои муодилаи* (3.1.2) *чунин гузориши мувофиқи тағйирёбандаро ёфтан мумкин нест, ки дар натиҷаи он муодила ба муодилаи дифференсиалӣ бо коэффисиентҳои доимӣ оварда шавад.*

Аз ин теорема мебарояд, ки муодилаи (3.1.2) бо функсияи ихтиёрии $\omega(x)$, ки аз функсияи хаттӣ фарқ менамояд, ҳангоми доимӣ будани коэффисиентҳои $a_1, a_2, \dots, a_n$, бо ёрии гузориш, ба муодилаи дифференсиалӣ бо коэффисиентҳои доимӣ оварда намешавад.

3.2. Таҳқиқи муодилаи дифференсиалии моделии якҷинсаи таназзулёбанда бо коэффисиентҳои тағйирёбанда

Дар Г муодилаи ғайриякҷинсаи намуди Эйлер бо коэффисиентҳои тағйирёбандаи зеринро дида мебароем:

$$[\omega(x)]^n y^{(n)} + A_1(x)[\omega(x)]^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + A_{n-1}(x)\omega(x)y' + A_n(x)y = f(x), \tag{3.2.1}$$

ки дар ин ҷо $A_1(x),\ A_2(x), \cdots, A_n(x)$, ва $f(x) -$ функсияҳои дар Г бефосила мебошанд.

Ба муодилаи ғайриякҷинсаи (3.2.1) муодилаи якҷинсаи зерин мувофиқ меояд:

$$[\omega(x)]^n y^{(n)} + A_1(x)[\omega(x)]^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + A_{n-1}(x)\omega(x)y' + A_n(x)y = 0. \tag{3.2.2}$$

Теоремаи зерин ҷой дорад.

Теоремаи 3.2.1. «*Барои он ки муодилаи* (3.2.2) *бо ёрии формулаи ивази тағйирёбанда* (3.1.7) *ба муодилаи дифференсиалӣ бо коэффисиентҳои доимӣ оварда шавад, зарур ва кифоя аст, ки коэффисиентҳои* $A_k(x)$ $(k = \overline{1,n})$ *намуди зеринро дошта бошанд»[11-М]:*

$$A_k(x) = a_k - \sum_{i=0}^{k-1} A_i(x)[\omega(x)]^{n-i} P_{n-i}^{n-k}(x) \ \ (k = 1,2,\cdots,n-1), \tag{3.2.3}$$

$$A_0(x) \equiv 1,\ \ A_n(x) \equiv a_n,\ \ a_k = const.$$

Исбот: Агар дар муодилаи (3.2.2) ивази тағйирёбанда бо ёрии формулаи (3.1.7) амалӣ карда шавад, пас муодилаи зерин ҳосил мегардад:

$$\begin{gathered} z^{(n)} + \left(A_1(x) + [\omega(x)]^n P_n^{n-1}(x)\right) z^{(n-1)} + \cdots + (A_{n-1}(x) + \\ + A_{n-2}(x)[\omega(x)]^2 P_2^1(x) + \cdots + A_1(x)[\omega(x)]^{n-1} P_{n-1}^1(x) + \\ + [\omega(x)]^n P_n^1(x)\big) z' + A_n(x) z = 0. \end{gathered} \tag{3.2.4}$$

Агар коэффисиентҳои $A_k(x)\,(k = \overline{1,n})$ шартҳои (3.2.3)-ро қаноат намоянд, пас ҳангоми гузоштани онҳо ба (3.2.4) ба муодилаи дифференсиалӣ бо коэффисиентҳои доимии зерин меоем:

$$z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} z' + a_n z = 0. \tag{3.2.5}$$

Теоремаи 3.2.1 исбот гардид.

Ин теорема имконият медиҳад, аз рӯйи коэффисиентҳои муодила муайян карда шавад, ки оё ин муодила бо ёрии ивази тағйирёбанда ба муодилаи дифференсиалӣ бо коэффисиентҳои доимӣ оварда мешавад ё не.

Таърифи $\mathbf{3.2.1}$. *Муодилаи* $(3.2.1)$, *ки коэффисиентҳояш* $A_k(x)$ *аз баробариҳои* $(3.2.3)$ *муайян карда мешаванд, муодилаи моделии таназулёбандаи тартиби* n*-ум номида мешавад.*

Азбаски «муодилаи моделии $(3.2.2)$ бо ёрии гузориши $(3.1.7)$ ба муодилаи дифференсиалӣ бо коэффисиентҳои доимии $(3.2.5)$ оварда мешавад»[11-M], пас ҳалҳои хусусии муодилаи $(3.2.5)$-ро масалан, дар намуди $e^{\lambda t}$ ё $t^m \cdot e^{\lambda t}$ ёфта, аз он ҳалҳои муодилаи моделии (3.2.2)-ро дар намуди $e^{\lambda\mu(x)}$ ё $[\mu(x)]^m \cdot e^{\lambda\mu(x)}$ ҳосил менамоем.

Аз ин ҷо роҳи зерини бевосита интегронидани муодилаи моделии якҷинсаи (3.2.2)-ро ҳосил менамоем.

Ҳалли муодилаи якҷинсаи $(3.2.2)$-ро дар намуди:

$$y(x) = e^{\lambda\mu(x)} \tag{3.2.6}$$

ҷустуҷӯ менамоем. Он гоҳ

$$y^{(k)}(x) = e^{\lambda\mu(x)} \sum_{i=1}^{k} \lambda^i P_k^i(x), \quad (k = 1,2,\dots,n), \tag{3.2.7}$$

ки дар ин ҷо $P_k^i(x)$ – аз баробариҳои зерин муайян карда мешаванд:

$$\begin{cases} P_k^1(x) = \mu^{(k)}(x), \qquad P_k^k(x) = [\mu'(x)]^k, \\ P_k^i(x) = \mu'(x)P_{k-1}^{i-1}(x) + \left(P_{k-1}^i(x)\right)' \ \ (i = 2,3,\dots,k-1). \end{cases} \tag{3.2.8}$$

Функсияҳои (3.2.6), (3.2.7)-ро ба тарафи чапи муодилаи (3.2.2) гузошта, пас аз ихтисор намудан ба $e^{\lambda\mu(x)}$ ҳосил мекунем:

$$\lambda^n + \left(A_1(x) + [\omega(x)]^n P_n^{n-1}(x)\right)\lambda^{n-1} + \cdots + (A_{n-1}(x) + A_{n-2}(x)[\omega(x)]^2 \cdot$$
$$\cdot P_2^1(x) + \cdots + A_1(x)[\omega(x)]^{n-1} P_{n-1}^1(x) + [\omega(x)]^n P_n^1(x)\big)\lambda + A_n(x) = 0.$$

Бо дарназардошти баробарии (3.2.3) ҳосил мекунем:

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0. \qquad (3.2.9)$$

«Муодилаи (3.2.9)-ро муодилаи характеристикӣ барои муодилаи (3.2.2) меномем. Ҳамин тавр, агар λ решаи муодилаи характеристикии (3.2.9) бошад, пас функсияи намуди (3.2.6) ҳалли хусусии муодилаи якҷинсаи (3.2.2) мешавад»[9-М].

Дар ин асос, вобаста аз решаҳои муодилаи характеристикии (3.2.9) ҳалли умумии муодилаи якҷинсаи (3.2.2)-ро дар ҳолатҳои зерин ҳосил менамоем.

I. «Бигузор ҳамаи решаҳои $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ –ҳақиқӣ ва гуногун бошанд»[9-М].. Он гоҳ муодилаи моделии (3.2.2) $n-$ ҳалҳои хусусии хаттӣ новобастаи намуди:

$$y_1 = e^{\lambda_1\mu(x)}, \quad y_2 = e^{\lambda_2\mu(x)}, \dots, \quad y_n = e^{\lambda_n\mu(x)}$$

-ро дорад ва ҳалли умумии он намуди

$$\bar{y} = C_1^1 e^{\lambda_1\mu(x)} + C_2^1 e^{\lambda_2\mu(x)} + \cdots + C_n^1 e^{\lambda_n\mu(x)}, \qquad (3.2.10)$$

-ро мегирад, ки дар ин ҷо $C_1^1, C_2^1, \dots, C_n^1 -$ ададҳои доимии ихтиёрӣ мебошанд.

II. «Бигузор ҳамаи решаҳои $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ –ҳақиқӣ ва якхела бошанд, яъне $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n$. »[9-М]. Он гоҳ ҳалҳои хусусии муодилаи якҷинсаи (3.2.2) чунин намуд мегиранд:

$$y_1 = e^{\lambda\mu(x)},\ \ y_2 = \mu(x)e^{\lambda\mu(x)}, \dots, y_n = [\mu(x)]^{n-1}e^{\lambda\mu(x)}.$$

Дар ин ҳолат ҳалли умумии муодилаи якҷинсаи (3.2.2) функсияи зерин мебошад:

$$\bar{y} = C_1^2 e^{\lambda\mu(x)} + C_2^2 \mu(x)e^{\lambda\mu(x)} + \cdots + C_n^2[\mu(x)]^{n-1}e^{\lambda\mu(x)}, \qquad (3.2.11)$$

ки дар ин ҷо $C_1^2,\ C_2^2, \dots, C_n^2 -$ ададҳои доимии ихтиёрӣ мебошанд.

III. «Бигузор λ_1 решаи $k -$ каратаи муодилаи характеристикии (3.2.5) бошад ва решаҳои боқимондаи $\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n -$ решаҳои ҳақиқӣ ва гуногун бошанд»[9-М]. Он гоҳ муодилаи моделии (3.2.2) дорои ҳалҳои хусусии:

$$y_1 = e^{\lambda_1\mu(x)},\ \ y_2 = \mu(x)e^{\lambda_1\mu(x)}, \dots,\ y_k = [\mu(x)]^{k-1}e^{\lambda_1\mu(x)},$$
$$y_{k+1} = e^{\lambda_{k+1}\mu(x)}, \dots,\quad y_n = e^{\lambda_n\mu(x)}$$

мебошад ва ҳалли умумии он намуди

$$\bar{y} = C_1^3 e^{\lambda_1\mu(x)} + \cdots + C_k^3[\mu(x)]^{k-1}e^{\lambda_k\mu(x)} + C_{k+1}^3 e^{\lambda_{k+1}\mu(x)} + \cdots + C_n^3 e^{\lambda_n\mu(x)} \qquad (3.2.12)$$

-ро мегирад, ки дар ин ҷо $C_1^3,\ C_2^3, \dots, C_k^3, C_{k+1}^3, \dots, C_n^3 -$ ададҳои доимии ихтиёрӣ мебошанд.

IV. Бигузор дар муодилаи (3.2.5) $n = 2k -$ адади ҷуфт бошад ва ҳамаи решаҳои ин муодила ададҳои комплексии ҳамроҳшуда бошанд, ки онҳоро чунин ишора менамоем:

$$\lambda_{1,2}=\alpha_1\pm i\beta_1,\ \ \lambda_{3,4}=\alpha_2\pm i\beta_2,\ \ \lambda_{2k-1,2k}=\alpha_k\pm i\beta_k.$$

Он гоҳ ҳалҳои хусусии муодилаи якҷинсаи (3.2.2) функсияҳои

$$y_1=e^{\alpha_1\mu(x)}\cos[\beta_1\mu(x)],\ \ y_2=e^{\alpha_1\mu(x)}\sin[\beta_1\mu(x)],$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_{2k-1}=e^{\alpha_k\mu(x)}\cos[\beta_k\mu(x)],\ \ y_{2k}=e^{\alpha_k\mu(x)}\sin[\beta_k\mu(x)]$$

ва ҳалли умумии он функсияи

$$\bar{y}=e^{\alpha_1\mu(x)}\left[C_1^4\cos[\beta_1\mu(x)]+C_2^4\sin[\beta_1\mu(x)]\right]+\cdots+$$
$$+e^{\alpha_k\mu(x)}\left[C_{2k-1}^4\cos[\beta_k\mu(x)]+C_{2k}^4\sin[\beta_k\mu(x)]\right], \qquad (3.2.13)$$

мешавад, ки дар ин ҷо $C_1^4, C_2^4, \dots, C_{2k}^4 -$ ададҳои доимии ихтиёрӣ мебошанд.

V. Бигузор решаи $\alpha_1\pm i\beta_1$-и муодилаи характеристикии (3.2.5) решаи комплексии k-карата бошад. Дар ин ҳолат ҳалҳои хусусии муодилаи якҷинсаи (3.2.2) функсияҳои

$$y_1=e^{\alpha_1\mu(x)}\cos[\beta_1\mu(x)],\ \ y_2=e^{\alpha_1\mu(x)}\sin[\beta_1\mu(x)],$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_{2k-1}=[\mu(x)]^{k-1}e^{\alpha_1\mu(x)}\cos[\beta_1\mu(x)],\ \ y_{2k}=[\mu(x)]^{k-1}e^{\alpha_1\mu(x)}\sin[\beta_1\mu(x)].$$
$$y_{2k+1}=e^{\lambda_{2k+1}\mu(x)},\dots,y_k=e^{\lambda_n\mu(x)}$$

ва ҳалли умумии он функсияи

$$\bar{y}=e^{\alpha_1\mu(x)}\left[C_1^5\cos[\beta_1\mu(x)]+C_2^5\sin[\beta_1\mu(x)]\right]+\cdots+$$
$$+e^{\alpha_1\mu(x)}[\mu(x)]^{k-1}\cdot\left[C_{2k-1}^5\cos[\beta_1\mu(x)]+C_{2k}^5\sin[\beta_1\mu(x)]\right]+$$
$$+e^{\lambda_{2k+1}\mu(x)}C_{2k+1}^5+\cdots+e^{\lambda_n\mu(x)}C_n^5, \qquad (3.2.14)$$

мешавад, ки дар ин ҷо $C_1^5, C_2^5, \dots, C_n^5 -$ ададҳои доимии ихтиёрӣ мебошанд. Дар ин маврид ҳалли умумии (3.2.14)-ро дар намуди зерин навиштан мумкин аст:

$$\bar{y} = e^{\alpha_1 \mu(x)} \cos[\beta_1 \mu(x)] \left[C_1^5 + C_3^5 \mu(x) + \cdots + C_{2k-1}^5 [\mu(x)]^{k-1} \right] +$$
$$+ e^{\alpha_1 \mu(x)} \sin[\beta_1 \mu(x)] \left[C_2^5 + C_4^5 \mu(x) + \cdots + C_{2k}^5 [\mu(x)]^{k-1} \right] +$$
$$+ e^{\lambda_{2k+1} \mu(x)} C_{2k+1}^5 + \cdots + e^{\lambda_n \mu(x)} C_n^5. \qquad (3.2.15)$$

3.3. Таҳқиқи муодилаи дифференсиалии моделии ғайриякҷинсаи таназулёбанда бо коэффисиентҳои тағйирёбанда

Дар ин зербоб дар Г муодилаи моделии ғайриякҷинсаи зеринро дида мебароем:

$$[\omega(x)]^n y^{(n)} + A_1(x)[\omega(x)]^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + A_{n-1}(x)\omega(x) y' + A_n(x) y = f(x), \qquad (3.3.1)$$

ки дар ин ҷо $f(x)$, $A_i(x)$ $(i = \overline{1,n}) -$ функсияҳои дар Г бефосила буда, коэффисиентҳои $A_i(x)$ $(i = \overline{1,n})$ аз баробариҳои (3.2.3) муайян карда мешаванд, $\omega(x) -$ метавонад дар ягон нуқтаи $x \in \Gamma$ ба сифр мубаддал гардад.

Ҳалли умумии $y(x)$-и муодилаи (3.3.1) ҳамчун суммаи ҳалли умумии $\bar{y}$-и муодиали якҷинсаи:

$$[\omega(x)]^n y^{(n)} + A_1(x)[\omega(x)]^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + A_{n-1}(x)\omega(x) y' + A_n(x) y = 0 \qquad (3.3.2)$$

ва ягон ҳалли хусусии $\tilde{y}(x)$-и муодилаи ғайриякҷинсаи (3.3.1), муайян карда мешавад.

Барои таҳқиқи муодилаи (3.3.1) ва (3.3.2) дар асоси теоремаи 3.2.1 бо ёрии ивази тағйирёбанда мувофиқи формулаи (3.1.7) ин муодилаҳоро ба муодилаҳои дифференсиалӣ бо коэффисиентҳои доимии зерин меорем:

$$z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} z' + a_n z = F(t). \tag{3.3.3}$$

$$z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} z' + a_n z = 0, \tag{3.3.4}$$

ки дар ин ҷо:

$$z(t) = z[\mu(x)] = y(x), \;\; F(t) = f\left(\mu^{-1}(t)\right) = f(x),$$
$$t_0 = \mu(a) < t < \mu(b) = T.$$

Ба муодилаи якҷинсаи (3.3.4) муодилаи характеристикии зерин мувофиқ меояд:

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0. \tag{3.3.5}$$

Ҳалли умумии $z(t)$-и муодилаи (3.3.3) ҳамчун суммаи ҳалли умумии $\bar{z}(t)$-и муодилаи якҷинсаи (3.3.4) ва ягон ҳалли хусусии $\tilde{z}(t)$-и муодилаи ғайриякҷинсаи (3.3.3) муайян карда мешавад.

Дар поён барои ёфтани $\tilde{z}$ аз методи Коши истифода мебарем, яъне ба сифати $\tilde{z}$ он ҳалли муодилаи (3.3.3)-ро мегирем, ки шартҳои ибтидоии сифрии зеринро қаноат намояд:

$$\tilde{z}(t_0) = \tilde{z}'(t_0) = \cdots = \tilde{z}^{(n-1)}(t_0) = 0. \tag{3.3.6}$$

Таърифи 3.3.1. *Ҳалли* $Z(t)$*-и муодилаи* (3.3.4)*, ки шартҳои ибтидоии зеринро қаноат менамояд*

$$Z(s) = Z'(s) = \cdots = Z^{(n-2)}(s) = 0, \qquad Z^{(n-1)}(s) = 1, \tag{3.3.7}$$

ки дар ин ҷо $t = s$ *нуқтаи додашудаи ихтиёрӣ аз интервали* (t_0, T) *мебошад, функсияи Кошии ин муодила номида мешавад.*

Функсияи Коши аз тағйирёбандаи новобастаи t ва аз параметри s вобаста мебошад. Онро ҳамчун $Z(t) = Z(t, s)$ ишора менамоем, ки дар ин ҷо функсияи $Z(t; s)$ дар соҳаи $t_0 < t, s < T$ муайян ва бефосила мебошад. Функсияи

$$Z(t - s) = Z(t - s, 0)$$

низ ҳалли муодилаи якҷинсаи (3.3.4) мебошад, ки ҳангоми $t = s$ шартҳои зеринро қаноат менамояд:

$$Z(0) = Z'(0) = \cdots = Z^{(n-2)}(0) = 0, \quad Z^{(n-1)}(0) = 1. \tag{3.3.8}$$

Леммаи 3.3.1. *Ҳалли* $\tilde{z}(t)$*-и муодилаи ғайриякҷинсаи* (3.3.3)*, ки шартҳои ибтидоии* (3.3.6)*-ро қаноат менамояд, аз рӯйи формулаи зерин муайян карда мешавад:*

$$\tilde{z}(t) = \int_{t_0}^{t} Z(t - s) F(s) ds. \tag{3.3.9}$$

Исбот. Формулаи (3.3.9)-ро пайдарпай дифференсиронида ва шартҳои (3.3.8)-ро ба назар гирифта, ҳосил мекунем:

$$\tilde{z}'(t) = \int_{t_0}^{t} Z'(t - s) F(s) ds + Z(0) F(t) = \int_{t_0}^{t} Z'(t - s) F(s) ds,$$

$$\tilde{z}''(t) = \int_{t_0}^{t} Z''(t-s)F(s)ds + Z'(0)F(t) = \int_{t_0}^{t} Z''(t-s)F(s)ds,$$

$$-----------------------------$$

$$\tilde{z}^{(n-1)}(t) = \int_{t_0}^{t} Z^{(n-1)}(t-s)F(s)ds + Z^{(n-2)}(0)F(t) = \int_{t_0}^{t} Z^{(n-1)}(t-s)F(s)ds,$$

$$\tilde{z}^{(n)}(t) = \int_{t_0}^{t} Z^{(n)}(t-s)F(s)ds + Z^{(n-1)}(0)F(t) = \int_{t_0}^{t} Z^{(n)}(t-s)F(s)ds +$$

$$+F(t).$$

Ин қиматҳоро ба муодилаи (3.3.3) гузошта, ҳосил мекунем:

$$\int_{t_0}^{t} \left[Z^{(n)}(t-s) + a_1 Z^{(n-1)}(t-s) + \cdots + a_n Z(t-s)\right] F(s)ds + F(t) = F(t).$$

Аз ин ҷо, азбаски $Z(t-s)$ ҳалли муодилаи якҷинсаи (3.3.4) мебошад, пас ифодаи даруни қавсҳои квадратӣ ба сифр баробар мешавад ва бинобар ин $F(t) \equiv F(t)$.

Бо осонӣ дида мешавад, ки $\tilde{z}(t)$, аз рӯйи формулаи (3.3.9), муайян карда мешавад ва шартҳои ибтидоии (3.3.6)-ро ҳангоми $t = t_0$ қаноат менамояд. Лемма исбот гардид.

Бигузор $\{z_i(t)\}$, $(i = \overline{1,n})-$ ягон системаи фундаменталии ҳалҳои муодилаи (3.3.4) бошад. Функсияи Коши $Z(t)$-и ин муодиларо аз ҳалли умумии

$$Z(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i z_i(t), \tag{3.3.10}$$

ҷудо намудан мумкин аст, агар ададҳои доимии ихтиёрии c_i чунон интихоб карда шаванд, ки шартҳои (3.3.7) иҷро гарданд. Дорем:

$$Z^{(k)}(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i z_i^{(k)}(t)\,, (k = \overline{1, n-1}).$$

Дар асоси шартҳои (3.3.7) ҳосил мекунем:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} c_i z_i^{(k)}(s) = 0, \quad (k = \overline{0, n-2}) \\ \sum_{i=1}^{n} c_i z_i^{(n-1)}(s) = 1, \end{cases}$$

ки дар ин ҷо $s -$ ягон нуқтаи додашуда аз интервали (t_0, T) мебошад.

Ин системаро бо қоидаи Крамер ҳал намуда, меёбем:

$$c_i = c_i(s) = \frac{W_{ni}(s)}{W(s)}\,, (i = \overline{1, n}),$$

ки дар ин ҷо $W(s) -$ *муайянкунандаи Вронский* мебошад:

$$W(s) = \begin{vmatrix} z_1(s) & z_2(s) & \cdots\cdots & z_n(s) \\ z_1'(s) & z_2'(s) & \cdots\cdots & z_n'(s) \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ z_1^{(n-1)}(s) & z_2^{(n-1)}(s) & \cdots\cdots & z_n^{(n-1)}(s) \end{vmatrix}$$

ва $W_{ni}\ (i = \overline{1, n}) -$ пуркунандаҳои алгебравии сатри охирони муайянкунандаи $W(s)$ мебошанд.

Қиматҳои $c_i\ (i = \overline{1, n})$-ро ба баробарии (3.3.10) гузошта, ҳосил мекунем:

$$Z(t) = Z(t,s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{W_{ni}(0)}{W(0)} z_i(t).$$

Аз леммаи 3.3.1 мебарояд, ки функсияи

$$\tilde{z}(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{W_{ni}(0)}{W(0)} \int_{t_0}^{t} z_i(t-s)F(s)ds$$

ҳалли хусусии муодилаи ғайриякҷинсаи (3.3.3) мебошад ва ҳалли умумии он бошад намуди зеринро дорад:

$$z(t) = \bar{z}(t) + \tilde{z}(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i z_i(t) + \sum_{i=1}^{n} \frac{W_{ni}(0)}{W(0)} \int_{t_0}^{t} z_i(t-s)F(s)ds, \quad (3.3.11)$$

ки дар ин ҷо c_i $(i = \overline{1,n})$ – ададҳои доимии ихтиёрӣ мебошанд.

Акнун, барои он ки ҳалли умумии $y(x)$-и муодилаи моделии (3.3.1)-ро ҳосил намоем, бояд дар (3.3.11) гузориши $t = \mu(x)$-ро амалӣ намоем. Он гоҳ $s = \mu(\tau)$, $x_0 < \tau < x$ ва $ds = \mu'(\tau)d\tau$, бинобар ин,

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i z_i[\mu(x)] + \sum_{i=1}^{n} \frac{W_{ni}(0)}{W(0)} \int_{x_0}^{x} z_i[\mu(x)-\mu(\tau)]\mu'(\tau)f(\tau)d\tau. \quad (3.3.12)$$

Ҳамин тавр, агар функсияи $\omega(x)$, коэффисиентҳо ва тарафи рости муодилаи моделии (3.3.1) чунин бошанд, ки интегралҳои тарафи рости баробарии (3.3.12) мавҷуд бошанд, пас ҳалли ин муодила дар намуди (3.3.12) ифода карда мешавад.

Вобаста аз решаҳои муодилаи характеристикии (3.3.5) формулаи (3.3.12) намуди мушаххасро мегирад. Ҳар як ҳолатро дар алоҳидагӣ дида мебароем.

I. Бигузор, «ҳамаи решаҳои муодилаи характеристикии (3.3.5) ҳақиқӣ ва гуногун бошанд. Дар ин ҳолат $\{z_i(t)\} = \{e^{\lambda_i t}\}$ $(i = \overline{1,n}) -$ системаи фундаменталии ҳалҳои муодилаи (3.3.4) мебошад»[9-М]. Барои ин системаи функсияҳо қиматҳои $W(0)$ ва $W_{ni}(0)$-ро меёбем:

$$W(0) = W(s)|_{s=0} = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 s} & e^{\lambda_2 s} & \cdots & e^{\lambda_n s} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 s} & \lambda_2 e^{\lambda_2 s} & \cdots & \lambda_n e^{\lambda_n s} \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 s} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 s} & \cdots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n s} \end{vmatrix}_{s=0} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{\substack{i>j \\ i\neq j}} (\lambda_i - \lambda_j),$$

$$W_{n1}(0) = W_{n1}(s)|_{s=0} = \begin{vmatrix} e^{\lambda_2 s} & e^{\lambda_3 s} & \cdots & e^{\lambda_n s} \\ \lambda_2 e^{\lambda_2 s} & \lambda_3 e^{\lambda_3 s} & \cdots & \lambda_n e^{\lambda_n s} \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \lambda_2^{n-2} e^{\lambda_1 s} & \lambda_3^{n-2} e^{\lambda_2 s} & \cdots & \lambda_n^{n-2} e^{\lambda_n s} \end{vmatrix}_{s=0} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_2 & \lambda_3 & \cdots & \lambda_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_2^{n-2} & \lambda_3^{n-2} & \cdots & \lambda_n^{n-2} \end{vmatrix} = \prod_{\substack{i>j \\ i\neq j \\ ij\neq 1.}} (\lambda_i - \lambda_j),$$

…………………………………………………………………………

$$W_{nn}(0) = W_{nn}(s)|_{s=0} = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 s} & e^{\lambda_2 s} & \cdots\cdots & e^{\lambda_{n-1} s} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 s} & \lambda_2 e^{\lambda_2 s} & \cdots\cdots & \lambda_{n-1} e^{\lambda_{n-1} s} \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_1^{n-2} e^{\lambda_1 s} & \lambda_2^{n-2} e^{\lambda_2 s} & \cdots\cdots & \lambda_{n-1}^{n-2} e^{\lambda_{n-1} s} \end{vmatrix}_{s=0} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1^{n-2} & \lambda_2^{n-2} & \cdots & \lambda_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix} = \prod_{\substack{i>j \\ i\neq j \\ ij\neq n.}} (\lambda_i - \lambda_j). \qquad (3.3.13)$$

Он гоҳ ҳалли умумии муодилаи ғайриякҷинсаи (3.3.1) чунин намуд мегирад:

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i^1 e^{\lambda_i \mu(x)} + \sum_{i=1}^{n} \frac{W_{ni}(0)}{W(0)} \int_{x_0}^{x} e^{\lambda_i(\mu(x)-\mu(t))} f(t) \frac{dt}{\omega(t)}. \qquad (3.3.14)$$

Теоремаи $\mathbf{3.3.1}$. *Бигузор, дар муодилаи* $(3.3.1)$ *коэффисиентҳои* $A_i(x)$ $(i = \overline{1,n})$ *аз баробариҳои* (3.2.3) *муайян карда мешаванд. «Ҳамаи решаҳои муодилаи характеристикии* $(3.3.5)$ *ҳақиқӣ ва гуногун буда, функсияҳои* $\omega(x)$, $f(x) \in C(\overline{\Gamma})$ *бошанд. Он гоҳ ҳалли умумии муодилаи моделии ғайриякҷинсаи* $(3.3.1)$ *аз рӯйи формулаи* $(3.3.14)$ *дода мешавад»[9-М].*

Агар функсияи $\omega(x)$ дар ягон нуқтаи интервали Г ба сифр баробар гардад, пас интеграл дар тарафи рости баробарии (3.3.14) метавонад дуршаванда бошад. Дар ҳақиқат, умумиятро маҳдуд накарда, фарз менамоем, ки функсияи $\omega(x)$ дар нуқтаи $x = 0$ дорои сифри дараҷаи $\alpha > 1$ мебошад, яъне $\omega(x) = x^\alpha$. Дар ин ҳолат ба сифати ҳудуди поёнии интегронӣ дар (3.3.14) нуқтаи $x_0 = 0$-ро қабул менамоем.

Он гоҳ ҳалли умумии муодилаи моделии

$$[x^\alpha]^n y^{(n)} + A_1(x)[x^\alpha]^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + A_{n-1}(x) x^\alpha y' + A_n(x) y = \\ = f(x) \quad (3.3.15)$$

бо ёрии формулаи зерин ифода карда мешавад:

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i^1 e^{\lambda_i \mu(x)} + \sum_{i=1}^{n} \frac{W_{ni}(0)}{W(0)} \int_{0}^{x} e^{\lambda_i(\mu(x)-\mu(t))} f(t) \frac{dt}{t^\alpha}, \qquad (3.3.16)$$

ки дар ин ҷо $\mu(x) = -\frac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}}$. Дар ҳолати $\max\limits_{1\le i\le n} \lambda_i = \lambda_n > 0$ будан, барои наздикшавандагии интегралҳо дар тарафи рости $(3.3.16)$ талаб менамоем, ки функсияи $f(x)$ дар нуқтаи $x = 0$ аз рӯйи формулаи ассимптотикии зерин ба сифр майл менамояд:

$$f(x) = \mathrm{o}\left[e^{\delta_1 \mu(x)}\right],\ \delta_1 > \lambda_n,\ \text{ҳангоми } x \to 0. \tag{3.3.17}$$

Теоремаи $\mathbf{3.3.2}$. *Бигузор, дар муодилаи* $(3.3.15)$ *коэффисиентҳои* $A_i(x)$ $(i = \overline{1,n})$ *аз баробариҳои* $(3.2.3)$ *муайян карда шаванд. «Бигузор, ҳамаи решаҳои муодилаи характеристикии* $(3.3.5)$ *ҳақиқӣ ва гуногун бошанд. Функсияи* $f(x) \in C(\overline{\Gamma})$ *ва дар ҳолати* $\max\limits_{1\le i\le n} \lambda_i = \lambda_n > 0$ *будан дар нуқтаи* $x = 0$ *аз рӯйи формулаи ассимптотикии* $(3.3.17)$ *ба сифр майл намояд. Он гоҳ ҳалли умумии муодилаи моделии ғайриякҷинсаи* $(3.3.15)$ *бо ёрии формулаи* $(3.3.16)$ *ифода мегардад»[9-М].*

II. Бигузор ҳамаи решаҳои муодилаи характеристикии $(3.3.5)$ ҳақиқӣ ва якхела бошанд

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = \lambda.$$

Дар ин ҳолат системаи фундаменталии ҳалҳои муодилаи $(3.3.4)$ системаи функсияҳои зерин мебошад:

$$\{z_i(t)\} = \left\{t^{i-1}e^{\lambda t}\right\},\ \ (i = \overline{1,n}).$$

Барои ин системаи функсияҳо $W(0)$ ва $W_{ni}(0)$-ро меёбем:

$$W(0) = W(s)|_{s=0} = \left| \begin{matrix} e^{\lambda s} & se^{\lambda s} & \cdots\cdots \\ \lambda e^{\lambda s} & e^{\lambda s} + \lambda s e^{\lambda s} & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \lambda^{n-1}e^{\lambda s} & (n-1)\lambda^{n-2}e^{\lambda s} + \lambda^{n-1}se^{\lambda s} & \cdots\cdots \end{matrix} \right.$$

$$\left.\begin{matrix} s^{n-1}e^{\lambda s} \\ (n-1)s^{n-2}e^{\lambda s}+\lambda s^{n-1}e^{\lambda s} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (n-1)!\,e^{\lambda s}+s\psi\left(x,e^{\lambda s}\right) \end{matrix}\right|_{s=0} =$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \lambda & 1! & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \lambda^2 & 2\lambda & 2! & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \lambda^{n-1} & (n-1)\lambda^{n-2} & (n-1)(n-2)\lambda^{n-3} & \cdots & \cdots & (n-1)! \end{vmatrix}=$$

$$=1!\cdot 2!\cdot\ldots\cdot(n-1)!,$$

$$W_{n1}(0)=W_{n1}(s)|_{s=0}=(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1! & 0 & \cdots & 0 \\ 2\lambda & 2! & \cdots & 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ (n-1)\lambda^{n-2} & (n-1)(n-2)\lambda^{n-3} & \cdots & 0 \end{vmatrix}=0,$$

$$W_{n2}(0)=W_{n2}(s)|_{s=0}=(-1)^{n+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda^2 & 2! & \cdots & 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda^{n-2} & (n-2)\lambda^{n-3} & \cdots & 0 \end{vmatrix}=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$W_{nn}(0)=W_{nn}(s)|_{s=0}=(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda & 1! & \cdots & 0 \\ \lambda^2 & 2\lambda & \cdots & 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda^{n-2} & (n-2)\lambda^{n-3} & \cdots & (n-2)! \end{vmatrix}=$$

$$=1!\cdot 2!\cdot\ldots\cdot(n-2)!.$$

Ҳамин тавр, ҳалли муодилаи ғайриякҷинсаи (3.3.3)-ро дар намуди зерин меёбем:

$$z(t)=\sum_{i=1}^{n}c_i^2t^{i-1}e^{\lambda t}+\frac{1}{(n-1)!}\int_{t_0}^{t}(t-s)^{n-1}e^{\lambda(t-s)}F(s)ds$$

ва мувофиқан ҳалли умумии муодилаи ғайриякҷинсаи (3.3.1) чунин намуд мегирад:

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 [\mu(x)]^{i-1} e^{\lambda\mu(x)} +$$

$$+\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} [\mu(x)-\mu(t)]^{n-1} e^{\lambda(\mu(x)-\mu(t))} f(t)\frac{dt}{\omega(t)}. \qquad (3.3.18)$$

Ҳамин тавр, исбот карда шуд.

Теоремаи 3.3.3. «*Бигузор дар муодилаи* (3.3.1) *коэффисиентҳои* $A_i(x)$ $(i = \overline{1,n})$ *аз баробариҳои* (3.2.3) *муайян карда шаванд. Бигузор ҳамаи решаҳои муодилаи характеристикии* (3.3.5) *ҳақиқӣ ва якхела бошанд. Функсияи* $\omega(x)$, $f(x) \in C(\bar{\Gamma})$. *Он гоҳ ҳалли умумии муодилаи моделии ғайриякҷинсаи* (3.3.1) *ба воситаи формулаи* (3.3.18) *дода мешавад»[9-М]*.

Дар ҳолати $\omega(x) = x^\alpha$ будан, ҳалли умумии муодилаи ғайриякҷинсаи (3.3.15) чунин намуд мегирад:

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 [\mu(x)]^{i-1} e^{\lambda\mu(x)} +$$

$$+\frac{1}{(n-1)!}\int_{0}^{x} [\mu(x)-\mu(t)]^{n-1} e^{\lambda(\mu(x)-\mu(t))} f(t)\frac{dt}{t^\alpha}. \qquad (3.3.19)$$

Дар ин ҷо ҳангоми $\lambda > 0$ будан, барои наздикшавандагии интегралҳои тарафи рости (3.3.19) аз функсияи $f(x)$ талаб менамоем, ки дар нуқтаи $x = 0$ аз рӯйи формулаи ассимптотикии зерин ба сифр майл намояд:

$$f(x) = \mathrm{o}\left[e^{\delta_2\mu(x)}\right],\ \ \delta_2 > \lambda,\ \ \text{ҳангоми}\ \ x \to 0. \qquad (3.3.20)$$

Теоремаи 3.3.4. *Бигузор, дар муодилаи* $(3.3.15)$ *коэффисиентҳои* $A_i(x)$ $(i=\overline{1,n})$ *аз баробариҳои* $(3.2.3)$ *муайян карда шаванд. Бигузор, «ҳамаи решаҳои муодилаи характеристикии* $(3.3.5)$ *ҳақиқӣ ва якхела бошанд. Функсияи* $f(x)\in C(\bar{\Gamma})$ *ва дар ҳолати* $\lambda>0$ *будан дар нуқтаи* $x=0$ *аз рӯйи формулаи ассимптотикии* $(3.3.20)$ *ба сифр майл намояд»[9-М]. Он гоҳ ҳалли умумии муодилаи моделии ғайриякҷинсаи* $(3.3.15)$ *бо ёрии формулаи* $(3.3.19)$ *ифода мегардад.*

III. Бигузор λ_1 решаи $k-$ каратаи муодилаи характеристикии $(3.3.5)$ бошад ва решаҳои боқимонда $\lambda_{k+1},\lambda_{k+2},\dots,\lambda_n-$ ҳақиқӣ ва гуногун бошанд. Дар ин ҳолат системаи фундаменталии ҳалҳои муодилаи $(3.3.4)$ системаи функсияҳои зерин мебошад:

$$\{z_i(t)\}=\left\{t^{i-1}e^{\lambda_1 t}\right\},\left(i=\overline{1,k}\right) \text{ ва } \left\{z_j(t)\right\}=\left\{e^{\lambda_j t}\right\},\left(j=\overline{k+1,n}\right).$$

Қиматҳои $W(0)$ ва $W_{ni}(0)$ чунин муайян карда мешаванд:

$$W(0)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots\cdots & 1 \\ \lambda_1 & 1! & \cdots & 0 & \lambda_{k+1} & \cdots\cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & 2\lambda_1 & \cdots & 0 & \lambda_{k+1}^2 & \cdots\cdots & \lambda_n^2 \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \lambda_1^k & k\lambda_1^{k-1} & \cdots & k! & \lambda_{k+1}^k & \cdots\cdots & \lambda_n^k \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \lambda_1^{n-1} & (n-1)\lambda_1^{n-2} & \cdots & (n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k)\lambda_1^{n-k-1} & \lambda_{k+1}^{n-1} & \cdots\cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

$$W_{n1}(0) = (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots\cdots & 1 \\ 1! & \cdots & 0 & \lambda_{k+1} & \cdots\cdots & \lambda_n \\ 2\lambda_1 & \cdots & 0 & \lambda_{k+1}^2 & \cdots\cdots & \lambda_n^2 \\ \dots\dots\dots\dots & \cdots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots & & \dots\dots \\ k\lambda_1^{k-1} & \cdots & k! & \lambda_{k+1}^k & \cdots\cdots & \lambda_n^k \\ \dots\dots\dots\dots & \cdots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots & & \dots\dots \\ (n-2)\lambda_1^{n-3} & \cdots & (n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k-1)\lambda_1^{n-k-2} & \lambda_{k+1}^{n-2} & \cdots\cdots & \lambda_n^{n-2} \end{vmatrix},$$

…………………………………………………………………………………………

$$W_{nn}(0) = (-1)^{n+n} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots\cdots & 1 \\ \lambda_1 & 1! & \cdots & 0 & \lambda_{k+1} & \cdots\cdots & \lambda_{n-1} \\ \lambda_1^2 & 2\lambda_1 & \cdots & 0 & \lambda_{k+1}^2 & \cdots\cdots & \lambda_{n-1}^2 \\ \cdots & \dots\dots\dots\dots & \cdots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots & & \dots\dots \\ \lambda_1^k & k\lambda_1^{k-1} & \cdots & k! & \lambda_{k+1}^k & \cdots\cdots & \lambda_{n-1}^k \\ \cdots & \dots\dots\dots\dots & \cdots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots & & \dots\dots \\ \lambda_1^{n-2} & (n-2)\lambda_1^{n-3} & \cdots & (n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k-1)\lambda_1^{n-k-2} & \lambda_{k+1}^{n-2} & \cdots\cdots & \lambda_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Акнун, ҳалли умумии муодилаи ғайриякҷинсаи (3.3.3)-ро дар чунин намуд меёбем:

$$z(t) = \sum_{i=1}^{k} c_i^3 t^{i-1} e^{\lambda_1 t} + \sum_{j=k+1}^{n} c_j^3 e^{\lambda_j t} +$$

$$+\sum_{i=1}^{k}\frac{W_{ni}(0)}{W(0)}\int_{t_0}^{t}(t-s)^{i-1}\,e^{\lambda_1(t-s)}F(s)ds+\sum_{j=k+1}^{n}\frac{W_{nj}(0)}{W(0)}\int_{t_0}^{t}e^{\lambda_j(t-s)}\,F(s)ds.$$

Аз ин ҷо ҳалли умумии муодилаи (3.3.1) намуди зеринро мегирад:

$$y(x)=\sum_{i=1}^{k}c_i^3[\mu(x)]^{i-1}e^{\lambda_1\mu(x)}+\sum_{j=k+1}^{n}c_j^3e^{\lambda_j\mu(x)}+$$
$$+\sum_{i=1}^{k}\frac{W_{ni}(0)}{W(0)}\int_{x_0}^{x}(\mu(x)-\mu(t))^{i-1}\,e^{\lambda_1(\mu(x)-\mu(t))}f(t)\frac{dt}{\omega(t)}+$$
$$+\sum_{j=k+1}^{n}\frac{W_{nj}(0)}{W(0)}\int_{x_0}^{x}e^{\lambda_j(\mu(x)-\mu(t))}\,f(t)\frac{dt}{\omega(t)}. \qquad (3.3.21)$$

Ҳамин тавр, исбот карда шуд.

Теоремаи $\mathbf{3.3.5}$. *Бигузор, дар муодилаи* (3.3.1) *коэффисиентҳои* $A_i(x)$ $(i=\overline{1,n})$ *аз баробариҳои* (3.2.3) *муайян карда шаванд. Бигузор,* λ_1 *решаи* $k-$ *каратаи муодилаи характеристикии* (3.3.5) *буда, решаҳои боқимонда* $\lambda_{k+1},\lambda_{k+2},\dots,\lambda_n-$ *ҳақиқӣ ва гуногун бошанд. Функсияи* $f(x)\in C(\bar{\Gamma})$ *ва* $\omega(x)$ *дар ягон нуқтаи интервали Г ба сифр мубаддал намегардад. Он гоҳ ҳалли умумии муодилаи моделии ғайриякҷинсаи* (3.3.1) *ба воситаи формулаи* (3.3.21) *ифода карда мешавад.*

Агар $\omega(x)=x^\alpha$ бошад, пас ҳалли умумии муодилаи ғайриякҷинсаи (3.3.15) ба воситаи формулаи зерин ифода мешавад:

$$y(x)=\sum_{i=1}^{k}c_i^3[\mu(x)]^{i-1}e^{\lambda_1\mu(x)}+\sum_{j=k+1}^{n}c_j^3e^{\lambda_j\mu(x)}+$$
$$+\sum_{i=1}^{k}\frac{W_{ni}(0)}{W(0)}\int_{0}^{x}(\mu(x)-\mu(t))^{i-1}\,e^{\lambda_1(\mu(x)-\mu(t))}f(t)\frac{dt}{t^\alpha}+$$

$$+\sum_{j=k+1}^{n}\frac{W_{nj}(0)}{W(0)}\int_{0}^{x}e^{\lambda_j(\mu(x)-\mu(t))}f(t)\frac{dt}{t^{\alpha}}. \qquad (3.3.22)$$

Умумиятро маҳдуд накарда, фарз менамоем, ки решаҳои муодилаи характеристики $(3.3.5)$ аз рӯйи нобаробарии зерин рақамгузорӣ шудаанд:

$$\lambda_1<\lambda_{k+1}<\lambda_{k+2}<\cdots<\lambda_n.$$

Он гоҳ дар ҳолати $\lambda_n>0$ барои наздикшавандагии интегралҳо дар тарафи рости $(3.3.22)$ талаб менамоем, ки функсияи $f(x)$ дар нуқтаи $x=0$ ба сифр мубаддал гашта, рафтораш аз рӯйи баробарии зерин муайян карда мешавад:

$$f(x)=\mathrm{o}\left[e^{\delta_3\mu(x)}\right],\delta_3>\lambda_n, \text{ҳангоми } x\to 0. \qquad (3.3.23)$$

Теоремаи 3.3.6. *Бигузор, ҳамаи шартҳои теоремаи* 3.3.4 *иҷро шавад ва* $\omega(x)=x^{\alpha}$. *Ғайр аз ин, функсияи* $f(x)\in C(\bar{\Gamma})$ *ва дар ҳолати* $\lambda_n>0$ *дар нуқтаи* $x=0$ *аз рӯйи формулаи ассимптотикии* $(3.3.24)$ *ба сифр мубаддал гардад. Он гоҳ ҳалли умумии муодилаи моделии ғайриякҷинсаи* $(3.3.15)$ *ба воситаи формулаи* $(3.3.22)$ *дода мешавад.*

IV. Бигузор, дар муодилаи $(3.3.5)$ $n=2k-$ адади ҷуфт бошад ва ҳамаи решаҳои ин муодилаададҳои комплексӣ ҳамроҳшуда буда, чунин ишора карда шудаанд:

$$\lambda_{1,2}=\alpha_1\pm i\beta_1,\ \ \lambda_{3,4}=\alpha_2\pm i\beta_2,\ldots,\lambda_{2k-1,2k}=\alpha_k\pm i\beta_k.$$

Он гоҳ системаи функсияҳои

$$z_1(t)=e^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t,\qquad z_2(t)=e^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t,\ldots,$$

$$z_{2k-1}(t) = e^{\alpha_k t}\cos\beta_k t, \qquad z_{2k}(t) = e^{\alpha_k t}\sin\beta_k t$$

системаи фундаменталии ҳалҳои муодилаи (3.3.4)-ро ташкил медиҳад.

Ҳосилаи функсияҳои $z_i(t), \left(i = \overline{1,2k}\right)$-ро ҳисоб менамоем. Аз $\bar{z}_i(t) = e^{\lambda_i t}$, ки дар ин ҷо $\lambda_i = \alpha_i \pm i\beta_i$ аст, ҳосил мекунем:

$$\overline{z}_i^{(k)}(t) = \lambda_i^k e^{\lambda_i t} = (\alpha_i \pm i\beta_i)^k e^{\alpha_i t}(\cos\beta_i t \pm i\sin\beta_i t) =$$
$$= e^{\alpha_i t}\left(\alpha_i^{(k)} \pm i\beta_i^{(k)}\right)(\cos\beta_i t \pm i\sin\beta_i t) = e^{\alpha_i t}\left[\left(\alpha_i^{(k)}\cos\beta_i t - \beta_i^{(k)}\sin\beta_i t\right) \pm\right.$$
$$\left.\pm i\left(\alpha_i^{(k)}\sin\beta_i t + \beta_i^{(k)}\cos\beta_i t\right)\right],$$

ки дар ин ҷо $\alpha_i^{(k)} = \mathrm{Re}\lambda_i^k, \quad \beta_i^{(k)} = \mathrm{Im}\lambda_i^k.$

Аз тарафи дигар

$$\bar{z}_i(t) = e^{\alpha_i t}(\cos\beta_i t \pm i\sin\beta_i t) = e^{\alpha_i t}\cos\beta_i t \pm ie^{\alpha_i t}\sin\beta_i t = z_i(t) \pm iz_{i+1}(t),$$

пас

$$\overline{z}_i^{(k)}(t) = z_i^{(k)}(t) \pm iz_{i+1}^{(k)}(t)$$

ва бинобар ин

$$z_i^{(k)}(t) = e^{\alpha_i t}\left(\alpha_i^{(k)}\cos\beta_i t - \beta_i^{(k)}\sin\beta_i t\right),$$
$$z_{i+1}^{(k)}(t) = e^{\alpha_i t}\left(\alpha_i^{(k)}\sin\beta_i t + \beta_i^{(k)}\cos\beta_i t\right), \left(i = \overline{1,2k}\right).$$

Барои муайянкунандаи $W(0)$ дорем:

$$W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots\cdots & 1 & 0 \\ \alpha_1^{(1)} & \beta_1^{(1)} & \cdots\cdots & \alpha_k^{(1)} & \beta_k^{(1)} \\ \alpha_1^{(2)} & \beta_1^{(2)} & \cdots\cdots & \alpha_k^{(2)} & \beta_k^{(2)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_1^{(2k-1)} & \beta_1^{(2k-1)} & \cdots\cdots & \alpha_k^{(2k-1)} & \beta_k^{(2k-1)} \end{vmatrix}.$$

Айнан, ҳамин тавр барои $W_{2k\,i}(0),\ \left(i=\overline{1,2k}\right)$ дорем:

$$W_{2k\,1}(0)=(-1)^{2k-1+1}\begin{vmatrix} 0 & \cdots\cdots & 1 & 0 \\ \beta_1^{(1)} & \cdots\cdots & \alpha_k^{(1)} & \beta_k^{(1)} \\ \beta_1^{(2)} & \cdots\cdots & \alpha_k^{(2)} & \beta_k^{(2)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_1^{(2k-2)} & \cdots\cdots & \alpha_k^{(2k-2)} & \beta_k^{(2k-2)} \end{vmatrix},$$

$$- -$$

$$W_{2k\,2k}(0)=(-1)^{2k+2k}\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ \alpha_1^{(1)} & \beta_1^{(1)} & \cdots\cdots & \alpha_k^{(1)} \\ \alpha_1^{(2)} & \beta_1^{(2)} & \cdots\cdots & \alpha_k^{(2)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_1^{(2k-2)} & \beta_1^{(2k-2)} & \cdots\cdots & \alpha_k^{(2k-2)} \end{vmatrix}.$$

Аз ин бармеояд, ки дар ин ҳолат ҳалли муодилаи ғайриякҷинсаи (3.3.3) чунин мебошад:

$$z(t)=\sum_{i=1}^{k}[c_{2i-1}^{4}\cos\beta_i t+c_{2i}^{4}\sin\beta_i t]+$$

$$+\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{W(0)}\int_{t_0}^{t}e^{\alpha_i(t-s)}[W_{2i-1}(0)\cos\beta_i(t-s)+W_{2i}(0)\sin\beta_i(t-s)]\,F(s)ds$$

ва аз ин ҷо ҳалли умумии муодилаи ғайриякҷинсаи (3.3.1) чунин намуд мегирад:

$$y(x)=\sum_{i=1}^{k}e^{\alpha_i\mu(x)}\,[c_{2i-1}^{4}\cos\beta_i\mu(x)+c_{2i}^{4}\sin\beta_i\mu(x)]+$$

$$+\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{W(0)}\int_{x_0}^{x}e^{\alpha_i(\mu(x)-\mu(t))}\,[W_{2i-1}(0)\cos\beta_i(\mu(x)-\mu(t))+$$

$$+W_{2i}(0)\sin\beta_i\big(\mu(x)-\mu(t)\big)]f(t)\frac{dt}{\omega(t)}. \qquad (3.3.24)$$

Ҳамин тавр, исбот карда шуд.

Теоремаи 3.3.7. *Бигузор, дар муодилаи* (3.3.1) *коэффисиентҳои* $A_i(x)$ $(i = \overline{1,n})$ *аз рӯйи баробариҳои* (3.2.3) *муайян карда шаванд. Ғайр аз ин, бигузор* $n = 2k-$ *адади ҷуфт бошад ва ҳамаи решаҳои муодилаи характеристикии* (3.3.5) *ададҳои комплексии ҳамроҳшуда бошанд. Функсияи* $f(x) \in C(\overline{\Gamma})$ *ва* $\omega(x)$ *дар ягон нуқтаи интервали Γ ба сифр мубаддал нагардад. Он гоҳ ҳалли умумии муодилаи моделии ғайриякҷинсаи* (3.3.1) *ба воситаи формулаи* (3.3.24) *ифода карда мешавад.*

Дар ҳолати $\omega(x) = x^{\alpha}$ аз (3.3.24) ҳалли умумии муодилаи ғайриякҷинсаи (3.3.15)-ро дар чунин намуд меёбем:

$$y(x) = \sum_{i=1}^{k} e^{\alpha_i \mu(x)}\left[c_{2i-1}^{4}\cos\beta_i\mu(x) + c_{2i}^{4}\sin\beta_i\mu(x)\right] +$$

$$+\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{W(0)}\int_{0}^{x} e^{\alpha_i(\mu(x)-\mu(t))}\left[W_{2i-1}(0)\cos\beta_i(\mu(x)-\mu(t)) +\right.$$

$$\left. +W_{2i}(0)\sin\beta_i\big(\mu(x)-\mu(t)\big)\right]f(t)\frac{dt}{t^{\alpha}}. \qquad (3.3.25)$$

Бигузор, қисмҳои ҳақиқии решаҳои муодилаи характеристикии (3.3.5) нобаробарии

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_k$$

-ро қаноат намоянд.

Он гоҳ, агар шарти $\alpha_k > 0$ иҷро гардад, пас барои наздикшавандагии интегралҳои тарафи рости (3.3.25) аз функсияи $f(x)$ талаб менамоем, ки дар нуқтаи $x = 0$ аз рӯйи формулаи ассимптотикии зерин ба сифр майл намояд:

$$f(x) = \mathrm{o}\left[e^{\delta_4 \mu(x)}\right], \delta_2 > \alpha_k, \text{ҳангоми } x \to 0. \qquad (3.3.26)$$

Теоремаи 3.3.8. *Бигузор ҳамаи шартҳои теоремаи* 3.3.6 *иҷро гардад ва* $\omega(x) = x^{\alpha}$. *Бигузор* $f(x) \in C(\bar{\Gamma})$ *ва дар ҳолати* $\alpha_k > 0$ *будан, дар нуқтаи* $x = 0$ *аз рӯйи формулаи ассимптотикии* (3.3.26) *ба сифр майл намояд. Он гоҳ ҳалли умумии муодилаи ғайриякҷинсаи* (3.3.15) *ба воситаи формулаи* (3.3.25) *ифода карда мешавад.*

V. Бигузор, решаи $\alpha_1 \pm i\beta_1$ муодилаи характеристикии (3.3.5) решаи комплексии ҳамроҳшудаи каратнокиаш k ва решаҳои боқимонда ҳақиқӣ ва гуногун бошанд.

Дар ин ҳолат системаи функсияҳои:

$$z_1(t) = e^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t, \quad z_2(t) = e^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t,$$
$$z_3(t) = te^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t, \qquad z_4(t) = te^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t,$$
$$z_{2k-1}(t) = t^{k-1}e^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t, \; z_{2k}(t) = t^{k-1}e^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t,$$
$$z_{2k+1}(t) = e^{\lambda_{2k+1} t}, \dots\dots, z_n(t) = e^{\lambda_n t},$$

системаи фундаменталии ҳалҳои муодилаи (3.3.4)-ро ташкил медиҳанд.

Қиматҳои муайянкунандаҳои $W(0)$ ва $W_{ni}(0)$-ро меёбем:

$$W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots\cdots \\ \alpha_1^{(1)} & \beta_1^{(1)} & \left(\alpha_1^{(1)}\right)'_\alpha & \left(\beta_1^{(1)}\right)'_\alpha & \cdots\cdots\cdots \\ \alpha_1^{(2)} & \beta_1^{(2)} & \left(\alpha_1^{(2)}\right)'_\alpha & \left(\beta_1^{(2)}\right)'_\alpha & \cdots\cdots\cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_1^{(n-1)} & \beta_1^{(n-1)} & \left(\alpha_1^{(n-1)}\right)'_\alpha & \left(\beta_1^{(n-1)}\right)'_\alpha & \cdots\cdots\cdots \end{vmatrix}$$

$$
\left.\begin{array}{cccccc}
0 & 0 & \cdots\cdots & 1 & \cdots\cdots & 1 \\
\left(\alpha_1^{(1)}\right)_\alpha^{(k-1)} & \left(\beta_1^{(1)}\right)_\alpha^{(k-1)} & \cdots\cdots & \lambda_{2k+1} & \cdots\cdots & \lambda_n \\
\left(\alpha_1^{(2)}\right)_\alpha^{(k-1)} & \left(\beta_1^{(2)}\right)_\alpha^{(k-1)} & \cdots\cdots & \lambda_{2k+1}^2 & \cdots\cdots & \lambda_n^2 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\left(\alpha_1^{(n-1)}\right)_\alpha^{(k-1)} & \left(\beta_1^{(n-1)}\right)_\alpha^{(k-1)} & \cdots\cdots & \lambda_{2k+1}^{n-1} & \cdots\cdots & \lambda_n^{n-1}
\end{array}\right|,
$$

$$
W_{n1}(0) = (-1)^{n+1} \left|\begin{array}{cccccc}
0 & \cdots\cdots & 0 & 0 & \cdots\cdots \\
\beta_1^{(1)} & \cdots\cdots & \left(\alpha_1^{(1)}\right)_\alpha^{(k-1)} & \left(\beta_1^{(1)}\right)_\alpha^{(k-1)} & \cdots\cdots \\
\beta_1^{(2)} & \cdots\cdots & \left(\alpha_1^{(2)}\right)_\alpha^{(k-1)} & \left(\beta_1^{(2)}\right)_\alpha^{(k-1)} & \cdots\cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\beta_1^{(n-2)} & \cdots\cdots & \left(\alpha_1^{(n-2)}\right)_\alpha^{(k-1)} & \left(\beta_1^{(n-2)}\right)_\alpha^{(k-1)} & \cdots\cdots
\end{array}\right.
$$

$$
\left.\begin{array}{ccc}
1 & \cdots\cdots & 1 \\
\lambda_{2k+1} & \cdots\cdots & \lambda_n \\
\lambda_{2k+1}^2 & \cdots\cdots & \lambda_n^2 \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
\lambda_{2k+1}^{n-1} & \cdots\cdots & \lambda_n^{n-1}
\end{array}\right|
$$

— —

$$
W_{nn}(0) = (-1)^{2n} \left|\begin{array}{ccccc}
1 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 \\
\alpha_1^{(1)} & \beta_1^{(1)} & \cdots\cdots & \left(\alpha_1^{(1)}\right)_\alpha^{(k-1)} & \left(\beta_1^{(1)}\right)_\alpha^{(k-1)} \\
\alpha_1^{(2)} & \beta_1^{(2)} & \cdots\cdots & \left(\alpha_1^{(2)}\right)_\alpha^{(k-1)} & \left(\beta_1^{(2)}\right)_\alpha^{(k-1)} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\alpha_1^{(n-2)} & \beta_1^{(n-2)} & \cdots\cdots & \left(\alpha_1^{(n-2)}\right)_\alpha^{(k-1)} & \left(\beta_1^{(n-2)}\right)_\alpha^{(k-1)}
\end{array}\right.
$$

$$
\left.\begin{array}{ccc}
1 & \cdots\cdots & 1 \\
\lambda_{2k+1} & \cdots\cdots & \lambda_{n-1} \\
\lambda_{2k+1}^2 & \cdots\cdots & \lambda_{n-1}^2 \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
\lambda_{2k+1}^{n-2} & \cdots\cdots & \lambda_{n-1}^{n-2}
\end{array}\right|,
$$

ки дар ин ҷо $\alpha_i^{(k)} = \mathrm{Re}\lambda_i^k,\ \beta_i^{(k)} = \mathrm{Im}\lambda_i^k$.

Ҳамин тавр, дар асоси формулаи (3.3.11) ҳалли умумии муодилаи ғайриякҷинсаи (3.3.3)-ро дар намуди зерин ҳосил мекунем:

$$z(t)=\sum_{i=1}^{k}t^{i-1}e^{\alpha_1 t}\left[c_{2i-1}^{5}\cos\beta_1 t+c_{2i}^{5}\sin\beta_1 t\right]+\sum_{j=2k+1}^{n}c_j e^{\lambda_j t}+$$

$$+\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{W(0)}\int_{t_0}^{t}(t-s)^{i-1}e^{\alpha_1(t-s)}[W_{n2i-1}(0)\cos\beta_1(t-s)+$$

$$+W_{n2i}(0)\sin\beta_1(t-s)]F(s)ds+\sum_{j=2k+1}^{n}\frac{W_{nj}(0)}{W(0)}\int_{t_0}^{t}e^{\alpha_j(t-s)}F(s)ds.$$

Аз ин ҷо, ҳалли умумии муодилаи ғайриякҷинсаи (3.3.1) чунин намуд мегирад:

$$y(x)=\sum_{i=1}^{k}[\mu(x)]^{i-1}e^{\alpha_1\mu(x)}\left[c_{2i-1}^{5}\cos[\beta_1\mu(x)]+c_{2i}^{5}\sin[\beta_1\mu(x)]\right]+$$

$$+\sum_{j=2k+1}^{n}c_j e^{\alpha_j\mu(x)}+\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{W(0)}\int_{x_0}^{x}[\mu(x)-\mu(t)]^{i-1}\,e^{\alpha_1(\mu(x)-\mu(t))}\times$$

$$\times\left[W_{n2i-1}(0)\cos\beta_1\big(\mu(x)-\mu(t)\big)+W_{n2i}(0)\sin\beta_1\big(\mu(x)-\mu(t)\big)\right]f(t)\frac{dt}{\omega(t)}+$$

$$+\sum_{j=2k+1}^{n}\frac{W_{nj}(0)}{W(0)}\int_{x_0}^{x}e^{\alpha_j(\mu(x)-\mu(t))}f(t)\frac{dt}{\omega(t)}. \qquad (3.3.27)$$

Ҳамин тавр, исбот карда шуд.

Теоремаи 3.3.9. *Бигузор, дар муодилаи* (3.3.1) *коэффисиентҳои* $A_i(x)$ $(i=\overline{1,n})$ *аз баробариҳои* (3.2.3) *муайян карда шаванд. Ғайр аз ин, бигузор, решаи* $\alpha_1\pm i\beta_1$*-и муодилаи характеристикии* (3.3.5) *решаи комплексии ҳамроҳшудаи* k*-карата ва решаҳои боқимонда ҳақиқӣ ва гуногун бошанд. Функсияи* $f(x)\in C(\overline{\Gamma})$ *ва* $\omega(x)$ *дар ягон нуқтаи интервали* Γ *ба сифр мубаддал нагардад. Он гоҳ ҳалли умумии муодилаи ғайриякҷинсаи* (3.3.1) *ба воситаи формулаи* (3.3.27) *дода мешавад.*

Агар $\omega(x) = x^{\alpha}$ бошад, пас ҳалли умумии муодилаи ғайриякҷинсаи $(3.3.15)$-ро дар намуди зерин меёбем:

$$y(x) = \sum_{i=1}^{k} [\mu(x)]^{i-1} e^{\alpha_1 \mu(x)} \left[c_{2i-1}^{5} \cos[\beta_1 \mu(x)] + c_{2i}^{5} \sin[\beta_1 \mu(x)]\right] +$$

$$+ \sum_{j=2k+1}^{n} c_j^5 e^{\lambda_j \mu(x)} + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{W(0)} \int_0^x [\mu(x) - \mu(t)]^{i-1} e^{\alpha_1(\mu(x)-\mu(t))} \times$$

$$\times \left[W_{n2i-1}(0) cos\left[\beta_1\left(\mu(x) - \mu(t)\right)\right] + W_{n2i}(0)\, sin\left[\beta_1\left(\mu(x) - \mu(t)\right)\right]\right] f(t) \frac{dt}{t^{\alpha}} +$$

$$+ \sum_{j=2k+1}^{n} \frac{W_{nj}(0)}{W(0)} \int_0^x e^{\lambda_j\left(\mu(x)-\mu(t)\right)} f(t) \frac{dt}{t^{\alpha}}. \qquad (3.3.28)$$

Бигузор, нобаробарии зерин иҷро бигардад:

$$\alpha_1 < \lambda_{2k+1} < \lambda_{2k+2} < \cdots < \lambda_n,$$

он гоҳ, агар шарти $\lambda_n > 0$ иҷро шавад, пас барои наздикшавандагии интегралҳо дар $(3.3.28)$ талаб менамоем, ки функсияи $f(x)$ дар нуқтаи $x = 0$ ба сифр мубаддал гашта, рафтораш аз рӯйи формулаи ассимптотикии зерин муайян карда шавад:

$$f(x) = \mathrm{o}\left[e^{\delta_5 \mu(x)}\right], \delta_5 > \lambda_n, \text{ҳангоми } x \to 0. \qquad (3.3.29)$$

Теоремаи $\mathbf{3.3.10}$. *Бигузор ҳамаи шартҳои теоремаи* 3.3.8 *иҷро шаванд ва* $\omega(x) = x^{\alpha}$ *бошад. Бигузор,* $f(x) \in C(\bar{\Gamma})$ *ва дар ҳолати* $\lambda_n > 0$ *дар нуқтаи* $x = 0$ *аз рӯйи формулаи ассимптотикии* $(3.3.29)$ *ба сифр майл намояд. Он гоҳ ҳалли умумии муодилаи ғайриякҷинсаи* $(3.3.15)$ *ба воситаи формулаи* $(3.3.28)$ *ифода карда мешавад.*

Хулосаҳои боби сеюм

Дар ин боб масъалаи ҳалшавандагии муодилаи дифференсиалии барзиёд таназзулёбандаи тартиби n-ум мавриди таҳқиқ қарор гирифтааст. Гузорише ёфта шудааст, ки бо истифода аз он муодилаи таҳқиқшаванда ба муодилаи дифференсиалӣ бо коэффисиентҳои доимӣ оварда мешавад. Оид ба ин тасдиқот теоремаи 3.1.1 исбот карда шудааст.

Дар зербоби 3.2 ва 3.3 муодилаи якҷинса ва ғайриякҷинсаи намуди Эйлер бо коэффисиентҳои тағйирёбанда таҳқиқ гардидааст. Чунин намуди коэффисиентҳои муодилаи намуди Эйлер муайян карда шудааст, ки барои ин гуна коэффисиентҳо муодилаи таҳқиқшаванда ба муодилаи дифференсиалӣ бо коэффисиентҳои доимӣ оварда мешавад.

Аз ин ҷо, дар 5 ҳолати решаҳои муодилаи характеристикии мувофиқоянда, ҳалли умумии муодилаи дифференсиалӣ бо коэффисиентҳои доимӣ ёфта шуда, баъдан бо истифода аз ин ҳалҳо ва гузориши мувофиқи тағйирёбандаҳо, ҳалли муодилаи аввалаи намуди Эйлер ёфта шудааст.

Инчунин, дар панҷ ҳолати дида баромадашуда, муодилае таҳқиқ гардидааст, ки дар он функсияи $\omega(x)$ дар ягон нуқтаи интервали Г ба сифр мубаддал мегардад.

Натиҷаҳои дар ин қисмати боб бадастовардашуда дар теоремаҳои 3.3.1-3.3.10 исбот гардидаанд.

Натиҷаҳои асосии дар ин боб бадастовардашуда дар корҳои [6-М], [11-М], [12-М] ба чоп расонда шудааст.

БОБИ 4. ОИД БА БАЪЗЕ ТАТБИҚҲОИ НАТИҶАҲОИ БАДАСТОВАРДАШУДА

4.1. Омӯзиши хосиятҳои ҳалҳои муодилаи дифференсиалии моделии тартиби дуюми таназзулёбанда

Дар Г муодилаи моделии тартиби дуюми зеринро дида мебароем:

$$[\omega(x)]^2 y'' + [a_1 + \omega'(x)]\omega(x)y' + a_2 y = f(x), \tag{4.1.1}$$

ки дар ин ҷо $f(x) -$ функсияи додашудаи бефосила дар Г, $\omega(x) = (x-a)^\alpha$.

Дар асоси натиҷаҳои зербобҳои 4 ва 5-и боби дуюм, вобаста аз решаҳои муодилаи характеристикии:

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0 \tag{4.1.2}$$

ҳалҳои муодилаи (4.1.1) намудҳои зеринро мегирад.

1. Дар ҳолати решаҳои муодилаи характеристикии (4.1.2) ҳақиқӣ ва гуногун будан:

$$y_1(x) = c_1^1 e^{\lambda_1 \mu(x)} + c_2^1 e^{\lambda_2 \mu(x)} - \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\int_a^x \left[e^{\lambda_1(\mu(x)-\mu(t))} - \right.$$
$$\left. -e^{\lambda_2(\mu(x)-\mu(t))}\right] f(t)d\big(\mu(t)\big) \equiv E_1[c_1^1, c_2^1, f(x)], \tag{4.1.3}$$

ки дар ин ҷо $\mu(x) = -\frac{1}{(\alpha-1)(x-a)^{\alpha-1}}$.

2. Дар ҳолати решаҳои муодилаи характеристикии (4.1.2) ҳақиқӣ ва якхела будан:

$$y_2(x) = c_1^2 e^{\lambda\mu(x)} + c_2^2\mu(x)e^{\lambda\mu(x)} + \int_a^x e^{\lambda(\mu(x)-\mu(t))}\big(\mu(x)-\mu(t)\big)f(t)d(\mu(t)) \equiv$$

$$\equiv E_2[c_1^2, c_2^2, f(x)]. \quad (4.1.4)$$

3. Дар ҳолати решаҳои муодилаи характеристикии (4.1.2) ададҳои комплексии ҳамроҳшуда будан:

$$y_3(x) = e^{\alpha_1\mu(x)}\cos[\beta_1\mu(x)]c_1^3 + e^{\alpha_1\mu(x)}\sin[\beta_1\mu(x)]c_2^3 +$$

$$+\frac{1}{\beta_1}\int_a^x e^{\alpha_1(\mu(x)-\mu(t))}\sin\big[\beta_1\big(\mu(x)-\mu(t)\big)\big]f(t)d\big(\mu(t)\big) \equiv$$

$$\equiv E_3[c_1^3, c_2^3, f(x)]. \; (4.1.5)$$

Хосияти ҳалҳои (4.1.3) − (4.1.5)-ро меомӯзем.

1⁰. Бигузор, решаҳои муодилаи характеристикии (4.1.2) нобаробарии $\lambda_2 > \lambda_1$-ро қаноат намоянд.

Қайди 4.1.1. «*Ҳалли намуди* (4.1.3) *ҳангоми* $\lambda_1 > 0$ *будан дар нуқтаи* $x = a$ *ба сифр майл намуда, рафтораш аз рӯйи формулаи ассимптотикии зерин муайян карда мешавад:*

$$y_1(x) = o\big[e^{\lambda_1\mu(x)}\big], \text{ ҳангоми } x \to a. \quad (4.1.6)$$

Дар ҳолати $\lambda_1 < 0$ *будан, ҳалли намуди* (4.1.3) *дар нуқтаи* $x = a$ *ба беохирӣ майл намуда, рафтораш аз рӯйи формулаи ассимптотикии зерин муайян карда мешавад»[4-М]:*

$$y_1(x) = O\big[e^{-|\lambda_1|\mu(x)}\big], \text{ ҳангоми } x \to a. \quad (4.1.7)$$

Ишораҳои зеринро дохил менамоем:

$$P_{\lambda_1}[y_1(x)] = e^{-\lambda_1\mu(x)}\, y_1(x),$$

$$P_{\lambda_1\lambda_2}[y'_1(x)] = e^{-(\lambda_2-\lambda_1)\mu(x)}(x-a)^{\alpha}\frac{d}{dx}\left[e^{-\lambda_1\mu(x)}y_1(x)\right]. \qquad (4.1.8)$$

Қайди 4.1.2. *Ҳалли намуди* (4.1.3) *дорои хосиятҳои зерин мебошад:*

$$\left[P_{\lambda_1}[y_1(x)]\right]\Big|_{x=a} = c_1^1,\ \ \left[P_{\lambda_1\lambda_2}[y_1'(x)]\right]\Big|_{x=a} = (\lambda_2-\lambda_1)\cdot c_2^1 \qquad (4.1.9)$$

2⁰. Бигузор, решаҳои муодилаи характеристикии (4.1.2) ҳақиқӣ ва якхела бошанд, яъне $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$.

Қайди 4.1.3. «*Ҳалли намуди* (4.1.4) *ҳангоми* $\lambda > 0$ *будан, дар нуқтаи* $x = a$ *ба сифр майл намуда, рафтораш аз рӯйи формулаи ассимптотикии зерин муайян карда мешавад»[4-М]:*

$$y_2(x) = o\left[e^{\lambda\mu(x)}\cdot\mu(x)\right],\ \text{ҳангоми } x \to a. \qquad (4.1.10)$$

Дар ҳақиқат, азбаски ҳалли намуди (4.1.4)-ро дар намуди:

$$y_2(x) = e^{\lambda\mu(x)}\cdot\mu(x)\left[\frac{c_1^2}{\mu(x)} + c_2^2 + \int_a^x e^{-\lambda\mu(t)}\left(1-\frac{\mu(t)}{\mu(x)}\right)f(t)d\big(\mu(t)\big)\right]$$

навиштан мумкин аст ва ҳудуди дохили қавси квадратӣ ҳангоми $x \to a$ ба адади доимӣ майл менамояд ва ҳудуди ифодаи беруни қавси квадратӣ ба сифр майл менамояд, бинобар ин дараҷаи калонтарини сифри ҳалли $y_2(x)$ аз рӯйи ифодаи беруни қавси квадратӣ дар намуди (4.1.10) муайян карда мешавад.

Қайди 4.1.4. «*Ҳалли намуди* (4.1.4) *ҳангоми* $\lambda < 0$ *будан, дар нуқтаи* $x = a$ *ба беохирӣ майл намуда, рафтораш аз рӯйи формулаи ассимптотикии зерин муайян карда мешавад»[4-М]:*

$$y_2(x) = O\left[e^{-|\lambda|\mu(x)} \cdot \mu(x)\right], \text{ ҳангоми } x \to a. \tag{4.1.11}$$

Ишораҳои зеринро дохил менамоем:

$$P_\lambda^1[y_2(x)] = e^{-\lambda\mu(x)} \cdot \mu^{-1}(x) y_2(x),$$
$$P_\lambda^2[y_2'(x)] = \mu^2(x)(x-a)^2 \frac{d}{dx}\left[e^{-\lambda\mu(x)} \cdot \mu^{-1}(x) y_2(x)\right]. \tag{4.1.12}$$

Қайди 4.1.5. *Ҳалли намуди* (4.1.4) *дорои хосиятҳои зерин мебошад:*

$$\left[P_\lambda^1[y_2(x)]\right]\Big|_{x=a} = c_1^2, \quad \left[P_\lambda^2[y_2'(x)]\right]\Big|_{x=a} = -c_2^2. \tag{4.1.13}$$

3^0. Бигузор, решаҳои муодилаи характеристикии (4.1.2) ададҳои комплексию ҳамроҳшуда бошад ва $\lambda_{1,2} = \alpha_1 \pm i\beta_1$. Фарз менамоем, ки қисми ҳақиқии ин решаҳо адади мусбат мебошад, яъне $\mathrm{Re}(\lambda_{1,2}) = \alpha_1 > 0$. Он гоҳ ҳалли намуди (4.1.5)-ро ба намуди:

$$y_3(x) = e^{\alpha_1\mu(x)}\left[cos(\beta_1\mu(x))c_1^3 + sin(\beta_1\mu(x))c_2^3\right] +$$
$$+\frac{1}{\beta_1}\int_a^x e^{-\alpha_1\mu(t)} sin\left[\beta_1(\mu(x)-\mu(t))\right] f(t) d(\mu(t)) \equiv e^{\alpha_1\mu(x)} W(x) \tag{4.1.14}$$

оварда, мебинем, ки ҳудуди функсияи $W(x)$ ҳангоми $x \to a$ ба адади доимӣ майл менамояд. Аз ин ҷо, қайди зерин ҷой дорад:

Қайди 4.1.6. «*Ҳалли намуди* (4.1.5) *ҳангоми* $\alpha_1 > 0$ *будан, дар нуқтаи* $x = a$ *ба сифр майл намуда, рафтораш аз рӯйи формулаи ассимптотикии зерин муайян карда мешавад»[4-М]:*

$$y_3(x) = o\left[e^{\alpha_1 \mu(x)}\right], \text{ ҳангоми } x \to a.$$

Қайди 4.1.7. «*Ҳалли намуди* (4.1.5) *ҳангоми* $\alpha_1 < 0$ *дар нуқтаи* $x = a$ *ба беохирӣ майл намуда, рафтораш аз рӯйи формулаи ассимптотикии зерин муайян карда мешавад»[4-М]:*

$$y_3(x) = O\left[e^{-|\alpha_1|\mu(x)} \cdot \mu(x)\right], \text{ ҳангоми } x \to a.$$

Бо D_x^a оператори дифференсиалии зеринро ишора мекунем:

$$D_x^a = (x-a)^\alpha \frac{d}{dx}.$$

Оператори D_x^a-ро ба функсияи (4.1.5) татбиқ намуда, ҳосил мекунем:

$$D_x^a y_3(x) = e^{\alpha_1 \mu(x)}\left[(\alpha_1 c_1^3 + \beta_1 c_2^3)\cos\big(\beta_1 \mu(x)\big) + (\alpha_1 c_2^3 - \beta_1 c_1^3)\sin\big(\beta_1 \mu(x)\big)\right] +$$
$$+\frac{1}{\beta_1}\int_a^x e^{\alpha_1(\mu(x)-\mu(t))}\Big[\alpha_1 \sin\big[\beta_1\big(\mu(x)-\mu(t)\big)\big] +$$
$$+\beta_1 \cos\big[\beta_1\big(\mu(x)-\mu(t)\big)\big]\Big] f(t) d\big(\mu(t)\big). \qquad (4.1.15)$$

Ишораҳои зеринро дохил мекунем:

$$P_{\alpha_1}^1[y_3(x)] = e^{-\alpha_1 \mu(x)} y_3(x); \quad P_{\alpha_1}^2[y_3'(x)] = e^{-\alpha_1 \mu(x)} D_x^a y_3(x). \qquad (4.1.16)$$

Қайди зерин ҷой дорад.

Қайди 4.1.8. *Ҳалли намуди* (4.1.5) *дорои хосиятҳои зерин мебошад*:

$$\left[P^1_{\alpha_1}[y_3(x)]\right]\Big|_{x=a} = M_1 c_1^3 + M_2 c_2^3;$$
$$\left[P^2_{\alpha_1}[y_3'(x)]\right]\Big|_{x=a} = (M_1\alpha_1 - M_2\beta_1)c_1^3 + (M_1\beta_1 + M_2\alpha_1)c_2^3, \quad (4.1.17)$$

ки дар ин ҷо $M_1 = \cos[\beta_1\mu(a)], \quad M_2 = \sin[\beta_1\mu(a)]$.

Дар ҳақиқат, ду тарафи баробариҳои (4.1.14) ва (4.1.15)-ро ба $e^{-\alpha_1\mu(x)}$ зарб намуда, дар баробариҳои ҳосилшуда ҳангоми $x \to a$ ба ҳудуд мегузарем:

$$\lim_{x\to a} e^{-\alpha_1\mu(x)}\, y_3(x) = \lim_{x\to a}\left[\cos\big(\beta_1\mu(x)\big)c_1^3 + \sin\big(\beta_1\mu(x)\big)c_2^3\right] +$$
$$+\frac{1}{\beta_1}\lim_{x\to a}\int_a^x e^{-\alpha_1\mu(t)}\sin\left[\beta_1\big(\mu(x)-\mu(t)\big)\right]f(t)d(\mu(t)) = M_1c_1^3 + M_2c_2^3;$$
$$\lim_{x\to a} e^{-\alpha_1\mu(x)} D_x^{\beta}\, y_3(x) = \lim_{x\to a}\left[(\alpha_1c_1^3 + \beta_1c_2^3)\cos\big(\beta_1\mu(x)\big) +\right.$$
$$\left.+(\alpha_1c_2^3 - \beta_1c_1^3)\sin\big(\beta_1\mu(x)\big)\right] + \frac{1}{\beta_1}\lim_{x\to a}\int_a^x e^{-\alpha_1\mu(t)}\left[\alpha_1\sin\left[\beta_1\big(\mu(x)-\mu(t)\big)\right] +\right.$$
$$\left.+\beta_1\cos\left[\beta_1\big(\mu(x)-\mu(t)\big)\right]\right]f(t)d\big(\mu(t)\big) = (\alpha_1c_1^3 + \beta_1c_2^3)M_1 +$$
$$+(\alpha_1c_2^3 - \beta_1c_1^3)M_2 = (M_1\alpha_1 - M_2\beta_1)c_1^3 + (M_1\beta_1 + M_2\alpha_1)c_2^3.$$

Тасдиқоти қайди 4.1.8 исбот гардид.

4.2. Гузориши масъалаи навъи Коши барои муодилаи дифференсиалии моделии тартиби дуюми барзиёдтаназзулёбанда

Дар назарияи муодилаҳои дифференсиалии таназзулёбанда, яке аз натиҷаҳои муҳим ин таҳқиқи масъалаи Коши ё масъалаи навъи Коши барои муодилаи таҳқиқшаванда мебошад. Масъалаи Коши дар нуқтаи x_0, ки аз нуқтаи махсуси муодила фарқ менамояд, гузошта шуда таҳқиқ карда мешавад. Аммо дар назарияи муодилаҳои дифференсиалии сингулярӣ муҳиммияти махсусро ҳолате касб менамояд, ки дар он масъалаи Коши дар нуқтаи махсуси муодила гузошта мешавад.

Бигузор, муодилаи (4.1.1) дода шуда бошад ва вобаста аз решаҳои муодилаи характеристикии (4.1.2) тасвири интегралии ҳалли ин муодила, намудҳои (4.1.3) $-$ (4.1.5)-ро дошта бошад.

Бо назардошти хосиятҳои ҳалҳои бадастовардашуда барои муодилаи (4.1.1) масъалаи намуди Кошии зеринро таҳқиқ менамоем.

Масъалаи $\boldsymbol{A_1}$. Бигузор, решаҳои муодилаи характеристикии (4.1.2) ҳақиқӣ ва гуногун бошанд. Ёфтани чунин ҳалли муодилаи (4.1.1) аз синфи $C^2(\Gamma)$ талаб карда мешавад, ки шартҳои ибтидоии зеринро қаноат намояд:

$$\left[P_{\lambda_1}[y_1(x)]\right]\Big|_{x=a} = B_1^1, \left[P_{\lambda_1,\lambda_2}[y_1'(x)]\right]\Big|_{x=a} = B_2^1,$$

ки дар ин ҷо $B_j^1\ (j = 1{,}2) -$ ададҳои доимии додашуда, $P_{\lambda_1}[y_1(x)]$, $P_{\lambda_1,\lambda_1}[y_1'(x)] -$ функсияҳое мебошанд, ки аз баробариҳои (4.1.8) муайян карда мешаванд.

Таҳқиқи масъалаи $\boldsymbol{A_1}$. Тасвири интегралии ҳалли (4.1.3)-и муодилаи (4.1.1) ва хосиятҳои он (4.1.9)-ро истифода бурда, ададҳои доимии ихтиёрии c_1^1, c_2^1-ро нисбат ба доимиҳои додашудаи B_1^1, B_2^1 ифода менамоем:

$$c_1^1 = B_1^1; \quad (\lambda_2 - \lambda_1)\, c_2^1 = B_2^1.$$

Аз ин ҷо

$$c_1^1 = B_1^1; \quad c_2^1 = \frac{B_2^1}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

Ин қиматҳои c_1^1, c_2^1-ро ба (4.1.3) гузошта ҳалли масъалаи A_1-ро дар намуди зерин меёбем:

$$y_1(x) = E_1\left[B_1^1, \frac{B_2^1}{\lambda_2 - \lambda_1}, f(x)\right]. \quad (4.2.1)$$

Ҳамин тавр, исбот карда шуд.

Теоремаи 4.2.1. *Бигузор коэффисиентҳо ва тарафи рости муодилаи (4.1.1) ҳамаи шартҳои теоремаи 2.5.2-ро қаноат намояд. Он гоҳ масъалаи* A_1 *дорои ҳалли ягона мебошад ва ин ҳал ба воситаи формулаи* (4.2.1) *ифода карда мешавад.*

Масъалаи A_2. Бигузор, решаҳои муодилаи характеристикии (4.1.2) ҳақиқӣ ва якхела бошанд. Ёфтани чунин ҳалли муодилаи (4.1.1) аз синфи $C^2(\Gamma)$ талаб карда мешавад, ки шартҳои ибтидоии зеринро қаноат намояд:

$$\left[P_\lambda^1[y_2(x)]\right]\Big|_{x=a} = B_1^2, \left[P_\lambda^2[y_2'(x)]\right]\Big|_{x=a} = B_2^2,$$

ки дар ин ҷо $B_j^2\ (j = 1,2) -$ададҳои доимии додашуда, $P_\lambda^1[y_2(x)]$, $P_\lambda^2[y_2'(x)] -$ функсияҳое мебошанд, ки аз баробариҳои (4.1.12) муайян карда мешаванд.

Таҳқиқи масъалаи A_2. «Тасвири интегралии ҳалли (4.1.4)-и муодилаи (4.1.1) ва хосиятҳои он (4.1.13)-ро истифода бурда, ададҳои доимии ихтиёрии c_1^2, c_2^2-ро нисбат ба доимиҳои додашудаи B_1^2, B_2^2 ифода менамоем:

$$c_1^2 = B_1^2; \quad -c_2^2 = B_2^2.$$

Аз ин ҷо

$$c_1^2 = B_1^2; \quad c_2^2 = -B_2^2.$$

Ин қиматҳои c_1^2, c_2^2-ро ба $(4.1.4)$ гузошта ҳалли масъалаи A_2-ро дар намуди зерин ҳосил мекунем:

$$y_2(x) = E_2[B_1^2, -B_2^2, f(x)]. \tag{4.2.2}$$

Ҳамин тавр, исбот карда шуд*»[4-М]*.

Теоремаи 4.2.2. *Бигузор коэффисиентҳо ва тарафи рости муодилаи (4.1.1) ҳамаи шартҳои теоремаи 2.5.4-ро қаноат намояд. Он гоҳ масъалаи* A_2 *дорои ҳалли ягона мебошад ва ин ҳал ба воситаи формулаи* $(4.2.2)$ *ифода карда мешавад.*

Масъалаи A_3. Бигузор, решаҳои муодилаи характеристикии $(4.1.2)$ ададҳои комплексии ҳамроҳшуда бошанд. Ёфтани чунин ҳалли муодилаи $(4.1.1)$ аз синфи $C^2(\Gamma)$ талаб карда мешавад, ки шартҳои ибтидоии зеринро қаноат намояд:

$$\left[P_{\alpha_1}^1[y_3(x)]\right]\Big|_{x=a} = B_1^3, \left[P_{\alpha_1}^2[y_3'(x)]\right]\Big|_{x=a} = B_2^3,$$

ки дар ин ҷо $B_j^3\ (j = 1,2) -$ ададҳои доимии додашуда, $P_{\alpha_1}^1[y_3(x)]$, $P_{\alpha_1}^2[y_3'(x)] -$ функсияҳое мебошанд, ки аз баробариҳои $(4.1.16)$ муайян карда мешаванд.

Таҳқиқи масъалаи A_3. Тасвири интегралии ҳалли $(4.1.4)$-и муодилаи $(4.1.1)$ ва хосиятҳои он $(4.1.17)$-ро истифода бурда, ададҳои доимии ихтиёрии c_1^3, c_2^3-ро нисбат ба доимиҳои додашудаи B_1^3, B_2^3 ба воситаи системаи муодилаҳои зерин ифода менамоем:

$$\begin{cases} M_1 c_1^3 + M_2 c_2^3 = B_1^3, \\ (M_1\alpha_1 - M_2\beta_1)c_1^3 + (M_1\beta_1 + M_2\alpha_1)c_2^3 = B_2^3. \end{cases} \tag{4.2.3}$$

Азбаски муайянкунандаи ин ситема

$$\Delta = \begin{vmatrix} M_1 & M_2 \\ M_1\alpha_1 - M_2\beta_1 & M_1\beta_1 + M_2\alpha_1 \end{vmatrix} = \beta_1 \neq 0$$

аст, пас c_1^3, c_2^3 аз системаи $(4.2.3)$ якқимата дар намуди

$$c_1^3 = \frac{\Delta_{c_1^3}}{\beta_1}, \quad c_2^3 = \frac{\Delta_{c_2^3}}{\beta_1}$$

муайян карда мешавад. Ин қиматҳои c_1^3, c_2^3-ро ба $(4.1.5)$ гузошта, ҳалли масъалаи A_3-ро дар намуди зерин меёбем:

$$y_3(x) = E_3\left[\frac{\Delta_{c_1^3}}{\beta_1}, \frac{\Delta_{c_2^3}}{\beta_1}, f(x)\right]. \qquad (4.2.4)$$

Ҳамин тавр, исбот карда шуд.

Теоремаи 4.2.3. *Бигузор коэффисиентҳо ва тарафи рости муодилаи (4.1.1) ҳамаи шартҳои теоремаи 2.5.6-ро қаноат намояд. Он гоҳ масъалаи* A_3 *дорои ҳалли ягона мебошад ва ин ҳал ба воситаи формулаи* $(4.2.4)$ *ифода карда мешавад.*

4.3. Татбиқи натиҷаҳои бадастовардашуда дар ҳалли як синфи муодилаҳои интегро-дифференсиалӣ бо ядрои барзиёдсингулярӣ

Ба воситаи D росткунҷаи $D = \{(x,y): a < x < a_1, b < y < b_1\}$-ро ишора менамоем. Ишораҳои зеринро низ дохил менамоем:

$$\Gamma_1 = \{(x,y):\ a < x < a_1, y = b\}, \qquad \Gamma_2 = \{(x,y):\ x = a,\ \ b < y < b_1\}.$$

«Дар соҳаи D муодилаи интегро-дифференсиалии дученака бо ядрои барзиёдсингулярии зеринро дида мебароем:

$$D_x^{\alpha} D_y^{\beta} U(x,y) + \int_a^x \frac{A}{(t-a)^{\alpha}} D_y^{\beta} U(t,y)dt + \int_b^y \frac{B}{(s-b)^{\beta}} D_x^{\alpha} U(x,s)ds +$$

$$+\int_a^x \frac{C}{(t-a)^{\alpha}} \int_b^y \frac{1}{(s-b)^{\beta}} U(t,s)dtds = f(x,y), \quad (4.3.1)$$

ки дар ин ҷо $D_x^{\alpha} = (x-a)^{\alpha}\frac{\partial}{\partial x}, D_y^{\beta} = (y-b)^{\beta}\frac{\partial}{\partial y}$ – операторҳои дифференсиалӣ, $\alpha = const > 1$, $\beta = const > 1$, A, B ва C ададҳои доимии додашуда буда, дар байнашон вобастагии $C = A \cdot B$ ҷой дорад, $f(x,y) -$ функсияи додашуда, дар соҳаи $\overline{D}$ мебошад»*[4-M]*.

Муодилаи (4.3.1) бо осонӣ ба намуди зерин оварда мешавад:

$$(x-a)^{\alpha}(y-b)^{\beta} U''_{xy} + \int_a^x \frac{A}{(t-a)^{\alpha}} (y-b)^{\beta} U'_y(t,y)dt +$$

$$+\int_b^y \frac{B}{(s-b)^{\beta}} (x-a)^{\alpha} U'_x(x,s)ds + \int_a^x \frac{A}{(t-a)^{\alpha}} \int_b^y \frac{B}{(s-b)^{\beta}} U(t,s)dtds =$$

$$= f(x,y). \quad (4.3.2)$$

Дар асоси натиҷаҳои дар бобҳои пешин бадастовардашуда, дар муодилаи (4.3.2) гузориши зерини тағйирёбандаҳоро мегузаронем:

$$\begin{cases} t = \mu_{\alpha}(x) = -\dfrac{1}{(\alpha-1)(x-a)^{\alpha-1}}, \\ s = \mu_{\beta}(y) = -\dfrac{1}{(\beta-1)(y-b)^{\beta-1}}. \end{cases} \quad (4.3.3)$$

Он гоҳ азбаски

$$U(x,y) = U\left(\mu_\alpha^{-1}(t), \mu_\beta^{-1}(s)\right) = V(t,s), \tag{4.3.4}$$

$$f(x,y) = f\left(\mu_\alpha^{-1}(t), \mu_\beta^{-1}(s)\right) = F(t,s), \tag{4.3.5}$$

ва

$$U''_{xy} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}U(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}U\left(\mu_\alpha^{-1}(t), \mu_\beta^{-1}(s)\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial s}V(t,s)\frac{\partial t}{\partial x}\frac{\partial s}{\partial y} = V''_{ts}\frac{1}{(x-a)^\alpha}\frac{1}{(y-b)^\beta}, \tag{4.3.6}$$

бинобар ин «муодилаи (4.3.2)-ро пеш аз ҳама дар намуди:

$$(x-a)^\alpha (y-b)^\beta U''_{xy} + \int_a^x A\,(y-b)^\beta U'_y(t,y)d\mu_\alpha(t) +$$

$$+\int_b^y B\,(x-a)^\alpha U'_x(x,s)d\mu_\beta(s) + \int_a^x A\int_b^y BU(t,s)d\mu_\alpha(t)d\mu_\beta(s) = f(x,y)$$

навишта, бо назардошти он ки

$$U'_y = \frac{\partial}{\partial y}U(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}U\left(\mu_\alpha^{-1}(t), \mu_\beta^{-1}(s)\right) = \frac{\partial}{\partial s}V(t,s)\frac{\partial s}{\partial y} = V'_s\frac{1}{(y-b)^\beta},$$

$$U'_x = \frac{\partial}{\partial x}U(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}U\left(\mu_\alpha^{-1}(t), \mu_\beta^{-1}(s)\right) = \frac{\partial}{\partial t}V(t,s)\frac{\partial t}{\partial x} = V'_t\frac{1}{(x-a)^\alpha},$$

ва

$$\int_a^x A\,(y-b)^\beta U'_y(t,y)d\mu_\alpha(t) = \left|\begin{array}{c} \mu_\alpha(t) = \tau \\ \tau_1 = -\infty, \tau_2 = \mu_\alpha(x) \\ (y-b)^\beta U'_y(t,y) = V'_s(\tau,s) \end{array}\right| = \int_{-\infty}^{\mu_\alpha(x)} A\,V'_s(\tau,s)d\tau,$$

$$\int_b^y B\,(x-a)^\alpha U'_x(x,s)d\mu_\beta(s) = \left|\begin{array}{c} \mu_\beta(s) = \upsilon \\ \upsilon_1 = -\infty, \upsilon_2 = \mu_\beta(y) \\ (x-a)^\alpha U'_x(x,s) = V'_t(t,\upsilon) \end{array}\right| = \int_{-\infty}^{\mu_\beta(y)} A\,V'_t(t,\upsilon)d\upsilon,$$

ҳосил мекунем»[4-М]:

$$(x-a)^{\alpha}(y-b)^{\beta}V''_{ts}\frac{1}{(x-a)^{\alpha}}\frac{1}{(y-b)^{\beta}}+\int_{-\infty}^{\mu_{\alpha}(x)} A\,V'_{s}(\tau,s)d\tau+\int_{-\infty}^{\mu_{\beta}(y)} B\,V'_{t}(t,\upsilon)d\upsilon+$$

$$+\int_{-\infty}^{\mu_{\alpha}(x)} A\int_{-\infty}^{\mu_{\beta}(y)} BV(\tau,\upsilon)d\tau d\upsilon=F(t,s),$$

ё ин ки

$$V''_{ts}+A\int_{-\infty}^{t}V'_{s}(\tau,s)d\tau+B\int_{-\infty}^{s}V'_{t}(t,\upsilon)d\upsilon+\int_{-\infty}^{t}A\int_{-\infty}^{s}BV(\tau,\upsilon)d\tau d\upsilon=F(t,s). \tag{4.3.7}$$

Ҳамин тавр, бо ёрии ивази тағйирёбанда аз рӯйи формулаи (4.3.3), муодилаи интегро-дифференсиалии дученакаи таназзулёбанда бо ядрои барзиёдсингулярии (4.3.2) ба муодилаи интегро-дифференсиалӣ бо ядрои доимӣ ва соҳаи интегронии номаҳдуд оварда шуд.

Барои ҳал намудани муодилаи (4.3.7), онро дар намуди зерин менависем:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+A\int_{-\infty}^{t}(\cdot)d\tau\right)\left(\frac{\partial}{\partial s}+B\int_{-\infty}^{s}(\cdot)d\upsilon\right)V(t,s)=F(t,s), \tag{4.3.8}$$

ки дар ин навишт оператори

$$\frac{\partial}{\partial s}+B\int_{-\infty}^{s}(\cdot)d\upsilon$$

ба функсияи $V(t, s)$ саравал амалӣ гардида, баъдан ба ифодаи ҳосилшуда оператори

$$\frac{\partial}{\partial t} + A \int_{-\infty}^{t} (\cdot) d\tau$$

амалӣ карда мешавад.

Дар (4.3.8) функсияи номаълуми навро дохил менамоем:

$$\left(\frac{\partial}{\partial s} + B \int_{-\infty}^{s} (\cdot) dv\right) V(t, s) = W(t, s).$$

Он гоҳ муодилаи (4.3.8) ба ду муодилаҳои интегро-дифференсиалии тартиби якум ҷудо мешавад:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial s} + B \int_{-\infty}^{s} (\cdot) dv\right) V(t, s) = W(t, s), \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + A \int_{-\infty}^{t} (\cdot) d\tau\right) W(t, s) = F(t, s). \end{cases}$$

Ин системаро дар намуди маъмулии зерин менависем:

$$\begin{cases} V_s'(t, s) + B \int_{-\infty}^{s} V(t, v) dv = W(t, s), \\ W_t'(t, s) + A \int_{-\infty}^{t} W(\tau, s) d\tau = F(t, s). \end{cases} \quad (4.3.9)$$

Аз ҳарду тарафи муодилаҳои системаи (4.3.9) ҳосила гирифта, онро ба системаи муодилаҳои дифференсиалӣ бо коэффисиентҳои доимии зерин меорем:

$$\begin{cases} V''_{ss}(t,s) + BV(t,s) = W'_s(t,s), \\ W''_{tt}(t,s) + AW(t,s) = F'_t(t,s). \end{cases} \tag{4.3.10}$$

Ба системаи муодилаҳои интегро-дифференсиалии (4.3.9) системаи муодилаҳои интегро-дифференсиалии якҷинсаи:

$$\begin{cases} V'_s(t,s) + B \int\limits_{-\infty}^{s} V(t,v)dv = 0, \\ W'_t(t,s) + A \int\limits_{-\infty}^{t} W(\tau,s)d\tau = 0, \end{cases} \tag{4.3.11}$$

ва ба системаи муодилаҳои дифференсиалии (4.3.10) системаи муодилаҳои дифференсиалии якҷинсаи:

$$\begin{cases} V''_{ss}(t,s) + BV(t,s) = 0, \\ W''_{tt}(t,s) + AW(t,s) = 0, \end{cases} \tag{4.3.12}$$

мувофиқ меояд.

Агар ҳалли системаи муодилаҳои (4.3.12)-ро дар намуди

$$\begin{cases} V(t,s) = e^{\lambda s}, \\ W(t,s) = e^{\nu t}, \end{cases} \tag{4.3.13}$$

ҷустуҷӯ намоем, пас барои муайян намудани параметрҳои λ ва ν системаи муодилаҳои характеристикии зеринро ҳосил менамоем:

$$\begin{cases} \lambda^2 + B = 0, \\ \nu^2 + A = 0. \end{cases} \tag{4.3.14}$$

Агар ҳалли системаи муодилаҳои интегро-дифференсиалии якҷинсаи (4.3.11)-ро дар намуди (4.3.13) ҷустуҷӯ намоем, пас дар ин маврид системаи муодилаҳои характеристикии (4.3.14) бо талаби иҷрошавии шартҳои

$$\lambda > 0, \nu > 0 \tag{4.3.15}$$

ҳосил мегардад.

Аз назарияи маълуми муодилаҳои дифференсиалӣ бо коэффисиентҳои доимӣ истифода бурда, ҳалли системаи муодилаҳои (4.3.10)-ро дар ҳолатҳои зерин меёбем.

1. Бигузор дар (4.3.14) $A < 0, B < 0$ бошад, он гоҳ

$$\lambda_1 = -\sqrt{-B} < 0, \lambda_2 = \sqrt{-B} > 0, \nu_1 = -\sqrt{-A} < 0, \nu_2 = \sqrt{-A} > 0$$

ва системаи фундаменталии ҳалҳои системаи муодилаҳои якҷинсаи (4.3.12) намуди:

$$\begin{cases} V_1(t,s) = e^{\lambda_1 s}, V_2(t,s) = e^{\lambda_2 s}, \\ W_1(t,s) = e^{\nu_1 t}, W_2(t,s) = e^{\nu_2 t}, \end{cases}$$

ва ҳалли умумии он намуди:

$$\begin{cases} V(t,s) = e^{\lambda_1 s} c_1(t) + e^{\lambda_2 s} c_2(t), \\ W(t,s) = e^{\nu_1 t} c_3(s) + e^{\nu_2 t} c_4(s), \end{cases}$$

-ро мегирад. Дар асоси методи вариатсияи доимиҳои ихтиёрӣ ҳалли умумии системаи муодилаҳои ғайриякҷинсаи (4.3.10) дар намуди зерин ёфта мешавад:

$$V(t,s) = e^{\lambda_1 s} c_1(t) + e^{\lambda_2 s} c_2(t) - \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \int_{-\infty}^{s} \left[\lambda_1 e^{\lambda_1 (s-\upsilon)} - \lambda_2 e^{\lambda_2 (s-\upsilon)}\right] W(t,\upsilon) d\upsilon,$$

$$W(t,s) = e^{\nu_1 t} c_3(s) + e^{\nu_2 t} c_4(s) - \frac{1}{\nu_2 - \nu_1} \int_{-\infty}^{t} \left[\nu_1 e^{\nu_1 (t-\tau)} - \nu_2 e^{\nu_2 (t-\tau)}\right] F(\tau,s) d\tau.$$

Ҳангоми ба системаи муодилаҳои интегро-дифференсиалӣ баргаштан, бо назардошти шарти (4.3.15) системаи фундаменталии ҳалҳои системаи муодилаҳои интегро-дифференсиалии якҷинсаи (4.3.11) намуди

$$\begin{cases} V_2(t,s) = e^{\lambda_2 s}, \\ W_2(t,s) = e^{\nu_2 t}, \end{cases}$$

-ро гирифта ҳалли умумии системаи муодилаҳои интегро-дифференсиалии ғайриякҷинсаи (4.3.9) намуди

$$V(t,s) = e^{\lambda_2 s} c_2(t) - \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \int_{-\infty}^{s} \left[\lambda_1 e^{\lambda_1 (s-\upsilon)} - \lambda_2 e^{\lambda_2 (s-\upsilon)}\right] W(t,\upsilon) d\upsilon, \quad (4.3.16)$$

$$W(t,s) = e^{\nu_2 t} c_4(s) - \frac{1}{\nu_2 - \nu_1} \int_{-\infty}^{t} \left[\nu_1 e^{\nu_1 (t-\tau)} - \nu_2 e^{\nu_2 (t-\tau)}\right] F(\tau,s) d\tau, \quad (4.3.17)$$

-ро мегирад.

Аз (4.3.17) қимати $W(t,s)$-ро ба (4.3.16) ба ҷояш гузошта, ҳалли муодилаи интегро-дифференсиалии дученакаи (4.3.7)-ро дар намуди зерин ҳосил мекунем:

$$V(t,s) = e^{\lambda_2 s} c_2(t) - e^{\nu_2 t} \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \int_{-\infty}^{s} \left[\lambda_1 e^{\lambda_1 (s-\upsilon)} - \lambda_2 e^{\lambda_2 (s-\upsilon)}\right] c_4(\upsilon) d\upsilon +$$

$$+ \frac{1}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\nu_2 - \nu_1)} \int_{-\infty}^{s} \left[\lambda_1 e^{\lambda_1 (s-\upsilon)} - \lambda_2 e^{\lambda_2 (s-\upsilon)}\right] \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{t} \left[\nu_1 e^{\nu_1 (t-\tau)} - \nu_2 e^{\nu_2 (t-\tau)}\right] F(\tau, \upsilon) d\tau d\upsilon. \quad (4.3.18)$$

Дар асоси гузориши (4.3.3), дар интегралҳои (4.3.18)

$$\begin{cases} \tau = \mu_\alpha(t), \\ \upsilon = \mu_\beta(s), \end{cases}$$

гузошта, бо дарназардошти он ки

$$\begin{cases} t = \mu_\alpha^{-1}(\tau), \\ s = \mu_\beta^{-1}(\upsilon), \end{cases}$$

ва

$$\begin{cases} d\tau = \dfrac{dt}{(t-a)^\alpha}, t_1 = a, t_2 = \mu_\alpha^{-1}(t) = x, \\ d\upsilon = \dfrac{dt}{(s-b)^\beta}, s_1 = b, s_2 = \mu_\beta^{-1}(s) = y, \end{cases}$$

ҳосил мекунем:

$$u(x,y) = e^{\lambda_2 \mu_\beta(y)} c_2(x) -$$

$$-e^{\nu_2 \mu_\alpha(x)} \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \int_b^y \left[\lambda_1 e^{\lambda_1 \left(\mu_\beta(y) - \mu_\beta(s)\right)} - \lambda_2 e^{\lambda_2 \left(\mu_\beta(y) - \mu_\beta(s)\right)}\right] c_4(s) \frac{ds}{(s-b)^\beta} +$$

$$+ \frac{1}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\nu_2 - \nu_1)} \int_b^y \left[\lambda_1 e^{\lambda_1 \left(\mu_\beta(y) - \mu_\beta(s)\right)} - \lambda_2 e^{\lambda_2 \left(\mu_\beta(y) - \mu_\beta(s)\right)}\right] \times$$

$$\times \int_a^x \left[\nu_1 e^{\nu_1\left(\mu_\alpha(x)-\mu_\alpha(t)\right)} - \nu_2 e^{\nu_2\left(\mu_\alpha(x)-\mu_\alpha(t)\right)}\right] f(t,s)\frac{dt}{(t-a)^\alpha}\frac{ds}{(s-b)^\beta}. \quad (4.3.19)$$

Азбаски дар (4.3.19) $\lambda_2 > 0, \nu_2 > 0$ аст, пас аз функсияи $f(t,s)$ ва функсияи ихтиёрии $c_4(s)$ талаб менамоем, ки ҳангоми $s \to b$ ва $t \to a$ ба сифр майл намуда, рафторашон аз рӯйи формулаҳои ассимптотикии зерин муайян карда шавад:

$$f(t,s) = o\left[e^{\delta_1\mu_\alpha(t)}e^{\delta_2\mu_\beta(s)}\right], \delta_1 > \nu_2, \delta_2 > \lambda_2 \text{ ҳангоми } t \to a, s \to b \quad (4.3.20)$$

ва

$$c_4(s) = o\left[e^{\delta_2\mu_\beta(s)}\right], \delta_2 > \lambda_2 \text{ ҳангоми } s \to b. \quad (4.3.21)$$

Ҳангоми иҷрошавии шартҳои (4.3.20) ва (4.3.21) интегралҳои тарафи рости баробарии (4.3.19) наздикшаванда мешавад ва ҳалли умумии муодилаи (4.3.1) ба воситаи формулаи (4.3.19) ифода карда мешавад.

Ҳамин тавр, теоремаи зерин ҷой дорад.

Теоремаи 4.3.1. «*Бигузор, дар муодилаи* (4.3.1) $A < 0, B < 0$ *бошад. Функсияи* $f(t,s)$ *ҳангоми* $t \to a$ *ва* $s \to b$ *ба сифр майл намуда, рафтораш аз рӯйи формулаи ассимптотикии* (4.3.20) *муайян карда шавад ва функсияи ихтиёрии* $c_4(s)$ *ҳангоми* $s \to b$ *аз рӯйи формулаи ассимптотикии* (4.3.21) *ба сифр майл намояд. Он гоҳ ҳалли умумии муодилаи интегро-дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусии таназзулёбанда бо ядрои барзиёдсингулярии* (4.3.1) *аз синфи* $C^2(R)$ *ба воситаи формулаи* (4.3.19) *ифода карда мешавад»[4-М].*

2. Бигузор дар (4.3.14) $A > 0, B > 0$ бошад, он гоҳ

$$\lambda_1 = -\sqrt{B}i, \;\; \lambda_2 = \sqrt{B}i, \;\; \nu_1 = -\sqrt{A}i, \;\; \nu_2 = \sqrt{A}i$$

ва системаи фундаменталии ҳалҳои системаи муодилаҳои якҷинсаи (4.3.12) намуди:

$$\begin{cases} V_1(t,s) = \cos\sqrt{B}s, \quad V_2(t,s) = \sin\sqrt{B}s\,, \\ W_1(t,s) = \cos\sqrt{A}t, \quad W_2(t,s) = \sin\sqrt{A}t\,, \end{cases}$$

ва ҳалли умумии он намуди:

$$\begin{cases} V(t,s) = \cos\sqrt{B}s\, c_1(t) + \sin\sqrt{B}s\, c_2(t), \\ W(t,s) = \cos\sqrt{A}t\, c_3(s) + \sin\sqrt{A}t\, c_4(s), \end{cases}$$

-ро мегирад. Дар асоси методи вариатсияи доимиҳои ихтиёрӣ ҳалли умумии системаи муодилаҳои ғайриякҷинсаи (4.3.10) дар намуди зерин ёфта мешавад:

$$V(t,s) = \cos\sqrt{B}s\, c_1(t) + \sin\sqrt{B}s\, c_2(t) - \int_{-\infty}^{s} \cos\sqrt{B}(s-\upsilon)\, W(t,\upsilon)d\upsilon,$$

$$W(t,s) = \cos\sqrt{A}t\, c_1(s) + \sin\sqrt{A}t\, c_2(s) - \int_{-\infty}^{s} \cos\sqrt{A}(t-\tau)\, F(\tau,s)d\tau.$$

Ҳангоми ба системаи муодилаҳои интегро-дифференсиалӣ баргаштан, бо дарназардошти шарти (4.3.15) муайян месозем, ки системаи фундаменталии ҳалҳои системаи муодилаҳои интегро-дифференсиалии якҷинсаи (4.3.11) маҷмуи холиро ташкил дода, ҳалли ягонаи системаи муодилаҳои интегро-дифференсиалии ғайриякҷинсаи (4.3.9) намуди:

$$V(t,s) = -\int_{-\infty}^{s} \cos\sqrt{B}(s-\upsilon)\, W(t,\upsilon)d\upsilon, \tag{4.3.22}$$

$$W(t,s) = -\int_{-\infty}^{s} \cos\sqrt{A}(t-\tau)\, F(\tau,s)d\tau, \tag{4.3.23}$$

-ро мегирад.

Қимати $W(t,s)$-ро аз (4.3.23) ба (4.3.22) ба ҷояш гузошта, ҳалли муодилаи интегро-дифференсиалии дученакаи (4.3.7)-ро дар намуди зерин ҳосил мекунем:

$$V(t,s) = \int_{-\infty}^{s} \cos\sqrt{B}(s-\upsilon) \int_{-\infty}^{t} \cos\sqrt{A}(t-\tau)\, F(\tau,\upsilon)d\tau d\upsilon. \qquad (4.3.24)$$

Гузориши (4.3.3)-ро ба назар гирифта, дар интегралҳои (4.3.24)

$$\begin{cases} \tau = \mu_\alpha(t), \\ \upsilon = \mu_\beta(s), \end{cases}$$

мегузорем ва азбаски

$$\begin{cases} t = \mu_\alpha^{-1}(\tau), \\ s = \mu_\beta^{-1}(\upsilon), \end{cases}$$

пас

$$\begin{cases} d\tau = \dfrac{dt}{(t-a)^\alpha}, t_1 = a, t_2 = \mu_\alpha^{-1}(t) = x, \\ d\upsilon = \dfrac{dt}{(s-b)^\beta}, s_1 = b, s_2 = \mu_\beta^{-1}(s) = y, \end{cases}$$

ва дар ин асос:

$$u(x,y)=\int_b^y \cos\sqrt{B}\left(\mu_\beta(y)-\mu_\beta(s)\right)\int_a^x \cos\sqrt{A}\big(\mu_\alpha(x)$$
$$-\mu_\alpha(t)\big)\,f(t,s)\frac{dt}{(t-a)^\alpha}\frac{ds}{(s-b)^\beta}.$$

ки ин баробариро чунин навиштан мумкин аст:

$$u(x,y)=\int_b^y \cos\sqrt{B}\left(\mu_\beta(y)-\mu_\beta(s)\right)\times$$
$$\times\int_a^x \cos\sqrt{A}\big(\mu_\alpha(x)-\mu_\alpha(t)\big)\,f(t,s)d\big(\mu_\alpha(t)\big)d\left(\mu_\beta(s)\right). \quad (4.3.25)$$

Функсияи (4.3.25) ҳалли ягонаи муодилаи интегро-дифференсиалии (4.3.1)-ро дар ҳолати иҷрошавии шартҳои $A>0, B>0$ ифода мекунад.

Ҳамин тавр, теоремаи зерин ҷой дорад.

Теоремаи 4.3.2. «*Бигузор, дар муодилаи* (4.3.1) $A>0, B>0$ *ва функсияи* $f(t,s)\in C(R)$ *бошад. Он гоҳ ҳалли ягонаи муодилаи интегро-дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусии таназзулёбанда бо ядрои барзиёд сингулярии* (4.3.1) *аз синфи* $C^2(R)$ *ба воситаи формулаи* (4.3.25) *ифода карда мешавад»[4-М].*

3. Бигузор дар (4.3.14) $A<0, B>0$ бошад, он гоҳ

$$\lambda_1=-\sqrt{B}i, \lambda_2=\sqrt{B}i, \nu_1=-\sqrt{-A}<0, \nu_2=\sqrt{-A}>0$$

мешавад. Дар ин маврид системаи фундаменталии ҳалҳои системаи муодилаҳои якҷинсаи (4.3.12) намуди:

$$\begin{cases} V_1(t,s)=\cos\sqrt{B}s\,, V_2(t,s)=\sin\sqrt{B}s\,,\\ W_1(t,s)=e^{\nu_1 t}, W_2(t,s)=e^{\nu_2 t},\end{cases}$$

ва ҳалли умумии он намуди:

$$\begin{cases} V(t,s) = \cos\sqrt{B}s\, c_1(t) + \sin\sqrt{B}s\, c_2(t), \\ W(t,s) = e^{\nu_1 t} c_3(s) + e^{\nu_2 t} c_4(s), \end{cases}$$

-ро мегирад. Дар ин мавридҳалли умумии системаи муодилаҳои ғайриякҷинсаи (4.3.10) чунин намуд мегирад:

$$V(t,s) = \cos\sqrt{B}s\, c_1(t) + \sin\sqrt{B}s\, c_2(t) - \int_{-\infty}^{s} \cos\sqrt{B}(s-\upsilon)\, W(t,\upsilon) d\upsilon,$$

$$W(t,s) = e^{\nu_1 t} c_3(s) + e^{\nu_2 t} c_4(s) - \frac{1}{\nu_2 - \nu_1} \int_{-\infty}^{t} \left[\nu_1 e^{\nu_1 (t-\tau)} - \nu_2 e^{\nu_2 (t-\tau)}\right] F(\tau,s) d\tau.$$

Ҳангоми ба системаи муодилаҳои интегро-дифференсиалии (4.3.11) баргаштан, бо назардошти шарти (4.3.15) системаи фундаменталии ҳалҳои системаи муодилаҳои интегро-дифференсиалии якҷинсаи (4.3.11) намуди:

$$\begin{cases} V_1(t,s) = 0, V_2(t,s) = 0, \\ W_1(t,s) = 0, W_2(t,s) = e^{\nu_2 t}, \end{cases}$$

-ро гирифта ҳалли умумии системаи муодилаҳои интегро-дифференсиалии ғайриякҷинсаи (4.3.9) намуди:

$$V(t,s) = -\int_{-\infty}^{s} \cos\sqrt{B}(s-\upsilon)\, W(t,\upsilon) d\upsilon, \tag{4.3.26}$$

$$W(t,s) = e^{\nu_2 t} c_4(s) - \frac{1}{\nu_2 - \nu_1} \int_{-\infty}^{t} \left[\nu_1 e^{\nu_1 (t-\tau)} - \nu_2 e^{\nu_2 (t-\tau)}\right] F(\tau,s) d\tau, \tag{4.3.27}$$

-ро мегирад.

Аз (4.3.27) қимати $W(t,s)$-ро ба (4.3.26) гузошта, ҳалли муодилаи интегро-дифференсиалии дученакаи (4.3.7)-ро дар намуди зерин ҳосил мекунем:

$$V(t,s) = -e^{\nu_2 t} \int_{-\infty}^{s} \cos\sqrt{B}(s-\upsilon)\, c_4(\upsilon) d\upsilon +$$

$$+\frac{1}{\nu_2-\nu_1} \int_{-\infty}^{s} \cos\sqrt{B}(s-\upsilon) \int_{-\infty}^{t} \left[\nu_1 e^{\nu_1(t-\tau)} - \nu_2 e^{\nu_2(t-\tau)}\right] F(\tau,\upsilon) d\tau d\upsilon. \quad (4.3.28)$$

Дар (4.3.28) дар асоси гузориши (4.3.3) ба тағйирёбандаҳои аввала баргашта, ҳосил мекунем:

$$u(x,y) = -e^{\nu_2\mu_\alpha(x)} \int_{b}^{y} \cos\sqrt{B}\left(\mu_\beta(y)-\mu_\beta(s)\right) c_4\left(\mu_\beta(s)\right) \frac{ds}{(s-b)^\beta} +$$

$$+\frac{1}{\nu_2-\nu_1}\int_{b}^{y} \cos\sqrt{B}\left(\mu_\beta(y)-\mu_\beta(s)\right) \times$$

$$\times \int_{a}^{x} \left[\nu_1 e^{\nu_1(\mu_\alpha(x)-\mu_\alpha(t))} - \nu_2 e^{\nu_2(\mu_\alpha(x)-\mu_\alpha(t))}\right] f(t,s) \frac{dt}{(t-a)^\alpha}\frac{ds}{(s-b)^\beta}, \quad (4.3.29)$$

ё ин ки

$$u(x,y) = -e^{\nu_2\mu_\alpha(x)} \int_{b}^{y} \cos\sqrt{B}\left(\mu_\beta(y)-\mu_\beta(s)\right) c_4\left(\mu_\beta(s)\right) d\left(\mu_\beta(s)\right) +$$

$$+\frac{1}{\nu_2-\nu_1}\int_{b}^{y} \cos\sqrt{B}\left(\mu_\beta(y)-\mu_\beta(s)\right) \times$$

$$\times \int_{a}^{x} \left[\nu_1 e^{\nu_1(\mu_\alpha(x)-\mu_\alpha(t))} - \nu_2 e^{\nu_2(\mu_\alpha(x)-\mu_\alpha(t))}\right] f(t,s) d\left(\mu_\alpha(t)\right) d\left(\mu_\beta(s)\right). \quad (4.3.30)$$

Дар $(4.3.30)$, азбаски $\nu_2 > 0$ аст, пас аз функсияи $f(t,s)$ талаб менамоем, ки ҳангоми $t \to a$ ба сифр майл намуда, рафторашон аз рӯйи формулаҳои ассимптотикии зерин муайян карда шавад:

$$f(t,s) = o\left[e^{\delta_1 \mu_\alpha(t)} f_1(s)\right],\ \ \delta_1 > \nu_2,\ \ \text{ҳангоми}\ t \to a. \qquad (4.3.31)$$

Бо иҷро шудани шарти $(4.3.31)$ интегралҳои тарафи рости баробарии $(4.3.30)$ наздикшаванда мешавад ва ҳалли умумии муодилаи (4.3.1) ба воситаи формулаи (4.3.30) ифода карда мешавад.

Ҳамин тавр, теоремаи зерин ҷой дорад.

Теоремаи 4.3.3. «*Бигузор, дар муодилаи* $(4.3.1)$ $A < 0, B > 0$ *бошад. Функсияи* $f(t,s)$ *ҳангоми* $t \to a$ *ба сифр майл намуда, рафтораш аз рӯйи формулаи ассимптотикии* $(4.3.31)$ *муайян карда шавад. Он гоҳ ҳалли умумии муодилаи интегро-дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусии таназзулёбанда бо ядрои барзиёдсингулярии* $(4.3.1)$ *аз синфи* $C^2(R)$ *ба воситаи формулаи* $(4.3.30)$ *ифода карда мешавад»[4-М].*

4. Бигузор дар $(4.3.14)$ $A > 0, B < 0$ бошад, он гоҳ

$$\lambda_1 = -\sqrt{-B} < 0,\ \ \lambda_2 = \sqrt{-B} > 0,\ \ \nu_1 = -\sqrt{A}i,\ \ \nu_2 = \sqrt{A}i$$

мешавад. Дар ин маврид системаи фундаменталии ҳалҳои системаи муодилаҳои якҷинсаи $(4.3.12)$ намуди:

$$\begin{cases} V_1(t,s) = e^{\lambda_1 s}, & V_2(t,s) = e^{\lambda_2 s}, \\ W_1(t,s) = \cos\sqrt{A}t, & W_2(t,s) = \sin\sqrt{A}t\,, \end{cases}$$

ва ҳалли умумии он намуди:

$$\begin{cases} V(t,s) = e^{\lambda_1 s} c_1(t) + e^{\lambda_2 s} c_2(t), \\ W(t,s) = \cos\sqrt{A}t\, c_3(s) + \sin\sqrt{A}t\, c_4(s), \end{cases}$$

-ро мегирад. Дар ин маврид ҳалли умумии системаи муодилаҳои ғайриякҷинсаи (4.3.10) бо ёрии формулаҳои зерин ифода мегардад:

$$V(t,s) = e^{\lambda_1 s} c_1(t) + e^{\lambda_2 s} c_2(t) - \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \int_{-\infty}^{s} \left[\lambda_1 e^{\lambda_1 (s-v)} - \lambda_2 e^{\lambda_2 (s-v)}\right] W(t,v)dv,$$

$$W(t,s) = \cos\sqrt{A}t\, c_3(s) + \sin\sqrt{A}t\, c_4(s) - \int_{-\infty}^{t} \cos\sqrt{B}(t-\tau)\, F(\tau,s)d\tau.$$

Дар ин ҳолат системаи фундаменталии ҳалҳои системаи муодилаҳои интегро-дифференсиалии (4.3.11) функсияҳои зерин мебошад:

$$\begin{cases} V_1(t,s) = 0, \quad V_2(t,s) = e^{\lambda_2 s}, \\ W_1(t,s) = 0, \quad W_2(t,s) = 0, \end{cases}$$

ва ҳалли умумии системаи муодилаҳои интегро-дифференсиалии ғайриякҷинсаи (4.3.9) намуди:

$$V(t,s) = e^{\lambda_2 s} c_2(t) - \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \int_{-\infty}^{s} \left[\lambda_1 e^{\lambda_1 (s-v)} - \lambda_2 e^{\lambda_2 (s-v)}\right] W(t,v)dv, \quad (4.3.32)$$

$$W(t,s) = -\int_{-\infty}^{t} \cos\sqrt{B}(t-\tau)\, F(\tau,s)d\tau, \quad (4.3.33)$$

-ро мегирад.

Аз (4.3.33) қимати $W(t,s)$-ро ба (4.3.32) гузошта, ҳалли муодилаи интегро-дифференсиалии дученакаи (4.3.7)-ро дар намуди зерин ҳосил мекунем:

$$V(t,s) = e^{\lambda_2 s} c_2(t) +$$

$$+\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\int_{-\infty}^{s}\left[\lambda_1 e^{\lambda_1(s-\upsilon)} - \lambda_2 e^{\lambda_2(s-\upsilon)}\right]\int_{-\infty}^{t}\cos\sqrt{B}(t-\tau)\,F(\tau,\upsilon)d\tau d\upsilon. \quad (4.3.34)$$

Дар (4.3.34) ба тағйирёбандаҳои аввала бармегардем:

$$u(x,y) = e^{\lambda_2\mu_\beta(y)}c_2\big(\mu_\alpha(x)\big) +$$

$$+\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\int_{b}^{y}\left[\lambda_1 e^{\lambda_1\left(\mu_\beta(y)-\mu_\beta(s)\right)} - \lambda_2 e^{\lambda_2\left(\mu_\beta(y)-\mu_\beta(s)\right)}\right]\times$$

$$\times\int_{a}^{x}\cos\sqrt{B}\big(\mu_\alpha(x)-\mu_\alpha(t)\big)\,f(t,s)\frac{dt}{(t-a)^\alpha}\frac{ds}{(s-b)^\beta}$$

ё ин ки

$$u(x,y) = e^{\lambda_2\mu_\beta(y)}c_2\big(\mu_\alpha(x)\big) +$$

$$+\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\int_{b}^{y}\left[\lambda_1 e^{\lambda_1\left(\mu_\beta(y)-\mu_\beta(s)\right)} - \lambda_2 e^{\lambda_2\left(\mu_\beta(y)-\mu_\beta(s)\right)}\right]\times$$

$$\times\int_{a}^{x}\cos\sqrt{B}\big(\mu_\alpha(x)-\mu_\alpha(t)\big)\,f(t,s)d\Big(\mu_\alpha(t)\Big)\,d\Big(\mu_\beta(s)\Big). \quad (4.3.35)$$

Азбаски, дар (4.3.35) $\lambda_2 > 0$ аст, пас аз функсияи $f(t,s)$ талаб менамоем, ки ҳангоми $s \to b$ ба сифр майл намуда, рафторашон аз рӯйи формулаҳои ассимптотикии зерин муайян карда шавад:

$$f(t,s) = o\left[e^{\delta_1\mu_\beta(s)}f_1(t)\right], \delta_1 > \lambda_2, \ \text{ҳангоми } s \to b. \quad (4.3.36)$$

Бо иҷро шудани шарти (4.3.36) интегралҳои тарафи рости баробарии (4.3.35) наздикшаванда мешавад ва ҳалли умумии муодилаи (4.3.1) ба воситаи формулаи (4.3.35) ифода карда мешавад.

Ҳамин тавр, теоремаи зерин ҷой дорад.

Теоремаи $\mathbf{4.3.4}$. «*Бигузор, дар муодилаи* $(4.3.1)$ $A>0, B<0$ *бошад. Функсияи* $f(t,s)$ *ҳангоми* $s\to b$ *ба сифр майл намуда, рафтораш аз рӯйи формулаи ассимптотикии* $(4.3.36)$ *муайян карда шавад. Он гоҳ ҳалли умумии муодилаи интегро-дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусии таназзулёбанда бо ядрои барзиёдсингулярии* $(4.3.1)$ *аз синфи* $C^2(R)$ *ба воситаи формулаи* $(4.3.35)$ *ифода карда мешавад»[4-М]*.

Хулосаҳои боби чорум

Дар ин боб хосиятҳои ҳалҳои муодилаи дифференсиалии моделии тартиби дуюми таназзулёбанда омӯхта шуда, масъалаи ҳалшавандагии масъалаи навъи Коши барои муодилаи дифференсиалии моделии тартиби дуюми барзиёдтаназзулёбанда таҳқиқ гардидааст. Оид ба яккимата ҳалшавандагии масъалаҳои навъи Коши A_1-A_3 се теоремаҳо, яъне теоремаҳои 4.2.1-4.2.3 исбот карда шудааст.

Дар параграфи 4.3-и ин боб оид ба ҳалшавандагии як синфи муодилаҳои интегро-дифференсиалии дученака ба ядрои барзиёдсингулярӣ натиҷаҳои муайян дар шакли теоремаҳои 4.3.1-4.3.4 исбот карда шудааст.

Гузорише ёфта шудааст, ки бо истифода аз он муодилаи интегро-дифферениалии таҳқиқшаванда ба муодилаи дифференсиалӣ бо коэффисиентҳои доимӣ оварда мешавад.

ТАҲЛИЛИ НАТИҶАҲОИ АСОСИИ ДИССЕРТАТСИЯ

Таҳлили кӯтоҳи натиҷаҳои асосии диссертатсияро дар шакли зерин меорем.

Дар **боби якуми** диссертатсия маълумоти умумӣ оид ба баъзе муодилаҳои дифференсиалии одӣ бо коэффисиентҳои махсус оварда шудааст. Оид ба намуди умумии муодилаҳои дифференсиалии Гаусс:

$$x(1-x)y'' + [c-(a+b+1)x]y' - aby = 0,$$

Лежандр:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0,$$

Чебишев:

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2y = 0$$

ва намуди ҳалли умумии ин муодилаҳо маълумотҳо оварда шудааст. Инчунин, оид ба муодилаҳои дифференсиалии одии тартиби олӣ низ маълумотҳои зарурӣ пешниҳод карда шудааст.

Дар **зербоби якуми боби дуюми** диссертатсия як синфи муодилаҳои дифференсиалии одии таназзулёбандаи

$$[\omega(x)]^n y^{(n)} + a_1[\omega(x)]^{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\omega(x)y' + a_n y = f(x),$$

ки дар ин ҷо $a_i \ (i=\overline{1,n})-$ ададҳои доимӣ, $f(x)-$ функсияи додашудаи бефосила дар Г, $\omega(x)-$ функсияе ки дар ягон нуқтаи интервали Г ба сифр табдил меёбад ва $y=y(x)-$ функсияи номаълум мебошад, мавриди таҳқиқот қарор гирифтааст.

Дар **зербобҳои дуюм ва сеюми** ин боб муодилаи умумикардашудаи Эйлери тартиби якуми

$$\omega(x)y' + a_1 y = f(x)$$

дар ҳолатҳои $a_1 = const$ ва $a_1 = a_1(x)$ таҳқиқ карда шуда, ҳалли умумии он бо ёрии як доимии ихтиёрӣ ифода карда шудааст. Чунин формулаи ивази тағйирёбанда ёфта шудааст, ки ҳангоми амалӣ намудани он муодилаи таҳқиқшаванда ба муодилаи дифференсиалӣ бо коэффисиентҳои доимӣ оварда мешавад.

Дар **зербоби чоруми боби дуюм** муодилаи умумикардашудаи Эйлери тартиби дуюм бо коэффисиенти доимии

$$[\omega(x)]^2 y'' + a_1\omega(x)y' + a_2 y = f(x)$$

ки дар ин ҷо $a_i \ (i = 1,2) -$ ададҳои додашуда, $f(x) -$ функсияи бефосила дар Г мебошад, таҳқиқ карда шуда, шарти зарурӣ ва кифоягии овардашаванда будани ин синфи муодилаҳо ба муодилаҳои дифференсиалӣ бо коэффисиентҳои доимӣ дар шакли як теорема исбот карда шудааст. Чунин намуди коэффисиентҳои муодилаи умумикардашудаи Эйлер муайян карда шудааст, ки барои ин гуна коэффисиентҳо муодила ба муодилаи дифференсиалӣ бо коэффисиентҳои доимӣ оварда мешавад. Яъне, агар коэффисиентҳои муодилаи

$$[\omega(x)]^2 y'' + A_1(x)[\omega(x)]y' + A_2(x)y = f(x),$$

намуди

$$\begin{cases} A_1(x) = a_1 + \omega'(x), \\ A_2(x) = a_2. \end{cases}$$

-ро дошта бошанд, пас бо ёрии гузориши

$$t = \mu(x) = \int \frac{dx}{\omega(x)}$$

он ба муодилаи

$$z''(t) + a_1 z'(t) + a_2 z(t) = F(t)$$

оварда мешавад.

Баъдан дар ин параграф вобаста аз решаҳои муодилаи характеристикии

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$$

дар се ҳолат ҳалли умумии муодилаи умумикардашудаи якҷинсаи Эйлер ёфта шудааст.

Дар **зербоби 2.5** ҳалли умумии муодилаи умумикардашуда ғайриякҷинсаи Эйлер дар ҳолатҳои $\omega(x) \in C[a,b]$ ва $\omega(x) = (x-a)^\alpha, \alpha > 1$ будан, ёфта шудааст.

Зербоби 2.6 ба таҳқиқи муодилаи ғайримоделии

$$[\omega(x)]^2 y'' + a_1[\omega(x)]y' + a_2 y = f(x)$$

ҳангоми $\omega(x) = (x-a)^\alpha, \alpha > 1$ будан, бахшида шудааст. Дар ин ҳолат ёфтани ҳалҳои ошкорои ин муодила ғайриимкон мебошад. Бинобар ин ҳолатҳое ҷудо карда шудааст, ки ҳалли муодилаи дифференсиалӣ ба ҳалли муодилаи интегралии намуди Волтерра бо ядрои регулярӣ оварда мешавад. Дар ин гуна ҳолатҳо ҳалли муодилаи умумикардашудаи Эйлер ба воситаи резолвентаи муодилаи интегралии намуди Волтерра ифода карда мешавад. Ин натиҷаҳо дар шакли теоремаҳои 2.6.1-2.6.3 исбот карда шудаанд.

Дар **зербоби якуми боби сеюм** муодилаи моделии таназзулёбандаи тартиби олии намуди Эйлер

$$[\omega(x)]^n y^{(n)} + a_1[\omega(x)]^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\omega(x)y' + a_n y = f(x),$$

ки дар ин ҷо $a_i\ (i = \overline{1,n}) -$ ададҳои доимӣ, $f(x) -$ функсияи додашуда ва $\omega(x) -$ функсияи додашуда дар Г мебошад, дида баромада шудааст. Дар ин параграф барои ёфтани ҳосилаи функсияҳои мураккаб леммаи 3.1.1 оварда ва исбот карда шудааст. Баъдан, барои муодилаи таҳқиқшаванда чунин намуди ивази тағйирёбандаҳо ёфта шудааст, ки дар натиҷаи он муодилаи таназзулёбанда метавонад ба муодилаи дифференсиалӣ бо коэффисиентҳои доимӣ оварда шавад. Инчунин, дар теоремаи 3.1.2 исбот карда мешавад, ки агар функсияи $\omega(x)$ аз функсияи хаттӣ фарқ намояд, пас муодилаи таназзулёбандаро бо ин гуна функсияи $\omega(x)$ ба муодилаи дифференсиалӣ бо коэффисиентҳои доимӣ овардан мумкин нест.

Дар **зербоби 3.2-**и ин боб муодилаи диффференсиалии якҷинсаи намуди Эйлер бо коэффисиентҳои тағйирёбанда

$$[\omega(x)]^n y^{(n)} + A_1(x)[\omega(x)]^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + A_{n-1}(x)\omega(x)y' + A_n(x)y = f(x),$$

ки $f(x)$, $A_i(x)\ (i = \overline{1,n}) -$ функсияҳои дар Г бефосила, $\omega(x) -$ метавонад дар ягон нуқтаи $x \in$ Г ба сифр баробар бошад, дида баромада шудааст. Дар теоремаи 3.2.1. исбот карда мешавад, ки барои он ки муодилаи умумикардашудаи тартиби n –уми намуди Эйлер ба муодилаи тартиби n –ум бо коэффисиентҳои доимӣ оварда шавад, бояд коэффисиентҳои он $A_k(x)\ (k = \overline{1,n})$ намуди муайянро дошта бошанд. Баъдан дар ин параграф вобаста аз решаҳои муодилаи характеристикии

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

ҳалли умумии муодилаи якҷинсаи моделӣ дар панҷ ҳолати решаҳои муодилаи характеристикӣ ёфта шудааст.

Дар **зербоби сеюми боби се** муодилаи моделии умумикардашудаи тартиби n –уми ғайриякҷинсаи намуди Эйлер таҳқиқ карда шуда, дар ҳолатҳои гуногуни решаҳои муодилаи характеристикӣ барои муодилаи ғайриякҷинса функсияи Коши сохта шудааст.

Дар **зербоби якуми боби чорум** хосиятҳои ҳалҳои муодилаи дифференсиалии таназзулёбандаи тартиби дуюм омӯхта шуда, рафтори ин ҳалҳо дар атрофи нуқтаи махсуси муодила омӯхта шудааст.

Дар **зербоби 4.2** барои муодилаи таназзулёбандаи тартиби дуюм масъалаи Коши дар нуқтаи махсуси муодила, яъне нуқтаи $x = a$ гузошта шуда, оид ба ҳалшавандагии ин масъала теоремаҳои 4.2.1 – 4.2.3 исбот карда шудааст.

Дар **зербоби сеюми боби чор** натиҷаҳои дар параграфҳои пешина бадастовардашуда, дар ҳалли муодилаи интегро-дифференсиалии дученакаи тартиби дуюм бо ядроҳои барзиёдсингулярии

$$D_x^\alpha D_y^\beta U(x,y) + \int_a^x \frac{A}{(t-a)^\alpha} D_y^\beta U(t,y)dt + \int_b^y \frac{B}{(s-b)^\beta} D_x^\alpha U(x,s)ds +$$
$$+ \int_a^x \frac{C}{(t-a)^\alpha} \int_b^y \frac{1}{(s-b)^\beta} U(t,s)dtds = f(x,y),$$

татбиқ карда шудааст. Дар ин параграф нишон дода шудааст, ки ҳалли ин муодилаи интегро-дифференсиалии дученака бо ядрои барзиёдсингулярӣ ба ҳалли системаи ду муодилаҳои интегралии якченака бо ядрои регулярӣ, вале бо ҳудудҳои номаҳдуди намуди

$$\begin{cases} V_s'(t,s) + B \int\limits_{-\infty}^{s} V(t,\upsilon)d\upsilon = W(t,s), \\ W_t'(t,s) + A \int\limits_{-\infty}^{t} W(\tau,s)d\tau = F(t,s). \end{cases}$$

оварда мешавад.

ХУЛОСАҲО

1. Натиҷаҳои асосии илмии диссертатсия

Натиҷаҳои илмии бадастовардашуда нав буда, аз тарафи муаллиф мустақилона ба даст оварда шудааст ва аз инҳо иборат мебошанд:

- ҳалли умумии муодилаи таназзулёбандаи тартиби якум дар ҳолати модели ва ғайримоделӣ ёфта шудааст [1-М], [2-М], [7-М];
- ҳалли умумии муодилаи моделии таназзулёбандаи тартиби дуюм дар се ҳолати решаҳои муодилаи характеристикӣ ёфта шудааст [1-М], [2-М], [7-М];
- ҳалли умумии муодилаи ғайримоделии таназзулёбандаи тартиби дуюм дар се ҳолати решаҳои муодилаи характеристикӣ ба воситаи резолвентаи муодилаи интегралии намуди Волтерраи мувофиқоянда ёфта шудааст [1-М], [2-М], [7-М];
- ҳалли умумии муодилаи якҷинсаи таназзулёбандаи тартиби олӣ дар панҷ ҳолати решаҳои муодилаи характеристикӣ дар намуди ошкор ёфта шудааст [1-М], [2-М], [7-М];
- барои муодилаи ғайриякҷинсаи таназзулёбандаи тартиби олӣ дар панҷ ҳолати решаҳои муодилаи характеристикӣ функсияи Коши сохта шудааст [1-М], [2-М], [7-М];
- хосиятҳои ҳалҳои муодилаи дифференсиалии таназзулёбандаи тартиби дуюм омӯхта шуда, рафтори ҳал дар атрофи нуқтаи махсуси муодила муайян карда шудааст;
- барои муодилаи дифференсиалии таназзулёбандаи тартиби дуюм масъалаи навъи Коши гузошта шуда, таҳқиқ карда шудааст;
- муодилаи интегро-дифференсиалии дученакаи тартиби дуюм бо ядрои сингулярӣ бо роҳи ба муодилаи дифференсиали бо коэффисиентҳои доимӣ овардан таҳқиқ гардида, ҳалаш дар намуди ошкор навишта шудааст.

2. Тавсияҳо оид ба истифодаи амалии натиҷаҳо

Дар диссертатсия натиҷаҳои илмӣ бо хислати назариявӣ ба даст оварда шудаанд. Усули пешниҳоднамудаи муаллиф барои ҳалли муодилаҳои дифференсиалии таназзулёбанда имкон медиҳад, ки як қатор муодилаҳои дифференсиалии дорои хосиятҳои хоси таназзулёбанда мавриди омӯзиши амиқ қарор гиранд. Ҳамчунин, бо истифода аз ин усул имкон фароҳам меояд, ки синфҳои муайяни муодилаҳои интегралӣ таҳқиқ гардида ҳалашон дар намуди ошкор ба даст оварда шавад

Методҳои дар диссертатсия татбиқгардидаро, барои таҳқиқи муодилаҳои интегро-дифференсиалӣ бо коэффисиентҳои сингулярӣ ва барзиёд-сингулярӣ татбиқ намудан мумкини аст.

Натиҷаҳои илмии бадастовардашуда метавонад ҳамчун манбаи муҳими илмӣ-методӣ барои донишҷӯёни курсҳои болоӣ, магистрон ва докторантони ихтисосҳои математика, математикаи амалӣ ва механика ҳангоми омӯзиши курсҳои махсус истифода гардад.

Инчунин, барои муҳақиқони ҷавон ҳангоми иҷрои корҳои илмӣ-тадқиқотӣ ва навиштани диссертатсияҳои илмӣ натиҷаҳои дар диссертатсия ҳосилгардида метавонад истифода гардад.

РӮЙХАТИ АДАБИЁТ

1. Феҳристи сарчашмаҳои истифодашуда

1. Gauss C.F. Disquisitiones generales circa seriem infinitam $1+\frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2+\cdots$ [Text] / C.F. Gauss // Commentationes societatis regiae scientarum Gottingensis Recentiores. – Göttingen. – 1813. – № 2.
2. Carroll R.W. Transmutation and operator differential equations [Text] / R.W. Carroll. – Amsterdam-New York-Oxford: North. Holland. – 1979.
3. Carroll R.W. Singular and Degenerate Cauchy Problems [Text] / / R.W. Carroll, R.E. Showalter // Academic Press, New York, San Francisco, London. – 1976. – 333p.
4. Diaz J.B. A solution of the singular initial value problem for the Euler-Poisson equation [Text] / J.B. Diaz, H.F. Weinberger // Proc. Am. Math. Soc. – 1953. – No. 4. – P. 703-715.
5. Frobenius Q. Uber die Integration der linearen Differentialgleichungen durch Eteihen [Text] / Q. Frobenius // J. fur Math. – 1873. – 76. – P. 214-235.
6. Fuchs L. Zur Theorie der linearen Diffrentialgleichungen mit veränderlichen Coeffiienten [Text] / L. Fuchs // J. Reine Angew. Math. – 1868. – Vol. 68. – P. 354-385.
7. Fuchs L. Über eine Klasse von Functionen mehrerer Variabeln, welche durch Umkehrung der Integrale von Lösungen der linearen Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten entstehen [Text] / L. Fuchs // Journal für Mathematik. – 1880. – Vol. 89. – P. 151-169.
8. Gilbert R.P. Integral operator methods for generalized axially symmetric potentials in $n+1$ variables [Text] / R.P. Gilbert // J. Austrial Math. Soc. – 1905. – No. 5. – P. 331-348.

9. Gilbert R.P. Poissons equation and generalized axially symmetric potential theory [Text] / R.P. Gilbert // Annali di Mathematica Pura Appe. – 1963. – Vol. 51. – P. 337-348.
10. Karp D. Hypergeometric functions as generalized Stieltjes transforms [Text] / D. Karp, E. Prilepkina // J. Math. Anal. Appl. – 2012. – Vol. 393. – No. 2. – P. 348-359.
11. Klein F. Über lineare Differentialgleichungen der zweiten Ordnung [Text] / F. Klein. – Göttingen, 1914. P. 175-183.
12. Kilbas A.A. Euler-type non-homogeneous differential equations with three Liouville fractional derivatives [Text] / A.A. Kilbas, N.V. Zhukovskaya // Fract. Calc. Appl. Anal. – 2009. – Vol. 12. – No. 2. – P. 205-234.
13. Poincaré H. Theorie des Groupes Fuchsiens [Text] / H. Poincaré // Acta Mathematica. – 1882. – Vol. 1. – P. 1-63.
14. Rajabov N. Introduction to ordinary differential equations with singular and super-singular coefficients [Text] / N. Rajabov. – TSNU. Dushanbe, 1998. – 150p.
15. Rajabov N. Higher order ordinary differential equation with singular and super singular coefficients [Text] / N. Rajabov // Seventh International Scientific Kravchuk Conference. Kyiv. – 1998. – P. 425.
16. Rajabov N. Linear conjugate boundary value problems for the second order linear ordinary differential equation with super-singular coefficients [Text] / N. Rajabov // International congress of Mathematicians. Berlin. – 1988. – P. 186.
17. Rajabov N. Linear conjugate boundary value problems for the first order ordinary system of linear differential equation with singular and super-singular coefficients [Text] / N. Rajabov // Proceeding of the Second ISAAC Congress. Kluwer Academic Publishing. – 2000. – P. 175-183.
18. Rajabov N. Higher ordinary differential equation with super-singular points [Text] / N. Rajabov // Abstract ISAAC Congress. University of Delaware. New York, USA. – 1997. P. 75-83.

19. Rajabov N. An introduction to the theory of partial differential equations with super-singular coefficients [Text] / N. Rajabov // – Tehran, 1997. – 230 p.
20. Rajabov N. Linear conjugate boundary value problems for the first order linear ordinary system differential equation with singular and super-singular coefficients [Text] / N. Rajabov // Abstract of Plenary and invited Lectures Delivered at the second ISAAC Congress. –Fukuoka, Japan. – 1999. – P. 16-21.
21. Rajabov N. Higher ordinary differential equation with super-singular points [Text] / N. Rajabov // Kluwer Academic Publishers. – 1999. – P. 36-45.
22. Rajabov N. Linear conjugate boundary value problems for the general first order linear ordinary system differential equation with singular and super-singular points [Text] / N. Rajabov // Abstract «Third European Congress of Mathematics». – Barcelona, 2000. – 8/7. P. 65-70.
23. Rajabova L. The explicit Representation of Manifold solutions for a third order equation with super singular point [Text] / L. Rajabova // Boundary Value Problems, Integral Equations and Related Problems. – New Jersey, London, Hong Gong, 2000. – P. 150-154.
24. Rajabov N. Integral representations and boundary value problems for some linear elliptic system of second order with regular and singular coefficients [Text] / N. Rajabov // Presiding International Conference «Complex Analysis and Applications». – Varna, 2008. – P. 431-441.
25. Shishkina E.L. Singular Cauchy problem for the general Euler-Poisson-Darboux equation [Text] / E.L. Shishkina // Open Math. – 2018. – No. 16. – P. 23-31.
26. Zarifzoda S.K. New Type Super Singular Integro-Differential Equation and Its Conjugate Equation [Text]/ T.K. Yuldashev, S.K. Zarifzoda // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2020. – Vol. 41. – No. 6. – P. 1123-1130.

27. Zarifzoda S.K. Finding the Explicit Solutions of a Second-Order Differential Equation of Riemann-type with Many Singular Points [Text] / S.K. Zarifzoda // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2022. – Vol. 43. – No. 11. – P. 3335-3343.
28. Zarifzoda S.K. Construction of the bases of operational calculus for a differential operator with two singular points [Text] / S.K. Zarifzoda // Uzbek Mathematical Journal. – 2022. – Vol. 66 – No. 4. – P.183-196.
29. Агранович М.С. Эллиптические псевдо-дифференциальные операторы [Текст] / М.С. Агранович. – М.: 2003, 2004. – Ч. 1, 2.
30. Байзаев С. Ограниченные решения некоторых обыкновенных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве [Текст] / С. Байзаев, Э. Мухамадиев // Вестник Таджикского государственного университета права, бизнеса и политика. – 2010. – №1. – С. 108-112.
31. Бободжонов А.А. Метод нормальных форм в сингулярно возмущенных системах интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма с быстро изменяющимися ядрами [Текст] / А.А. Бободжонов, В.Ф. Сафонов // Математический сборник. – 2013. – Т. 204. – № 7. – С. 47-70.
32. Бойматов К.Х. Коэрцитивные свойства сильно вырождающихся эллиптических уравнений [Текст] / К.Х.Бойматов // Доклады АН СССР. –1993. –Т.330. –№ 4. –С. 409-414.
33. Вирченко Н.А. О некоторых краевых задачах для простейших эллиптических уравнений с двумя линиями вырождения [Текст] / Н.А. Вирченко // Доклады АН УССР. Сер. А. – 1974. – №7. – С. 582-585.
34. Вишик М.И. Краевые задачи для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области [Текст] / М.И. Вишик, В.В. Грушин // Мат. Сборник. – 1969. – № 80. – С. 455-491.
35. Вихрева О.А. О первой краевой задаче для сильно вырождающеюся обыкновенного дифференциального уравнения [Текст] / О.А. Вихрева // Математические заметки СВФУ. – 2018. – Т.25. – № 2. – С. 3-11.

36. Волк В.Я. О формулах обращения для дифференциального уравнения с особенностью при $x = 0$ [Текст] / В.Я. Волк // Успехи мат. наук. – 1953. – Т. 111. – № 4. – С. 141-151.
37. Врагов В.Н. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики [Текст] / В.Н. Врагов. Новосибирск: НГУ. – 1983. – 183 с.
38. Глушак А.В. О возмущении абстрактного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу [Текст] / А.В. Глушак // Мат. заметки. – 1996. – Т. 60. – № 3. – С. 363-369.
39. Голубев В.В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений [Текст] / В.В. Голубев. М., Л.: Гостехтеоретиздат. – 1950. – 436 с.
40. Дадоджонова М.Я. Интегральные представления решений и задача Коши-Рикье для уравнения, полученного итерированием обыкновенного дифференциального оператора первого порядка с внутренней сингулярной точкой [Текст] / М.Я. Дадоджонова, А.Г Олимов. // Современные проблемы математики и её преподавания. Специальный выпуск Учёные записки Худжандского госуниверситета им. академика Б. Гафурова. – 2014. – Ч.1. – №2. – С. 147-150.
41. Джураев А.Д. Об одном случае вырождения эллиптической системы первого порядка на плоскости [Текст] / А.Д. Джураев // Доклады АН Тадж. ССР. – 1972. – Т. 15. – № 1. – С. 3-5.
42. Джураев Х.Ш. Об одном подходе к проблеме регуляризации задачи Коши для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу [Текст] / Х.Ш.Джураев // Дифференциальные уравнения. – 2007. – Т. 43. – № 5. – С. 701-705.
43. Егоров И.Е. Неклассические дифференциально-операторные уравнения [Текст] / И.Е. Егоров, С.Г. Пятков, С.В. Попов. – Новосибирск: Наука, 2000. – 335 с.
44. Житомирский Я.И. Задача Коши для систем линейных уравнений в частных производных с дифференциальными операторами типа

Бесселя [Текст] / Я.И. Житомирский // Мат. сборник. – 1955. – Т. 36. – № 2. – С. 299-310.
45. Зарипов С.К. Дифференциальные уравнения с сингулярными коэффициентами [Текст] / Н. Раджабов, Л.Н. Раджабова, С.К. Зарипов. – Germany: LAP LAMBERT Academic Publishing. – 2017. – 115с.
46. Зарипов С.К. Линейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с двумя граничными сингулярными точками [Текст] / С.К. Зарипов, Н. Раджабов // Вестник Таджикского государственного национального университета. – 2008. – №1(42). – С. 37-46.
47. Зарипов С.К. Решение немодельного линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с двумя граничными сингулярными точками [Текст] / С.К. Зарипов, Н. Раджабов // Вестник Таджикского национального университета. – 2009. – №1(49). – С. 3-14.
48. Зарипов *С.К.* К теории одного класса немодельного линейного обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка с двумя граничными сингулярными точками [Текст] / С.К. Зарипов, Н. Раджабов // Известия АН РТ, отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. наук. – 2009. – №1(134). – С. 7-16.
49. Зарипов С.К. К теории одного класса немодельного линейного обыкновенного дифференциального уравнения n - го порядка с двумя граничными сингулярными точками [Текст] / С.К. Зарипов, Н. Раджабов // Известия АН РТ, отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. наук. – 2010. – №2(139). – С. 7-17.
50. Зарипов С.К. Об одном классе линейного гиперболического уравнения четвёртого порядка с четырьмя сингулярными линиями [Текст] / С.К. Зарипов, Н. Раджабов // Вестник Таджикского национального университета. – 2011. – №7(71). – С. 3-9.
51. Зарипов С.К. Постановка задач типа Коши для линейного дифференциального уравнения в частых производных четвёртого порядка с четырьмя сингулярными линиями [Текст] / С.К. Зарипов //

Вестник Таджикского национального университета. – 2013. – №1/3(110). – С. 3-7.

52. Зарипов С.К. Об одном классе модельного интегро-дифференциального уравнения с одной сингулярной точкой в ядре [Текст] / С.К. Зарипов // Вестник Таджикского национального университета. – 2015. – №1/4 (168). – С. 54-57.

53. Зарипов С.К. Исследование устойчивости решения одного класса линейного дифференциального уравнения второго порядка с сингулярным коэффициентом [Текст] / С.К. Зарипов // Вестник Таджикского национального университета. – 2015. – №1/4 (168). – С. 28-36.

54. Зарипов С.К. Решения одного класса модельных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с сингулярным ядром [Текст] / С.К. Зарипов, Н. Раджабов // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. – 2017. – Т. 60. – №3-4. – С. 118-125.

55. Зарипов С.К. S – Интегральное преобразование и его основные свойства [Текст] / С.К. Зарипов // Вестник Таджикского национального университета. – 2019. – № 1. – С. 50-56.

56. Зарипов С.К. S – Интегральное преобразование и его применения для решения сингулярных интегро-дифференциальных уравнений [Текст] / С.К. Зарипов // Вестник Таджикского национального университета. – 2019. – № 1. – С. 100-104.

57. Зарипов С.К. Исследование одного класса операторно-дифференциального уравнения *n* – го порядка [Текст] / С.К. Зарипов, У. Таманно, Ю. Каримов // Вестник филиала московского государственного университета имени М.В. Ломоносова в г. Душанбе. Серия естественных наук. – 2019. – №1,3. – С. 14-22.

58. Зарипов С.К. Исследование некоторых классов интегро-дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка

со степенно-логарифмической особенностью в ядре [Текст] / С.К. Зарипов, Р.Н. Одинаев // Вестник Томского Государственного Университета. Математика и механика. – 2020. – №67. – С. 40-54.

59. Зарифзода С.К. Интегрирование линейных операторно-дифференциальных уравнений с помощью $S\alpha$ – интегрального преобразования [Текст] / Зарифзода С.К. // Бюллетень Института математики. – 2022. – Т. 5. – №6. – С. 83-91.

60. Зарифзода С.Қ. Тадқиқи муодилаҳои интегро-дифференсиалии тартиби якуми моделӣ бо се нуқтаи махсус [Текст] / С.Қ. Зарифзода, М.Т. Розиқов // Вестник ТНУ. Серия естественных наук – 2023. – №2. – С. 19-30.

61. Зарифзода С.Қ. Тадқиқи як синфи муодилаҳои операторӣ-дифференсиалии тартиби дуюм [Текст] / С.Қ. Зарифзода, М.Т. Розиқов, М.М. Бобиев // Вестник ТНУ. Серия естественных наук – 2024. – №3. – С. 5-23.

62. Ивакин В.М. Видоизмененная задача Дирихле для вырождающихся на границе уравнений и систем [Текст] / В.М. Ивакин // Дифференциальные уравнения. – 1982. – Т. 18. – № 2. – С. 319-324.

63. Иванов В.К. Дифференциально-операторные уравнения и некорректные задачи [Текст] / В.К. Иванов, И.В. Мельникова, А.И. Филинков. – М.: Физматлит, 1995. – 384 с.

64. Илолов М. Об одном линейном дифференциальном уравнении третьего порядка [Текст] / М.Илолов, Ш.Зулфонов // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математики и её приложений», посвящённой 70–летию со дня рождения академика АН Республики Таджикистан, доктора физико-математических наук, профессора Илолова Мамадшо (14-15 марта 2018 г.). – Душанбе, 2018. – С. 108-109.

65. Исхоков С.А. О гладкости обобщенного решения эллиптического уравнения с нестепенным вырождением [Текст] / С.А.Исхоков // Дифференциальные уравнения. –2003. – С. 536-542.
66. Кадиров Г.М. Об одном обыкновенном дифференциальном уравнении четвёртого порядка, вырождающегося в левой граничной точке [Текст] / Г.М.Кадиров, Н.Раджабов // Современные проблемы математики и её преподавания. Специальный выпуск Учёные записки Худжанского госуниверситета им. академика Б. Гафурова. – 2014. – Ч. 1. – №2. – С. 172-175.
67. Кадиров Г.М. Об одном классе обыкновенных дифференциальных уравнений четвёртого порядка с одной внутренной граничной сверх-сингулярной точкой, когда корни характеристического уравнения является вещественными и разными [Текст] / Г.М.Кадиров, Н.Раджабов // Материалы республиканской научно-теоретический конференции «Неклассические уравнения математической физики и смежные вопросы анализа» (02 апреля 2016г). – Душанбе, 2016. – С. 57-59.
68. Кадиров Г.М. Интегральные представления и многообразия решений для одного класса обыкновенного дифференциального уравнения $n-$го порядка с одной внутренной сингулярной точкой [Текст] / Г.М.Кадиров, Н.Раджабов // Материалы международной научной конференции «Сингулярные интегральные уравнения и дифференциальные уравнения с сингулярными коэффициентами», посвящённой 70–летию профессора Джангибекова Гулходжа (30-31 января 2020 г.). – Душанбе, 2020. – С. 158-161.
69. Каримов Ш.Т. Об одном методе решения задачи Коши для одномерного полуволнового уравнения с сингулярным оператором Бесселя [Текст] / Ш.Т.Каримов // Известия вузов. Серия Математика. – 2017. – № 8. – С. 27-41.

70. Катрахов В.В. К теории уравнений с частными производными с сингулярными коэффициентами [Текст] / В.В.Катрахов // Доклады АН СССР. – 1974. – Т. 218. – № 1. – С. 17-20.
71. Келдыш Н.Б. О некоторых случаях вырождения уравнения эллиптического типа на границе области [Текст] / Н.Б.Келдыш // ДАН СССР. – 1951. – Т. 77. – №1. – С. 181-183.
72. Киприянов И.А. Преобразования Фурье-Бесселя и теоремы вложения для весовых классов [Текст] / И.А.Киприянов // Тр. МИАН. – 1967. – Т. 89. – С. 130-213.
73. Киприянов И.А. Об одном классе сингулярных эллиптических уравнений [Текст] / И.А.Киприянов // Сиб. мат. журнал. – 1973. – Т. 14. – № 3. – С. 560-568.
74. Кудрявцев Л.Д. Прямые и обратные теоремы вложения. Приложения к решению вариационным методом эллиптических уравнений [Текст] / Л.Д.Кудрявцев. – М.: Наука, 1959. – 182 с.
75. Курбаншоев С.З. Построение нелинейных проекторов для вырождённых сингулярных дифференциальных уравнений [Текст] / С.З.Курбаншоев // Доклады АН РТ. – 2004. – Т. XLIII. – № 4. – С. 46-52.
76. Левитан Б.М. Разложение по собственным функциям дифференциальных уравнений второго порядка [Текст] / Б.М.Левитан. – М.: Гостехиздат, 1950. – 159 с.
77. Лизоркин П.И. Эллиптическое уравнение с вырождением. Вариационный метод [Текст] / П.И.Лизоркин, С.М.Никольский // Доклады АН СССР. – 1981. – Т. 257. – № 1. – С. 42-45.
78. Маламуд М.М. Об операторах преобразования для обыкновенных дифференциальных уравнений высших порядков [Текст] / М.М.Маламуд // В сб.: «Математический анализ и теория вероятностей». – Киев: Наукова думка, 1978. – С. 108-111.

79. Михайлов Л.Г. Об одном способе исследования систем обыкновенных дифференциальных уравнений с сингулярными точками [Текст] / Л.Г.Михайлов // ДАН России. – 1994. – Т. 336. – №1. – С. 21-23.
80. Михайлов Л.Г. Об интегральных уравнениях с сингулярно-однородными ядрами [Текст] / Л.Г.Михайлов. – Душанбе, 2015. – 52 с.
81. Моисеев Е.И. Уравнения смешанного типа со спектральным параметром [Текст] / Е.И.Моисеев. – М.: Из-во МГУ, 1988. – 49 с.
82. Мустафокулов Р. О приводимости линейного однородного уравнения типа Эйлера к уравнению с постоянными коэффициентами [Текст] / Р.Мустафокулов // Международная математическая конференция по теории функций, посвященная 100-летию член-корреспондента АН СССР А.Ф.Леонтьева. Сборник тезисов (г. Уфа 24-27 мая 2017г), – С. 113-114.
83. Мустафокулов Р. Построение модельного уравнения для одного обобщения линейного уравнения Эйлера [Текст] / Р.Мустафокулов //Дифференциальная уравнения, математический анализ и теория чисел. Материалы международном конференции, посвященной XVI сессиии Верховного совета Республики Таджикистан, Курган-Тюбе, 27-28 октября 2017г., – С. 70-73.
84. Мустафокулов Р. Об одном линейном уравнении типа Эйлера с кратной характеристикой [Текст] / Р.Мустафокулов // Международная конференция, посвященная 100-летию со дня рождения С.Г. Крейна, 13-19 ноября 2017г. Сборник материалов, г. Воронеж, 2017, – С. 140-143.
85. Мустафокулов Р. Об одном обобщении линейного уравнения Эйлера [Текст] / Р.Мустафокулов //Понтрягинские чтения XXIX «Современные методы теории краевых задач». Материалы международном конференции, посвященной 90-летию В.А. Ильина (2-6 мая 2018г). Москва, 2018, – С. 163-164.

86. Мустафокулов Р. Об одном дифференциальном уравнении 4-го порядка типа Эйлера [Текст] / Р.Мустафокулов //Материалы научно-практической конференции «VIII-е Ломоносовские чтения» Актуальные проблемы естественных и гуманитарных наук. Филиал МГУ им. М.В. Ломоносова в г. Душанбе, 27-28 апреля 2018г. – С. 10-15.
87. Мустафокулов Р. Об одном линейном дифференциальном уравнении второго порядка с особой точкой [Текст] / Р.Мустафокулов // Вестник ТНУ. Серия естественных наук. – Душанбе, – 2016г. – №1/4 (196) – С. 13-18.
88. Мустафокулов Р. Интегральные представления решения одного линейного уравнения типа Эйлера в случае простых характеристик [Текст] / Р.Мустафокулов // Материалы междунар. конфер. «Современные методы теории краевых задач». Воронежская весеняя математическая школа «Понтрягинские чтения-XXX» (май, 2019г), г. Воронеж, – С. 211-212.
89. Мустафокулов Р. Интегральные представления решения одного линейного уравнения типа Эйлера с кратной характеристикой [Текст] / Р.Мустафокулов // Материалы международной конференции «Уфимская осенняя математическая школа», г. Уфа, Россия, 16-19 октября 2019г. – С. 163-165.
90. Мустафокулов Р. Модельное уравнение для одного линейного уравнения типа Эйлера n-го порядка [Текст] / Р.Мустафокулов //Доклады АН РТ. – 2018, – Т. 61, №3. – С. 216-224.
91. Мухаммадиев Э.М. Об ограниченных решениях обыкновенных дифференциальных уравнений с сингулярными коэффициентами [Текст] / Э.М.Мухамадиев // Материалы международной конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения», посвященной 50 – летию образ. ТГНУ и 60 – летию члена-корр. АН РТ, профессора Раджабова Н. – Душанбе, 1998. – С. 63.

92. Мухсинов А. О некоторых формулах представления решений многомерных эллиптических уравнений с сингулярными точками [Текст] / А.Мухсинов // Доклады АН РТ. – 2009. – Т. 52. – №5. – С. 344-353.
93. Никольский С.М. Вариационная проблема для уравнения эллиптического типа с вырождением на границе [Текст] / С.М.Никольский // Тр. МИАН. – 1979. – Т. 150. – С. 212-238.
94. Олимов А.Г. Интегральное представление и задача типа Коши для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с граничной слабо-сингулярной точкой [Текст] / А.Г.Олимов, М.Я.Дадоджанова // Вестник Таджикского национального университета. – 2018. – № 1. – С. 11-16.
95. Пулькина Л.С. Об одной неклассической задаче для вырождающегося гиперболического уравнения [Текст] / Л.С.Пулькина // Изв. вузов. Сер. Мат. – 1991. – № 11. – С. 48-51.
96. Раджабов Н. Интегральные представления и граничные задачи для некоторых дифференциальных уравнений с сингулярной линией или сингулярными поверхностями [Текст] / Н.Раджабов. – Душанбе, 1985. – 157с.
97. Раджабов Н. К теории линейных эллиптических систем второго порядка, для которых вся граница является сингулярной линией [Текст] / Н.Раджабов // Математический вестник (Third international symposium-complex analysis and applications). Herceg-Novi, Yugoslavia. – 1988. – №40. – С. 301-307.
98. Раджабов Н. Об одном методе представления многообразия решений общего линейного уравнения четвертого порядка гиперболического типа с сингулярными коэффициентами [Текст] / Н.Раджабов, С.С.Ганиев // Вестник Таджикского государственного университета имени В.И.Ленина. – 1988. – Т. 34. – №11(559). – 15 с.

99. Раджабов Н. Об одном классе линеных гиперболических уравнений четвертого порядка с двумя сингулярными линиями [Текст] / Н.Раджабов // Вестник Таджикского госуниверситета. – 1990. – №5. – С. 3-9.

100. Раджабов Н. К теории обыкновенных дифференциальных уравнений со сверхсингулярной точкой [Текст] / Н.Раджабов, В.В. Шевчук // Доклады АН Таджикский ССР. – 1989. – Т. 32. – №8. – С. 506-510.

101. Раджабов Н. Об одном классе линейного дифференциального уравнения третьего порядка с супер сингулярной точкой [Текст] / Н.Раджабов, Л.Н.Раджабова // Труды международной конференции «Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики и специальные функции». – Самара, 1992. – С. 207-208.

102. Раджабов Н. Обыкновенные дифференциальные уравнения высших порядков со сверхсингулярной точкой [Текст] / Н.Раджабов // Изв. АИ Республики Таджикистан. – 1994. – № 1-2(81). – С. 4-9.

103. Раджабов Н. Системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с n сингулярной точкой [Текст] / Н.Раджабов, О. Меликов // Материалы международная конференция «Дифференциальные уравнения с сингулярными коэффициентами». – Душанбе, 1996. – С. 69.

104. Раджабов Н. Свойство решения одного класса нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с сингулярными и сверхсингулярными коэффициентами на особых точках [Текст] / Н.Раджабов // Тезисы международной конференции по дифференциальным уравнениям. – Киев, 1997. – С. 116-117.

105. Раджабов Н. Задачи типа Коши для линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с одной сверхсингулярной точкой [Текст] / Н.Раджабов // Материалы научная конференция «Дифференциальное уравнения с частными

производными и их приложения». – Таджикистан, Курган-Тюбе, 1997. – С. 46-47.

106. Раджабов Н. Интегральные представления и задачи типа Коши для сверх сингулярного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с комплексно-сопряженными характеристическими корнями [Текст] / Н.Раджабов // Доклады АН РТ. – 1998. – Т. 10. – № 41. – С. 35-40.

107. Раджабов Н. Задачи типов линейного сопряжения для линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с одной сингулярной и супер-сингулярной точкой [Текст] / Н.Раджабов // Доклады АН РТ. – 1999. – Т. 16. – № 4. – С. 31-34.

108. Раджабов Н. Интегральные представления для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка с сингулярной и супер-сингулярной точкой [Текст] / Н.Раджабов // Доклады АН РТ. – 2000. – Т. XLIII. – №3. – С. 33-39.

109. Раджабов Н. Интегральные представления и граничные задачи для общего линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с сингулярной точкой [Текст] / Н.Раджабов // В межд. Сб. статей «Дифференциальные и интегральные уравнения». – Душанбе: Изд-во ТГУ. – Выпуск-3. – С. 43-55.

110. Раджабов Н. Свойство решения одного класса нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с сингулярными и сверхсингулярными коэффициентами на особых точках [Текст] / Н.Раджабов // Conference Materials «VIII International Scientific Kravchuk Conference». – Kyiv, 2000. – PP. 178.

111. Раджабов Н. Задача типа линейного сопряжения для линейной системы первого порядка с одной супер сингулярной точкой [Текст] / Н.Раджабов, Г.М. Кадиров // Материалы международной конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения», посвящённой 50 –

летию образования ТГНУ и 60 – летию чл.-корр. АН РТ, профессора Раджабова Н. – Душанбе, 1998. – С. 46-47.

112. Раджабов Н. К теории одного класса обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с левой граничной сверхсингулярной точкой [Текст] / Н.Раджабов, Г.М.Кадиров // Труды международной научной конференции по «Дифференциальным и интегральным уравнениям с сингулярными коэффициентами». – Душанбе, 2003. – С. 128-130.
113. Раджабов Н. Линейное обыкновенное дифференциальное уравнения второго порядка с левой граничной сверхсингулярной точкой [Текст] / Н.Раджабов, Г.М.Кадиров // Труды XII международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики (МДОЗМ-2005)». – Харьков – Херсон, 2005. – С. 291-294.
114. Раджабов Н. К теории одного класса модельного обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка с левой граничной сверхсингулярной точкой [Текст] / Н.Раджабов, Г.М.Кадиров // Материалы республиканской научной конференции «Дифференциальные и интегральные уравнения», посвящённой 60 - летию образования ТГНУ и 70 - летию академика АН РТ Раджабова Н. – Душанбе, 2008. – С. 64-66.
115. Раджабов Н. К теории одного класса вырождающегося обыкновенного дифференциального уравнения высших порядков [Текст] / Н.Раджабов, Г.М. Кадиров, А.С. Сатторов // Вестник Таджикского национального университета. – 2014. – №1/1(126). – С. 3-5.
116. Раджабов Н. Линейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка общего вида с правой или левой сверхсингулярной точкой [Текст] / Н.Раджабов, М.Я. Дадоджонов, А.Г.Олимов // Учёные записки ХГУ. Серия естественные и экономические науки. – 2016. – №2(37). – С.22-30.

117. Раджабова Л.Н. Об одном классе линейных дифференциальных уравнений третьего порядка со сверхсингулярной точкой [Текст] / Л.Н.Раджабова, Н.Раджабов // Материалы международная конференция «Дифференциальные и интегральные уравнения. Математическая физика и специальные функции». – Самара, 1992. – С. 207-208.
118. Раджабова Л.Н. К теории одного уравнения третьего порядка со сверхсингулярной точкой [Текст] / Л.Н.Раджабова // Тезис доклад международная научная конференция «Вырождающиеся уравнения и уравнения смешанного типа». – Ташкент, 1993. – С. 145.
119. Раджабова Л.Н. О некоторых случаях для одного линейного дифференциального уравнения третьего порядка с сингулярной точкой [Текст] / Л.Н.Раджабова // Международная конференция по математическому моделированию. – Якутск, 1994. – С. 53-54.
120. Раджабова Л.Н. Некоторые случаи для одного класса линейных уравнений третьего порядка с сингулярной точкой [Текст] / Л.Н.Раджабова // Доклады АН РТ. – 1999. – Т. 17. – №4. – С. 41-49.
121. Раджабова Л.Н. Интегральные представления для одного класса линейных уравнений со сверхсингулярной точкой [Текст] / Л.Н.Раджабова // Труды Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физике» (МДОЗ МФ – 2000). – Орел, 2000. – С. 370-373.
122. Раджабова Л.Н. Интегральные представления для одного случая дифференциального уравнения третьего порядка со сверхсингулярной точкой [Текст] / Л.Н.Раджабова // Материалы международной научной конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения», посвящённой 60-летию Т. Сабирова. – Душанбе, 2000. – С. 73-74.
123. Раджабова Л.Н. К теории дифференциального уравнения третьего порядка со сверхсингулярной точкой [Текст] / Л.Н.Раджабова // Материалы международной научной конференции «Некорректные и

неклассические задачи математической физики и анализа». – Самарканд, 2000. – С. 72.
124. Репин О.А. Краевые задачи со смещением для уравнений гиперболического и смешанного типов [Текст] / О.А.Репин. – Самара, 1992. – 161 с.
125. Риман Б. Сочинения [Текст] / Б. Риман. – М.: ГИТТЛ, 1948. – 256 с.
126. Сабитов К.Б. Первая граничная задача для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом [Текст] / К.Б.Сабитов, Р.М. Сафина // Изв. РАН. Сер. Матем. – 2018. – Т.82. – № 2. – С. 79-112.
127. Салахитдинов М.С. Задачи на собственные значения для уравнения смешанного типа с двумя сингулярными коэффициентами [Текст] / М.С.Салахитдинов, А.К.Уринов // Сибирский математический журнал. – 2007. – Т. 48. – № 4. – С. 882-893.
128. Сатторов А.С. Интегральные представления и задача типа Коши для одного квазилинейного дифференциального уравнения с двумя линиями вырождения [Текст] / С.А.Сатторов // Доклады АН РТ. – 2009. – Т. 52. – № 11. – С. 848-853.
129. Ситник С.М. Операторы преобразования для сингулярных дифференциальных уравнений с оператором Бесселя [Текст] / С.М.Ситник // В сб.: «Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики». – Новосибирск, 1989. – С. 179-185.
130. Смирнов М.М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения [Текст] / М.М.Смирнов. – М.: Наука, 1966. – 292 с.
131. Уринов А.К. Задача Дирихле для трехмерного уравнения смешанного типа с тремя сингулярными коэффициентами [Текст] / А.К.Уринов, К.Т.Каримов // Вестник Самарск. ГТУ. Серия: Физико-математические науки. – 2017. – Т. 21. – №4. – С. 665-683.
132. Усманов З.Д. Обобщённые системы Коши-Римана с сингулярной точкой [Текст] / З.Д.Усманов. – Душанбе, 1993. – 224 с.

133. Хованский А.Г. О разрешимости и неразрешимости уравнений в явном виде [Текст] / А.Г. Хованский // УМН. – 2004. – Т. 59. – № 4(358). – С. 69–146.

134. Хорошилов В.В. О решениях систем линейных дифференциальных уравнений с иррегулярной особой точкой [Текст] / В.В. Хорошилов // Докл. АН СССР. –1950. – Т. 72. – С. 241–242.

135. Шамсудинов Ф.М. Об одной переопределелённой системе дифференциальных уравнений второго порядка с сингулярной точкой [Текст] / Ф.М.Шамсудинов // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия №1, Мат.Физ. – 2014. – №5(24). – С. 46-54.

136. Шевчук В.В. Об одном способе представления решений линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с сингулярной точкой [Текст] / В.В.Шевчук // Материалы республиканской научной конференции молодые учен. – Ленинабад, 1990. – С. 123-124.

137. Эйлер Л. Дифференциальное исчисление / Л. Эйлер пер. М. Я. Выгодский. – Москва, Ленинград: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1949. – 578с.

2. Феҳристи интишороти илмии довталаби дараҷаи илмӣ

а) Мақолаҳое, ки дар нашрияҳои тақризшавандаи Комиссияи олии аттестатсионии назди Президенти Ҷумҳурии Тоҷикистон ба табъ расидаанд:

[1-М] **Мирзоев Дж.А.** Исследование одного линейного дифференциального уравнения третьего порядка [Текст] / Дж.А.Мирзоев // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. – Душанбе, 2018. - №3. – С. 39-46.

[2-М] **Мирзоев Дж.А.** Исследование модельного дифференциального уравнения четвертого порядка [Текст] / Р.Мустафокулов, Дж.А.Мирзоев // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. – Душанбе, 2019. - №1. – С. 5-12.

[3-М] **Мирзоев Дж.А.** Исследование немодельного уравнения типа Эйлера четвертого порядка [Текст] / Р.Мустафокулов, Дж.А.Мирзоев // Доклады академии наук республики Таджикистан. Том 63. – Душанбе, 2020. - №1-2. – С. 15-23.

[4-М] **Мирзоев Дж.А.** Об одном классе немодельных двумерных интегро-дифференциальных уравнений со сверхсингулярным ядром [Текст] / С.К.Зарифзода, Дж.А.Мирзоев // Вестник филиала МГУ имени М.В.Ломоносова в г.Душанбе. Том 1. – Душанбе, 2024. - №4(43). – С. 5-13.

[5-М] **Мирзоев Дж.А.** Исследование одного класса двумерных интегро-дифференциальных уравнений со сверхсингулярным ядром [Текст] / С.К.Зарифзода, Дж.А.Мирзоев // Известия национальной академии наук республики Таджикистан. Душанбе, 2025. - №2 (199). – С. 19-29.

б) Мақолаҳое, ки дар дигар нашриёҳо ба табъ расидаанд:

[6-М] **Мирзоев Дж.А.** О разрешимости и многообразии решений одного класса линейных дифференциальных уравнений типа Эйлера, когда характеристическое уранение имеет комплексно-сопряженные корни [Текст] / Р.Мустафокулов, Дж.А.Мирзоев //Материалы научно практической конференции «VII-е Ломоносовские чтения» филиала МГУ имени М.В.Ломоносова в г. Душанбе, 28-29 апреля 2017г. - С. 20-24.

[7-М] **Мирзоев Дж.А.** Об одном линейном дифференциальном уравнении типа Эйлера 4-го порядка [Текст] / Р.Мустафокулов, Дж.А.Мирзоев // Современные методы теории краевых задач. Материалы международной конференции Воронежской весенной математической школы «Понтрягинские чтения XXVIII», г. - Воронеж 3-9 мая 2017г. - С. 120-122.

[8-М] **Мирзоев Дж.А.** Линейное однородное уравнение типа Эйлера 4-го порядка [Текст] / Р.Мустафокулов, Дж.А.Мирзоев // Материалы Международной конференции посвящение 90-летию академика АН Республика Таджикистан, лауреата государственной премии имени Абуали Ибн Сина, Михайлова Леонида Григорьевича – Душанбе, - 2018. - С. 108-110.

[9-М] **Мирзоев Дж.А.** Интегральное представление решений линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами [Текст] / Р.Мустафокулов, Дж.А.Мирзоев // Материалы международной научно-теоритической конференции, посвященной 70-летию образования ТНУ и 80-летию академика АНРТ, д.ф.-м.н профессора Раджабова Нусрата – Душанбе, 2018. – С. 97-105.

[10-М] **Мирзоев Дж.А.** Об одном линейном однородном уравнении типа Эйлера третьего порядка [Текст] / Р.Мустафокулов, Дж.А.Мирзоев // Материалы республиканской научно-теоритической конференции, профессорско–преподавательского состава и сотрудников ТНУ, посвященно международному 10-ю действия «Вода для устойчивого развития, 2018-2028 годы» и 70-й годовщине со дня создания ТНУ. – Душанбе, 2018. - С. 22.

[11-М] **Мирзоев Дж.А.** Об одном линейном уравнении типа Эйлера 4-го порядка [Текст] / Р.Мустафокулов, Дж.А.Мирзоев // Современные проблемы и приложения алгебры теории чисел и математическокого анализа «Институт математики имени А.Джураева» - Академия наук республики Таджикистан - Душанбе 2019. - С. 157-160.

[12-М] **Мирзоев Дж.А.** Исследование обобщенного уравнения Эйлера [Текст] / С.К. Зарифзода, Дж.А Мирзоев // Материалы международной конференции «Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений» посвящённая 70-летию со дня рождения академика АН Республики Таджикистан, доктора физико-математических наук, профессора Бойматова Камолиддина Хамроевича. – Душанбе, 2020. – С. 130-132.

[13-М] **Мирзоев Дж.А.** Построение основ операционного метода для исследования особых операторно-дифференциальных уравнений [Текст] / С.К. Зарифзода, Дж.А Мирзоев // Материалы международной научно-практической конференции «Современные проблемы математики и её приложения», 2020-2040 годы. Душанбе, 20-21 октября 2022. – С. 42-45.

[14-М] **Мирзоев Дж.А.** Исследование одного класса сопряжённого одномерного интегро-дифференциального уравнения типа сложной свёртки [Текст] / С.К. Зарифзода, Дж.А Мирзоев // Материалы республиканской научно-практической конференции «Актуальные проблемы развития естественных, точных и математических наук в современных условиях». – Душанбе, 2022. – С. 221-224.