ТАДЖИКСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПРАВА, БИЗНЕСА И ПОЛИТИКИ

УДК 517.977

На правах рукописи

МУХСИНОВ ЕДГОР МИРЗОЕВИЧ

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ И УБЕГАНИЯ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ

Диссертация

на соискание ученой степени доктора физико-математических наук
по специальности 01.01.02 - Дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

Научный консультант:
доктор физико-математических наук,
профессор **Байзаев Саттор**

ХУДЖАНД – 2023

ОГЛАВЛЕНИЕ

Перечень сокращений и условных обозначений 5

Введение 6

Общая характеристика исследования 10

Глава 1. Анализ литературы по дифференциальным играм и некоторые вспомогательные понятия и результаты 19

§1.1. Некоторые подходы к дифференциальным играм преследования и убегания 19

§1.2. Подход академика Л.С. Понтрягина к дифференциальным играм преследования и убегания 22

§1.3. Некоторые известные результаты по дифференциальным играм преследования и убегания 24

§1.4. Вспомогательные понятия и результаты 38

Глава 2. Линейные и квазилинейные дифференциальные игры преследования 57

§2.1. Постановка задач преследования и убегания 58

§2.2. Разрешимость задачи преследования и оптимальность времени преследования для квазилинейной дифференциальной игры 63

§2.3. Квазилинейные дифференциальные игры запаздывающего типа 68

§2.4. Дифференциальные игры нейтрального типа в банаховом пространстве 78

§2.5. Дифференциальные игры нейтрального типа в гильбертовом пространстве 113

§2.6. Примеры 119

Глава 3. Линейные и квазилинейные дифференциальные игры преследования с интегральными ограничениями 138

§3.1. Линейные дифференциальные игры преследования с интегральными ограничениями 138

§3.2. Линейные дифференциальные игры преследования запаздывающего типа с интегральными ограничениями 144

§3.3. Линейные и квазилинейные дифференциальные игры преследования нейтрального типа с интегральными ограничениями 148

§3.4. Примеры 165

Глава 4. Нелинейные дифференциальные игры преследования и убегания 170

§4.1. Дифференциальные игры убегания с инвариантным терминальным множеством 170

§4.2. Нелинейные дифференциальные игры убегания нейтрального типа . 175

§4.3. Нелинейные дифференциальные игры убегания с запаздывающим аргументом 182

§4.4. Нелинейные дифференциальные игры преследования с запаздывающим аргументом 186

§4.5. Примеры 189

Глава 5. Дифференциальные игры дробного порядка 194

§5.1. Квазилинейные дифференциальные игры дробного порядка с интегральными ограничениями 195

§5.2. Задача преследования для одной дифференциальной игры дробного порядка с интегральными ограничениями в гильбертовом пространстве... 203

§5.3. О разрешимости задачи преследования для квазилинейной дифференциальной игры дробного порядка в банаховом пространстве 214

§5.4. Интегро–дифференциальные игры дробного порядка в банаховом пространстве 219

§5.5. Интегро-дифференциальные игры дробного порядка с интегральными

ограничениями в гильбертовом пространстве 225

§5.6. Разрешимость задачи преследования для дифференциальной игры с несколькими дробными производными в банаховом пространстве 234

§5.7. Примеры 240

Обсуждение полученных результатов 249

Выводы 262

Список литературы 264

ПЕРЕЧЕНЬ СОКРАЩЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

$\boldsymbol{R^n}$ – n-мерное евклидово пространство;

$\boldsymbol{A \underline{*} B = C = \{c: c + B \subset A\}}$ –геометрическая разность;

$\boldsymbol{D^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{m-1-\alpha} x^{(m)}(s) ds,\ \alpha > 0, m = [\alpha] + 1}$ – дробная производная Капуто порядка α от функции $x(t)$;

$\boldsymbol{\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx}$ – гамма-функция, $\boldsymbol{\Gamma(n) = (n-1)!}$;

$\boldsymbol{A^*}$ –сопряженный оператор к $\boldsymbol{A}$;

$\boldsymbol{L(X,Y)}$ –класс линейных ограниченных операторов, действующих из X в Y;

$\boldsymbol{L(X,R) = X^*}$ –сопряженное пространство к X;

$\boldsymbol{L_p(J,\mathrm{X}), 1 \le p < \infty}$ – класс p-локально интегрируемых по Бохнеру отображений $x(\cdot): \boldsymbol{J} \to X$, где $\boldsymbol{J} \subset (-\infty, \infty)$;

$\boldsymbol{E_{1/\alpha}(At^\alpha; \beta)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At^\alpha)^k}{\Gamma(k\alpha + \beta)}$ – обобщенная функция Миттаг – Леффлера;

$\boldsymbol{R(\lambda^a, A) = (\lambda^a I - A)^{-1}} - a$ –резольвента оператора $\boldsymbol{A}$;

$\boldsymbol{U([0,\infty), Y)}$ –множество измеримых отображений, действующих из $[0,\infty)$ *в* Y;

$\Gamma(\boldsymbol{a,b}) = \left\{\gamma(\cdot): [a,b] \to [0,\infty), \int_a^b \gamma(s) ds = 1\right\}$;

$\boldsymbol{W'_p(J,X)}$ – пространство Соболева, которое состоит из отображений $x(\cdot) \in \boldsymbol{L_p(J,X)}$ для которых $\boldsymbol{\frac{d}{dt} x(t) \in L_p(J,X)}$;

з.п. – задача преследования;

з.у. – задача убегания;

л.з.о. –линейный замкнутый оператор;

в.з.п. – возможно завершение преследования;

в.у. – возможно убегание;

в.з.п.о.в. – возможно завершение преследования с оптимальным временем;

в.з.п.г.в. – возможно завершение преследования с гарантированным временем;

в.з.п.з.в. – возможно завершение преследования за время;

п.с.н.п. –порождает сильно непрерывную полугруппу.

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. На базе теории экстремальных задач [39, 195, 289, 290], теории игр [136], теории дифференциальных уравнений [16, 17, 24, 68, 84, 183, 231, 263] и теории оптимального управления [12, 26, 85, 96, 181, 186] была создана теория дифференциальных игр. Толчком к изучению дифференциальных игр послужили различные задачи из военной сферы, физики, биологии, экономики и других, протекающие в условиях конфликта или неопределенности. В начале 50-х годов XX века американский математик Р. Айзекс [11] впервые опубликовал ряд работ, посвященных дифференциальным играм. Для решения целого ряда прикладных задач Р. Айзекс использовал метод динамического программирования. В начале 60-годов XX века в этой области фундаментальные работы выполнили академики Н.Н. Красовский [81, 82] и Л.С. Понтрягин [182, 185, 189]. Работы Н.Н. Красовского и его сотрудников посвящены в основном позиционным дифференциальным играм. Н.Н. Красовский разработал правило экстремального прицеливания и доказал фундаментальные теоремы об альтернативах. Работы [23, 25, 79, 81, 83, 86, 88, 99, 235] посвящены позиционным играм в конечномерном пространстве.

В работах Л.С. Понтрягина был принят другой, более оригинальный подход к дифференциальным играм. В подходе Л.С. Понтрягина дифференциальная игра рассматривается отдельно с точки зрения преследующего и с точки зрения убегающего. При этом при различных подходах используются различные информации, что неизбежно разбивает задачу на две различные задачи: задачу преследования (з.п.) и задачу убегания (з.у.).

В работах [182, 188, 189] Л.С. Понтрягин предложил первый и второй метод решения з.п., а в работах [184, 185], совместно с Е.Ф. Мищенко, доказал достаточные условия разрешимости з.у.. В дальнейшем основополагающие результаты Л.С. Понтрягина были перенесены на различные классы игр.

Например, М.С. Никольский [139, 155], А.В. Мезенцев [120], А.Я. Азимов [8, 9], Б.Б. Рихсиев [204] и Н. Мамадалиев [107] разрешили з.п. в конечномерном пространстве, когда на управление игроков были наложены интегральные ограничения. А в работах [57, 153] доказаны достаточные условия об оптимальности времени преследования в линейной игре. Весьма интересные результаты получены Н.Ю. Сатимовым и его учениками. Работы [2, 92, 219-221, 224-227, 230, 241-243] посвящены некоторым дифференциальным играм преследования, а в работах [7, 203, 218, 220, 223, 227-229, 292] исследуются линейные и нелинейные игры убегания двух и более лиц. Важные результаты по з.п. получены Л.А. Петросяном [174-176].

Степень научной разработанности изучаемой проблемы. Приведенные выше работы в основном относятся к конечномерным дифференциальным играм, когда динамика игры описывается обыкновенным дифференциальным уравнением. Но в практике часто встречаются конфликтно управляемые процессы, описываемые:

- дифференциальными уравнениями с запаздывающими аргументами;
- дифференциальными уравнениями нейтрального типа;
- дифференциальными уравнениями дробного порядка;
- интегро-дифференциальными уравнениями дробного порядка;
- дифференциальными уравнениями с частными производными.

Многие из этих управляемых процессов можно моделировать и исследовать как дифференциальные игры в подходящих банаховых пространствах. Именно такой подход к изучению дифференциальных игр принят в данной диссертационной работе. Заметим, что такой подход успешно используется многими учеными как в теории оптимального управления [18, 96, 355], так и в теории дифференциальных игр [159, 308].

Данная диссертационная работа посвящена линейным, квазилинейным и нелинейным дифференциальным играм преследования и убегания в банаховых пространствах, когда динамика игры описывается:

- обыкновенным дифференциальным уравнением;

- дифференциальным уравнением с запаздывающим аргументом;
- дифференциальным уравнением нейтрального типа;
- дифференциальным уравнением дробного порядка.

При этом з.п. и з.у. понимаются в смысле Л.С. Понтрягина. Отметим, что в работах [111–116, 212–217, 245, 351] исследованы дифференциальные игры, когда динамика игры описывается дифференциальным уравнением с частными производными. Работы [23, 82, 86–91, 99–102] посвящены конечномерным позиционным дифференциальным играм запаздывающего, нейтрального или дробного порядка. Работы А. Фридмана [308], Ю.С. Осипова [157–161], И.Ф. Вайсбурд [37, 38] и В.Я. Джафарова [61] посвящены позиционным дифференциальным играм в бесконечномерном пространстве. А вот результаты, полученные в теории дифференциальных игр преследования и убегания запаздывающего, нейтрального или дробного порядка, когда з.п. и з.у. понимается в смысле Л.С. Понтрягина, являются гораздо скромными, ибо работы [13, 14, 21, 22, 273, 275, 295, 296, 326] посвящены конечномерным играм, а работы [127–129, 300, 312, 324, 325] посвящены бесконечномерным дифференциальным играм запаздывающего типа.

Из сказанного следует, что актуальной и мало изученной являются дифференциальные игры преследования и убегания запаздывающего типа, нейтрального типа и дробного порядка, когда з.п. и з.у. понимается в смысле Л.С. Понтрягина и игра задается в бесконечномерном пространстве. Именно такой актуальной проблеме посвящена настоящая диссертационная работа.

Отметим, что соискателем по данной тематике в 1982 году под руководством профессора Н. Сатимова была защищена кандидатская диссертация на диссертационном совете К015.17.01 при Институте математики им. В.И. Романовского АН УзССР. В ней разрешимость з.п. и з.у. впервые были исследованы для дифференциальных игр, когда динамика игры описывается обыкновенным дифференциальным уравнением в банаховом пространстве.

Связь работы с научными программами (проектами), темами. Работа выполнена в рамках реализации перспективных планов научно-ис-

следовательских работ кафедры математических дисциплин и современного естествознания ТГУПБП на 2016–2020 гг. по теме «Исследование дифференциальных уравнений эллиптического, гиперболического типов и дифференциальных игр в специальных функциональных пространствах» и на 2021–2025 гг. по теме «Дифференциальные уравнения с частными производными: теория и методика преподавания».

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ИССЛЕДОВАНИЯ

Цель исследования. Основная цель диссертационной работы состоит в дальнейшем развитии теории дифференциальных игр преследования и убегания в банаховых пространствах, когда динамика игры описывается дифференциальным уравнением:

- с линейным замкнутым оператором (л.з.о.);
- запаздывающего типа;
- нейтрального типа;
- дробного порядка.

Задачи исследования. В соответствии с поставленной целью выделяются следующие задачи:

- для дифференциальных игр преследования нахождение множества начальных точек, из которых возможно завершение преследования (в.з.п.);
- для дифференциальных игр преследования с запаздывающим аргументом нахождения условий, при которых в.з.п.;
- для дифференциальных игр преследования нейтрального типа нахождение множества начальных точек, из которых в.з.п.;
- для дифференциальных игр преследования дробного порядка нахождение условий, при которых в.з.п.;
- для некоторых классов дифференциальных игр исследовать условия оптимальности времени преследования;
- для некоторых классов дифференциальных игр нахождение условий, при которых возможно убегание (в.у.);
- исследование примеров дифференциальных игр преследования и убегания, динамика которых описывается дифференциальными уравнениями запаздывающего типа, нейтрального типа и дробного порядка.

Объект исследования. Основными объектами исследования являются

дифференциальные игры, описываемые дифференциальными уравнениями:

- с замкнутыми операторами;
- с запаздывающими аргументами;
- нейтрального типа;
- дробного порядка.

Предмет исследования. Разрешимость з.п. и з.у. для некоторых классов дифференциальных игр в бесконечномерных банаховых пространствах.

Методы исследования. В работе используются методы функционального анализа, теории многозначных отображений, теории дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, нейтрального типа, дробного порядка и теории дифференциальных игр преследования и убегания.

Научная новизна исследования. Все результаты диссертации являются новыми и заключаются в следующем:

- в банаховом пространстве для квазилинейной дифференциальной игры с л.з.о. найдены условия, позволяющие обеспечить возможность завершения преследования с оптимальным временем (в.з.п.о.в.);
- в банаховом пространстве найдено множество начальных положений, из которых в.з.п.о.в. в дифференциальных играх запаздывающего типа;
- в банаховом пространстве доказана разрешимость з.п. для дифференциальных игр, когда динамика игры описывается уравнением нейтрального типа;
- в гильбертовом пространстве доказана разрешимость з.п. для линейных дифференциальных игр с интегральными ограничениями на управления игроков;
- в гильбертовом пространстве доказана разрешимость з.п. для дифференциальных игр запаздывающего типа с интегральными ограничениями;
- в гильбертовом пространстве найдено множество начальных положений, из которых в.з.п. в квазилинейных дифференциальных играх нейтрального типа, когда на управление игроков наложены

интегральные ограничения;

- в гильбертовом пространстве найдены условия о разрешимости з.у. в нелинейной дифференциальной игре нейтрального типа;
- в банаховом пространстве доказаны теоремы о разрешимости з.п. и з.у. для нелинейной дифференциальной игры запаздывающего типа;
- в дифференциальных играх дробного порядка с геометрическими или с интегральными ограничениями найдено множество начальных положений, из которых в.з.п.;
- в интегро-дифференциальных играх дробного порядка с геометрическими или с интегральными ограничениями на управления игроков доказаны теоремы о разрешимости з.п.;
- в дифференциальных играх с несколькими дробными производными доказаны теоремы о разрешимости з.п..

Теоретическая и научно-практическая ценность исследования. Результаты, полученные в диссертации, носят теоретический характер и могут быть использованы в теории дифференциальных игр преследования и убегания с сосредоточенными и с распределенными параметрами, в математической теории управляемых процессов, протекающих в условиях конфликта и неопределенности, в теории и технике автоматического управления для систем с запаздывающим аргументом, нейтрального типа и с производными дробного порядка, а также при решении практических задач, которых можно моделировать как дифференциальные игры преследования и убегания в подходящих банаховых пространствах. Ценность работы заключается в том, что полученные в диссертации результаты являются новыми и открывает новое направление в теории дифференциальных игр преследования и убегания в бесконечномерных банаховых пространствах.

Положения, выносимые на защиту:

- утверждения о достаточных условиях оптимальности времени преследования для квазилинейной дифференциальной игры с л.з.о.;
- утверждения о достаточных условиях в.з.п. в дифференциальных играх

запаздывающего типа;

- утверждения о достаточных условиях в.з.п. в дифференциальных играх нейтрального типа;
- утверждения о достаточных условиях разрешимости з.п. в дифференциальных играх с интегральными ограничениями на управление игроков;
- утверждения о достаточных условиях разрешимости з.п. в дифференциальных играх запаздывающего типа с интегральными ограничениями на управление игроков;
- утверждения о достаточных условиях разрешимости з.п. в квазилинейных дифференциальных играх нейтрального типа, когда на управление игроков наложены интегральные ограничения;
- утверждения о достаточных условиях разрешимости з.у. в нелинейной дифференциальной игре нейтрального типа;
- утверждения о достаточных условиях разрешимости з.у. в дифференциальной игре нейтрального типа с инвариантным терминальным множеством;
- утверждения о достаточных условиях разрешимости з.п. и з.у. в нелинейных дифференциальных играх запаздывающего типа в банаховом пространстве;
- утверждения о достаточных условиях в.з.п. в дифференциальных играх дробного порядка с геометрическими или с интегральными ограничениями на управление игроков;
- утверждения о достаточных условиях в.з.п. в интегро-дифференциальных играх дробного порядка с геометрическими или с интегральными ограничениями на управление игроков;
- утверждения о достаточных условиях в.з.п. в дифференциальных играх с несколькими дробными производными в банаховом пространстве;
- выводы формулы для нахождения времени преследования и выбора управления преследования;

- выводы формулы для оценки расстояний от управляемого объекта до терминального множества и выбора управления убегания.

Степень достоверности результатов проведённых исследований. Достоверность результатов обеспечивается строгими математическими доказательствами всех утверждений, приведенных в диссертации, а также подтверждается исследованиями других ученых.

Соответствие диссертации паспорту научной специальности (формуле и области исследования). Диссертационная работа выполнена по специальности 01.01.02 - Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление. Она относится к составной части этой специальности – оптимальное управление и полностью соответствует формуле специальности и пункту «Дифференциальные уравнения и системы дифференциальных уравнений в задачах оптимального управления и вариационного исчисления» области исследования.

Личный вклад соискателя ученой степени. Задачи исследования были сформулированы с участием научного консультанта, который оказывал консультативное содействие. Все результаты диссертационной работы, отраженные в разделе «Научная новизна исследования», получены лично автором. В совместных работах [20-А], [33-А], [36-А], [38-А], [39-А] соавторы принимали участие в обсуждениях полученных результатов.

Апробация и реализация результатов диссертации. Полученные автором результаты диссертации обсуждались на следующих конференциях и семинарах:

- международная научная конференция «Современные методы теории краевых задач». Понтрягинские чтения. Воронежская весенняя математическая школа. (3–9 мая 2023г.), г. Воронеж;
- международная научно-практическая конференция «XIII Ломоносовские чтения», посвященной 115-летию академика Б.Гафурова. (28–29 апреля 2023г.), г. Душанбе;
- международная научная конференция «Современные методы

прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий» (13–16 декабря 2022г.), г. Воронеж;

- международная научная конференция «Неклассические уравнения математической физики и их приложения (6–8 октября 2022г.), г. Ташкент;
- республиканская научно-практическая конференция «Актуальные проблемы и перспективы развития естественных и точных наук» (28–29 октября 2022 г.), г. Душанбе;
- международная научная конференция «Современные проблемы математического анализа и теории функций», посвящённая 70-летию академика НАН Таджикистана М.Ш. Шабозова (24-25 июня 2022г.), г. Душанбе;
- международная научная конференция «Современные проблемы теории чисел и математического анализа», посвящённая 80-летию профессора Д. Исмоилова (29–30 апреля 2022 г.), г. Душанбе;
- всероссийская научная конференция «Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий» (14–16 декабря 2021г.), г. Воронеж;
- международная конференция «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики» (5–9 декабря 2021г.), г. Нальчик;
- II международная научно-практическая конференция «О применении дифференциальных уравнений при решении прикладных задач» (4 ноября 2021г.), г. Душанбе;
- республиканская конференция «Современные проблемы прикладной математики и их роль в формировании технического мировоззрения общества» (29–30 октября 2021г.), г. Худжанд;
- республиканская научная конференция с участием зарубежных учёных «Сарымсаковские чтения» (16–18 сентября 2021г.), г. Ташкент;
- международная конференция по алгебре, анализу и геометрии (22–28

августа 2021 г.), г. Казань;

- international Conference Mathematical Physics, Dynamical Systems and Infinite-Dimensional Analysis (June 30–July 9, 2021), Russia, Moscow Region, Dolgoprudny;
- международная конференция «Актуальные проблемы современной математики», посвящённая 80-летию профессора Т. Собирова (25–26 июня 2021г.), г. Душанбе;
- республиканская научно-практическая конференция «Рушди илмҳои табиатшиносӣ, дақиқ ва риёзӣ: роҳҳои татбиқи натиҷаҳои онҳо дар истеҳсолот» бахшида ба эълон шудани «Солҳои 2020–2040 Бистсолаи омӯзиш ва рушди фанҳои табиатшиносӣ, дақиқ ва риёзӣ» (21–22 апреля 2021г.), г. Худжанд;
- international Scientific and Practical Conference. Scientific horizon in the context of social crises (11–12.04.2021г.), Tokyo, Japan;
- международная конференция «Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений», посвященная 70-летию со дня рождения академика НАН Таджикистан, д.ф.-м.н., профессора К.Х. Бойматова (25-26 декабря 2020 г.), г. Душанбе;
- республиканская научно-практическая конференция «Современные проблемы теории дифференциальных уравнений с сингулярными коэффициентами», посвященная 80-летию профессора М. Исмати и 20 - летию развития естественных, точных и математических наук (26 сентября 2020г.), г. Душанбе;
- республиканская научная конференция «Ташаккули самтҳои инноватсионии илмҳои дақиқ ва техникӣ дар замони муосир: муаммо ва дурнамои рушд» (19 ноября 2015г.), г. Худжанд;
- международная научная конференция «Современные проблемы математики и ее преподавания», посвященная 20-летию Конституции Республики Таджикистан и 60-летию ученых- математиков А.

Мухсинова, А.Б. Нозимова, С. Байзаева, Д. Осимовой, К. Тухлиева (28–29 июня 2014г.), г. Худжанд;

- международная конференция «Математические методы в исследовании операций» (24–29 октября 1987г.), г. София, Болгария;
- научно – практические конференции ТГУПБП (2014-2022гг.), г. Худжанд;
- объединённый научный семинар при Таджикском национальном университете под руководством академика М. Илолова (2023), г. Душанбе;
- научный семинар, проводимом в дистанционном режиме при Вологодском государственном университете под руководством профессора Э. Мухамадиева (2023), г. Вологда, Россия;
- научный семинар при Таджикском государственном университете права, бизнеса и политики под руководством д.ф.-м.н., профессора С. Байзаева (2017–2023 гг.), г. Худжанд.

Ряд результатов диссертации использованы при чтении специальных курсов и написании дипломных работ для студентов и магистрантов.

Публикации по теме диссертации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1–А] – [40–А]. Работы [2–А] – [18–А], опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК при Президенте Республики Таджикистан и ВАК Министерства образования и науки РФ. Статьи [2–А] – [5–А] входят в международные библиографические и реферативные базы данных Web of Science и Scopus.

Структура и объем диссертации. Работа состоит из введения, общей характеристики исследований, пяти глав, обсуждения полученных результатов, выводов и списка литературы (355 наименования работ).

Для удобства в диссертации применена сквозная нумерация теорем, лемм и формул. Они имеют тройную нумерацию, в которой первая цифра совпадает с номером главы, вторая указывает на номер параграфа, а третья на порядковый

номер теорем, лемм или формул в данном параграфе. Общий объем диссертации 306 страниц.

Благодарность

Автор глубоко благодарит своего научного консультанта д.ф.-м.н., профессора Байзаева Саттора за ценные советы и внимание к работе.

ГЛАВА 1.
АНАЛИЗ ЛИТЕРАТУРЫ ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ ИГРАМ И НЕКОТОРЫЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПОНЯТИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ

В первой главе излагаются некоторые подходы к разрешимости з.п. и з.у. и анализ изученной литературы по теме диссертационной работы. Приводятся некоторые вспомогательные понятия и результаты.

В первом параграфе приведены различные подходы к дифференциальным играм, начиная с подхода американского математика Р. Айзекса до подхода академика Н.Н. Красовского.

Во втором параграфе излагается подход академика Л.С. Понтрягина.

В третьем параграфе приведены некоторые важные результаты по дифференциальным играм преследования и убегания, когда з.п. и з.у. понимается в смысле Л.С. Понтрягина, а динамика игры описывается обыкновенным дифференциальным уравнением, дифференциальным уравнением запаздывающего типа или дифференциальным уравнением дробного порядка.

В четвертом параграфе приведены некоторые определения и вспомогательные результаты.

§1.1. Некоторые подходы к дифференциальным играм преследования и убегания

Многие задачи из военной сферы, физики, химии, экономики и биологии в условиях конфликта или неопределенности сводятся к дифференциальным играм. В начале 50-х годов XX века американский математик Р. Айзекса [11] впервые опубликовал работы, посвященные дифференциальным играм. В своей монографии [11] Р. Айзекс использовал метод динамического программирования и получил весьма интересные результаты. Но надо отметить, что в данной монографии нет общих теорем. Она содержит

некоторые общие соображения и на основе этих соображений рассмотрены целый ряд прикладных задач. Из работы Р. Айзекса видно, что размерность терминального множества М, где заканчивается игра, на единицу меньше размерности игрового пространства R^n. В связи с этим, Р. Айзекс считает преследование завершенным, когда расстояние между преследователем и убегающим равно некоторому положительному числу, а не тогда, когда объекты геометрически совпадают.

В работах [306, 307] У. Флеминг исследовал вопросы существования решения дифференциальной игры и вопросы сходимости решения многошаговой игры к решению дифференциальной игры. А в работе [297] разработан вариационный подход к теории дифференциальных игр. Л. Берковиц применяет вариационное исчисление к стратегиям одного игрока, считая, что стратегия его противника временно фиксирована. При этом им получены необходимые условия оптимальности и некоторые достаточные условия.

Существование цены игры в тех или иных классах стратегий рассмотрено в работах [40, 102, 172, 175, 232, 233, 304, 308, 309].

В работах Б.Н. Пшеничного [191-194, 196-202] и А.А. Чикрия [62, 177, 178, 190, 274, 276-286] исследуются линейные и нелинейные дифференциальные игры, для которых предложена процедура, определяющая необходимые и достаточные условия разрешимости з.п. и з.у. и изучена структура дифференциальных игр.

Играм простого преследования и играм многих лиц посвящены работы [27, 103, 104, 121, 122, 166, 173, 196-198, 205-207, 288, 305] и [19, 20, 41, 42, 117, 118, 210, 269, 278, 279, 291-295] соответственно. Численным методам решения дифференциальных игр посвящены работы [15, 50, 51, 59, 60, 64, 66, 74-77, 95, 123, 162-164, 180, 237-239, 246, 247].

Оригинальные результаты по з.п. получены Л.А. Петросяном [104, 174-176], В.Н. Логуновым [93, 94], А.И. Благодатских [29-36], Н.Н. Петровым [165-172, 337-339, 352, 353] и Г.И. Ибрагимовым [310-323].

В области дифференциальных игр, когда динамика игры описывается обыкновенным дифференциальным уравнением в конечномерном пространстве, основополагающие работы выполнил академик Н.Н. Красовский. По тематике работа Н.Н. Красовского и его сотрудников примыкает к работам Р. Айзекса, однако отличается от них выбором задач и характером изложения. В работах [79, 80–83, 85–88] Н.Н. Красовский и его сотрудники рассматривают позиционные дифференциальные игры. Предложенный Н.Н. Красовским подход к дифференциальным играм позволяет им сформулировать правило экстремального прицеливания и доказать фундаментальные теоремы об Альтернативах. Полученные результаты Н.Н. Красовского и его школы поясним на примере игры сближения-уклонения.

В R^n рассматривается игра, описываемая нелинейным уравнением

$$\dot{x} = f(t, x, u, v), \tag{1.1.1}$$

где $t \geq 0, x = x(t) \in R^n, P$ и $Q -$ соответственно непустые компактные подмножеств R^p и R^q, $u \in P -$ управление преследования, $v \in Q -$ управление убегания. Для системы (1.1.1) ставится задача сближения-уклонения[81].

Задача сближения-уклонения решается в классе управляющих функций $u = u(t, x, v)$ и $v = v(t, x)$. При этом справедлива следующая фундаментальная теорема об Альтернативах:

Все пространство позиций $[t_0, \theta_0] \times R^n$ можно разбить на два непересекающихся множества, в первом первый игрок решает задачу сближения в классе контрстратегий $u = u(t, x, v)$, а в другом второй игрок решает задачу об уклонении в классе стратегий $v = v(t, x)$. При этом контрстратегия $u(t, x, v)$, разрешающая задачу сближения определяется с помощью правила экстремального прицеливания. Из этой теоремы следует существование цены игры в соответствующих классах стратегий.

В работах А.И. Субботина [234-236], Ю.С. Осипова [156-161], А.В.

Кряжимского [85-87], А.Б. Куржанского [58, 88–91], В.Н. Ушакова [252-260], А.Г. Ченцова [265, 266], Ф.Л. Черноусько [267-269] и Н.Ю. Лукоянова [99-101] развиты идеи Н.Н. Красовского для более широкого класса игр.

§1.2. Подход академика Л.С. Понтрягина к дифференциальным играм преследования и убегания

В начале 60-х годов XX века в области теории дифференциальных игр фундаментальные работы выполнил академик Л.С. Понтрягин. Если в работах Н. Н. Красовского исследуются позиционные дифференциальные игры, то в работах Л.С. Понтрягина предложен иной, более оригинальный подход к изучению дифференциальных игр.

В своей работе [182] Л.С. Понтрягин и О.Ю. Покорная в работе «Дифференциальные игры в военных конфликтах. Молодой ученый, 2013, №10(57), с.10-13» пишут:

«Теория дифференциальных игр возникла в результате математической идеализации технических задач….

Для того, чтобы иметь конкретный пример, вообразим, что один самолет преследует другой. Цель первого самолета догнать второй, цель второго – уйти от преследования. Каждый пилот управляет своим самолетом, имея в виду свою цель и пользуясь информацией о ситуации. Информация состоит из двух частей: первая – это полное знание технических возможностей обоих самолетов, вторая – это сведения о поведении собственного самолета и самолета противника. Сведения о поведении самолетов могут включать в себя различные данные об их состоянии за период, предшествующий данному моменту, но ничего нельзя считать известным о будущем поведении самолетов, так как они управляемы и в любой момент времени летчик может изменить положение рулей, изменив тем самым поведение самолета….

Перейдем к математическому описанию процесса преследования. В этом процессе участвуют два управляемых объекта: преследующий объект и убегающий объект. Состояние каждого из объектов в любой момент времени

определяется его фазовым вектором. Фазовый вектор преследователя обозначим через x, а фазовый вектор убегающего – через y, уравнения управляемых объектов запишем в обычной форме:

$$\dot{x} = f(x, u), \quad \dot{y} = g(y, v), \tag{1.2.1}$$

где точка означает производную по времени, а u и v суть управления, т.е. параметры, входящие в правую часть уравнений. Каждый из параметров принадлежит своему ограничивающему множеству $u \in$ P, $v \in Q$, где P и Q — множества произвольной природы…. Так как x и y являются фазовыми векторами, то каждый из них распадается на две части, $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, где x_1 и y_1 определяют геометрические положения объектов, а x_2 и y_2 их скорости. Считается, что процесс преследования заканчивается в тот момент времени, когда наступает равенство

$$x_1 = y_1 \tag{1.2.2}$$

т.е. тогда, когда объекты геометрически совпадают….

Дифференциальная игра из процесса преследования возникает в результате естественного стремления упростить обозначения, а именно, вместо двух фазовых векторов x и y мы вводим один вектор: $z = (x, y)$, образуя фазовое пространство R игры как прямую сумму фазовых пространств обоих объектов. Тогда пара уравнений (1.2.1) записывается в виде одного уравнения

$$\dot{z} = F(z, u, v), \tag{1.2.3}$$

а соотношение (1.2.2) определяет в векторном пространстве R некоторое подмножество M …. Дифференциальная игра задана, если задано ее фазовое векторное пространство R, уравнение (1.2.3), где $z \in R$, а $F -$ некоторая функция трех переменных, причем $u -$ управление преследования, а $v -$

управление убегания, и сверх того в пространстве R задано некоторое множество M, на котором игра заканчивается.

Мы связываем с дифференциальной игрой две различные задачи:

1. Нашей целью является завершение игры, т.е. приведение точки z на множество M, при этом для осуществления этой цели в нашем распоряжении находится управление преследования u, так что в каждый момент времени t мы выбираем значение $u(t)$ этого управления, имея в виду нашу цель, и используя функции $z(s)$ и $v(s)$ на отрезке $t - \Theta \leq s \leq t$. Таковы правила игры преследования.
2. Нашей целью является предотвращение конца игры, т.е. предотвращение прихода точки z на множество M, при этом для осуществления этой цели в нашем распоряжении находится управление v убегания, так что в каждый момент времени t мы выбираем значение $v(t)$ этого управления, имея в виду нашу цель и используя функции $z(s)$ и $u(s)$ на отрезке $t - \Theta \leq s \leq t$. Таковы правила игры убегания».

Эти взгляды Л.С. Понтрягина приводят к необходимости связать с дифференциальной игрой (1.2.3) две различные задачи: з.п. и з.у..

В работах Е.Ф. Мищенко [124-126], М.С. Никольского [138-155, 332-335], Н. Сатимова [212-230], Н.Л. Григоренко [43-49], П.Б. Гусятникова [52-57], А.А. Чикрий [270-273, 279, 280], Д. Зонневенда [63], Ю.С. Ледяева [97, 98], А.А. Азамова [1-6], Е.С. Половинкина [179, 180], М. Тухтасинова [241-245, 349-351], Н.А. Мамадалиева [105-115], М.Ш. Маматова [110-115], Л.П. Югай [292-294], Г.И. Ибрагимова [65], Е.М. Мухсинова [127-135], Б.Т. Саматова [341-347] развиты идеи Л.С. Понтрягина для более широкого класса игр.

В дальнейшем мы будем придерживаться формализации дифференциальных игр, предложенной Л.С. Понтрягиным.

§1.3. Некоторые известные результаты по дифференциальным играм преследования и убегания

В этом параграфе изложим некоторые известные результаты по

дифференциальным играм, когда з.п. и з.у. понимается в смысле Л.С. Понтрягина. Изложенные в данном параграфе результаты опубликованы в работах [8, 9, 13, 14, 57, 107, 128, 133, 182, 185, 227, 228, 229, 230].

1.3.1. Результаты Л.С. Понтрягина о разрешимости задач преследования и убегания. В работе [182] академик Л.С. Понтрягин изложил свои основные результаты о разрешимости з.п.. Рассматривается линейная дифференциальная игра, задаваемая линейным уравнением

$$\dot{z} = Cz - u + v, \tag{1.3.1}$$

где $z \in R^n, C$ −линейное отображение пространства R^n в себя, $u -$ управление преследования, $v -$ управление убегания. Причем $u \in P,\ v \in Q,$ где P и Q компактные выпуклые подмножества пространства R^n. Игра заканчивается, когда точка z приходит на множество M , где M некоторое векторное подпространство пространства R^n.

Через L обозначим ортогональное дополнение подпространства M в пространстве R^n,а через π операцию ортогонального проектирования R^n на L. Положив $P(t) = \pi e^{t\mathrm{C}} P$ и $Q(t) = \pi e^{t\mathrm{C}} Q$ полагаем, что геометрическая разность $S(t) = P(t) \underline{*} Q(t)$ имеет размерность, равную размерности подпространства L, при всех положительных $t < T$. Пусть $z_0 -$ произвольная точка пространства R^n.

Справедлива следующая

Теорема 1.3.1. *Если при некотором* t *имеет место включение*

$$\pi e^{tC} z_0 \in \int_0^t S(\tau) d\tau, \tag{1.3.2}$$

то из начальной точки z_0 *возможно завершение преследования с гарантированным временем (в.з.п.г.в.)*

$$T(z_0) = min\,\{t \geq 0\text{: } \textit{для которых выполняется включение (1.3.2)}\}.$$

Заметим, что при построении значения $u(t)$ Л.С. Понтрягин использует информацию о функции $z(0)$ и $v(s)$ на некотором отрезке $t \leq s \leq t + \varepsilon$, где $\varepsilon -$ некоторое положительное число.

В работе [185] Л.С. Понтрягин изложил свои основные результаты о в.у..

Рассматривается линейная дифференциальная игра, задаваемое линейным уравнением (1.3.1), где управления $u = u(t)$ u $v = v(t)$ являются измеримыми функциями *t*.

Далее $\dim L = r \geq 2 -$ размерность подпространства $L, W -$ двумерное векторное подпространство пространства $L, \pi -$ ортогональное проектирование из R^n на $W, \xi -$расстояние точки z до $M, \eta -$ расстояние точки z до L. Если A и $B -$ два выпуклых множества из W и существует такая точка $a \in W$, что $a + A \subset B$, то мы будем писать $A \subset^* B$. Будем говорить, что для игры (1.3.1) выполнены условия убегания, если существует такое двумерное векторное подпространство $W \subset L$, для которых выполнены условия:

а) не существует в W фиксированного одномерного векторного подпространства W^1, для которого имеет место включение

$$Q(\tau) \subset^* W^1 \tag{1.3.3}$$

при всех малых положительных значениях τ;

б) существует такая константа $\mu > 1$, что

$$\mu P(\tau) \subset^* Q(\tau) \tag{1.3.4}$$

при всех достаточно малых положительных значениях τ.

Справедлива следующая

Теорема 1.3.2. *Если для игры (1.3.1) выполнены условия убегания (1.3.3) и (1.3.4), то при любом начальном значении* z_0, *не принадлежащем* M, *в.у. и кроме того, существуют три такие положительные константы* θ, ε, c *и*

натуральное число k, зависящие только от игры, что имеют место оценки:

1) при $\xi_0(0) \geq \varepsilon$ имеем

$$\xi(t) > \frac{c\varepsilon^k}{\left(1+h(t)\right)^k}, \quad 0 \leq t \leq \infty; \tag{1.3.5}$$

2) при $\xi_0 \leq \varepsilon$ имеем

$$\xi(t) > \frac{c{\xi_0}^k}{\left(1+h(t)\right)^k}, \quad 0 \leq t \leq \theta;$$

$$\xi(t) > \frac{c\varepsilon^k}{\left(1+h(t)\right)^k}, \quad \theta \leq t \leq \infty. \tag{1.3.6}$$

1.3.2. Результаты П.Б. Гусятникова и М.С. Никольского об оптимальности времени преследования. В работе [57] П.Б. Гусятников и М.С. Никольский изложили условия о в.з.п.о.в.. В R^n рассматривается игра, описываемая уравнением

$$\dot{z} = Cz + u - v \ , \tag{1.3.7}$$

где

C- квадратная матрица $n-$ го порядка, $u \in P$ и $v \in Q-$ управляющие параметры, множества P и Q- выпуклые компакты, терминальное множество M является линейным подпространством, L- ортогональное дополнение подпространства M в R^n и $\pi -$ оператор ортогонального проектирования на L.

Предполагается, что размерность множества L равна r , а множество $\widehat{w}(\tau) = \pi e^{\tau C} P \underline{*} \pi e^{\tau C} Q -$ выпуклое r −мерное тело. Тогда множество

$$W(t) = \int_0^t \widehat{w}(\tau) d\tau$$

является r −мерным телом.

П.Б. Гусятниковым и М.С. Никольским доказана следующая теорема об оптимальности времени преследования.

Теорема 1.3.3. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) $T(z_0)$ – первый момент t, при котором выполняется включение

$$\pi e^{tC} z_0 \in W(t). \qquad (1.3.8)$$

2) Для каждого вектора $u \in P$ найдется такой вектор $v \in Q$, что независимо от τ $\left(0 < \tau \leq T(z_0)\right)$ выполняется включение

$$\pi e^{\tau C} u - \pi e^{\tau C} v \in \widehat{W}(\tau)$$

и для каждой измеримой функции $u(s)$ функция $v(s) = v(u(s))$ измерима. Тогда, в игре (1.3.7), время $T(z_0)$ оптимально.

1.3.3. Некоторые результаты Н. Сатимова о разрешимости задач преследования и убегания. В работе [230] рассматривается разрешимость з.п. для линейной дифференциальной игры, описываемая уравнением (1.3.7), где C –квадратная матрица, $u \in P, v \in Q$ – управляющие параметры, P и Q – произвольные непустые подмножества R^n и терминальным множеством $M \in R^n$. В работе [188] введено интегрирование функций со значениями из пространства выпуклых компактных подмножеств R^n. Как отмечает Н. Сатимов, ему понадобится более общее определение интеграла.

Пусть $A(\tau) \in R^n$ определенное почти для каждого $\tau \in [p, q]$. По определению

$$\int_p^q A(\tau)d\tau = \left\{\int_p^q x(\tau)d\tau : x(\tau) \in A(\tau), \tau \in [p, q]\right\}$$

где интеграл

$$\int_p^q x(\tau)d\tau$$

понимается в смысле Лебега.

Если

$$\tau \geq 0, \widehat{\omega}(\tau) = e^{\tau C} P \underline{*} e^{\tau C} Q, W_1(\tau) = -M + \int_0^\tau \widehat{\omega}(\tau) d\tau,$$

то справедлива следующая

Теорема 1.3.4. *Если* $-e^{\tau C} z_0 \in W_1(\tau)$ *при некотором* $\tau = T_1(z_0)$, *то из начальной точки* $z_0 \in R^n$ *возможно завершение преследования за время (в.з.п.з.в.)* $T_1(z_0)$.

В работе [227] исследуется разрешимость з.п. для квазилинейной дифференциальной игры, описываемая уравнением

$$\dot{z} = Cz + f(u, v) \tag{1.3.9}$$

где $z \in R^n$, C - квадратная матрица, P – компактное, Q – произвольное непустое подмножество пространств R^p, R^q соответственно, отображение $f(.): P \times Q \to X$ – непрерывно, терминальное множество M имеет вид

$$M = M_0 + M_1 \tag{1.3.10}$$

где M_0 – линейное подпространство пространства R^n, M_1 – непустое подмножество подпространства L – ортогонального дополнения M_0 в R^n.

Как отмечает Н. Сатимов, предположение о том, что множество M представимо в виде (1.3.10) не нарушает общности, ибо, произвольное непустое множество $M \subset R^n$ можно представить в виде $M = \{0\} + M$. Когда $M_0 = \{0\}$ в качестве оператора π берется единичный оператор, то есть $\pi z = z$.

Если

$$\tau \geq 0, \qquad \widehat{\omega}(v, r, \tau) = \frac{1}{\tau} M_1 - \pi e^{rC} f(P, v), \qquad \widehat{\omega}(r, \tau) = \bigcap_{v \in Q} \widehat{\omega}(v, r, \tau),$$

$$W_4(\tau) = \int_0^\tau \widehat{\omega}(r) dr, W_4(0) = M_1$$

то справедлива следующая

Теорема 1.3.5. *Когда* $\pi e^{\tau C} z_0 \in W_4(\tau)$ *при некотором* $\tau = T_4(z_0)$*, то в игре (1.3.9) из* z_0 *в.з.п.з.в.* $T_4(z_0)$.

Заметим, что в теоремах 1.3.4 и 1.3.5 при построении управления преследования $u(t)$ используется только текущая информация $v(t)$ и z_0.

В работе [229] исследуется разрешимость з.у. для линейной дифференциальной игры, описываемая уравнением (1.3.7) где $z \in R^n$, C – квадратная матрица, а $u \in P, v \in Q$ – управляющие параметры, множество P, Q являются компактными подмножествами R^n, а терминальное множество M является инвариантным подпространством пространства R^n относительно матрицы C, то есть $CM \subset M$ и $\dim M = n - 1$.

Через H обозначим ортогональный к M единичный вектор. Если $P(t) =< H, e^{-tC}P >= \{< H, e^{-tC}p >: p \in P\}, Q(t) =< H, e^{-tC}Q >, R(t) = Q(t) \underline{*} P(t)$, то рассмотрим многозначный интеграл

$$W(t) = \int_0^t R(s)ds\,.$$

Справедлива следующая

Теорема 1.3.6. *Если числа* $\tau > 0, \mu > 1$ *такие, что для любого* $t \in (0, \tau]$ *множество* $P(t)\backslash\{0\}$ *не пусто и имеет место включение* $\mu P(t) \in Q(t)$*, то из любой точки* $z_0 \overline{\in} M$ *в.у.*.

Заметим, что для нахождения значения $v(t)$ используется только текущая информация $z(t)$ и $u(t)$.

В работе [228] исследуется разрешимость задачи убегания для одного класса нелинейной дифференциальной игры, описываемая уравнением

$$\dot{z} = Cz + f(u, v) + \mu g(z, u, v), \tag{1.3.11}$$

где

$z \in R^n$, C – квадратная матрица, $u \in P$ – параметр преследования, $v \in Q$ –

параметр убегания, P, Q – непустые компактные подмножества R^p и R^q соответственно, $f(u, v)$ – непрерывная функция точки $(u, v) \in P \times Q, g(z, u, v)$ – непрерывная функция точки $(z, u, v) \in R^n \times P \times Q, \mu \in (-\infty, \infty)$ и терминальное множество M является линейным подпространством размерности $\leq n - 2$.

Пусть L – ортогональное дополнение к M до R^n, π – оператор ортогонального проектирования из R^n на L.

Говорят, что параметр v обладает маневренностью, если $g(z, u, v)$ ограничено, то есть для некоторого числа в > 0 неравенство $|g(z, u, v)| \leq$ в имеет место для всех $(z, u, v) \in R^n \times P \times Q$ и существует двумерное подпространство $W \in L$ и натуральное число $k \geq 2$ такие, что:

1) каждое из множеств $\pi C^i[f(P, Q) + g(R^n, P, Q)], i = 0,1, \dots, k - 2$ есть точка;

2) множество

$$R = \bigcap_{u \in P} \pi C^{k-1} f(u, Q)$$

содержит внутреннюю (относительно W) точку.

Справедлива следующая

Теорема 1.3.7. *Если параметр v обладает маневренностью, то существует число μ_1 такое, что при всех $\mu, |\mu| \leq \mu_1$, в игре (1.3.11) в.у.. При этом для расстояний $\xi(t)$ и $\eta(t)$ от точки $z(t)$ до пространства M и L соответственно будет иметь место неравенства (1.3.5) и (1.3.6), где μ_1,* с, θ, ε *и натуральное число k- положительные константы, зависящие лишь от игры (1.3.11).*

Заметим, что и в теореме 1.3.7 для построения $v(\cdot)$ в каждый момент времени $t \geq 0$ используется только текущая информация $z(t)$ и $u(t)$ и не разрешается использовать значение $z(s)$ и $u(s)$ при $s \neq t$.

1.3.4. Результаты А.Я. Азимова о разрешимости задачи преследования с интегральными ограничениями. В работах [8, 9] А.Я. Азимов исследует разрешимость з.п. для линейной дифференциальной игры, описываемую уравнением

$$\dot{z} = Az - Bu + Cv, \tag{1.3.12}$$

где

A – линейный оператор отображений R^n в R^n, B и C линейные операторы отображающие, соответственно конечномерные евклидовые пространства U и V в R^n, а управления $u = u(t)$ и $v = v(t)$ удовлетворяют интегральным ограничениям

$$\int_0^\infty \left|\left|u(s)\right|\right|^2 ds \le \rho^2, \int_0^\infty \left|\left|v(s)\right|\right|^2 ds \le \sigma^2 \tag{1.3.13}$$

В качестве терминального множества берется некоторое подпространство $M \in R^n$. Через L обозначают ортогональное дополнение к M в R^n, а π – ортогональное проектирование из R^n на L.

Для задачи (1.3.12) с интегральными ограничениями (1.3.13) рассматривается задача качества: выделить те начальные точки, из которых игру можно закончить за конечное время. При следующих предположениях доказывается теорема 1.3.8.

Предположение А. *Справедлива следующая факторизация:* $\pi e^{\tau A} C = \pi e^{\tau A} B F(\tau)$ *при всех* $\tau \ge 0$ *где* $F(\tau)$ *– непрерывно зависящий от* τ *линейный оператор, отображающий* V *в* U.

Предположение Б. $\rho \ge \lambda(t)$ при всех $t \ge 0$, где

$$\lambda^2(t) = sup\{\int_0^t \left|\left|F(t-s)v(s)\right|\right|^2 ds : \int_0^t \left|\left|v(s)\right|\right|^2 ds \le \sigma^2\}.$$

Справедлива следующая

Теорема 1.3.8. *Если кроме предположений А и Б выполнено еще следующее включение*

$$\pi e^{t_1 A} z_0 \in G(t_1),$$

где

$$G(t_1) = \left\{ \int_0^{t_1} \pi e^{(t-s)A} B w(s) ds : \int_0^{t_1} \left|\left|w(s)\right|\right|^2 ds \le \left(\rho - \lambda(t)\right)^2 \right\},$$

то игру можно закончить из начального состояния z_0 *за время* t_1.

В своей работе А.Я. Азимов отмечает, что из-за ослабленного предположения А эта теорема сильнее чем результат М.С. Никольского [155]. При этом каждый момент t для выбора $u(t)$ преследующий использует $z(t)$ и $v(s), 0 \le s \le t$.

1.3.5. Результаты Н. Мамадалиева о разрешимости задачи преследования для дифференциальной игры запаздывающего типа. В работе [107] в пространстве R^n исследуется разрешимость з.п. для игры запаздывающего типа.

Рассматривается линейная дифференциальная игра, описываемая уравнением с запаздывающим аргументом

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bz(t-h) - Cu(t) + Dv(t) \qquad (1.3.14)$$

где

$z(t) \in R^n, n \ge 1, t \ge 0, h > 0, A, B, C, D$ – постоянные матрицы, порядки которых $n \times n,\ n \times n,\ n \times p,\ n \times q$ соответственно. Функции $u(\cdot),\ v(\cdot)$ определенные на $[0, \infty)$ и называемые управлениями преследующего и убегающего игроков соответственно, выбираются из класса измеримых функций, удовлетворяющих ограничениям(1.3.13):

В R^n дано терминальное множество $M = M_0 + M_1$, где M_0 – линейное подпространство пространства R^n, M_1 – выпуклое компактное подмножество подпространства L, ортогонального дополнения к M_0 в R^n. Начальным положением для (1.3.14) является абсолютно непрерывная функция $z_0(\cdot)$ определенная на $[-h, 0]$ и $z_0(0) \in R^n \backslash M$.

В дальнейшем π – оператор ортогонального проектирования из R^n на L, а фундаментальное решение $K(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $\dot{K}(t) = AK(t) + BK(t-h),\ 0 < t \leq \tau$.

Предположение 1. *Существует матричная функция* $F(t), t \in [0,\tau]$, *с суммируемыми с квадратом элементами, удовлетворяющие равенству* $\pi K(t)CF(t) = \pi K(t)D$.

Если

$$\xi[\tau, z_0(\cdot)] = \pi K(\tau)z_0(0) + \int_{-h}^{0} \pi K(\tau - h - t)Bz_0(t)dt - m_1,$$

а

$$\eta[\tau, z_0(\cdot)] = \begin{cases} \dfrac{\xi[\tau, z_0(\cdot)]}{\left|\left|\xi[\tau, z_0(\cdot)]\right|\right|}, \text{если } \xi[\tau, z_0(\cdot)] \neq 0 \\ \eta^{\circ}, \text{если } \xi[\tau, z_0(\cdot)] = 0, \end{cases},$$

где η° - произвольный единичный вектор L, построим функцию

$$\chi^2(\tau) = \sup\left\{\int_0^{\tau} \left|\left|F(t)\omega(t)\right|\right|^2 dt : \left|\left|\omega(\cdot)\right|\right|_{L_2[0,\tau]} \leq 1\right\}$$

и определим величину $\chi^2 = \sup\{\chi^2(\tau) : \tau > 0\}$.

Предположение 2. *Имеет место неравенство* $\rho^2 > \chi^2\sigma^2$.

Примем следующие обозначения:

$$\nu = \rho^2 - \chi^2\sigma^2,$$

$$R(t,\omega,\lambda) = \left[\left|\left|F(\tau - t)\omega\right|\right|^2 + \lambda\left|\left|\xi[\tau, z_0(\cdot)]\right|\right|^{-1}\nu\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$0 \leq t \leq \tau, \qquad \omega \in R^q, \qquad \lambda \geq 0$$

и

$$U(t,\omega,\lambda) = R(t,\omega,\lambda)\pi K(\tau - t)CS - \pi K(\tau - t)D\omega,$$

где S – замкнутый единичный шар R^p с центром в нуле.

Пусть $\lambda(t,\tau,\omega) = \sup\{\lambda \geq 0: \lambda \cdot \eta[\tau, z_0(\cdot)] \in U(t,\omega,\lambda)\}$, при этом, если $\xi[\tau, z_0(\cdot)] = 0$, то считается $\eta[\tau, z_0(\cdot)] = 0, \lambda(t,\tau,\omega) = 0$.

Предположение 3. *Существует положительное число $\tau = \tau_0$ такое, что:*

а) суперпозиция $\lambda\big(t,\tau_0,v(t)\big), 0 \leq t \leq \tau_0$, функции $\lambda(t,\tau_0,v), v \in R^q$ и произвольной суммируемой с квадратом функции $v = v(t), 0 \leq t \leq \tau_0$, суммируема;

б) выполнено неравенство

$$\big|\|\xi[\tau_0, z_0(\cdot)]\|\big| - inf\left\{\int_0^{\tau_0} \lambda\big(t,\tau_0,v(t)\big)dt: \big|\|v(\cdot)\|\big|_{L_2[0,\tau_0]} \leq \sigma\right\} \leq 0.$$

Справедлива следующая

Теорема 1.3.9. *Если выполнены сформулированные выше предположения 1–3, то в игре (1.3.14) в.з.п. из начального положения $z_0(\cdot)$ за время $T\big(z_0(\cdot)\big) = \tau_0$.*

1.3.6. Результаты М.Ш. Маматова и Х.Н. Алимова о разрешимости задачи преследования для дифференциальной игры дробного порядка. В работах [13, 14, 110–112] исследуется разрешимость з.п. для игры дробного порядка вида

$$D^\alpha z = Az + Bu - Gv + f(t), \tag{1.3.15}$$

где

$z \in R^n$, $n \geq 1$, $\alpha \in (0,1]$, $t \geq 0$, A, B и C – матрицы размеров $n \times m$, $p \times m$ и $q \times m$ соответственно, $u \in P \in R^p$ – управление преследующего, $v \in Q \in R^q$ – управление убегающего, P, Q – компакты, $f(t)$ – измеримая вектор-функция, а D^α– дробная производная Капуто произвольного нецелого порядка $\alpha > 0$.

Терминальное множество M, где заканчивается игра, имеет вид $M = M_0 +$

M_1 , где M_0 – линейное подпространство R^n , M_1 – подмножество подпространства L – ортогонального дополнения M_0.

Пусть

$$e^{At}{}_{\alpha} = t^{\alpha-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k t^{\alpha k}}{\Gamma\big((k+1)\alpha\big)}$$

– матричная α – экспонента и $\tau \geq 0$, $\hat{u}(\tau) = \pi e^{\tau A}{}_{\alpha} BP$, $\hat{v}(\tau) = e^{\tau A}{}_{\alpha} GQ$, $\widehat{w}(\tau) = \hat{u}(\tau) \underline{*} \hat{v}(\tau)$,

$$W(\tau) = \int_0^{\tau} \widehat{w}(\tau)d\tau\,,\ \ \tau > 0, \qquad W_1(\tau) = -M_1 + W(\tau).$$

Тогда справедлива следующая

Теорема 1.3.10. *Если в игре (1.3.15) при некотором $\tau = \tau_1$ выполняется включение*

$$-\pi z_0 - \int_0^{\tau} \pi\, e_{\alpha}^{A(\tau-r)}[Az_0 + f(r)]dr \in W_1(\tau),$$

то из положения z_0 в.з.п.з.в.$T = \tau_1$.

1.3.7. Некоторые результаты Е.М. Мухсинова и М.Н. Муродовой о разрешимости задачи преследования и убегания. В работе [133] в сепарабельном банаховом пространстве X рассматривается дифференциальная игра, описываемая дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = A(t)x + F(u, v, t) \tag{1.3.16}$$

где

$t \geq t_0 \geq 0, x = x(t) \in X, A(t)$ – л.з.о., действующий из всюду плотного и независящего от t множество $D \subset X$ в X такое, что существует эволюционный оператор $\Phi(t, s)$[84], отображение $F(\cdot,\cdot,\cdot): Y \times Z \times [0, \infty)$ в X непрерывно по $(u, v) \in Y \times Z$ и измеримо по $t \in [0, \infty)$. При этом Y, Z – банаховы пространства и существует локально суммируемая функция $\eta: [0, \infty) \to [0, \infty]$

такая, что при любых $u \in Y$, $v \in Y$, $t \in [0, \infty)$ имеет место неравенство $\left|\left|F(u, v, t)\right|\right| \leq \eta(t)$. В качестве терминального множества, где заканчивается игра, берется замкнутое множество $M \subset X$.

Если

$$\Omega(t_0, t) = \int_{t_0}^{t} \bigcap_{v \in Z} \Phi(t, s)\, F(Y, v, s) ds,$$

Y – сепарабельное и решение задачи (1.3.15) с начальным условием $x(t_0) = x_0$ имеет вид

$$x(t) = \Phi(t, t_0) x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, s) F(u(s), v(s), s)\, ds$$

то справедлива следующая

Теорема 1.3.11. *Пусть начальная точка* $(x_0, t_0) \in X \times [0, \infty)$*, такая, что при некотором* $t_1 \geq t_0$ *имеет место включение* $\Phi(t, t_0) x_0 \in M - \Omega(t_0, t_1)$ *. Тогда в игре (1.3.16) из точки* (x_0, t_0) *в.з.п.. При этом число* $t_1 - t_0$ *является гарантированным временем преследования.*

В работе [128] в гильбертовом пространстве X рассматривается дифференциальная игра, описываемая дифференциальным уравнением запаздывающего типа

$$\dot{x} = Ax + Bx(t - h) + F(u, v) \tag{1.3.17}$$

где

$t \geq 0, h > 0, x = x(t) \in X, B$ – линейный ограниченный оператор, A –л.з.о., порождающий сильно непрерывную полугруппу (п.с.н.п.) [18]. Используя эту полугруппу, можно построить фундаментальное решение $\Phi(t)$. Предполагается, что Y и Z – гильбертовые пространства, непрерывное отображение $F(\cdot,\cdot): Y \times Z \to X$, такое, что отображение

$$s \to \Phi(t - s) F\big(u(s) v(s)\big)$$

интегрируемо по Бохнеру на $[0, T]$. При этом решение задачи (1.3.17) с

начальным положением $x(s) = x_0(s), -h \leq s \leq 0$ соответствующее управлениям $u(\cdot), v(\cdot)$ на $[0, T]$, определяется формулой

$$x(t) = \Phi(t)x_0(0) + \int_{-h}^{0} \Phi(t-s-h)Bx_0(s)ds + \int_{0}^{t} \Phi(t-s)F\big(u(s), v(s)\big)ds$$

Далее, терминальное множество M является замкнутым подмножеством пространства X, $M = M_0 + M_1$, где $M_1 \subset {M_0}^{\perp}$.

Справедлива следующая

Теорема 1.3.12. *Если начальное положение* $x_0(s), -h \leq s \leq 0$ *и число* $T \geq 0$ *такие, что имеет место включение*

$$\pi\Phi(t)x_0(0) + \int_{-h}^{0} \pi\Phi(t-s-h)Bx_0(s)ds \in M_1 - \int_{0}^{T} \Omega(s)ds,$$

где

$$\Omega(s) = \bigcap_{v \in Z} \pi\Phi(T-s)\, F(Y, v),$$

то в игре (1.3.17) в.з.п.з.в. T.

§1.4. Вспомогательные понятия и результаты

В этом параграфе приводим некоторые вспомогательные понятия и результаты.

В работе [69] доказана следующая важная теорема о строгой отделимости.

Теорема 1.4.1 *Пусть* P *и* $Q -$ *непустые выпуклые непересекающиеся подмножества локально выпуклого топологического пространства* E. *Если* P *замкнуто, а* Q *компактно, то они строго отделимы.*

Следующая лемма доказана в работе [133].

Лемма 1.4.1. *Если* $X -$ *банахово пространство,* $V(\cdot): X \to (-\infty, \infty)$ *локально удовлетворяет условию Липшица и* $x(\cdot): [0, T] \to X$ *абсолютно*

непрерывно, то отображение $t \to V(x(t))$ *абсолютно непрерывно.*

1.4.1. Измеримые многозначные отображения. Пусть $E -$ полное сепарабельное метрическое пространство, $2^E -$ множество всех замкнутых подмножеств E, $\mathfrak{B} - \sigma$ - алгебра борелевских подмножеств E, $\mathcal{S} - \sigma$ - алгебра измеримых по Лебегу подмножеств $[0, \infty)$, $\mathcal{S} \otimes \mathfrak{B} - \sigma$ - алгебра, порожденная множествами $\mathcal{A} \times \mathcal{B} \subset [0, \infty) \times E$, где $\mathcal{A} \in \mathcal{S}$, $\mathcal{B} \in \mathfrak{B}$. Отображение $\varphi: [0, \infty) \to E$ называется $(\mathcal{S}, \mathfrak{B})$ – измеримым, если из $\mathcal{B} \in \mathfrak{B}$ следует, что $\varphi^{-1}(\mathcal{B}) \in \mathcal{S}$. Многозначное отображение $P: [0, \infty) \to 2^E$ называется $(\mathcal{S}, \mathfrak{B})$ – измеримым, если множество $P^-(\mathcal{C}) = \{t \in [0, \infty): P(t) \cap \mathcal{C} \neq \emptyset\}$ измеримо по Лебегу для каждого замкнутого множества $\mathcal{C} \subset E$. В дальнейшем, для краткости, мы вместо "$(\mathcal{S}, \mathfrak{B})$ – измеримое отображение" будем писать "измеримое отображение" Отображение $y: [0, \infty) \to E$, обладающее свойством $y(t) \in P(t)$ для каждого $t \in P^-(\mathcal{C})$, называется селектором отображения P.

Из [340] следует следующая

Лемма 1.4.2. *(о существовании измеримого селектора). Если отображение* $P: [0, \infty) \to 2^E$ *измеримо, то у него существует измеримый селектор.*

Пусть X, Y –полные сепарабельные метрические пространства, $Z -$ полное метрическое пространство. Тогда, в силу леммы 1.4.2 из работ [298, 336], следует следующая важная

Лемма 1.4.3. *(о существовании измеримого селектора у неявно заданного отображения). Пусть отображения* $P: [0, \infty) \to 2^Y$ *и* $\varphi: [0, \infty) \to X$ *измеримы, а отображение* $g: Y \times Z \times [0, \infty) \to X$ *непрерывно по* $(u, v) \in Y \times Z$ *и измеримо по* $t \in [0, \infty)$. *Если для любых* $v(\cdot) \in U([0, \infty), Z)$ *и почти всех* $t \in [0, \infty)$ *имеет место включение* $\varphi(t) \in g(P(t), v(t), t)$, *то отображение* $t \to \{u \in P(t): \varphi(t) = g(u, v(t), t)\}$ *замкнутозначно, измеримо и имеет измеримый селектор, то есть существует измеримое отображение* $u(\cdot): [0, \infty) \to Y$ *такое, что* $u(t) \in P(t)$ *и* $\varphi(t) = g(u(t), v(t), t)$ *для почти всех* $t \in [0, \infty)$.

Пусть $E -$ топологическое пространство, $2^E -$ множество непустых

замкнутых подмножеств топологического пространства E. Отображение $P: [0, \infty) \to 2^{\mathrm{E}}$ называется замкнутым (секвенциально замкнутым), если график Г(P) является замкнутым (секвенциально замкнутым) множеством в топологическом пространстве $[0, \infty) \times E$. Здесь секвенциальная замкнутость множества Г(P)$\subset [0, \infty) \times E$ понимается в том смысле, что если произвольные последовательности $t_n \in [0, \infty)$ и $x_n \in P(t_n)$ такие, что $t_n \to t$ и $x_n \to x$, то $t \in [0, \infty)$ и $x \in P(t)$. Видно, что из замкнутости отображения $P: [0, \infty) \to 2^{\mathrm{E}}$ следует его секвенциальная замкнутость, но обратное, вообще говоря, не верно. Если же, $E-$ метрическое пространство, то замкнутость отображения $P: [0, \infty) \to 2^{\mathrm{E}}$ эквивалентна его секвенциальной замкнутости.

Справедлива следующая очевидная

Лемма 1.4.4. *Пусть $E-$ отделимое линейное топологическое пространство, отображение $\varphi: [a, b] \to E$ непрерывно, а отображение $P: [a, b] \to 2^{\mathrm{E}}$ секвенциально замкнуто. Тогда множество $\{t \in [a, b]: \varphi(t) \in P(t)\}$ замкнуто.*

Доказательство следующей леммы приведено в работе [18-А].

Лемма 1.4.5. *Пусть отображение $P: [a, b] \to 2^{\mathrm{E}}$ секвенциально замкнуто, где E- отделимое линейное топологическое пространство, полученное в результате наделения банахового пространства X ослабленной топологией $\sigma(X, X^*)$ [69]. Если M−компактное подмножество E относительно топологии $\sigma(X, X^*)$, то отображение $t \to M + P(t)$, действующее из $[a, b]$ в 2^{E}, секвенциально замкнуто.*

Следуя [301] введем понятие интеграла от многозначного отображения $P: [0, \infty] \to 2^{\mathrm{X}}$. По определению

$$\int_0^t P(s)ds = \left\{ \int_0^t p(s)\, ds : p(\cdot) \in \mathcal{B} \right\},$$

где $\mathcal{B}$ – множество локально на $[0, \infty]$ интегрируемых по Бохнеру селекторов отображения P. При этом, если $\mathcal{B} = \emptyset$, то $\int_0^t P(s)\, ds = \emptyset$, а если $\mathcal{B} \neq \emptyset$ и $t = 0$,

то

$$\int_0^t P(s)\,ds = \{0\}$$

В работе [301] доказана следующая

Теорема 1.4.2. *Если пространство X сепарабельно и рефлексивно, а для измеримого отображения* $P\colon [a,b] \to 2^{\mathrm{X}}$ *существует такая суммируемая функция* $h(\cdot)$, *что* $sup\,\{||x|| : x \in P(t)\} \le h(t)$ *для почти всех* $t \in [a,b]$, *то справедливо равенство*

$$\overline{\int_a^b P(t)\,dt} = \int_a^b \overline{co}\,P(t)\,dt$$

где $\overline{co}P(t)$ *замкнутая выпуклая оболочка множества* $P(t)$. *При этом*

$$\int_a^b \overline{co}\,P(t)\,dt$$

непусто, замкнуто, ограничено и выпукло.

Следствие 1.4.1. *Если* $X-$ *рефлексивно и сепарабельно, измеримое отображение* $P\colon [a,b] \to 2^{\mathrm{X}}$ *ограничено, а множество* $P(t)$ *непусто и выпукло при каждом* $t \in [a,b]$, *то отображение*

$$t \to \int_0^t P(s)\,ds, t \in [a,b]$$

выпуклозначно и является замкнутым как в сильной топологии X, так и в его ослабленной топологии $\sigma(X,X^*)$.

1.4.2. Полугруппа и абстрактная задача Коши. Согласно Э. Хилле и Р Филлипсу $[264, \text{с. } 318]$ семейство линейных ограниченных операторов $S(t)$, $t \ge 0$, отображающих банахово пространство X в X , образует полугруппу линейных ограниченных операторов, если:

1) $S(0) = I$.

2) $S(t_1 + t_2) = S(t_1) \cdot S(t_2) = S(t_2) \cdot S(t_1)$.

Полугруппа $S(t)$ называется сильно непрерывной в начале координат (или полугруппа класса C_0 по Хилле – Филлипса), если для каждого $x \in X$

$$||S(t)x - x|| \to 0 \quad \text{при} \quad t \to +0.$$

Согласно свойству 2) из сильной непрерывности в начале координат следует сильная непрерывность справа при любом $t \geq 0$.

Через D обозначим множество всех элементов $x \in X$, для которых

$$\frac{S(t)x - x}{t}$$

сходится при $t \to 0$. С помощью равенства

$$Ax = \lim_{t \to 0} \frac{S(t)x - x}{t}$$

можно определить линейный оператор A, которого называют инфинитезимальным производящим оператором или просто генератором полугруппы $S(t)$, $t \geq 0$.

Сильно непрерывная полугруппа $S(t)$, $t \geq 0$ с производящим оператором A обладают следующими свойствами:

1) Множество D плотно в X и оператор A замкнутый.

2) Существуют постоянные $w \in (-\infty, +\infty)$ и $M \geq 0$ такие, что

$$||S(t)|| \leq Me^{wt} \text{ для } 0 \leq t < \infty.$$

3) Если $x \in D$, то $S(t)x \in D$ и $S(t)x$ сильно дифференцируемо и

$$\frac{d}{dt} S(t)x = S(t)Ax = AS(t)x$$

4) Для любого $x \in D$ и $0 \leq s \leq t$ имеет места равенства

$$S(t)x - S(s)x = \int_s^t S(\tau)Axd\tau = \int_s^t AS(\tau)xd\tau$$

5) Для $x \in X$ и $t \geq 0$

$$\int_s^t S(\tau)xd\tau \in D$$

6)

$$A\left(\int_0^t S(\tau)xd\tau\right) = S(t)x - x.$$

Справедлива [18, с. 253]

Теорема 1.4.3. *Задача Коши*

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \;\; 0 < t < \infty, \;\; x(0) = x_0 \in D$$

имеет такое единственное решение, что:

1) $x(t) \in D$

2) $x(t)$ *абсолютно непрерывно при* $t > 0$*;*

3) $\left||x(t) - x(0)|\right| \to 0$ *при* $t \to 0$.

Рассмотрим неоднородное уравнение

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(t), \;\; 0 < t < T \qquad (1.4.1.)$$

с заданным начальным условием $x(0) = x_0$.

В банаховом пространстве X можно ожидать, что

$$x(t) = S(t)x_0 + \int_0^t S(t-\tau)f(\tau)d\tau \qquad (1.4.2.)$$

будет единственным решением в подходящем смысле.

Справедлива следующая [18, с. 254]

Теорема 1.4.4. *Если* $x_0 \in D$, *функция* $f(\cdot)$, *принимающая значения в банаховом пространстве X, сильно непрерывно дифференцируема на (0, T) и ее производная допускает непрерывное продолжение на [0, T], то задача (1.4.1), имеет такое единственное решение (1.4.2), что*:

1) $x(t)$ *абсолютно непрерывно на (0, T);*
2) $x(t) \in D$, *при* $t > 0$;
3) $\left|\left|x(t) - x(0)\right|\right| \to 0$ *при* $t \to 0$.

Как известно, многие дифференциальные игры описываются неоднородными дифференциальными уравнениями вида (1.4.1), где функция $f(\cdot)$, зависящая от управляющих параметров, не является гладкой. Поэтому расширяем понятие решения задачи Коши.

В работе [18 с.255], когда X – гильбертово пространство, приведены следующие результаты.

Теорема 1.4.5. *Пусть* $f(\cdot) \in L_1\big((0,T),X\big)$ *и* $x(0) \in X$. *Тогда существует единственное отображение* $x(t)$, $0 \le t \le T$, *такое, что:*

1) *для каждого* $y \epsilon D(A^*)$ *отображение* $< x(t),\ y >$ *абсолютно непрерывно;*
2) $$\frac{d}{dt} < x(t), y > = < x(t), A^* y > + < f(t), y >$$

   *на (*0*, T);*
3) $$\lim_{t \to 0} < x(t), y > = < x(0), y >, \qquad y \epsilon D(A^*);$$

4) $x(t)$ *представляется формулой (1.4.2).*

Следствие 1.4.2 *Если* $f(\cdot) \in L_1((O,T),X)$, *то существует единственное слабое отображение* $x(t)$, $0 \le t \le T$, *такое, что:*

1)

$$< x(t), y > =< x(0), y > + \int_0^t < x(s), A^* y > ds + \int_0^t < f(s), y > ds,\ 0 \le t \le T;$$

2) $x(t)$ *представляется формулой (1.4.2.).*

Поэтому, следуя А. Фридману [308] и Ю.С. Осипову [159] примем следующее

Определение 1.4.1. *Если отображение* $t \to f(t)$ *локально интегрируемо, то решением задачи Коши (1.4.1) будем называть отображение (1.4.2), где интеграл понимается в смысле Бохнера [264 с.93].*

Далее, в рефлексивном банаховом пространстве X, рассмотрим неоднородное уравнение запаздывающего типа

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \int_{-h}^{0} d\eta(s)x(t+s) + f(t), \qquad (1.4.3)$$

где

$t \ge 0, x(t) \in X$, а $\eta(\cdot) -$ мера Стилтьеса имеет вид

$$\eta(s) = -\sum_{r=1}^{m} \chi_{(-\infty,-h_r)}(s) \cdot A_r - \int_s^0 A_0(\xi)d\xi, \quad s \in [-h, 0];$$

$0 < h_1 < h_2 < \cdots < h_m < h$; $\chi_{(-\infty,-h_r)}(\cdot) -$ характеристическая функция $(-\infty, -h_r)$; $A_r \in L(X,X)$, $r = \overline{1,m}$; $A_0(\cdot) \in L_{p'}\big([-h,0], L(X,\ X)\big)$; $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Кроме того, л.з.о. $A: D \to X$, имеющий плотную *в* X область определения, п.с.н.п. $S(t)$.

В работе [331, с.358] доказана, что когда $f(\cdot) \in L_p\big((0,T),X\big)$, задача Коши (1.4.3) с начальным положением $\varphi(\cdot) \in L_p([-h,0],X)$ имеет единственное слабое решение вида

$$x(t) = \Phi(t)\varphi(0) + \int_{-h}^{0}\left(\int_{-h}^{s}\Phi(t-s+r)d\eta(r)\right)\varphi(s)ds +$$

$$+\int_{0}^{t}\Phi(t-s)f(s)ds, t \geq 0 \qquad (1.4.4)$$

из класса $C([0,\infty),X) \cap\ L_p([-h,0],X)$,

где

$$\Phi(t) = \left\{\begin{matrix} S(t) + \int_0^t S(t-s)\int_{-h}^{0} d\eta(\tau)\Phi(\tau+s)ds, & t \geq 0 \\ 0, \quad t < 0. \end{matrix}\right\}$$

фундаментальное решение, для которого справедливы равенства

$$\dot{\Phi}(t) = A\Phi(t) + \int_{-h}^{0} d\eta(\tau)\Phi(\tau+s),$$

$\Phi(0) = I$, $\Phi(t) = 0$ при $t < 0$. При этом отображение (1.4.4) является единственным решением интегрального уравнения

$$x(t) = S(t)\varphi(0) + \int_0^t S(t-s)\left(\int_{-h}^{0} d\eta(\tau)x(\tau+s)\right)ds + \int_0^t S(t-s)f(s)ds, \quad t \geq 0$$

Потому, следуя А. Фридману [308] и Ю.С. Осипову [159] примем следующее

Определение 1.4.2. *Если отображение* $t \to f(t)$ *локально интегрируемо, то решением задачи Коши (1.4.3.) с начальным положением* $\varphi(\cdot) \in L_p([-h, 0], X)$ *будем называть отображение (1.4.4.), где интеграл понимается в смысле Бохнера [264 с. 93].*

Теперь, в банаховом пространстве X, рассмотрим неоднородное уравнение нейтрального типа

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} B_i \dot{x}\,(t - h_i) + Ax(t) + \sum_{i=1}^{n} A_i x\,(t - h_i) + f(t) \qquad (1.4.5)$$

где

$t \geq 0,\ x(t) \in X,\ 0 < h_1 < h_2 < \cdots < h_n = h,$ операторы $A_i: X \to X$ и B_i: $X \to X -$ линейны и ограниченны, а л.з.о. $A: D \to \mathrm{X}$, имеющий плотную в X область определения D, п.с.н.п. $S(t)$. При этом предполагается, что линейные операторы AB_i ограниченны.

В работе [302, с.268] доказана, что непрерывное отображение

$$\mathrm{x}(t) = (\Phi(t) - \sum_{i=1}^{n} \Phi(t - h_i) B_i)\varphi(0)$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \int_{-h_i}^{0} \Phi(t - s - h_i)\big(A_i \varphi(s) + B_i \dot{\varphi}(s)\big) ds$$

является единственным решением однородной задачи Коши (1.4.5) с начальным положением $\varphi(s), -h \leq s \leq 0$, где $\varphi(\cdot)$ является абсолютно непрерывным отображением, а $\Phi(t)$- фундаментальное решение, для которого справедливы равенства

$$\dot{\Phi}(t) = \sum_{i=1}^{n} B_i \dot{\Phi}\,(t - h_i) + A\Phi(t) + \sum_{i=1}^{n} A_i \Phi\,(t - h_i),$$
$$\Phi(0) = I, \Phi(t) = 0 \text{ при } t < 0\,.$$

Кроме этого, в работе [299] для более общего интегро-дифференциального уравнения нейтрального типа, когда отображение $t \to f(t)$ локально интегрируемо по Бохнеру, доказана, что имеет место, в частности, следующее равенство

$$x(t) = (\Phi(t) - \sum_{i=1}^{n} \Phi(t - h_i)B_i)\varphi(0) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \int_{-h_i}^{0} \Phi(t - s - h_i)\big(A_i\varphi(s) + B_i\dot{\varphi}(s)\big)ds +$$

$$+ \int_{0}^{t} \Phi(t - s)f(s)ds, \qquad t \geq 0. \tag{1.4.6}$$

Поэтому, следуя А. Фридману [308] и Ю.С. Осипову [159] примем следующее

Определение 1.4.3. *Если отображение $t \to f(t)$ локально интегрируемо, то решением задачи Коши (1.4.5) с абсолютно непрерывным начальным положением $\varphi(s), -h \leq s \leq 0$ будем называть отображение вида (1.4.6).*

Далее, в банаховом пространстве X, рассмотрим задачу Коши для нелинейного дифференциального уравнения нейтрального типа

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + f\big(t, x(t), x(t-h), \dot{x}(t-h)\big) \\ \qquad x(s) = \varphi(s), \qquad -h \leq s \leq 0, \end{cases} \tag{1.4.7}$$

где

$t \geq 0,\ x(t) \in X,\ h \geq 0,\ \varphi(\cdot)$ – абсолютно непрерывная функция, а л.з.о. $A: D \to X$, имеющий плотную в X область определения D, п.с.н.п. $S(t)$. Предполагается, что отображение $f: [0, \infty) \times X \times X \times X \to X$ измеримо по t и непрерывно по $\big(x,\ x(t-h),\ \dot{x}(t-h)\big)$ и существует локально суммируемая функция $\eta: [0, \infty) \to [0, \infty)$ такая, что при любых $(t,\ x,\ x(t-h),\ \dot{x}(t-h) \in [0, \infty) \times X \times X \times X$ имеет место неравенство $\big\|f\big(t,\ x(t),\ x(t-h),\ \dot{x}(t-h)\big)\big\| \leq \eta(t)$.

В дальнейшем, учитывая работу [72], примем следующее

Определение 1.4.4. *Если отображение* $t \to f\big(t,\ x(t),\ x(t-h),\ \dot{x}(t-h)\big)$ *локально интегрируемо, то решением задачи Коши (1.4.7) будем называть отображение*

$$x(t) = S(t)\varphi(0) + \int_0^t S(t-s) f(s, x(s), x(s-h), \dot{x}(s-h)) ds, t \geq 0, \qquad (1.4.8)$$

где интеграл понимается в смысле Бохнера.

В банаховом пространстве X рассмотрим задачу Коши для дифференциального уравнения дробного порядка α , $m-1 < \alpha < m, m = 1,2, \ldots,$

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = Ax(t) + f(u(t), v(t), t) \\ \left.\dfrac{d^i}{dt^i} x(t)\right|_{t=0+} = x_i^0, i = 0,1, \ldots, m-1 \end{cases} \qquad (1.4.9)$$

где $x(t) \in X, t \geq 0, A -$ линейный ограниченный оператор, Y и Z -банаховы пространства, отображение $f(\cdot,\cdot,\cdot): Y \times Z \times [0,\infty) \to X$ непрерывно по (u, v) и измеримо по t и существует такая локально суммируемая функция $\eta: [0,\infty) \to [0,\infty)$, что при всех $u \in Y, v \in Z, t \in [0,\infty)$ имеет место неравенство $\|f(u,v,t)\| \leq \eta(t)$, $u(\cdot) \in U([0,\infty),Y)$, $v(\cdot) \in U([0,\infty),Z)$, а $D^\alpha -$ дробная производная Капуто порядка α от функции $x(t)$.

В дальнейшем, учитывая работу [273] полагаем, что задача (1.4.9) имеет решение

$$x(t) = \sum_{i=0}^{m-1} t^i E_{1/\alpha}(At^\alpha; i+1) x_i^0 +$$

$$+ \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(A(t-s)^\alpha; \alpha)\, f(u(s), v(s), s) ds \qquad (1.4.10)$$

где

$$E_{1/\alpha}(At^{\alpha};\beta)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(At^{\alpha})^{k}}{\Gamma(k\alpha+\beta)}-$$

обобщенная функция Миттаг-Леффлера [70, 251, 273].

В банаховом пространстве X рассмотрим задачу Коши для дифференциального уравнения дробного порядка α, $1\le\alpha<2$

$$\begin{cases}D^{\alpha}x(t)=Ax(t)+f\big(t,u(t),v(t)\big)\\ x(0)=x_0,x'(0)=x_1\end{cases}\qquad(1.4.11)$$

В задаче (1.4.11) $t\ge 0$, $x(t)\in X$, $D^{\alpha}x(t)$ - дробная производная Капуто порядка $\alpha, 1\le\alpha<2$, от функции $x(t)$, $A\colon D\to X$ –л.з.о. имеющий плотную в X область определения D, п.с.н.п. $S_{\alpha}(t)$, Y и Z -гильбертовы пространства, $u(\cdot)\in U([0,\infty),Y)$ -управление преследования, $v(\cdot)\in U([0,\infty),Z)$ -управление убегания.

В силу [354] дадим следующее

Определение 1.4.5. *Л.з.о. $A\colon D\to X$ называется оператором типа (N,θ,α,μ), если существуют $0<\theta<\pi/2, N>0$ и $\mu\in R$ такие, что у оператора A существует α- резолвента $R(\lambda^{\alpha},A)=(\lambda^{\alpha}I-A)^{-1}$ вне сектора $\mu+S_{\theta}=\{\mu+\lambda^{\alpha}\colon\lambda\in C,|Arg(-\lambda^{\alpha})|<\theta\}$ и имеет место следующая оценка*

$$\|(\lambda^{\alpha}I-A)^{-1}\|\le\frac{N}{|\lambda^{\alpha}-\mu|},\qquad \lambda^{\alpha}\notin\mu+S_{\theta}$$

Как отмечается в работе [354], если A является оператором типа (N,θ,α,μ), то он порождает $\alpha-$ резольвентный оператор

$$S_{\alpha}(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c}e^{\lambda t}R(\lambda^{\alpha},A)d\lambda,$$

где c-контур, для которого $\lambda\in c$ и $\lambda^{\alpha}\notin\mu+S_{\theta}$.

В силу [354], если л.з.о. A является оператором типа (N,θ,α,μ), а

отображение $t \to f(u(t), v(t), t)$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\beta \in (0,1]$, то задача Коши (1.4.11) имеет единственное слабое решение вида

$$x(t) = K_\alpha(t)x_1 + L_\alpha(t)x_0 + \int_0^t S_\alpha(t-s)f(u(s), v(s), s)ds\,, \qquad (1.4.12)$$

где

$$K_\alpha(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_c e^{\lambda t}\,\lambda^{\alpha-2}R(\lambda^\alpha, A)d\lambda, \qquad L_\alpha(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_c e^{\lambda t}\,\lambda^{\alpha-1}R(\lambda^\alpha, A)d\lambda.$$

Поэтому, следуя А. Фридману и Ю.С. Осипову дадим следующее

Определение 1.4.6. *Если отображение* $t \to f(u(t), v(t), t)$ *локально интегрируемо, то решением задачи Коши (1.4.11) соответствующим управлениям* $u(t)$ *и* $v(t)$, *будем называть отображение вида (1.4.12), где интеграл понимается в смысле Бохнера*.

В банаховом пространстве X рассмотрим задачу Коши для дифференциального уравнения дробного порядка $\alpha, 0 < \alpha < 1$

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) + Ax(t) = f(u(t), v(t), t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \qquad (1.4.13)$$

где $t \geq 0$, $x(t) \in X$, $u(\cdot) \in U([0,\infty), Y) -$ управление преследования, $v(\cdot) \in U([0,\infty), Z)$ -управление убегания, Y, Z – банаховые пространства, D^α-дробная производная Капуто порядка $\alpha, 0 < \alpha < 1$ от функции $x(t)$, $A -$ л.з.о., имеющий плотную в X область определения, который п.с.н.п. $S(t)$. Далее, в силу [303], когда для любых допустимых $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ отображение $t \to f(u(t), v(t), t)$ локально интегрируемо, то задача Коши (1.4.13) имеет слабое решение вида

$$x(t) = Q(t)x_0 + \int_0^t R(t-s)f(u(s), v(s), s)ds, \qquad t \in [0, T], \qquad (1.4.14)$$

где

$$Q(t) = \int_0^\infty \xi_\alpha(\sigma)\mathrm{S}(t^\alpha\sigma)d\sigma, \quad R(t) = \alpha\int_0^\infty \sigma \cdot t^{\alpha-1}\,\xi_\alpha(\sigma)\mathrm{S}(t^\alpha\sigma)d\sigma$$

$$\text{и} \quad \int_0^\infty e^{-\sigma y}\xi_\alpha(\sigma)d\sigma = \sum_{j=0}^\infty \frac{(-y)^j}{\Gamma(1+\alpha j)}, \quad y > 0.$$

Пусть $X, Y, Z -$ банаховы пространства. Рассмотрим задачу Коши для интегро-дифференциального уравнения дробного порядка $\alpha, \alpha > 0, m-1 < \alpha < m, m = 1, 2, \ldots$, [67]

$$D^\alpha x(t) = Ax(t) + \int_0^t B(t-s)x(s)ds + f(u(t), v(t,)t),$$

$$x(0) = x_0, \qquad x^n(0) = 0, \qquad n = 1,2, \ldots, m-1, \qquad (1.4.15\ )$$

где $t \geq 0, x(t) \in X$, $u(\cdot) \in U([0,\infty), Y) -$ управление преследования, $v(\cdot) \in U([0,\infty), Z) -$ управление убегания, $A -$ л.з.о., имеющий плотную в X область определения, $\{B(t)\}_{t\geq 0}$ $-$семейство л.з.о. в X с областями определения $D\big(B(t)\big) \supset D(A)$ такие, что функции $B(t)x$ сильно измеримые для $x \in D(A)$ и существует положительная локально суммируемая функция $b(\cdot)$ такая, что $\|B(t)x\| \leq b(t)(\|x\| + \|A(x)\|)$ для всех $x \in D(A)$ и для почти всех $t \geq 0$.

В работе [67] М. Илоловым показано, что когда $x_0 \in D(A)$ и отображение $f(u(\cdot), v(\cdot),\cdot)$ из класса $W^{1,1}([0,T], X) -$ пространство абсолютно непрерывных на $[0,T]$ функций таких, что $f' \in L_1([0,T], X)$ и

$$f(u(t), v(t), t) = f(u(0), v(0), 0) + \int_0^t f'(u(s), v(s), s)ds,$$

то отображение $x(\cdot)$ задаваемой формулой

$$x(t\,) = S_\alpha(t)x_0 + \int_0^t S_\alpha(t-s)f(u(s),v(s),s)ds, \qquad (1.4.16)$$

где $S_\alpha(t) - \alpha$- резольвентный оператор, удовлетворяющий уравнению

$$D^\alpha S_\alpha(t) = AS_\alpha(t) + \int_0^t B(t-s)S_\alpha(s)ds$$

является решением задачи (1.4.15).

Поэтому примем следующее

Определение 1.4.7. *Если отображение* $t \to f(u(t),v(t),t)$ *локально интегрируемо, то решением задачи Коши (1.4.15) соответствующим управлениям* $u(t)$ *и* $v(t)$, *будем называть отображение вида (1.4.16), где интеграл понимается в смысле Бохнера*.

В сепарабельном банаховом пространстве X рассмотрим задачу Коши для линейного дифференциального уравнения с несколькими дробными производными Герасимова - Капуто

$$D^\alpha z(t) = \sum_{k=1}^{n} D^{\alpha_k} A_k z + f(u(t),v(t),t), \qquad (1.4.17)$$

$$z^{(l)}(0) = z_l, \qquad l = 0,1,\dots, \qquad m-1,$$

В задаче (1.4.17) $t \geq 0$, $z(t) \in X$, Y и $Z -$ сепарабельные банаховы пространства, $u(\cdot) \in U([0,\infty),Y) -$ управление преследования, $\vartheta(\cdot) \in U([0,\infty),Z) -$ управление убегания, $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n < \alpha, m = [\alpha] + 1, m_k = [\alpha_k] + 1$, $A_k: X \to X -$ линейные ограниченные операторы, $k = 1,2,\dots,n$. В дальнейшем предполагаем, что отображение $f: [0,\infty) \times Y \times Z \to X$ измеримо по $t \in [0,\infty)$ и непрерывно по $(u,v) \in Y \times Z$ и существует такая локально интегрируемая функция $\eta: [0,\infty) \to [0,\infty)$, что при всех $u \in Y, v \in$

Z , $t \in [0, \infty)$ имеет место неравенство $\|f(u, v, t)\| \leq \eta(t)$. Это предположение обеспечивает локально интегрируемость отображении $t \to f\ (u(t), v(t), t)$ по Бохнеру.

Из работы [261] следует, что когда $t \to f(u(t), v(t), t)$ непрерывное отображение, то задача Коши (1.4.17) имеет единственное решение вида

$$z(t) = \sum_{l=0}^{m-1} Z_l(t) z_l + \int_0^t Z(t-s) f(u(s), v(s), s) ds \qquad (1.4.18)$$

из класса $C^{m-1}([0, \infty), X)$, где

$$Z_l(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \left(\lambda^\alpha I - \sum_{k=1}^{n} \lambda^{\alpha_k} A_k\right)^{-1} \left(\lambda^{\alpha-l-1} I - \sum_{k=n_l}^{n} \lambda^{\alpha_k - l - 1} A_k\right) e^{\lambda t} d\lambda,$$

$$t > 0, \gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3, \quad \gamma_1 = \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda| = r_o, arg\lambda \in (-\pi, \pi)\},$$

$$\gamma_2 = \{\lambda \in \mathbb{C}: \lambda \in [-r_o, +\infty)\},$$

$$\gamma_3 = \{\lambda \in \mathbb{C}: \lambda \in (-\infty, -r_o]\}$$

$$r_0 = (2An)^{\frac{1}{\alpha - \alpha_n}}, \qquad A = max\left\{\frac{1}{2n}, \|A_k\|: k = 1,2, \dots, n\right\},$$

$$n_l = min\{k \in \{1,2, \dots, n\}: l < m_k - 1\},$$

$$Z(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \left(\lambda^\alpha I - \sum_{k=1}^{n} \lambda^{\alpha_k} A_k\right)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda.$$

Поэтому примем следующее

Определение 1.4.8. *Если отображение* $t \to f(u(t), v(t), t)$ *локально интегрируемо, то решением задачи Коши (1.4.17) соответствующим управлениям* $u(\cdot), v(\cdot)$ *будем называть отображение (1.4.18), где интеграл понимается в смысле Бохнера.*

Если X-банахово пространство, а

$$\Phi(t)=\sum_{j=0}^{n}\frac{n!}{j!\,(n-j)!}\cdot\frac{(t-n+1)^j}{j!}(B)^j, n-1\le t\le n,\quad n=0,1,2,3,\ldots,$$

то справедлива следующая (конечномерный случай рассмотрен в работе Р. Беллмана и К.Л.Кука [24])

Лемма 1.4.6. *Если* $B:\boldsymbol{X}\to\boldsymbol{X}-$ *линейный ограниченный оператор, а отображение* $t\to f(t)$ *локально интегрируемо по Бохнеру, то задача Коши*

$$\dot{x}(t)-\dot{x}(t-1)=Bx(t-1)+f(t)\,, x(s)=x_0, -1\le s\le 0 \qquad (1.4.19)$$

имеет решение

$$x(t)=\Phi(t)x_0+\int_0^t\Phi(t-s)f(s)ds. \qquad (1.4.20)$$

Доказательство. В начале покажем, что соответствующее однородное уравнение имеет решение $x_1(t)=\Phi(t)x_0$. Действительно, имеем

$$\dot{x_1}(t)-\dot{x_1}(t-1)=\dot{\Phi}(t)x_0-\dot{\Phi}(t-1)x_0=$$

$$=\left[\sum_{j=0}^{n}\frac{n!}{j!\,(n-j)!}\cdot\frac{(t-n+1)^j}{j!}(B)^j\right]'x_0-$$

$$-\left[\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{j!\,(n-1-j)!}\cdot\frac{(t-n+1)^j}{j!}(B)^j\right]'x_0=$$

$$=\left[I+n\frac{(t-n+1)}{1!}B+\frac{n!}{2!\,(n-2)!}\frac{(t-n+1)^2}{2!}B^2+\ldots+\frac{(t-n+1)^n}{n!}B^n\right]x_0-$$

$$-\left[I+(n-1)\frac{(t-n+1)}{1!}B\right.$$

$$\left.+\frac{(n-1)!}{2!\,(n-3)!}\frac{(t-n+1)^2}{2!}B^2+\ldots+\frac{(t-n+1)^{n-1}}{(n-1)!}B^{n-1}\right]x_0=$$

$$= \left(nB + \frac{n!}{2!\,(n-2)!}\frac{t-n+1}{1!}B^2 + \ldots + \frac{(t-n+1)^{n-1}}{(n-1)!}B^n \right) x_0 -$$

$$- \left((n-1)B + \frac{(n-1)!}{2!\,(n-3)!}\frac{t-n+1}{1!}B^2 + \ldots + \frac{(t-n+1)^{n-2}}{(n-2)!}B^{(n-1)} \right) x_0 =$$

$$= \left(B + (n-1)\frac{t-n+1}{1!}B^2 + \ldots + (n-1)\frac{(t-n+1)^{n-2}}{(n-2)!}B^{(n-1)} \right.$$

$$\left. + \frac{(t-n+1)^{n-1}}{(n-1)!}B^n \right) x_0 =$$

$$= B\left(I + (n-1)\frac{t-n+1}{1!}B + \ldots + (n-1)\frac{(t-n+1)^{n-2}}{(n-2)!}B^{(n-2)} \right.$$

$$\left. + \frac{(t-n+1)^{n-1}}{(n-1)!}B^{(n-1)} \right) x_0 =$$

$$= B\sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{j!\,(n-1-j)!} \cdot \frac{(t-n+1)^j}{j!} B^j x_0 = B\Phi(t-1)x_0 = Bx_1(t-1).$$

Далее, легко можно показать, что функция

$$x_2(t) = \int_0^t \Phi(t-s)f(s)ds$$

является частным решением (1.4.19). Следовательно, функция $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ является решением задачи Коши (1.4.19). Лемма 1.4.6 доказана.

ГЛАВА 2.
ЛИНЕЙНЫЕ И КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИГРЫ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ

В работах Л.С. Понтрягина и его сотрудников исследованы конечномерные дифференциальные игры, когда динамика игры описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями. Но в последние годы возрос интерес к дифференциальным играм, когда динамика игры описывается более сложными уравнениями, в частности, дифференциальными уравнениями запаздывающего типа и функционально-дифференциальными уравнениями нейтрального типа. Это объясняется, во-первых, тем, что такие уравнения содержат неизвестную функцию и ее производные в разные моменты времени, т.е. учитывается предыстория состояния системы, что позволяет более адекватно отображать динамику игры. Во-вторых, в теории уравнений с запаздывающим аргументом и нейтрального типа получены хорошие результаты [24, 68, 263, 302, 331]. В-третьих, неоднократно увеличилось количество приложений таких уравнений к прикладным задачам из военной сферы, физики, техники и экономики [24, 263].

Вторая глава посвящена линейным и квазилинейным дифференциальным играм преследования в банаховом пространстве. Рассматривается задача преследования для дифференциальных игр, когда игра задается:

- обыкновенным дифференциальным уравнением;
- дифференциальным уравнением запаздывающего типа;
- дифференциальным уравнением нейтрального типа.

В первом параграфе приведена постановка з.п и з.у. в смысле Л.С. Понтрягина.

Во втором параграфе для квазилинейной дифференциальной игры с л.з.о. решена з.п.. Приведены условия, при которых время преследования будет оптимальным.

В третьем параграфе найдено множество начальных положений, из

которых в.з.п. в дифференциальных играх запаздывающего типа.

В четвертом параграфе разрешена з.п. для дифференциальной игры нейтрального типа в банаховом пространстве.

В пятом параграфе разрешена з.п. для игры нейтрального типа в гильбертовом пространстве.

В шестом параграфе исследованы примеры о разрешимости з.п.. Найдено время преследования и для любого допустимого управления убегающего указан закон выбора допустимого управления преследователя.

Изложенные в данной главе результаты опубликованы в работах [1-А, 2-А, 4-А, 5-А, 8-А, 12-А, 18-А, 19-А, 20-А, 22-А, 31-А, 37-А, 38-А, 40-А].

§2.1. Постановка задач преследования и убегания

Данная диссертационная работа посвящена дифференциальным играм преследования и убегания в банаховых пространствах. При этом з.п. и з.у. понимается в смысле Л.С. Понтрягина.

Пусть $X, Y, Z -$ банаховы пространства. В пространстве X рассматривается дифференциальная игра, описываемая дифференциальным уравнением

$$D^{\alpha}x(t) = F\big(t, x(t), x(t-h), D^{\alpha}x(t-h), u(t), v(t)\big) \qquad (2.1.1)$$

и замкнутым терминальным множеством $M \subset X$, где заканчивается игра.

В игре (2.1.1) $t \geq 0$, $x(t) \in X$, $h > 0$, $u(\cdot) \in U([0,\infty), Y) -$ управление преследования, $v(\cdot) \in U([0,\infty), Z) -$ управление убегания, а $D^{\alpha} -$ целая или дробная производная порядка α от функции $x(t)$.

В дальнейшем предполагаем, что отображение $F: [0,\infty) \times D \times D \times D \times Y \times Z \to X, D \subset X$ такое, что для любых $u(\cdot) \in U([0,\infty), Y)$, $v(\cdot) \in U([0,\infty), Z)$ и начального положения $\varphi(\cdot)$ из класса непрерывных функций, отображающих $[-h, 0]$ в X, задача Коши

$$\begin{cases} D^{\alpha}x(t) = F\big(t, x(t), x(t-h), D^{\alpha}x(t-h), u(t), v(t)\big) \\ x(s) = \varphi(s), \quad -h \le s \le 0 \end{cases} \tag{2.1.2}$$

имеет единственное решение в некотором классе функций.

Отметим, что в четвертом параграфе первой главы приведены ряд общих условий, при которых задача Коши (2.1.2) имеет решение в некотором классе функций.

Для дифференциальной игры (2.1.1) рассмотрим следующее определение о в.з.п. в смысле Л.С. Понтрягина [182].

Определение 2.1.1. *В игре (2.1.1) из начального положения $\varphi(\cdot)$ в.з.п., если существует число $T = T(\varphi)$ такое, что для любого управления убегания $v(\cdot) \in U([0,\infty), Z)$ в каждый момент $t \in [0, T]$, зная уравнение (2.1.1) и величины $x(s)$ и $v(s), 0 \le s \le t$, можно выбрать значение $u(t)$ таким образом, чтобы управление преследования $u(\cdot) \in U([0,\infty), Y)$ и $x(T_1) \in M$ при некотором $T_1 \in [0, T]$, где $x(\cdot)$–решение задачи Коши (2.1.2) соответствующее управлениям $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$. В этом случае, число $T = T(\varphi)$ называется гарантированным временем преследования.*

Для дифференциальной игры (2.1.1) рассмотрим следующее определение об оптимальности времени преследования.

Определение 2.1.2 [57]. *Число $T_0 = T_0(\varphi)$ называется оптимальным временем преследования, если, во-первых, из начального положения $\varphi(\cdot)$ в.з.п.з.в. T_0, и во- вторых, при всех $t \in [0, T_0)$ для любого управления преследования $u(\cdot) \in U([0, t], Y)$ можно выбрать такое управление убегания $v(\cdot) \in U([0, t], Z)$, что для решения $x(\cdot)$ задачи (2.1.2) выполняется условие $x(s) \overline{\in} M$ для всех $0 \le s \le t$. При этом для выбора $v(t)$ разрешается использовать величины $x(s)$, $u(s), 0 \le s \le t$.*

Задача преследования. *Найти множество начальных положений, из которых в игре (2.1.1) в.з.п. в смысле определения (2.1.1).*

Рассмотрим следующее определение о в.у. в смысле Л.С. Понтрягина [185].

Определение 2.1.3. *В игре (2.1.1) из начального положения* $\varphi(\cdot)$, $\varphi(0) \in X \backslash M$ *в.у., если при любом* $u(\cdot) \in U([0,\infty), Y)$ *в каждый момент* $t \in [0,\infty)$,*зная уравнение (2.1.1) и величины* $u(s)$ *и* $x(s)$, $0 \le s \le t$, *можно выбрать значение,* $v(t)$ *таким образом, чтобы* $v(\cdot) \in U([0,\infty), Z)$ *и* $x(t) \bar{\in} M$ *при всех* $t \ge 0$, *где* $x(\cdot)$ – *решение задачи (2.1.2), соответствующее управлениям* $u(\cdot)$ *и* $v(\cdot)$.

Задача убегания. *Найти множество начальных положений, из которых в игре (2.1.1) в.у. в смысле определения 2.1.3.*

В дальнейшем дифференциальная игра (2.1.1) называется:

- линейной, если $\alpha = 1, D^{\alpha}x(t) = \dot{x}(t)$ и

$$F\big(t, x(t), x(t-h), D^{\alpha}x(t-h)\,, u(t), v(t)\big) = Ax(t) - Bu(t) + Cv(t),$$

  где A – л.з.о.п.с.н.п. $S(t)$, а B и C -линейные ограниченные операторы;

- квазилинейной, если $\alpha = 1$, $D^{\alpha}x(t) = \dot{x}(t)$ и

$$F\big(t, x(t), x(t-h), D^{\alpha}x(t-h)\,, u(t), v(t)\big) = Ax(t) + f\big(t, u(t), v(t)\big);$$

- линейной с запаздывающими аргументами, если $\alpha = 1, D^{\alpha}x(t) = \dot{x}(t)$ и

$$F\big(t, x(t), x(t-h), D^{\alpha}x(t-h)\,, u(t), v(t)\big) =$$
$$= Ax(t) + \sum_{i=1}^{n} A_i x(t-h_i) - Bu(t) + Cv(t),$$

  где A_i – линейные ограниченные операторы;

- квазилинейной с запаздывающими аргументами, если $\alpha = 1, D^{\alpha}x(t) = \dot{x}(t)$ и

$$F\big(t, x(t), x(t-h), D^{\alpha}x(t-h)\,, u(t), v(t)\big) =$$

$$= Ax(t) + \sum_{i=1}^{n} A_i x(t-h_i) + f\big(t, u(t), v(t)\big);$$

- квазилинейной запаздывающего типа, если $\alpha = 1, D^{\alpha}x(t) = \dot{x}(t)$ и

$$F\big(t, x(t), x(t-h), D^{\alpha}x(t-h)\,, u(t), v(t)\big) =$$
$$= Ax(t) + \int_{-h}^{0} d\eta(s)x(t+s) + f\big(t, u(t), v(t)\big),$$

где $\eta(\cdot)$-мера Стилтьеса;

- линейной нейтрального типа, если $\alpha = 1, D^{\alpha}x(t) = \dot{x}(t)$ и

$$F\big(t, x(t), x(t-h), D^{\alpha}x(t-h)\,, u(t), v(t)\big) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} B_i \dot{x}(t-h_i) + Ax(t) + \sum_{i=1}^{n} A_i x(t-h_i) - Bu(t) + Cv(t),$$

где B_i, A_i и AB_i –линейные ограниченные операторы;

- квазилинейной нейтрального типа, если $\alpha = 1, D^{\alpha}x(t) = \dot{x}(t)$ и

$$F\big(t, x(t), x(t-h), D^{\alpha}x(t-h)\,, u(t), v(t)\big) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} B_i \dot{x}(t-h_i) + Ax(t) + \sum_{i=1}^{n} A_i x(t-h_i) + f(t, u(t), v(t))\,;$$

- нелинейной запаздывающего типа, если $\alpha = 1, D^{\alpha}x(t) = \dot{x}(t)$ и

$$F\big(t, x(t), x(t-h), D^{\alpha}x(t-h)\,, u(t), v(t)\big) = F(t, x(t), x(t-h), u(t), v(t));$$

- нелинейной нейтрального типа, если $\alpha = 1, D^{\alpha}x(t) = \dot{x}(t)$ и

$$F\big(t, x(t), x(t-h), D^{\alpha}x(t-h)\,, u(t), v(t)\big) =$$
$$= Ax(t) + f(\dot{x}(t-h), x(t-h), u(t), v(t), t)$$

- линейной интегро-дифференциальной игрой дробного порядка α, если

$$F\big(t, x(t), x(t-h), D^{\alpha}x(t-h)\,, u(t), v(t)\big) =$$
$$= Ax(t) + \int_0^t B(t-s)x(s)ds - Cu(t) + Dv(t),$$

где D^{α} − дробная производная Капуто порядка α от функции $x(t)$.

- квазилинейной интегро-дифференциальной игрой дробного порядка α, если

$$F\big(t, x(t), x(t-h), D^{\alpha}x(t-h)\,, u(t), v(t)\big) =$$
$$= Ax(t) + \int_0^t B(t-s)x(s)ds + f(u(t), v(t), t);$$

- квазилинейной дифференциальной игрой дробного порядка α, если

$$F\big(t, x(t), x(t-h), D^{\alpha}x(t-h)\,, u(t), v(t)\big) = Ax(t) \ + f\big(t, u(t), v(t)\big);$$

- дифференциальной игрой с несколькими дробными производными Герасимова-Капуто порядка α, если

$$F\big(t, x(t), x(t-h), D^{\alpha}x(t-h)\,, u(t), v(t)\big) = \sum_{k=1}^{n} D^{\alpha_k} A_k x(t) + f(u(t), v(t), t)$$

где $0 \le \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n < \alpha$, $m = [\alpha] + 1$, $m_k = [\alpha_k] + 1$, A_k − линейные ограниченные операторы, $k = 1,2, \dots, n$.

§2.2. Разрешимость задачи преследования и оптимальность времени преследования для квазилинейной дифференциальной игры

В этом параграфе доказана теорема о разрешимости з.п. и об оптимальности времени преследования. Найдено множество начальных положений, из которых в.з.п., когда динамика игры описывается квазилинейным дифференциальным уравнением в банаховом пространстве. Доказанная теорема обобщает линейные конечномерные результаты работ [57, 155].

В банаховом пространстве X рассматривается квазилинейная дифференциальная игра, описываемая дифференциальным уравнением

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(u(t), v(t), t) \tag{2.2.1}$$

и замкнутым терминальным множеством $M \subset X$, где заканчивается игра.

В игре (2.2.1) $t \geq 0$, $x(t) \in X$, $u(\cdot) \in U([0,\infty), Y) -$ управление преследования, $v(\cdot) \in U([0,\infty), Z) -$ управление убегания, Y и $Z -$ банаховы пространства, отображение $f: Y \times Z \times [0,\infty) \to X$ удовлетворяет условиям Каратеодори, т.е. оно измеримо по $t \in [0,\infty)$ и непрерывно по $(u, v) \in Y \times Z$ и существует такая локально суммируемая функция $\eta: [0,\infty) \to [0,\infty)$, что при всех $u \in Y, v \in Z, t \in [0,\infty)$ имеет место неравенство $\|f(u, v, t)\| \leq \eta(t)$, а $A: D \to X -$ л.з.о., имеющий плотную в X область определения D, п.с.н.п. $S(t)$.

Далее, согласно определению 1.4.1, при произвольных $u(\cdot) \in U([0,\infty), Y)$, $v(\cdot) \in U([0,\infty), Z)$, $x_o \in X$, $T \geq 0$, соответствующим этим данным решением задачи Коши

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(u(t), v(t), t), x(0) = x_o, \tag{2.2.2}$$

на отрезке $[0, T]$ будем называть отображение $x(\cdot): [0, T] \to X$, задаваемое формулой

$$x(t) = S(t)x_o + \int_0^t S(t-\tau)f(u(\tau), v(\tau), \tau)d\tau, \qquad t \in [0, T], \qquad (2.2.3)$$

где интеграл понимается в смысле Бохнера.

Справедлива следующая

Теорема 2.2.1. *Пусть выполняются* следующие условия:

1) $X, Y -$ *сепарабельные банаховы пространства, а терминальное множество* M *выпукло и компактно относительно топологии* $\sigma(X, X^*)$*;*
2) *начальная точка* $x_o \in X \backslash M$ *такая, что при некотором* $T \geq 0$ *имеет место включение*

$$S(T)x_o \in M - W_1(T), \qquad (2.2.4)$$

где

$$W_1(t) = \int_0^t \bigcap_{v \in Z} S(t-\tau)\, f(Y, v, \tau)\, d\tau;$$

3) *многозначное отображение* $t \to W_1(t), t \in [0, T]$ *замкнуто относительно топологии* $\sigma(X, X^*)$ *и при каждом* t *не пустозначно и выпуклозначно;*
4) *существует отображение* $w: Y \to Z$ *такое, что при всех* $u \in Y, t \in [0, T], 0 \leq \tau \leq t$ *выполняется включение*

$$S(t-\tau)f(u, w(u), \tau) \in \bigcap_{v \in Z} S(t-\tau)\, f(Y, v, \tau)$$

и для каждого $u(\cdot)$ *суперпозиция* $w(u(\cdot))$ *измерима.*

Тогда из начальной точки x_o *в.з.п.о.в.* $T_0 = min\{T \geq 0$: *для которых выполняется* (2.2.4)$\}$.

Доказательство. В силу условия 3) отображение $t \to W_1(t)$ замкнуто относительно топологии $\sigma(X, X^*)$. Следовательно, оно секвенциально замкнуто

относительно этой топологии. С другой стороны, в силу условия 1), множество M компактно относительно топологии $\sigma(X, X^*)$,поэтому согласно лемме 1.4.5, отображение $t \to M - W_1(t)$ секвенциально замкнуто относительно топологии $\sigma(X, X^*)$. Тогда, в силу непрерывности отображении $t \to S(t\,)x_o$ и леммы 1.4.4 множество $\{T \geq 0$: для которых выполняется (2.2.4)$\}$ замкнуто. А это означает, что имеет место следующее включение:

$$S(\,T_0)x_o \in M - W_1(T_0) \tag{2.2.5}$$

На основании (2.2.5) существуют некоторая точка $m \in M$ и такой интегрируемый селектор $p(\cdot)$ отображения

$$\tau \to \bigcap_{v \in Z} S(T_o - \tau)\, f(Y, v, \tau),$$

что имеет место следующее равенство:

$$S(\,T_0)x_o = m - \int_0^{T_o} p(t)dt. \tag{2.2.6}$$

Пусть выбрано произвольное управление убегания $v(\cdot) \in U([0, T_o], Z)$. В силу того, что отображение $f: Y \times Z \times [0, \infty) \to X$ измеримо по $t \in [0, \infty)$ и непрерывно по $(u, v) \in Y \times Z$, а отображение $t \to\ S(t\,)x_o$ непрерывно, то отображение $g(u, v, t) =\ S(T_o - t)f(u, v, t)$ тоже непрерывно по $(u, v) \in Y \times Z$ и измеримо по $t \in [0,\ \infty)$. С другой стороны пространства X и $Y -$ сепарабельные (условие 1) и для любых $v(\cdot) \in U([0, T_o], Z)$ и почти всех $t \in [0,\ \infty)$ имеет место включение

$$p(t) \in S(T_o - t)f(Y, v(t), t).$$

Следовательно, в силу леммы 1.4.3 (о существовании измеримого селектора у неявно заданного отображения), найдется такое управление преследования $u(\cdot) \in U([0,T_o],Y)$, что имеет место равенство

$$p(t) = S(T_o - t)f(u(t), v(t), t) \tag{2.2.7}$$

для почти всех $t \in [0,T_o]$. Учитывая (2.2.3), (2.2.6) и (2.2.7), в задаче (2.2.2), имеем

$$\begin{aligned} x(T_o) = \ & S(T_o)x_o + \int_0^{T_o} S(T_o - \tau)f(u(\tau), v(\tau), \tau)d\tau = \\ = \ & m - \int_0^{T_o} p(\tau)d\tau + \int_0^{T_o} S(T_o - \tau)f(u(\tau), v(\tau), \tau)d\tau = \\ = \ & m - \int_0^{T_o} S(T_o - \tau)f(u(\tau), v(\tau), \tau)d\tau + \\ & + \int_0^{T_o} S(T_o - \tau)f(u(\tau), v(\tau), \tau)d\tau = m \in M. \end{aligned}$$

Отметим, что выбор $u(t)$ по формуле (2.2.7) осуществляется исходя из информации о $v(t)$. Если при выборе $u(t)$ использовать информацию о $v(t)$ и $x(s)$, $0 \le s \le t$, то время достижения множества M будет не более числа T_o. Далее, в силу определения числа T_o, заключаем, что при всех $t \in [0,T_o)$ имеет место следующее соотношение

$$(S(\ t)x_o + W_1(t)) \cap M = \emptyset \tag{2.2.8}$$

Если $\varepsilon \in (0,T_o)$, то значения $v(t)$ управления убегания $v(\cdot) \in U([0,T_o],Z)$ на $[0,\varepsilon]$ выбираем произвольно, а при $t \in (\varepsilon,T_o)$ −специальным образом: $v(t) = w\big(u(t-\varepsilon)\big)$. Тогда в задаче (2.2.2) для решения $x(\cdot)$, соответствующего выбранным управлениям $u(\cdot), v(\cdot)$ на $[0,T_o)$, имеем

$$x(t) = S(t)x_o + \int_0^t S(t-\tau)f(u(\tau),v(\tau),\tau)d\tau = S(t)x_o +$$

$$+\int_0^\varepsilon S(t-\tau)f(u(\tau),v(\tau),\tau)d\tau + \int_\varepsilon^t S(t-\tau)f\big(u(\tau),w\big(u(\tau-\varepsilon)\big),\tau\big)d\tau.$$

В силу (2.2.8), условий 1), 3) и согласно теореме 1.4.1 о строгой отделимости, множества M и $S(t)x_o + W_1(t)$ при всех $t \in [0,T_o)$ строго отделимы, т.е. при всех $t \in [0,T_o)$ можно найти такой непрерывный линейный функционал $\psi \in X^*$ и такие константы c и $\delta > 0$, что

$$\psi(x) \le c - \delta < c \le \psi(m) \tag{2.2.9}$$

при всех $x \in S(t)x_o + W_1(t)$ и $m \in M$.

Если $\bar{p}(\cdot)$- произвольный интегрируемый селектор отображения

$$\tau \to \bigcap_{v\in Z} S(t-\tau)\, f(Y,v,\tau), \qquad \tau \in [0,\varepsilon],$$

то на основании условия 4) и неравенств (2.2.9) имеем

$$\psi\big(x(t)\big) = \psi(\, S(t)x_o +$$

$$+\int_0^\varepsilon S(t-\tau)f(u(\tau),v(\tau),\tau)d\tau + \int_\varepsilon^t S(t-\tau)f(u(\tau),w(u(\tau-\varepsilon)),\tau)d\tau) =$$

$$= \psi\left(S(t)x_o + \int_0^\varepsilon \bar{p}(\tau)d\tau + \int_\varepsilon^t S(t-\tau)f\big(u(\tau),w\big(u(\tau-s)\big),\tau\big)d\tau\right)$$

$$+\psi\left(\int_0^\varepsilon S(t-\tau)f(u(\tau),v(\tau),\tau)d\tau - \int_0^\varepsilon \bar{p}(\tau)d\tau\right)$$

$$\le c - \delta + \int_0^\varepsilon \psi\big(S(t-\tau)f(u(\tau),v(\tau),\tau) - \bar{p}(\tau)\big)d\tau.$$

В силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега [71] существует число $\varepsilon = \theta > 0$ такое, что

$$\left|\int_0^{\theta} \psi\big(S(t-\tau)f(u(\tau),v(\tau),\tau) - \bar{p}(\tau)\big)d\tau\right| < \frac{\delta}{2}.$$

Следовательно,

$$\psi\big(x(t)\big) \le c - \delta + \frac{\delta}{2} = c - \frac{\delta}{2} < c.$$

Поэтому число $\varepsilon = \theta > 0$ и соответствующее ему управление $v(\cdot)$ можно выбрать так, что $x(t) \overline{\in} M$ при всех $t \in [0, T_o)$, что и доказывает оптимальность времени преследования T_o. Теорема доказана.

§2.3. Квазилинейные дифференциальные игры запаздывающего типа

В настоящем параграфе найдено множество начальных положений, из которых разрешима з.п., когда динамики игры описывается квазилинейным дифференциальным уравнением запаздывающего типа в гильбертовом пространстве. Получены достаточные условия об оптимальности времени преследования. Доказанные теоремы обобщают соответствующие конечномерные результаты работ [57, 230] и работ [128, 129], когда дифференциальная игра описывается уравнением запаздывающего типа.

В гильбертовом пространстве X рассмотрим дифференциальную игру, описываемую уравнением запаздывающего типа

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + \int_{-h}^{0} d\eta\,(s)x(t+s) + f(u(t),v(t),t)\,, \qquad (2.3.1)$$

и замкнутым терминальным множеством M, где заканчивается игра.

В игре (2.3.1) $x(t) \in X, \eta(\cdot)$ −мера Стилтьеса имеет вид

$$\eta(s) = -\sum_{r=1}^{m} \chi_{(-\infty,-h_r)}(s) \cdot A_r - \int_s^0 A_0\,(\xi)d\xi, \qquad s \in [-h, 0],$$

где $0 < h_1 < h_2 < \cdots < h_m < h$, $\chi_{(-\infty,-h_r)}(\cdot) -$ характеристическая функция $(-\infty, -h_r)$, $A_r \in L(X, X), r = \overline{1, m}$, $A_0(\cdot) \in L_{p'}\big([-h, 0], L(X, X)\big)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, а л.з.о. $A: D \to X$, имеющий плотную в X область определения D, п.с.н.п. $S(t)$.Далее можно построить фундаментальное решение

$$\Phi(t) = \begin{cases} S(t) + \int_0^t S(t-s) \int_{-h}^0 d\eta(\xi)\, \Phi(\xi + s)ds, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

для которого справедливо равенство

$$\dot{\Phi}(t) = A\Phi(t) + \int_{-h}^0 d\eta(\xi)\, \Phi(t + \xi) \qquad (2.3.2)$$

и $\Phi(0) = I -$ единичный оператор, $\Phi(t) = 0$ при $t < 0$.

В силу определения 1.4.2 предполагая, что отображение $t \to f(u(t), v(t), t)$ локально интегрируемо для любых $t > 0$, $u(\cdot) \in U([0, \infty), Y)$, $v(\cdot) \in U([0, \infty), Z)$, где Y и $Z -$ гильбертовы пространства, решением задачи Коши

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + \int_{-h}^0 d\eta\,(s)x(t + s) + f(u(t), v(t), t), \;\; t \geq 0 \qquad (2.3.3)$$

$$x(s) = \varphi(s), \qquad -h \leq s \leq 0$$

с начальным условием $\varphi(\cdot) \in L_p([-h, 0], X)$ будем называть отображение $x(\cdot)$ задаваемой формулой

$$x(t) = \Phi(t)\varphi(0) + \int_{-h}^{0} \left(\int_{-h}^{s} \Phi(t-s+\xi) d\eta(\xi) \right) \varphi(s) ds +$$

$$+ \int_{0}^{t} \Phi(t-s) f(u(s), v(s), s) ds, \qquad t \geq 0. \qquad (2.3.4)$$

Замечание 2.3.1. *Отметим, что дифференциальная игра (2.3.1) охватывает, в частности:*

1) *игры, описываемые дифференциальными уравнениями вида*

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f\big(u(t), v(t)\big), \text{ когда } h = 0;$$

2) *игры, описываемые дифференциально-разностными уравнениями вида*

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{i=1}^{m} A_i\, x(t-h_i) + f(u(t), v(t), t)\,,$$

где $0 < h_1 < h_2 < \cdots < h_m = h.$

В дальнейшем M_0 − замкнутое подпространство из X, $M_0^{\perp}$ −ортогональное дополнение к M_0 в X, π − оператор ортогонального проектирования из X на $M_0^{\perp}$, терминальное множество $M = M_0 + M_1$, где $M_1 \subset M_0^{\perp}$.

Справедлива следующая

Теорема 2.3.1. *Пусть выполняются следующие условия:*

1) *множество* M_1 *компактно относительно топологии* $\sigma(X, X^*)$*;*
2) *отображение*

$$t \to \Omega(t) = \int_{0}^{t} \bigcap_{v \in Z} \pi\, \Phi(t-s) f(Y, v, s) ds, \quad t \in [0, T],$$

секвенциально замкнуто относительно топологии $\sigma(X, X^*)$ *и при каждом* t *не пустозначно;*

3) начальное положение $\varphi(\cdot)$ и число $T \geq 0$ такие, что

$$\pi\Phi(T)\varphi(0) + \int_{-h}^{0}\left(\int_{-h}^{s}\pi\Phi(T-s+\xi)d\eta(\xi)\right)\varphi(s)ds \in M_1 - \Omega(T). \quad (2.3.5)$$

Тогда из начального положения φ возможно завершение преследования с гарантированным временем (в.з.п.г.в)

$$T_1 = min\,\{T \geq 0: \pi\Phi(T)\varphi(0) +$$
$$+\int_{-h}^{0}\left(\int_{-h}^{s}\pi\Phi(T-s+\xi)d\eta(\xi)\right)\varphi(s)ds \in M_1 - \Omega(T)\}. \quad (2.3.6)$$

Доказательство. В силу условий 1), 2) множество M_1 компактно, а отображение $t \to \Omega(t)$ секвенциально замкнуто относительно слабой топологии $\sigma(X, X^*)$. Следовательно, в силу леммы 1.4.5, отображение $t \to M_1 - \Omega(t)$ секвенциально замкнуто относительно топологии $\sigma(X, X^*)$. С другой стороны, отображение

$$t \to \pi\Phi(t)\varphi(0) + \int_{-h}^{0}\left(\int_{-h}^{s}\pi\Phi(t-s+\xi)d\eta(\xi)\right)\varphi(s)ds$$

непрерывно $[331, \text{с. } 358]$. Поэтому в силу леммы 1.4.4, множество

$$\{t \geq 0: \pi\Phi(t)\varphi(0) + \int_{-h}^{0}\left(\int_{-h}^{s}\pi\Phi(t-s+\xi)d\eta(\xi)\right)\varphi(s)ds \in \mathrm{M}_1 - \Omega(t)\}$$

замкнуто. А это означает, что имеет место включение

$$\pi\Phi(T_1)\varphi(0) + \int_{-h}^{0}\int_{-h}^{s}\pi\Phi(T_1-s-\xi)d\eta(\xi)\,\varphi\,(s)ds \in M_1 - \Omega(T_1) \quad (2.3.7)$$

На основании (2.3.7) существует $m \in M_1$ и интегрируемый селектор ψ отображения

$$s \to \bigcap_{v \in Z} \pi\Phi(T_1 - s) f(Y, v, s),$$

что имеет место равенство

$$\pi\Phi(T_1)\varphi(0) + \int_{-h}^{0} \left(\int_{-h}^{s} \pi\Phi(T_1 - s - \xi) d\eta(\xi) \right) \varphi(s) ds = m - \int_{0}^{T_1} \psi(s) ds. \quad (2.3.8)$$

Выберем произвольное управление убегания $v(\cdot) \in U([0, T_1], Z)$. Зная $v(t), 0 \le t \le T_1$ и $\varphi(0)$, в силу леммы 1.4.3 (о существовании измеримого селектора у неявно заданного отображения), можно выбирать такое управление преследования $u(\cdot) \in U([0, T_1], Y)$, что

$$\psi(t) = \pi\Phi(T_1 - s) f(u(t), v(t), t) \quad (2.3.9)$$

для почти всех $0 \le t \le T_1$.

Теперь, для решения $x(\cdot)$ задачи (2.3.3), соответствующего управлениям $u(\cdot), v(\cdot)$ на $[0, T_1]$, учитывая (2.3.8) и (2.3.9), имеем:

$$\pi x(T_1) = \pi\Phi(T_1)\varphi(0) + \int_{-h}^{0} \left(\int_{-h}^{s} \pi\Phi(T_1 - s + \xi) d\eta(\xi) \right) \varphi(s) ds +$$

$$+ \int_{0}^{T_1} \pi\Phi(T_1 - s) f(u(s), v(s), s) ds = m - \int_{0}^{T_1} \psi(s) ds +$$

$$+ \int_{0}^{T_1} \pi\Phi(T_1 - s) f((u(s), v(s), s) ds =$$

$$= m - \int_{0}^{T_1} \pi\Phi(T_1 - s) f((u(s), v(s), s) ds +$$

$$+ \int_{0}^{T_1} \pi\Phi(T_1 - s) f((u(s), v(s), s) ds = m \in M_1$$

т.е. $\pi x(T_1) \in M_1$. Следовательно, $x(T_1) \in M$.

Из равенства (2.3.9) видно, что выбор $u(t)$ осуществляется исходя из информации $v(t)$ и $\varphi(0)$. Покажем, что если при выборе $u(t)$ использовать информацию о $v(t)$ и $x(s)$, $0 \le s \le t$, то в.з.п.г.в. T_1 т.е. $x(T_0) \in M$ при некотором $T_0 \le T_1$. Действительно, пусть

$$0 \le t_1 \le T_1 < h_1,\ T_0 = \min\{t \in [t_1, T_1]: \pi\Phi(t - t_1)x(t_1) \in \mathrm{M}_1 - \Omega(t, t_1)\}.$$

Тогда существуют $m_1 \in M_1$ и интегрируемый селектор ψ отображения

$$s \to \bigcap_{v \in Z} \pi\Phi(T_0 - s) f(Y, v, s),$$

что имеет место равенство

$$\pi\Phi(T_0 - t_1)x(t_1) = m_1 - \int_{t_1}^{T_0} \psi(s)ds. \qquad (2.3.10)$$

С другой стороны, для решения $x(\cdot)$ задачи (2.3.3), соответствующего управлениям $u(\cdot), v(\cdot)$ на $[0, T_0]$, имеем:

$$\pi x(t_1) = \pi\Phi(t_1)\varphi(0) + \int_{-h}^{0} \left(\int_{-h}^{s} \pi\Phi(t_1 - s + \xi) d\eta(\xi) \right) \varphi(s) ds +$$
$$+ \int_{0}^{t_1} \pi\Phi(t_1 - s) f(u(s), v(s), s) ds.$$

Используя полугрупповое свойство $S(t_1 + t_2) = S(t_1)S(t_2)$ (в силу (2.3.2) $\Phi(t) = S(t)$, если $t \in [0,\ h_1]$) имеем:

$$\pi\Phi(T_0 - t_1)x(t_1) = \pi\Phi(T_0)\varphi(0) + \int_{-h}^{0}\left(\int_{-h}^{s}\pi\Phi(T_0 - s + \xi)d\eta(\xi)\right)\varphi(s)ds +$$

$$+\int_{0}^{t_1}\pi\Phi(T_0 - s)f(u(s), v(s), s)ds.$$

Следовательно, в силу (2.3.10)

$$\pi x(T_0) = \pi\Phi(T_0)\varphi(0) + \int_{-h}^{0}\left(\int_{-h}^{s}\pi\Phi(T_0 - s + \xi)d\eta(\xi)\right)\varphi(s)ds +$$

$$+\int_{0}^{T_0}\pi\Phi(T_0 - s)f(u(s), v(s), s)ds =$$

$$= \pi\Phi(T_0 - t_1)x(t_1) - \int_{0}^{t_1}\pi\Phi(T_0 - s)f(u(s), v(s), s)ds$$

$$+\int_{0}^{T_0}\pi\Phi(T_0 - s)f(u(s), v(s), s)ds =$$

$$= m_1 - \int_{t_1}^{T_0}\psi(s)ds - \int_{0}^{t_1}\pi\Phi(T_0 - s)f(u(s), v(s), s)ds$$

$$+\int_{0}^{T_0}\pi\Phi(T_0 - s)f(u(s), v(s), s)ds =$$

$$= m_1 - \int_{t_1}^{T_0}\psi(s)ds - \int_{0}^{t_1}\pi\Phi(T_0 - s)f(u(s), v(s), s)ds$$

$$+\int_{0}^{t_1}\pi\Phi(T_0 - s)f(u(s), v(s), s)ds$$

$$+\int_{t_1}^{T_0}\pi\Phi(T_0 - s)f(u(s), v(s), s)ds = m_1 - \int_{t_1}^{T_0}\psi(s)ds + \int_{t_1}^{T_0}\psi(s)ds$$

$$= m_1 \in M_1.$$

Если $T_1 > h_1$, то всегда существует такое натуральное число n, что

$$(n-1)h_1 < T_1 \leq nh_1.$$

Поэтому, рассматривая дифференциальную игру на отрезке $[(n-1)h_1, nh_1]$ с начальным положением $x\big((n-1)h_1\big)$, приходим к тому, что в.з.п.г.в. T_1.

Теорема доказана.

Справедлива следующая теорема об оптимальности времени преследования.

Теорема 2.3.2. *Пусть выполнены условия 1) и 3) теоремы 2.3.1. и следующие условия:*

а) множество M_1 выпукло, а отображение $t \to \Omega(t)$ выпуклозначно и замкнуто относительно топологии $\sigma(X, X^*)$;

б) существует отображение $\omega: Y \to Z$ такое, что при всех $u \in Y, t \in [0, T_1]$, $0 \le s \le t$, выполняется включение

$$\pi\Phi(t-s)f(u,\omega(u),s)ds \in \bigcap_{v\in Z} \pi\Phi(t-s)f(Y,v,s) \qquad (2.3.11)$$

и для каждого допустимого $u(\cdot)$ суперпозиция $\omega(u(\cdot))$ измерима.

Тогда из начального положения φ в.з.п.о.в. $T_1 = T_1(\varphi)$.

Доказательство. В силу условия а) отображение $t \to \Omega(t)$ секвенциально замкнуто относительно топологии $\sigma(X, X^*)$. Следовательно, имеет место теорема 2.3.1. Из этой теоремы следует, что для любого допустимого управления убегания $v(\cdot)$ найдется такое управление преследования $u(\cdot)$, что из начального положения $\varphi(0)$ в.з.п.г.в.T_1 т.е. $x(T_0) \in M$ при некотором $T_0 \le T_1$. Покажем, что для любого управления преследования $u(\cdot)$ можно выбрать такое управление убегания $v(\cdot)$, что для решения $x(\cdot)$ задачи (2.3.3) выполняется $x(t) \overline{\in} M$ для всех $t \in [0, T_1)$.

Пусть $\varepsilon -$ некоторое число из интервала $(0, T_1)$. Управления $v(\cdot)$ на $[0, \varepsilon]$ выбираем произвольно, а при $t \in (\varepsilon, T_1)$ по формуле $v(t) = \omega(u(t-\varepsilon))$. Тогда, для решения $x(\cdot)$ задачи (2.3.3) имеем:

$$\pi x(t) = \pi\Phi(t)\varphi(0) + \int_{-h}^{0}\left(\int_{-h}^{s} \pi\Phi(t-s+\xi)d\eta(\xi)\right)\varphi(s)ds +$$

$$+\int_0^t \pi\Phi(t-s)f(u(s),v(s),s)ds = \pi\Phi(t)\varphi(0) +$$

$$+\int_{-h}^0 \left(\int_{-h}^s \pi\Phi(t-s+\xi)d\eta(\xi)\right)\varphi(s)ds +$$

$$+\int_0^\varepsilon \pi\Phi(t-s)f(u(s),v(s),s)ds +$$

$$+\int_\varepsilon^t \pi\Phi(t-s)f(u(s),\omega(u(s-\varepsilon)),s)ds. \qquad (2.3.12)$$

Далее из равенства (2.3.7) при всех $t \in [0,T_1)$ имеем:

$$\left(\pi\Phi(t)\varphi(0) + \int_{-h}^0 \left(\int_{-h}^s \pi\Phi(t-s+\xi)d\eta(\xi)\right)\varphi(s)ds + \Omega(t)\right) \bigcap M_1 = \emptyset \qquad (2.3.13)$$

Согласно теореме 1.4.1 о строгой отделимости, в силу (2.3.12), условия а) множества M_1 и

$$\pi\Phi(t)\varphi(0) + \int_{-h}^0 \left(\int_{-h}^s \pi\Phi(t-s+\xi)d\eta(\xi)\right)\varphi(s)ds + \Omega(t)$$

при всех $t \in [0,T_1)$ строго отделимы. Следовательно, при всех $t \in [0,T_1)$ можно найти такой элемент $y \in X$ и такие константы с и $\delta > 0$, что

$$\langle x,y\rangle \le c-\delta < c \le \langle m,y\rangle \qquad (2.3.14)$$

при всех

$$x \in \pi\Phi(t)\varphi(0) + \int_{-h}^0 \left(\int_{-h}^s \pi\Phi(t-s+\xi)d\eta(\xi)\right)\varphi(s)ds + \Omega(t)$$

и $m \in M_1$.

Если $\psi(\cdot)$ −произвольный интегрируемый селектор отображения

$$s \to \bigcap_{v\in Z} \pi\Phi(t-s)f(Y,v,s), \quad s \in [0,\varepsilon]$$

то на основании (2.3.5), (2.3.11) и неравенств (2.3.14) имеем:

$$\langle \pi x(t), y\rangle =< \pi\Phi(t)\varphi(0) + \int_{-h}^{0}\left(\int_{-h}^{s}\pi\Phi(t-s+\xi)d\eta(\xi)\right)\varphi(s)ds +$$

$$+\int_{0}^{s}\pi\Phi(t-s)f(u(s),v(s),s)ds + \int_{\varepsilon}^{t}\pi\Phi(t-s)f\big(u(s),\omega\big(u(s-\varepsilon)\big),s\big)ds, y >=$$

$$=< \pi\Phi(t)\varphi(0) + \int_{-h}^{0}\left(\int_{-h}^{s}\pi\Phi(t-s+\xi)d\eta(\xi)\right)\varphi(s)ds +$$

$$+\int_{0}^{\varepsilon}\psi(s)ds + \int_{\varepsilon}^{t}\pi\Phi(t-s)f\big(u(s),\omega\big(u(s-\varepsilon)\big),s\big)ds, \mathrm{y} > +$$

$$+< \int_{0}^{\varepsilon}\pi\Phi(t-s)f(u(s),v(s),s)ds - \int_{0}^{\varepsilon}\psi(s)ds, y >\leq c-\delta +$$

$$+\int_{0}^{\varepsilon}< \pi\Phi(t-s)f(u(s),v(s),s)ds - \psi(s), y > ds. \qquad (2.3.15)$$

В силу абсолютной непрерывности интеграла существует число $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\left|\int_{0}^{\varepsilon}< (\pi\Phi(t-s)f(u(s),v(s),s)ds - \psi(s)\,, y > ds\right| < \frac{\delta}{2}.$$

Следовательно, в силу (2.3.14), (2.3.15), имеем:

$$< \pi x(t), y >\leq c-\delta+\frac{\delta}{2} = c-\frac{\delta}{2} \leq \langle m, y\rangle.$$

Последние неравенства означают, что число $\varepsilon > 0$ и управление $v(\cdot)$ можно выбрать таким образом, что $\pi x(t) \overline{\in} M_1$, т. е. $x(t) \overline{\in} M$ при всех $t \in [0, T_1)$. А это означает, что время T_1 оптимально. Теорема доказана.

§2.4. Дифференциальные игры нейтрального типа в банаховом пространстве

В этом параграфе в банаховом пространстве рассматривается з.п. в смысле Л.С. Понтрягина для квазилинейной дифференциальной игры, когда динамика игры описывается функционально– дифференциальным уравнением нейтрального типа в форме Дж. Хейла с л.з.о.. Используя идею первого метода Л.С. Понтрягина и метода преследования Н. Сатимова доказаны восемь теорем о достаточных условиях разрешимости з.п.. В этих теоремах при соответствующих предположениях описано множество начальных положений, из которых в.з.п.. Доказанные теоремы обобщают соответствующие конечномерные результаты работ $[57, 230]$ и работ $[128, 130, 134]$, когда дифференциальная игра описывается уравнением нейтрального типа.

Пусть X и $Y -$ сепарабельные банаховые пространства, а $Z -$ банахово пространство. В пространстве X рассмотрим квазилинейную дифференциальную игру, описываемую дифференциальным уравнением нейтрального типа

$$\dot{x}(t) - C\dot{x}(t-h) = Ax(t) + Bx(t-h) + f(u(t), v(t), t) \tag{2.4.1}$$

и замкнутым терминальным множеством $M \subset X$, где заканчивается игра.

В игре (2.4.1) $t \geq 0,\ h > 0,\ x(t) \in X,\ u(\cdot) \in U([0,\infty),\ Y) -$ управление преследования, $v(\cdot) \in U([0,\infty), Z) -$ управление убегания, $C: X \to X,\ B: X \to X -$ линейные ограниченные операторы, л.з.о. $A: D \to X$ имеющий плотную в X область определения D, п.с.н.п. $S(t)$, а оператор AC является линейным и ограниченным. Используя полугруппу $S(t)$, можно построить фундаментальное решение [302]

$$\Phi(t) = S(t) + \chi(t-h)C\Phi(t-h) + \int_0^t S(t-s)\chi(s-h)(B + AC)\Phi(s-h)ds,$$

где

$$\chi(\mu) = \begin{cases} 0, & \mu \leq 0 \\ 1, & \mu > 0 \end{cases}$$

- характеристическая функция, для которого справедливо равенство

$$\dot{\Phi}(t) - C\dot{\Phi}(t-h) = A\Phi(t) + B\Phi(t-h) \tag{2.4.2}$$

и $\Phi(0) = I -$ единичный оператор, а $\Phi(t) = 0$ при $t < 0$. В дальнейшем предполагаем, что отображение $f: Y \times Z \times [0, \infty) \to X$ удовлетворяет условиям Каратеодори. Далее, согласно определению 1.4.3, когда отображение $t \to f(u(t), v(t), t)$ локально интегрируемо, для любых $u(\cdot) \in U([0, \infty), Y)$, $v(\cdot) \in U([0, \infty), Z)$, $t \geq 0$, решением задачи Коши (2.4.1) с начальным условием

$$x(s) = \varphi(s), \quad -h \leq s \leq 0, \tag{2.4.3}$$

где $\varphi(\cdot) -$ абсолютная непрерывная функция, будем называть отображение $x(\cdot)$ задаваемой формулой

$$x(t) = [\Phi(t) - \Phi(t-h)C]\varphi(0) + \int_{-h}^{0} \Phi(t-s-h)[B\varphi(s) + C\dot{\varphi}(s)]ds +$$

$$+ \int_{0}^{t} \Phi(t-s) f(u(s), v(s), s) ds, \tag{2.4.4}$$

где интеграл понимается в смысле Бохнера**.**

Замечание 2.4.1. *Отметим, что дифференциальная игра вида (2.4.1) охватывает, в частности, игры, описываемые дифференциально-разностными уравнениями вида* $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-h) + f(u(t), v(t), t)$,*когда* C *- нулевой оператор.*

Справедлива следующая

Теорема 2.4.1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) *при каждом* $t > 0,\ 0 \le s \le t$ *множество*

$$\bigcap_{v \in Z} \Phi(t-s) f(Y, v, s)$$

непусто;

2) *начальное положение* $\varphi(s),\ -h \le s \le 0,\ \ \varphi(0) \in X \backslash M$ *и число* $T \ge 0$ *такие, что имеет место включение*

$$[\Phi(T) - \Phi(T-h)C]\varphi(0) +$$

$$+ \int_{-h}^{0} \Phi(T-s-h)[B\varphi(s) + C\dot{\varphi}(s)]ds \in W_1(T) \qquad (2.4.5)$$

где

$$W_1(t) = M - \int_0^t \bigcap_{v \in Z} \Phi(t-s) f(Y, v, s) ds, t \in [0, T];$$

3) *множество M компактно, а отображение*

$$t \to \int_0^t \bigcap_{v \in Z} \Phi(t-s) f(Y, v, s) ds, \qquad t \in [0, T]$$

секвенциально замкнуто относительно топологии $\sigma(X, X^*)$.

Тогда из начального положения $\varphi(0)$ *в.з.п.г.в.*

$$T_1 = \min\{T \ge 0 : [\Phi(T) - \Phi(T-h)C]\varphi(0) +$$

$$+ \int_{-h}^{0} \Phi(T-s-h)[B\varphi(s) + C\dot{\varphi}(s)]ds \in W_1(T)\}.$$

Доказательство. В силу условия 3) множество M компактно, а отображение

$$t \to \int_0^t \bigcap_{v \in Z} \Phi(t-s) f(Y, v, s) ds$$

секвенциально замкнуто относительно слабой топологии $\sigma(X, X^*)$.

Следовательно, в силу леммы 1.4.5, отображение $t \to W_1(t)$ секвенциально замкнуто относительно топологии $\sigma(X, X^*)$. С другой стороны, отображение

$$t \to [\Phi(t) - \Phi(t-h)C]\varphi(0) + \int_{-h}^{0} \Phi(t-s-h)[B\varphi(s) + C\dot{\varphi}(s)]ds$$

непрерывно $[302, \text{с. } 268]$. Поэтому, в силу леммы 1.4.4, множество

$$\{T \geq 0: [\Phi(T) - \Phi(T-h)C]\varphi(0) + \\ + \int_{-h}^{0} \Phi(T-s-h)[B\varphi(s) + C\dot{\varphi}(s)]ds \in W_1(T)\}$$

замкнуто. А это означает, что включение (2.4.5) имеет место и при $T = T_1$.

На основании (2.4.5) существуют точка $m \in M$ и интегрируемый селектор $\omega(\cdot)$ отображения

$$s \to \bigcap\nolimits_{v \in Z} \Phi(T_1 - s)f(Y, v, s), \quad s \in [0, T_1]$$

такие, что имеет место равенство

$$[\Phi(T_1) - \Phi(T_1-h)C]\varphi(0) + \int_{-h}^{0} \Phi(T_1-s-h)[B\varphi(s) + C\dot{\varphi}(s)]ds = \\ = m - \int_{0}^{T_1} \omega(s)ds. \qquad (2.4.6)$$

Так как X, $Y -$ сепарабельные банаховые пространства, отображение $(u, v, s) \to f(u, v, s)$ непрерывно по (u, v) и измеримо по t, а отображений

$$s \to \bigcap\nolimits_{v \in Z} \Phi(T - s)f(Y, v, s)$$

и $s \to \omega(s)$ измеримы, то в силу леммы 1.4.3 (о существовании измеримого

селектора у неявно заданного отображения), из соотношения

$$\omega(s) \in \bigcap\nolimits_{v \in Z} \Phi(T_1 - s) f(Y, v, s)$$

следует, что для любого измеримого управления убегания $v(\cdot) \in U([0, T_1], Z)$ можно найти такое измеримое управление преследования $u(\cdot) \in U([0, T_1], Y)$, что

$$\omega(s) = \Phi(T_1 - s) f(u(s), v(s), s) \tag{2.4.7}$$

для почти всех $s \in [0, T_1]$. Поэтому для решения задачи (2.4.1), (2.4.3), соответствующего управлениям $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ на отрезке $[0, T_1]$, в силу (2.4.7) и (2.4.6), имеем равенство

$$x(T_1) = [\Phi(T_1) - \Phi(T_1 - h)C]\varphi(0) + \int_{-h}^{0} \Phi(T_1 - s - h)[B\varphi(s) + C\dot{\varphi}(s)]ds +$$

$$+ \int_{0}^{T_1} \Phi(T_1 - s) f(u(s), v(s), s) ds =$$

$$= m - \int_{0}^{T_1} \omega(s) ds + \int_{0}^{T_1} \Phi(T_1 - s) f(u(s), v(s), s) ds =$$

$$= m - \int_{0}^{T_1} \Phi(T_1 - s) f(u(s), v(s), s) ds +$$

$$+ \int_{0}^{T_1} \Phi(T_1 - s) f(u(s), v(s), s) ds = m \in M, \quad \text{т.е.} \quad x(T_1) \in M.$$

Следовательно, из начального положения $\varphi(0)$ *в.з.п.з.в.* T_1 и для любого измеримого управления убегания $v(\cdot)$, соответствующее измеримое управление преследования $u(\cdot)$ выбирается по формуле (2.4.7). При этом, из равенства (2.4.7) видно, что выбор $u(t)$ осуществляется исходя из информации $v(t)$ и $\varphi(0)$. Покажем, что если при выборе $u(t)$ использовать информацию о $v(t)$ и $x(s)$, $0 \le s \le t$, то время завершения преследования будет не более числа T_1,

т.е. $x(T_0) \in M$ при некотором $T_0 \leq T_1$. Действительно, пусть

$$0 \leq t_1 \leq T_1 \leq h, \qquad T_0 = min\{t \in [t_1, T_1]: \Phi(t - t_1)x(t_1) \in W_1(t, t_1)\}.$$

Тогда существуют $m_1 \in M$ и интегрируемый селектор ψ отображения

$$s \to \bigcap_{v \in Z} \pi\Phi(T_0 - s)f(Y, v, s),$$

что имеет место равенство

$$\Phi(T_0 - t_1)x(t_1) = m_1 - \int_{t_1}^{T_0} \psi(s)ds.$$

С другой стороны, для решения $x(\cdot)$ задачи (2.4.1), соответствующего управлениям $u(\cdot), v(\cdot)$ на $[0, T_0]$, имеем:

$$x(t_1) = [\Phi(t_1) - \Phi(t_1 - h)C]\varphi(0) + \int_{-h}^{0} \Phi(t_1 - s - h)[B\varphi(s) + C\dot{\varphi}(s)]ds +$$
$$+ \int_{0}^{t_1} \Phi(t_1 - s)f(u(s), v(s), s)ds.$$

Используя полугрупповое свойство $S(t_1 + t_2) = S(t_1)S(t_2)$ (в силу (2.4.2) $\Phi(t) = S(t)$, если $t \in [0, h]$) имеем:

$$\Phi(T_0 - t_1)x(t_1) = \Phi(T_0 - t_1)([\Phi(t_1) - \Phi(t_1 - h)C]\varphi(0) +$$
$$+ \int_{-h}^{0} \Phi(t_1 - s - h)[B\varphi(s) + C\dot{\varphi}(s)]ds + \int_{0}^{t_1} \Phi(t_1 - s)f(u(s), v(s), s)ds) =$$
$$= [\Phi(T_0) - \Phi(T_0 - h)C]\varphi(0) + \int_{-h}^{0} \Phi(T_0 - s - h)[B\varphi(s) + C\dot{\varphi}(s)]ds +$$
$$+ \int_{0}^{t_1} \Phi(T_0 - s)f(u(s), v(s), s)ds.$$

Следовательно,

$$x(T_0) = [\Phi(T_0) - \Phi(T_0 - h)C]\varphi(0) + \int_{-h}^{0} \Phi(T_0 - s - h)[B\varphi(s) + C\dot{\varphi}(s)]ds +$$

$$+ \int_{0}^{T_0} \Phi(T_0 - s)f(u(s), v(s), s)ds =$$

$$= \Phi(T_0 - t_1)x(t_1) - \int_{0}^{t_1} \Phi(T_0 - s)f(u(s), v(s), s)ds$$

$$+ \int_{0}^{T_0} \Phi(T_0 - s)f(u(s), v(s), s)ds =$$

$$= \Phi(T_0 - t_1)x(t_1) - \int_{0}^{t_1} \Phi(T_0 - s)f(u(s), v(s), s)ds$$

$$+ \int_{0}^{t_1} \Phi(T_0 - s)f(u(s), v(s), s)ds + \int_{t_1}^{T_0} \Phi(T_0 - s)f(u(s), v(s), s)ds$$

$$= m_1 - \int_{t_1}^{T_0} \psi(s)ds + \int_{t_1}^{T_0} \Phi(T_0 - s)f(u(s), v(s), s)ds$$

$$= m_1 - \int_{t_1}^{T_0} \psi(s)ds + \int_{t_1}^{T_0} \psi(s)ds = m_1 \in M.$$

Если $T_1 > h$, то всегда существует такое натуральное число n, что $(n-1)h < T_1 \leq nh$. Поэтому, рассматривая дифференциальную игру на отрезке $[(n-1)h, nh]$ с начальным положением $x\big((n-1)h\big)$, приходим к тому, что время завершения преследования будет не более числа T_1, т.е. $x(T_0) \in M$ при некотором $T_0 \leq T_1$. Теорема доказана.

Справедлива следующая

Теорема 2.4.2. *Пусть выполнены следующие условия*:

1) *терминальное множество M выпукло;*
2) *при любых* $v \in Z$, $s \in [0, T]$ *множество* $\Phi(T - s)f(Y, v, s)$ *непусто и замкнуто;*
3) *начальное положение* $\varphi(s), -h \leq s \leq 0$, $\varphi(0) \in X \backslash M$ *и число* $T \geq 0$ *такие, что имеет место включение*

$$[\Phi(T)-\Phi(T-h)C]\varphi(0)+\int_{-h}^{0}\Phi(T-s-h)[B\varphi(s)+C\dot{\varphi}(s)]ds$$
$$\in W_2(\gamma(\cdot),T), \qquad (2.4.8)$$

где

$$W_2=\begin{cases} M, & \text{при } T=0,\\ \bigcup_{\gamma(\cdot)\in\Gamma(0,T)}\int_0^T\bigcap_{v\in Z}[\gamma(s)M-\Phi(T-s)f(Y,v,s)]ds, & \text{при } T>0.\end{cases}$$
$$(2.4.9)$$

Тогда из начального положения $\varphi(\cdot)$ в.з.п.з.в. T.

Доказательство. В силу (2.4.8), (2.4.9) для некоторой $\gamma(\cdot)\in\Gamma(0,T)$ существует такой интегрируемый селектор $\omega(\cdot)$ отображения

$$s\to\bigcap_{v\in Z}[\gamma(s)M-\Phi(T-s)f(Y,v,s)], s\in[0,T],$$

что имеет место равенство

$$[\Phi(T)-\Phi(T-h)C]\varphi(0)+\int_{-h}^{0}\Phi(T-s-h)[B\varphi(s)+C\dot{\varphi}(s)]ds=$$
$$=\int_0^T\omega(s)ds. \qquad (2.4.10)$$

Пусть выбрано произвольное управление убегания $v(\cdot)\in U([0,T],Z)$. Тогда имеем включение

$$\omega(s)\in\gamma(s)M-\Phi(T-s)f(Y,v(s),s), s\in[0,T]$$

и множество

$$\Pi(s)=\big(\omega(s)+\Phi(T-s)f(Y,v(s),s)\big)\cap\gamma(s)M$$

замкнуто и не пусто. Из измеримости отображения $s\to\Pi(s)$, в силу лемм 1.4.2

и 1.4.3, существуют измеримый селектор $p(s) \in \Pi(s)$, управления преследования $u(\cdot) \in U([0,T],Y)$ и измеримое отображение $m(\cdot)\colon [0,T] \to M$ такие, что

$$p(s) = \omega(s) + \Phi(T-s)f(u(s),v(s),s) = \gamma(s)m(s)$$

для почти всех $s \in [0,T]$. Следовательно,

$$\omega(s) = \gamma(s)m(s) - \Phi(T-s)f(u(s),v(s),s). \qquad (2.4.11)$$

Поэтому, учитывая (2.4.10), (2.4.11), выпуклость терминального множества M и равенство

$$\int_0^T \gamma(s)Mds = \left(\int_0^T \gamma(s)ds\right)M,$$

где последнее равенство имеет место для выпуклого множества M[130], для решения $x(\cdot)$ задачи (2.4.1), (2.4.3), соответствующего управлениям $u(\cdot), v(\cdot)$ на $[0,T]$ имеем:

$$x(T) = [\Phi(T) - \Phi(T-h)C]\varphi(0) + \int_{-h}^{0} \Phi(T-s-h)[B\varphi(s) + C\dot{\varphi}(s)]ds +$$
$$+ \int_0^T \Phi(T-s)f(u(s),v(s),s)ds = \int_0^T \omega(s)ds + \int_0^T \Phi(T-s)f(u(s),v(s),s)ds =$$
$$= \int_0^T \big(\gamma(s)m(s) - \Phi(T-s)f(u(s),v(s),s)\big)ds + \int_0^T \Phi(T-s)f(u(s),v(s),s)ds =$$
$$= \int_0^T \gamma(s)m(s)ds \in \int_0^T \gamma(s)Mds = \left(\int_0^T \gamma(s)ds\right)M = M, \quad \text{т.е.} \quad x(T) \in M.$$

Следовательно, из начального положения φ, в.з.п.з.в. T и для любого измеримого управления убегания $v(\cdot)$ соответствующее измеримое управление преследования $u(\cdot)$ выбирается по формуле (2.4.11). При этом из равенства

(2.4.11) видно, что выбор $u(t)$ осуществляется исходя из информации $v(t)$ и $\varphi(0)$. Отметим, что когда множество M компактно, а отображение $t \to W_2(\gamma(\cdot), t))$, $t \in [0, T]$ секвенциально замкнуто относительно топологии $\sigma(X, X^*)$, то множество

$$\{T \geq 0: [\Phi(T) - \Phi(T-h)C]\varphi(0) + \int_{-h}^{0} \Phi(T-s-h)[B\varphi(s) + C\dot{\varphi}(s)]ds \in W_2(\gamma(\cdot), T)\}$$

будет замкнутым. Поэтому, как в теореме 2.4.1, можно показать, что в.з.п.г.в. $T_0 = min\{T \geq 0$: для которых выполняется (2.4.8)$\}$. Теорема доказана.

Замечание 2.4.2. *Из теоремы 2.4.2 следует, что для разрешимости з.п. необходимо некоторое превосходство преследователя над убегающим игроком. Включение (2.4.5) и не пустота множества*

$$\bigcap_{v \in Z} \Phi(t-s)f(Y, v, s), \quad t > 0, \qquad 0 \leq s \leq t$$

(соответственно включение (2.4.8) и не пустота множества

$$\bigcap_{v \in Z} \big(\gamma(s)M - \Phi(t-s)f(Y, v, s)\big), \qquad t > 0, \qquad 0 \leq s \leq t)$$

в теореме 2.4.1 (соответственно в теореме 2.4.2) обеспечивают превосходства преследователя.

Замечание 2.4.3. *Если множество M выпукло и $x \in W_1(T)$ то существуют такие*

$$m \in M \text{ и } \psi(s) \in \bigcap_{v \in Z} \Phi(T-s)f(Y, v, s),$$

что

$$x = m - \int_0^T \psi(s)ds = \int_0^T \left[\frac{1}{T}m - \psi(s)\right] ds$$

$$\in \int_0^T \left[\gamma(\cdot)M - \bigcap_{v\in Z} \Phi(T-s)f(Y,v,s)\right] ds \subset W_2(\gamma(\cdot),T),$$

$$\text{т.е. } W_1(T) \subset W_2(\gamma(\cdot),T).$$

Далее в банаховом пространстве X рассмотрим дифференциальную игру, описываемую дифференциальным уравнением нейтрального типа

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} B_i\, \dot{x}(t-h_i) + Ax(t) + f(u(t),v(t),t) \qquad (2.4.12)$$

и замкнутым терминальным множеством M, где заканчивается игра.

В игре (2.4.12) $t \geq 0,\ 0 < h_1 < h_2 < \cdots < h_n = h,\ x(t) \in X, u(\cdot) \in U([0,\infty],Y) -$ управление преследования, $v(\cdot) \in U([0,\infty],Z) -$ управление убегания. $B_i: X \to X -$линейные ограниченные операторы, а $A: D \to X -$л.з.о., имеющий плотную в X область определения D, п.с.н.п. $S(t)$. При этом полагаем, что операторы AB_i являются линейными и ограниченными. Используя полугруппу $S(t)$, можно построить фундаментальное решение [302]

$$\Phi(t) = S(t) + \sum_{i=1}^{n} \chi\,(t-h_i)B_i\Phi(t-h_i)$$

$$+ \int_0^t S(t-s)\left(\sum_{i=1}^{n} \chi(s-h_i)\, AB_i\Phi(s-h_i)\right) ds,$$

где

$$\chi(\mu) = \begin{cases} 0, & \mu \leq 0 \\ 1, & \mu > 0 \end{cases}$$

- характеристическая функция, для которого справедливо равенство

$$\dot{\Phi}(t) = \sum_{i=1}^{n} B_i \dot{\Phi}\,(t - h_i) + A\Phi(t) \qquad (2.4.13)$$

и $\Phi(0) = I$ −единичный оператор, $\Phi(t) = 0$ при $t < 0$.

Далее, согласно определению 1.4.3 когда отображение $t \to f(u(t), v(t), t)$ локально интегрируемо, для любых $u(\cdot) \in U([0,\infty), Y)$, $v(\cdot) \in U([0,\infty), Z)$, $t \geq 0$, решением задачи Коши (2.4.12) с начальным условием

$$x(s) = \varphi(s), \quad -h \leq s \leq 0, \qquad (2.4.14)$$

где $\varphi(\cdot)$ − абсолютная непрерывная функция, будем называть отображение $x(\cdot)$ задаваемой формулой

$$x(t) = \left[\Phi(t) - \sum_{i=1}^{n} \Phi(t - h_i) B_i\right] \varphi(0) + \sum_{i=1}^{n} \int_{-h_i}^{0} \Phi(t - h_i)\, B_i \dot{\varphi}\,(s) ds +$$
$$+ \int_{0}^{t} \Phi(t - s)\, f(u(s), v(s), s) ds \qquad (2.4.15)$$

где интеграл понимается в смысле Бохнера.

В дифференциальной игре (2.4.12) рассмотрим разрешимость з.п. в смысле Л.С. Понтрягина.

Справедлива следующая

Теорема 2.4.3. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) *терминальное множество M выпукло;*
2) *число $T \geq 0$ и начальное положение $\varphi(s), -h \leq s \leq 0, \varphi(0) \in X \backslash M$ такие, что*

$$\left[\Phi(T) - \sum_{i=1}^{n} \Phi(T - h_i) B_i\right] \varphi(0) + \sum_{i=1}^{n} \int_{-h_i}^{0} \Phi(T - s - h_i)\, B_i\, \dot{\varphi}(s) ds \in$$

$$\in W_3(\gamma(\cdot),T) \qquad (2.4.16)$$

где

$$W_3(\gamma(\cdot),T) = \\ = \begin{cases} M, & \text{при } T=0 \\ \bigcup\limits_{\gamma(\cdot)\in\Gamma(0,T)} \int_0^T \bigcap\limits_{v\in Z} [\gamma(s)M - \Phi(T-s)f(Y,v,s)]ds, & \text{при } T>0 \end{cases};$$

3) при любых $v \in Z, s \in [0,T]$ множество $\Phi(T-s)F(Y,v,s)$ замкнуто.

Тогда из начального положения $\varphi(\cdot)$ в.з.п.г.в. $T = T(\varphi)$.

Доказательство. В силу (2.4.16) для некоторой $\gamma(\cdot) \in \Gamma(0,T)$ существует интегрируемый селектор $\omega(\cdot)$ отображения

$$s \to \bigcap_{v\in Z} [\gamma(s)M - \Phi(T-s)f(Y,v,s)], \quad s \in [0,T],$$

что имеет место равенство

$$\left[\Phi(T) - \sum_{i=1}^{n} \Phi(T-h_i)B_i\right]\varphi(0) + \sum_{i=1}^{n} \int_{-h_i}^{0} \Phi(T-s-h_i)\, B_i\, \dot{\varphi}(s)ds = \\ = \int_0^T \omega(s)ds \qquad (2.4.17)$$

Пусть выбрано произвольное допустимое управление убегания $v(\cdot)$. Тогда в силу известный леммы 1.4.3 существуют измеримое отображение $m(\cdot)\colon [0,T] \to M$ и допустимое управление преследования $u(\cdot)$, таких, что

$$\omega(s) = \gamma(s)m(s) - \Phi(T-s)f(u(s),v(s),s). \qquad (2.4.18)$$

Поэтому, учитывая (2.4.17), (2.4.18), выпуклость терминального множества

M и равенство

$$\int_0^T \gamma(s)Mds = \left(\int_0^T \gamma(s)ds\right)M = M$$

для решения $x(\cdot)$ задачи Коши (1.5.12), (1.5.14), соответствующего управлениям $u(\cdot), v(\cdot)$ имеем:

$$x(T) = \left[\Phi(T) - \sum_{i=1}^{n} \Phi(T-h_i)B_i\right]\varphi(0) + \sum_{i=1}^{n} \int_{-h_i}^{0} \Phi(T-h_i)\, B_i\dot{\varphi}\,(s)ds +$$

$$+ \int_0^T \Phi(T-s)\, f(u(s), v(s), s)ds =$$

$$= \int_0^T \omega(s)ds + \int_0^T \Phi(T-s)\, f(u(s), v(s), s)ds =$$

$$= \int_0^T \big(\gamma(s)m(s) - \Phi(T-s)f(u(s), v(s), s)\big)ds + \int_0^T \Phi(T-s)\, f(u(s), v(s), s)ds =$$

$$= \int_0^T \gamma(s)m(s)ds - \int_0^T \Phi(T-s)f(u(s), v(s), s)ds +$$

$$+ \int_0^T \Phi(T-s)\, f(u(s), v(s), s)ds \in$$

$$\in \int_0^t \gamma(s)Mds = \left(\int_0^T \gamma(s)ds\right)M = M,$$

т.е. $x(T) \in M$.

Поэтому, из начального положения $\varphi(\cdot)$, в.з.п.з.в. T. При этом выбор управления преследования $u(\cdot)$ осуществляется согласно формуле (2.4.18). Когда отображение $W_3(\gamma(\cdot), t), t \in [0, T]$ секвенциально замкнуто, то, как в теореме 2.4.2 можно показать, что в игре (2.4.12) в.з.п.г.в.

$$T_0 = min\left\{T > 0: \left[\Phi(T) - \sum_{i=1}^{n} \Phi(T - h_i)B_i\right]\varphi(0) + \sum_{i=1}^{n} \int_{-h_i}^{0} \Phi(T - s - h_i)\, B_i\, \dot{\varphi}(s)ds \in W_3(\gamma(\cdot), T)\right\}.$$

Теорема доказана.

Справедлива следующая

Теорема 2.4.4. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) *X – рефлексивно, Y – сепарабельно, а терминальное множество M выпукло;*
2) *число $T > 0$ и начальное положение $\varphi(s)$, $-h \le s \le 0, \varphi(0) \in X \backslash M$ такие, что*

$$\left[\Phi(T) - \sum_{i=1}^{n} \Phi(T - h_i)B_i\right]\varphi(0) + \sum_{i=1}^{n} \int_{-h_i}^{0} \Phi(T - s - h_i)\, B_i \dot{\varphi}\,(s)ds \in \in \int_0^T W_4(\gamma(s), T, s)\, ds, \qquad (2.4.19)$$

где

$$W_4(\gamma(s), T, s) = -\left[\bigcap_{v \in Z} \Phi(T - s) f(Y, v, s) \overset{*}{-} \gamma(s) M\right],$$

а функция $\gamma(\cdot): [t, T] \to [0, \infty)$ такая, что

$$\int_t^T \gamma(s)ds = 1;$$

3) *отображение $s \to W_4(\gamma(s), T_1, s)$ измеримо, замкнутозначно, выпуклозначно и ограничено на $[0, T]$ при фиксированном $T_1 \in [0, T]$.*

Тогда из начального положения φ в.з.п.г.в. $T_0 = \min\{T > 0:$ для которых

выполняется (2.4.19) }.

Доказательство.

В силу условий 1), 3) и теоремы 1.4.2 отображение

$$t \to \int_0^t W_4(\gamma(s), t, s)ds, \quad t \in [0, T]$$

замкнуто. Следовательно, включение (2.4.19) выполняется и для $T = T_0$.

Далее, в силу (2.4.19), для некоторой $\gamma(\cdot)$ существует такой интегрируемый селектор ω отображения

$$s \to \bigcap_{v \in Z} \Phi(T - s) f(Y, v, s) \overset{*}{-} \gamma(s) M, \quad s \in [0, T],$$

что

$$\left[\Phi(T_o) - \sum_{i=1}^{n} \Phi(T_o - h_i) B_i\right] \varphi(0) + \sum_{i=1}^{n} \int_{-h_i}^{0} \Phi(T_o - s - h_i)\, B_i \dot{\varphi}\,(s) ds =$$

$$= \int_0^{T_o} \omega(s)\, ds. \qquad (2.4.20)$$

Пусть выбрано произвольное допустимое управление убегания $v(\cdot)$. Тогда в силу известной леммы 1.4.3 существуют измеримое отображение $m(\cdot): [0, T_o] \to M$ и допустимое измеримое управление преследования $u(\cdot)$, таких, что

$$\gamma(s) m(s) - \omega(s) = \Phi(T_o - s) f(u(s), v(s), s) \qquad (2.4.21)$$

Поэтому, учитывая (2.4.20), (2.4.21), для решения $x(\cdot)$ задачи Коши (1.5.12), (1.5.14), соответствующего управлениям $u(\cdot), v(\cdot)$ имеем:

$$x(T_o) = \left[\Phi(T_o) - \sum_{i=1}^{n} \Phi(T_o - h_i)B_i\right]\varphi(0) +$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\int_{-h_i}^{0} \Phi\,(T_o - s - h_i)B_i\dot{\varphi}(s)ds + \int_0^{T_o}\Phi(T_o - s)\,f(u(s), v(s), s)ds =$$

$$= \int_0^{T_o}\omega(s)\,ds + \int_0^{T_o}\Phi(T_o - s)f(u(s), v(s), s)ds =$$

$$= \int_0^{T_o}\big(\gamma(s)m(s) - \Phi(T_o - s)f(u(s), v(s), s)\big)ds +$$

$$+\int_0^{T_o}\Phi(T_o - s)f(u(s), v(s), s)ds = \int_0^{T_o}\gamma(s)m(s)ds \in$$

$$\in \int_0^{T}\gamma(s)Mds = \left(\int_0^{T}\gamma(s)ds\right)M = M,$$

т.е. $x(T_0) \in M$. Следовательно, из начального положения $\varphi(\cdot)$ в.з.п.з.в. T_0. При этом выбор управления преследования $u(t)$ осуществляется исходя из информации $v(t)$ и $\varphi(0)$ согласно формуле (2.4.21). Если при выборе $u(t)$ использовать информацию о $v(t)$ и $x(s)$, $0 \le s \le t$, то время достижения множества M будет не более числа T_0 т.е. $x(T_1) \in M$ при некотором $T_1 \le T_0$. Действительно, пусть

$$0 \le t_1 \le T_0 \le h_1,$$

$$T_1 = \min\left\{t \in [t_1, T_0]: \Phi(t - t_1)x(t_1) \in \int_{t_1}^{t} W_4(\gamma(s), t, s)ds\right\}.$$

Если выбрано произвольное допустимое управление убегания $v(\cdot)$, то существуют измеримое отображение $m(\cdot): [0, T_o] \to M$ и допустимое измеримое управления преследования $u(\cdot)$, такие, что имеет место равенство

$$\Phi(T_1 - t_1)x(t_1) = \int_{t_1}^{T_1}(\gamma(s)m(s) - \Phi(T_1 - s)f(u(s), v(s), s))ds.$$

С другой стороны, для решения $x(\cdot)$ задачи (2.4.12), соответствующего управлениям $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ на $[0, T_1]$, имеем:

$$x(t_1) = \left[\Phi(t_1) - \sum_{i=1}^{n} \Phi(t_1 - h_i)B_i\right]\varphi(0) +$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\int_{-h_i}^{0} \Phi\,(t_1 - s - h_i)B_i\dot{\varphi}(s)ds + \int_0^{t_1} \Phi(t_1 - s)\, f(u(s), v(s), s)ds.$$

Используя полугрупповое свойство $S(t_1 + t_2) = S(t_1)S(t_2)$ (в силу (2.4.13) $\Phi(t) = S(t)$, если $t \in [0, h_1]$) имеем:

$$\Phi(T_1 - t_1)x(t_1) = \Phi(T_1 - t_1)(\left[\Phi(t_1) - \sum_{i=1}^{n} \Phi(t_1 - h_i)B_i\right]\varphi(0) +$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\int_{-h_i}^{0} \Phi\,(t_1 - s - h_i)B_i\dot{\varphi}(s)ds + \int_0^{t_1} \Phi(t_1 - s)\, f(u(s), v(s), s)ds) =$$

$$= \left[\Phi(T_1) - \sum_{i=1}^{n} \Phi(T_1 - h_i)B_i\right]\varphi(0) + \sum_{i=1}^{n}\int_{-h_i}^{0} \Phi\,(T_1 - s - h_i)B_i\dot{\varphi}(s)ds +$$

$$+\int_0^{t_1} \Phi(T_1 - s)\, f(u(s), v(s), s)ds.$$

Следовательно,

$$x(T_1) = \left[\Phi(T_1) - \sum_{i=1}^{n} \Phi(T_1 - h_i)B_i\right]\varphi(0) +$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\int_{-h_i}^{0} \Phi\,(T_1 - s - h_i)B_i\dot{\varphi}(s)ds + \int_0^{T_1} \Phi(T_1 - s)\, f(u(s), v(s), s)ds =$$

$$= \Phi(T_1 - t_1)x(t_1) - \int_0^{t_1} \Phi(T_1 - s)\, f(u(s), v(s), s)ds$$

$$+\int_0^{T_1} \Phi(T_1 - s)\, f(u(s), v(s), s)ds =$$

$$= \Phi(T_1 - t_1)x(t_1) - \int_0^{t_1} \Phi(T_1 - s)\, f(u(s), v(s), s)ds =$$

$$= \int_0^{t_1} \Phi(T_1 - s)\, f(u(s), v(s), s)ds + \int_{t_1}^{T_1} \Phi(T_1 - s)\, f(u(s), v(s), s)ds =$$

$$= \Phi(T_1 - t_1)x(t_1) + \int_{t_1}^{T_1} \Phi(T_1 - s)\, f(u(s), v(s), s)ds =$$

$$= \int_{t_1}^{T_1} \big(\gamma(s)m(s) - \Phi(T_1 - s)f(u(s), v(s), s)\big)\, ds$$

$$+ \int_{t_1}^{T_1} \Phi(T_1 - s)\, f(u(s), v(s), s)ds =$$

$$= \int_{t_1}^{T_1} \gamma(s)m(s)ds \in \int_{t_1}^{T_1} \gamma(s)Mds = \left(\int_{t_1}^{T_1} \gamma(s)ds\right)M = M,$$

т. е. $x(T_1) \in M$.

Если $T_0 > h_1$, то всегда существует такое натуральное число n, что $(n-1)h_1 < T_0 \leq nh_1$. Поэтому, рассматривая дифференциальную игру на отрезке $[(n-1)h_1, nh_1]$ с начальным положением $x\big((n-1)h_1\big)$, приходим к тому, что время завершения преследования будет не более числа T_0, т. е. $x(T_1) \in M$ при некотором $T_1 \leq T_0$. Теорема доказана.

Далее рассматривается з.п. для квазилинейной дифференциальной игры, описываемая дифференциальным уравнением нейтрального типа

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} B_i \dot{x}(t - h_i) + Ax(t) + \sum_{i=1}^{n} A_i x(t - h_i) + f\big(t, u(t), v(t)\big) \qquad (2.4.22)$$

и замкнутым терминальным множеством M, где заканчивается игра.

В игре (2.4.22) $t \geq 0$, $0 < h_1 < h_2 < \cdots < h_n = h$, $x(t) \in X$, $u(\cdot) \in U([0, \infty], Y) -$ управление преследования, $v(\cdot) \in U([0, \infty], Z) -$ управление убегания. $A_i: X \to X, B_i: X \to X -$линейные ограниченные операторы, а $A: D \to$

$X -$ л.з.о., имеющий плотную в X область определения D, п.с.н.п. $S(t)$. При этом линейные операторы AB_i ограниченны. Используя эту полугруппу, можно построить фундаментальное решение [302]

$$\Phi(t) = S(t) \ + \sum_{i=1}^{n} \chi\,(t - h_i) B_i \Phi(t - h_i) +$$

$$+ \int_0^t S(t-\tau) \left[\sum_{i=1}^{n} \chi(\tau - h_i)(A_i + AB_i)\Phi(\tau - h_i) \right] d\tau,$$

где

$$\chi(s) = \begin{cases} 1, & \text{если} \ \ s > 0 \\ 0, & \text{если} \ \ s < 0, \end{cases}$$

и для которого справедливы равенства

$$\dot{\Phi}(t) = \sum_{i=1}^{n} B_i \dot{\Phi}\,(t - h_i) + A\Phi(t) + \sum_{i=1}^{n} A_i \Phi(t - h_i),$$

$\Phi(0) = I$ –единичный оператор, $\Phi(t) = 0$ при $t < 0$.

Далее, согласно определению 1.4.3, когда отображение $t \to \ f(u(t), v(t), t)$ локально интегрируемо, для любых $u(\cdot) \in U([0,\infty), Y)$, $v(\cdot) \in U([0,\infty), Z)$, $t \geq 0$, решением задачи Коши (2.4.22) с начальным условием

$$x(s) = \varphi(s), \quad -h \leq s \leq 0, \tag{2.4.23}$$

где $\varphi(\cdot) -$ абсолютная непрерывная функция, будем называть отображение $x(\cdot)$ задаваемой формулой

$$x(t) = \left[\Phi(t) - \sum_{i=1}^{n} \Phi(t - h_i) B_i \right] \varphi(0) +$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\int_{-h_i}^{0}\Phi\,(t-\tau-h_i)[A_i\varphi(\tau)+B_i\dot{\varphi}(\tau)]d\tau+$$

$$+\int_{0}^{t}\Phi(t-\tau)\,f(u(\tau),v(\tau),\tau)d\tau,$$

где интеграл понимается в смысле Бохнера.

Справедлива следующая

Теорема 2.4.5. *Пусть выполняются следующие условия:*

1) *терминальное множество M компактно относительно топологии $\sigma(X,X^*)$;*
2) *абсолютно непрерывное начальное положение $\varphi(s)$, $-h\le s\le 0$, $\varphi(0)\in X\backslash M$ и число $T\ge 0$ такие, что*

$$\left[\Phi(T)-\sum_{i=1}^{n}\Phi(T-h_i)B_i\right]\varphi(0)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\int_{-h_i}^{0}\Phi\,(T-\tau-h_i)[A_i\varphi(\tau)+B_i\dot{\varphi}(\tau)]d\tau\in M-W_5(T), \qquad (2.4.24)$$

где

$$W_5(t)=\int_{0}^{t}\bigcap_{v\in Z}\Phi(t-\tau)f(Y,v,\tau)d\tau;$$

3) *отображение $t\to W_5(t), t\in[0,T]$ секвенциально замкнуто относительно топологии $\sigma(X,X^*)$.*

Тогда в игре (2.4.22) с начальным условием (2.4.23) в.з.п.г.в.

$$T_o=\min\{T\ge 0\text{: для которых выполняется (2.4.24) }\}.$$

Доказательство. В силу условия 1) множество M компактно**,** а в силу условия 3) отображение $t\to W_5(t)$ секвенциально замкнуто относительно топологии $\sigma(X,X^*)$. Поэтому, согласно леммы 1.4.5 отображение $t\to \mathrm{M}-W_1(t)$ секвенциально замкнуто относительно топологии $\sigma(X,X^*)$. Тогда, в силу

непрерывности отображения

$$t \to \left[\Phi(t) - \sum_{i=1}^{n} \Phi(t - h_i)B_i\right]\varphi(0) + \sum_{i=1}^{n} \int_{-h_i}^{0} \Phi(t - \tau - h_i)[A_i\varphi(\tau) + B_i\dot{\varphi}(\tau)]d\tau$$

которое следует из [302], в силу (2.4.24) и леммы 1.4.4 множество $\{T \geq 0$: для которых выполняется (2.4.24) $\}$ замкнуто. Следовательно, имеет место следующее включение

$$\left[\Phi(T_0) - \sum_{i=1}^{n} \Phi(T_0 - h_i)B_i\right]\varphi(0) + \sum_{i=1}^{n} \int_{-h_i}^{0} \Phi(T_0 - \tau - h_i)[A_i\varphi(\tau) + B_i\dot{\varphi}(\tau)]\, d\tau$$
$$\in M - W_5(T_0) \qquad (2.4.25)$$

На основании (2.4.25) существуют некоторая точка $m \in M$ и такой интегрируемый селектор $p(\cdot)$ отображения

$$s \to \bigcap_{v \in Z} \Phi(T_o - s)\, f(Y, v, s),$$

что имеет место следующее равенство

$$\left[\Phi(T_o) - \sum_{i=1}^{n} \Phi(T_o - h_i)B_i\right]\varphi(0) + \sum_{i=1}^{n} \int_{-h_i}^{0} \Phi(T_o - \tau - h_i)[A_i\varphi(\tau) + B_i\dot{\varphi}(\tau)]d\tau =$$
$$= m - \int_{0}^{T_o} p(t)dt \qquad (2.4.26)$$

Если выбрано произвольное управление убегания $v(\cdot) \in U([0, T_o], Z)$, то в силу леммы 1.4.3, найдется такое управление преследования $u(\cdot) \in U([0, T_o], Y)$, что имеет место равенство

$$p(t) = \Phi(T_o - t) f(u(t), v(t), t) \tag{2.4.27}$$

для почти всех $t \in [0, T_o]$. Учитывая (2.4.26) и (2.4.27), в задаче (2.4.22) с начальным условием (2.4.23), имеем равенства

$$x(T_o) = \left[\Phi(T_o) - \sum_{i=1}^{n} \Phi(T_o - h_i) B_i\right] \varphi(0) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \int_{-h_i}^{0} \Phi(T_o - \tau - h_i)[A_i \varphi(\tau) + B_i \dot{\varphi}(\tau)] d\tau +$$

$$+ \int_{0}^{T_o} \Phi(T_o - \tau) f(u(\tau), v(\tau), \tau) d\tau =$$

$$= m - \int_{0}^{T_o} p(\tau) d\tau + \int_{0}^{T_o} \Phi(T_o - \tau) f(u(\tau), v(\tau), \tau) d\tau =$$

$$= m - \int_{0}^{T_o} \Phi(T_o - \tau) f(u(\tau), v(\tau), \tau) d\tau +$$

$$+ \int_{0}^{T_o} \Phi(T_o - \tau) f(u(\tau), v(\tau), \tau) d\tau = m \in M.$$

Отметим, что выбор $u(t)$ по формуле (2.4.27) осуществляется исходя из информации о $v(t)$. Если при выборе $u(t)$ использовать информацию о $v(t)$ и $x(s), 0 \le s \le t$, то время достижения множества M будет не более числа T_o. Действительно, если

$$0 \le t_1 \le T_0 \le h_1$$

$$T_1 = \min\{t \in [t_1, T_0] : \Phi(t - t_1) x(t_1) \in M - W_5(t, t_1)\}$$

то существуют $m_1 \in M$ и интегрируемый селектор ψ отображения

$$s \to \bigcap_{v \in Z} \pi \Phi(T_1 - s) f(Y, v, s),$$

что имеет место равенство

$$\Phi(T_1 - t_1) x(t_1) \ = m_1 - \int_{t_1}^{T_1} \psi(s) ds.$$

С другой стороны, для решения $x(\cdot)$ задачи (2.4.22), соответствующего управлениям $u(\cdot), v(\cdot)$ на $[0, T_1]$, имеем:

$$x(t_1) = \left[\Phi(t_1) - \sum_{i=1}^{n} \Phi(t_1 - h_i) B_i\right] \varphi(0) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \int_{-h_i}^{0} \Phi(t_1 - \tau - h_i)[A_i \varphi(\tau) + B_i \dot{\varphi}(\tau)] d\tau +$$

$$+ \int_{0}^{t_1} \Phi(t_1 - \tau) f(u(\tau), v(\tau), \tau) d\tau.$$

Следовательно, используя полугрупповое свойство $S(t_1 + t_2) = S(t_1) S(t_2)$ (так как $\Phi(t) = \ S(t)$, если $t \in [0, h_1]$) имеем:

$$\Phi(T_1 - t_1) x(t_1) = \Phi(T_1 - t_1)(\left[\Phi(t_1) - \sum_{i=1}^{n} \Phi(t_1 - h_i) B_i\right] \varphi(0) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \int_{-h_i}^{0} \Phi(t_1 - \tau - h_i)[A_i \varphi(\tau) + B_i \dot{\varphi}(\tau)] d\tau + \int_{0}^{t_1} \Phi(t_1 - \tau) f(u(\tau), v(\tau), \tau) d\tau) =$$

$$= \left[\Phi(T_1) - \sum_{i=1}^{n} \Phi(T_1 - h_i) B_i\right] \varphi(0) + \sum_{i=1}^{n} \int_{-h_i}^{0} \Phi(T_1 - \tau - h_i)[A_i \varphi(\tau) + B_i \dot{\varphi}(\tau)] d\tau +$$

$$+ \int_{0}^{t_1} \Phi(T_1 - \tau) f(u(\tau), v(\tau), \tau) d\tau.$$

Поэтому

$$x(T_1) = \left[\Phi(T_1) - \sum_{i=1}^{n} \Phi(T_1 - h_i)B_i\right]\varphi(0) +$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\int_{-h_i}^{0} \Phi(T_1 - \tau - h_i)[A_i\varphi(\tau) + B_i\dot{\varphi}(\tau)]d\tau + \int_0^{T_1} \Phi(T_1 - \tau)f(u(\tau), v(\tau), \tau)d\tau =$$

$$= \Phi(T_1 - t_1)x(t_1) - \int_0^{t_1} \Phi(T_1 - \tau)f(u(\tau), v(\tau), \tau)d\tau +$$

$$+\int_0^{T_1} \Phi(T_1 - \tau)f(u(\tau), v(\tau), \tau)d\tau =$$

$$= m_1 - \int_{t_1}^{T_1} \psi(s)ds - \int_0^{t_1} \Phi(T_1 - \tau)f(u(\tau), v(\tau), \tau)d\tau +$$

$$+\int_0^{t_1} \Phi(T_1 - \tau)f(u(\tau), v(\tau), \tau)d\tau + \int_{t_1}^{T_1} \Phi(T_1 - \tau)f(u(\tau), v(\tau), \tau)d\tau =$$

$$= m_1 - \int_{t_1}^{T_1} \psi(s)ds + \int_{t_1}^{T_1} \psi(s)ds = m_1 \in M.$$

Следовательно, из начального положения $\varphi(\cdot)$ в.з.п.г.в. T_0 . Теорема доказана.

Справедлива следующая

Теорема 2.4.6. *Пусть выполнены условия 1)-2) из теоремы 2.4.5 и следующие условия:*

1) *терминальное множество M выпукло;*
2) *отображение $t \to W_5(t), t \in [0, T]$ выпуклозначно и замкнуто относительно топологии $\sigma(X, X^*)$;*
3) *существует отображение $w: Y \to Z$ такое, что при всех $u \in Y, t \in [0, T]$, $0 \le s \le t$ выполняется включение*

$$\Phi(t - s)f(u, w(u), s) \in \bigcap_{v \in Z} \Phi(t - s)f(Y, v, s)$$

и для каждого $u(\cdot)$ *суперпозиция* $w(u(\cdot))$ *измерима.*

Тогда из начального положения $\varphi(\cdot)$ *в.з.п.о.в.* $T_o = \min\{T \geq 0$: *для которых выполняется (2.4.24)* $\}$.

Доказательство. В силу условия 2) отображение $t \to W_5(t), t \in [0,T]$ замкнуто относительно топологии $\sigma(X, X^*)$. Следовательно, оно секвенциально замкнуто относительно топологии $\sigma(X, X^*)$. Поэтому из теоремы 2.4.5 следует, что для любого управления убегания $v(\cdot)$ найдется такое управление преследования $u(\cdot)$, что из начального положения $\varphi(\cdot)$ в.з.п.г.в. T_0 . Для оптимальности времени преследования докажем, что для любого допустимого управления преследования $u(\cdot)$ можно выбрать такое допустимое управление убегания $v(\cdot)$, что для решения $x(\cdot)$ задачи (2.4.22), (2.4.23) выполняется $x(t) \overline{\in} M$ для всех $t \in [0, T_0$).Действительно, в силу определения числа T_o, заключаем, что при всех $t \in [0, T_o)$ имеет место следующее соотношение

$$\left(\left[\Phi(t) - \sum_{i=1}^{n} \Phi(t-h_i)B_i\right]\varphi(0) + \sum_{i=1}^{n} \int_{-h_i}^{0} \Phi(t-\tau-h_i)[A_i\varphi(\tau) + B_i\dot{\varphi}(\tau)]d\tau + \right.$$

$$\left. + W_5(t)\right) \cap M = \emptyset \qquad (2.4.28)$$

Если $\varepsilon \in (0, T_o)$, то значения $v(t)$ управление убегания $v(\cdot) \in U([0, T_o], Z)$ на $[0, \varepsilon]$ выбираем произвольно, а при $t \in (\varepsilon, T_o)$ −специальным образом: $v(t) = w\big(u(t-\varepsilon)\big)$. Тогда в задаче (2.4.22), (2.4.23) для решения $x(\cdot)$, соответствующего выбранным управлениям $u(\cdot), v(\cdot)$ на $[0, T_o)$, имеем

$$x(t) = \left[\Phi(t) - \sum_{i=1}^{n} \Phi(t-h_i)B_i\right]\varphi(0) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \int_{-h_i}^{0} \Phi(t-\tau-h_i)[A_i\varphi(\tau) + B_i\dot{\varphi}(\tau)]d\tau + \int_{0}^{t} \Phi(t-\tau)f(u(\tau), v(\tau), \tau)d\tau =$$

$$= \left[\Phi(t) - \sum_{i=1}^{n} \Phi(t-h_i)B_i\right]\varphi(0) + \sum_{i=1}^{n}\int_{-h_i}^{0} \Phi(t-\tau-h_i)[A_i\varphi(\tau) + B_i\dot{\varphi}(\tau)]d\tau +$$

$$+ \int_{0}^{\varepsilon} \Phi(t-\tau)f(u(\tau), v(\tau), \tau)d\tau + \int_{\varepsilon}^{t} \Phi(t-\tau)f(u(\tau), w(u(\tau-\varepsilon)), \tau)d\tau.$$

В силу (2.4.26), условий 1,2 и согласно теореме 1.4.1 о строгой отделимости множества M и

$$\left[\Phi(t) - \sum_{i=1}^{n} \Phi(t-h_i)B_i\right]\varphi(0) + \sum_{i=1}^{n}\int_{-h_i}^{0} \Phi(t-\tau-h_i)[A_i\varphi(\tau) + B_i\dot{\varphi}(\tau)]d\tau +$$
$$+ W_5(t)$$

при всех $t \in [0, T_o)$ строго отделимы, т.е. при всех $t \in [0, T_o)$ можно найти такой непрерывный линейный функционал $\psi \in X^*$ и такие константы c и $\delta > 0$, что

$$\psi(x) \leq c - \delta < c \leq \psi(m) \qquad (2.4.29)$$

при всех

$$x \in \left[\Phi(t) - \sum_{i=1}^{n} \Phi(t-h_i)B_i\right]\varphi(0) + \sum_{i=1}^{n}\int_{-h_i}^{0} \Phi(t-\tau-h_i)[A_i\varphi(\tau) + B_i\dot{\varphi}(\tau)]d\tau$$
$$+ W_5(t) \text{ и } m \in M.$$

Если $\bar{p}(\cdot)$- произвольный интегрируемый селектор отображения

$$s \to \bigcap_{v \in Z} \Phi(t-s)\, f(Y, v, s), \qquad s \in [0, \varepsilon],$$

то на основании условия 3) и неравенств (2.4.29) имеем

$$\psi\big(x(t)\big) = \psi\Bigg(\Bigg[\Phi(t) - \sum_{i=1}^{n} \Phi(t-h_i)B_i\Bigg]\varphi(0)$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \int_{-h_i}^{0} \Phi(t-\tau-h_i)[A_i\varphi(\tau) + B_i\dot{\varphi}(\tau)]d\tau +$$

$$+ \int_{0}^{\varepsilon} \Phi(t-\tau)f(u(\tau), v(\tau), \tau)d\tau +$$

$$+ \int_{\varepsilon}^{t} \Phi(t-\tau)f\big(u(\tau), w\big(u(\tau-s)\big), \tau\big)d\tau\Bigg) =$$

$$= \psi\Bigg(\Bigg[\Phi(t) - \sum_{i=1}^{n} \Phi(t-h_i)B_i\Bigg]\varphi(0)$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \int_{-h_i}^{0} \Phi(t-\tau-h_i)[A_i\varphi(\tau) + B_i\dot{\varphi}(\tau)]d\tau + \int_{0}^{\varepsilon} \bar{p}(\tau)d\tau +$$

$$+ \int_{\varepsilon}^{t} \Phi(t-\tau)f\big(u(\tau), w\big(u(\tau-s)\big), \tau\big)d\tau\Bigg)$$

$$+ \psi\Bigg(\int_{0}^{\varepsilon} \Phi(t-\tau)f(u(\tau), v(\tau), \tau)d\tau - \int_{0}^{\varepsilon} \bar{p}(\tau)d\tau\Bigg)$$

$$\leq c - \delta + \int_{0}^{\varepsilon} \psi\big(\Phi(t-\tau)f(u(\tau), v(\tau), \tau) - \bar{p}(\tau)\big)d\tau.$$

В силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега существует число $\varepsilon = \theta > 0$ такое, что

$$\left|\int_{0}^{\theta} \psi\big(\Phi(t-\tau)f(u(\tau), v(\tau), \tau) - \bar{p}(\tau)\big)d\tau\right| < \frac{\delta}{2}.$$

Следовательно, $\psi\big(x(t)\big) \leq c - \delta + \frac{\delta}{2} = c - \frac{\delta}{2} < c$. Поэтому число $\varepsilon = \theta > 0$ и соответствующее ему управление $v(\cdot)$ можно выбрать так, что $x(t) \overline{\in} M$ при всех $t \in [0, T_o)$, что и доказывает оптимальность времени преследования T_0. Теорема доказана.

Справедлива следующая

Теорема 2.4.7. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) *число* $T \geq 0$ *и абсолютно непрерывное начальное положение* $\varphi(s), -h \leq s \leq 0, \varphi(0) \in X \backslash M$ *такие, что*

$$\left[\Phi(T) - \sum_{i=1}^{n} \Phi(T - h_i) B_i\right] \varphi(0) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \int_{-h_i}^{0} \Phi\,(T - \tau - h_i)[A_i \varphi(\tau) + B_i \dot{\varphi}(\tau)] d\sigma \in W_6\big(T, \gamma(\cdot)\big), \qquad (2.4.30)$$

где

$$W_6\big(T, \gamma(\cdot)\big) = \begin{cases} M, & \text{при} \quad T = 0, \\ \bigcup\limits_{\gamma(\cdot) \in \Gamma(0,T)} \int_0^T \bigcap\limits_{v \in Z} [\gamma(\tau) M - \Phi(T - \tau) f(Y, v, \tau)] d\tau, & \text{при } T > 0. \end{cases}$$

2) *терминальное множество* M *выпукло;*
3) *отображение* $t \to W_6(t), t \in [0, T]$ *секвенциально замкнуто относительно топологии* $\sigma(X, X^*)$*;*
4) *при любом* $v \in Z$ *отображение* $t \to \Phi(T - t) f(Y, v, t)$ *замкнутозначно на отрезке* $[0, T]$.

Тогда из начального положения $\varphi(\cdot)$*в.з.п.г.в.* $T_0 = \min\{T \geq 0$: *для которых выполняется (2.4.30)* $\}$.

Доказательство. В силу условия 3) отображение $t \to W_6(t)$ секвенциально замкнуто относительно топологии $\sigma(X, X^*)$. Тогда, в силу непрерывности отображении

$$t \to \left[\Phi(t) - \sum_{i=1}^{n} \Phi(t - h_i) B_i\right] \varphi(0) + \sum_{i=1}^{n} \int_{-h_i}^{0} \Phi(t - \tau - h_i)[A_i \varphi(\tau) + B_i \dot{\varphi}(\tau)] d\tau\,,$$

которое следует из [302], в силу (2.4.30) и леммы 1.4.4, множество $\{T \geq 0$: для которых выполняется (2.4.30)$\}$ замкнуто. Следовательно, имеет место следующее включение

$$\left[\Phi(T_0) - \sum_{i=1}^{n} \Phi(T_0 - h_i)B_i\right]\varphi(0) + \sum_{i=1}^{n} \int_{-h_i}^{0} \Phi(T_0 - \tau - h_i)[A_i\varphi(\tau) + B_i\dot{\varphi}(\tau)]\, d\tau \in$$
$$\in W_6\big(T_0, \gamma(\cdot)\big). \qquad (2.4.31)$$

На основании (2.4.31) для некоторой $\gamma(\cdot)$ существует такой интегрируемый селектор $p(\cdot)$ отображении

$$\tau \to \bigcap_{v \in Z} [\gamma(\tau)M - \Phi(T - \tau)f(Y, v, \tau)]\,, \tau \in [0, T_0],$$

что имеет место равенство

$$\left[\Phi(T_0) - \sum_{i=1}^{n} \Phi(T_0 - h_i)B_i\right]\varphi(0) + \sum_{i=1}^{n} \int_{-h_i}^{0} \Phi(T_0 - \tau - h_i)[A_i\varphi(\tau) + B_i\dot{\varphi}(\tau)]\, d\tau$$
$$= \int_{0}^{T_0} p(\tau)\, d\tau. \qquad (2.4.32)$$

Пусть выбрано произвольное допустимое управление убегания $v(\cdot)$. Тогда для всех $\tau \in [0, T_0]$ имеем включение $p(\tau) \in [\gamma(\tau)M - \Phi(T_0 - \tau)f(Y, v, \tau)]$. Поэтому отображение

$$\tau \to \ \Pi(\tau) = [p(\tau) + \Phi(T_0 - \tau)f(Y, v, \tau)] \bigcap \gamma(\tau)M$$

измеримо и в силу 4) при каждом $\tau \in [0, T_0]$, замкнуто и непусто. Далее, в силу известной леммы 1.4.3 существуют измеримое отображение $m(\cdot)$: $[0, T_0] \to M$ и допустимое управление преследования $u(\cdot)$, такие, что

$$p(\tau) = \gamma(\tau)m(\tau) - \Phi(T_0 - \tau)f(u(\tau), v(\tau), \tau). \qquad (2.4.33)$$

Следовательно, учитывая (2.4.28), (2.4.29), выпуклость терминального множества M и равенство

$$\int_0^{T_0} \gamma(\tau)Md\tau = \left(\int_0^{T_0} \gamma(\tau)d\tau\right)M = M$$

для решения $x(\cdot)$ задачи Коши (2.4.22), (2.4.23), соответствующего управлениям $u(\cdot), v(\cdot)$, имеем

$$x(T_0) = \left[\Phi(T_0) - \sum_{i=1}^{n} \Phi(T_0 - h_i)B_i\right]\varphi(0) +$$

$$+\sum_{i=1}^{n} \int_{-h_i}^{0} \Phi(T_0 - h_i), (A_i\varphi(\tau) + B_i\dot{\varphi}(\tau))d\tau + \int_0^{T_0} \Phi(T_0 - \tau)\, f(u(\tau), v(\tau), \tau)d\tau =$$

$$= \int_0^{T_0} p(\tau)d\tau + \int_0^{T_0} \Phi(T_0 - \tau)\, f(u(\tau), v(\tau), \tau)d\tau =$$

$$= \int_0^{T_0} \big(\gamma(\tau)m(\tau) - \Phi(T_0 - \tau)f(u(\tau), v(\tau), \tau)\big)d\tau +$$

$$+ \int_0^{T_0} \Phi(T_0 - \tau)f(u(\tau), v(\tau), \tau)d\tau =$$

$$= \int_0^{T_0} \gamma(\tau)m(\tau)d\tau - \int_0^{T_0} \Phi(T_0 - \tau)\, f(u(\tau), v(\tau), \tau)d\tau +$$

$$+ \int_0^{T_0} \Phi(T_0 - \tau)\, f(u(\tau), v(\tau), \tau)d\tau \in \int_0^{T_0} \gamma(\tau)Md\tau = \left(\int_0^{T_0} \gamma(\tau)d\tau\right)M = M,$$

т.е. $x(T_0) \in M$.

Отметим, что выбор $u(t)$ по формуле (2.4.33) осуществляется исходя из информации о $v(t)$. Если при выборе $u(t)$ использовать информацию о $v(t)$ и $x(s), 0 \le s \le t$, то время достижения множества M будет не более числа T_0. Действительно, если

$$0 \le t_1 \le T_0 \le h_1,$$

$$T_1 = \min\{t \in [t_1, T_0]: \Phi(t - t_1)x(t_1) \in W_6(t, t_1)\},$$

то для любого допустимого управления убегания $v(\cdot)$ существуют измеримое отображение $m(\cdot): [t_1, T_1] \to M$ и допустимое управление преследования $u(\cdot)$, такие, что

$$\Phi(T_1 - t_1)x(t_1) = \int_{t_1}^{T_1} (\gamma(\tau)m(\tau) - \Phi(T_1 - \tau)f(u(\tau), v(\tau), \tau))d\tau.$$

Для решения $x(\cdot)$ задачи (2.4.22) имеем:

$$x(t_1) = \left[\Phi(t_1) - \sum_{i=1}^{n} \Phi(t_1 - h_i)B_i\right]\varphi(0) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \int_{-h_i}^{0} \Phi(t_1 - \tau - h_i)[A_i\varphi(\tau) + B_i\dot{\varphi}(\tau)]d\tau +$$
$$+ \int_{0}^{t_1} \Phi(t_1 - \tau)f(u(\tau), v(\tau), \tau)d\tau.$$

Следовательно, используя полугрупповое свойство $S(t_1 + t_2) = S(t_1)S(t_2)$ (так как $\Phi(t) = S(t)$, если $t \in [0, h_1]$) имеем:

$$\Phi(T_1 - t_1)x(t_1) = \Phi(T_1 - t_1)(\left[\Phi(t_1) - \sum_{i=1}^{n} \Phi(t_1 - h_i)B_i\right]\varphi(0) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \int_{-h_i}^{0} \Phi(t_1 - \tau - h_i)[A_i\varphi(\tau) + B_i\dot{\varphi}(\tau)]d\tau +$$
$$+ \int_{0}^{t_1} \Phi(t_1 - \tau)f(u(\tau), v(\tau), \tau)d\tau) = \left[\Phi(T_1) - \sum_{i=1}^{n} \Phi(T_1 - h_i)B_i\right]\varphi(0) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \int_{-h_i}^{0} \Phi(T_1 - \tau - h_i)[A_i\varphi(\tau) + B_i\dot{\varphi}(\tau)]d\tau +$$

$$+\int_0^{t_1}\Phi(T_1-\tau)f(u(\tau),v(\tau),\tau)d\tau.$$

Поэтому

$$x(T_1)=\left[\Phi(T_1)-\sum_{i=1}^{n}\Phi(T_1-h_i)B_i\right]\varphi(0)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\int_{-h_i}^{0}\Phi(T_1-\tau-h_i)[A_i\varphi(\tau)+B_i\dot{\varphi}(\tau)]d\tau+\int_0^{T_1}\Phi(T_1-\tau)f(u(\tau),v(\tau),\tau)d\tau=$$

$$=\Phi(T_1-t_1)x(t_1)-\int_0^{t_1}\Phi(T_1-\tau)f(u(\tau),v(\tau),\tau)d\tau+$$

$$+\int_0^{T_1}\Phi(T_1-\tau)f(u(\tau),v(\tau),\tau)d\tau=$$

$$=\int_{t_1}^{T_1}(\gamma(\tau)m(\tau)-\Phi(T_1-\tau)f(u(\tau),v(\tau),\tau))d\tau-$$

$$-\int_0^{t_1}\Phi(T_1-\tau)f(u(\tau),v(\tau),\tau)d\tau)+\int_0^{t_1}\Phi(T_1-\tau)f(u(\tau),v(\tau),\tau)d\tau+$$

$$+\int_{t_1}^{T_1}\Phi(T_1-\tau)f(u(\tau),v(\tau),\tau)d\tau=\int_{t_1}^{T_1}(\gamma(\tau)m(\tau)d\tau\in\int_{t_1}^{T_1}(\gamma(\tau)Md\tau=M.$$

Следовательно, из начального положения $\varphi(0)$ в.з.п.г.в. T_0. При этом выбор управления преследования $u(\cdot)$ осуществляется согласно формуле (2.4.33). Теорема доказана.

Справедлива следующая теорема об оптимальности времени преследования.

Теорема 2.4.8. *Пусть выполнены условия 1), 2), 4) из теоремы 2.4.7 и следующие условия:*

1) *отображение* $t\to W_6(t), t\in[0,T]$, *замкнуто относительно топологии* $\sigma(X,X^*)$;
2) *при каждом* $t\in[0,T]$ *множество*

$$\int_0^t \bigcap_{v\in Z} \Phi(t-\tau)f(Y,v,\tau)d\tau)$$

непусто, выпукло и замкнуто относительно топологии $\sigma(X,X^*)$*;*

3) *терминальное множество* M *компактно относительно топологии* $\sigma(X,X^*)$*;*
4) *существует отображение* $w: Y \to Z$ *такое, что при всех* $u \in Y, t \in [0,T]$, $0 \le s \le t$ *выполняется включение*

$$\Phi(t-s)f(u,w(u),s) \in \bigcap_{v\in Z} \Phi(t-s)f(Y,v,s)$$

и для каждого $u(\cdot)$ *суперпозиция* $w(u(\cdot))$ *измерима.*

Тогда из начального положения $\varphi(\cdot)$ *в.з.п.о.в.* $T_o = \min\{T \ge 0$: *для которых выполняется (2.4.30)* $\}$.

Доказательство. В силу условия 1) отображение $t \to W_6(t), t \in [0,T]$ замкнуто относительно топологии $\sigma(X,X^*)$. Следовательно, оно секвенциально замкнуто относительно топологии $\sigma(X,X^*)$. Поэтому из теоремы 2.4.7 вытекает, что для любого управления убегания $v(\cdot)$ найдется такое управление преследования $u(\cdot)$,что из начального положения φ в.з.п.г.в. T_0. Далее, можно доказать, что для любого допустимого управления преследования $u(\cdot)$ можно выбрать такое допустимое управление убегания $v(\cdot)$, что для решения $x(\cdot)$ задачи (2.4.22), (2.4.23) выполняется $x(t) \overline{\in} M$ для всех $t \in [0,T_0)$. Действительно, в силу определения числа T_0, заключаем, что при всех $t \in [0,T_0)$ имеет место следующее соотношение

$$\left[\Phi(t) - \sum_{i=1}^{n} \Phi(t-h_i)B_i\right]\varphi(0) + \sum_{i=1}^{n} \int_{-h_i}^{0} \Phi(t-\tau-h_i)[A_i\varphi(\tau) + B_i\dot{\varphi}(\tau)]d\tau \overline{\in} W_6(t)$$

В силу того, что при $t > 0$ имеет место

$$W_6(t) = \bigcup_{\gamma(\cdot)\in\Gamma(0,t)} \int_0^t \bigcap_{v\in Z} [\gamma(\tau)M - \Phi(t-\tau)f(Y,v,\tau)]d\tau \quad \supset$$

$$\supset \int_0^t \bigcap_{v\in Z} [\gamma(\tau)M - \Phi(t-\tau)f(Y,v,\tau)]d\tau \ \supset$$

$$\supset \int_0^t [\,\gamma(\tau)M - \bigcap_{v\in Z} \Phi(t-\tau)f(Y,v,\tau)]d\tau \supset$$

$$\supset M - \int_0^t \bigcap_{v\in Z} \Phi(t-\tau)f(Y,v,\tau)d\tau,$$

то имеем

$$\left[\Phi(t) - \sum_{i=1}^{n} \Phi(t-h_i)B_i\right]\varphi(0) + \sum_{i=1}^{n} \int_{-h_i}^{0} \Phi(t-\tau-h_i)[A_i\varphi(\tau) + B_i\dot{\varphi}(\tau)]d\tau$$

$$\bar{\in} M - \int_0^t \bigcap_{v\in Z} \Phi(t-\tau)f(Y,v,\tau)d\tau;$$

т.е. при всех $t \in [0, T_o)$ имеет место следующее соотношение

$$(\left[\Phi(t) - \sum_{i=1}^{n} \Phi(t-h_i)B_i\right]\varphi(0) + \sum_{i=1}^{n} \int_{-h_i}^{0} \Phi(t-\tau-h_i)[A_i\varphi(\tau) + B_i\dot{\varphi}(\tau)]d\tau$$

$$+ \int_0^t \bigcap_{v\in Z} \Phi(t-\tau)f(Y,v,\tau)d\tau) \cap M = \emptyset.$$

Далее, выбирая значения $v(t)$ управления убегания $v(\cdot) \in U([0,T_0],Z)$ на $[0,\varepsilon], \varepsilon \in (0,T_0)$, произвольно, а при $t \in (\varepsilon, T_0)$ −специальным образом $v(t) = w\big(u(t-\varepsilon)\big)$ и используя теорему 1.4.1 о строгой отделимости, аналогично как в теореме 2.4.6, для решения $x(\cdot)$ задачи (1.5.22), (1.5.23) имеем $x(t) \bar{\in} M$ при всех $t \in [0,T_0)$, что и доказывает оптимальность времени преследования T_0. Теорема доказана.

§2.5. Дифференциальные игры нейтрального типа в гильбертовом пространстве

В этом параграфе в гильбертовом пространстве рассматривается з.п. для дифференциальной игры, когда динамика игры описывается функционально – дифференциальным уравнением нейтрального типа в форме Дж. Хейли с л.з.о., п.с.н.п.. Доказаны две основные теоремы о достаточных условиях разрешимости з.п.. В этих теоремах при соответствующих предположениях найдено множество начальных положений, из которых в.з.п.. Доказанные теоремы обобщают соответствующие конечномерные результаты работ [219, 227] и бесконечномерные результаты работ [129, 134], когда дифференциальная игра описывается уравнением нейтрального типа.

В дальнейшем $X, Y, Z -$ гильбертовы пространства, $h \geq 0 -$ заданное действительное число, а дифференциальная игра описывается дифференциальным уравнением нейтрального типа

$$\frac{d}{dt}\big(x(t) - Cx(t-h)\big) = Ax(t) + Bx(t-h) + f(u(t), v(t), t) \qquad (2.5.1)$$

и замкнутым терминальным множеством $M \subset X$, где заканчивается игра.

В игре (2.5.1) предполагаем, что $t \geq 0$, $x(t) \in X$, $u(\cdot) \in U([0,\infty), Y) -$ управление преследования, $\vartheta(\cdot) \in U([0,\infty), Z) -$ управление убегания, $C: X \to X$, $B: X \to X -$линейные ограниченные операторы, а л.з.о. $A: D \to X$, имеющий плотную в X область определения, п.с.н.п.. В силу этой полугруппы можно построить фундаментальное решение $\Phi(t)$, для которого справедливы равенства

$$\frac{d}{dt}\big(\Phi(t) - C\Phi(t-h)\big) = A\Phi(t) + B\Phi(t-h), \qquad (2.5.2)$$

$\Phi(0) = I -$единичной оператор, $\Phi(t) = 0$ при $t < 0$. В дальнейшем полагаем, что линейный оператор AC ограничен, а локально интегрируемое по Бохнеру

отображение $f: Y \times Z \times [0, \infty) \to X$ такое, что для любых $u(\cdot) \in U([0, \ \infty), Y)$, $v(\cdot) \in U([0, \infty), Z)$, $\varphi(\cdot) \in \mathbb{C}([-h, 0], X)$, $t \geq 0$, задача Коши

$$\frac{d}{dt}\big(x(t) - Cx(t-h)\big) = Ax(t) + Bx(t-h) + f(u(t), v(t), t), \qquad (2.5.3)$$
$$x(s) = \varphi(s), \quad -h \leq s \leq 0$$

имеет решение вида [24]

$$x(t) = \Phi(t)\big(\varphi(0) - C\varphi(-h)\big) + \int_{-h}^{0} \Phi(t-s-h)B\varphi(s)ds + C\int_{-h}^{0} \Phi'_s(t-$$
$$s-h)\varphi(s)ds + \int_{0}^{t} \Phi(t-s)f(u(s), v(s), s)ds, \quad t \geq 0 \qquad (2.5.4)$$

В дальнейшем терминальное множество $M = M_0 + M_1$, где $M_1 \subset M_0^{\perp}, M_0^{\perp} -$ ортогональное дополнение к M_0 в X, отображение $f(\cdot,\cdot,\cdot)$ удовлетворяет условиям Каратеодори, $\pi: X \to M_0^{\perp} -$ ортогональное проектирование.

Справедлива следующая

Теорема 2.5.1. *Пусть число* $T = T(\varphi) \geq 0$ *и начальное положение* $\varphi(s), -h \leq s \leq 0,\ \varphi(0) \in X \backslash M$ *такие, что*

$$\pi\Phi(T)\big(\varphi(0) - C\varphi(-h)\big) + \int_{-h}^{0} \pi\Phi(T-s-h)B\varphi(s)ds +$$
$$+C\int_{-h}^{0} \pi\Phi'_s(T-s-h)\varphi(s)ds \in M_1 - \int_{0}^{T} W(s)ds, \qquad (2.5.5)$$

где

$$W(s) = \bigcap\nolimits_{v \in Z} \pi\Phi(T-s)f(Y, v(s), s).$$

Тогда в игре (2.5.1) в.з.п.з.в. T.

Доказательство. В силу (2.5.5) существуют точка $m_1 \in M_1$ и интегрируемый селектор $\omega(\cdot)$ отображения $s \to W(s)$, такие, что имеет место равенство

$$\pi\Phi(T)(\varphi(0) - C\varphi(-h)) + \int_{-h}^{0} \pi\Phi(T-s-h)B\varphi(s)ds +$$
$$+C\int_{-h}^{0} \pi\Phi'_s(T-s-h)\varphi(s)ds = m_1 - \int_0^T \omega(s)ds. \qquad (2.5.6)$$

Пусть убегающим выбрано произвольное измеримое управление $v(\cdot) \in U([0,T],Z)$. Тогда в силу известной леммы 1.4.3 существует такое измеримое управление преследования $u(\cdot) \in U([0,T],Z)$, что имеет место равенство

$$\omega(s) = \pi\Phi(T-s)f(u(s),v(s),s). \qquad (2.5.7)$$

Следовательно, равенство (2.5.6) примет вид

$$\pi\Phi(T)(\varphi(0) - C\varphi(-h)) + \int_{-h}^{0} \pi\Phi(T-s-h)B\varphi(s)ds +$$
$$+C\int_{-h}^{0} \pi\Phi'_s(T-s-h)\varphi(s)ds = m_1 - \int_0^T \pi\Phi(T-s)f(u(s),v(s),s)ds. \quad (2.5.8)$$

В силу (2.5.8), для решения задачи Коши (2.5.3) на $[0,T]$, имеем

$$\pi x(T) = \pi\Phi(T)(\varphi(0) - C\varphi(-h)) + \int_{-h}^{0} \pi\Phi(T-s-h)B\varphi(s)ds +$$
$$+C\int_{-h}^{0} \pi\Phi'_s(T-s-h)\varphi(s)ds + \pi\int_0^T \Phi(T-s)f(u(s),v(s),s)ds =$$
$$= m_1 - \int_0^T \pi\Phi(T-s)f(u(s),v(s),s)ds + \int_0^T \pi\Phi(T-s)f(u(s),v(s),s)ds =$$
$$= m_1 \in M_1.$$

Следовательно, из начального положения $\varphi(\cdot) \in \mathbb{C}([-h,0],X)$ в.з.п.г.в. T.

При этом, измеримое управление преследования $u(\cdot)$ выбирается из равенства (2.5.7).

Если отображение

$$t \to \int_0^t W(s)ds$$

замкнуто, а множество M_1 компактно относительно топологии $\sigma(X, X^*)$, то множество

$$\{t \in [0,T]: \pi\Phi(t)(\varphi(0) - C\varphi(-h)) + \int_{-h}^{0} \pi\Phi(t-s-h)B\varphi(s)ds +$$

$$+C\int_{-h}^{0} \pi\Phi'_s(t-s-h)\varphi(s)ds \in M_1 - \int_0^t W(s)ds\}$$

замкнуто. Следовательно, в.з.п.з.в. $T_0 = \min\{\, t \in [0,T]:$ для которых выполняется включения (2.5.5).$\}$. При этом выбор $u(t)$ по формуле (2.5.7) осуществляется исходя из информации о $v(t)$. Если при выборе $u(t)$ использовать информацию о $v(t)$ и $x(s), 0 \le s \le t$, то время достижения множества M будет не более числа T_0. Действительно, если

$$0 \le t_1 \le T_0 \le h_1,$$

$$T_1 = min\left\{t \in [t_1, T_0]: \pi\Phi(t-t_1)x(t_1) \in M_1 - \int_{t_1}^{t} W(s)ds\right\}$$

то существуют $m_0 \in M_1$ и интегрируемый селектор ψ отображения $s \to W(s)$ что имеет место равенство

$$\pi\Phi(T_1 - t_1)x(t_1) = m_0 - \int_{t_1}^{T_1} \psi(s)ds.$$

С другой стороны, для решения $x(\cdot)$ задачи (2.5.1), соответствующего управлениям $u(\cdot), v(\cdot)$ на $[0, T_1]$, имеем:

$$\pi x(t_1) = \pi\Phi(t_1)(\varphi(0) - C\varphi(-h)) + \int_{-h}^{0} \pi\Phi(t_1 - s - h)B\varphi(s)ds +$$

$$+C\int_{-h}^{0} \pi\Phi'_s(t_1 - s - h)\varphi(s)ds + \pi\int_{0}^{t_1} \Phi(t_1 - s)f(u(s), v(s), s)ds.$$

Далее, используя полугрупповое свойство $S(t_1 + t_2) = S(t_1)S(t_2)$ (если $t \in [0, h_1]$ то $\Phi(t) = S(t)$) имеем:

$$\pi\Phi(T_1 - t_1)x(t_1) = \pi\Phi(T_1 - t_1)(\,\Phi(t_1)\big(\varphi(0) - C\varphi(-h)\big) +$$

$$+\int_{-h}^{0} \Phi(t_1 - s - h)B\varphi(s)ds + C\int_{-h}^{0} \Phi'_s(t_1 - s - h)\varphi(s)ds +$$

$$+\int_{0}^{t_1} \Phi(t_1 - s)f(u(s), v(s), s)ds) =$$

$$= \pi\Phi(T_1)\big(\varphi(0) - C\varphi(-h)\big) + \int_{-h}^{0} \pi\Phi(T_1 - s - h)B\varphi(s)ds +$$

$$+C\int_{-h}^{0} \pi\Phi'_s(T_1 - s - h)\varphi(s)ds + \int_{0}^{t_1} \pi\Phi(T_1 - s)f(u(s), v(s), s)ds.$$

Следовательно,

$$\pi x(T_1) = \pi\Phi(T_1)(\varphi(0) - C\varphi(-h)) + \int_{-h}^{0} \pi\Phi(T_1 - s - h)B\varphi(s)ds +$$

$$+C\int_{-h}^{0} \pi\Phi'_s(T_1 - s - h)\varphi(s)ds + \pi\int_{0}^{T_1} \Phi(T_1 - s)f(u(s), v(s), s)ds =$$

$$= \pi\Phi(T_1 - t_1)x(t_1) - \int_{0}^{t_1} \pi\Phi(t_1 - s)f(u(s), v(s), s)ds +$$

$$+\int_{0}^{T_1} \pi\Phi(T_1 - s)f(u(s), v(s), s)ds =$$

$$= m_0 - \int_{t_1}^{T_1} \psi(s)ds - \int_{0}^{t_1} \pi\Phi(t_1 - s)f(u(s), v(s), s)ds +$$

$$+\int_0^{t_1} \pi\Phi(T_1-s)f(u(s),v(s),s)ds+\int_{t_1}^{T_1} \pi\Phi(T_1-s)f(u(s),v(s),s)ds$$

$$=m_0-\int_{t_1}^{T_1}\psi(s)ds \ +\int_{t_1}^{T_1}\psi(s)ds \ =m_0\in \ M$$

т.е. из начального положения $\varphi(\cdot)$ в.з.п.г.в. T_0. Теорема доказана.

Аналогично доказывается следующая

Теорема 2.5.2. *Пусть замкнутое терминальное множество M_1 выпукло, множество $\Phi(T-s)f(Y,v,s)$ замкнуто при любых $v\in Z, s\in[0,T]$, число $T=T(\varphi)\geq 0$ и начальное положение $\varphi(s), -h\leq s\leq 0$ $\varphi(0)\in X\backslash M$ такие, что*

$$\pi\Phi(T)(\varphi(0)-C\varphi(-h))+\int_{-h}^{0}\pi\Phi(T-s-h)B\varphi(s)ds+$$

$$+C\int_{-h}^{0}\pi\Phi'_s(T-s-h)\varphi(s)ds\in \mathrm{W}\big(T,\gamma(s)\big), \qquad (2.5.9)$$

где

$$W(T,\gamma(s))=\bigcup_{\gamma(\cdot)\in\Gamma(0,T)}\left(\begin{array}{ll} M_1, & \text{при} \quad T=0,\\ \int_0^T\bigcap_{v\in Z}[\gamma(s)M_1-\pi\Phi(T-s)f(Y,v,s)]ds, & \text{при} \quad T>0.\end{array}\right.$$

Тогда в игре (2.5.1), в.з.п.з.в. T.

Замечание 2.5.1. *Если отображение $t\to W((t),\gamma(\cdot))$ замкнуто, то множество*

$$\{t\in[0,T]:\pi\Phi(t)(\varphi(0)-C\varphi(-h))+\int_{-h}^{0}\pi\Phi(t-s-h)B\varphi(s)ds+$$

$$+C\int_{-h}^{0}\pi\Phi'_s(t-s-h)\varphi(s)ds\in W(t,\gamma(\cdot))\}$$

замкнуто. Поэтому, в.з.п.з.в. $T_0=\min\{t\in[0,T]$: для которых выполняется включение (2.5.9) }.

§2.6. Примеры

В этом параграфе исследованы некоторые дифференциальные игры, когда управление игроков удовлетворяют геометрическим ограничениям. Найдено множество начальных положений из которых в.з.п.. Одновременно найдено время преследования и указан закон выбора управления преследователя.

Пример 2.6.1. В гильбертовом пространстве E исследуем игру, которая описывается системой дифференциальных уравнений нейтрального типа

$$\begin{cases} \dot{x}(t) - \dot{x}(t-1) = y(t-1) + v \\ \dot{y}(t) - \dot{y}(t-1) = -u \end{cases}, \qquad t \geq 0 \qquad (2.6.1)$$

с начальным положением $\varphi(s) = \big(\varphi_1(s), \varphi_2(s)\big) = (x_o, y_o),\ -1 \leq s \leq 0,$ где $x \in E,\ y \in E, v = v(t) -$ измеримое управление убегания, такое что $\|v(t)\| \leq \beta$, $u = u(t) -$ измеримое управление преследования, такое что $\|u(t)\| \leq \alpha$, а терминальное множество M имеет вид:

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : \|x\| \leq l, \quad l > 0 \right\}.$$

Если

$$z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad I = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

то рассматриваемая игра в пространстве $X = E \times E$ принимает вид

$$\dot{z}(t) - \dot{z}(t-1) = Bz(t-1) - u + v, \qquad t \geq 0, \quad z_0 = \begin{pmatrix} x_o \\ y_o \end{pmatrix}, \qquad -1 \leq s \leq 0,$$

Пусть

$$R(T) = -\frac{\alpha}{3}T^3 + \frac{4n+1}{2}\alpha T^2 - \big(2\beta + \alpha(n^2+n)\big)\frac{T}{2} + l,$$
$$n \leq T \leq n+1,$$

$S_R -$ шар радиуса R с центром в точке $z = 0$. Тогда справедливы следующие

результаты:

1) Если $Ty_0 \in S_{R(T)}$, то из точки z_0 в.з.п.о.в.

$$T_o = min\{T \geq 0 \ :\| Ty_0 \| \leq R(T), \quad n \leq T \leq n+1\}.$$

2) Если $\alpha = \beta = 1$, $l = 20$, $n = 1$, то из точки z_0, $\| y_0 \| = 1$, $\|x_o\| > 20$ в.з.п.з.в. $T_0 = 1$.

Действительно,

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и в силу (2.5.2) имеем: $\dot{\Phi}(t) - \dot{\Phi}(t-1) = B\Phi(t-1)$.

Следовательно, когда:

1) $n = 0, 0 \leq t \leq 1$, то

$$\dot{\Phi}(t) = \dot{\Phi}(t-1) + B\Phi(t-1) = 0,$$

$$\Phi(t) - \Phi(0) = 0, \Phi(t) = I;$$

2) $n = 1, 1 \leq t \leq 2$, то

$$\dot{\Phi}(t) = \dot{\Phi}(t-1) + B\Phi(t-1) = B,$$

$$\Phi(t) = \Phi(1) + B(t-1) = I + B(t-1);$$

3) $n = 2, 2 \leq t \leq 3$, то

$$\dot{\Phi}(t) = \dot{\Phi}(t-1) + B\Phi(t-1) = \big(I + B(t-2)\big) + B\big(I + B(t-2)\big)$$

$$= B + B + B^2(t-2) = 2B,$$

$$\Phi(t) = \Phi(2) + 2B(t-2) = I + B + 2B(t-2) = I + \frac{2 \cdot 1}{2}B + 2B(t-2).$$

Поэтому по индукции можно утверждать, что фундаментальное решение имеет вид:

$$\Phi(t) = I + \frac{n(n-1)}{2}B + nB(t-n), \qquad n \leq t \leq n+1$$

Далее,

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2}\begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + n(t-n)\begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} I & n\left(t - \frac{n+1)}{2}\right) \\ 0 & I \end{pmatrix}, \Phi(t)z_o = \Phi(t)\begin{pmatrix} x_o \\ y_o \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} I & n\left(t - \frac{n+1}{2}\right) \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_o \\ y_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_o + n\left(t - \frac{n+1)}{2}\right)y_o \\ y_o \end{pmatrix}, \pi\Phi(t)z_o$$

$$= x_o + n\left(t - \frac{n+1)}{2}\right)y_o,$$

$$\pi M = \{x: \| x \| \leq l, \ \ l > 0\} = S_l.$$

Оператор $\Phi(t-s)$ имеет вид:

$$\Phi(t-s) = \begin{pmatrix} I & (n-s)(t - \frac{n+s+1}{2}) \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\Phi(t-s)z_o = \Phi(t-s)\begin{pmatrix} x_o \\ y_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & (n-s)(t - \frac{n+s+1}{2}) \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_o \\ y_o \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_o + (n-s)(t - \frac{n+s+1}{2})y_o \\ y_o \end{pmatrix},$$

$$\pi\Phi(t-s)z_o = x_o + (n-s)(t - \frac{n+s+1}{2})y_o,$$

$$\Phi(t-s)Y = \left\{\begin{pmatrix} I & (n-s)(t - \frac{n+s+1}{2}) \\ 0 & I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix} : \|u\| \leq \alpha\right\} =$$

$$= \left\{\begin{pmatrix} (n-s)(t - \frac{n+s+1}{2})u \\ u \end{pmatrix} : \|u\| \leq \alpha\right\},$$

$$\Phi(t-s)Z = \left\{\begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} : \|v\| \leq \beta\right\},$$

$$\pi\Phi(t-s)Y = \left\{u: \|u\| \leq (n-s)(t - \frac{n+s+1}{2})\alpha\right\} = S_{(n-s)(t-\frac{n+s+1}{2})\alpha},$$

$$\pi\Phi(t-s)Z = S_\beta.$$

Тогда, учитывая равенства $S_\alpha{}^*_- S_\beta = S_{\alpha-\beta}$ и

$$\int_0^T \left[S_{\alpha(s)} {}^*_{-} S_{\beta(s)}\right] ds = S_{\int_0^T [\alpha(s)+\beta(s)]ds}$$

[182] для интеграла, стоящего в правой части (2.4.7), имеем:

$$\int_0^T \bigcap_v (\gamma(s)\pi M - \pi\Phi(T-S)(Y-v))ds =$$

$$= \int_0^T \left[S_{l\gamma(s)} - \left(S_{(n-s)(T-\frac{n+s+1}{2})\alpha} {}^*_{-} S_\beta\right)\right] ds =$$

$$= \int_0^T \left(S_{l\gamma(s)} - S_{(n-s)(T-\frac{n+s+1}{2})\alpha-\beta}\right) ds =$$

$$= S_{\int_0^T \left(l\gamma(s)+(n-s)\left(T-\frac{n+s+1}{2}\right)\alpha-\beta\right)ds} = S_{R(T)} - \text{шар радиуса } R(T).$$

В силу того, что отображение $t \to S_{R(t)}$, $t \in [0,T]$ замкнуто, то оно и секвенциально замкнуто.

С другой стороны,

$$\pi[\Phi(T) - \Phi(T-1)]z_0 + \int_{-1}^0 \pi\Phi(T-s-1)[Bz_0 + C\dot{z}_0]ds$$

$$= x_o + n(T - \frac{n+1)}{2})y_o - (x_0 + (n-1)(T - \frac{n+2)}{2})y_o)$$

$$+ \int_{-1}^0 \pi\Phi(T-s-1)\begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_o \\ y_o \end{pmatrix} ds$$

$$= y_0\left(nT - n\frac{n+1}{2} - (n-1)T + (n-1)\frac{n+2)}{2}\right) + \int_{-1}^0 y_0 ds = Ty_0.$$

Поэтому, в силу теоремы 2.4.8, из точки z_0 в.з.п.о.в.

$$T_o = min\{T \geq 0: \ \| Ty_0 \| \leq R(T), \quad n \leq T \leq n+1\},$$

если шар $S_{R(T)}$ не пуст. В силу того, что $R(0) = l > 0$, то существует отрезок времени $[0, T_1]$, где $R(T) > 0$, т.е. шар $S_{R(T)}$ будет непустым.

В частности, когда $\alpha = \beta = 1$, $l = 20$, $n = 1$ из начальной точки z_0, $||y_0|| = 1$, $\|x_o\| > 20$ в.з.п.з.в.

$$T_o = \min\left\{T\colon \| Ty_0 \| \leq -\frac{T^3}{3} + \frac{5}{4}T^2 - 2T + 20, \quad 1 \leq T \leq 2\right\} =$$

$$= min\{T\colon -\frac{T^3}{3} + \frac{5}{4}T^2 - 3T + 20 \geq 0, \quad 1 \leq T \leq 2\} = 1,$$

ибо функция

$$\eta(T) = -\frac{T^3}{3} + \frac{5}{4}T^2 - 3T + 20$$

убывающая и $\eta(T) > 0$ при $0 \leq T < \sigma$, где $\sigma \in (4, 5)$ и $\eta(\sigma)$=0.

Пример 2.6.2. Дифференциальная игра описывается системой дифференциальных уравнений нейтрального типа

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) - \dot{x}_1(t-1) = x_2(t-1) - x_3(t-1) \\ \dot{x}_2(t) - \dot{x}_2(t-1) = -\alpha \cdot x_2(t-1) + \overline{u} \\ \dot{x}_3(t) - \dot{x}_3(t-1) = -\beta \cdot x_3(t-1) + \overline{v} \end{cases} \tag{2.6.2}$$

где $t \geq 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, с начальным положением

$$\varphi(s) = \big(\varphi_1(s), \varphi_2(s), \varphi_3(s)\big) = (x_{01}, x_{02}, x_{03}) = x_0,$$
$$-1 \leq s \leq 0,$$

где $E -$ гильбертово пространство, $x_1 \in E$, $x_2 \in E$, $x_3 \in E$, $\overline{v} = \overline{v}(t) \in E -$ измеримое управление убегания, $\overline{u} = \overline{u}(t) \in E -$ измеримое управление преследования, причем $\| \overline{u} \| \leq \rho$, $\| \overline{v} \| \leq \sigma$, а терминальное множество $M = \{(x_1, x_2, x_3)\colon x_1 = 0\}$.

Если

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & I & -I \\ 0 & -\alpha I & 0 \\ 0 & 0 & -\beta I \end{pmatrix}, \qquad u = \begin{pmatrix} 0 \\ -\bar{u} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{v} \end{pmatrix},$$

I −единичный оператор в E, то игра (2.6.2) в гильбертовом пространстве $X = E \times E \times E$ записывается в виде

$$\dot{x}(t) - \dot{x}(t-1) = Bx(t-1) - u + v, t \geq 0,$$

с начальным положением $x(s) = x_0, -1 \leq s \leq 0$.

В нашем примере,

$$C = I, \quad A = O, \quad f(u, v, t) = -u + v, \quad M = M_0 + M_1,$$
$$M_1 = \{0\} \subset M_0^{\perp} = \{(x_1, x_2, x_3):\ x_2 = x_3 = 0\}$$
$$Y = \{u: \| u \| \leq \rho\}, \quad Z = \{v: \| v \| \leq \sigma\}.$$

В силу доказанной леммы 1.4.6

$$\Phi(t) = \sum_{j=0}^{n} B^j \cdot \frac{n!\,(t-n+1)^j}{j!\,(n-j)!\,j!} =$$
$$= I + B \cdot (t-n+1) + B^2 \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{(t-n+1)^2}{2!} + \ldots + B^n \frac{(t-n+1)^n}{n!},$$
$$n = 0,1,2,\ldots, \quad n-1 \leq t \leq n.$$

Так как

$$B = B_1 + B_2 = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ 0 & -\alpha I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -I \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta I \end{pmatrix},$$

то

$$B^j = (-\alpha)^{j-1} \cdot B_1 + (-\beta)^{j-1} \cdot B_2, \qquad j = 1,2,\ldots,n,$$

и

$$\Phi(t) = I + \sum_{j=1}^{n} \left[(-\alpha)^{j-1} \cdot B_1 + (-\beta)^{j-1} \cdot B_2\right] \cdot \frac{n!\,(t-n+1)^j}{j!\,(n-j)!\,j!} =$$

$$= I + \sum_{j=1}^{n} (-\alpha)^{j-1} \frac{n!\,(t-n+1)^j}{j!\,(n-j)!\,j!} \cdot B_1 + \sum_{j=1}^{n} (-\beta)^{j-1} \frac{n!\,(t-n+1)^j}{j!\,(n-j)!\,j!} \cdot B_2 =$$

$$= I + \Theta_{n\alpha}(t)B_1 + \Theta_{n\beta}(t)B_2,$$

где

$$\Theta_{n\alpha}(t) = \sum_{j=1}^{n} (-\alpha)^{j-1} \frac{n!\,(t-n+1)^j}{j!\,(n-j)!\,j!},$$

$$\Theta_{n\beta}(t) = \sum_{j=1}^{n} (-\beta)^{j-1} \frac{n!\,(t-n+1)^j}{j!\,(n-j)!\,j!}.$$

Далее,

$$\pi\Phi(t)x_0 = \pi(I + \Theta_{n\alpha}(t)B_1 + \Theta_{n\beta}(t)B_2)x_0 =$$

$$= \pi(I + \Theta_{n\alpha}(t)B_1 + \Theta_{n\beta}(t)B_2)\begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \\ x_{03} \end{pmatrix} = \pi\begin{pmatrix} x_{01} + \Theta_{n\alpha}(t)x_{02} - \Theta_{n\beta}(t)x_{03} \\ 1 - \alpha\Theta_{n\alpha}(t)x_{02} \\ 1 - \beta\Theta_{n\beta}(t)x_{03} \end{pmatrix} =$$

$$= x_{01} + \Theta_{n\alpha}(t)x_{02} - \Theta_{n\beta}(t)x_{03};$$

Аналогично,

$$\pi\Phi(t-1)x_0 = x_{01} + \Theta_{n\alpha}(t-1)x_{02} - \Theta_{n\beta}(t-1)x_{03}.$$

Поэтому,

$$\begin{aligned} \pi\Phi(T)x_0 - \pi\Phi(T-1)x_0 \\ &= x_{01} + \Theta_{n\alpha}(T)x_{02} - \Theta_{n\beta}(T)x_{03} \\ &- \left(x_{01} + \Theta_{n\alpha}(T-1)x_{02} - \Theta_{n\beta}(T-1)x_{03}\right) \\ &= (\Theta_{n\alpha}(T) - \Theta_{n\alpha}(T-1))x_{02} - (\Theta_{n\beta}(T) + \Theta_{n\beta}(T-1))\,x_{03} \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\int_{-1}^{0} \pi\Phi(T-s-1)[Bx_0]ds =$$

$$= \int_{-1}^{0} \pi(I + \Theta_{n\alpha}(T-s-1)B_1 + \Theta_{n\beta}(T-s-1)B_2)(B_1+B_2)x_0 ds$$

$$= \int_{-1}^{0} \pi((1-\alpha\Theta_{n\alpha}(T-s-1)B_1 + \left(1-\beta\Theta_{n\beta}(T-s-1)B_2\right)x_0\, ds$$

$$= \int_{-1}^{0} \left((1-\alpha\Theta_{n\alpha}(T-s-1))x_{02} - \left(1-\beta\Theta_{n\beta}(T-s-1)\right)x_{03}\right)ds,$$

а

$$W_1(t) = \pi M - \int_0^T \bigcap_{v\in Z} \pi\Phi(T-s)f(Y,v(s),s)ds =$$

$$= -\int_0^T \bigcap_{v\in Z} \pi\Phi(T-s)(Y-v)ds =$$

$$= -\int_0^T (\pi\Phi(T-s)Y - \pi\Phi(T-s)Z)ds =$$

$$= -\int_0^T S_{|\Theta_{n\alpha}(T-s)|\rho} - S_{|\Theta_{n\beta}(T-s)|\sigma}\, ds = \; -\int_0^T S_{f_1(T-s)}ds =$$

$$= -S_{\int_0^T f_1(T-s)ds}$$

шар радиуса

$$f_2(T) = \int_0^T f_1(T-s)ds, \qquad f_1(T-s) = |\Theta_{n\alpha}(T-s)|\rho - \left|\Theta_{n\beta}(T-s)\right|\sigma.$$

Этот шар непусто, если $|\Theta_{n\alpha}(t)|\rho > |\Theta_{n\beta}(t)|\sigma$ или когда, $\alpha = \beta$, $\rho > \sigma$. Следовательно, в силу теоремы 2.5.1, если $|\Theta_{n\alpha}(t)|\rho > |\Theta_{n\beta}(t)|\sigma$ или когда, $\alpha = \beta$, $\rho > \sigma$ из начальных положений x_o в.з.п.з.в. $T = T(x_0)$, где

$$T(x_0) = \min\Big\{T: \| \left(\Theta_{n\alpha}(T) - \Theta_{n\alpha}(T-1)\right)x_{02} - \left(\Theta_{n\beta}(T) + \Theta_{n\beta}(T-1)\right)x_{03} +$$

$$+ \int_{-1}^{0} \left((1-\alpha\Theta_{n\alpha}(T-s-1))x_{02} - \left(1-\beta\Theta_{n\beta}(T-s-1)\right)x_{03}\right)ds \,\| =$$

$$= \int_0^T \left(|\Theta_{n\alpha}(T-s)|\rho - |\Theta_{n\beta}(T-s)|\sigma\right)ds\}.$$

Пример 2.6.3. Рассматривается дифференциальная игра, описываемая параболическим уравнением нейтрального типа

$$\frac{\partial}{\partial t}(z(t,s) - Bz(t-1,s)) = Az(t,s) + \bar{u}(t,s) - \bar{v}(t,s) \qquad (2.6.3)$$

с начальным положением $z(\mu,\cdot) = x_0 \in W_2^2$ – пространство Соболева, $-1 \leq \mu \leq 0$, и краевым условием

$$z(t,0) = z(t,\pi) = 0,$$

где

$$t \geq 0, s \in [0,\pi],$$

$$A = \frac{\partial^2}{\partial s^2}, \qquad B = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma F(\tau)\,(\tau I - A)^{-1}d\tau$$

- линейный ограниченный оператор, при этом AB тоже линейный ограниченный оператор [302], Γ -контур, являющийся границей некоторой области, содержащий спектр оператора A, а $F(\cdot)$ – некоторая аналитическая функция в некоторой окрестности Γ, при каждом t функции

$$z(t,\cdot), \qquad \frac{\partial}{\partial t}z(t,\cdot), \qquad \frac{\partial^2}{\partial s^2}z(t,\cdot), \qquad \bar{u}(t,\cdot), \qquad v(t,\cdot)$$

принадлежат пространству $L_2[0,\pi]$. При этом в игре (2.6.3) на управление игроков наложены следующие ограничения

$$\bar{u}(t,s) \in L_2([0,T]\times[0,\pi]),$$
$$\bar{v}(t,s) \in L_2([0,T]\times[0,\pi]) = L_2([0,T], L_2[0,\pi]),$$

$$T \geq 0,$$

и при почти всех t управления

$$\bar{u}(t,\cdot) \in \{x: \|x\| \leq \alpha\} = Y \subset L_2[0,\pi],$$
$$\bar{v}(t,\cdot) \in \{x: \|x\| \leq \beta\} = Z \subset L_2[0,\pi],$$
$$\alpha > \beta,$$

а шар $M = \{x: \|x\| \leq l,\} \subset L_2[0,\pi]$ является терминальным множеством, где заканчивается игра. Положив

$$X = L_2[0,\pi], \qquad x(t) = z(t,\cdot),$$
$$u(t) = \bar{u}(t,\cdot), \qquad v(t) = \bar{v}(t,\cdot)$$

перепишем игру (2.6.3) в абстрактной форме

$$\frac{d}{dt}(x(t) - Bx(t-1)) = Ax(t) + u(t) - v(t) \tag{2.6.4}$$

с начальным положением $x(\mu) = x_o, -1 \leq \mu \leq 0$,где л.з.о.

$$A = \frac{\partial^2}{\partial s^2},$$

имеющий плотную в $L_2[0,\pi]$ область определения $D = \{y \in L_2[0,\pi]: y' -$ абсолютно непрерывно,$y'' \in L_2[0,\pi], y(0) = y(\pi) = 0\}$, п.с.н.п. $S(t)$ и

$$S(t)x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2 t}\, \varphi_n,$$

где $a_n =< x, \varphi_n >, \varphi_n(s) = \sqrt{2}\sin ns\,, 0 \leq s \leq \pi$ и последовательность φ_n

образует ортонормальный базис [18].

Следующая теорема является следствием теорем 2.4.5 и 2.4.6.

Теорема. *Если имеет место включение*

$$[\Phi(\mathrm{T}) - \Phi(\mathrm{T}-1)B]x_o \in M - \int_0^T \Phi(T-t)\text{Ш}_{\alpha-\beta}dt, \qquad (2.6.5)$$

где

$$\text{Ш}_{\alpha-\beta} = \{x: \|x\| \leq \alpha - \beta\},$$

а

$$\Phi(t) = S(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \chi(t-j)\frac{d^j}{dt^j}\left[\frac{(t-j)^j}{j!}S(t-j)B^j\right]$$

- *фундаментальное решение [302],*

$$\chi = \begin{cases} 0, & \mu \leq 0 \\ 1, & \mu > 0 \end{cases}$$

- *характеристическая функция, то:*

1) *из начального положения* x_o *в.з.п.о.в.* $T_o = \min\{T \geq 0$: *для которых выполняется (2.6.5)*$\}$;
2) *если* $0 \leq t \leq 1$, *то, в частности, из точки* x_o, $\|x_0\| > l$, *для которого*

$$S(0{,}5)x_0 = \left(\frac{l}{\|x_0\|} - \frac{\alpha-\beta}{\|x_0\|}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4\left(1-e^{-\frac{(2k-1)^2}{2}}\right)sin(2k-1)s}{(2k-1)^3}\right)x_0$$

в.з.п.з.в. $T_o = 0{,}5$.

Доказательство. 1) Из функционального анализа [28] известно, что в рефлексивном сепарабельном пространстве $L_2([0,\pi])$ каждый шар является выпуклым и компактным множеством относительно топологии $\sigma(X, X^*)$. В силу теоремы 1.4.2 интеграл

$$W_1(t) = \int_0^t \Phi(t-\mu)\, Ш_{\alpha\,-\beta} d\mu$$

является непустым, выпуклым и замкнутым относительно топологии $\sigma(X, X^*)$. Отображение $t \to u(t) - v(t)$ локально интегрируемо. Ясно, что для любого элемента u из шара $Ш_\alpha = Y$ существует элемент $e \in L_2[0,\pi]$, такой, что имеет место представление $u = \frac{e}{\|e\|}\alpha_0\alpha$, где $0 \le \alpha_0 \le 1$. Поэтому в качестве отображения $w(u)$ можно брать отображение, задаваемое формулой

$$w(u) = \frac{e}{\|e\|}\alpha_0\beta,$$

ибо, во-первых,

$$\|w(u)\| = \left\|\frac{e\alpha_0\beta}{\|e\|}\right\| = \alpha_0\beta \le \beta, \qquad w(u) \in Ш_\beta = Z;$$

во-вторых,

$$\begin{aligned}\|u - w(u) + v\| &= \left\|\frac{e}{\|e\|}\alpha_0\alpha - \frac{e}{\|e\|}\alpha_0\beta + v\right\| = \left\|\frac{e}{\|e\|}\alpha_0(\alpha-\beta) + v\right\| \\ &\le |\alpha_0(\alpha-\beta)| + \|v\| \le \alpha_0(\alpha-\beta) + \beta = \alpha - \alpha + \alpha_0\alpha - \alpha_0\beta + \beta \\ &= \alpha - \alpha(1-\alpha_0) + \beta(1-\alpha_0) = \alpha - (1-\alpha_0)(\alpha-\beta) \le \alpha,\end{aligned}$$

т.е. $u - w(u) + v \in Y$; в-третьих,

$$\Phi(t-\tau)\left(u - \frac{u\beta}{\|u\|} + v\right) = \Phi(t-\tau)\left(u - \frac{u\beta}{\|u\|}\right) + \Phi(t-\tau)v \in \Phi(t-\tau)Y$$

для любого $v \in Z$. Поэтому,

$$\Phi(t-\tau)\left(u - \frac{u\beta}{\|u\|}\right) + \Phi(t-\tau)Z \subset \Phi(t-\tau)Y,$$

т.е.

$$\Phi(t-\tau)\left(u - \frac{u\beta}{\|u\|}\right) \in \Phi(t-\tau)Y \underline{*}\, \Phi(t-\tau)Z$$

(геометрическая разность [182]), т.е.

$$\Phi(t-\tau)\big(u-w(u)\big) \in \bigcap_{v\in Z} \Phi(t-\tau)(Y-v),$$

т.е.

$$\Phi(t-\tau)f(u,w(u),\tau) \in \bigcap_{v\in Z} \Phi(t-\tau)f(Y,v,\tau)$$

т.е. выполняются все условия теорем 2.4.5 и 2.4.6. 2). Второе утверждение следует из 1).

Пример 2.6.4. В рефлексивном и сепарабельном банаховом пространстве X рассматривается следующая простая дифференциальная игра

$$\begin{cases} \dot{x} = u \\ \dot{y} = v \end{cases} \tag{2.6.6}$$

с терминальным множеством $M = \{z = y - x : \|z\| = 0\} = 0$ и начальной точкой $z_0 = x(0) - y(0) \neq 0$.

В игре (2.6.6) $x = x(t) -$ преследующий объект, $y = y(t) -$ убегающий объект, $t \geq 0$, $u = u(t) -$ управление преследования, $v = v(t) -$ управление убегания,

$$u(\cdot) \in U([0,\infty), S_\alpha), \qquad v(\cdot) \in U\big([0,\infty), S_\beta\big),$$
$$S_\alpha = \{u\colon \|u\| \leq \alpha\}, \qquad S_\beta = \{v\colon \|v\| \leq \beta\}, \qquad \alpha > \beta.$$

Положив $z = y - x$ запишем (2.6.6) в виде

$$\dot{z} = -u + v \tag{2.6.7}$$

Как видно, $A = 0$, $\Phi(\mathrm{t}) = \mathrm{e}^{tA} = I$, $f(u,v,t) = -u + v$. Следовательно, в силу теоремы 2.2.1, если

$$e^{TA}z_0 = z_0 \in M - \int_0^T \bigcap_{v\in S_\beta} e^{(T-s)A}(-S_\alpha + v)ds = -\int_0^T \bigcap_{v\in S_\beta}(-S_\alpha + v)\,ds$$

$$= \int_0^T \bigcap_{v\in S_\beta}(S_\alpha - v)\,ds = \int_0^T (S_\alpha \overset{*}{-} S_\beta)ds = \int_0^T S_{\alpha-\beta}ds = S_{\alpha-\beta}\int_0^T ds$$

$$= S_{\alpha-\beta}T = S_{(\alpha-\beta)T}, \qquad \text{то}$$

из точки z_0 в.з.п.о.в.

$$T_0 = \min\{T \geq 0:\ z_0 \in S_{(\alpha-\beta)T}\} = \min\{T \geq 0:\ \|z_0\| \leq (\alpha-\beta)T\}.$$

Следовательно,

$$\|z_0\| = (\alpha-\beta)T_0, \qquad \text{т.е.} \quad T_0 = \frac{\|z_0\|}{\alpha-\beta}.$$

Из теоремы 2.2.1. следует, что для любого управления, убегающего $v(\cdot)$ существует такое управление преследователя $u(\cdot)$, что

$$z_0 = \int_0^{T_0} \big(u(s) - v(s)\big)ds\,, \qquad \text{где} \quad w(s) = u(s) - v(s) \in S_{\alpha-\beta}$$

Например, если

$$v(s) = \frac{z_0}{\|z_0\|}\beta, \quad \text{то} \quad w(s) = \frac{z_0}{\|z_0\|}(\alpha-\beta) \quad \text{и} \quad u(s) = \frac{z_0}{\|z_0\|}\alpha.$$

Пример 2.6.5. В сепарабельном и рефлексивном банаховом пространстве X рассматривается дифференциальная игра, описываемая системой

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = k\dot{x}(t-1) + y(t) + \bar{v}(t) \\ \dot{y}(t) = -\bar{u}(t) \end{cases}, \tag{2.6.8}$$

где

$$\|\bar{u}\| \leq \alpha, \ \ \|\bar{v}\| \leq \beta, \ \ k \geq 0, \quad x(t), y(t) \in X, \quad M = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : \|x\| \leq l\right\}.$$

Если $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{u} \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} \bar{v} \\ 0 \end{pmatrix}$, то $CA = kA$, $AC = AA = 0$ и игра (2.6.8) записывается в виде

$$\dot{z}(t) = C\dot{z}(t-1) + Az(t) - u + v \tag{2.6.9}$$

Фундаментальное решение $\Phi(t)$, для которого $\dot{\Phi}(t) = C\dot{\Phi}(t-1) + A\Phi(t)$, $\Phi(0) = I$ и $\Phi(s) = 0$ при $s < 0$ имеет вид:

$$\Phi(t) = I + A\left(t + \sum_{i=1}^{n-1}(n-i)k^i + (t-n)\sum_{i=1}^{n}k^i\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} I & t + \sum_{i=1}^{n-1}(n-i)k^i + (t-n)\sum_{i=1}^{n}k^i \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

$$n \le t \le n+1, \;\; n = 0,1,\ldots,$$

Тогда, в силу теоремы 2.4.8, в игре (2.6.9) из точки $z_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ в.з.п.о.в.

$$T_0 = \min\left\{T \ge 0\colon \left\|(1-k)x_0 + \left[T + \sum_{i=1}^{n-1}(n-i)k^i + (T-n)\sum_{i=1}^{n}k^i\right]y_0\right\| \le R(T),\right.$$

$$\left. n \le T \le n+1\right\},$$

где

$$R(T) = \alpha\left(\frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{n}k^i\right)T^2 + \left[\alpha\left(\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)k^i - n\sum_{i=1}^{n}k^i\right) - \beta\right]T + l$$

1. Если

$$d = \left[\alpha\left(\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)k^i - n\sum_{i=1}^{n}k^i\right) - \beta\right]^2 - 4\left(\frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{n}k^i\right)\alpha l \le 0,$$

то из любой точки $z_0 \in X \times X$ в.з.п. .

2. Если $d > 0$, то из любой точки $z_0 \in P$, где

$$P = \bigcup_{c\in[0,l)} P_c,$$

$$P_c = \left\{\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} : \|x_0\| \ge l, \qquad \|p\| = 1, \right.$$

$$\left. y_0 = \frac{cp - (1-k)x_0}{T_c + \sum_{i=1}^{n-1}(n-i)k^i + (T_c - n)\sum_{i=1}^{n}k^i} \right\}$$

в.з.п.о.в. T_c, где

$$T_c\left(1 + 2\left(\sum_{i=1}^{n}k^i\right)\right)\alpha = \alpha\left(n\sum_{i=1}^{n}k^i - \sum_{i=1}^{n-1}(n-i)k^i\right) + \beta -$$

$$- \sqrt{d + \left(2 + 4\sum_{i=1}^{n}k^i\right)\alpha c}.$$

Когда $k = 0$ и $X = R^n$ получим соответствующий результат Л.С. Понтрягина [182], где игра задается системой

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t) + \bar{v}(t) \\ \dot{y}(t) = -\bar{u}(t) \end{cases}. \qquad (2.6.10)$$

Если $d = \beta^2 - 2\alpha l \le 0$, то из любой точки $z_0 \in X \times X$ в.з.п.. Когда $c = 0$ множество P_c совпадает с множеством, которое найдено в работе Н. Сатимова

[223].

Пример 2.6.6. В рефлексивном сепарабельном банаховом пространстве X рассматривается дифференциальная игра запаздывающего типа

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = mx(t-1) + y(t) + \bar{v}(t) \\ \dot{y}(t) = -\bar{u}(t) \end{cases}, \qquad (2.6.11)$$

с терминальным множеством $M = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : \|x\| \le l\right\}$. В игре (2.6.11) $t \ge 0$, $m \ge 0$, $x(t) \in X$, $y(t) \in X$, $\|\bar{u}(t)\| \le \alpha$, $\|\bar{v}(t)\| \le \beta$.

Положив $z(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $u(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{u}(t) \end{pmatrix}$, $v(t) = \begin{pmatrix} \bar{v}(t) \\ 0 \end{pmatrix}$ запишем (2.6.11) в виде

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bz(t-1) - u(t) + v(t) \qquad (2.6.12)$$

Фундаментальное решение $\Phi(t)$, для которого

$\dot{\Phi}(t) = Az(t) + B\Phi(t-1)$, $\Phi(0) = I$ и $\Phi(s) = 0$ при $s < 0$ имеет вид:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} I + \sum_{k=1}^{n} \frac{m^k (t-k)^k}{k!} I & \left(t + \sum_{k=1}^{n} \frac{m^k (t-k)^{k+1}}{(k+1)!}\right) I \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} n \le t \le n+1 \\ n = 0,1,2,\dots \end{matrix}$$

Тогда

$$\pi\Phi(t) z_o = \pi\Phi(t) \begin{pmatrix} x_o \\ y_o \end{pmatrix} = (1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{m^k (t-k)^k}{k!}) x_o + \left(t + \sum_{k=1}^{n} \frac{m^k (t-k)^{k+1}}{(k+1)!}\right) y_o,$$

$$\int_{-1}^{0} \pi\Phi(t-s-1) B z_o ds = m\left(1 + \sum_{k=1}^{n} m^k \frac{(t-k)^{k+1} - (t-1-k)^{k+1}}{(k+1)!}\right) x_o,$$

$$\int_0^t \bigcap_{v\in S_\beta} \big(\gamma(s)\pi M - \pi\Phi(t-s)\big)(S_\alpha - v)ds = \int_0^t \Big[S_{l\gamma(s)} - \Big(S_{p(s)} \overset{*}{-} S_{q(s)}\Big)\Big]\, ds =$$

$$= \int_0^t \big[S_{l\gamma(s)+p(s)-q(s)}\big]ds = S_{\int_0^t (l\gamma(s)+p(s)-q(s))ds},$$

где

$$S_r = \{x: \|x\| \le r\},$$

$\pi -$ ортогональное проектирование из $X \times X$ в X, $\gamma(s) -$ такая суммируемая функция, что

$$\int_0^t \gamma(s)\, ds = 1, \qquad p(s) = \alpha\left(t - s + \sum_{k=1}^{n} \frac{m^k (t-s-k)^{k+1}}{(k+1)!}\right),$$

$$q(s) = \beta\left(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{m^k (t-s-k)^{k}}{k!}\right),$$

$$R(t) = \int_0^t \big(l\gamma(s) + p(s) - q(s)\big)ds = \frac{\alpha t^2}{2} - \beta t + l -$$

$$-\alpha \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{m^k}{(k+2)!}\left((-k)^{k+2} - (t-k)^{k+2}\right) +$$

$$+\beta \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{m^k}{(k+1)!}\left((-k)^{k+1} - (t-k)^{k+1}\right).$$

Тогда, в силу теоремы 2.4.8, если $R(T) > 0$, то в игре (2.6.11) из точки $z_0 = \binom{x_0}{y_0}$ в.з.п.о.в.

$$T_o = min\left\{T \ge 0: ||(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{m^k (T-k)^k}{k!})\, x_o + \left(T + \sum_{k=1}^{n} \frac{m^k (T-k\,)^{k+1}}{(k+1)!}\right) y_o +\right.$$

$$+m\left(1+\sum_{k=1}^{n} m^k \frac{(T-k)^{k+1}-(T-1-k)^{k+1}}{(k+1)!}\right) x_o || \leq R(T)\}, n \leq T \leq n+1,$$

$$n = 0,1,2, \ldots$$

Когда $X = R^n$ и $m = 0$ получим результат Л.С. Понтрягина для игры, которая задается системой (2.6.10).

ГЛАВА 3.
ЛИНЕЙНЫЕ И КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИГРЫ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

В этой главе исследуется разрешимость з.п. для дифференциальных игр, когда на управление игроков наложены интегральные ограничения, а динамика игры описывается:

- обыкновенным дифференциальным уравнением;
- дифференциальным уравнением запаздывающего типа;
- дифференциальным уравнением нейтрального типа.

В первом параграфе решена з.п. для линейной дифференциальной игры.

Во втором параграфе решена з.п. для дифференциальной игры запаздывающего типа.

В третьем параграфе решена з.п. для дифференциальной игры нейтрального типа.

В четвертом параграфе исследованы ряд примеров о разрешимости з.п.. Найдено время преследования и указан закон выбора управления преследователя.

Изложенные в данной главе результаты опубликованы в работах [1-А, 3-А, 10-А, 13-А, 16-А, 26-А, 27-А, 28-А, 29-А, 35-А, 36-А, 39-А].

§3.1. Линейные дифференциальные игры преследования с интегральными ограничениями

Доказанные в этом параграфе теоремы обобщают линейные конечномерные результаты работ [8, 155]. Эти обобщения позволяют исследовать многие прикладные задачи, протекающие в условиях конфликта и неопределенности, не только с сосредоточенными параметрами, но и с распределенными параметрами.

Пусть X, Y, Z – гильбертовые пространства, M – замкнутое линейное подпространство пространства X, $B: Y \to X$ и $C: Z \to X$ – линейные ограниченные операторы, а л.з.о. $\mathrm{A}: D \to X$, имеющий плотную в X область определения D, п.с.н.п. $S(t)$.

Рассмотрим игру, описываемую уравнением

$$\dot{x}(t) = Ax(t) - Bu(t) + Cv(t) \tag{3.1.1}$$

и терминальным множеством M, где $u(\cdot) \in U([0,\infty), Y)$ – управление преследования и $v(\cdot) \in U([0,\infty), Z)$ – управление убегания удовлетворяют интегральным ограничениям:

$$\int_0^\infty \|u(t)\|^2\, dt \le \rho^2, \quad \int_0^\infty \|v(t)\|^2\, dt \le \sigma^2 \tag{3.1.2}$$

где ρ, σ – фиксированные неотрицательные числа. Согласно, определению 1.4.1, решением задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) - Bu(t) + Cv(t) \\ x(0) = x_o \end{cases} \tag{3.1.3}$$

соответствующим отображением $u(\cdot), v(\cdot)$ на отрезке $[0, T]$, будем называть отображение $x(\cdot)$, задаваемое формулой

$$x(t) = \mathrm{S}(t)x_o + \int_0^t \mathrm{S}(t-s)(Cv(s) - Bu(s))\, ds, \quad t \in [0, T],$$

где интеграл понимается в смысле Бохнера.

Сформулируем и докажем основной результат этого параграфа.

Теорема 3.1.1. *Допустим, что:*

1) *неотрицательная, строго возрастающая и непрерывно дифференцируемая функция* $J(t), t \geq 0$ *такая, что* $J(0) = 0$ *и* $J(t) \geq t$;
2) *линейный ограниченный оператор* $L(t): Z \to Y$ *непрерывно зависящий от* t *такой, что имеет место равенство*

$$\pi S(J(t))C = \pi S(t)BL(t), t \geq 0\,;$$

3) *имеет место неравенство* $\alpha \geq \lambda(t), t \geq 0,$ *где*

$$\alpha^2 = \rho^2 - \int_0^{t_1} \|\bar{u}(s)\|^2 ds,$$

$\bar{u}$ – *некоторое управление преследования, функция* $\lambda(\cdot)$ *задается формулой*

$$\lambda^2(t) = sup\left\{\int_0^t \left\|L(s)v\big(J(t) - J(s)\big)J'^{(s)}\right\|^2 ds: \int_0^{J(t)} \|v(s)\|^2 ds \leq \sigma^2\right\},$$

а числа $t_1 \geq 0, \tau = \tau(x_o) \geq 0$ *такие, что* $J(\tau) = t_1 + \tau$;

4) *имеет место включение*

$$\pi S(t_1 + \tau)x_o - \int_0^{t_1} \pi S(t_1 + \tau - s)B\bar{u}\,(s)ds \in \Omega(\tau),$$

где

$$\Omega(\tau) = \left\{\int_0^\tau \pi S(\tau - s)Bp(s)ds\,:\, \int_0^\tau \|p(s)\|^2 ds \leq \big(\alpha - \lambda(\tau)\big)^2\right\}.$$

Тогда из начальной точки $x_o \in X \backslash M$ *в.з.п.з.в.* $t_1 + \tau$.

Доказательство. По определению многозначного интеграла и в силу 4) существует такое отображение $p(\cdot)$,

$$\int_0^\tau \|p(s)\|^2 ds \leq \big(\alpha - \lambda(\tau)\big),^2$$

что имеет место равенство

$$\pi S(t_1+\tau)x_o - \int_0^t \pi S(t_1+\tau-s)\, B\bar{u}(s)ds = \int_0^\tau \pi S(\tau-s)Bp(s)ds. \qquad (3.1.4)$$

Пусть $v(\cdot)$ – произвольное допустимое управление убегания. Тогда управление преследования $u(\cdot)$ выбираем по формуле

$$u(s) = \begin{cases} \bar{u}(s) \quad \text{при} \quad s \in [0, t_1), \\ p(s-t_1) + L(t_1+\tau-s)v\big(J(\tau) - J(t_1+\tau-s)\big)J'(t_1+\tau-s) \\ \text{при } s \in [t_1, t_1+\tau] \\ 0 \qquad \text{при} \qquad s > t_1+\tau \end{cases} \qquad (3.1.5)$$

Сначала покажем, что выбранное управление (3.1.5) удовлетворяет интегральному ограничению (3.1.2). Действительно, в силу 3), 4), (3.1.5) и применяя неравенство Коши–Буняковского

$$\left(\int_0^\tau < p(s), g(s) > ds\right)^2 \le \int_0^\tau \|p(s)\|^2 ds \int_0^\tau \|g(s)\|^2 ds$$

имеем:

$$\int_0^\infty \|u(s)\|^2 ds \le \int_0^{t_1} \|\bar{u}(s)\|^2 ds + \int_{t_1}^{t_1+\tau} \|u(s)\|^2 ds = \int_0^{t_1} \|\bar{u}(s)\|^2 ds +$$

$$+ \int_0^\tau \|u(t_1+\tau-s)\|^2 ds =$$

$$\int_0^{t_1} \|\bar{u}(s)\|^2 ds + \int_0^\tau \|\rho(\tau-s) + L(s)v(J(\tau)-J(s))J'(s)\|^2 ds =$$

$$= \int_0^{t_1} \|\bar{u}(s)\|^2 ds + \int_0^\tau < \rho(\tau-s) + L(s)v\big(J(\tau)-J(s)\big)J'(s) \quad , p(\tau-s) +$$

$$+L(s)v(J(\tau)-J(s))J'(s) > ds = \int_0^{t_1} \|\bar{u}(s)\|^2 ds + \int_0^\tau \|p(\tau-s)\|^2 ds +$$

$$+2\int_0^\tau < p(\tau-s), L(s)v\big(J(\tau)-J(s)\big)J'(s) > ds +$$

$$+ \int_0^\tau \left\|L(s)v\big(J(\tau)-J(s)\big)J'^{(s)}\right\|^2 ds \le \int_0^{t_1} \|\bar{u}(s)\|^2 ds + \big(\alpha - \lambda(\tau)\big)^2 +$$

$$+2\big(\alpha-\lambda(\tau)\big)\lambda(\tau)+\lambda^2(\tau)=\int_0^{t_1}\|\bar{u}(s)\|^2ds+\alpha^2=\rho^2.$$

Теперь покажем, что $\pi x(t_1+\tau)=0$, что эквивалентно тому, что $x(t_1+\tau)\in M$. Действительно, в силу 1), (3.1.4), (3.1.5) для решения $x(\cdot)$ задачи Коши (3.1.3) соответствующего управлениям $u(\cdot),v(\cdot)$ на $[0,t_1+\tau]$ имеем:

$$\pi x(t_1+\tau)=\pi\mathrm{S}(t_1+\tau)x_o+\int_o^{t_1+\tau}\pi\mathrm{S}(t_1+\tau-s)(Cv(s)-Bu(s))ds=$$

$$=\int_0^{t_1}\pi\mathrm{S}(t_1+\tau-s)B\bar{u}(s)\,ds+\int_0^{\tau}\pi\mathrm{S}(\tau-s)Bp(s)ds+$$

$$+\int_0^{t_1+\tau}\pi\mathrm{S}(t_1+\tau-s)\,(Cv(s)-Bu(s))ds=\int_0^{t_1}\pi\mathrm{S}(t_1+\tau-s)B\bar{u}(s)\,ds+$$

$$+\int_0^{\tau}\pi\mathrm{S}(\tau-s)Bp(s)ds-\int_0^{t_1+\tau}\pi\mathrm{S}(t_1+\tau-s)\,Bu(s)ds+$$

$$+\int_0^{t_1+\tau}\pi\mathrm{S}(t_1+\tau-s)\,Cv(s)ds=\int_0^{\tau}\pi\mathrm{S}(\tau-s)Bp(s)ds-$$

$$-\int_{t_1}^{t_1+\tau}\pi\mathrm{S}(t_1+\tau-s)\,Bu(s)ds+\int_0^{t_1+\tau}\pi\mathrm{S}(t_1+\tau-s)\,Cv(s)ds=$$

$$=\int_0^{\tau}\pi\mathrm{S}(\tau-s)Bp(s)ds-\int_0^{\tau}\pi\mathrm{S}(\tau-t)Bu(t+t_1)dt+$$

$$+\int_0^{t_1+\tau}\pi\mathrm{S}(t)\,Cv\big((t_1+\tau-s)\big)dt=\int_0^{\tau}\pi\mathrm{S}(t)Bp(\tau-t)dt-$$

$$-\int_0^{\tau}\pi\mathrm{S}(s)Bu(t_1+\tau-s)\,ds+\int_0^{\tau}\pi\mathrm{S}\Big(J(s)Cv\big(J(\tau)-J(s)\big)\Big)J'(s)ds=$$

$$=\int_0^{\tau}\pi\mathrm{S}(s)Bp(\tau-s)ds-\int_0^{\tau}\pi\mathrm{S}(s)Bu(t_1+\tau-s)ds+$$

$$+\int_0^{\tau}\pi\mathrm{S}(s)BL(s)v\big(J(\tau)-J(s)\big)\cdot J'(s)ds=$$

$$=\int_0^{\tau}\pi\mathrm{S}(s)B\Big(p(\tau-s)-u(t_1+\tau-s)+L(s)v\big(J(\tau)-J(s)\big)J'(s)\Big)\,ds=$$

$$= \int_0^\tau \pi S(s)B(p(\tau - s) - p(\tau - s) - L(s)v\big(J(\tau) - J(s)\big)J'(s) +$$

$$+L(s)v\big(J(\tau) - J(s)\big)J'(s)ds = 0, \quad \text{т.е.} \quad \pi x(t_1 + \tau) = 0.$$

Следовательно, $x(t_1 + \tau) \in M$. Поэтому, из начальной точки $x_o \in X \backslash M$ в.з.п.з.в. $t_1 + \tau$. При этом управление преследования $u(\cdot)$ выбирают по формуле (3.1.5).

Следующая теорема вытекает из теоремы 3.1.1, если положить $J(t) \equiv t$.

Теорема 3.1.2 *Допустим, что:*

1) *линейный ограниченный оператор* $L(t): Z \to Y$ *непрерывно зависящий от t такой, что имеет место равенство* $\pi S(t)C = \pi S(t)BL(t),\ t \geq 0$;
2) *если*

$$\lambda^2(t) = sup\left\{\int_0^t \|L(s)v(t-s)\|^2 ds: \int_0^t \|v(s)\|^2 ds \leq \sigma^2\right\},$$

то

$$\rho \geq \lambda(t), \qquad t \geq 0;$$

3) *имеет место включение* $\pi S(\tau)x_o \in \Omega_1(\tau)$, *где*

$$\Omega_1(\tau) = \left\{\int_0^\tau \pi S(\tau - s)\, Bp(s)ds: \int_0^\tau \|p(s)\|^2 ds \leq \big(\rho - \lambda(\tau)\big)^2\right\}.$$

Тогда в игре (3.1.1) из точки $x_o \in X \backslash M$ *в.з.п.з.в.* τ.

Замечание 3.1.1 [39-A]. *Аналогичные результаты можно получить, когда на управление игроков наложены смешанные ограничения типа*

$$\int_0^\infty \|u(s)\|^2 ds \leq \rho^2, \qquad v(t) \in K,$$

где $\rho > 0$ *и* $K -$ *некоторое выпуклое замкнутое ограниченное множество из* Z.

§3.2. Линейные дифференциальные игры преследования запаздывающего типа с интегральными ограничениями

В этом параграфе доказана теорема, которая обобщает соответствующие линейные результаты работ [107, 129].

Пусть $X, Y, Z -$ гильбертовые пространства. В пространстве X рассмотрим игру, описываемую уравнением запаздывающего типа

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{i=1}^{n} A_i\, x(t - h_i) - Bu(t) + Cv(t), \qquad (3.2.1)$$

где $t \geq 0,\ 0 < h_1 < h_2 < \cdots < h_n = h,\ x(t) \in X,$ $u(\cdot) \in U([0, \infty), Y) -$ управление преследования, $v(\cdot) \in U([0, \infty), Z) -$ управление убегания, операторы $A_i: X \to X,\ B: Y \to X,\ C: Z \to X$ линейны и ограничены, а $A: D \to X -$ л.з.о., имеющий плотную в X область определения, п.с.н.п. $S(t)$. Используя эту полугруппу можно строить фундаментальное решение $\Phi(t)$ [302] для которого справедливы равенства

$$\dot{\Phi}(t) = A\Phi(t) + \sum_{i=1}^{n} A_i\, \Phi(t - h_i), \qquad (3.2.2)$$

$\Phi(0) = I -$ единичный оператор, $\Phi(t) = 0$ при $t < 0$.

Терминальное множество M, где заканчивается игра, является замкнутым линейным подпространством пространства X. При этом на управление преследования $u(\cdot)$ и на управление убегания $v(\cdot)$ наложены интегральные ограничения:

$$\int_0^{\infty} \|u(s)\|^2\, ds \leq \rho^2, \int_0^{\infty} \|v(s)\|^2\, ds \leq \sigma^2, \qquad \rho, \sigma > 0. \qquad (3.2.3)$$

В дальнейшем, полагаем, что операторы B и C такие, что для любых управления преследования $u(\cdot)$, управления убегания $v(\cdot)$ и начального положения $\varphi(\cdot)-$ из класса непрерывных отображений, действующих из $[-h,0]$ в X, задача Коши

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{i=1}^{n} A_i\, x(t-h_i) - Bu(t) + Cv(t), \qquad (3.2.4)$$
$$x(s) = \varphi(s), \qquad -h \le s \le 0$$

имеет решение вида (1.4.6) (определение 1.4.3).

Далее $M^{\perp}-$ ортогональное дополнение к M в X, $\pi-$ оператор ортогонального проектирования из X на $M^{\perp}$.

Для дифференциальной игры (3.2.1) докажем разрешимость з.п..

Справедлива следующая

Теорема 3.2.1. *Допустим, что:*

1) *линейный ограниченный оператор* $L(t): Z \to Y$, *непрерывно зависящий от* $t \in [0,\infty)$, *такой, что* $\pi\, \Phi(t)C = \pi\Phi(t)BL(t)$;
2) *если*
$$\lambda^2(t) = sup\left\{\int_0^t \|L(s)\vartheta(t-s)\|^2\, ds: \int_0^\infty \|\vartheta(s)\|^2 ds \le \sigma^2\right\},$$
то справедливо $\rho \ge \lambda(t),\ t \in [0,\infty)$;
3) *начальное положение* φ *и число* $T = T\big(\varphi(0)\big)$ *такие, что*
$$\pi\Phi(T)\varphi(0) + \pi\sum_{i=1}^{n}\int_{-h_i}^{0} \Phi(T-s-h_i)\, A_i\varphi(s)ds \in$$
$$\in \left\{\int_0^T \pi\Phi(T-s)Bp(s)ds: \int_0^T \|p(s)\|^2 ds \le \big(\rho - \lambda(T)\big)^2\right\}.$$

Тогда из начального положения $\varphi(s),\ -h \le s \le 0$, *в.з.п.з.в.* $T = T(\varphi(0))$.

Доказательство. Суть доказательства состоит в том, что для любого

допустимого измеримого управления убегания $v(\cdot)$ выбирается такое допустимое измеримое управление преследования $u(\cdot)$, что для решения $x(\cdot)$ задачи (3.2.4) соответствующего управлениям $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ имеет место равенство $\pi x(T) = 0$.

По определению многозначного интеграла и в силу 3) существует такое отображение $p(\cdot)$,

$$\int_0^T \|p(s)\|^2 ds \leq \big(\rho - \lambda(T)\big),^2$$

что имеет место равенство

$$\pi\Phi(T)\varphi(0) + \sum_{i=1}^{n} \int_{-h_i}^{0} \pi\Phi(T - s - h_i)\, A_i \varphi(s) ds =$$

$$= \int_0^T \pi\Phi(T - s) B p(s) ds \qquad (3.2.7)$$

Пусть $\vartheta(\cdot)$ – произвольное допустимое управление убегания. Тогда соответствующее управление преследования зададим по формуле

$$u(t) = \begin{cases} p(t) + L(T - t)\vartheta(t), & 0 \leq t \leq T, \\ 0, & t > T \end{cases} \qquad (3.2.8)$$

Вначале докажем, что управление преследования $u(\cdot)$, выбранное по формуле (3.2.8), удовлетворяет ограничению (3.2.3). Действительно, учитывая 2), 3), (3.2.8) и используя неравенство Коши-Буняковского

$$\int_0^T < p(T - s), L(s)\vartheta(T - s) > ds \leq \sqrt{\int_0^T \|p(T - s)\|^2 ds} \times \sqrt{\int_0^T \|L(s)\vartheta(T - s)\|^2 ds}$$

имеем:

$$\int_0^\infty \|u(s)\|^2\,ds = \int_0^T \|u(s)\|^2\,ds + \int_T^\infty \|u(s)\|^2\,ds = \int_0^T \|u(s)\|^2\,ds =$$

$$= \int_0^T \|p(T-s) + L(s)\vartheta(T-s)\|^2\,ds =$$

$$= \int_0^T < p(T-s) + L(s)\vartheta(T-s), p(T-s) + L(s)\vartheta(T-s) > ds =$$

$$= \int_0^T \|p(T-s)\|^2\,ds + 2\int_0^T < p(T-s), L(s)\vartheta(T-s) > ds +$$

$$+ \int_0^T \|L(s)\vartheta(T-s)\|^2\,ds \le \big(\rho - \lambda(T)\big)^2 + 2\sqrt{\int_0^T \|p(T-s)\|^2 ds} \times$$

$$\times \sqrt{\int_0^T \|L(s)\vartheta(T-s)\|^2 ds} + \lambda^2(T) = \big(\rho - \lambda(T)\big)^2 + 2\big(\rho - \lambda(T)\big)\cdot\lambda(T) + \lambda^2(T) =$$

$$= \rho^2 - 2p\lambda(T) + \lambda^2(T) + 2p\lambda(T) - 2\lambda^2(T) + \lambda^2(T) = \rho^2,$$

т. е. управление преследования $u(\cdot)$ удовлетворяет ограничению (3.2.3).

Теперь докажем, что $\pi x(T) = 0$. Действительно, в силу 1), (3.2.7), (3.2.8) для решения $x(\cdot)$ задачи (3.2.4) соответствующего управлениям $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ на $[0, T]$ имеем:

$$\pi x(T) = \pi\left[\Phi(T)\varphi(0) + \sum_{i=1}^n \int_{-h_i}^0 \Phi(T-s-h_i)A_i\varphi(s)ds - \right.$$

$$\left. - \int_0^T \Phi(T-s)(Bu(s) - Cv(s)ds)\right] = \pi\Phi(t)\varphi(0) +$$

$$+ \sum_{i=1}^n \int_{-h_i}^0 \pi\Phi(T-s-h_i)\,A_i\varphi(s)ds - \int_0^T \pi\Phi(T-s)(Bu(s) - Cv(s)ds) =$$

$$= \int_0^T \pi\Phi(T-s)Bp(s)ds - \int_0^T \pi\Phi(T-s)Bu(s)ds + \int_0^T \pi\Phi(T-s)C\vartheta(s)ds =$$

$$= \int_0^T \pi\Phi(t)Bp(T-t)dt - \int_0^T \pi\Phi(t)Bu(T-t)dt + \int_0^T \pi\Phi(t)BL(t)\vartheta(T-t)dt =$$

$$= \int_0^T \pi\Phi(t)B[p(T-t) - u(T-t) + L(t)\vartheta(T-t)]dt =$$

$$= \int_0^T \pi\Phi(t)B[p(T-t) - p(T-t) - L(t)\vartheta(T-t) + L(t)\vartheta(T-t)]dt = 0,$$

т. е. $\pi x(T) = 0$. А это, означает, что $x(T) \in M$. Следовательно, в игре (3.2.1) из начального положения $\varphi(s), -h \leq s \leq 0$, в.з.п.з.в. $T = T\big(\varphi(0)\big)$. При этом, выбор управления преследования $u(\cdot)$ осуществляется по формуле (3.2.8). Теорема доказана.

§3.3. Линейные и квазилинейные дифференциальные игры преследования нейтрального типа с интегральными ограничениями

В этом параграфе доказаны теоремы, обобщающие линейные результаты работ [9, 129].

Пусть $X, Y, Z -$ гильбертовые пространства. В пространстве X рассмотрим игру, описываемую уравнением нейтрального типа

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} B_i\, \dot{x}(t-h_i) + Ax(t) - Cu(t) + Dv(t), \qquad (3.3.1)$$

и терминальным множеством M, где $t \geq 0$, $0 < h_1 < h_2 < \cdots < h_n = h$, $x(t) \in X$, $u(\cdot) \in U([0,\infty), Y) -$ управление преследования, $v(\cdot) \in U([0,\infty), Z) -$ управление убегания, операторы $B_i: X \to X$, $C: Y \to X, D: Z \to X -$ линейны и ограничены, а $A: D \to X -$ л.з.о., имеющий плотную в X область определения D, п.с.н.п. $S(t)$. Учитывая эту полугруппу, можно строить фундаментальное решение $\Phi(t)$ для которого справедливы равенства [302]

$$\dot{\Phi}(t) = \sum_{i=1}^{n} B_i\, \dot{\Phi}(t-h_i) + A\Phi(t)\,, \qquad (3.3.2)$$

$\Phi(0) = I -$ единичный оператор, $\Phi(t) = 0$ при $t < 0$.

Далее, терминальное множество M, где заканчивается игра, является замкнутым линейным подпространством пространства X. При этом на управления $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ наложены интегральные ограничения:

$$\int_0^\infty \|u(s)\|^2\, ds \le \rho^2, \int_0^\infty \|v(s)\|^2\, ds \le \sigma^2, \qquad \rho, \sigma > 0. \qquad (3.3.3)$$

В дальнейшем предполагаем, что операторы C и D такие, что для любых $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ и непрерывного начального положения $\varphi(\cdot)\colon [-h, 0] \to X$ задача Коши

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} B_i\, \dot{x}(t - h_i) + Ax(t) - Cu(t) + Dv(t), \qquad (3.3.4)$$

с начальным условием $x(s) = \varphi(s), -h \le s \le 0$ имеет решение вида (1.4.6) (определение 1.4.3).

Для дифференциальной игры (3.3.1) докажем ряд теорем о в.з.п..

Справедлива следующая

Теорема 3.3.1. *Допустим, что:*

1) существует линейный ограниченный оператор $L(t)\colon Z \to Y$, *непрерывно зависящий от* $t \ge 0$, *такой, что* $\pi\Phi(t)D = \pi\Phi(t)CL(t)$;

2) если

$$\lambda^2(t) = sup\left\{\int_0^t \|L(s)\vartheta(t-s)\|^2\, ds\colon \int_0^t \|\vartheta(s)\|^2 ds \le \sigma^2\right\},$$

то при $t \ge 0$ *справедливо* $\rho \ge \lambda(t)$;

3) начальное положение φ *и число* $T = T\big(\varphi(0)\big)$ *такие, что*

$$\pi\left[\Phi(T) - \sum_{i=1}^{n} \Phi\,(T - h_i)B_i\right]\varphi(0) + \pi\sum_{i=1}^{n}\int_{-h_i}^{0} \Phi(T - s - h_i)\, B_i\dot{\varphi}(s)ds \in$$

$$\in \left\{ \int_0^T \pi\Phi(T-s)Cp(s)ds: \int_0^T \|p(s)\|^2 ds \le \left(\rho - \lambda(T)\right)^2 \right\}.$$

Тогда из начального положения $\varphi(s),\ -h \le s \le 0$ *в.з.п.з.в.* $T = T(\varphi(0))$.

Доказательство. Для доказательства теоремы для любого допустимого измеримого управления убегания $v(\cdot)$ выбираем такое допустимое измеримое управления преследования $u(\cdot)$, что для решения $x(\cdot)$ задачи Коши (3.3.4), соответствующего управлениям $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ выполняется равенство $\pi x(T) = 0$.

В силу 3) и по определению многозначного интеграла существует такое отображение $p(\cdot)$,

$$\int_0^T \|p(s)\|^2 ds \le \left(\rho - \lambda(T)\right),^2$$

что выполняется равенство

$$\pi\left[\Phi(T) - \sum_{i=1}^{n} \Phi\,(T-h_i)B_i\right]\varphi(0) +$$

$$+\pi\sum_{i=1}^{n}\int_{-h_i}^{0} \Phi(T-s-h_i)\,B_i\dot{\varphi}(s)ds = \int_0^T \pi\Phi(T-s)Cp(s)ds \qquad (3.3.7)$$

Для любого допустимого измеримого управления убегания $\vartheta(\cdot)$ соответствующее управление преследования выбираем по формуле

$$u(t) = \begin{cases} p(t) + L(T-t)\vartheta(t), & 0 \le t \le T, \\ 0, & t > T \end{cases} \qquad (3.3.8)$$

Учитывая 1) и 2) покажем, что выбранное по формуле (3.3.8) управление преследования $u(\cdot)$ удовлетворяет ограничению (3.3.3). Действительно,

$$\int_0^\infty \|u(s)\|^2\,ds = \int_0^T \|u(s)\|^2\,ds + \int_0^\infty \|u(s)\|^2\,ds = \int_0^T \|u(s)\|^2\,ds =$$

$$= \int_0^T \|p(s) + L(T-s)\vartheta(s)\|^2\,ds = \int_0^T < p(s) + L(T-s)\vartheta(s), p(s) +$$

$$+ L(T-s)\vartheta(s) > ds = \int_0^T \|p(s)\|^2\,ds + 2\int_0^T < p(s), L(T-s)\vartheta(s) > ds +$$

$$+ \int_0^T \|L(T-s)\vartheta(s)\|^2\,ds \le \big(\rho - \lambda(T)\big)^2 + 2\sqrt{\int_0^T \|p(s)\|^2 ds} \times$$

$$\times \sqrt{\int_0^T \|L(T-s)\vartheta(s)\|^2 ds} + \lambda^2(T) = \rho^2 - 2\rho\lambda(T) + \lambda^2(T) +$$

$$+2(\rho - \lambda(T)) \cdot \lambda(T) + \lambda^2(T) = \rho^2,$$

где при доказательстве использовано неравенство Коши-Буняковского

$$\int_0^T < p(s), L(T-s)\vartheta(s) > ds \;\; \le \sqrt{\int_0^T \|p(s)\|^2 ds} \times \sqrt{\int_0^T \|L(T-s)\vartheta(s)\|^2 ds},$$

т.е. выбранное управление преследования $u(\cdot)$ удовлетворяет ограничению (3.3.3).

Теперь, учитывая 1), (3.3.7) и (3.3.8) докажем, что $\pi x(T) = 0$. Действительно, для решения $x(\cdot)$ задачи (3.3.4) имеем:

$$\pi x(T) = \pi\left[\Phi(T) - \sum_{i=1}^{n} \Phi\,(T - h_i)B_i\right]\varphi(0) +$$

$$+\pi \sum_{i=1}^{n} \int_{-h_i}^{0} \Phi(T - s - h_i)\, B_i \dot{\varphi}(s) ds - \int_0^T \pi\Phi(T-s)(Cu(s) - Dv(s)ds) =$$

$$= \int_0^T \pi\Phi(T-s)Cp(s)ds - \int_0^T \pi\Phi(T-s)Cu(s)ds + \int_0^T \pi\Phi(T-s)D\vartheta(s)ds =$$

$$= \int_0^T \pi\Phi(t)Cu(T-t)dt + \int_0^T \pi\Phi(t)CL(s)\vartheta(T-t)dt =$$

$$= \int_0^T \pi\Phi(t)C[p(T-t) - u(T-t) + L(s)\vartheta(T-t)]dt =$$

$$= \int_0^T \pi\Phi(t)C[p(T-t) - p(T-t) - L(s)\vartheta(T-t) + L(s)\vartheta(T-t)]dt = 0,$$

т.е. $\pi x(T) = 0$. А это, означает, что $x(T) \in M$. Следовательно, из начального положения $\varphi(s)$, $-h \le s \le 0$ в. з. п. з. в. $T = T(\varphi(0))$. Теорема доказана.

Справедлива следующая

Теорема 3.3.2. *Допустим, что:*

1) *неотрицательная непрерывно дифференцируемая и строго возрастающая функция $J(t)$ такая что $J(0) = 0, J(t) \ge t, t \ge 0$;*
2) *линейный и ограниченный оператор $L(t): Z \to Y$, непрерывно зависящий от $t \ge 0$ такой, что $\pi\Phi\big(J(t)\big)D = \pi\Phi(t)CL(t)$;*
3) *если функция λ(t) задается равенством*

$$\lambda^2(t) = sup\left\{\int_0^t \|L(s)(J(t) - J(s)) \cdot J'(s)\|^2\, ds: \int_0^{J(t)} \|\vartheta(s)\|^2 ds \le \sigma^2\right\},$$

то числа $\tau \ge 0$, $T = T(\varphi(0))$ такие, что $J(T) = \tau + T$ и при всех $t \ge 0$ имеет место $\alpha \ge \lambda(t)$, где

$$\alpha^2 = \rho^2 - \int_0^t \|\bar{u}(s)\|^2\, ds,$$

$\bar{u}(0)$ – некоторое допустимое управления преследования;

4) *начальное положение $\varphi(\cdot)$ такое, что*

$$\pi\left[\Phi(\tau + T) - \sum_{i=1}^{n} \Phi\,(\tau + T - h_i)B_i\right]\varphi(0) +$$

$$+\pi\sum_{i=1}^{n}\int_{-h_i}^{0}\Phi(\tau+T-s-h_i)\,B_i\dot{\varphi}(s)ds\ \in$$

$$\in\pi\int_{0}^{\tau}\Phi(\tau+T-s-h_i)C\bar{u}\,(s)ds+\Omega(T),$$

где

$$\Omega(t)=\left\{\int_{0}^{t}\pi\Phi(t-s)Cp(s)ds\colon\int_{0}^{t}\|p(s)\|^2ds\le(\alpha-\lambda(t))^2\right\}.$$

Тогда из начального положения $\varphi(s),-h\le s\le 0$, *в.з.п.з.в.* $\tau+T$.

Доказательство. Пусть $\vartheta(\cdot)-$ произвольное допустимое управление убегания. Тогда соответствующее управление преследования $u(\cdot)$ выбираем по формуле:

$$u(t)=\begin{cases}\bar{u}(t) & \text{при} \quad t\in[0,\tau),\\ p(t-\tau)+L(\tau+T-t)\cdot\vartheta\big(J(T)-J(\tau+T-t)\big)\times & \\ \qquad\times J'(\tau+T-t)\ \text{при}\ t\in[\tau,\tau+T], & \\ 0 & \text{при} \quad t>\tau+T.\end{cases}\tag{3.3.9}$$

Докажем, что данное отображение $u(\cdot)$ удовлетворяет ограничению (3.3.3). Действительно, в силу 3), 2) имеем:

$$\int_{0}^{\infty}\|u(s)\|^2ds=\int_{0}^{\tau}\|\bar{u}(s)\|^2ds+\int_{\tau}^{\tau+T}\|u(s)\|^2\,ds=\int_{0}^{\tau}\|\bar{u}(s)\|^2\,ds+$$

$$+\int_{0}^{T}\|u(\tau+T-t)\|^2\,dt=\int_{0}^{\tau}\|\bar{u}(s)\|^2ds+$$

$$+\int_{0}^{T}\|p(T-t)+L(t)\vartheta(J(T)-J(t))\cdot J'(t)\|^2dt=\int_{0}^{\tau}\|\bar{u}(s)\|^2ds+$$

$$+\int_{0}^{T}<p(T-t)+L(t)\vartheta\big(J(T)-J(t)\big)\cdot J'(t),p(T-t)+$$

$$+L(t)\vartheta\big(J(T)-J(t)\big)\cdot J'(t)>dt=\int_{0}^{\tau}\|\bar{u}(s)\|^2ds+$$

$$+\int_0^T \|p(T-t)\|^2 dt + 2\cdot\int_0^T < p(T-t), L(t)\,\vartheta(J(T) -$$

$$-J(t))J'(t) > dt + \int_0^T \left\|L(t)\vartheta\big(J(T)-J(t)\big)\cdot J'(t)\right\|^2 dt \le \int_0^\tau \|\bar{u}(s)\|^2\, ds +$$

$$+(\alpha-\lambda(T))^2 + 2\big(\alpha-\lambda(T)\big)\lambda(T) + \lambda^2(T) = \int_0^\tau \|\bar{u}(s)\|^2\, ds + \alpha^2 = \rho^2$$

т.е.

$$\int_0^\infty \|u(s)\|^2 ds \le \rho^2.$$

Теперь, учитывая 1), 2), 4), (3.3.9) докажем, что $\pi x(\tau+T) = 0$. Действительно, для решения $x(\cdot)$ задачи (3.3.4) имеем:

$$\pi x(\tau+T) = \pi\left[\Phi(\tau+T) - \sum_{i=1}^n \Phi(\tau+T-h_i)B_i\right]\varphi(0) +$$

$$+\pi\sum_{i=1}^n \int_{-h_i}^0 \Phi(\tau+T-s-h_i)B_i\,\dot{\varphi}(s)ds -$$

$$-\int_0^{\tau+T} \pi\Phi(\tau+T-s)\big(Cu(s) - D\vartheta(s)\big)\,ds =$$

$$= \pi\left[\Phi(\tau+T) - \sum_{i=1}^n \Phi(\tau+T-h_i)B_i\right]\varphi(0) +$$

$$+\pi\sum_{i=1}^n \int_{-h_i}^0 \Phi(\tau+T-s-h_i)B_i\,\dot{\varphi}(s)ds -$$

$$-\int_0^\tau \pi\Phi(\tau+T-s)C\bar{u}\,(s)ds - \int_\tau^{\tau+T} \pi\Phi(\tau+T-s)\,Cu(s)ds +$$

$$+\int_0^{\tau+T} \pi\Phi(\tau+T-s)D\vartheta(s)ds = \int_0^T \pi\Phi(T-s)Cp\,(s)ds -$$

$$-\int_\tau^{\tau+T} \pi\Phi(\tau+T-s)\,Cu(s)ds + \int_0^{\tau+T} \pi\Phi(\tau+T-s)D\vartheta(s)ds =$$

$$= \int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{T}} \pi\Phi(T-s)Cp(s)ds - \int_0^T \pi\Phi(T-t)Cu\,(t+\tau)dt +$$

$$+ \int_0^{\tau+T} \pi\Phi(t)\,D\vartheta(\tau+T-t)dt = \int_0^T \pi\Phi(T-t)Cp(t)dt -$$

$$- \int_0^T \pi\Phi(T-t)Cu\,(t+\tau)dt + \int_0^T \pi\Phi\big(J(s)\big)\,D\vartheta\big(J(T)-J(s)\big)J'(s)ds =$$

$$= \int_0^T \pi\Phi(s)Cp\,(T-s)ds - \int_0^T \pi\Phi(s)Cu\,(\tau+T-s)ds +$$

$$+ \int_0^T \pi\Phi(s)\,CL(s)\vartheta\big(J(T)-J(s)\big)J'(s)ds =$$

$$= \int_0^T \pi\Phi(s)C\big[p(T-s) - u(\tau+T-s) + L(s)\vartheta\big(J(T)-J(s)\big)J'(s)\big]ds =$$

$$= \int_0^T \pi\Phi(s)C[p(T-s) - p(T-s) - L(s)\vartheta\big(J(T)-J(s)\big)J'(s) +$$

$$+L(s)\vartheta\big(J(T)-J(s)\big)J'(s)]ds = 0$$

т.е. $x(\tau+T) \in M$. Следовательно, из начального положения $\varphi(s), -h \le s \le 0$, в.з.п.з.в. $\tau+T$. Теорема доказана.

Далее, в гильбертовом пространстве X, рассматривается з.п. для квазилинейной дифференциальной игры, описываемая уравнением нейтрального типа

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} B_i\dot{x}(t-h_i) + Ax(t) + \sum_{i=1}^{n} A_i x(t-h_i) + f(u(t), v(t), t) \quad (3.3.10)$$

и терминальным множеством M, которое является замкнутым подпространством пространства X. В игре (3.3.10) $t \ge 0$, $x(t) \in X$, $0 < h_1 < h_2 < \cdots < h_n = h$, операторы $A_i: X \to X$ и $B_i: X \to X$ линейны и ограниченны, а л.з.о. $A: D \to X$ имеющий плотную в X область определения D, п.с.н.п. $S(t)$ и при каждом i линейный оператор AB_i ограничен. Далее, Y и Z – гильбертовые

пространства, $u(\cdot) \in U([0,\infty), Y) -$ управление преследования, $\vartheta(\cdot) \in U([0,\infty), Z) -$ управление убегания, причем

$$\int_0^\infty \|u(s)\|^2 ds \le \rho^2 \text{ и } \int_0^\infty \|v(s)\|^2 ds \le \sigma^2 \tag{3.3.11}$$

Используя полугруппу $S(t)$ можно построить фундаментальное решение $\Phi(t)$, для которого справедливы равенства

$$\dot{\Phi}(t) = \sum_{i=1}^{n} B_i \dot{\Phi}(t-h_i) + A\Phi(t) + \sum_{i=1}^{n} A_i \Phi(t-h_i), \tag{3.3.12}$$

$\Phi(0) = I$ – единичный оператор, $\Phi(t) = 0$ при $t < 0$.

В дальнейшем, согласно определению 1.4.3, полагаем, что локально интегрируемое отображение $t \to f(u(t), v(t), t)$ такое, что для любого начального положения $\varphi(\cdot)$ из класса непрерывных функций, отображающих$[-h, 0]$ в X, задача Коши

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} B_i \dot{x}(t-h_i) + Ax(t) + \sum_{i=1}^{n} A_i x(t-h_i) + f(u(t), v(t), t) \\ x(s) = \varphi(s), \quad -h \le s \le 0 \end{cases} \tag{3.3.13}$$

имеет решение вида

$$x(t) = \left[\Phi(t) - \sum_{i=1}^{n} \Phi(t-h_i) B_i\right] \varphi(0) + \sum_{i=1}^{n} \int_{-h_i}^{0} \Phi(t-s-h_i)[A_i \varphi(s) +$$

$$+ B_i \dot{\varphi}(s) ds] + \int_0^t \Phi(t-s) f(u(s), v(s), s) ds. \tag{3.3.14}$$

В теоремах 3.3.3 и 3.3.4 предполагаем, что $f(u(t), v(t), t) = -Cu(t) + Dv(t)$, где $C: Y \to X$ *и* $D: Z \to X$ – линейные ограниченные операторы. Справедлива следующая

Теорема 3.3.3. *Допустим, что:*

1) *неотрицательная, непрерывно дифференцируемая и строго возрастающая функция* $J(t)$ *такая, что* $J(0) = 0$,$J(t) \geq t$ *при всех* $t \geq 0$;
2) *существует линейный ограниченный оператор* $L(t): Z \to Y$, *непрерывно зависящий от* $t \geq 0$ *такой, что* $\pi\Phi\big(J(t)\big)D = \pi\Phi(t)CL(t)$;
3) *если функция* $\lambda(t)$ *задается равенством*

$$\lambda^2(t) = sup\left\{\int_0^t \|L(s)v(J(t) - J(s)) \cdot J'(s)\|^2\, ds: \int_0^{J(t)} \|\vartheta(s)\|^2 ds \leq \sigma^2\right\},$$

то числа $\tau \geq 0, T = T(\varphi(0))$ *такие, что* $J(T) = \tau + T$ *и при* $t \geq 0$ *имеет место* $\alpha \geq \lambda(t)$, *где*

$$\alpha^2 = \rho^2 - \int_0^\tau \|\bar{u}(s)\|^2\, ds,$$

$\bar{u}(\cdot)$ – *некоторое допустимое управление преследования;*

4) *начальное положение* φ *такое, что имеет место включение*

$$\left[\pi\Phi(\tau + T) - \sum_{i=1}^n \pi\Phi\,(\tau + T - h_i)B_i\right]\varphi(0) +$$

$$+ \sum_{i=1}^n \int_{-h_i}^0 \pi\Phi(\tau + T - s - h_i)\,[A_i\varphi(s) + B_i\dot{\varphi}(s)]ds \in$$

$$\in \int_0^\tau \pi\Phi(\tau + T - s)\mathrm{C}\bar{u}\,(s)ds + \Omega(T), \qquad (3.3.15)$$

где

$$\Omega(T) = \left\{\int_0^T \pi\Phi(T - s)Cp(s)ds: \int_0^T \|p(s)\|^2 ds \leq (\alpha - \lambda(T))^2\right\}.$$

Тогда в игре (3.3.10) из начального положения $\varphi(s)$, $-h \le s \le 0$, *в.з.п.з.в.* $\tau + T$.

Доказательство. В силу (3.3.15) существует такое интегрируемое отображение $p(\cdot)$, что имеет место равенство

$$\pi\left[\Phi(\tau+T) - \sum_{i=1}^{n} \Phi(\tau+T-h_i)B_i\right]\varphi(0) +$$

$$+\sum_{i=1}^{n} \int_{-h_i}^{0} \pi\Phi(T+\tau-s-h_i)[A_i\varphi(s) + B_i\dot{\varphi}(s)]ds =$$

$$= \int_{0}^{\tau} \pi\Phi(\tau+T-s)C\bar{u}(s)ds + \int_{0}^{T} \pi\Phi(T-s)Cp(s)ds \qquad (3.3.16)$$

Пусть $\vartheta(\cdot)$ – произвольное допустимое управление убегания. Тогда соответствующее управление преследования $u(\cdot)$ выбираем по формуле (3.3.9). Как в теореме 3.3.2 доказывается, что выбранное отображение $u(\cdot)$ удовлетворяет интегральному ограничению (3.3.11).

Теперь учитывая 3), (3.3.14), (3.3.16), (3.3.9) докажем, что $\pi x(\tau+T) = 0$. Действительно, для решения $x(\cdot)$ задачи (3.3.13) имеем:

$$\pi x(\tau+T) = \left[\pi\Phi(\tau+T) - \sum_{i=1}^{n} \pi\Phi(\tau+T-h_i)B_i\right]\varphi(0) +$$

$$+\sum_{i=1}^{n} \int_{-h_i}^{0} \pi\Phi(\tau+T-s-h_i)[A_i\varphi(s) + B_i\,\dot{\varphi}(s)]ds -$$

$$-\int_{0}^{\tau+T} \pi\Phi(\tau+T-s)\big(Cu(s) - D\vartheta(s)\big)\,ds =$$

$$= \int_{0}^{\tau} \pi\Phi(\tau+T-s)C\bar{u}\,(s)ds + \int_{0}^{T} \pi\Phi(T-s)Cp\,(s)ds -$$

$$-\int_0^{\tau}\pi\Phi(\tau+T-s)C\bar{u}\,(s)ds-\int_{\tau}^{\tau+T}\pi\Phi(\tau+T-s)\,Cu(s)ds+$$

$$+\int_{\mathbf{0}}^{\tau+T}\pi\Phi(\tau+T-s)D\vartheta(s)ds=\int_0^{T}\pi\Phi(T-s)Cp\,(s)ds-$$

$$-\int_{\tau}^{\tau+T}\pi\Phi(\tau+T-s)\,Cu(s)ds+\int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{\tau+T}}\pi\Phi(\tau+T-s)D\vartheta(s)ds=$$

$$=\int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{T}}\pi\Phi(T-s)Cp(s)ds-\int_{\tau}^{\boldsymbol{\tau+T}}\pi\Phi(\tau+T-s)Cu\,(s)ds+$$

$$+\int_0^{\tau+T}\pi\Phi(t)\,D\vartheta(\tau+T-t)dt=\int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{T}}\pi\Phi(T-t)Cp(t)dt-$$

$$-\int_0^{T}\pi\Phi(T-t)Cu\,(t+\tau)dt+\int_0^{T}\pi\Phi\big(J(s)\big)\,D\vartheta\big(J(T)-J(s)\big)J'(s)ds=$$

$$=\int_0^{T}\pi\Phi(s)Cp\,(T-s)ds-\int_0^{T}\pi\Phi(s)Cu\,(\tau+T-s)ds+$$

$$+\int_0^{T}\pi\Phi(s)\,CL(s)\vartheta\big(J(T)-J(s)\big)J'(s)ds=$$

$$=\int_0^{T}\pi\Phi(s)C\big[p(T-s)-u(\tau+T-s)+L(s)\vartheta\big(J(T)-J(s)\big)J'(s)\big]ds=$$

$$=\int_0^{T}\pi\Phi(s)C[p(T-s)-p(T-s)-L(s)\vartheta\big(J(T)-J(s)\big)J'(s)+$$

$$+L(s)\vartheta\big(J(T)-J(s)\big)J'(s)]ds=0$$

т.е. $x(\tau+T)\in M$. Следовательно, из начального положения $\varphi(s),-h\le s\le 0$, в.з.п.з.в. $\tau+T$. Теорема доказана.

Следующая теорема является следствием теоремы 3.3.3, если положить $J(t)\equiv t$.

Теорема 3.3.4. *Допустим, что:*

1) *существует линейный ограниченный оператор* $L(t)\colon Z\to Y$ *непрерывно зависящий от* $t\ge 0$ *такой, что* $D=CL$;
2) *если*

$$\lambda^2(t) = sup\left\{\int_0^t \|L(s)v(t-s)\|^2 ds : \int_0^t \|v(s)\|^2 ds \le \sigma^2\right\},$$

то при $t \ge 0$ *имеет место* $\rho \ge \lambda(t)$;

3) *начальное положение* φ *и число* $T = T(\varphi)$ *такие, что*

$$\left[\pi\Phi(T) - \sum_{i=1}^{n} \pi\Phi(T-h_i)B_i\right]\varphi(0) +$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\int_{-h_i}^{0} \pi\Phi(T-s-h_i)[A_i\varphi(s) + B_i\dot{\varphi}(s)]ds \in$$

$$\in\left\{\int_0^T \pi\Phi(T-s)Cp(s)ds : \int_0^T \|p(s)\|^2 ds \le \big(\rho - \lambda(T)\big)^2\right\}.$$

Тогда в игре (3.3.10) из начального положения $\varphi(s), -h \le s \le 0$ *в.з.п.з.в.* T.

В теореме 3.3.5 предполагаем, что $f(u(t), v(t), t) = -Cu(t) + F(v(t), t)$, где $C: Y \to X -$ линейный ограниченный оператор, а $F(v(\cdot),\cdot) -$ такое локально интегрируемое отображение, что задача Коши (3.3.13) имеет решение.

Справедлива следующая

Теорема 3.3.5. *Допустим, что*

1) *существует линейный ограниченный оператор* $L(t): Z \to Y$ *непрерывно зависящий от* $t \ge 0$ *такой, что* $F = CL(t)$;

2) *если*

$$\lambda^2(t) = sup\left\{\int_0^t \|L(s)v(t-s)\|^2 ds : \int_0^t \|v(s)\|^2 ds \le \sigma^2\right\}$$

то при $t \ge 0$ *справедливо* $\rho \ge \lambda(t)$;

3) *начальное положение* φ *и число* $T = T\big(\varphi(0)\big)$ *такие, что*

$$\left[\pi\Phi(T)-\sum_{i=1}^{n}\pi\Phi(T-h_i)B_i\right]\varphi(0)$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\int_{-h_i}^{0}\pi\Phi(T-s-h_i)[A_i\varphi(s)+B_i\dot{\varphi}(s)]ds\in$$

$$\in\left\{\int_{0}^{T}\pi\Phi(T-s)Cp(s)ds:\int_{0}^{T}\|p(s)\|^2ds\le\left(\rho-\lambda(T)\right)^2\right\}.$$

Тогда из начального положения $\varphi(s), -h\le s\le 0$ *в.з.п.з.в.* $T=T(\varphi)$.

Доказательство. Для доказательства теоремы для любого допустимого измеримого управления убегания $v(\cdot)$ выбираем такое допустимое измеримое управление преследования $u(\cdot)$, что для решения $x(\cdot)$ задачи Коши (3.3.13) соответствующего управлениям $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ выполняется равенство $\pi x(T)=0$.

В силу 3) и по определению многозначного интеграла существует такое отображение $p(\cdot)$,

$$\int_{0}^{T}\|p(s)\|^2ds\le\left(\rho-\lambda(T)\right)^2$$

что выполняется равенство

$$\left[\pi\Phi(T)-\sum_{i=1}^{n}\pi\Phi\,(T-h_i)B_i\right]\varphi(0)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\int_{-h_i}^{0}\pi\Phi(T-s-h_i)\,[A_i\varphi(s)+B_i\dot{\varphi}(s)]ds=$$

$$=\int_{0}^{T}\pi\Phi(T-s)Cp(s)ds. \qquad (3.3.17)$$

Для любого допустимого измеримого управления убегания $\vartheta(\cdot)$ соответствующее управление преследования $u(\cdot)$ выбираем по формуле

$$u(t) = \begin{cases} p(t) + L(T-t)\vartheta(t), & 0 \le t \le T, \\ 0, & t > T \end{cases} \tag{3.3.18}$$

В силу 2) и 3) легко можно показать, что выбранное по формуле (3.3.18) управление преследования $u(\cdot)$ удовлетворяет интегральному ограничению (3.3.11). Теперь учитывая 1), (3.3.17) и (3.3.18) докажем, что $\pi x(T) = 0$. Действительно, для решения $x(\cdot)$ задачи (3.3.13) имеем:

$$\pi x(T) = \left[\pi\Phi(T) - \sum_{i=1}^{n} \pi\Phi\,(T-h_i)B_i\right]\varphi(0) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \int_{-h_i}^{0} \pi\Phi(T-s-h_i)\,[A_i\varphi(s) + B_i\dot{\varphi}(s)]ds -$$

$$- \int_0^T \pi\Phi(T-s)(Cu(s) - F(v(s),s)ds) =$$

$$= \int_0^T \pi\Phi(T-s)Cp(s)ds - \int_0^T \pi\Phi(T-s)Cu(s)ds + \int_0^T \pi\Phi(T-s)F(v(s),s)ds =$$

$$= \int_0^T \pi\Phi(t)Cp(T-t)dt - \int_0^T \pi\Phi(t)Cu(T-t)dt + \int_0^T \pi\Phi(t)CL(\mathrm{t})\vartheta(T-t)dt =$$

$$= \int_0^T \pi\Phi(t)C[p(T-t) - u(T-t) + L(t)\vartheta(T-t)]dt =$$

$$= \int_0^T \pi\Phi(t)C[p(T-t) - p(T-t) - L(t)\vartheta(T-t) + L(t)\vartheta(T-t)]dt = 0,$$

т.е. $\pi x(T) = 0$. А это, означает, что $x(T) \in M$. Следовательно, в игре (3.3.10) из начального положения $\varphi(s),\ -h \le s \le 0$ в.з.п.з.в. $T = T(\varphi)$. Теорема доказана.

Следующая теорема обеспечивает разрешимость з.п. для квазилинейной дифференциальной игры (3.3.10).

Теорема 3.3.6. *Допустим, что:*

1) существуют непрерывно зависящий от $t \ge 0$ *линейный ограниченный*

оператор $L(t): Z \to Y$ *и локально интегрируемое отображение* $g: Y \to X$ *такие, что при всех* $T \geq 0,\ t \in [0, T]$ *имеет место равенство*

$$\pi\Phi(T-t)g\big(u(t) - L(T-t)v(t)\big) = -\pi\Phi(T-t)f(u(t), v(t), t);$$

имеет место неравенство $\rho \geq \lambda(t), t \geq 0$, *где*

$$\lambda^2(t) = sup\left\{\int_0^t \|L(s)v(t-s)\|^2 ds : \int_0^t \|v(s)\|^2 ds \leq \sigma^2\right\};$$

2) *начальное положение* φ *и число* $T = T(\varphi)$ *такие, что*

$$\left[\pi\Phi(T) - \sum_{i=1}^{n} \pi\Phi(T-h_i)B_i\right]\varphi(0)$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \int_{-h_i}^{0} \pi\Phi(T-s-h_i)[A_i\varphi(s) + B_i\dot{\varphi}(s)\,]ds$$
$$\in \left\{\int_0^T \pi\Phi(T-s)g\big(p(s)\big)ds : \int_0^T \|p(s)\|^2 ds \leq \big(\rho - \lambda(t)\big)^2\right\}.$$

Тогда из начального положения $\varphi(s), -h \leq s \leq 0$, *в.з.п.з.в.* T.

Доказательство. В силу 3) существует такое интегрируемое отображение $p(\cdot)$,

$$\int_0^T \|p(s)\|^2 ds \leq \big(\rho - \lambda(t)\big)^2$$

что

$$\left[\pi\Phi(T)-\sum_{i=1}^{n}\pi\Phi(T-h_i)B_i\right]\varphi(0)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\int_{-h_i}^{0}\pi\Phi(T-s-h_i)[A_i\varphi(s)+B_i\dot{\varphi}(s)]ds=$$

$$=\int_{0}^{T}\pi\Phi(T-s)g\big(p(s)\big)ds. \qquad (3.3.19)$$

Допустим, что $v(\cdot)$ - произвольное допустимое управление убегания. Тогда соответствующее управление преследования $u(\cdot)$ выбираем по формуле

$$u(s)=\begin{cases}p(s)+L(T-s)v(s), & 0\le s\le T\\ 0, & s>T\end{cases} \qquad (3.3.20)$$

Понятно, что выбранное управление удовлетворяет интегральному ограничению (3.3.11). Покажем, что для решения $x(\cdot)$ задачи Коши (3.3.13), соответствующего выбранным управлениям $u(\cdot),v(\cdot)$ на $[0,T]$ имеет место $\pi x(T)=0$.

Действительно, в силу 1), (3.3.19), (3.3.20) имеем:

$$\pi x(T)=\left[\pi\Phi(T)-\sum_{i=1}^{n}\pi\Phi(T-h_i)B_i\right]\varphi(0)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\int_{-h_i}^{0}\pi\Phi(T-s-h_i)[A_i\varphi(s)+B_i\dot{\varphi}(s)]ds+\int_{0}^{T}\pi\Phi(T-s)f(u(s),v(s),s)ds=$$

$$=\int_{0}^{T}\pi\Phi(T-s)g\big(p(s)\big)ds+\int_{0}^{T}\pi\Phi(T-s)f(u(s),v(s),s)ds=$$

$$=\int_{0}^{T}\pi\Phi(T-s)g\big(u(s)-L(T-s)v(s)\big)ds+\int_{0}^{T}\pi\Phi(T-s)f(u(s),v(s),s)ds=$$

$$= -\int_0^T \pi\Phi(T-s)f(u(s),v(s),s)ds + \int_0^T \pi\Phi(T-s)f(u(s),v(s),s)ds = 0$$

т.е. $\pi x(T) = 0$, что эквивалентно тому, что $x(T) \in M$. Следовательно, в игре (3.3.10) из начального положения $\varphi(s), -h \le s \le 0$, в.з.п.з.в. T. При этом, для любого измеримого управления убегания $v(\cdot)$, соответствующее измеримое управление преследования $u(\cdot)$ выбирается по формуле (3.3.20). Из равенства (3.3.20) видно, при выборе $u(t)$ используют информацию о $\vartheta(t)$ и $\varphi(0)$. Теорема доказана.

§3.4. Примеры

Пример 3.4.1. В гильбертовом пространстве X рассмотрим игру, описываемую дифференциальным уравнениям нейтрального типа

$$\dot{x}\,(t) - \dot{x}(t-1) = x(t-1) - u(t) + \vartheta(t), \;\; t \ge 0, \qquad (3.4.1)$$
$$x(s) = x_{\;0}, -1 \le s \le 0,$$

где $t \ge 0$, $x(t) \in X$, M- замкнутие линейное подпространство пространства X, а управления $u = u(t)$ и $\vartheta = \vartheta(t)$ удовлетворяют ограничениям:

$$\int_0^\infty \left|\left|u(s)\right|\right|^2 ds \le \rho^2, \;\; \int_0^\infty \left|\left|\vartheta(s)\right|\right|^2 ds \le \delta^2, \qquad \rho > \delta$$

В силу теоремы 3.3.3. $A = 0$, $S(t) = B_1 = A_1 = C = D = I -$ единичный оператор, $J(t) = t$, $\tau = 0$, а фундаментальное решение имеет вид:

$$\Phi(t) = I + \mathcal{X}(t-1)\Phi(t-1) + \int_0^t \mathcal{X}(\delta-1)\Phi(\delta-1)d\delta, \qquad t \ge 0, \quad (3.4.2)$$

где

$$\mathcal{X}(s) = \begin{cases} 0, & s \le 0 \\ 1, & s > 0 \end{cases}$$

– характеристическая функция.

Легко видно, что когда $L(t) = I$, то выполняются условия 1) и 2) теоремы 3.3.3

Следовательно, если имеет место включение

$$[\pi\Phi(T) - \pi\Phi(T-1)]x_0 + \int_{-1}^{0} \pi\Phi(T-s-1)x_0 ds \in$$

$$\in \left\{ \int_0^T \pi\Phi(T-s)p(s)ds : \int_0^T \left|\left|p(s)\right|\right|^2 ds \le (\rho-\delta)^2 \right\},$$

то в игре (3.4.1) из начального положения $x_0, -1 \le s \le 0$ в.з.п.з.в. T.

В частности, из точки $x_0, ||x_0|| = \rho - \delta$ в.з.п.з.в. $T = 1$, если $p(s) = x_0$ и управления преследования брать по закону

$$u(t) = \begin{cases} x_0 + \vartheta(t), & 0 \le t \le 1 \\ 0 & , \quad t > 1 \end{cases}$$

Действительно, для решения $x(t)$ задачи (3.4.1), учитывая (3.4.2), имеем:

$$\pi x(1) = [\pi\Phi(1) - \pi\Phi(0)]x_0 + \int_{-1}^{0} \pi\Phi(-s)x_0 ds +$$

$$+ \int_0^1 \pi\Phi(1-s)\big(-u(s) + v(s)\big)ds =$$

$$= \int_{-1}^{0} \pi\Phi(-s)x_0 ds - \int_0^1 \pi\Phi(1-s)\big(u(s) - v(s)\big)ds =$$

$$= \int_0^1 \pi\Phi\,(\tau)x_0 d\tau - \int_0^1 \pi\Phi(1-s)x_0 ds =$$

$$= \int_0^1 \pi\Phi(1-s)x_0 ds - \int_0^1 \pi\Phi(1-s)x_0 ds = 0,$$

т.е. $x(1) \in M$.

Пример 3.4.2. Рассматривается дифференциальная игра, описываемая уравнением с частными производными нейтрального типа [302]

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[z(s,t) - \int_0^\infty e^{-2\tau} z(s+\tau, t-1) d\tau\right] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial s} z(s,t) - \bar{u}(s,t) + \bar{v}(s,t)\,, \qquad (3.4.3)$$

где $t \geq 0, s \geq 0$, а управления $\bar{u}(s,t)$ и $\bar{v}(s,t)$ удовлетворяют ограничениям

$$\int_0^\infty |\bar{u}(s,t)|^2 dt \leq \rho^2, \quad \int_0^\infty \left|\bar{\vartheta}(s,t)\right|^2 dt \leq \delta^2, \qquad \rho > \delta.$$

Положив $x(t) = z(\cdot, t) \in L_2(0,\infty)$,

$$u(t) = \bar{u}(\cdot, t), \;\; v(t) = \bar{\vartheta}(\cdot, t), \qquad (S(t)\,x)(s) = x(s+t), \;\; A = \partial/\partial s$$

и

$$B(x)(s) = \int_0^\infty e^{-2\tau} x(s+\tau) d\tau$$

перепишем игру (3.4.3) в абстрактной форме

$$\dot{x}\,(t) - Bx(t-1) = Ax(t) - u(t) + \vartheta(t) \qquad (3.4.4)$$

В силу того, что

$$(AB)x(s) = \frac{\partial}{\partial s}\left[\int_0^\infty e^{-2\tau}x(s+\tau)d\tau\right] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial s}\int_s^\infty e^{-2\tau}e^{2s}x(\tau)d\tau = -\frac{\partial}{\partial s}\int_\infty^s e^{-2\tau}e^{2s}x(\tau)d\tau =$$

$$= -\left(e^{-2s}\cdot e^{2s}x(s)\right) - \int_\infty^s e^{-2\tau}e^{2s}\cdot 2x(\tau)d\tau =$$

$$= -x(s) + 2\cdot\int_s^\infty e^{-2(\tau-s)}\ x(\tau)d\tau = -x(s) + 2\cdot\int_0^\infty e^{-2\tau}x(\tau+s)d\tau =$$

$$= -x(s) + 2(Bx)(s)$$

имеем равенство $AB = -I + 2B$ или $B = (2I - A)^{-1}$.

Следовательно, игра (3.4.4) в гильбертовом пространстве $L_2(0,\infty)$ примет вид

$$\dot{x}\,(t) - (2I - A)^{-1}x(t-1) = Ax(t) - u(t) + \vartheta(t). \qquad (3.4.5)$$

В силу [302] фундаментальное решение имеет вид

$$\Phi(t) = S(t) + \sum_{j=1}^{\infty}\chi(t-j)\frac{d^j}{dt^j}\left[\frac{(t-j)^j}{j!}S(t-j)\left[(2I-A)^{-1}\right]^j\right], \qquad (3.4.6)$$

где

$$\chi(s) = \begin{cases} 0 & s \le 0 \\ 1 & s > 0 \end{cases}$$

характеристическая функция.

Если в качестве начального положения брать $x(\tau) = x_0,\ -1 \le \tau \le 0$, а в качестве оператора $L(t)$ брать единичный оператор I, то выполняются условия 1) и 2) теоремы 3.3.4. Следовательно, если имеет место включение

$$[\pi\Phi(\mathrm{T}) - \pi\Phi(\mathrm{T}-1)(2I-A)^{-1}]x_0 \in$$

$$\in \left\{ \int_0^{\mathrm{T}} \pi\Phi(\mathrm{T}-\tau)p(\tau)d\tau : \int_0^{\mathrm{T}} \left|\left|p(\tau)\right|\right|^2 d\tau \le (\rho-\delta)^2 \right\}$$

то в игре (3.4.5) из начального положения $x_0 \in L_2(0,\infty)\backslash M$ в.з.п.з.в. T.

В частности, из точки

$$x_0, \qquad \left|\left|x_0\right|\right| = \frac{\rho-\delta}{2\sqrt{2}}$$

в.з.п.з.в $T = \frac{1}{2}$, если

$$p(\tau) = \frac{(\rho-\delta)x_0}{\sqrt{2}\left|\left|x_0\right|\right|},$$

а управления преследования брать по закону

$$u(t) = \begin{cases} \dfrac{(\rho-\delta)x_0}{\sqrt{2}\left|\left|x_0\right|\right|} + \vartheta(t), 0 \le t \le 1 \\ \qquad 0, \qquad t > 1. \end{cases}$$

Действительно, для решения $x(t)$, учитывая (3.4.6), имеем:

$$\pi x\left(\frac{1}{2}\right) = \left[\pi\Phi\left(\frac{1}{2}\right) - \pi\Phi\left(-\frac{1}{2}\right)(2I-A)^{-1}\right]x_0 +$$

$$+ \int_0^{1/2} \pi|\Phi(1/2-s)(-u(s)+v(s))ds =$$

$$= \pi\Phi(1/2)x_0 - \int_0^{1/2} \pi\Phi(1/2-s)\frac{(\rho-\delta)x_0}{\sqrt{2}||x_0||}ds =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \pi\,\Phi\left(\frac{1}{2}-s\right)\frac{(\rho-\delta)x_0}{\sqrt{2}\left|\left|x_0\right|\right|}ds - \int_0^{\frac{1}{2}} \pi\Phi\left(\frac{1}{2}-s\right)\frac{(\rho-\delta)x_0}{\sqrt{2}\left|\left|x_0\right|\right|}ds = 0.$$

ГЛАВА 4.
НЕЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИГРЫ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ И УБЕГАНИЯ

Четвертая глава посвящена нелинейным дифференциальным играм преследования и убегания.

В первом параграфе решается з.у. в нелинейной дифференциальной игре нейтрального типа, когда терминальное множество M инвариантно относительно полугруппы $S(t)$.

Во втором параграфе решается з.у. в нелинейной дифференциальной игре нейтрального типа. При этом управление убегания выбирается таким способом, что для расстояний от точки $x(t)$ до терминального множества M справедлива соответствующая оценка.

В третьем параграфе с помощью теории дифференциальных неравенств решается з.у. в нелинейной дифференциальной игре с запаздывающим аргументом в банаховом пространстве.

В четвертом параграфе, аналогично решается з.п..

В пятом параграфе исследованы примеры о разрешимости з.у., когда динамика игры описывается интегро-дифференциальным уравнением.

Изложенные в данной главе результаты опубликованы в работах [1-А, 9-А, 15-А, 17-А, 23-А, 40-А].

§4.1. Дифференциальные игры убегания с инвариантным терминальным множеством

В этом параграфе исследуется разрешимость з.у. для дифференциальной игры нейтрального типа с инвариантным терминальным множеством. Полученные результаты обобщают соответствующие результаты работ [127, 229]. Если в работе Н. Сатимова [229] дифференциальная игра рассматривалась в конечномерном пространстве, то в работе Е.М. Мухсинова и М.Н. Муродовой [127] дифференциальная игра описывается уравнением

запаздывающего типа в гильбертовом пространстве.

Пусть X, Y, Z – гильбертовые пространства. В пространстве X рассмотрим дифференциальную игру, описываемую нелинейным уравнением нейтрального типа

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(\dot{x}(t-h), x(t-h), u(t), v(t), t) \qquad (4.1.1)$$

с терминальным множеством M- замкнутое подпространство пространства X. В игре (4.1.1) $t \geq 0$, $h > 0$, $x(t) \in X$, $u(\cdot) \in U([0,\infty), Y) -$ управление преследования и $v(\cdot) \in U([0,\infty), Z) -$управление убегания, а л.з.о. $A: D \to X$, имеющую плотную в X область определения D, п.с.н.п. $S(t)$, которая имеет обратную $S^{-1}(t)$. Далее отображение

$$t \to f(\dot{x}(t-h), x(t-h), u(t), v(t), t)$$

такое, что задача Коши (4.1.1) с начальным условием $x(s) = \varphi(s),\ -h \leq s \leq 0$ из класса абсолютно непрерывных функций имеет непрерывное решение

$$x(t) = S(t)\varphi(0) + \int_0^t S(t-s)\, f\,(\dot{x}(s-h), x(s-h), u(s), v(s), s)ds \quad (4.1.2)$$

Для дифференциальной игры (4.1.1) рассматривается зу.. Пусть $\{h_i\}_{i=1}^{\infty}$ –счётный ортонормальный базис в X, $\langle x, y\rangle -$ скалярное произведение, терминальное множество M инвариантно относительно $S(t)$, т.е. $S(t)M = M$, а множество

$$W(h_i, t) = \bigcap_{u \in Y} \{\langle h_i, S^{-1}(t) f(\dot{x}(t-h), x(t-h), u, v, t)\rangle : v \in Z\}.$$

непусто. Тогда справедлива следующая

Теорема 4.1.1. *Допустим, что:*

1) *M является замкнутой линейной оболочкой множества $\{h_i, i \geq n\}$, где $n \geq 2$;*

2) суммируемая функция $\omega(t) > 0$, *число* $i \in \{1,2,\dots,n-1\}$ *и число* $\tau > 0$ *такие, что* $\pm\omega(t) \in W(h_i, t)$ *при всех* $t \in [0,\tau]$.

Тогда в игре (4.1.1) из положения $\varphi(s)$, $\varphi(0) \in X\backslash M$ *в.у.*.

Доказательство. В начале рассмотрим случай, когда терминальное множество M совпадает с замкнутой линейной оболочкой множества $\{h_i, i \geq 2\}$. В этом случае $n = 2$. Тогда в силу условия 2) существуют число $\tau > 0$, натуральное число $i = 1$ и суммируемая функция ω: $[0,\tau] \to (0,\infty)$ такие, что

$$\pm\omega(t) \in W(h_1, t) \tag{4.1.3}$$

при всех $t \in [0,\tau]$. В силу того, что $\varphi(0) \in X\backslash M$, т.е. $\varphi(0) \overline{\in}$ M имеем: $\xi_o = \langle h_1, \varphi(0)\rangle \neq 0$. А в силу того, что $\omega(t) > 0$, то

$$\int_0^t \omega(s)\, ds > 0.$$

Поэтому если $\xi_o > 0$, то

$$\xi_o + \int_0^t \omega(s)\, ds > 0,$$

а если $\xi_o < 0$, то

$$\xi_o - \int_0^t \omega(s)\, ds < 0$$

при всех $t \in [0,\tau]$.

Рассмотрим случай $\xi_o > 0$. Аналогично рассматривается случай $\xi_o < 0$. Если $\breve{u}(\cdot) \in U([0,\tau], Y)$ произвольное управление преследования, то в силу леммы 1.4.3 об измеримом селекторе у неявно заданного отображения, найдется такое управление убегания $\breve{v}(\cdot) \in U([0,\tau], Z)$, что при всех $s \in [0,\tau]$ имеет место равенство

$$\omega(t) = \langle h_1, S^{-1}(t) f(\dot{x}(t-h), x(t-h), \breve{u}(t), \breve{v}(t), t)\rangle \tag{4.1.4}$$

Для решения $x(\cdot)$ задачи (4.1.1) с начальным условием $\varphi(s)$, $-h \leq s \leq 0$, соответствующего управлениям $\breve{u}(\cdot), \breve{v}(\cdot)$ на $[0, \tau]$, положим

$$\xi(t) = \langle h_1, S^{-1}(t)x(t)\rangle.$$

В силу (4.1.4) имеем:

$$\xi'(t) = \langle h_1, -S^{-1}(t)Ax(t)\rangle + \langle h_1, S^{-1}(t)\dot{x}(t)\rangle =$$
$$= \langle h_1, -S^{-1}(t)Ax(t)\rangle + \langle h_1, S^{-1}(t)\big(Ax(t) + f(\dot{x}(t-h), x(t-h), \breve{u}(t), \breve{v}(t)\,, t)\big)\rangle$$
$$= \langle h_1, S^{-1}(t)f(\dot{x}(t-h), x(t-h), \breve{u}(t), \breve{v}(t), t)\rangle = \omega(t).$$

Следовательно, интегрируя полученное равенство, имеем:

$$\xi(t) = \xi(0) + \int_0^t \omega(s)ds = \xi_o + \int_0^t \omega(s)ds > 0.$$

Поэтому $S^{-1}(t)x(t) \overline{\in} M$.Отсюда имеем:

$$S(t)S^{-1}(t)x(t) \overline{\in} S(t)M = M,$$

т.е. $x(t) \overline{\in} M$ при $t \in [0, \tau]$.

Пусть $\tau_1 = min\{t > \tau: \xi(t) = \xi_o\}$. На отрезке $[\tau, \tau_1)$ в качестве управления убегания выбираем произвольное $v(\cdot) \in U([\tau, \tau_1), Z)$. Так как при всех $t \in [\tau, \tau_1)$ имеет место неравенство $\xi(t) > \xi_o$, то опять $x(t) \overline{\in} M$ при всех $t \in [\tau, \tau_1)$. Если $\tau_1 = \infty$, то доказательство теоремы заканчивается. Если же $\tau_1 < \infty$, то при каждом $t \in [\tau_1, \tau_1 + \tau]$ в задаче (4.1.1) полагаем $v(t) = \breve{v}(t - \tau_1)$, где $\breve{v}(\cdot) \in U([0, \tau], Z)$ определяется из соотношения (4.1.4), в котором положено $\breve{u}(s) = u(s + \tau_1), s \in [0, \tau]$.

Далее, для решения $x(\cdot)$ задачи (4.1.1) с начальным условием $x(\tau_1) = x_o$ соответствующего управлениям $u(\cdot), v(\cdot)$ на $[\tau_1, \infty)$, положим

$$\xi_1(t) = \langle h_1, S^{-1}(t - \tau_1)x(t)\rangle.$$

Отсюда

$$\xi_1'(t) = \langle h_1, S^{-1}(t-\tau_1)x(t)\rangle' = \langle h_1, (S^{-1})'(t-\tau_1)x(t) + S^{-1}(t-\tau_1)\dot{x}(t)\rangle =$$
$$= \langle h_1, -S^{-1}(t-\tau_1)Ax(t)$$
$$+ S^{-1}(t-\tau_1)\big(Ax(t) + f(\dot{x}(t-h), x(t-h), u(t), v(t), t)\big)\rangle =$$
$$= \langle h_1, S^{-1}(t-\tau_1)f(\dot{x}(t-h), x(t-h), u(t), v(t), t)\rangle = \omega(t-\tau_1),$$
$$t \in [\tau_1, \tau_1 + \tau]$$

получаем, что

$$\xi_1(t) = \xi_1(\tau_1) + \int_{\tau_1}^{t} \omega(s-\tau_1)\, ds = \xi_o + \int_{\tau_1}^{t} \omega(s-\tau_1) ds > \xi_o.$$

А это означает, что $x(t) \overline{\in} M$ при $\tau_1 \le t \le \tau_1 + \tau$. Поэтому $x(t) \overline{\in} M$ при всех $t \in [0\,, \tau_1 + \tau]$. Далее, вышеописанный способ выбора управления $v(\cdot)$ применяя на отрезках $[\tau_i + \tau, \tau_{i+1} + \tau)$, $i = 1,2,3$ ... получаем, что $x(t) \overline{\in} M$ при всех $t \in [0, \infty)$.

Пусть теперь $n > 2$. Положим $\xi_o = \langle h_k, \varphi(0)\rangle$, где $k \in \{1,2, \dots, n-1\}$. В данном случае из условия 1) еще не следует соотношение $\xi_o \ne 0$. Если $\xi_o > 0$ или $\xi_o < 0$, то доказательство аналогично случаю $n = 2$. Пусть $\xi_o = 0$. Если $u(\cdot) \in U([0, \infty), Y)$ –допустимое управление преследования, то для его сужения $\bar{u}(\cdot)$ на $[0\,, \tau]$, в силу леммы о существовании измеримого селектора, найдется такое допустимое управление убегания $\bar{v}(\cdot)$, что при $s \in [0\,, \tau]$ имеет место

$$\omega(s) = \langle h_k, S^{-1}(t)f(\dot{x}(t-h), x(t-h), \bar{u}(s), \bar{v}(s), s)\rangle$$

Для решения $x(\cdot)$ задачи (4.1.1) положим $\xi(t) = \langle h_k, S^{-1}(t)x(t)\rangle$. Отсюда,

$$\xi'(t) = \langle h_k, -S^{-1}(t)Ax(t)\rangle +$$
$$+\langle h_k, S^{-1}(t)\big(Ax(t) + f(\dot{x}(t-h), x(t-h), u(t), v(t), t)\big)\rangle =$$
$$= \langle h_k, S^{-1}(t)f(\dot{x}(t-h), x(t-h), u(t), v(t), t)\rangle = \omega(t).$$

Следовательно,

$$\xi(t) = \int_0^t \omega(s)ds > 0.$$

Поэтому, $S^{-1}(t)x(t) \overline{\in} M$. Отсюда имеем: $x(t) \overline{\in} M$ при всех $t \in [0\,,\tau]$. Если теперь $\xi(\tau) = \langle h_k, x(\tau)\rangle \neq 0$, то поступаем как для случая $n = 2$. Если $\xi(\tau) = 0$, то дальнейший выбор $v(\cdot)$ осуществляем, полагая $v(t) = \bar{v}(t - n\tau)$ и $\bar{u}(t) = u(t + n\tau)$ при $t \in [n\tau, (n+1)\tau], n = 1,2,3, \ldots$. Теорема доказана.

§4.2. Нелинейные дифференциальные игры убегания нейтрального типа

В этом параграфе доказаны достаточные условия о разрешимости з.у. для дифференциальной игры нейтрального типа в гильбертовом пространстве. Результаты обобщают результаты работ [124, 228] и могут быть использованы при решении игровых задач, динамика которых описывается дифференциальными уравнениями в подходящих гильбертовых пространствах.

Пусть X, Y, Z – гильбертовы пространства, $t \geq 0$, $h > 0$, $x(t) \in X$, $u(\cdot) \in U([0,\infty), Y) -$ управление преследования, $v(\cdot) \in U([0,\infty), Z) -$ управление убегания, а линейный оператор $A: X \to X$ ограничен.

В X исследуется игра, описываемая нелинейным уравнением нейтрального типа

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(u,v) + \mu g(\dot{x}(t-h), x(t-h), u, v) \qquad (4.2.1)$$

и терминальным множеством M, которое является замкнутым линейным подпространством пространства X. В дальнейшем $t \geq 0$, $\mu\epsilon(-\infty,\infty)$ отображение $f: Y \times Z \to X$ непрерывно и существует такое число $\kappa > 0$, что $\|f(u,v)\| \leq \kappa$, для всех $(u,v) \in Y \times Z$, отображение $g: X \times X \times Y \times Z \to X$ непрерывно и существует такое число $c > 0$, что $\|g(\dot{x}, x, u, v)\| \leq c$ для всех $(\dot{x}, x, u, v) \in X \times X \times Y \times Z$, а задача Коши (4.2.1) с начальным условием $x(s) = \varphi(s), -h \leq s \leq 0$, где $\varphi(\cdot) -$ абсолютно непрерывное отображение, имеет решение

$$x(t) = S(t)\varphi(0) +$$

$$+\int_0^t S(t-s)\,[f\,(u(s), v(s)) + \mu g(\dot{x}(s-h)x(s-h), u(s), v(s)]ds, \qquad (4.2.2)$$

где

$$S(t) = e^{tA} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i A^i}{i!}.$$

Пусть $\pi -$ оператор ортогонального проектирования из X на $\mathcal{P}$, где $\mathcal{P} -$ двумерное линейное подпространство пространства $M^{\perp}$, $\pi x = p = (p_1^1, p_1^2) \in \mathcal{P}$ в некотором базисе (l_1, l_2) пространства $\mathcal{P}$, а положительные числа, зависящие только от игры (4.2.1), будем называть константами.

Для игры (4.2.1) рассматривается з.у..

Справедлива следующая

Теорема 4.2.1. *Пусть существует двумерное подпространство* $\mathcal{P} \subset \mathrm{M}^{\perp}$ *и натуральное число* k *такие, что:*

1) *каждое множество* $\pi A^i[f(Y,Z) + \mu g(X,X,Y,Z)]_i$, $i = 0,1,\dots,k-2$, *является точкой;*
2) *множество*

$$W = \bigcap_{u \in Y} \pi A^{k-1} f(u, Z)$$

относительно $\mathcal{P}$ *содержит внутреннюю точку.*

Тогда существует число μ_1 *такое, что при всех* μ, $|\mu| \le \mu_1$, *в игре (4.2.1) из любого начального положения* $\varphi(0) \in X \backslash M$ *в.у.. При этом управление убегания можно выбрать таким образом, что для расстояний* $\xi(t)$ *и* $\eta(t)$ *от точки* $x(t)$ *до пространств* M *и* $M^{\perp}$ *имеет место оценка*

$$\xi(t) > \begin{cases} c_1\varepsilon^k(\eta(t)+1)^{-k} & \text{при } \xi(0) > \varepsilon, t \in [0,\infty), \\ c_1\xi^k(0)(h(t)+1)^{-k} & \text{при } \xi(0) \le \varepsilon, t \in [0,\theta], \\ c_1\varepsilon^k(h(t)+1)^{-k} & \text{при } \xi(0) \le \varepsilon, t \in [\theta,\infty), \end{cases} \qquad (4.2.3)$$

где $c_1,\ \mu_1,\ \theta$ *−константы.*

Доказательство. Доказательство теоремы проводим в четыре этапа. В **первом этапе**, в силу того что множество

$$W = \bigcap_{u \in Y} \pi A^{k-1} f(u, Z)$$

относительно Ꝑ содержит внутреннюю точку (условие 2)), докажем, что существуют вектор l и константа c_2 такие, что для любого вектора $p_1 = (p_1^1, p_1^2) \in$ Ꝑ, удовлетворяющий условию

$$\left|p_1^i\right| \leq c_2, \qquad i = 1, 2 \tag{4.2.4}$$

и любого управления преследования $u \in U([0,1], Y)$ существует управление убег*ания* $v_0 \in U([0,1], Z)$ такое, что имеет место равенство

$$\frac{1}{(k-1)!} \int_0^t (t-s)^{k-1} \pi A^{k-1} f\big(u(s), v_0(s)\big) d(s) = pt^k + l(t),$$

где

$$p = \frac{p_1}{k!}, \qquad l(t) = \frac{lt^k}{k!}. \tag{4.2.5}$$

Действительно, через l −обозначим произвольную внутреннюю точку W. Тогда, при достаточно малом c_2, точки $l + p_1 \in W$ при $\left|p_1^i\right| \leq c_2, i = 1,2$. Поэтому, для любого $u \in U([0,1], Y)$ имеем:

$$l + p_1 \in \pi A^{k-1} f(u(s), Z)$$

Следовательно, в силу леммы 1.4.3 (о существование измеримого селектора у неявно заданного отображения) существует $v_0(s) \in U([0,1], \mathrm{Z})$ такое, что

$$l + p_1 = \pi A^{k-1} f\big(u(s), v_0(s)\big). \tag{4.2.6}$$

Умножая полученное равенство (4.2.6) на

$$\frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!}$$

и интегрируя в пределах от 0 до t, $0 \le t \le 1$ получим (4.2.5). Отсюда следует, что для игры (4.2.1) существует такая константа c_3, что для любого вектора $p = (p^1, p^2)$, $\left|p^i\right| \le c_3$, $i = 1, 2$ и любого измеримого управления $u(s)$, $0 \le s \le 1$, существует управление $v_0(s)$, $0 \le s \le 1$, такое, что имеет место (4.2.5). При этом функция $l(t)$ не зависит от $u(s)$ и $v_0(s)$.

Далее, **во втором этапе**, докажем, что, если $x(t)$, $0 \le t \le 1$ решение задачи Коши (4.2.1), то существуют константа c_4 и функция

$$\psi(t) = \pi S(t)\varphi(0) + w_0 t + \cdots w_{k-2}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!} + l(t), \qquad 0 \le t \le 1, \tag{4.2.7}$$

такие, что имеет место равенства

$$\pi x(t) = p(t) = \psi(t) + t^k\big(p + h(t)\big), \quad 0 \le t \le 1, \tag{4.2.8}$$

где

$$w_i = \pi A^i [f(Y,Z) + \mu g(X,X,Y,Z)]_i\,, i = 0,1, \dots k-2,$$

а функция $h(t)$, $0 \le t \le 1$ удовлетворяет неравенству

$$\|h(t)\| < c_4(t + |\mu|). \tag{4.2.9}$$

Действительно, согласно (4.2.2) имеем

$$p(t) = \pi x(t) = \pi S(t)\varphi(0) +$$

$$+\int_0^t \pi S(t-s)\big[f(u(s), v_0(s)) + \mu g\big(\dot{x}(s-h), x(s-h), u(s), v_0(s)\big)\big]ds =$$

$$= \pi S(t)\varphi(0) + \int_0^t \pi S(t-s) f\big(u(s), v_0(s)\big)ds +$$

$$+\mu \int_0^t \pi S(t-s) g\big(\dot{x}(s-h), x(s-h), u(s), v_0(s)\big)ds =$$

$$= \pi S(t)\varphi(0) + \int_0^t \pi\left(I + (t-s)A + \frac{(t-s)^2 A^2}{2!} + \cdots\right) f\big(u(s), v_0(s)\big)ds +$$

$$+\mu \int_0^t \pi\left(I + (t-s)A + \frac{(t-s)^2 A^2}{2!} + \cdots\right) g(\dot{x}(s-h), x(s-h), u(s), v_0(s))ds =$$

$$= \pi S(t)\varphi(0) + w_0 t + w_1 \frac{t^2}{2!} + \cdots + w_{k-2}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!} +$$

$$+\frac{1}{(k-1)!}\int_0^t (t-s)^{k-1}\pi A^{k-1} f\big(u(s), v_0(s)\big)ds +$$

$$+\int_0^t \left[\frac{(t-s)^k}{k!}\pi A^k f\big(u(s), v_0(s)\big) + \cdots\right]ds +$$

$$+\mu \int_0^t \left[\frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!}\pi A^{k-1} g\big(\dot{x}(s-h), x(s-h), u(s), v_0(s)\big) + \cdots\right]ds =$$

$$= \pi S(t)\varphi(0) + w_0 t + w_1 \frac{t^2}{2!} + \cdots + w_{k-2}\frac{t^{k-1}}{2!} + pt^k + l(t) + h_1(t)t^k + \mu h_2(t)t^k,$$

где

$$h_1(t)t^k = \int_0^t \left[\frac{(t-s)^k}{k!}\pi A^k f\big(u(s), v_0(s)\big) + \cdots\right]ds,$$

$$\mu h_2(t)t^k = \mu \int_0^t \left[\frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!}\pi A^{k-1} g(\dot{x}(s-h), x(s-h), u(s), v_0(s) + \cdots\right]ds.$$

Следовательно, $|h_1(t)| < c_4' t, |h_2(t)| < c_4''$. Полагая $h(t) = h_1(t) + \mu h_2(t), c_4 =$

$\max(c_4', c_4'')$ получим (4.2.8) и (4.2.9).

В **третьем этапе** рассмотрим квадрат $K = \{p = (p^1, p^2): |p^i| \le c_3, i = 1,2\} \subset P \subset M^{\perp}$. Тогда существуют такие константы c_5, θ, μ_1, что для любой функции $\psi(t) = (\psi^1(t), \psi^2(t))$ можно найти квадрат $K_1 \subset K$ со стороной $2c_5$, что при всех $t \in (0, \theta]$ и μ: $|\mu| \le \mu_1$ имеет место неравенство

$$||\pi x(t)|| = ||p(t)|| > c_5 \cdot t^k \tag{4.2.10}$$

Действительно, в силу [185] для любой функции $\psi(t) = (\psi^1(t), \psi^2(t))$ существует квадрат $K_1 \subset K$ со стороной $2c_5$, что точка $\bar{p}(t) = (\bar{p}^1(t), p^2(t))$, где $\bar{p}^i(t) = \psi^i(t) - \mathrm{q}^i \mathrm{t}^k, i = 1,2,$ при всех $t \in (0,1], q = (q^1, q^2) \in K_1$ удовлетворяет неравенству

$$||\bar{p}(t)|| > c_5 \cdot t^k \tag{4.2.11}$$

Через θ и μ_1 обозначим такие положительные числа, что

$$\theta + \mu_1 = \min\left\{1, \frac{c_5}{2c_4}\right\}.$$

Тогда

$$||h(t)|| < c_4(t + |\mu|) \le c_4(\theta + \mu_1) \le c_4 \frac{c_5}{2c_4} = \frac{c_5}{2}$$

при всех $t \in (0, \theta], \mu$: $|\mu| \le \mu_1$. Если $p_2 = (p_2^1, p_2^2)$ центр квадрата K_1, то

$$\left\| -\left(p_2^i + h^i(t)\right) + p_2^i \right\| = \|h^i(t)\| \le \frac{c_5}{2},$$

т.е. точка $-\left(p_2 + h(t)\right) \in K_1$. Следовательно, учитывая (4.2.8) и (4.2.11) имеем

$$\xi(t) = \|\pi x(t)\| = \|p(t)\| = \left\|\psi(t) + t^k \left(p + h(t)\right)\right\| =$$
$$= \left\|\psi(t) - t^k \left(-(p + h(t))\right\| > c_5 \cdot t^k$$

при всех $t \in (0, \theta]$, $\mu: |\mu| < \mu_1$.

В **четвертом этапе** допустим, что константы c_5, θ, μ_1 выбраны согласно третьему этапу. В пространстве X рассмотрим поверхность $\{x: \xi = \|\pi x\| = \varepsilon = c_5 \cdot \theta^{\text{к}}\}$. Эта поверхность разбивает X на две области: внутреннюю, содержащую множество M, и внешнюю. Если первоначально, начальное положение $\varphi(0)$ из внутренней области, то, согласно третьему этапу, существуют квадрат K_1 с центром ρ_2 и управление $v_0(t), 0 \le t \le \theta$ такие, что для произвольного решения $x(t), 0 \le t \le \theta$ имеем: $\xi(t) = \|\pi x\| > c_5 \cdot t^{\text{к}}$. Следовательно, согласно [185], справедливо неравенство

$$\xi(t) > \frac{c_1 \cdot \xi(0)^k}{(1 + \eta(t))^k}, \quad 0 \le t \le \theta \tag{4.2.12}$$

и при $t = \theta$ точка $x(t)$ окажется во внешней области, ибо $\xi(\theta) \ge \|p(\theta)\| > \varepsilon = c_5 \cdot \theta^k$.

Если в начальный момент или в какой либо другой момент времени точка $x(t)$ окажется во внешней области, то управление убегания $v = v(t)$ выбирают произвольным образом до момента времени t_0, когда точка $x(t)$ окажется на поверхности $\xi = \varepsilon$. С момента времени t_0 приняв точку $x(t_0)$ за начальное положение, на период времени $t_0 \le t \le t_0 + \theta$, выбирают управление $v = v_0(t)$. Тогда для $t \in [t_0, t_0 + \theta]$ справедливо неравенство

$$\xi(t) > \frac{c_1 \cdot \xi(0)^k}{(1 + \eta(t))^k}, \quad t_0 \le t \le t_0 + \theta\,. \tag{4.2.13}$$

Из неравенств (4.2.12) и (4.2.13) следует неравенство (4.2.3). Теорема доказана.

§4.3. Нелинейные дифференциальные игры убегания с запаздывающим аргументом

В этом параграфе с помощью теории дифференциальных неравенств доказана в.у.. Доказанная теорема обобщает результаты работы [135].

Пусть $X, Y, Z -$ банаховые пространства, $h \geq 0$ −заданное действительное число, а дифференциальная игра описывается уравнением с запаздывающим аргументом

$$\dot{x}(t) = f(x_t, u(t), v(t), t) \tag{4.3.1}$$

и замкнутым терминальным множеством $M \subset X$. В игре (4.3.1), $t \geq 0$, $x(t) \in X$, $u(\cdot) \in U([0,\infty), Y) -$ управление преследования, а $v(\cdot) \in U([0,\infty), Z) -$ управление убегания. Когда $T \geq 0$, $x(\cdot) \in C([-h, T], X)$, то для любого $t \in [0, T]$ определим $x_t \in C([-h, 0], X) = C$ соотношением $x_t(\theta) = x(t + \theta)$, $-h \leq \theta \leq 0$. Если $D -$ открытое подмножество $C \times Y \times Z \times [0,\infty)$, то отображение $f: D \to X$, такое, что для любых $u(\cdot) \in U([0,\infty), Y)$, $v(\cdot) \in U([0,\infty), Z)$, $\varphi(\cdot) \in C$, $T \geq 0$, задача Коши

$$\dot{x}(t) = f(x_t, u(t), v(t), t),\ x(s) = \varphi(s), -h \leq s \leq 0, \tag{4.3.2}$$

имеет (согласно определению 1.4.4) единственное абсолютно непрерывное решение

$$x(t) = \varphi(0) + \int_0^t f(x_s, u(s), v(s), s)ds, \qquad t \geq 0,$$

$$x(s) = \varphi(s), -h \leq s \leq 0 \tag{4.3.3}$$

В силу [263], когда отображение $f: D \to X$ удовлетворяет условиям Каратеодори, то задача (4.3.2) имеет решение вида (4.3.3).

Заметим, что дифференциальная игра вида (4.3.1) охватывает, в частности, игры, описываемые дифференциальными уравнениями вида

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t), v(t)),$$

когда $h = 0$, дифференциально разностными уравнениями вида

$$\dot{x}(t) = f\big(t, x(t), x\big(t - h_1(t)\big), \dots, x\big(t - h_n(t)\big), u(t), v(t)\big),$$

когда $0 \le h_j(t) \le h,\ i = 1,2, \dots, n,$ а также интегро-дифференциальными уравнениями вида

$$\dot{x}(t) = \int_{-h}^{0} g(t, \theta, x(t + \theta), u(\theta), v(\theta))\, d\theta$$

Определение 4.3.1. *Минимальным решением задачи Коши*

$$\begin{cases} \xi'(t) = \lambda(\xi(t), t), \\ \xi(0) = \xi_0, \end{cases} \tag{4.3.4}$$

где, скалярная функция $(\xi, t) \to \lambda(\xi, t)$ *непрерывна по* $\xi \in (-\infty, \infty)$ *и измерима по* $t \in [0, \infty)$, *называется такое ее решение* $\xi = \underline{\xi}(\cdot)$, *что если* $\xi = \xi(t) -$ *любое решение задачи (4.3.4), то* $\underline{\xi}(t) \le \xi(t)$ *для всех* t, *принадлежащих их общему интервалу существования.*

Предположение 4.3.1. *Допустим, что:*

1) $X,\ Z -$ *сепарабельные банаховые пространства;*
2) *отображение* $f: D \to X$ *удовлетворяет условию Каратеодори;*
3) *терминальное множество имеет вид* $M = \{x \in X: V(x) \le 0\}$, где *отображение* $V: X \to (-\infty, \infty)$ *локально удовлетворяет условию Липшица;*
4) *минимальное решение* $\underline{\xi}(\cdot)$ *задачи Коши (4.3.4) с начальным условием* $\xi(0) = V\big(\varphi(0)\big) > 0$ *определено на* $[0, \infty)$ *и* $\underline{\xi}(t) > 0$ *при всех* $t \ge 0$.

Отметим, что в предположении 4.3.1 в качестве отображения $V(\cdot)$ можно

брать $V(x) = \rho(x, M) -$ расстояние от точки $x \in X$ до множества M потому, что

$$|\rho(x, M) - \rho(y, M)| \leq \|x - y\|,$$

для любых $x, y \in X$, т. е. функция $\rho(\cdot, M)$ удовлетворяет условию Липшица.

Следующая лемма 4.3.1 вытекает из работы [327].

Лемма 4.3.1. *Пусть* $\underline{\xi}(\cdot)$ *– минимальное решение задачи 4.3.4 с начальным условием* $\xi(0) = V\big(\varphi(0)\big) > 0$ *и абсолютно непрерывное на* $[0, T]$ *отображение* $t \to V(x(t))$ *такое, что* $V\big(\varphi(0)\big) \geq \underline{\xi}(0)$ *и почти всюду* $V'\big(x(t)\big) \geq \lambda\big(V\big(x(t)\big), t\big)$. *Тогда имеет место* $V\big(x(t)\big) \geq \underline{\xi}(t)$.

Если $V: X \to (-\infty, \infty)$, то положим

$$V^{+\prime}(x; z) = \overline{\lim_{h \to 0+}} [V(x + hz) - V(x)] \cdot h^{-1}$$

Теорема 4.3.1. *Допустим, что выполнены предположения 4.3.1 и:*

1) *множество* $\mathbb{Z}(x, u, t) = \big\{v \in Z: V^{+\prime}\big(x; f(x_t, u, v, t)\big) \geq \lambda(V(x), t)\big\} -$ *замкнуто, а* $(x, u, t) \to \mathbb{Z}(x, u, t)$ *измеримо;*
2) *множество* $\Omega = \{\varphi(0): \varphi \in C$ *и* $V\big(\varphi(0)\big) > 0\}$ *непусто;*
3) *существуют число* $\varepsilon > 0$ *и абсолютно непрерывное отображение* $x(\cdot): [0, \infty] \to X$ *такие, что* $x(0) = \varphi(0)$ *и*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in \bigcap\limits_{u \in Y} f(x_t, u, \mathbb{Z}(x(t), u, t), t), \\ \dot{x}(t) \in \bigcap\limits_{u \in Y} f(x_t, u, Z, t), \end{cases} \tag{4.3.5}$$

где

$$T_\varepsilon = \big\{t \geq 0: 0 < V\big(x(t)\big) < \varepsilon\big\}$$

и первое включение имеет место при почти всех $t \in T_\varepsilon$, *а второе включение*

имеет место при почти всех $t \in [0,\infty)\backslash T_\varepsilon$.

Тогда из каждой точки множества Ω *в.у.*.

Доказательство. Если $\varphi(0) \in \Omega, \varphi \in C$ и $V\big(\varphi(0)\big) > 0$, то в силу (4.3.5) для любого $u(\cdot) \in U([0,\infty), Y)$ существует абсолютно непрерывное отображение $x(\cdot)$ такое, что $x(0) = \varphi(0), x_0(s) = \varphi(s), -h \le s \le 0$ и при почти всех t имеет место:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in f(x_t, u(t), \mathbb{Z}(x(t), u(t), t), t), & t \in T_\varepsilon \\ \dot{x}(t) \in f(x_t, u(t), Z, t), & t \in [0,\infty)\backslash T_\varepsilon. \end{cases} \tag{4.3.6}$$

Из леммы 1.4.1 следует, что отображение $V\big(x(\cdot)\big)$ абсолютно непрерывно. Следовательно, из определения множества $\mathbb{Z}(x,u,t)$ и из (4.3.6) следует, что при $T \in [0,\infty)$ для почти всех $t \in [0,T] \cap T_\varepsilon$ верны соотношения

$$\frac{d}{dt}V\big(x(t)\big) = V^{+\prime}\big(x(t), \dot{x}(t)\big) \ge \lambda\big(V(x(t),t)\big) \tag{4.3.7}$$

где равенство написано на основании [209].

Из первого условия теоремы отображение $t \to \mathbb{Z}(x,u,t)$ измеримо и замкнутозначно. Поэтому, в силу леммы 1.4.3 о существовании измеримого селектора, для любого $u(\cdot) \in U([0,\infty), Y)$ существует отображение $v(\cdot) \in U([0,\infty), Z)$ такое, что $v(t) \in \mathbb{Z}(x(t), u(t), t)$ для почти всех $t \in T_\varepsilon$ и $\dot{x}(t) = f(x_t, u(t), v(t), t)$ для почти всех $t \in [0,T]$. Следовательно, $x(\cdot)$ есть единственное решение задачи (4.3.2) и удовлетворяющее (4.3.7) почти всюду на $[0,T] \cap T_\varepsilon$. Как известно [71], открытое множество T_ε представимо в виде объединения конечного или счетного числа попарно непересекающихся интервалов I_j, то есть

$$T_\varepsilon = \bigcup_{j \in N} I_j.$$

В силу леммы 4.3.1 из (4.3.7) следует, что $V\big(x(t)\big) \geq \varepsilon$ при всех $t \in [0,T]\backslash T_\varepsilon$ и $V\big(x(t)\big) \geq \underline{\xi}_j(t) > 0$ при всех $t \in [0,T] \cap I_j, j \in N$, где $\underline{\xi}_j(\cdot)$ нижнее решение задачи (4.3.4), в которой $t_0 = t_j$ и $x_0 = x\big(t_j\big)$, где t_j начало интервала I_j. В силу произвольности $T \in (0,\infty)$, получаем, что $V\big(x(t)\big) > 0$ при всех $t \geq 0$, а это означает, что $x(t) \overline{\in} M$ при всех $t \geq 0$. Теорема доказана.

Заметим, что о достаточных условиях существования решений дифференциального включения можно найти, например, в работе [240].

§4.4. Нелинейные дифференциальные игры преследования с запаздывающим аргументом

В этом параграфе, используя методы теории дифференциальных неравенств в банаховом пространстве, доказана разрешимость з.п.. Доказанная теорема обобщает соответствующий результат из работы [135].

Пусть $X,\ Y,\ Z -$ банаховые пространства, $h \geq 0 -$ заданное действительное число, а дифференциальная игра описывается уравнением с запаздывающим аргументом

$$\dot{x}(t) = f(x_t, u(t), v(t), t) \tag{4.4.1}$$

и замкнутым терминальным множеством $M \subset X$, где заканчивается игра.

В дифференциальной игре (4.4.1), $t \geq 0,\ x(t) \in X,\ u(\cdot) \in U([0,\infty), Y) -$ управление преследования, $v(\cdot) \in U([0,\infty), Z) -$ управление убегания. Если $T \geq 0,\quad x(\cdot) \in C([-h,T]\,, X)$, то для любого $t \in [0,T]$ определим $x_t \in C([-h,0]\,, X) = C$ соотношением $x_t(\theta) = x(t+\theta),\ -h \leq \theta \leq 0$. Если $D -$ открытое подмножество $C \times Y \times Z \times [0,\infty)$, то предполагаем, что отображение $f\colon D \to X$ такое, что для любых $u(\cdot) \in U([0,\infty), Y),\ v(\cdot) \in U([0,\infty), Z),\ \varphi(\cdot) \in C,\ T \geq 0$, задача Коши

$$\dot{x}(t) = f(x_t, u(t), v(t), t), \quad x(s) \ = \varphi(s)\,, -h \leq s \leq 0 \tag{4.4.2}$$

имеет единственное абсолютно непрерывное решение $x(\cdot) = x(\varphi, f)(\cdot)$. При этом это решение имеет вид

$$x(t) = \varphi(0) + \int_0^t f(x_s, u(s), v(s), s)ds, \qquad t \geq 0,$$

$$x(s) = \varphi(s), -h \leq s \leq 0\,. \tag{4.4.3}$$

Определение 4.4.1. *Максимальным решением задачи Коши*

$$\begin{cases} \xi'(t) = \lambda(\xi(t), t), \\ \xi(0) = \xi_0, \end{cases} \tag{4.4.4}$$

где, скалярная функция $(\xi, t) \to \lambda(\xi, t)$ *непрерывна по* $\xi \in (-\infty, \infty)$ *и измерима по* $t \in [0, \infty)$, *называется такое ее решение* $\xi = \bar{\xi}(\cdot)$, *что если* $\xi = \xi(t)$ *– любое решение задачи (4.4.4), то* $\bar{\xi}(t) \geq \xi(t)$ *для всех* t, *принадлежащих их общему интервалу существования.*

Предположение 4.4.1. *Пусть:*

1) X, Y *– сепарабельные банаховые пространства;*
2) *отображение* $f: D \to X$ *удовлетворяет условию Каратеодори;*
3) *терминальное множество имеет вид* $M = \{x \in X: V(x) \leq 0\}$, где *отображение* $V: X \to (-\infty, \infty)$ *локально удовлетворяет условию Липшица;*
4) *для максимального решения* $\bar{\xi}(\cdot)$ *задачи Коши (4.4.4) с начальным условием* $\xi(0) = V\big(\varphi(0)\big) > 0$ *существует число* $T = T(\varphi) = min\,\{t \geq 0\colon\ \bar{\xi}(t) = 0\}$.

Следующая лемма 4.4.1 вытекает из работы [327].

Лемма 4.4.1. *Пусть* $\bar{\xi}(\cdot)$ *– максимальное решение задачи 4.4.4 с начальным условием* $\xi(0) = V\big(\varphi(0)\big) > 0$, *а абсолютно непрерывное на* $[0, T]$ *отображение* $t \to V(x(t))$ *такое, что* $V\big(x(0)\big) \leq \bar{\xi}(0)$ *и почти всюду*

$V'\big(x(t)\big) \le \lambda\big(V\big(x(t)\big), t\big)$. *Тогда, при всех* $t \in [0, T]$, *имеет место неравенство* $V\big(x(t)\big) \le \bar{\xi}(t)$.

Далее, если $V: X \to (-\infty, \infty)$, то положим

$$V_+{}'(x; z) = \underline{lim}_{h \to 0+} [V(x + hz) - V(x)] \cdot h^{-1}$$

Справедлива следующая

Теорема 4.4.1. *Допустим, что выполнено предположение 4.4.1 и:*

1) *множество* $\Upsilon(x, v, t) = \{u \in Y: V'_+(x; f(x_t, u, v, t)) \le \lambda(V(x), t)\} -$ *замкнуто, а отображение* $(x, v, t) \to \Upsilon(x, v, t)$ *измеримо;*
2) *множество* $\Omega = \{\varphi(0): \varphi \in C$ *и* $V\big(\varphi(0)\big) > 0\}$ *непусто;*
3) *существует абсолютно непрерывное отображение* $x(\cdot): [0, T] \to X$ *такое, что* $x(0) = \varphi(0)$ *и при почти всех* $t \in [0, T]$ *имеет место дифференциальное включение*

$$\dot{x}(t) \epsilon \bigcap_{v \in Z} f(x_t, \Upsilon(x(t), v, t), v, t) \qquad (4.4.5)$$

Тогда из каждой точки множества Ω *в.з.п.г.в.*$T = T(\varphi)$.

Доказательство. Для доказательства теоремы для любого $v(\cdot) \in U([0, \infty), Z)$выбираем такое управление преследования $u(\cdot) \in U([0, \infty), Y)$, что значение соответствующего решения задачи (4.4.2) попадает в терминальное множество M не позднее момента T. Для $\varphi(0) \in \Omega$, $\varphi \in C$ и $V\big(\varphi(0)\big) > 0$ при произвольном $v(\cdot) \in U([0, \infty), Z)$ в силу условия 3) этой теоремы существует абсолютное непрерывное отображение $x(\cdot)$ такое, что $x(0) = \varphi(0)$, $x_0(s) = \varphi(s)$, $-h \le s \le 0$ и при почти всех $t \in [0, T]$ имеет место включение

$$\dot{x}(t) \in f(x_t, \Upsilon(x(t), v(t), t), v(t), t) \qquad (4.4.6)$$

Из определения множества $\Upsilon(x,v,t)$, (4.4.6) и леммы об абсолютной непрерывности $V\big(x(t)\big)$ следует, что

$$\frac{d}{dt}V\big(x(t)\big) = V'_{+}\big(x(t),\dot{x}(t)\big) \le \lambda\big(V(x(t),t)\big) \qquad (4.4.7)$$

В силу леммы 1.4.3 о существовании измеримого селектора, существует $u(\cdot) \in U([0,\infty),Y)$ такое, что $u(t) \in \Upsilon(x(t),v(t),t)$ и $\dot{x}(t) = f(x_t,u(t),v(t),t)$ при почти всех $t \in [0,T]$. Следовательно, $x(\cdot)$ является единственным решением задачи (4.4.2), соответствующим управлениям $u(\cdot),v(\cdot)$ и удовлетворяющим соотношению (4.4.7). Из соотношения (4.4.7), на основании леммы 4.4.1 получаем, что $V\big(x(t)\big) \le \bar{\xi}(t)$ при $t \in [0,T]$, где $\bar{\xi}(\cdot)-$ максимальное решение задачи (4.4.4). В силу предположения 4.4.1 существует число $T = T(\varphi)$ такое, что $V\big(x(T)\big) \le \bar{\xi}\,(T) = 0$ и $\bar{\xi}(0) = V\big(\varphi(0)\big) > 0$. Поэтому в силу абсолютной непрерывности (т.е. непрерывности) отображения $t \to V(x(t))$ существует числоT_1, $0 \le T_1 \le T$ такое, что $V\big(x(T_1)\big) = 0$.А это, в силу того, что $M = \{x \in X: V(x) \le 0\}$, приведет к включению $x(T_1) \in M$, т.е из каждой точки множества Ω в.з.п.г.в. $T = T(\varphi)$ для которого $\bar{\xi}(T) = 0$. Теорема доказана.

§4.5. Примеры

Пример 4.5.1. Рассматривается дифференциальная игра, описываемая интегро-дифференциальным уравнением нейтрального типа с ядром $K(s,\tau) = s$,

$$\frac{\partial}{\partial t}z(t,s) - k\frac{\partial}{\partial t}z(t-1,s) = \int_{-\pi}^{\pi} sz(t-1,\tau)d\tau - \bar{u}(t,s) + \bar{v}(t,s), \qquad (4.5.1)$$

где $t \ge 0$, $s \in [-\pi,\pi]$, при каждом t функции $z(t,\cdot)$, $\frac{\partial}{\partial t}\,z(t,\cdot)$ принадлежат

пространству $L_2[-\pi,\pi]$ с начальным положением $z(\mu,\cdot)=x_0, -1\le\mu\le 0.$ На управления игроков $\bar{u}(t,s)$ и $\bar{v}(t,s)$ наложены следующие ограничения

$$u(t,\cdot)\epsilon Y=\left\{y\epsilon L_2[-\pi,\pi]:\int_{-\pi}^{\pi}|y(s)|^2ds\le\beta^2\right\},$$

$$v(t,\cdot)\epsilon Z=\left\{z\epsilon L_2[-\pi,\pi]:\int_{-\pi}^{\pi}|z(s)|^2ds\le\gamma^2\right\},\ \ \gamma>\beta>0.$$

В силу [71] линейный оператор

$$B: y(\cdot)\to\int_{-\pi}^{\pi}s\cdot y(\tau)d\tau$$

действует непрерывно из $L_2[-\pi,\pi]$ в $L_2[-\pi,\pi]$. Положив $X=L_2[-\pi,\pi],\ \ x(t)=z(t,\cdot),\ u(t)=\bar{u}(t,\cdot),\ \ v(t)=\bar{v}(t,\cdot)$ перепишем игру (4.5.1) в абстрактной форме

$$\dot{x}(t)-k\dot{x}\,(t-1)=Bx(t-1)-u(t)+v(t), \qquad (4.5.2)$$

с начальным положением $x(\mu)=x_0, -1\le\mu\le 0.$

В качестве терминального множества M берем замкнутую линейную оболочку системы элементов $\{h_j\}_{i=2}^{\infty}$, где $\{h_j\}_{i=1}^{\infty}$ – счетный ортонормальный базис пространства $L_2[-\pi,\pi]$, причем

$$h_1(s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\qquad h_{2n}(s)=\frac{cosns}{\sqrt{\pi}},\qquad h_{2n+1}(s)=\frac{sinns}{\sqrt{\pi}},\ \ n=1,2,\ldots$$

В данном примере $h=1$ и оператор $A=0$ порождает полугруппу $S(t)=I$ – единичный оператор, ясно, что множество M инварианто относительно I и множество

$$W(h_1,t)=\bigcap_{u\epsilon У}\{<h_1,S^{-1}(t)f(\dot{x}(t-1),x(t-1),(u,v,t)>:v\epsilon Z\}=$$

$$= \bigcap_{u \epsilon У} \{< h_1, k\dot{x}(t-1) + Bx(t-1) - u + v > v \in Z\} =$$

$$=< h_1, k\dot{x}(t-1) + Bx(t-1) > +< h_1, Z > \underline{*} < h_1, Y >.$$

Далее, $< h_1, k\dot{x}(t-1) + Bx(t-1) >= a(t) -$ суммируемая функция.

Множество

$$< h_1, У >= \left\{ p \in R: p = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot y(s)ds; y \epsilon Y \right\} = [-\beta, \beta]$$

в силу того, что

$$|p| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} |y(s)|ds \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} ds} \cdot \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |y(s)|^2 ds} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{2\pi} \cdot \beta = \beta$$

и Y выпукло.

Аналогично, $< h_1, Z > = < -\gamma, \gamma >$. Следовательно, $< h_1, Z > \underline{*} < h_1, Y > = [-\gamma, \gamma] \underline{*} [-\beta, \beta] = [-\gamma + \beta, \gamma - \beta]$; $W(h_1, t) = [-\gamma + \beta + a(t), \gamma - \beta + a(t)]$.

В силу теоремы 4.1.1, если $\gamma > \beta$ и число $\tau > 0$ такое, что для суммируемой функции $a(t)$ при всех $t \in [0, \tau]$ выполняется неравенство $|a(t)| < \gamma - \beta$, то в игре (4.5.1) из любого начального положения $x_0 \in X \backslash M$ в.у..При этом управление убегания $v(t)$ выбирается по формуле

$$\int_{-\pi}^{\pi} \bar{v}(t,s)d = \begin{cases} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{u}(t,s)ds + \sqrt{2\pi} \cdot \big(\gamma - \beta + a(t)\big), & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} x_0(s)ds > 0, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \bar{u}(t,s)ds - \sqrt{2\pi} \cdot \big(\gamma - \beta - a(t)\big), & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} x_0(s)ds < 0 \end{cases} \quad (4.5.3)$$

Пример 4.5.2. Рассмотрим разрешимость задачи убегания для одной дифференциальной игры, описываемую интегро-дифференциальным

уравнением нейтрального типа

$$\frac{\partial}{\partial t}z(t,s) - k\frac{\partial}{\partial t}z(t-1,s) = \int_{-\pi}^{\pi} s \cdot z(t,\tau)d\tau - \bar{u}(t,s) + \bar{v}(t,s) \quad (4.5.4)$$

с начальным положением $z(\mu,\cdot) = x_0, -1 \le \mu \le 0$, где $t \ge 0, s \in [-\pi,\pi]$, при каждом t функции $z(t,\cdot)$; $\frac{\partial}{\partial t}z(t,\cdot)$ принадлежат пространству $L_2[-\pi,\pi]$. На управления игроков $\bar{u}(t,s)$ и $\bar{\vartheta}(t,s)$ наложены следующие ограничения

$$\bar{u}(t,\cdot) \in У = \left\{y \in L_2[-\pi,\pi]: \int_{-\pi}^{\pi} |y(s)|^2 ds \le \beta^2\right\},$$

$$\bar{\vartheta}(t,\cdot) \in Z = \left\{z \in L_2[-\pi,\pi]: \int_{-\pi}^{\pi} |z(s)|^2 ds \le \gamma^2\right\}, \qquad \gamma > \beta > 0$$

В силу [71] линейный оператор

$$A: y(\cdot) \to \int_{-\pi}^{\pi} s \cdot y(\tau)d\tau$$

действует непрерывно из $L_2[-\pi,\pi]$ в $L_2[-\pi,\pi]$.

Положив $X = L_2[-\pi,\pi]$, $x(t) = z(t,\cdot)$, $u(t) = \bar{u}(t,\cdot), v(t) = \bar{v}(t,\cdot)$ перепишем игру (4.5.4) в абстрактной форме

$$\dot{x}(t) - k\dot{x}(t-1) = Ax(t) - u(t) + v(t) \qquad (4.5.5)$$

с начальным положением $x(\mu) = x_0$, $-1 < \mu \le 0$.

В качестве терминального множества M берем замкнутую линейную оболочку системы элементов $\{h_j\}_{i=2}^{\infty}$, где $\{h_j\}_{i=1}^{\infty}$ – счетный ортонормальный базис пространство $L_2[-\pi,\pi]$, причем

$$h_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad h_{2n}(s) = \frac{cosns}{\sqrt{\pi}}, h_{2n+1}(s) = \frac{sinns}{\sqrt{\pi}}, n = 1,2, \ldots$$

В данном примере $h = 1$, линейный ограниченный оператор A порождает полугруппу $S(t) = e^{tA}$, а множество M инвариантно относительно оператора $S(t)$. В силу того, что ядро $K_2(s,\tau)$ оператора A^2 имеет вид:

$$K_2(s,\tau) = \int_{-\pi}^{\pi} K(s,\xi)K(\xi,\tau)d\xi = \int_{-\pi}^{\pi} s \cdot \xi d\xi = s \cdot \left(\frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{2}\right) = 0,$$

то оператор $e^{tA} = I + tA$, а $S^{-1}(t) = e^{-tA} = I - tA$. Поэтому,

$$W(h_1,t) = \bigcap_{u\epsilon У}\{< h_1, S^{-1}(t)f(\dot{x}(t-1), x(t-1), u, \vartheta, t) >: v\epsilon Z\} =$$

$$= \bigcap_{u\epsilon У}\{< h_1, (I - tA)(k\dot{x}(t-1) - u + \vartheta) >: v\epsilon Z\} =$$

$$=< h_1, (I - tA)k\dot{x}(t-1) > + \bigcap_{u\epsilon У}\{< h_1, (I - tA)(-u + v) >: v\epsilon Z\} =$$

$$=< h_1, (I - tA)k\dot{x}(t-1) > + \bigcap_{u\epsilon У}\{< h_1, Z > -< h_1, u >\} =$$

$$=< h_1, (I - tA)k\dot{x}(t-1) > +< h_1, Z > \underline{*} < h_1, Y > =$$

$$=< h_1, (I - tA)k\dot{x}(t-1) > +[-\gamma, \gamma] \underline{*} [-\beta, \beta] =$$

$$= a(t) + [-\gamma + \beta, \gamma - \beta] = [-\gamma + \beta + a(t), \gamma - \beta + a(t)],$$

где

$a(t) =< h_1, \ (I - tA)k\dot{x}(t-1) >$ – суммируемая функция.

В силу теоремы 4.1.1, если $\gamma > \beta$ и существует число $\tau > 0$ такое, что для суммируемой функции $a(t)$ при всех $t \in [0,\tau]$ выполняется неравенство $|a(t)| < \gamma - \beta$, то в игре (4.5.4) из любого начального положения $x_0 \in X \backslash M$ в.у.. При этом управление убегания $v(t)$ выбирается по формуле (4.5.3).

ГЛАВА 5.
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИГРЫ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Последние годы интенсивно исследуются дифференциальные игры, динамика которых описывается дифференциальными уравнениями дробного порядка. Это объясняется, во-первых, тем, что многие физико-химические процессы в условиях конфликта или неопределенности сводятся к дифференциальным играм дробного порядка [70, 251]. Во-вторых, в теории дифференциальных уравнений дробного порядка получены глубокие результаты [67, 70, 251, 303, 354]. Следуя идеям Л.С. Понтрягина в работах М.С. Никольского [148, 155] и А.Я. Азимова [8, 9] решается з.п., когда динамика игры описывается обыкновенным линейным дифференциальным уравнением, а на управление игроков наложены интегральные ограничения. В работах [13, 14, 110, 111, 112, 273, 275] решается з.п., когда игра описывается конечномерным дифференциальным уравнением дробного порядка. Данная глава посвящена бесконечномерным играм дробного порядка с геометрическими или с интегральными ограничениями.

В первом параграфе решается з.п. в квазилинейной дифференциальной игре порядка $\alpha,\ \ m-1<\alpha<m,\ m=1,2,\ldots,$ когда на управление игроков наложены интегральные ограничения.

Во втором параграфе решается з.п., когда игра описывается дифференциальным уравнением порядка $\alpha, 1 \leq \alpha < 2$.

В третьем параграфе решается з.п. для квазилинейной дифференциальной игры дробного порядка с геометрическими ограничениями.

В четвертом параграфе решается з.п. для одной дифференциальной игры, когда динамика игры описывается квазилинейным интегро-дифференциальным уравнением дробного порядка с геометрическими ограничениями на управление игроков.

В пятом параграфе решается з.п. для дифференциальной игры, когда на управление игроков наложены интегральные ограничения, а динамика игры

описывается интегро-дифференциальным уравнением дробного порядка.

В шестом параграфе решается з.п. для квазилинейной дифференциальной игры в банаховом пространстве, когда динамика игры описывается дифференциальным уравнением с несколькими дробными производными Герасимова–Капуто.

В седьмом параграфе исследованы примеры о разрешимости з.п., когда динамика игры описывается линейным дифференциальным уравнением дробного порядка.

Изложенные в данной главе результаты опубликованы в работах [1-А, 6-А, 7-А, 11-А, 14-А, 21-А, 24-А, 25-А, 30-А, 32-А, 33-А, 34-А].

§5.1. Квазилинейные дифференциальные игры дробного порядка с интегральными ограничениями

В теории дифференциальных игр дробного порядка, когда игра задается в конечномерном пространстве и на управление игроков наложены геометрические ограничения, получены следующие результаты [13, 14, 110, 111, 112, 273, 275]. А когда на управление игроков наложены интегральные ограничения, соответствующие результаты отсутствуют. Поэтому, целью данного параграфа, является распространение теории Л.С. Понтрягина на игры, описываемые уравнениями дробного порядка, когда на управление игроков наложены интегральные ограничения. Для нахождения множества начальных положений, из которых разрешима з.п. в смысле Л.С. Понтрягина, в работе используется обобщенная функция Миттаг-Леффлера, представление решений уравнений дробного порядка и аналог прямого метода Никольского-Азимова.

В гильбертовом пространстве X рассмотрим квазилинейную дифференциальную игру дробного порядка α, $m-1<\alpha<m,\ m=1,2,\ldots$,

$$D^{\alpha}x(t)=Ax(t)+f(u(t),v(t),t), \tag{5.1.1}$$

где $x(t)\in X,\ t\geq 0,\ A-$ линейный ограниченный оператор, Y и $Z-$

гильбертовые пространства, отображение $f(\cdot,\cdot,\cdot): Y \times Z \times [0,\infty) \to X$ удовлетворяет условиям Каратеодори, $u(\cdot) \in U([0,\infty),Y) -$ управление преследования, $v(\cdot) \in U([0,\infty),\ Z) -$ управление убегания, которые удовлетворяют интегральным ограничениям

$$\int_0^\infty \|u(s)\|^2\, ds \le \rho^2, \int_0^\infty \|v(s)\|^2\, ds \le \sigma^2, \qquad (5.1.2)$$

где

$\rho, \sigma > 0,\ D^\alpha -$ дробная производная Капуто порядка α от функции $x(t)$. Для игры (5.1.1) начальные условия задаются равенствами

$$\left.\frac{d^i}{dt^i} x(t)\right|_{t=0+} = x_i^0, i = 0,1,\dots,m-1, \qquad (5.1.3)$$

а терминальное множество, где заканчивается игра, задается линейным подпространством $M \subset X$. Далее полагаем, что локально интегрируемое отображение $t \to f(u(t), v(t), t)$ такое, что для любых допустимых управлений $u(\cdot), v(\cdot)$ задача (5.1.1) с начальными условиями (5.1.3) имеет решение [273].

$$x(t) = \sum_{i=0}^{m-1} t^i E_{1/\alpha}(At^\alpha; i+1) x_i^0 +$$

$$+ \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(A(t-s)^\alpha; \alpha)\, f(u(s), v(s), s) ds \qquad (5.1.4)$$

где

$$E_{1/\alpha}(At^\alpha; \beta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At^\alpha)^k}{\Gamma(k\alpha + \beta)}$$

- обобщенная функция Миттаг–Леффлера.

Пусть $M^\perp -$ ортогональное дополнение к M в X, $\pi -$ оператор

ортогонального проектирования из X на $M^{\perp}$.

Для дифференциальной игры (5.1.1) с начальным положением $x^0 = (x_0^0, x_1^0, \dots, x_{m-1}^0)$ рассмотрим разрешимость з.п..

Справедлива следующая

Теорема 5.1.1. *Допустим, что:*

1) $f(u(t), v(t), t) = -Cu(t) + Dv(t)$, *где* $C: Y \to X$ *и* $D: Z \to X$ *–линейные и ограниченные операторы*;
2) *существует линейный ограниченный оператор* $L(s): Z \to Y$ *непрерывно зависящий от* $s \geq 0$, *что* $\pi(t-s)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(A(t-s))^{\alpha}; \alpha) CL(t-s) = \pi(t-s)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(A(t-s)^{\alpha}; \alpha) D$;
3) *если*

$$\lambda^2(t) = sup\left\{ \int_0^t \|L(s)v(t-s)\|^2 ds : \int_0^t \|v(s)\|^2 ds \leq \sigma^2 \right\},$$

то при $t \geq 0$ *имеет место* $\rho \geq \lambda(t)$;

4) *начальное положение* x^0 *и число* $T = T(x^0)$ *такие, что имеет место*

$$\pi \sum_{i=0}^{m-1} T^i E_{1/\alpha}(AT^{\alpha}; i+1) x_i^0 \in$$

$$\in \left\{ \int_0^T \pi(T-s)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(A(T-s)^{\alpha}; \alpha) Cp(s) ds : \int_0^T \|p(s)\|^2 ds \leq \left(\rho - \lambda(T)\right)^2 \right\}.$$

Тогда в игре (5.1.1) *из начального положения* x^0 *в.з.п.з.в.* T.

Доказательство. Для доказательства теоремы для любого допустимого измеримого управления убегания $v(\cdot)$ выбираем такое допустимое измеримое управление преследования $u(\cdot)$, что для решения $x(\cdot)$ задачи (5.1.1) с начальным условием (5.1.3) соответствующего управлениям $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ выполняется равенство $\pi x(T) = 0$. В силу 4) существует такое интегрируемое

отображение $p(\cdot)$, что имеет место равенство

$$\pi \sum_{i=0}^{m-1} T^i E_{1/\alpha}(AT^\alpha; i+1)x_i^0 = \int_0^T \pi(T-s)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(A(T-s)^\alpha; \alpha)Cp(s)ds. \quad (5.1.5)$$

Допустим, что $v(\cdot)$ – произвольное допустимое измеримое управление убегания. Тогда соответствующее управление преследования $u(\cdot)$ выбираем по формуле

$$u(t) = \begin{cases} p(t) + L(T-t)\vartheta(t), & 0 \le t \le T, \\ 0, & t > T \end{cases} \quad (5.1.6)$$

В начале покажем, что выбранное по формуле (5.1.6) управление преследования $u(\cdot)$ удовлетворяет интегральному ограничению (5.1.2). Действительно,

$$\int_0^\infty \|u(s)\|^2\, ds = \int_0^T \|u(s)\|^2\, ds + \int_T^\infty \|u(s)\|^2\, ds =$$
$$= \int_0^T \|u(s)\|^2\, ds = \int_0^T \|p(s) + L(T-s)\vartheta(s)\|^2\, ds. \quad (5.1.7)$$

Учитывая, равенство

$$\|p(s) + L(T-s)\vartheta(s)\|^2 = < p(s) + L(T-s)\vartheta(s), p(s) + \ + L(T-s)\vartheta(s) >$$

и неравенство Коши–Буняковского

$$\int_0^T < p(s), L(T-s)\vartheta(s) > ds \le \sqrt{\int_0^T \|p(s)\|^2 ds} \cdot \sqrt{\int_0^T \|L(T-s)\vartheta(s)\|^2 ds}$$

в силу 3), 4) и (5.1.7) имеем:

$$\int_0^T \|p(s) + L(T-s)\vartheta(s)\|^2\, ds =$$

$$= \int_0^T < p(s) + L(T-s)\vartheta(s), p(s) + \ L(T-s)\vartheta(s) > ds =$$

$$= \int_0^T \|p(s)\|^2\, ds + 2\int_0^T < p(s), L(T-s)\vartheta(s) > ds +$$

$$+ \int_0^T \|L(T-s)\vartheta(s)\|^2\, ds \le \left(\rho - \lambda(T)\right)^2 + 2\sqrt{\int_0^T \|p(s)\|^2 ds} \times$$

$$\times \sqrt{\int_0^T \|L(T-s)\vartheta(s)\|^2 ds} + \lambda^2(T) = \rho^2 - 2\rho\lambda(T) + \lambda^2(T) +$$

$$+2(\rho - \lambda(T)) \cdot \lambda(T) + \lambda^2(T) = \rho^2,$$

т.е. выбранное управление преследования $u(\cdot)$ удовлетворяет интегральному ограничению (5.1.2).

Теперь покажем, что для решения $x(\cdot)$ задачи (5.1.1) с начальным условием (5.1.3) имеет место равенство: $\pi x(T) = 0$. Действительно, в силу 1), (5.1.4), (5.1.5) имеем:

$$\pi x(T) = \ \pi \sum_{i=0}^{m-1} T^i\, E_{1/\alpha}(AT^\alpha; i+1) x_i^0 +$$

$$+ \int_0^T \pi(T-s)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(A(T-s)^\alpha; \alpha)\, f(u(s), v(s), s) ds =$$

$$= \int_0^T \pi(T-s)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(A(T-s)^\alpha; \alpha) Cp(s) ds +$$

$$+ \int_0^T \pi(T-s)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(A(T-s)^\alpha; \alpha)\, (-Cu(s) + Dv(s))\, ds. \qquad (5.1.8)$$

Далее, учитывая 2), (5.1.6), (5.1.8) и равенство

$$p(s) = u(s) - L(T-s)\vartheta(s), \qquad 0 \le s \le T,$$

получаем:

$$\pi x(T) = \int_0^T \pi(T-s)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(A(T-s)^\alpha;\alpha) C\big(u(s) - L(T-s)\vartheta(s)\big)ds +$$

$$+\int_0^T \pi(T-s)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(A(T-s)^\alpha;\alpha)\,\big(-Cu(s) + Dv(s)\big)ds =$$

$$= \int_0^T \pi(T-s)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(A(T-s)^\alpha;\alpha)\, Cu(s)ds -$$

$$-\int_0^T \pi(T-s)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(A(T-s)^\alpha;\alpha) C\, L(T-s)\vartheta(s)ds +$$

$$+\int_0^T \pi(T-s)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(A(T-s)^\alpha;\alpha)\,\big(-Cu(s) + Dv(s)\big)ds =$$

$$= \int_0^T \pi(T-s)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(A(T-s)^\alpha;\alpha)\, Cu(s)ds -$$

$$-\int_0^T \pi(T-s)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(A(T-s)^\alpha;\alpha)\, D\vartheta(s)ds -$$

$$-\int_0^T \pi(T-s)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(A(T-s)^\alpha;\alpha) Cu(s)ds +$$

$$+\int_0^T \pi(T-s)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(A(T-s)^\alpha;\alpha) Dv(s)\, ds = 0$$

т. е. $\pi x(T) = 0$. Поэтому, в игре (5.1.1) из начального положения x^0 в.з.п.з.в. T.

Теорема 5.1.1 доказана.

Следующая теорема является обобщением теоремы 5.1.1.

Теорема 5.1.2. *Допустим, что:*

1) *существуют непрерывно зависящий от* $t \geq 0$ *линейный оператор* $L(t): Z \to Y$ *и локально интегрируемое отображение* $g: Y \to X$ *такие, что при всех* $T \geq 0, t \in [0, T]$ *имеет место равенство*

$$\pi(T-s)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(A(T-s)^{\alpha}; \alpha) g\big(u(s) - L(T-s)v(s)\big) =$$
$$= -\pi(T-s)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(A(T-s)^{\alpha}; \alpha) f(u(s), v(s), s);$$

2) $\rho \geq \lambda(t),\ t \geq 0,$

   где

$$\lambda^2(t) = sup\left\{\int_0^t \|L(s)v(t-s)\|^2 ds : \int_0^t \|v(s)\|^2 ds \leq \sigma^2\right\};$$

3) *начальное положение* x^0 *и число* $T = T(x^0)$ *такие, что имеет место*

$$\pi \sum_{i=0}^{m-1} T^i\, E_{1/\alpha}(AT^{\alpha}; i+1) x_i^0 \in$$
$$\in \left\{\int_0^T \pi(T-s)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(A(T-s)^{\alpha}; \alpha) g\big(p(s)\big) ds : \int_0^T \|p(s)\|^2 ds \leq \big(\rho - \lambda(T)\big)^2\right\}.$$

Тогда в игре (5.1.1) из начального положения x^0 *в.з.п.з.в.* T.

Доказательство. В силу 3) существует такое интегрируемое отображение $p(\cdot)$, что имеет место равенство

$$\pi \sum_{i=0}^{m-1} T^i E_{1/\alpha}(AT^\alpha; i+1) x_i^0 =$$

$$= \int_0^T \pi (T-s)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(A(T-s)^\alpha; \alpha) g\big(p(s)\big) ds. \qquad (5.1.9)$$

Допустим, что $v(\cdot)$ – произвольное допустимое измеримое управление убегания. Тогда соответствующее управление преследования $u(\cdot)$ выбираем по формуле (5.1.6). В силу теоремы 5.1.1 выбранное управление удовлетворяет интегральному ограничению (5.1.2). Поэтому достаточно показать, что для решения $x(\cdot)$ задачи (5.1.1) с начальным условием (5.1.3) и соответствующего выбранным управлениям $u(\cdot), v(\cdot)$ на $[0, T]$ имеет место $\pi x(T) = 0$. Действительно, в силу 1), 2), (5.1.4), (5.1.6), (5.1.9) имеем:

$$\pi x(T) = \pi \sum_{i=0}^{m-1} T^i E_{1/\alpha}(AT^\alpha; i+1) x_i^0 +$$

$$+ \int_0^T \pi (T-s)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(A(T-s)^\alpha; \alpha)\, f(u(s), v(s), s) ds =$$

$$= \int_0^T \pi (T-s)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(A(T-s)^\alpha; \alpha) g\big(p(s)\big) ds +$$

$$+ \int_0^T \pi (T-s)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(A(T-s)^\alpha; \alpha)\, f(u(s), v(s), s) ds =$$

$$= \int_0^T \pi (T-s)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(A(T-s)^\alpha; \alpha) g\big(u(s) - L(T-s)\vartheta(s)\big) ds +$$

$$+ \int_0^T \pi (T-s)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(A(T-s)^\alpha; \alpha)\, f(u(s), v(s), s) ds =$$

$$= -\int_0^T \pi(T-s)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(A(T-s)^\alpha;\alpha)\, f(u(s),v(s),s)ds +$$

$$+\int_0^T \pi(T-s)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(A(T-s)^\alpha;\alpha)\, f(u(s),v(s),s)ds = 0$$

т.е. $\pi x(T) = 0$, что эквивалентно тому, что $x(T) \in M$. Следовательно, в дифференциальной игре (5.1.1) из начального положения $x^0 = (x_0^0, x_1^0, \dots, x_{m-1}^0)$ в.з.п.з.в. T. Теорема 5.1.2 доказана.

Замечание 5.1.1. Положив $f(u,v,t) = -Cu + Dv$ и $g\big(p(s)\big) = Cp(s)$ получаем, что теорема 5.1.2 является обобщением теоремы 5.1.1.

§5.2. Задача преследования для одной дифференциальной игры дробного порядка с интегральными ограничениями в гильбертовом пространстве

В этом параграфе рассматривается разрешимость з.п. в смысле Л.С. Понтрягина для дифференциальной игры в гильбертовом пространстве, когда игра описывается уравнением дробного порядка с л.з.о., а на управление игроков наложены интегральные ограничения. В работе, используя конструкцию типа первого прямого метода Понтрягина, описано множество начальных точек, из которых в.з.п..

В гильбертовом пространстве X рассмотрим дифференциальную игру, описываемую дифференциальным уравнением дробного порядка

$$D^\alpha x(t) = Ax(t) + f\big(t, u(t), v(t)\big) \tag{5.2.1}$$

и терминальным множеством M, которое является замкнутым подпространством пространства X.

В (5.2.1) $t \geq 0$, $x(t) \in X$, $D^\alpha x(t) -$ дробная производная Капуто порядка $\alpha, 1 \leq \alpha < 2$, а л.з.о. $A: D \to X$, имеющий плотную в X область определения D, п.с.н.п. $S_\alpha(t)$. Далее, Y и $Z -$ гильбертовы пространства, $u(\cdot) \in U([0,\infty), Y)$ -

управление преследования, $v(\cdot) \in U([0,\infty), Z)$ −управление убегания, причем на эти управления наложены следующие интегральные ограничения

$$\int_0^\infty \|u(s)\|^2 ds \le \rho^2, \qquad \int_0^\infty \|v(s)\|^2 ds \le \sigma^2 \tag{5.2.2}$$

Дадим следующее

Определение 5.2.1 [354]. *Л.з.о.* $A: D \to X$ *называется оператором типа* (N, θ, α, μ), *если существуют* $0 < \theta < \pi/2, N > 0$ *и* $\mu \in R$ *такие, что у оператора* A *существует* $\alpha -$ *резолвента* $R(\lambda^\alpha, A) = (\lambda^\alpha I - A)^{-1}$ *вне сектора* $\mu + S_\theta = \{\mu + \lambda^\alpha : \lambda \in C, |Arg(-\lambda^\alpha)| < \theta\}$ *и имеет место следующая оценка*

$$\|(\lambda^\alpha I - A)^{-1}\| \le \frac{N}{|\lambda^\alpha - \mu|}, \qquad \lambda^\alpha \overline{\in} \mu + S_\theta.$$

Как отмечается в работе [354], если A является оператором типа (N, θ, α, μ), то он порождает $\alpha -$ резольвентный оператор

$$S_\alpha(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_c e^{\lambda t} R(\lambda^\alpha, A) d\lambda,$$

где $c -$ контур, для которого $\lambda \in c$ и $\lambda^\alpha \overline{\in} \mu + S_\theta$.

В силу [354] и согласно определению 1.4.6, если л.з.о. A является оператором типа (N, θ, α, μ), а отображение $t \to f(u(t), v(t), t)$ локально интегрируемо, то решением задачи Коши (5.2.1) с начальным условием

$$x(0) = x_0, \qquad x'(0) = x_1 \tag{5.2.3}$$

и соответствующим управлениям $u(t)$ и $v(t)$, будем называть отображение вида

$$x(t) = K_\alpha(t)x_1 + L_\alpha(t)x_0 + \int_0^t S_\alpha(t-s)f(u(s), v(s), s)ds\,, \qquad (5.2.4)$$

где

$$K_\alpha(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_c e^{\lambda t}\,\lambda^{\alpha-2}R(\lambda^\alpha, A)d\lambda, \qquad L_\alpha(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_c e^{\lambda t}\,\lambda^{\alpha-1}R(\lambda^\alpha, A)d\lambda,$$

и интеграл понимается в смысле Бохнера.

Для дифференциальной игры (5.2.1) исследуем з.п. в смысле Л.С. Понтрягина.

В теоремах 5.2.1 и 5.2.2 предполагаем, что $f(u(t), v(t), t) = -Cu(t) + Dv(t)$, где $C: Y \to X$ и $D: Z \to X -$ линейные ограниченные операторы.

Справедлива следующая

Теорема 5.2.1. *Допустим, что:*

1) *существует линейный ограниченный оператор* $L(t): Z \to Y$ *непрерывно зависящий от* $t \geq 0$ *такой, что* $D = CL$;
2) *если*

$$\lambda^2(t) = sup\left\{\int_0^t \|L(s)v(t-s)\|^2 ds : \int_0^t \|v(s)\|^2 ds \leq \sigma^2\right\},$$

то при $t \geq 0$ *имеет место* $\rho \geq \lambda(t)$;

3) *начальная точка* (x_0, x_1) *и число* T *такие, что имеет место*

$$\pi K_\alpha(T)x_1 + \pi L_\alpha(T)x_0$$
$$\in \left\{\int_0^T \pi S_\alpha(T-s)Cp(s)ds : \int_0^T \|p(s)\|^2 ds \leq \left(\rho - \lambda(T)\right)^2\right\} \qquad (5.2.5)$$

Тогда в игре (5.2.1) из начальной точки (x_0, x_1) *в.з.п.з.в.* T.

Доказательство. Для доказательства для любого допустимого измеримого управления убегания $v(\cdot)$ выбираем такое допустимое измеримое управление преследования $u(\cdot)$,что для решения $x(\cdot)$ задачи Коши (5.2.1), (5.2.3), соответствующее управлениям $u(\cdot)$, $v(\cdot)$, выполняется равенство $\pi x(T) = 0$. В силу (5.2.5) и согласно определению интеграла от многозначного отображения [301] существует такое интегрируемое отображение $p(\cdot)$, что имеет место равенство

$$\pi K_\alpha(T)x_1 + \pi L_\alpha(T)x_0 = \int_0^T \pi S_\alpha(T-s)Cp(s)ds \tag{5.2.6}$$

Пусть $v(\cdot) -$ произвольное допустимое управление убегания. Тогда соответствующее управление преследования $u(\cdot)$ выбираем по формуле:

$$u(t) = \begin{cases} p(t) + L(T-t)v(t), & 0 \le t \le T, \\ 0, & t > T \end{cases} \tag{5.2.7}$$

Сперва покажем, что управление преследования $u(\cdot)$, выбранное по формуле (5.2.7) удовлетворяет интегральному ограничению (5.2.2). Действительно, учитывая 2), 3), (5.2.7) и используя неравенство Коши–Буняковского

$$\int_0^T < p(T-s), L(s)v(T-s) > ds$$
$$\le \sqrt{\int_0^T \|p(T-s)\|^2 ds} \times \sqrt{\int_0^T \|L(s)v(T-s)\|^2 ds}$$

имеем:

$$\int_0^\infty \|u(s)\|^2\,ds = \int_0^T \|u(s)\|^2\,ds + \int_T^\infty \|u(s)\|^2\,ds = \int_0^T \|u(s)\|^2\,ds =$$

$$= -\int_T^0 \|u(T-t)\|^2\,dt = \int_0^T \|u(T-s)\|^2\,ds = \int_0^T \|p(T-s) + L(s)v(T-s)\|^2\,ds =$$

$$= \int_0^T < p(T-s) + L(s)v(T-s), p(T-s) + L(s)v(T-s) > ds =$$

$$= \int_0^T \|p(T-s)\|^2\,ds + 2\int_0^T < p(T-s), L(s)v(T-s) > ds +$$

$$+ \int_0^T \|L(s)v(T-s)\|^2\,ds \le \big(\rho - \lambda(T)\big)^2 + 2\sqrt{\int_0^T \|p(T-s)\|^2 ds} \times$$

$$\times \sqrt{\int_0^T \|L(s)v(T-s)\|^2 ds} + \lambda^2(T) = \big(\rho - \lambda(T)\big)^2 + 2\big(\rho - \lambda(T)\big)\cdot\lambda(T) + \lambda^2(T) =$$

$$= \rho^2 - 2p\lambda(T) + \lambda^2(T) + 2\rho\lambda(T) - 2\lambda^2(T) + \lambda^2(T) = \rho^2,$$

т.е. управление преследования $u(\cdot)$ удовлетворяет ограничению (5.2.2).

Теперь докажем, что $\pi x(T) = 0$. Действительно, в силу 1), (5.2.6), (5.2.7) для решения $x(\cdot)$ задачи (5.2.1), (5.2.3) соответствующего управлениям $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ на $[0, T]$ имеем:

$$\pi x(T) = \pi K_\alpha(T)x_1 + \pi L_\alpha(T)x_0 - \int_0^T \pi S_\alpha(T-s)(Cu(s) - Dv(s)ds) =$$

$$= \int_0^T \pi S_\alpha(T-s)Cp(s)ds - \int_0^T \pi S_\alpha(T-s)Cu(s)ds + \int_0^T \pi S_\alpha(T-s)Dv(s)ds =$$

$$= \int_0^T \pi S_\alpha(t)Cp(T-t)dt - \int_0^T \pi S_\alpha(t)Cu(T-t)dt + \int_0^T \pi S_\alpha(t)CL(t)v(T-t)dt =$$

$$= \int_0^T \pi S_\alpha(t)C[p(T-t) - u(T-t) + L(t)v(T-t)]dt =$$

$$= \int_0^T \pi S_\alpha(t)C[p(T-t) - p(T-t) - L(t)v(T-t) + L(t)v(T-t)]dt = 0,$$

т.е. $\pi x(T) = 0$. А это, означает, что $x(T) \in M$. Следовательно, в игре (5.2.1) из начальной точки (x_0, x_1), в.з.п.з.в. T. При этом, выбор управления преследования $u(\cdot)$ осуществляется по формуле (5.2.7). Теорема доказана.

Справедлива следующая

Теорема 5.2.2. *Допустим, что:*

1) *неотрицательная, строго возрастающая и непрерывно дифференцируемая функция* $J(t)$, $t \geq 0$ *такая, что* $J(0) = 0$ *и* $J(t) \geq t$;
2) *линейный ограниченный оператор* $L(t): Z \to Y$ *непрерывно зависящий от* $t \geq 0$ *такой, что имеет место равенство*

$$\pi S(J(t))D = \pi S(t)CL(t)\ ;$$

3) *если функция* $\lambda(t)$ *задается равенством*

$$\lambda^2(t) = sup\left\{\int_0^t \|L(s)v(J(t) - J(s)) \cdot J'(s)\|^2\, ds: \int_0^{J(t)} \|v(s)\|^2 ds \leq \sigma^2\right\}$$

то числа $\tau \geq 0$ *и* T *такие, что* $J(T) = \tau + T$ *и при* $t \geq 0$ *имеет место* $\alpha \geq \lambda(t)$, *где*

$$\alpha^2 = \rho^2 - \int_0^\tau \|\bar{u}(s)\|^2\, ds,$$

$\bar{u}(\cdot) -$ *некоторое допустимое управления преследования;*

4) *начальная точка* (x_0, x_1) *и число* T *такие, что имеет место включение*

$$\pi K_\alpha(\tau + T)x_1 + \pi L_\alpha(\tau + T)x_0 \in \int_0^\tau \pi S_\alpha(\tau + T - s)C\bar{u}\,(s)ds + \Omega(T), \quad (5.2.8)$$

где

$$\Omega(T) = \left\{\int_0^T \pi S_\alpha(T - s)Cp(s)ds: \int_0^T \|p(s)\|^2 ds \leq (\alpha - \lambda(T))^2\right\}.$$

Тогда в игре (5.2.1), из начальной точки (x_0, x_1), *в.з.п.з.в.* $\tau + T$.

Доказательство. Согласно (5.2.8) существует такое интегрируемое отображение $p(\cdot)$, что имеет место равенство

$$\pi K_\alpha(\tau + T)x_1 + \pi L_\alpha(\tau + T)x_0 =$$
$$= \int_0^\tau \pi S_\alpha(\tau + T - s)C\bar{u}(s)ds + \int_0^T \pi S_\alpha(T - s)Cp(s)ds. \qquad (5.2.9)$$

Если $v(\cdot) -$ произвольное допустимое управление убегания, то соответствующее управление преследования $u(\cdot)$ выбираем по формуле:

$$u(t) = \begin{cases} \bar{u}(t) & \text{при} \quad t \in [0, \tau), \\ p(t - \tau) + L(\tau + T - t)v\big(J(T) - J(\tau + T - t)\big) \cdot \\ \cdot J'(\tau + T - t) \ \text{при} \ t \in [\tau, \tau + T], \\ 0 & \text{при} \quad t > \tau + T. \end{cases} \qquad (5.2.10)$$

В начале покажем, что отображение $u(\cdot)$ удовлетворяет ограничению (5.2.2). Действительно, в силу 3), (5.2.10) и используя неравенство Коши–Буняковского имеем:

$$\int_0^\infty \|u(s)\|^2 ds = \int_0^\tau \|\bar{u}(s)\|^2 ds + \int_\tau^{\tau+T} \|u(s)\|^2\, ds + \int_{\tau+T}^\infty \|u(s)\|^2\, ds =$$
$$= \int_0^\tau \|\bar{u}(s)\|^2\, ds + \int_0^T \|u(\tau + T - t)\|^2\, dt = \int_0^\tau \|\bar{u}(s)\|^2 ds +$$
$$+ \int_0^T \|p(T - t) + L(t)v(J(T) - J(t)) \cdot J'(t)\|^2 dt = \int_0^\tau \|\bar{u}(s)\|^2 ds +$$
$$+ \int_0^T < p(T - t) + L(t)v\big(J(T) - J(t)\big) \cdot J'(t), p(T - t) +$$
$$+ L(t)v\big(J(T) - J(t)\big) \cdot J'(t) > dt = \int_0^\tau \|\bar{u}(s)\|^2 ds + \int_0^T \|p(T - t)\|^2 dt +$$

$$+2\cdot\int_0^T < p(T-t), L(t)\, v\big(J(T)-J(t)\big)J'(t) > dt +$$

$$+\int_0^T \left\|L(t)S_\alpha\big(J(T)-J(t)\big)\cdot J'(t)\right\|^2 dt \le \int_0^\tau \|\bar{u}(s)\|^2\, ds +$$

$$+(\alpha-\lambda(T))^2 + 2\big(\alpha-\lambda(T)\big)\lambda(T) + \lambda^2(T) = \int_0^\tau \|\bar{u}(s)\|^2\, ds + \alpha^2 = \rho^2$$

т.е.

$$\int_0^\infty \|u(s)\|^2 ds \le \rho^2.$$

Теперь, учитывая 1), 2), (5.2.4), (5.2.9), (5.2.10) докажем, что $\pi x(\tau+T) = 0$. Действительно, для решения $x(\cdot)$ задачи (5.2.1), (5.2.3) имеем:

$$\pi x(\tau+T) = \pi K_\alpha(\tau+T)x_1 + \pi L_\alpha(\tau+T)x_0 -$$

$$-\int_0^{\tau+T} \pi S_\alpha(\tau+T-s)\big(Cu(s)-Dv(s)\big)ds =$$

$$= \int_0^\tau \pi S_\alpha(\tau+T-s)C\bar{u}\,(s)ds + \int_0^T \pi S_\alpha(T-s)Cp\,(s)ds -$$

$$-\int_0^\tau \pi S_\alpha(\tau+T-s)C\bar{u}\,(s)ds - \int_\tau^{\tau+T} \pi S_\alpha(\tau+T-s)\,Cu(s)ds +$$

$$+\int_{\mathbf{0}}^{\tau+T} \pi S_\alpha(\tau+T-s)Dv(s)ds = \int_0^T \pi S_\alpha(T-s)Cp\,(s)ds -$$

$$-\int_\tau^{\tau+T} \pi S_\alpha(\tau+T-s)\,Cu(s)ds + \int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{\tau+T}} \pi S_\alpha(\tau+T-s)Dv(s)ds =$$

$$= \int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{T}} \pi S_\alpha(T-s)Cp(s)ds - \int_\tau^{\boldsymbol{\tau+T}} \pi S_\alpha(\tau+T-s)Cu\,(s)ds +$$

$$+\int_0^{\tau+T} \pi S_\alpha(t)\,Dv(\tau+T-t)dt = \int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{T}} \pi S_\alpha(T-t)Cp(t)dt -$$

$$-\int_0^T \pi S_\alpha(T-t)Cu\,(t+\tau)dt + \int_0^T \pi S_\alpha\big(J(s)\big)\,Dv\big(J(T)-J(s)\big)J'(s)ds =$$

$$= \int_0^T \pi S_\alpha(s) Cp\,(T-s)ds - \int_0^T \pi S_\alpha(s) Cu\,(\tau+T-s)ds +$$

$$+ \int_0^T \pi S_\alpha(s)\, CL(s) v\big(J(T)-J(s)\big)J'(s)ds =$$

$$= \int_0^T \pi S_\alpha(s) C\big[p(T-s) - u(\tau+T-s) + L(s)v\big(J(T)-J(s)\big)J'(s)\big]ds =$$

$$= \int_0^T \pi S_\alpha(s) C[p(T-s) - p(T-s) - L(s)v\big(J(T)-J(s)\big)J'(s) +$$

$$+L(s)v\big(J(T)-J(s)\big)J'(s)]ds = 0$$

т.е. $x(\tau+T) \in M$. Следовательно, из начальной точки (x_0, x_1) в.з.п.з.в. $\tau + T$. Теорема 5.2.2 доказана.

Замечание 5.2.1. Теорема 5.2.1 является частным случаем теоремы 5.2.2, ибо при $J(t) \equiv t$ из теоремы 5.2.2 следует теорема 5.2.1.

В теореме 5.2.3 предполагаем, что $f(u(t), v(t), t) = -Cu(t) + F(v(t), t)$, где $C: Y \to X$ – линейный ограниченный оператор, а $F(v(\cdot),\cdot)$ – такое локально интегрируемое отображение , что для любых допустимых отображений $u(\cdot), v(\cdot)$ и начальной точки задача Коши (5.2.1), (5.2.3) имеет решение вида (5.2.4).

Как и теорема 5.2.1 доказывается следующая

Теорема 5.2.3. *Допустим, что:*

1) *существует линейный ограниченный оператор* $L(t): Z \to Y$ *непрерывно зависящий от* $t \geq 0$ *такой, что* $\pi S_\alpha(t)F = \pi S_\alpha(t)CL(t)$;
2) *если*

$$\lambda^2(t) = sup\left\{\int_0^t \|L(s)v(t-s)\|^2 ds : \int_0^t \|v(s)\|^2 ds \leq \sigma^2\right\}$$

то при $t \geq 0$ *имеет место* $\rho \geq \lambda(t)$;

3) *начальная точка* (x_0, x_1) *и число* T *такие, что имеет место*

$$\pi K_\alpha(T)x_1 + \pi L_\alpha(T)x_0 \in$$
$$\in \left\{ \int_0^T \pi S_\alpha(T-s)Cp(s)ds : \int_0^T \|p(s)\|^2 ds \le \big(\rho - \lambda(T)\big)^2 \right\}.$$

Тогда в игре (5.2.1), из начальной точки (x_0, x_1), *в.з.п.з.в.* T.

Надо отметить, что в теореме 5.2.3 выбор измеримого управления убегания $v(\cdot)$ осуществляется по формуле (5.2.7).

Справедлива следующая

Теорема 5.2.4. *Допустим, что:*

1) *существуют непрерывно зависящий от* $t \ge 0$ *линейный ограниченный оператор* $L(t): Z \to Y$ *и локально интегрируемое отображение* $g: Y \to X$ *такие, что при всех* $T \ge 0, t \in [0, T]$ *имеет место равенство*
$\pi S_\alpha(T-t)g\big(u(t) - L(T-t)v(t)\big) = -\pi S_\alpha(T-t)f(u(t), v(t), t)$;

2) $\rho \ge \lambda(t),\ t \ge 0,$ *где*

$$\lambda^2(t) = sup\left\{ \int_0^t \|L(s)v(t-s)\|^2 ds : \int_0^t \|v(s)\|^2 ds \le \sigma^2 \right\}$$

3) *начальная точка* (x_0, x_1) *и число* T *такие, что имеет место включение*

$$\pi K_\alpha(T)x_1 + \pi L_\alpha(T)x_0 \in \left\{ \int_0^T \pi S_\alpha(T-s)g\big(p(s)\big)ds : \int_0^T \|p(s)\|^2 ds \le \big(\rho - \lambda(t)\big)^2 \right\}.$$

Тогда в игре (5.2.1) из начальной точки (x_0, x_1), *в.з.п.з.в.* T.

Доказательство. В силу 3) и по определению многозначного интеграла существует такое интегрируемое отображение $p(\cdot)$, что

$$\pi K_\alpha(T)x_1 + \pi L_\alpha(T)x_0 = \int_0^T \pi S_\alpha(T-s)g\big(p(s)\big)ds \qquad (5.2.11)$$

Допустим, что $v(\cdot)-$ произвольное допустимое управление убегания. Тогда соответствующее управление преследования $u(\cdot)$ выбираем по формуле (5.2.7). В силу теоремы 5.2.1 выбранное управление удовлетворяет интегральному ограничению (5.2.2). Поэтому достаточно показать, что для решения $x(\cdot)$ задачи Коши (5.2.1), (5.2.3) соответствующего выбранным управлениям $u(\cdot), v(\cdot)$, имеет место $\pi x(T)=0$.

В силу 1), 2), (5.2.7) и (5.2.11) имеем:

$$\pi x(T)= \pi K_\alpha(T)x_1+\pi L_\alpha(T)x_0+\int_0^T \pi S_\alpha(T-s)f(u(s),v(s),s)ds=$$

$$=\int_0^T \pi S_\alpha(T-s)g\big(\rho(s)\big)ds+\int_0^T \pi S_\alpha(T-s)f(u(s),v(s),s)ds=$$

$$=\int_0^T \pi S_\alpha(T-s)g\big(u(s)-L(T-s)v(s)\big)ds+\int_0^T \pi S_\alpha(T-s)f(u(s),v(s),s)ds=$$

$$=-\int_0^T \pi S_\alpha(T-s)f(u(s),v(s),s)ds+\int_0^T \pi S_\alpha(T-s)f(u(s),v(s),s)ds=0,$$

т.е, $\pi x(T)=0$, что эквивалентно тому, что $x(T)\in M$. Следовательно, в игре (5.2.1) из начальной точки(x_0,x_1) в.з.п.з.в. T. Теорема доказана.

Замечание 5.2.2. *Если положить* $f(u(t),v(t),t)=-Cu(t)+Dv(t)$ *и* $g\big(p(s)\big)=Cp(s)$, *то из теоремы 5.2.4 следует теорема 5.2.1. А если положить* $f(u(t),v(t),t)=-Cu(t\,)+F(v(t),t)$ а $g\big(p(s)\big)=Cp(s)$, *то из теоремы 5.2.4 следует теорема 5.2.3.*

§5.3. О разрешимости задачи преследования для квазилинейной дифференциальной игры дробного порядка в банаховом пространстве

В настоящем параграфе доказаны теоремы, обобщающие конечномерные результаты работ [13, 14, 110, 112]. Близкие конечномерные результаты получены в работах [273, 275]. В параграфе 5.7 результат данного параграфа применяется для разрешимости одной дифференциальной игры диффузионно-волнового типа.

В банаховом пространстве X рассматривается квазилинейная дифференциальная игра, описываемая дифференциальным уравнением дробного порядка

$$D^{\alpha}x(t) + Ax(t) = f(u(t), v(t), t), \tag{5.3.1}$$

где $t \geq 0$, $x(t) \in X$, $u(\cdot) \in U([0,\infty), Y) -$ управление преследования, $v(\cdot) \in U([0,\infty), Z) -$ управление убегания, $Y, Z -$ банаховые пространства, $D^{\alpha} -$ дробная производная Капуто порядка α, $0 < \alpha < 1$, от функции $x(t)$, $-A$ - л.з.о., имеющий плотную в X область определения, который п.с.н.п. $S(t)$. Далее, полагаем, что для любых допустимых $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ отображение $t \to f(u(t), v(t), t)$ локально интегрируемо и задача Коши (5.3.1) с начальным условием $x(0) = x_0$ имеет слабое решение [303]

$$x(t) = Q(t)x_0 + \int_0^t R(t-s) f(u(s), v(s), s) ds, \qquad t \in [0, T], \tag{5.3.2}$$

где

$$Q(t) = \int_0^{\infty} \xi_{\alpha}(\sigma) \mathrm{S}(t^{\alpha}\sigma) d\sigma, \quad R(t) = \alpha \int_0^{\infty} \sigma \cdot t^{\alpha-1} \xi_{\alpha}(\sigma) \mathrm{S}(t^{\alpha}\sigma) d\sigma$$

$$\text{и} \quad \int_0^{\infty} e^{-\sigma y} \xi_{\alpha}(\sigma) d\sigma = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-y)^j}{\Gamma(1+\alpha j)}, \quad y > 0.$$

Следующая теорема обеспечивает разрешимость з.п..

Теорема 5.3.1. *Допустим, что:*

1) $X, Y -$ *сепарабельные банаховые пространства;*
2) *отображение* $(u, v, t) \to f(u, v, t)$ *удовлетворяет условиям Каратеодори*;
3) *терминальное множество* M, *где заканчивается игра, является замкнутым подмножеством пространства* X;
4) *начальная точка* $x_0 \in X \backslash M$ *такая, что при некотором* $T \geq 0$ *имеет место включение*

$$Q(T)x_0 \in M - \int_0^T \bigcap_{v \epsilon Z} R(T-s) f(Y, v, s) ds. \qquad (5.3.3)$$

Тогда из начальной точки x_0 *в.з.п.з.в.* T.

Доказательство. Из включения (5.3.3) следует существование точки $m \epsilon M$ и интегрируемого селектора $\omega(\cdot)$отображения

$$s \to \bigcap_{v \epsilon Z} R(T-s) f(Y, v, s),$$

что имеет место равенство

$$Q(T)x_0 = m - \int_0^T \omega(s) ds. \qquad (5.3.4)$$

В силу того, что $X, Y -$ сепарабельные, отображения

$$s \to \bigcap_{v \epsilon Z} R(T-s) f(Y, v, s)$$

и $s \to \omega(s)$измеримые, а отображение $(u, v, s) \to f(u, v, s)$ непрерывно по (u, v)

и измеримо по s, то в силу леммы 1.4.3 об измеримом селекторе для любого измеримого управления убегания $v(\cdot) \in U([0,T],Z)$ найдется такое измеримое управление преследования $u(\cdot) \in U([0,T],Y)$, что имеет место равенство

$$\omega(s) = R(T-s)f(u(s),v(s),s) \tag{5.3.5}$$

для почти всех $s \in [0,T]$. Следовательно, в силу (5.3.4), (5.3.5) для решения $x(\cdot)$ задачи (5.3.1) соответствующего управлениям $u(\cdot), v(\cdot)$ имеем:

$$x(T) = Q(T)x_0 + \int_0^T R(T-s)f(u(s),v(s),s)ds =$$

$$= m - \int_0^T \omega(s)ds + \int_0^T R(T-s)f(u(s),v(s),s)ds =$$

$$= m - \int_0^T R(T-s)f(u(s),v(s),s)ds + \int_0^T R(T-s)f(u(s),v(s),s)ds = m \in M.$$

Поэтому из начальной точки x_0 в.з.п.з.в. T. При этом для любого управления убегания $\vartheta(\cdot)$ соответствующее управление преследования $u(\cdot)$ выбирается по формуле (5.3.5). Теорема доказана.

Далее, в банаховом пространстве X, рассматривается квазилинейная дифференциальная игра, описываемая дифференциальным уравнением дробного порядка

$$D^\alpha x(t) = Ax(t) + f\ (u(t),v(t),t) \tag{5.3.6}$$

с начальными условиями

$$\frac{d^i}{dt^i}x(t)|_{t=0+} = x_i^0, i = 0,1,\dots,m-1,$$

где $\alpha > 0$, $m-1 < \alpha < m$, $m = 1,2,\dots$, $A-$ линейный ограниченный

оператор, отображение $f: Y \times Z \times [0, \infty) \to X$, где Y и $Z -$ банаховы пространства, удовлетворяет условиям Каратеодори.В игре (5.3.6) в качестве терминального множества берется замкнутое множество $M \subset X$, $t \geq 0$, $x(t) \in X$, $u(\cdot) \in U([0, \infty), Y) -$ управление преследования, $v(\cdot) \in U([0, \infty), Z) -$ управление убегания а $D^{\alpha} -$ дробная производная Капуто порядка α от функции $x(t)$.

В дальнейшем полагаем, что отображение $t \to f(u(t), v(t), t)$ такое, что для любых допустимых управлений $u(\cdot), v(\cdot)$ задача (5.3.6) имеет решение вида 1.4.10.

Для игры (5.3.6) рассматривается з.п..

Теорема 5.3.2. *Допустим, что:*

1) $X, Y -$ сепарабельные банаховы пространства;

2) имеет место включение

$$\sum_{n=0}^{m-1} T^n E_{1/\alpha}(AT^{\alpha}; n+1) x_n^0$$

$$\in M - \int_0^T (T-\xi)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(A(T-\xi)^{\alpha}; \alpha) \bigcap_{v \in Z} f(Y, v, \xi)\, d\xi \qquad (5.3.7)$$

Тогда из начальной точки $x_0 = (x_0^0, x_1^0, \dots, x_{m-1}^0)$ в.з.п.з.в. T.

Доказательство. Из включения (5.3.7) следует существование точки $m \in M$ и интегрируемого селектора $\omega(\cdot)$отображения

$$\xi \to (T-\xi)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(A(T-\xi)^{\alpha}; \alpha) \bigcap_{v \in Z} f(Y, v, \xi),$$

что имеет место равенство

$$\sum_{n=0}^{m-1} T^n E_{1/\alpha}(AT^{\alpha}; n+1) x_n^0 = m - \int_0^T \omega(\xi) d\xi \qquad (5.3.8)$$

В силу того, что X, Y- сепарабельные пространства, отображения

$$\xi \to (T-\xi)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(A(T-\xi)^{\alpha};\alpha) \bigcap_{v\in Z} f(Y,v,\xi)$$

и $\xi \to \omega(\xi)$ измеримые, а отображение $(u,v,\xi) \to f(Y,v,\xi)$ непрерывно по (u,v) и измеримо по ξ, то в силу леммы 1.4.3 об измеримом селекторе, из включения

$$\omega(\xi) \in (T-\xi)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(A(T-\xi)^{\alpha};\alpha) \bigcap_{v\in Z} f(Y,v,\xi)$$

для любого измеримого управления убегания $v(\cdot) \in U([0,T],Z)$ можно выбрать такое измеримое управление преследования $u(\cdot) \in U([0,T],Y)$, что имеет место равенство

$$\omega(\xi) = (T-\xi)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(A(T-\xi)^{\alpha};\alpha) f(u(s),v(s),s) \qquad (5.3.9)$$

для почти всех $\xi \in [0,T]$.Следовательно, в силу (5.3.8), (5.3.9) для решения $x(\cdot)$ задачи (5.3.6) соответствующего управлениям $u(\cdot), v(\cdot)$ имеем:

$$x(T) = \sum_{i=0}^{m-1} T^i E_{1/\alpha}(AT^{\alpha};i+1)x_i^0 +$$

$$+\int_0^T (T-\xi)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(A(T-\xi)^{\alpha};\alpha)\, f(u(\xi),v(\xi),\xi)d\xi =$$

$$= m - \int_0^T \omega(\xi)d\xi + \int_0^T (T-\xi)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(A(T-\xi)^{\alpha};\alpha)\, f(u(\xi),v(\xi),s)d\xi =$$

$$= \; m - \int_0^T (T-\xi)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(A(T-\xi)^{\alpha};\alpha)\, f(u(\xi), v(\xi), s) d\xi +$$

$$+ \int_0^T (T-\xi)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(A(T-\xi)^{\alpha};\alpha)\, f(u(\xi), v(\xi), s) d\xi = \; m \in M.$$

Поэтому из начальной точки x_0 в.з.п.з.в. T . При этом для любого управления убегания $\vartheta(\cdot)$ соответствующее управление преследования $u(\cdot)$ выбирается по формуле (5.3.9). Теорема доказана

§5.4. Интегро–дифференциальные игры дробного порядка в банаховом пространстве

В этом параграфе рассматривается з.п. для одной интегро-дифференциальной игры, когда динамика игры описывается квазилинейным интегро-дифференциальным уравнением дробного порядка α.

Пусть X, Y, Z – банаховы пространства. Рассмотрим дифференциальную игру, описываемую квазилинейным интегро-дифференциальным уравнением дробного порядка α [67]

$$D^{\alpha} x(t) = Ax(t) + \int_0^t B(t-s)x(s)ds + f(u(t), v(t), t) \qquad (5.4.1)$$

и замкнутым терминальным множеством M, где заканчивается игра.

В игре (5.4.1) $t \geq 0$, $x(t) \in X$, $u(\cdot) \in U([0,\infty), Y)$ – управление преследования, $v(\cdot) \in U([0,\infty), Z)$ – управление убегания, D^{α} – дробная производная Капуто порядка α от функции $x(t)$, A –л.з.о., имеющий плотную в X область определения, $\{B(t)\}_{t\geq 0}$ – семейство л.з.о. в X с областями определения $D\big(B(t)\big) \supset D(A)$ такие, что функции $B(t)x$ сильно измеримые для $x \in D(A)$ и существует положительная локально суммируемая функция

$b(\cdot)$ такая, что $\|B(t)x\| \leq b(t)(\|x\| + \|A(x)\|)$ для всех $x \in D(A)$ и для почти всех $t \geq 0$.

Далее, согласно определению 1.4.7 полагаем, что локально интегрируемое отображение $t \to f(u(t), v(t), t)$ такое, что для любых $u(\cdot) \in U([0,\infty), Y)$ и $v(\cdot) \in U([0,\infty), Z), t \geq 0,$ задача Коши

$$D^{\alpha}x(t) = Ax(t) + \int_0^t B(t-s)x(s)ds + f(u(t), v(t,)t),$$

$$x(0) = x_0, \qquad x^n(0) = 0, \qquad n = 1,2,\dots,m-1, \tag{5.4.2}$$

имеет решение

$$x(t\,) = S_{\alpha}(t)x_0 + \int_0^t S_{\alpha}(t-s)f(u(s), v(s), s)ds, \tag{5.4.3}$$

где $S_{\alpha}(t) - \alpha -$ резольвентный оператор [67] удовлетворяющий уравнению

$$D^{\alpha}S_{\alpha}(t) = AS_{\alpha}(t) + \int_0^t B(t-s)S_{\alpha}(s)ds \tag{5.4.4}$$

Справедлива следующая

Теорема 5.4.1. *Допустим, что:*

1) *$X, Y -$ сепарабельные банаховы пространства;*
2) *отображение $(u, v, t) \to f(u, v, t)$ удовлетворяет условиям Каратеодори;*
3) *начальная точка $x_0 \in X \backslash M$ такая, что при некотором $T \geq 0$ имеет место включение*

$$S_{\alpha}(T)x_0 \in M - \int_0^T \bigcap_{v \in Z} S_{\alpha}(T-s)f(Y, v, s)ds \tag{5.4.5}$$

Тогда из начальной точки x_0 в.з.п.з.в. T.

Доказательство. Из соотношений (5.4.5) вытекает существование точки $m \in M$ и интегрируемого селектора $w(\cdot)$ отображения

$$s \to \bigcap_{v \in Z} S_\alpha(T-s) f(Y, v, s) ds$$

что имеет место равенство

$$S_\alpha(T) x_0 = m - \int_0^T w(s) ds. \tag{5.4.6}$$

Так как $X, Y -$ сепарабельные банаховы пространства, отображения

$$s \to \bigcap_{v \in Z} S_\alpha(T-s) f(Y, v, s)$$

и $s \to w(s)$ измеримые, а отображение $(u, v, s) \to f(Y, v, s)$ непрерывно по (u, v) и измеримо по s, то в силу леммы 1.4.3 об измеримом селекторе для любого управления убегания $v(\cdot) \in U([0, T], Z)$ найдется такое управление преследования $u(\cdot) \in U([0, T], Y)$, что

$$w(s) = S_\alpha(T-s) f(u(s), v(s), s) \tag{5.4.7}$$

для почти всех $s \in [0, T]$. Следовательно, в силу (5.4.3), (5.4.6) и (5.4.7) для решения $x(\cdot)$ задачи (5.4.2) соответствующего управлениям $u(\cdot), v(\cdot)$ имеем:

$$x(T) = S_\alpha(T) x_0 + \int_0^T S_\alpha(T-s) f(v(s), u(s), s) ds =$$

$$= m - \int_0^T w(s)ds + \int_0^T S_\alpha(T-s)f(v(s),u(s),s)ds =$$

$$= m - \int_0^T S_\alpha(T-s)f(v(s),u(s),s)ds + \int_0^T S_\alpha(T-s)f(v(s),u(s),s)ds = m \in M,$$

т.е. $x(T) \in M$.

Следовательно, для любого измеримого управления убегания $v(\cdot)$ соответствующее измеримое управление преследования $u(\cdot)$ можно выбрать по формуле (5.4.7) таким образом, что из начальной точки x_0 в.з.п.з.в.T. Теорема доказана.

Справедлива следующая

Теорема 5.4.2. *Если выполнены условия 1)-2) теоремы 5.4.1, множество M выпукло, при любых $v \in Z, s \in [0,T]$ множество $S_\alpha(T-s)f(Y,v,s)$ замкнуто и для начальной точки x_0 при некотором $T \geq 0$ имеет место включение*

$$S_\alpha(T)x_0 \in W(\gamma(\cdot),T), \tag{5.4.8}$$

где множество

$$W(\gamma(\cdot),T) = \begin{cases} M \text{ при } T = 0 \\ \bigcup\limits_{\gamma(\cdot)\in\Gamma(0,T_o)} \int\limits_O^T \bigcap\limits_{v\in Z} [\gamma(s)M - S_\alpha(T-s)f(Y,v,s)]ds \text{, при } T > 0, \end{cases}$$

секвенциально замкнуто относительно топологии $\sigma(X,X^*)$, то из начальной точки x_0 в.з.п.з.в.$T_o = \min\{T \geq 0$: для которых (5.4.8) $\}$.

Доказательство. В силу того, что множество $W(\gamma(\cdot),T)$ секвенциально замкнуто относительно топологии $\sigma(X,X^*)$, а отображение $t \to S_\alpha(t)x_0$, $t \in [0,T]$ непрерывно, то в силу леммы 1.4.4 множество $\{T \geq 0$: для которых выполняется (5.4.8) $\}$ замкнуто. А это означает, что при $T = T_0$ имеет место

включение (5.4.8), т.е.

$$S_\alpha(T_0)x_0 \in W(\gamma(\cdot), T_0).$$

Следовательно, для некоторой $\gamma(\cdot) \in \Gamma(0, T)$ существует такой интегрируемый селектор $w(\cdot)$ отображения

$$s \to \bigcap_{v \in Z} [\gamma(s)M - S_\alpha(T_o \ - s)f(Y, v, s)], s \in [0, T_o],$$

что имеет место равенство

$$S_\alpha(T_o \ )x_0 = \int_o^{T_o} w(s)ds \qquad (5.4.9)$$

Выбираем произвольное управление убегания $v(\cdot) \in U([0, T_o], Z)$. Тогда имеет место включение

$$w(s) \in \gamma(s)M - S_\alpha(T_o \ - s)f(Y, v(s), s), s \in [0, T_o]$$

и множество

$$\Pi(s) = \big(w(s) + S_\alpha(T_o \ - s)f(Y, v(s), s)\big) \cap \gamma(s)M$$

замкнуто и не пусто.

В силу известной леммы 1.4.3 об измеримом селекторе существуют измеримый селектор $p(s) \in \Pi(s)$, управление преследования $u(\cdot) \in U([0, T_o], Y)$ и измеримое отображение $m(\cdot)$: $[0, T_o] \to M$ такие, что

$$p(s) = w(s) + S_\alpha(T_o \ - s)f(u(s), v(s), s) = \gamma(s)m(s)$$

для почти всех $s \in [0, T_o]$. Следовательно,

$$w(s) = \gamma(s)m(s) - S_\alpha(T_o - s)f(u(s), v(s), s) \qquad (5.4.10)$$

Учитывая выпуклость терминального множества M, равенства (5.4.9), (5.4.10) и в силу [130]

$$\int_0^{T_o} \gamma(s)Mds = (\int_0^{T_o} \gamma(s)\, ds)M$$

для решения $x(\cdot)$ задачи (5.4.2), соответствующего управлениям $u(\cdot), v(\cdot)$ на $[0, T_o]$ имеем:

$$x(T_o) = S_\alpha(T_o)x_0 + \int_0^{T_o} S_\alpha(T_o - s)f(u(s), v(s), s)ds =$$

$$= \int_0^{T_o} w(s)ds + \int_0^{T_o} S_\alpha(T_o - s)f(u(s), v(s), s)ds =$$

$$= \int_0^{T_o} \big(\gamma(s)m(s) - S_\alpha(T_o - s)f(u(s), v(s)s)\big)ds +$$

$$+ \int_0^{T_o} S_\alpha(T_o - s)f(u(s), v(s), s)ds =$$

$$= \int_0^{T_o} \gamma(s)m(s)ds - \int_0^{T_o} S_\alpha(T_o - s)f(u(s), v(s), s)ds +$$

$$+ \int_0^{T_o} S_\alpha(T_o - s)f(u(s), v(s), s)ds = \int_0^{T_o} \gamma(s)m(s)ds \in \int_0^{T_o} \gamma(s)Mds =$$

$$= (\int_0^{T_o} \gamma(s)ds))M = M,$$

т.е. $x(T_o) \in M$.

Последнее включение означает, что для любого измеримого управления

убегания $v(\cdot)$ согласно (5.4.10) можно выбрать такое измеримое управление преследования $u(\cdot)$, что из начальной точки x_0 в.з.п.з.в. T_0. При этом, из равенства (5.4.10) видно, что выбор $u(t)$ осуществляется исходя из информации $v(t)$ и x_0.Теорема доказана.

§5.5. Интегро-дифференциальные игры дробного порядка с интегральными ограничениями в гильбертовом пространстве

В этом параграфе рассматривается разрешимость з.п. в смысле Л.С. Понтрягина для дифференциальной игры, когда на управление игроков наложены интегральные ограничения, а динамика игры описывается интегро-дифференциальным уравнением дробного порядка α с л.з.о. A, порождающий α-резольвентный оператор $S_\alpha(t)$.

Пусть $X, Y, Z -$ гильбертовые пространства, а линейная дифференциальная игра описывается интегро-дифференциальным уравнением дробного порядка α [67]

$$D^\alpha x(t) = Ax(t) + \int_0^t B(t-s)x(s)ds - Cu(t) + Dv(t) \qquad (5.5.1)$$

и замкнутым терминальным множеством M, где заканчивается игра.

В дифференциальной игре (5.5.1) $t \geq 0$, $x(t) \in X$, $D^\alpha -$ дробная производная Капуто порядка α от функции $x(t), A -$л.з.о., имеющий плотную в X область определения, $\{B(t)\}_{t\geq 0} -$ семейство л.з.о. в X с областями определения $D\big(B(t)\big) \supset D(A)$ такие, что функции $B(t)x$ сильно измеримые для $x \in D(A)$ и существует положительная локально суммируемая функция $b(\cdot)$ такая, что $\|B(t)x\| \leq b(t)(\|x\| + \|A(x)\|)$ для всех $x \in D(A)$ и для почти всех $t \geq 0$. При этом управления $u(\cdot) \in U([0,\infty), Y)$ и управления $v(\cdot) \in U([0,\infty), Z)$ удовлетворяют ограничениям

$$\int_0^\infty |u(s)|^2 ds \le \rho^2, \qquad \int_0^\infty |v(s)|^2 ds \le \sigma^2 \tag{5.5.2}$$

В дальнейшем, согласно определению 1.4.7 полагаем, что линейные ограниченные операторы $C: Y \to X, D: Z \to X$ такие, что для любых $u(\cdot) \in U([0,\infty), Y)$ и $v(\cdot) \in U([0,\infty), Z), t \ge 0,$ задача Коши

$$D^\alpha x(t) = Ax(t) + \int_0^t B(t-s)x(s)ds - Cu(t) + Dv(t),$$

$$x(0) = x_0, \qquad \mathrm{x}^n(0) = 0, \qquad n = 1,2,\dots,m-1. \tag{5.5.3}$$

имеет решение

$$x(t\,) = S_\alpha(t)x_0 - \int_0^t S_\alpha(t-s)(Cu(s) - Dv(s))ds, \tag{5.5.4}$$

где $S_\alpha(t) - \alpha$- резольвентный оператор [67] удовлетворяющий уравнению

$$D^\alpha S_\alpha(t) = AS_\alpha(t) + \int_0^t B(t-s)S_\alpha(s)ds$$

В дальнейшем, $M^\perp -$ортогональное дополнение к M в X, $\pi -$ оператор ортогонального проектирования из X на $M^\perp$. Для игры (5.5.1) докажем следующую основную теорему о разрешимости задачи преследования.

Теорема 5.5.1. *Допустим, что:*

1) *неотрицательная, непрерывно дифференцируемая и строго возрастающая функция* $J(t), t \ge 0$ *такая, что* $J(0) = 0, J(t) \ge t$ *при всех* $t \ge 0$*;*
2) *существует непрерывно зависящий от* $t \ge 0$ *линейный ограниченный*

оператор $L(t): Z \to Y$, *такой что* $\pi S_\alpha\big(J(t)\big)D = \pi S_\alpha(t)CL(t)$;

3) *если функция* $\lambda(t)$ *задается равенством*

$$\lambda^2(t) = sup\left\{\int_0^t \left\|L(s)v\big(J(t)-J(s)\big)J'(s)\right\|^2 ds : \int_0^{J(t)} \|v(s)\|^2 ds \le \sigma^2\right\}$$

то числа $T \ge 0, \tau \ge 0$ *такие, что* $J(T) = \tau + T$ *и при всех* $t \ge 0$ *имеет место* $\alpha \ge \lambda(t)$, *где*

$$\alpha^2 = \rho^2 - \int_0^t \|\bar{u}(s)\|^2 ds,$$

а $\bar{u}(\cdot)$ − *некоторое допустимое управление преследования;*

4) *начальная точка* x_0 *такая, что имеет место включение*

$$\pi S_\alpha(T)x_0 \in \pi \int_0^\tau S_\alpha(\tau + T - s)C\bar{u}(s)ds +$$

$$+\left\{\int_0^T \pi S_\alpha(T - s)Cp(s)ds : \int_0^T \|p(s)\|^2 ds \le \big(\alpha - \lambda(T)\big)^2\right\}. \qquad (5.5.5)$$

Тогда в игре (5.5.1) из начальной точки x_0 *в.з.п.з.в.* $\tau + T$.

Доказательство. Согласно (5.5.5) существует такое интегрируемое отображение $p(\cdot)$, что имеет место равенство

$$\pi S_\alpha(T)x_0 = \int_0^\tau \pi S_\alpha(\tau + T - s)C\bar{u}(s)ds + \int_0^T \pi S_\alpha(T - s)Cp(s)ds \qquad (5.5.6)$$

Если $v(\cdot)$ − произвольное допустимое управление убегания, то соответствующее управление преследования $u(\cdot)$ выбираем по формуле

$$u(t)=\begin{cases}\bar{u}(t) & \text{при } t\in[0,\tau),\\ \rho(t-\tau)+L(\tau+T-t)v\big(J(T)-J(\tau+T-t)\big)\cdot J'(\tau+T-t) & \\ & \text{при } t\in[\tau,\tau+T],\\ 0 & \text{при } t>\tau+T.\end{cases} \tag{5.5.7}$$

В начале покажем, что выбранное управление преследования $u(\cdot)$ допустимо, т.е. удовлетворяет соотношению (5.5.2). Действительно, в силу 1), 2), 3) и (5.5.7) имеем:

$$\int_0^\infty \|u(s)\|^2 ds=\int_0^\tau \|\bar{u}(s)\|^2 ds+\int_\tau^{\tau+T}\|u(s)\|^2 ds+\int_{\tau+T}^\infty \|u(s)\|^2 ds=$$

$$=\int_0^\tau \|\bar{u}(s)\|^2 ds+\int_0^T \|u(\tau+T-t)\|^2 dt=\int_0^\tau \|\bar{u}(s)\|^2 ds+$$

$$+\int_0^T \|p(T-t)+L(t)v(J(T)-J(t))\cdot J'(t)\|^2 dt=\int_0^\tau \|\bar{u}(s)\|^2 ds+$$

$$+\int_0^T <p(T-t)+L(t)v\big(J(T)-J(t)\big)\cdot J'(t),p(T-t)+$$

$$+L(t)v\big(J(T)-J(t)\big)\cdot J'(t)>dt=\int_0^\tau \|\bar{u}(s)\|^2 ds+$$

$$+\int_0^T [\|p(T-t)\|^2+2\cdot<p(T-t),L(t)v\big(J(T)-J(t)\big)J'(t)>+$$

$$+\|L(t)v(J(T)-J(t))\cdot J'(t)\|^2 dt\le\int_0^\tau \|\bar{u}(s)\|^2 ds+\big(\alpha-\lambda(T)\big)^2+$$

$$+2\big(\alpha-\lambda(T)\big)\cdot\lambda(T)+\lambda^2(T)=\int_0^\tau \|\bar{u}(s)\|^2 ds+\alpha^2=\rho^2,$$

т.е.

$$\int_0^\infty \|\bar{u}(s)\|^2 ds \le \rho.^2$$

Далее докажем, что $\pi x(\tau+T)=0$. Учитывая (5.5.4), (5.5.6) и (5.5.7) для решения $x(\cdot)$ задачи (5.5.3) имеем

$$\pi x(\tau+T)=\pi S_\alpha(T)x_0-$$

$$-\int_0^{\tau+T}\pi S_\alpha(\tau+T-s)\cdot\big(Cu(s)-Dv(s)\big)\,ds=\int_0^{\tau}\pi S_\alpha(\tau+T-s)C\bar{u}\,(s)ds+$$

$$+\int_0^{T}\pi S_\alpha(T-s)Cp(s)ds-\int_0^{\tau}\pi S_\alpha(\tau+T-s)C\bar{u}\,(s)ds-$$

$$-\int_\tau^{\tau+T}\pi S_\alpha(\tau+T-s)\cdot Cu(s)ds+\int_0^{\tau+T}\pi S_\alpha\,(\tau+T-s)Dv(s)ds=$$

$$=\int_0^{T}\pi S_\alpha(T-s)Cp(s)ds-\int_\tau^{\tau+T}\pi S_\alpha(\tau+T-s)Cu\,(s)ds+$$

$$+\int_\tau^{\tau+T}\pi S_\alpha(\tau+T-s)Dv(s)ds=\int_0^{T}\pi S_\alpha(t)Cp(T-t)dt-$$

$$-\int_0^{T}\pi S_\alpha(T-t)Cu(\tau+t)dt+\int_0^{\tau+T}\pi S_\alpha(t)Dv\,(\tau+T-t)dt=$$

$$=\int_0^{T}\pi S_\alpha(s)Cp(T-s)ds-\int_0^{T}\pi S_\alpha(s)Cu\,(\tau+T-s)ds+$$

$$+\int_0^{T}\pi S_\alpha(J(s))Dv(J(T)-J(s))\cdot J'(s)ds=\int_0^{T}\pi S_\alpha(s)Cp(T-s)ds-$$

$$-\int_0^{T}\pi S_\alpha(s)C(\tau+T-s)ds+\int_0^{T}\pi S_\alpha(s)CL(s)v(J(T)-J(s))\cdot J'(s)ds=$$

$$=\int_0^{T}\pi S_\alpha(s)C\big[p(T-s)-u(\tau+T-s)+L(t)v\big(J(T)-J(s)\big)\cdot J'(s)\big]ds=$$

$$=\int_0^{T}\pi S_\alpha(s)C[p(T-s)-p(T-s)-L(s)v\big(J(T)-J(s)\big)\cdot J'(s)+L(s)v\big(J(T)$$

$$--J(s)\big)J'(s)]ds=0,$$

т.е. $x(\tau+T)\in M$.

Следовательно, в игре (5.5.1) из начальной точки x_0 в.з.п.з.в. $\tau + T$. Теорема доказана.

Далее рассматривается дифференциальная игра, описываемая квазилинейным интегро-дифференциальным уравнением дробного порядка α [67]

$$D^{\alpha}x(t) = Ax(t) + \int_0^t B(t-s)x(s)ds + f(u(t), v(t), t) \qquad (5.5.8)$$

и замкнутым терминальным множеством M, где заканчивается игра.

В игре (5.5.8) $t \geq 0$, $x(t) \in X$, D^{α} – дробная производная Капуто порядка α от функции $x(t)$, A – л.з.о., имеющий плотную в X область определения, $\{B(t)\}_{t\geq 0}$ – семейство л.з.о. в X с областями определения $D\big(B(t)\big) \supset D(A)$ такие, что функции $B(t)x$ сильно измеримые для $x \in D(A)$ и существует положительная локально суммируемая функция $b(\cdot)$ такая, что $\|B(t)x\| \leq b(t)(\|x\| + \|A(x)\|)$ для всех $x \in D(A)$ и для почти всех $t \geq 0$. При этом управление преследования $u(\cdot)\epsilon U([0,\infty), Y)$ и управление убегания $v(\cdot) \in U([0,\infty), Z)$, удовлетворяют интегральным ограничениям (5.5.2).

В дальнейшем полагаем, что локально интегрируемое отображение $f: Y \times Z \times [0,\infty) \to X$ такое, что для любых $u(\cdot) \in U([0,\infty), Y)$ и $v(\cdot) \in U([0,\infty), Z)$, $t \geq 0$, задача Коши (5.5.8) с начальной точкой

$$x(0) = x_0, \;\; x^n(0) = 0, n = 1,2,\dots,m \qquad (5.5.9)$$

имеет решение (5.4.3), где $S_{\alpha}(t) - \alpha -$ резольвентный оператор [67], удовлетворяющий уравнению

$$D^{\alpha}S_{\alpha}(t) = AS_{\alpha}(t) + \int_0^t B(t-s)S_{\alpha}(s)ds \qquad (5.5.10)$$

Справедлива следующая

Теорема 5.5.2. *Допустим, что:*

1) *существует непрерывно зависящий от* $t \geq 0$ *линейный ограниченный оператор* $L(t): Z \to Y$ *и локально интегрируемое отображение* $g: Y \to X$ *такие, что при всех* $T \geq 0,\ t \in [0, T]$ *имеет место равенство*

$$\pi S_\alpha(T-t) g\big(u(t) - L(T-t)v(t)\big) = -\pi S_\alpha(T-t) f(u(t), v(t), t);$$

2) $\rho \geq \lambda(t), t \geq 0,$ *где*

$$\lambda^2(t) = sup\left\{\int_0^t \|L(s)v(t-s)\|^2 ds : \int_0^t \|v(s)\|^2 ds \leq \sigma^2\right\};$$

3) *начальная точка* x_0 *и число* $T = T(x_0)$ *такие, что имеет место включение*

$$\pi S_\alpha(T) x_0 \in$$
$$\in \left\{\int_0^T \pi S_\alpha(T-s) g\big(p(s)\big) ds : \int_0^T \|p(s)\|^2 ds \leq \big(\rho - \lambda(t)\big)^2\right\}. \quad (5.5.11)$$

Тогда из начальной точки x_0 *в.з.п.з.в.* T.

Доказательство. Согласно (5.5.11) можно выбрать такое интегрируемое отображение $p(\cdot)$, что

$$\pi S_\alpha(T) x_0 = \int_0^T \pi S_\alpha(T-s) g\big(p(s)\big) ds. \quad (5.5.12)$$

Пусть $v(\cdot)$ – произвольное допустимое управление убегания. Тогда соответствующее управление преследования $u(\cdot)$ выбираем по формуле

$$u(s) = \begin{cases} p(s) + L(T-s)v(s), 0 \le s \le T \\ 0, s > T \end{cases} \tag{5.5.13}$$

Сначала покажем, что выбранное управление преследования $u(\cdot)$ допустимо, т.е. удовлетворяет соотношению (5.5.2). Действительно, в силу (5.5.13) и условия 2) имеем:

$$\int_0^\infty \|u(s)\|^2 ds = \int_0^T \|p(s) + L(T-s)v(s)\|^2 ds =$$

$$= \int_0^T < p(s) + L(T-s)v(s), p(s) + L(T-s)v(s) > ds =$$

$$= \int_0^T \|p(s)\|^2 ds + 2 \cdot \int_0^T < p(s), L(T-s)v(s) > ds + \int_0^T \|L(T-s)v(s)\|^2 ds \le$$

$$\le \big(\rho - \lambda(T)\big)^2 + 2 \cdot \sqrt{\int_0^T \|p(s)\|^2 ds} \cdot \sqrt{\int_0^T \|L(T-s)v(s)\|^2 ds} + \lambda^2(T)$$

$$\le \rho^2 - 2\rho\lambda(T) + \lambda^2(T) + 2\big(\rho - \lambda(T)\big)\lambda(T) + \lambda^2(T) = \rho^2$$

т.е. $u(\cdot)$ удовлетворяет соотношению (5.5.2).

Далее покажем, что для решения $x(\cdot)$ задачи Коши (5.5.8), соответствующего выбранным управлениям $u(\cdot), v(\cdot)$ на $[0, T]$ имеет место $\pi x(T) = 0$. Действительно, в силу (5.5.10), (5.5.12), (5.5.13) имеем:

$$\pi x(T) = \pi S_\alpha(T)x_0 + \int_0^T \pi S_\alpha(T-s) f(u(s), v(s), s) ds =$$

$$= \int_0^T \pi S_\alpha(T-s) g\big(p(s)\big) ds + \int_0^T \pi S_\alpha(T-s) f(u(s), v(s), s) ds =$$

$$= \int_0^T \pi S_\alpha(T-s) g(u(s) - L(T-s)v(s))ds + \int_0^T \pi S_\alpha(T-s) f(u(s), v(s), s)ds =$$

$$= -\int_0^T \pi S_\alpha(T-s) f(u(s), v(s), s)ds + \int_0^T \pi S_\alpha(T-s) f(u(s), v(s), s)ds = 0\,,$$

т.е. $\pi x(T) = 0$, что равносильно тому, что $x(T) \in M$. Следовательно, в игре (5.5.8) из начальной точки x_0 в.з.п.з.в. T. Теорема доказана.

Следующая теорема является следствием теорем 5.5.2 и 5.5.1.

Теорема 5.5.3. *Допустим, что:*

1) $f(u, v, t) = -\mathrm{C}u + Dv$, *где* $\mathrm{C}: Y \to X$, $D: Z \to X$ – *линейные ограниченные операторы;*
2) *существует линейный ограниченный оператор* $L(t): Z \to Y$, *непрерывно зависящий от* $t \geq 0$ *и такой, что* $\pi S_\alpha(t) D = \pi S_\alpha(t) C L(t)$;
3) *когда*

$$\lambda^2(t) = sup\left\{\int_0^t \|L(s)v(t-s)\|^2 ds : \int_0^t \|v(s)\|^2 ds \leq \sigma^2\right\},$$

то при всех $t \geq 0$ *справедливо неравенство* $\rho \geq \lambda(t)$;

4) *начальная точка* x_0 *и число* $T = T(x_0)$ *такие, что имеет место включение*

$$\pi S_\alpha(T) x_0 \in \left\{\int_0^T \pi S_\alpha(T-s) \mathrm{C} p(s) ds : \int_0^T \|p(s)\|^2 ds \leq \big(\rho - \lambda(T)\big)^2\right\}.$$

Тогда в игре (5.5.8) из начальной точки x_0 *в.з.п.з.в.* $T = T(x_0)$.

§5.6. Разрешимость задачи преследования для дифференциальной игры с несколькими дробными производными в банаховом пространстве

В сепарабельном банаховом пространстве X рассмотрим дифференциальную игру, описываемую линейным дифференциальным уравнением с несколькими дробными производными Герасимова–Капуто [261]

$$D^{\alpha}z(t) = \sum_{k=1}^{n} D^{\alpha_k} A_k z(t) + f(u(t), v(t), t) \tag{5.6.1}$$

и замкнутым терминальным множеством $M \subset X$, где заканчивается игра.

В игре (5.6.1) $t \geq 0$, $z(t) \in X$, Y и $Z -$ сепарабельные банаховы пространства, $u(\cdot) \in U([0,\infty), Y) -$ управление преследования, $\vartheta(\cdot) \in U([0,\infty), Z) -$ управление убегания, $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n < \alpha, m = [\alpha] + 1, m_k = [\alpha_k] + 1$, $A_k: X \to X -$ линейные ограниченные операторы, $k = 1,2,\dots,n$. В дальнейшем предполагаем, что отображение $f: [0,\infty) \times Y \times Z \to X$ удовлетворяет условиям Каратеодори. Это предположение обеспечивает локальную интегрируемость отображения $t \to f\ (u(t), v(t), t)$ по Бохнеру.

Согласно определению 1.4.8, когда отображение $t \to f(u(t), v(t), t)$ локально интегрируемо, решением задачи Коши (5.6.1) с начальными условиями

$$z^{(l)}(0) = z_l, l = 0,1,\dots,m-1, \tag{5.6.2}$$

соответствующим управлениям $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ будем называть отображение [261]

$$z(t) = \sum_{l=0}^{m-1} Z_l(t) z_l + \int_0^t Z(t-s) f(u(s), v(s), s) ds\,, \tag{5.6.3}$$

где

$$Z_l(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \left(\lambda^\alpha I - \sum_{k=1}^{n} \lambda^{\alpha_k} A_k\right)^{-1} \left(\lambda^{\alpha-l-1} I - \sum_{k=n_l}^{n} \lambda^{\alpha_k - l - 1} A_k\right) e^{\lambda t} d\lambda,$$

$$t > 0, \qquad \gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3, \quad \gamma_1 = \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda| = r_o, arg\lambda \in (-\pi, \pi)\},$$

$$\gamma_2 = \{\lambda \in \mathbb{C}: \lambda \in [-r_o, +\infty)\},$$

$$\gamma_3 = \{\lambda \in \mathbb{C}: \lambda \in (-\infty, -r_o]\}$$

$$r_0 = (2An)^{\frac{1}{\alpha-\alpha_n}}, \qquad A = max\left\{\frac{1}{2n}, \|A_k\|: k = 1,2,\dots,n\right\},$$

$$n_l = min\{k \in \{1,2,\dots,n\}: l < m_k - 1\},$$

$$Z(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \left(\lambda^\alpha I - \sum_{k=1}^{n} \lambda^{\alpha_k} A_k\right)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda.$$

и интеграл понимается в смысле Бохнера.

Для дифференциальной игры (5.6.1) рассмотрим разрешимость з.п..

Справедлива следующая

Теорема 5.6.1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) *начальное положение* $z^o = (z_o, z_1, \dots, z_{m-1})$ *такое, что при некотором* $T \geq 0$ *имеет место*

$$\sum_{l=0}^{m-1} Z_l\,(T) z_l \in W_1(T)\,, \tag{5.6.4}$$

где

$$W_1(t) = M - \int_0^t \bigcap_{v \in Z} Z(t-s) f(Y, v, s) ds, \quad t \in [0, T]$$

2) *многозначное отображение* $t \to W_1(t), t \in [0, T] -$ *секвенциально замкнуто. Тогда из начального положения* z^o *в.з.п.г.в.* $T_o = \min\{T \geq 0$: *для которых выполняется (5.6.4)* $\}$.

Доказательство. Для доказательства теоремы для любого допустимого измеримого управления убегания $v(\cdot)$ выбираем такое допустимое измеримое

управления преследования $u(\cdot)$, что для решения $z(\cdot)$ задачи Коши (5.6.1), (5.6.2) соответствующего управлениям $u(\cdot)$, $v(\cdot)$имеет место включение $z(T_o) \in M$. В силу леммы 1.4.4 из секвенциально замкнутости отображения $t \to W_1(t)$ следует замкнутость множества $\{T \geq 0$: для которых выполняется равенства (5.6.4)$\}$. Поэтому, учитывая соотношения (5.6.4) заключаем, что существует точка $m \in M$ и интегрируемый селектор $\omega(\cdot)$ многозначного отображения

$$s \to \bigcap_{v \in Z} Z(T_0 - s) f(Y, v, s), \qquad s \in [0, T_0],$$

что имеет место равенство

$$\sum_{l=0}^{m-1} Z_l(T_0) z_l = m - \int_0^{T_0} \omega(s) ds \tag{5.6.5}$$

Допустим, что убегающий выбрал произвольное допустимое управление $v(\cdot) \in U([0, T_o], Z)$. Тогда выполняются все условия леммы 1.4.3, ибо $X, Y -$ сепарабельные банаховы пространства, отображение $(u, v, s) \to f(u, v, s)$ непрерывно по (u, v) и измеримо по t, а отображение $s \to \omega(s)$ и многозначное отображение

$$s \to \bigcap_{v \in Z} Z(T_o - s)\, f(Y, v, s)$$

измеримы. Следовательно, в силу леммы 1.4.3 существует такое измеримое управление преследования $u(\cdot) \in U([0, T_o], Y)$, что имеет место равенство

$$\omega(s) = Z(T_o - s) f(u(s), v(s), s) \tag{5.6.6}$$

для почти всех $s \in [0, T_o]$. Поэтому, учитывая равенства (5.6.5) и (5.6.6), для решения задачи (5.6.1), (5.6.2) соответствующего управлениям $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ на отрезке $[0, T_o]$, в силу (5.6.3), имеем:

$$z(T_0) = \sum_{l=0}^{m-1} Z_l(T_0) z_l + \int_0^{T_0} Z(T_0 - s) f(u(s), v(s), s)\, ds =$$

$$= \; m - \int_0^{T_0} \omega(s)\, ds + \int_0^{T_0} Z(T_0 - s) f(u(s), v(s), s)\, ds =$$

$$= \; m - \int_0^{T_0} Z(T_0 - s) f(u(s), v(s), s)\, ds +$$

$$+ \int_0^{T_0} Z(T_0 - s) f(u(s), v(s), s)\, ds = m \in M,$$

т.е. $z(T_0) \in M$.

Следовательно, из начального положения z^0 в.з.п.з.в. T_0. Описанный в доказательстве способ выбора $u(t)$ осуществляется исходя из информации о $v(t)$ и z^o. Если при выборе $u(t)$ использовать информацию о $v(t)$ и $z(s)$, $0 \leq s \leq t$, то время достижения терминального множества M будет не более числа T_0.

Поэтому, из начального положения z^0 в.з.п.г.в. T_0. Теорема доказана.

В теореме 5.6.2 суммируемая функция $h: [0, T] \to [0, \infty)$ такая, что

$$\int_0^T h(s) ds = 1.$$

Теорема 5.6.2. *Допустим, что:*

1) *терминальное множество M выпукло, а множество $Z(T - s)F(Y, v, s)$ при любых $v \in Z, s \in [0, T]$ замкнуто;*
2) *начальное положение $z^o = (z_o, z_1, \dots, z_{m-1})$ такое, что при некотором $T \geq 0$ имеет место включение*

$$\sum_{l=0}^{m-1} Z_l(T) z_l \in W_2(h(\cdot), T), \tag{5.6.7}$$

где

$$W_2(h(\cdot),T)=\begin{cases} M, \quad \text{при } T=0, \\ \int_0^T \bigcap_{v\in Z}[h(s)M-Z(T-s)f(Y,v,s)ds, \text{при } T>0; \end{cases}$$

3) многозначное отображение $t\to W_2(h(\cdot),t)$, $t\in[0,T]$ *секвенциально замкнуто.*

Тогда из начального положения z^0 *в.з.п.г.в.* $T_0=min\{T\geq 0:$ *для которых выполняется (5.6.7)}.*

Доказательство. Рассуждая как в теореме 1 из секвенциальной замкнутости отображения $t\to W_2(h(\cdot),t)$ и из соотношения (5.6.7) заключаем, что для некоторой суммируемой функции $h(\cdot)\in\Omega(T_0)$ существует интегрируемый селектор $\omega(\cdot)$ отображения

$$s\to\bigcap_{v\in Z}[h(s)M-Z(T_0-s)f(Y,v,s)],s\in[0,T_0],$$

что имеет место равенство

$$\sum_{l=0}^{m-1} Z_l(T_o)z_l=\int_0^{T_o}\omega(s)ds. \qquad (5.6.8)$$

Допустим, что убегающий выбрал произвольное допустимое управления $v(\cdot)\in U([0,T_o],Z)$. Тогда $\omega(s)\in h(s)M-Z(T_o-s)f(Y,v(s),s)$, $s\in[0,T_o]$ и в силу условия 1) не пустое множество

$$\Pi(s)=\big(\omega(s)+Z(T_o-s)f(Y,v(s),s)\big)\bigcap h(s)M$$

замкнуто. Тогда в силу лемм 1.4.2 и 1.4.3 существуют измеримый селектор $p(s)\in\Pi(s)$, управление преследования $u(\cdot)\in U([0,T],Y)$ и измеримое отображение $m(\cdot):[0,T]\to M$ такие, что $p(s)=\omega(s)+Z(T_o-$

$s)f(u(s),v(s),s) = h(s)m(s)$ для почти всех $s \in [0,T]$. Следовательно,

$$\omega(s) = h(s)m(s) - Z(T_o - s)f(u(s),v(s),s) \tag{5.6.9}$$

Поэтому, учитывая (5.6.3), (5.6.8), (5.6.9), выпуклость M и равенство

$$\int_0^{T_0} h(s)Mds = \left(\int_0^{T_0} h(s)ds\right)M,$$

для решения $z(\cdot)$ задачи Коши (5.6.1), (5.6.2), соответствующего управлениям $u(\cdot), v(\cdot)$ на $[0,T_o]$ имеем:

$$z(T_o) = \sum_{l=0}^{m-1} Z_l\,(T_o)z_l + \int_0^{T_o} Z(T_o - s)f(u(s),v(s),s)ds =$$

$$= \int_0^{T_o} \omega(s)ds + \int_0^{T_o} Z(T_o - s)f(u(s),v(s),s)ds =$$

$$= \int_0^{T_o} (h(s)m(s) - Z(T_o - s)f\big(u(s),v(s)\big)ds +$$

$$+ \int_0^{T_o} Z(T_o - s)f(u(s),v(s),s)ds =$$

$$= \int_0^{T_o} h(s)m(s)ds - \int_0^{T_o} Z(T_o - s)f(u(s),v(s),s)ds +$$

$$+ \int_0^{T_o} Z(T_o - s)f(u(s),v(s),s)ds = \int_0^{T_o} h(s)m(s)ds \in \int_0^{T_o} h(s)Mds =$$

$$= (\int_0^{T_o} h(s)ds)M = M, \text{ т.е. } z(T_o) \in M.$$

Следовательно, как в теореме 5.6.1, заключаем, что из начального положения z^0 в.з.п.г.в. T_0. Теорема доказана.

§5.7. Примеры

Пример 5.7.1. Рассмотрим скалярную дифференциальную игру дробного порядка

$$y'(t) + b \cdot D^{0,5}y(t) + cy(t) - \bar{u}(t) + \bar{\vartheta}(t) = 0 \qquad (5.7.1)$$

с начальным условием $y(0) = y_0, |y_0| > 0,$ и терминальным множеством $M_1 = \{0\}$. Предполагается, что b и c -действительные числа, управления преследования $\bar{u}(\cdot)$ и управления убегания $\bar{\vartheta}(\cdot)$ удовлетворяют соотношениям $|\bar{u}(t)| \leq \rho, \left|\bar{\vartheta}(t)\right| \leq \sigma,\ \rho > \sigma > 0.$

Отметим, что дифференциальная игра (5.7.1) может быть использована для описания многих физико-химических процессов в условиях конфликта или неопределённостей, в частности, для процессов релаксации при стеклообразовании переохлаждённых жидкостей [273]. Если $x_1 = y, x_2 = D^{0,5}x_1,$ то $D^{0,5}x_2 = D^{0.5}D^{0,5}x_1 = D'_{x_1} = y'$. Следовательно, уравнение (5.7.1) принимает вид

$$\begin{cases} D^{0,5}x_1 = x_2 \\ D^{0,5}x_2 = -bx_2 - cx_1 + \bar{u}(t) - \bar{v}(t) \end{cases}$$

или

$$D^{0,5}x = Ax + u - v, \qquad (5.7.2)$$

с начальным условием $x(0) = \begin{pmatrix} y_0 \\ 0 \end{pmatrix}$ и множеством $M = \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},\ x_1 = 0\right\},$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c & -b \end{pmatrix},\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \qquad u = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{u} \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{v} \end{pmatrix}.$$

Так как

$$\alpha = 0{,}5;\ m = 1, \qquad n = 0,$$

$$E_{\frac{1}{\alpha}}(At^{a};n+1)=E_2(At^{0,5};1)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(At^{0,5})^k}{\Gamma(k\cdot 0,5+1)},$$

$$E_{\frac{1}{\alpha}}(A(t-\xi)^{\alpha};\alpha)=E_2(A(t-\xi)^{0,5};0,5)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(A(t-\xi)^{0,5})^k}{\Gamma(k\cdot 0,5+0,5)},$$

то в силу теоремы 5.3.2 имеем:

1) Если

$$E_2(AT^{0,5};1)x(0)\in M-\int_0^T(T-\xi)^{-0,5}\,E_2(A((T-\xi)^{0,5};0,5)S_{\rho-\sigma}d\xi \qquad (5.7.3)$$

где $S_{\rho-\sigma}=\{x:\left||x|\right|\le\rho-\sigma\}$, то в игре (5.7.2) из начальной точки $x(0)$ в.з.п.з.в. T_0.

2) В частности, когда $c=0,\ \ b_1=-b\neq 0,$ из точки

$$x(0)=\binom{y_0}{0},\qquad y_0=(\sigma-\rho)\left(\frac{e^{b_1^2T}}{b_1^2}erfc(-b_1T^{0,5})-\frac{1}{b_1}-\frac{2}{b_1}\sqrt{\frac{T}{\pi}}\right),$$

где

$$erfc(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_z^{\infty}e^{-t^2}dt$$

- дополнительная функция ошибок [273], в.з.п.з.в. T.

Действительно, утверждение 1) следует из теоремы 5.3.2. Утверждение 2) следует из того, что

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & -b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & b_1\end{pmatrix},\qquad A^k=\begin{pmatrix}0 & b^{k-1}{}_1\\ 0 & b_1^k\end{pmatrix},\qquad k=1,2,\ldots,$$

$$E_2(At^{0,5};1)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(At^{0,5})^k}{\Gamma(k\cdot 0{,}5+1)}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\cdots+\begin{pmatrix}0 & \dfrac{t^{0,5k}b_1^{k-1}}{\Gamma(k\cdot 0{,}5+1)}\\ 0 & \dfrac{t^{0,5k}b_1^{k}}{\Gamma(k\cdot 0{,}5+1)}\end{pmatrix}+\cdots=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & b_1^{-1}\cdot E_2(b_1t^{0,5};1)-b_1^{-1}\\ 0 & E_2(b_1t^{0,5};1)\end{pmatrix},$$

$$E_2(A(t-\xi)^{0,5};0{,}5)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(A(t-\xi)^{0,5})^k}{\Gamma(k\cdot 0{,}5+0{,}5)}=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(0{,}5)}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\cdots+\frac{(t-\xi)^{0,5k}}{\Gamma(k\cdot 0{,}5+0{,}5)}\cdot\begin{pmatrix}0 & b_1^{k-1}\\ 0 & b_1^{k}\end{pmatrix}+\cdots$$

$$=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\Gamma(0{,}5)} & b_1^{-1}E_2(b_1(t-\xi)^{0,5};0{,}5)-\dfrac{1}{b_1\Gamma(0{,}5)}\\ 0 & E_2(b_1(t-\xi)^{0,5};0{,}5)\end{pmatrix}.$$

В силу

$$\Gamma(0{,}5)=\sqrt{\pi},\quad \Gamma(z+1)=z\Gamma(z),\qquad \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2},\qquad \Gamma(n)=(n-1)!,$$

$$E_2(z;1)=e^{z^2}erfc(-z),$$

$$E_2(z;\ 0{,}5)=zE_2(z;\ 1)+\frac{1}{\Gamma(0{,}5)}=ze^{z^2}erfc(-z)+\frac{1}{\sqrt{\pi}},$$

$$\int_0^T(\rho-\sigma)e^{(T-\xi)b_1^2}erfc(-b_1(T-\xi)^{0,5})d\xi=$$

$$=(\rho-\sigma)\left(\frac{e^{b_1^2T}}{b_1^2}erfc(-b_1T^{0,5})-\frac{1}{b_1}-\frac{2}{b_1}\sqrt{\frac{T}{\pi}}\right),$$

где n −натуральное число, z − действительное число, имеем:

$$E_2(At^{0,5};1)=\begin{pmatrix}1 & b_1^{-1}\cdot e^{b_1^2t}erfc(-b_1t^{0,5})-b_1^{-1}\\ 0 & e^{b_1^2t}erfc(-b_1t^{0,5})\end{pmatrix},$$

$$E_2(A(t-\xi)^{0,5};0,5)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{\pi}} & (t-\xi)^{0,5}e^{(t-\xi)b_1^2}erfc(-b_1(t-\xi)^{0,5})\\ 0 & b_1(t-\xi)^{0,5}e^{(t-\xi)b_1^2}erfc(-b_1(t-\xi)^{0,5})+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\end{pmatrix},$$

$$u(\xi)=\vartheta(\xi)+\omega,\qquad \omega=\begin{pmatrix}0\\ \rho-\sigma\end{pmatrix},\quad \text{a}$$

$$x(t)=E_2(AT^{0,5};\ 1)x(0)+\int_0^T(T-\xi)^{-0,5}E_2(A(T-\xi)^{0,5};\ 0,5)\big(u(\xi)-v(\xi)\big)d\xi=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & b_1^{-1}\cdot e^{b_1^2t}erfc(-b_1t^{0,5})-b_1^{-1}\\ 0 & e^{b_1^2t}erfc(-b_1t^{0,5})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_0\\ 0\end{pmatrix}+$$

$$+\int_0^T(T-\xi)^{-0,5}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{\pi}} & (T-\xi)^{0,5}e^{(T-\xi)b_1^2}erfc(-b_1(T-\xi)^{0,5})\\ 0 & b_1(T-\xi)^{0,5}e^{(T-\xi)b_1^2}erfc(-b_1(T-\xi)^{0,5})+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \rho-\sigma\end{pmatrix}d\xi$$

$$=\begin{pmatrix}y_0\\ 0\end{pmatrix}+$$

$$+\int_0^T(T-\xi)^{-0,5}\begin{pmatrix}(\rho-\sigma)(T-\xi)^{0,5}e^{(T-\xi)b_1^2}erfc(-b_1(T-\xi)^{0,5})\\ (\rho-\sigma)b_1(T-\xi)^{0,5}e^{(T-\xi)b_1^2}erfc(-b_1(T-\xi)^{0,5})+\frac{\rho-\sigma}{\sqrt{\pi}}\end{pmatrix}d\xi=$$

$$=\begin{pmatrix}y_0+\int_0^T(\rho-\sigma)e^{(T-\xi)b_1^2}erfc(-b_1(T-\xi)^{0,5})d\xi\\ \int_0^T(\rho-\sigma){b_1}^{0,5}e^{(T-\xi)b_1^2}erfc(-b_1(T-\xi)^{0,5})d\xi+\int_0^T\frac{(\rho-\sigma)(T-\xi)^{-0,5}}{\sqrt{\pi}}d\xi\end{pmatrix}=$$

$$= \begin{pmatrix} y_0 + (\rho - \sigma)\left(\frac{e^{b_1^2 T}}{b_1^2} erfc(-b_1 T^{0,5}) - \frac{1}{b_1} - \frac{2}{b_1}\sqrt{\frac{T}{\pi}}\right) \\ (\rho - \sigma) b_1 \left(\frac{e^{b_1^2 T}}{b_1^2} erfc(-b_1 T^{0,5}) - \frac{1}{b_1} - \frac{2}{b_1}\sqrt{\frac{T}{\pi}}\right) + \frac{2(\rho - \sigma)}{\sqrt{\pi}} T^{0,5} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ (\rho - \sigma)\left(\frac{e^{b_1^2 T}}{b_1} erfc(-b_1 T^{0,5}) - 1 - 2\sqrt{\frac{T}{\pi}}\right) + \frac{2(\rho - \sigma)}{\sqrt{\pi}} T^{0,5} \end{pmatrix} \in M,$$

т.е., $y(T) = 0$.

Пример 5.7.2. В банаховом пространстве X рассматривается следующая дифференциальная игра дробного порядка

$$D^{0,5} x(t) = \lambda x(t) - u(t) + v(t) \tag{5.7.4}$$

с начальным условием $x(0) = x_0 \in X$, где $u(\cdot)$ – управление преследования, и $\vartheta(\cdot)$ –управление убегания удовлетворяют интегральным ограничениям

$$\int_0^{\pi} ||u(t)||^2 dt \le \rho^2 \ , \quad \int_0^{\pi} ||v(t)||^2 dt \le \delta^2, \quad p > \delta \tag{5.7.5}$$

В качестве терминального множества берем множество $M = \{0\}$. Тогда, в силу теоремы 5.1.1, если

$$\pi E_2(T^{0.5}; 1) x_0 \epsilon \left\{ \int_0^T \pi (T - \xi)^{-0.5} E_2((T - \xi)^{0,5}; 0,5) p(s) ds : \right.$$

$$\left. : \int_0^T \left|\left|p(s)\right|\right|^2 ds \le (\rho - \delta)^2 \right\} \tag{5.7.6}$$

то из начальной точки x_0 в.з.п.з.в. T.

В частности, из точки x_0, для которого

$$\pi E_2(1;1)x_0 = \pi\, E_2(1;1{,}5)\frac{p}{||p||}(\rho-\delta) \tag{5.7.7}$$

в.з.п.з.в. $T = 1$, если в качестве управления преследования брать

$$u(t) = \frac{p}{||p||}(\rho-\delta) + v(t), t \geq 0.$$

Действительно, если брать $L(t) = I -$ единичный оператор, то выполняются все условия теоремы 5.1.1. Следовательно, из точки x_0в.з.п.з.в. T. В силу того, что (учитывая (5.7.6.) и (5.7.7)) $\alpha = 0{,}5;\ m = 1,\ n = 0$ и $z \cdot \Gamma(z) = \Gamma(z+1)$ имеем

$$\pi x(1) = \pi E_2(1;1)x_0 + \int_0^1 \pi(1-\xi)^{-0.5}\, E_2((1-\xi)^{0.5};0.5)\big(-u(\xi)+v(\xi)\big)d\xi =$$

$$= \pi E_2(1;1{,}5)\cdot\frac{p}{||p||}(\rho-\delta) - \int_0^1 \pi(1-\xi)^{-0.5}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1-\xi)^{0.5\text{к}}}{\Gamma(k\cdot 0.5+0.5)}\cdot\frac{p}{||p||}(\rho-\delta)d\,\xi =$$

$$= \pi E_2(1;1{,}5)\cdot\frac{p}{||p||}(\rho-\delta) - \pi\frac{p}{||p||}(\rho-\delta)\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^1\frac{(1-\xi)^{0{,}5k-0{,}5}}{\Gamma(k\cdot 0{,}5+0{,}5)}d\,\xi =$$

$$= \frac{\pi p}{||p||}(\rho-\delta)\left(E_2(1;1{,}5) - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k\cdot 0{,}5+0{,}5)\cdot\Gamma(k\cdot 0{,}5+0{,}5)}\right) =$$

$$= \frac{\pi p}{||p||}(\rho-\delta)\left(E_2(1;1{,}5) - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(0{,}5k+1{,}5)}\right) =$$

$$= \frac{\pi p}{||p||}(\rho-\delta)\big(E_2(1;1{,}5) - E_2(1;1{,}5)\big) = 0.$$

Следовательно, из точки x_0 в.з.п.з.в. $T = 1$.

Пример 5.7.3. Рассмотрим дифференциальную игру диффузионно-волнового типа [70], описываемую уравнением дробного порядка

$$(D^{0.5}y)(s,t) = \frac{\partial^2 y(s,t)}{\partial s^2} + \bar{u}(s,t) - \bar{v}(s,t), \tag{5.7.8}$$

где $t > 0$, $s\epsilon[0,\pi]$, при каждом $t \geq 0$ функции

$$y(\cdot,t), \qquad \frac{\partial}{\partial s}y(\cdot,t), \qquad \frac{\partial^2}{\partial s^2}y(\cdot,t), \qquad (D_t^a y)(\cdot,t), \qquad \bar{u}(\cdot,t), \qquad \bar{v}(\cdot,t),$$

принадлежат пространству $L_2[0,\pi]$ причем,

$$\int_0^\pi |\bar{u}\,(s,t)|^2 ds \leq \beta^2, \quad \int_0^\pi |\bar{v}\,(s,t)|^2 ds \leq \gamma^2, \;\; y(0,t) = y(\pi,t) = 0.$$

Обозначив $y(\cdot,t) = x(t)$, $\bar{u}(\cdot,t) = u(t)$, $\bar{v}(\cdot,t) = v(t)$ игру (5.7.8), можно переписать в виде

$$D^{0.5}x(t) = -Ax(t) + u(t) - v(t) \tag{5.7.9}$$

с начальным условием $x(0) = y_0$, а оператор $-A = \frac{\partial^2}{\partial s^2}$ имеющий плотную в $L_2[0,\pi]$ область определения $D = \{y\colon y'$- абсолютно непрерывна, $y'' \in L_2[0,\pi]$, $y(0) = y(\pi) = 0\}$ порождает компактную самосопряженную полугруппу $S(t)$,

$$S(t)x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2 t}\varphi_n, \;\; \text{где} \;\; \varphi_n(s) = \sqrt{2}\sin ns\,, \qquad 0 \leq s \leq \pi,$$

$a_n = < x, \varphi_n >$ и последовательность $\{\varphi_n\}$ образует ортонормальный базис [18]. Следующее утверждение, которое является следствием теоремы 5.3.1 обеспечивает разрешимость з.п. в игре (5.7.9) с терминальным множеством $M = \{x: \|x\| \leq \ell\}$. Если имеет место включение

$$Q(\tau)y_0 \in S_\ell - \int_0^\tau R(\tau - s)S_{\beta-\gamma}ds,$$

где

$$Q(\tau) = \int_0^\infty \xi_{0.5}(\sigma)\mathrm{S}\,(\tau^{0.5}\sigma)d\sigma,$$

$$R(\tau - s) = 0{,}5\int_0^\infty \sigma(\tau - s)^{-0{,}5}\xi_{0.5}(\sigma)\mathrm{S}((\tau - s)^{0.5}\sigma)d\sigma,$$

$$\int_0^\infty e^{-\sigma a}\xi_{0.5}(\sigma)\,d\sigma = \sum_{j=0}^\infty \frac{(-a)^j}{\Gamma(1 + 0{,}5j)}, \quad a > 0, \;\; S_k = \{y \in L_2[0,\pi]: \|y\| \leq k\},$$

то:

1) из точки y_0 в.з.п.з.в. τ;

2) в частности, из точки y_0, для которого

$$\int_0^\infty \xi_{0,5}(\sigma)S(\sigma)y_0 d\sigma + \int_0^1 0{,}5\int_0^\infty \sigma(1 - s)^{-0{,}5}\xi_{0,5}(\sigma)S((1 - s)^{0,5}\sigma)y_2 d\sigma\, ds = y_1,$$

где

$$\|y_1\| = l, \qquad \|y_2\| = \beta - \gamma, \;\; \int_0^\infty e^{-n^2\sigma}\xi_{0,5}(\sigma)d\sigma = E_2(-n^2; 1),$$

в.з.п.з.в. $\tau = 1$.

Действительно, положив $u(s) = v(s) + y_2$ и учитывая

$$Q(1) = \int_0^\infty \xi_{0.5}(\sigma) S(\sigma) d\sigma,$$

$$R(1-s) = 0{,}5 \int_0^\infty \sigma (1-s)^{-0{,}5} \xi_{0.5}(\sigma) S((1-s)^{0{,}5}\sigma) d\sigma, \qquad (5.3.2)$$

имеем:

$$x(1) = Q(1)y_0 + \int_0^1 R(1-s)\big(u(s) - v(s)\big)ds = \int_0^\infty \xi_{0.5}(\sigma) S\,(\sigma) y_0 d\sigma +$$

$$+ \int_0^1 0{,}5 \int_0^\infty \sigma (1-s)^{-0{,}5} \xi_{0,5}(\sigma) S((1-s)^{0{,}5}\sigma) y_2 d\sigma\, ds =$$

$$= y_1 - \int_0^1 0{,}5 \int_0^\infty \sigma (1-s)^{-0{,}5} \xi_{0,5}(\sigma) S((1-s)^{0{,}5}\sigma) y_2 d\sigma\, ds +$$

$$+ \int_0^1 0{,}5 \int_0^\infty \sigma (1-s)^{-0{,}5} \xi_{0,5}(\sigma) S((1-s)^{0{,}5}\sigma) y_2 d\sigma\, ds = y_1 \in M.$$

ОБСУЖДЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Основными результатами диссертационной работы являются теоремы 2.2.1, 2.3.1, 2.3.2, 2.4.1, 2.4.2, 2.4.5, 2.4.6, 2.4.7, 2.4.8,2.5.1, 3.3.1, 3.3.3, 3.3.4,3.3.6, 4.1.1, 4.2.1, 4.3.1, 5.1.1, 5.1.2, 5.2.1, 5.2.2, 5.2.4, 5.3.1, 5.3.2, 5.4.1, 5.6.1, 5.6.2.

Основные результаты диссертационной работы дополняют и развивают некоторые результаты Л.С. Понтрягина, М.С. Никольского, П.Б. Гусятникова, А.Я. Азимова, Н. Сатимова, А.А. Чикрия, Н. Мамадалиева, М.Ш. Маматова, Е.М. Мухсинова и М.Н. Муродовой, когда динамика игры описывается обыкновенным дифференциальным уравнением, дифференциальным уравнением запаздавшего типа, дифференциальным уравнением нейтрального типа, дифференциальным или интегро-дифференциальным уравнением дробного порядка в банаховых пространствах.

В работе исследуется разрешимость з.п. и з.у. в смысле Л.С. Понтрягина.

Следуя подходу Л.С. Понтрягина нам удалось дополнить, развивать и обобщить результаты выше указанных работ для более широкого класса задач, когда игра происходит в бесконечномерных банаховых пространствах. Эти обобщения позволяют исследовать конфликтно-управляемые системы не только с сосредоточенными, но и с распределенными параметрами.

Вторая глава посвящена линейным и квазилинейным дифференциальным играм преследования в банаховом пространстве. Основными теоремами второй главы являются теоремы 2.2.1, 2.3.1, 2.3.2, 2.4.1, 2.4.2, 2.4.5, 2.4.6, 2.4.7, 2.4.8 и 2.5.1.

В теореме 2.2.1 исследуется разрешимость з.п. и оптимальность времени преследования для квазилинейной дифференциальной игры в банаховом пространстве X, когда динамика игры описывается дифференциальным уравнением

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(u(t), v(t), t) \tag{5.0.1}$$

и замкнутым терминальным множеством M, где заканчивается игра.

В игре (5.0.1) $t \geq 0,\ x(t) \in X,\ u(\cdot) \in U([0,\infty), Y) -$ управление преследования, $v(\cdot) \in U([0,\infty), Z) -$ управление убегания, $Y, Z -$ банаховые пространства, а $A: D \to X -$ л.з.о., имеющий плотную в X область определения D, п.с.н.п. $S(t)$ [18]. Следуя А. Фридману [308] и Ю.С. Осипову [159], когда отображение $t \to f(u(t), v(t), t)$ локально интегрируемо, решением задачи (5.0.1) с начальным положением $x(0) = x_0 \in X$ и соответствующее управлениям $u(\cdot), v(\cdot)$, будем называть отображение

$$x(t) = S(t)x_o + \int_0^t S(t-\tau) f(u(\tau), v(\tau), \tau) d\tau, \qquad t \in [0, T],$$

где интеграл понимается в смысле Бохнера.

В теореме 2.2.1, при выполнении следующих условий:

1) $X, Y -$ сепарабельные банаховы пространства, а терминальное множество M выпукло и компактно относительно топологии $\sigma(X, X^*)$;
2) начальная точка $x_o \in X \backslash M$ такая, что при некотором $T \geq 0$ имеет место включение

$$S(T)x_o \in M - W_1(T),$$

где

$$W_1(t) = \int_0^t \bigcap_{v \in Z} S(t-\tau)\, f(Y, v, \tau)\, d\tau.$$

3) многозначное отображение $t \to W_1(t),\ t \in [0, T]$ замкнуто относительно топологии $\sigma(X, X^*)$ и при каждом t непустозначно и выпуклозначно;
4) существует отображение $w: Y \to Z$ такое, что при всех $u \in Y, t \in [0, T], 0 \leq \tau \leq t$ выполняется включение

$$S(t-\tau) f(u, w(u), \tau) \in \bigcap_{v \in Z} S(t-\tau)\, f(Y, v, \tau)$$

и для каждого $u(\cdot)$ суперпозиция $w(u(\cdot))$ измерима, доказывается, что из начальной точки x_0 в.з.п.о.в. $T = T(x_0)$.

При этом управление преследования $u(\cdot)$ выбирается из равенства

$$p(t) = S(T-t)f(u(t), v(t), t),$$

где $p(\cdot)$ − некоторый интегрируемый селектор отображения

$$\tau \to \bigcap_{v \in Z} S(T-\tau)\, f(Y, v, \tau)$$

и в каждый момент t используется информация о $v(t)$ и $x(s), 0 \le s \le t$.

Отметим, что теорема 2.2.1 обобщает на бесконечномерный случай соответствующие результаты Л.С. Понтрягина (теорема 1.3.1), П.Б. Гусятникова и М.С. Никольского (теорема 1.3.3) и Е.М. Мухсинова [133, 134]. При этом если работы Л.С. Понтрягина и П.Б. Гусятникова, М.С. Никольского посвящены конечномерным линейным дифференциальным играм, то работа Е. М. Мухсинова посвящена бесконечномерным дифференциальным играм. Кроме этого, например, в работе Л.С. Понтрягина, при выборе $u(t)$ в каждый момент t используется информация о $v(s)$ и $x(s)$, $t \le s \le t + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

В теореме 2.3.1 исследуется разрешимость з.п. для квазилинейной дифференциальной игры в гильбертовом пространстве X, когда динамика игры описывается дифференциальным уравнением запаздывающего типа

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \int_{-h}^{0} d\eta\,(s)x(t+s) + f(u(t), v(t), t) \qquad (5.0.2)$$

и замкнутым терминальным множеством M, где $\eta(\cdot)$ − мера Стилтьеса [331].

В игре (5.0.2) $u(\cdot)$ − управление преследования, $v(\cdot)$ − управление убегания, отображение $t \to f(u(t), v(t), t)$ локально интегрируемо по Бохнеру, а л.з.о. $A: D \to X$, имеющий плотную в X область определения D, п.с.н.п. $S(t)$. В работе [331], используя полугруппу $S(t)$, строится фундаментальное решение $\Phi(t)$. При соответствующих предположениях доказывается, что из начального положения $\varphi(\cdot) \in L_p([-h, 0], X)$ в.з.п.г.в.

$$T_1 = min\,\{T \geq 0: \pi\Phi(T)\varphi(0) +$$

$$+\int_{-h}^{0}\left(\int_{-h}^{s}\pi\Phi(T-s+\xi)d\eta(\xi)\right)\varphi(s)ds \in \pi\,\mathrm{M} - \Omega(T)\},$$

где

$$\Omega(t) = \int_0^t \bigcap_{v\in Z} \pi\,\Phi(t-s)f(Y,v,s)ds\,.$$

Отметим, что игра (5.0.2) охватывает игры описываемые:

- дифференциальными уравнениями вида

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f\big(u(t), v(t)\big), \qquad \text{когда } h = 0;$$

- дифференциально-разностными уравнениями вида

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{i=1}^{m} A_i\, x(t-h_i) + f(u(t), v(t), t)\,,$$

где $0 < h_1 < h_2 < \cdots < h_m = h$.

В теореме 2.3.2, когда выполнены все условия теоремы 2.3.1 и следующие условия:

- множество πM выпукло, а отображение $t \to \Omega(t)$ выпуклозначно;
- существует отображение $\omega: Y \to Z$ такое, что при всех $u \in Y, t \in [0, T_1]$, $0 \leq s \leq t$, выполняется включение

$$\pi\Phi(t-s)f(u,\omega(u),s)ds \in \bigcap_{v\in Z}\pi\Phi(t-s)f(Y,v,s)$$

и для каждого допустимого $u(\cdot)$ суперпозиция $\omega(u(\cdot))$ измерима, доказывается, что время преследования $T_1 = T(\varphi)$ оптимально. При доказательстве теорем 2.3.1 и 2.3.2 используется первый прямой метод Л.С. Понтрягина [182], лемму 1.4.3 о существовании измеримого селектора у неявно заданного отображения и теорему 1.4.1 о строгой отделимости. Эти теоремы обобщают результаты Н. Сатимова (теорема 1.3.4), Е.М. Мухсинова и М.Н.

Муродовой (теорема 1.3.12). При этом, если в теореме 2.3.2 доказывается оптимальность времени преследования, то вышеуказанные авторы решают только задачу качества.

В теоремах 2.4.1 и 2.4.2 рассматривается квазилинейная дифференциальная игра в банаховом пространстве X, когда динамика игры описывается функционально–дифференциальным уравнением нейтрального типа в форме Дж. Хейла с л.з.о. A вида

$$\dot{x}\,(t) - C\dot{x}(t-h) = Ax(t) + Bx(t-h) + f(u(t), v(t), t)\,, \qquad (5.0.3)$$

где операторы $B,\ C$ и $AC -$ линейны и ограничены.

При соответствующих предположениях, доказано, что в игре (5.0.3) из начального положения $\varphi(0)$, где функция $\varphi(\cdot)\colon [-h, 0] \to X$ - абсолютно непрерывная, в.з.п.г.в. T. При этом в теореме 2.4.2 измеримое управление преследования $u(\cdot)$ выбирается по формуле $\omega(s) = \gamma(s)m(s) - \Phi(T - s)f(u(s), v(s), s)$, где $\omega(s)$ и $m(s)$ измеримые селектора отображений

$$s \to \bigcap_{v \in Z} [\gamma(s)M - \Phi(T-s)f(Y, v, s)]$$

и M соответственно, а суммируемая функция $\gamma(\cdot)\colon [0, T] \to [0, \infty)$ такая, что

$$\int_0^T \gamma(s)\mathrm{d}s = 1.$$

Надо отметить, что здесь при выборе $u(t)$, в момент времени t, используется информация о $v(t)$ и $x(s)$, $0 \le s \le t$. Результаты теорем 2.4.1 и 2.4.2 обобщают результаты Н. Сатимова [230] и Е.М. Мухсинова (теорема1.3.11).

В теоремах 2.4.5–2.4.8 исследуется разрешимость з.п. для квазилинейной дифференциальной игры нейтрального типа

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} B_i\dot{x}(t-h_i) + Ax(t) + \sum_{i=1}^{n} A_i x(t-h_i) + f\big(t, u(t), v(t)\big) \qquad (5.0.4)$$

В этих теоремах при соответствующих предположениях описано множество начальных положений, из которых в.з.п.. Кроме этого, в теоремах 2.4.6 и 2.4.8 при дополнительных условиях доказана оптимальность времени преследования. Результаты теорем 2.4.6 и 2.4.8 являются обобщением некоторых линейных результатов Н. Сатимова (теоремы 1.3.4 и 1.3.5), П.Б. Гусятникова, М.С. Никольского (теорема 1.3.3), Е.М. Мухсинова и М. Муродовой (теорема 1.3.12).

В теореме 2.5.1 исследуется разрешимость з.п. для дифференциальной игры (5.0.4) в гильбертовом пространстве. При этом терминальное множество M, которое является замкнутым подпространством пространства X, представимо в виде $M = M_0 + M_1$, где $M_1 \subset M_0^{\perp}, M_0^{\perp} -$ ортогональное дополнение к M_0 в X. Полученные результаты обобщают результаты работы Е.М. Мухсинова и М. Муродовой [129], где з.п. рассматривается для дифференциальной игры с запаздывающим аргументом.

Третья глава посвящена линейным и квазилинейным дифференциальным играм с интегральными ограничениями на управление игроков в гильбертовом пространстве. Основными теоремами третьей главы являются теоремы 3.3.1, 3.3.3, 3.3.4 и 3.3.6. В теореме 3.3.1, в гильбертовом пространстве X, исследуется разрешимость з.п. для линейной дифференциальной игры нейтрального типа

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} B_i \dot{x}(t - h_i) + Ax(t) - Cu(t) + Dv(t) \qquad (5.0.5)$$

с терминальном множеством M, которое является замкнутым линейным подпространством пространства X.

В игре (5.0.5) $0 < h_1 < h_2 < \ldots < h_n = h$, операторы $B_i: X \to X$, $C: Y \to X$, $D: Z \to X$, $AB_i: X \to X$ линейны и ограниченны, а $A: D \to X$ – л.з.о., имеющий плотную в X область определения, п.с.н.п. $S(t)$. Учитывая эту полугруппу можно строить фундаментальное решение $\Phi(t)$ [302]. При этом на управления игроков наложены интегральные ограничения:

$$\int_0^\infty \|u(s)\|^2\, ds \le \rho^2, \int_0^\infty \|v(s)\|^2\, ds \le \sigma^2, \text{где } \rho, \sigma > 0. \qquad (5.0.6)$$

При соответствующих предположениях доказывается, что из начального положения $\varphi(0)$, где функция $\varphi(\cdot): [-h, 0] \to X -$ абсолютно непрерывная, в.з.п.. При этом управление преследования выбирается по формуле

$$u(t) = \begin{cases} p(t) + L(T-t)\vartheta(t), & 0 \le t \le T, \\ 0, & t > T, \end{cases} \qquad (5.0.7)$$

где $p(\cdot) -$ некоторое измеримое отображение, удовлетворяющее неравенству

$$\int_0^T \|p(s)\|^2 ds \le \big(\rho - \lambda(T)\big),^2$$

$L(t): Z \to Y -$ линейный ограниченный оператор, непрерывно зависящий от $t \ge 0$, такой, что $\pi\Phi(t)D = \pi\Phi(t)CL(t)$,

$$\lambda^2(t) = sup\left\{\int_0^t \|L(s)\vartheta(t-s)\|^2\, ds: \int_0^t \|\vartheta(s)\|^2 ds \le \sigma^2\right\},$$

то при всех $t \ge 0$ и $\rho \ge \lambda(t)$, причем при выборе $u(t)$, в каждый момент времени t, используется текущая информация о $v(t)$ и $\varphi(0)$.

В теоремах 3.3.3, 3.3.4 и 3.3.6 исследуется разрешимость з.п. для дифференциальной игры нейтрального типа вида (5.0.4), когда на управление игроков наложены интегральные ограничения вида (5.0.6).

В теореме 3.3.3, используя конструкцию типа первого прямого метода Понтрягина и идею о растяжении времени $J(t)$, описано множество начальных положений, из которых в.з.п.. При этом управление преследования выбирают по формуле

$$u(t)=\begin{cases}\bar{u}(t) & \text{при} \quad t\in[0,\tau),\\ p(t-\tau)+L(\tau+T-t)\cdot\vartheta\big(J(T)-J(\tau+T-t)\big)\times \\ \qquad\times J'(\tau+T-t) \text{ при } t\in[\tau,\tau+T],\\ 0 & \text{при} \quad t>\tau+T,\end{cases} \tag{5.0.8}$$

а для выбора $u(t)$ используется информация о $\vartheta(s), 0\le s\le t$ и $\varphi(0)$. Следствием теоремы 3.3.3 является теорема 3.3.4, если положить $J(t)\equiv t$. При этом, в теореме 3.3.4, для любого измеримого управления убегания $\vartheta(\cdot)$ соответствующее управление преследования $u(\cdot)$ выбирается по формуле (5.0.7). В теореме 3.3.6 приведены достаточные условия, обеспечивающие разрешимость з.п. для квазилинейной дифференциальной игры. Полученные в этой главы результаты обобщают конечномерные результаты А.Я. Азимова (теорема 1.3.8), М.С. Никольского [155] и Н. Мамадалиева (теорема 1.3.9).

Четвертая глава посвящена квазилинейным и нелинейным дифференциальным играм преследования и убегания. Основными теоремами четвертой главы являются теоремы 4.1.1, 4.2.1, 4.3.1.

В теореме 4.1.1, в гильбертовом пространстве X, исследуется разрешимость з.у. для нелинейной дифференциальной игры нейтрального типа

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+f(\dot{x}(t-h),x(t-h),u(t),v(t),t) \tag{5.0.9}$$

В игре (5.0.9) л.з.о. A п.с.н.п. $S(t)$, а терминальные множество M, являющейся замкнутым подпространством пространства X инвариантно относительно полугруппы $S(t)$, т. е. $S(t)M=M$.

В теореме 4.1.1, когда $\{h_i\}_{i=1}$ – счетный ортонормальный базис в X, а множество

$$W(h_i,t)=\bigcap_{u\in Y}\{\langle h_i,S^{-1}(t)f(\dot{x}(t-h),x(t-h),u,v,t)\rangle : v\in Z\}$$

непусто, при выполнении соответствующих условий доказывается, что в игре

(5.0.9) из любого начального положения $\varphi(s), \varphi(0) \in X \backslash M$ в.у..

Полученный результат обобщает теорему 1.3.6 и соответствующий результат работы [127]. Если в теореме 1.3.6 дифференциальная игра рассматривалась в конечномерном пространстве, то в работе Е.М. Мухсинова и М.Н. Муродовой [127] дифференциальная игра описывается уравнением запаздывающего типа в гильбертовом пространстве.

В теореме 4.2.1, в гильбертовом пространстве X, исследуется разрешимость з.у. для квазилинейной дифференциальной игры нейтрального типа

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(u, v) + \mu g(\dot{x}(t-h), x(t-h), u, v)\,, \qquad (5.0.10)$$

когда множество M является замкнутым линейным подпространством пространства X. При соответствующих предположениях, доказывается, что в игре (5.0.10) из любого начального положения $\varphi(0) \in X \backslash M$ в.у.. При этом управление убегания можно выбрать таким образом, что для расстояний $\xi(t)$ и $\eta(t)$ от точки $x(t)$ до пространств M и $M^{\perp}$ имеет место оценка

$$\xi(t) > \begin{cases} c_1 \varepsilon^k (\eta(t)+1)^{-k} & \text{при } \xi(0) > \varepsilon, t \in [0, \infty), \\ c_1 \xi^k(0)(\eta(t)+1)^{-k} & \text{при } \xi(0) \le \varepsilon, t \in [0, \theta], \\ c_1 \varepsilon^k (\eta(t)+1)^{-k} & \text{при } \xi(0) \le \varepsilon, t \in [\theta, \infty), \end{cases}$$

где $c_1, \mu_1,\ \theta -$ константы.

Результат этой теоремы обобщает конечномерные результаты Л.С. Понтрягина (теорема 1.3.2), Е.Ф. Мищенко, Н. Сатимова [124] и Н. Сатимова (теорема 1.3.7).

В теореме 4.3.1, в сепарабельном банаховом пространстве X, исследуется разрешимость з.у. для нелинейной дифференциальной игры запаздывающего типа

$$\dot{x}(t) = f(x_t, u(t), v(t), t)\,. \qquad (5.0.11)$$

Если отображение $f(\cdot,\cdot,\cdot,)$ удовлетворяет условиям Каратеодори, терминальное множество имеет вид $M = \{x \in X: V(x) \leq 0\}$, отображение $V: X \to (-\infty, \infty)$ локально удовлетворяет условию Липшица, отображение $(x, u, t) \to Z(x, u, t) = \{\vartheta \in Z: V^{+'}(x, f(x_t, u, v, t) \geq \lambda(V(x), t)\}$ измеримо и замкнутозначно, где $V^{+'}(x, z) = \lim\limits_{h\to 0}[V(x + hz) - V(x)]h^{-1}$, функция $(\xi, t) \to \lambda(\xi, t)$, непрерывная по $\xi \in (-\infty, \infty)$ и измеримая по $t \in [0, \infty)$, такая, что минимальное решение $\underline{\xi}(\cdot)$ задачи $\xi'(t) = \lambda(\xi(t), t)\xi(0) = V\big(\varphi(0)\big) > 0$ определено на $[0, \infty)$ и $\underline{\xi}(t) > 0$ при всех $t \geq 0$, то доказано, что в игре (5.0.11) из каждой точки множества $\Omega = \{\varphi(0): \varphi \in C([-h, 0], X)$ и $V(\varphi(0)) > 0\}$ в.у..

Пятая глава посвящена дифференциальным играм дробного порядка в банаховых пространствах. На основе аналога прямого метода Понтрягина [182] исследована разрешимость з.п., когда на управление игроков наложены геометрические или интегральные ограничения.

Основными теоремами пятой главы являются теоремы 5.1.1, 5.1.2, 5.2.1, 5.2.2, 5.2.4, 5.3.1, 5.3.2, 5.4.1, 5.6.1, 5.6.2.

В теоремах 5.1.1–5.2.4, в гильбертовом пространстве X, рассматривается квазилинейная дифференциальная игра дробного порядка $\alpha, m - 1 < \alpha < m, m = 1,2, \ldots$

$$D^{\alpha}x(t) = Ax(t) + f(u(t), v(t), t), \qquad (5.0.12)$$

где $t \geq 0, Y$ и $Z -$ гильбертовые пространства, на управление игроков $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ наложены интегральные ограничения (5.0.6), отображение $f(\cdot,\cdot,\cdot,)$ удовлетворяет условиям Каратеодори, а $D^{\alpha} -$ дробная производная Капуто порядка α от функции $x(t)$.

В теореме 5.1.1 $A -$ линейный ограниченный оператор, управление

игроков $u(\cdot)$, $\vartheta(\cdot)$ удовлетворяют интегральным ограничениям (5.0.6). Для игры (5.0.12) исследуется разрешимость з.п. с начальным условием

$$\left.\frac{d^i}{dx^i}x(t)\right|_{t=0+} = x_i^0, \qquad i = 0,1,\dots,m-1 \tag{5.0.13}$$

и терминальным множеством M, которое является линейным замкнутым подпространством пространства X.

В теореме 5.1.1 при соответствующих условиях доказывается, что из начального положения $x^0 = (x_0^0, x_1^0, \dots, x_{m-1}^0)$ в.з.п.з.в. T.

Теорема 5.1.2 является обобщением теоремы 5.1.1, когда игра (5.0.12) является квазилинейной. Отметим, что в теоремах 5.1.1 и 5.1.2, соответствующее управление преследования $u(\cdot)$ выбирают по формуле (5.0.7). При этом, при выборе $u(t)$, в каждый момент времени t, используется только текущая информация о $\vartheta(t)$ и начальное положение x^0. Близкие результаты получены в работе А.А. Чикрия и И.И. Матичина [273], где рассматривается конечномерная линейная дифференциальная игра с геометрическими ограничениями.

В теоремах 5.2.1 и 5.2.2, в гильбертовом пространстве X, рассматривается линейная дифференциальная игра дробного порядка $\alpha, 1 < \alpha < 2$ вида (5.0.12).

В линейной игре (5.0.12) $t \geq 0$, $x(t) \in X$, л.з.о. A п.с.н.п. $S_\alpha(t)$, а терминальное множество M является замкнутым линейным подпространством пространства X. При соответствующих предположениях, доказывается, что в игре (5.0.12) из начальной точки (x_0, x_1) в.з.п.з.в.T. Качественным различием теорем 5.2.1 и 5.2.2 от теорем 5.1.1 и 5.1.2 является то, что в теоремах 5.1.1 и 5.1.2 линейный оператор A является ограниченным, а в теоремах 5.2.1 и 5.2.2 замкнутым, что существенно расширяет круг рассматриваемых задач. В теореме 5.2.4 доказывается в.з.п., когда игра описывается квазилинейным дифференциальным уравнением дробного порядка $\alpha, 1 < \alpha < 2$. При этом, если

в теоремах 5.2.1 и 5.2.4 соответствующее управление преследования $u(\cdot)$ выбирается по формуле (5.0.7), то в теореме 5.2.2 выбирают по формуле (5.0.8).

В теоремах 5.3.1 и 5.3.2 исследуется разрешимость з.п. для дифференциальной игры дробного порядка. В теореме 5.3.1, в сепарабельном банаховом пространстве X, рассматривается игра, описываемая уравнением дробного порядка $\alpha, 0 < \alpha < 1$ вида (5.0.12), где л.з.о. A п.с.н.п. $S(t)$. При соответствующих предположениях доказывается, что в игре (5.0.11) из начальной точки x_0 в.з.п.. В теореме 5.3.2 рассматривается игра, описываемая дифференциальным уравнением дробного порядка $\alpha,\ m-1 < \alpha < m,\ m = 1,2,\ldots$ вида (5.0.12) с начальным условием (5.0.13). При соответствующих предположениях доказывается, что в игре (5.0.12) в.з.п.. Теоремы 5.3.1 и 5.3.2 обобщают конечномерный результат М.Ш. Маматова (теорема 1.3.10), где рассматривается конечномерная линейная дифференциальная игра дробного порядка.

В теореме 5.4.1 исследуется разрешимость з.п. для интегро-дифференциальной игры дробного порядка $\alpha,\ m-1 < \alpha < m,\ m = 1,2,\ldots$, вида

$$D^{\alpha}x(t) = Ax(t) + \int_0^t B(t-s)x(s)ds + f(u(t), v(t), t) \qquad (5.0.14)$$

и замкнутым терминальным множеством M, где заканчивается игра.

В игре (5.0.14) A – л.з.о., имеющий плотную в X область определения, $\{B(t)\}_{t\geq 0}$ – семейство л.з.о. в X с областями определения $D\big(B(t)\big) \supset D(A)$ такие, что функции $B(t)x$ сильно измеримые для $x \in D(A)$ и существует положительная локально суммируемая функция $b(\cdot)$ такая, что $\|B(t)x\| \leq b(t)(\|x\| + \|A(x)\|)$ для всех $x \in D(A)$ и для почти всех $t \geq 0$. Далее, локально интегрируемое отображение $f: Y \times Z \times [0,\infty) \to X$ такое, что для любых допустимых управлениях игроков, задача Коши

$$D^{\alpha}x(t) = Ax(t) + \int_0^t B(t-s)x(s)ds + f(u(t), v(t), t),$$

$$x(0) = x_0, \qquad \mathrm{x}^n(0) = 0, \qquad n = 1,2, \dots, m-1$$

имеет решение

$$x(t\,) = S_{\alpha}(t)x_0 + \int_0^t S_{\alpha}(t-s)f(u(s), v(s), s)ds,$$

где $S_{\alpha}(t) - \alpha$- резольвентный оператор [67].

При соответствующих предположениях доказывается, что в игре (5.0.14) из начальной точки x_0 в.з.п..

В теоремах 5.6.1 и 5.6.2, в сепарабельном банаховом пространстве, исследуется разрешимость з.п. для дифференциальной игры с несколькими дробными производными Герасимова-Капуто

$$D^{\alpha}z(t) = \sum_{k=1}^{n} D^{\alpha_k} A_k z(t) + f(u(t), v(t), t) \qquad (5.0.15)$$

и замкнутым терминальным множеством M, когда на управления игроков наложены геометрические ограничения.

В игре (5.0.15) $t \geq 0$, $z(t) \in X$, Y и $Z -$ сепарабельные банаховы пространства, $u(\cdot) \in U([0,\infty), Y) -$ управление преследования, $\vartheta(\cdot) \in U([0,\infty), Z) -$ управление убегания, $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n < \alpha, m = [\alpha] + 1, m_k = [\alpha_k] + 1$, $A_k -$ линейные ограниченные операторы, $k = 1,2, \dots n,$ а отображение $f(\cdot,\cdot,\cdot,)$ удовлетворяет условиям Каратеодори. При соответствующих предположениях, доказывается, что в игре (5.0.15) с начальными условиями $z^l(0) = z_l$, $l = 0,1, \dots$, m в.з.п.. При этом выбор $u(t)$ в теоремах 5.6.1 и 5.6.2 осуществляется по формулам (5.6.6) и (5.6.9) соответственно. А для выбора $u(t)$ в момент времени t используется следующая информация о z^0 и $\vartheta(s), 0 \leq s \leq t$.

ВЫВОДЫ

Основные научные результаты диссертации

В диссертационной работе получены следующие результаты:

- в банаховом пространстве для квазилинейной дифференциальной игры с л.з.о., когда на управление игроков наложены геометрические ограничения, найдены достаточные условия, позволяющие обеспечить в.з.п.о.в. [18–А], [40–А];
- в банаховом пространстве найдено множество начальных положений, из которых в.з.п.о.в. в дифференциальных играх запаздывающего типа [5–А], [20–А], [38–А];
- в банаховом пространстве найдено множество начальных положений, из которых в.з.п. в дифференциальных играх нейтрального типа [2–А], [4–А], [8–А], [12–А], [19–А], [22–А], [31–А], [37–А];
- в гильбертовом пространстве найдено множество начальных положений, из которых в.з.п. в дифференциальных играх, когда на управление игроков наложены интегральные ограничения [3–А], [10–А], [13–А], [16–А], [26–А], [27–А], [28–А], [29–А], [35–А], [36–А], [39–А];
- в гильбертовом пространстве найдены достаточные условия о разрешимости з.у. в дифференциальных играх [17–А], [23–А];
- в банаховом пространстве доказаны теоремы о разрешимости з.п. и з.у. для нелинейной дифференциальной игры запаздывающего типа [9–А], [15–А];
- найдено множество начальных положений, из которых в.з.п. в дифференциальных играх дробного порядка, когда на управление игроков наложены геометрические или интегральные ограничения[21–А], [24–А], [30–А], [32–А], [34–А];
- доказаны теоремы о разрешимости з.п. в интегро-дифференциальных играх дробного порядка, когда на управления игроков наложены геометрические или интегральные ограничения[6–А], [11–А], [14–А],

[33–A];

- доказаны теоремы о разрешимости з.п. в дифференциальных играх с несколькими дробными производными [7–A], [25–A].

Рекомендации по практическому использованию результатов

Результаты диссертации можно применить в теории дифференциальных игр, в теории управляемых процессов, протекающих в условиях конфликта и неопределенности, динамика которых описывается дифференциальными уравнениями с запаздывающими аргументами, нейтрального типа и с дробными производными, а также при решении игровых задач, движение которых можно моделировать как дифференциальные игры преследования и убегания в подходящих банаховых пространствах.

Результаты диссертации можно использовать при чтении спецкурсов и написании дипломных работ для магистрантов, аспирантов и студентов старших курсов математических, физических и экономических специальностей высших учебных заведений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

А) Список использованных источников

1. Азамов А.А. Игра преследования–убегания на реберном остове правильных многогранников [Текст] / А.А. Азамов, А.Ш. Кучкаров, А.Г. Холбоев // Математическая теория игр и ее приложения. – 2015. – №7(3). – С. 3–15.
2. Азамов А.А. К первому прямому методу Понтрягина в задачах преследования [Текст] / А.А. Азамов // Матем. заметки. – 2011. – Т. 90. – В. 2. – С. 163–167.
3. Азамов А.А. О задачах управляемости и преследования в линейных дискретных системах [Текст] / А.А. Азамов, А.Ш. Кучкаров // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 2010. – №3. – С. 21–26.
4. Азамов А.А. О модифицированном третьем методе в задаче преследования [Текст] / А.А. Азамов, Б.Т. Саматов // Неклассические задачи математической физики, Фан, Ташкент. – 1985. – С. 174–184.
5. Азамов А.А. О втором методе Понтрягина в линейных дифференциальных играх преследования [Текст] / А. А. Азамов // Мат. сб. – 1982. – Т. 118. – В.3. – С. 422–430
6. Азамов А.А. Пример нелинейной дифференциальной игры, удовлетворяющей условиям теоремы Понтрягина [Текст] / А.А. Азамов // ДАН Уз.ССР. – 1979. – №7. – С. 6–8.
7. Азамов А.А. О задаче убегания в двумерных дифференциальных играх [Текст] / А.А. Азамов // ДАН Уз.ССР. – 1974. – №8. – С. 3–5.
8. Азимов А.Я. Об одном способе преследования в линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями [Текст] / А.Я. Азимов // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. – 1974. – № 2. – С. 31–35.
9. Азимов А.Я. Линейная дифференциальная игра убегания с интегральными ограничениями [Текст] / А.Я. Азимов // Ж. вычисл. мат. и мат. физ. – 1974. – Т.14. – №6. – С. 1427–1436.

10. Азимов А.Я. О некоторых классах дифференциальных игр с интегральными ограничениями [Текст] / А.Я. Азимов, Ф.В. Гусейнов // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. – 1972. – №3. – С. 9–16.
11. Айзекс Р. Дифференциальные игры [Текст] / Р. Айзекс. – М.: Мир, 1967. - 479 с.
12. Алексеев В.М. Оптимальное управление [Текст] / В.М. Алексеев, В.М. Тихомиров, С.В. Фомин. – М.: Наука, 1979. – 432 с.
13. Алимов Х.Н. Дифференциальные игры преследования, описываемые уравнениями дробного порядка [Текст] / Х.Н. Алимов // Материалы международной конференции «Оптимальное управление и дифференциальные игры» посвященной 110-летию со дня рождения Л.С. Понтрягина (12-14 декабря 2018г.). – Москва, 2018. – С. 21–23.
14. Алимов Х.Н. О задаче преследования, описываемой дробными дифференциальными уравнениями [Текст] / Х.Н. Алимов, М.Ш. Маматов // Научный вестник СамГУ. Самарканд. – 2016. – №1. – С. 5–9.
15. Альбрехт Э.Г. Построение приближенных решений некоторых квазилинейных дифференциальных игр [Текст] / Э.Г. Альбрехт // Тр. Ин-та мат-ки и механики УрО РАН. – 2000. – Т. 6. – №1. – С. 27–38.
16. Байзаев С. Ограниченные решения некоторых обыкновенных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве [Текст] / С. Байзаев, Э. Мухамадиев // Вестник Таджикского госуниверситета права, бизнеса и политики. – 2010. – №1 (41). – С. 108–112.
17. Байзаев С. О нормальной разрешимости дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом [Текст] / Э. Мухамадиев, А. Таха, С. Байзаев // Узбекский математический журнал. – 1997. – №2. – С. 58–62.
18. Балакришнан А.В. Прикладной функциональный анализ [Текст] / А.В. Балакришнан. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
19. Банников А.С. Нестационарная задача группового преследования [Текст] / А.С. Банников // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 2009. – №4. – С. 29–34.

20. Банников А.С. К нестационарной задаче группового преследования [Текст] / А.С. Банников, Н.Н. Петров // Тр. Ин-та мат-ки и механики УрО АН России. – 2010. – Т.16. – № 1. – С. 40–51.
21. Барановская Л.В. Метод разрешающих функций для одного класса задач преследования [Текст] / Л.В. Барановская // Восточно-Европейский журнал передовых технологий: Математика и кибернетика - прикладные аспекты. – 2015. – 2/4 (74). – С. 4–8.
22. Барановская Л.В. Локальная дифференциальная игра сближения с запаздывающим аргументом и фиксированным временем [Текст] / Л.В. Барановская // Conference: Fundamental and applied sciences today III. Proceedings of the Conference At: North Charleston, USA. – 2014. – Vol.2. – С. 129–131.
23. Батухтин В. Д. Экстремальное прицеливание в нелинейной игре сближения [Текст] / В. Д. Батухтин // ДАН СССР. – 1972. – Т. 207. – № 1. – С. 11–14.
24. Беллман Р. Дифференциально–разностные уравнения [Текст] / Р. Беллман, К.Л. Кук. – М.: Мир, 1967. – 548 с.
25. Бердышев Ю.И. Об одной задаче последовательного сближения нелинейной управляемой системы третьего порядка с группой движущихся точек [Текст] / Ю.И. Бердышев // ПММ. – 2002. – Т. 66. – № 5. – С. 742–752.
26. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления [Текст] / В.Г. Болтянский. – М.: Наука, 1969. – 308 с.
27. Боткин Н.Д. Дифференциальная игра преследования со смешанными ограничениями на управления [Текст] / Н.Д. Боткин // Автомат. и телемех. – 1992. – № 6. – С. 12–19.
28. Бирман М.Ш. Функциональный анализ [Текст] / М.Ш. Бирман и др. – М.: Наука, 1972. – 544 с.
29. Благодатских А.И. Многократная поимка жестко скоординированных убегающих [Текст] / А.И. Благодатских // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. – 2016. – Т. 26. – № 1. – С. 46–57.

30. Благодатских А.И. Задачи группового преследования с равными возможностями при наличии защитников убегающего [Текст] / А.И. Благодатских // Изв. Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. – 2015. – №2 (46). – С. 13–20.
31. Благодатских А.И. Об одном колебательном конфликтно управляемом процессе со многими участниками [Текст] / А.И. Благодатских // Тр. Ин-та мат-ки и механики УрО РАН. – 2013. – Т. 19. – № 1. – С. 59–68.
32. Благодатских А.И. Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов [Текст] / А.И. Благодатских, Н.Н. Петров. Федер. агентство по образованию, ГОУ ВПО "Удмурт. гос. ун-т". Ижевск: Удмуртский университет, 2009. – 263 с.
33. Благодатских А.И. О двух колебательных конфликтно управляемых процессах со многими участниками [Текст] / А.И. Благодатских // Изв. Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. – 2005. – №2 (32). – С. 3–22.
34. Благодатских А.И. Уклонение жестко скоординированных убегающих от группы инерционных объектов [Текст] / А.И. Благодатских // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 2004. – №6. – С. 143–149.
35. Благодатских А.И. О некоторых задачах группового преследования [Текст] / А.И. Благодатских // Дифференц. уравнения с частными производными и родственные проблемы анализа и информатики: Труды международной конференции. Узбекистан, Ташкент. – 2004. – Т. 2. – С. 33–36.
36. Благодатских А.И. Пример Понтрягина со многими убегающими [Текст] / А.И. Благодатских // Изв. Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. – 2002. – №2 (25). – С. 23–26.
37. Вайсбурд И.Ф. Дифференциальная игра сближения систем с распределенными параметрами [Текст] / И.Ф. Вайсбурд, Ю.С. Осипов // ПММ. – 1975. – Т. 39. – №5. – С. 772–779.
38. Вайсбурд И.Ф. Об одной альтернативе в дифференциальной игре сближения-уклонения для нелинейных динамических систем в гильбертовом

пространстве [Текст] / И.Ф. Вайсбурд // В.сб.: Оптимальное управление в динамических системах. Свердловск. – 1979. – №30. – С. 19–25.

39. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач [Текст] / Ф.П. Васильев. – М.: Наука, 1981. – 400 с.
40. Васильев Ф.П. Об условиях существования седловой точки в детерминированных интегро-дифференциальных играх с запаздыванием при наличии параметров [Текст] / Ф.П. Васильев // Журн. вычисл. мат и мат. физ. – 1970. – Т. 10. – №1. – С. 15–25.
41. Виноградова М.Н. О поимке двух убегающих в одной нестационарной задаче группового преследования с фазовыми ограничениями [Текст] / М.Н. Виноградова // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. – 2015. – Т. 25. – №1. – С. 12–20.
42. Виноградова М.Н. Поимка двух скоординированных убегающих в линейных рекуррентных дифференциальных играх [Текст] / М.Н. Виноградова, Н.Н. Петров, Н.А. Соловьева // Тр. Ин-та мат-ки и механики УрО РАН. – 2013. – Т. 19. – № 1. – С. 41–48.
43. Григоренко Н.Л. Построение управления первого игрока в одной нелинейной дифференциальной игре [Текст] / Н.Л. Григоренко, И.А. Какоткин, А.Е. Румянцев // Системный анализ: моделирование и управление. Материалы Международной конференции, посвященной памяти академика А.В. Кряжимского. – 2018. – С. 36–39.
44. Григоренко Н.Л. Об одном классе задач управления при неполной информации [Текст] / Н.Л. Григоренко, А.Е. Румянцев // Труды МИАН. – 2015. – Т. 291. – С. 76–85.
45. Григоренко Н.Л. К теории дифференциальных игр трех лиц [Текст] / Н.Л. Григоренко // Тр. Ин-та мат-ки и механики УрО РАН. – 2006. – Т. 12. – № 1. – С. 78–85.
46. Григоренко Н.Л. Методы решения дифференциальных игр [Текст] / Н.Л. Григоренко, Ю.Н. Киселев, Н.В. Лагунова // Математическое моделирование. – 1993. – Т. 1. – С. 296–316.

47. Григоренко Н.Л. Математические методы управления несколькими динамическими процессами [Текст] / Н.Л. Григоренко. – М.: Изд-во МГУ, 1990. – 197 с.
48. Григоренко Н.Л. Игра простого преследования-убегания группы преследователей и одного убегающего [Текст] / Н.Л. Григоренко // Вестн. Моск. Ун-та Сер. 15: Вычислительная математика и кибернетика. –1983. – №1. – С. 41–47.
49. Григоренко Н.Л. О линейной дифференциальной игре убегания с ограниченными ресурсами управления [Текст] / Н.Л. Григоренко // Тезисы докладов Всесоюз.конф. по теории игр. – 1974. – С. 34–35.
50. Григорьева С.В. Конструирование решений в некоторых дифференциальных играх с фазовыми ограничениями [Текст] / С.В. Григорьева, В.Ю. Пахотинских, А.А. Успенский, В.Н. Ушаков // Матем. сб. – 2005. – Т. 196. – №4. – С. 51–78.
51. Григорьева С.В. Конструкции теории дифференциальных игр при решении уравнений Гамильтона-Якоби [Текст] / С.В. Григорьева, А.М. Тарасъев, А.А. Успенский, В.Н. Ушаков // Тр. Ин-та мат-ки и механики УрО РАН. – 2000. – Т. 6. – №2. – С. 320–336.
52. Гусятников П.Б. Теория дифференциальных игр [Текст] / П.Б. Густяников. – М.: МФТИ, 1982. – 99 с.
53. Гусятников П.Б. Задача преследования и убегания в теории дифференциальных игр [Текст] / П.Б. Густяников. Автореф. дис. д-ра физ.-мат. наук. Свердловск, 1981. – 46 с.
54. Гусятников П.Б. Простая квазилинейная задача преследования [Текст] / П.Б. Густяников, Е.С. Половинкин // ПММ. – 1980. – Т. 44. – №5. – С. 771–782.
55. Гусятников П.Б. Дифференциальная игра убегания n лиц [Текст] / П.Б. Густяников // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. – 1978. – №6. – С. 22–32.
56. Гусятников П.Б. l –убегание в линейных дифференциальных играх [Текст] / П.Б. Густяников // Дифференц. уравнения. – 1973. – Т. 9. – №2. – С. 368–369.

57. Гусятников П.Б. Об оптимальности времени преследования [Текст] / П.Б. Гусятников, М.С. Никольский //ДАН СССР. – 1969. – Т. 184. – №3. –С. 518–521.
58. Дарьин А.Н. Управление в условиях неопределённости при двойных ограничениях [Текст] / А.Н. Дарьин, А.Б. Куржанский // Дифференц. уравнения. – 2003. – Т. 39. – №11. – С. 1474–1486.
59. Двуреченский П.Е. Алгоритмы вычисления операторов Минковского и их применение в дифференциальных играх [Текст] / П.Е., Двуреченский, Г.Е. Иванов // Ж. вычисл. мат. и мат. физ. – 2014. – Т. 54. – №2. – С. 224–255.
60. Двуреченский П.Е. Алгоритм построения оптимальной стратегии в нелинейной дифференциальной игре с нефиксированным временем окончания [Текст] / П.Е. Двуреченский, Г.Е. Иванов // Труды МФТИ. – 2012. – Т. 4. – №2. – С. 51–61.
61. Джафаров В.Я. Об одной дифференциальной игре сближения в гильбертовом пространстве [Текст] / В.Я. Джафаров // Дифференц. уравнения. – 1980. – Т. 16. – №11. – С. 1956–1962.
62. Жуковский В.И. Линейно-квадратичные дифференциальные игры [Текст] / В.И. Жуковский, А.А. Чикрий. – Киев: Наукова думка, 1994. – 320 с.
63. Зонневенд Д. Об одном методе преследования [Текст] / Д. Зонневенд //ДАН СССР. – 1972. – Т. 204. – №6. – С. 1296–1299.
64. Зубов В.И. Построение управлений в задачах преследования [Текст] / В.И. Зубов //Дифференц. уравнения. – 1973. – Т.9. – №2. – С.368-369.
65. Ибрагимов Г.И. Дифференциальная игра многих лиц с интегральными ограничениями на управления игроков [Текст] / Г.И. Ибрагимов // Изв. вузов. Математика. – 2004. – №1(500). – С.48-52.
66. Иванов Г.Е. О сильно выпуклых линейных дифференциальных играх [Текст] / Г.Е. Иванов, Е.С. Половинкин //Дифференц. уравнения. – 1995. – Т.31. – №10. – С.1641–1648.
67. Илолов М. О дробных линейных уравнениях Вольтерра в банаховых пространствах [Текст] / М. Илолов, Х.С. Кучакшоев, Д.Н. Гулджонов // ДАН

РТ. – 2018. – Т.61. – №2. – С. 113–120.

68. Илолов М. Инвариантные торы дифференциальных уравнений с запаздыванием в банаховом пространстве [Текст] / М. Илолов, А.А. Эльназаров // ДАН РТ. – 2006. – Т.49. – №2. – С. 101–105.
69. Канторович Л.В. Функциональный анализ [Текст] / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. – М.: Наука, 1977. – 744 с.
70. Килбас А.А. Теория и приложения дифференциальных уравнений дробного порядка [Текст] / А.А. Килбас. Курс лекций. – Самара, 2009. – 121 с.
71. Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа [Текст] / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.:Наука, 1976. – 544 с.
72. Кореневский Д.Г. К абстрактной задаче Коши для дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Устойчивость решений [Текст] / Д.Г. Кореневский, Т.С. Фещенко // Дифференц.уравнения. – 1975. – Т.11. – №10. –С. 1895–1898.
73. Корнев Д.В. К задаче управления на минимакс позиционного функционала при геометрических и интегральных ограничениях на управляющие воздействия [Текст] / Д. В. Корнев, Н. Ю. Лукоянов // Тр. Ин-та мат-ки и механики УрО РАН. – 2015. – Т. 21. – №2. – С. 87–101.
74. Корнев Д.В. О численном решении дифференциальных игр на минимакс позиционного функционала в классах смешанных стратегий [Текст] / Д. В.Корнев // Динамика систем и процессы управления. Тезисы докладов Международ. конф., посвящ. 90-летию со дня рождения акад. Н.Н. Красовского. – 2014. – С. 111–113.
75. Корнев Д.В. Об одном численном методе решения позиционных дифференциальных игр в смешанных стратегиях [Текст] / Д.В. Корнев // Вестник Тамбовского университета. Серия естественных и технических наук. – 2013. – Т. 18. – № 5. – С. 2556–2558.
76. Корнев Д. В. О численном решении позиционных дифференциальных игр с нетерминальной платой [Текст] / Д. В. Корнев // Автомат. и телемех.. – 2012. – № 11. – С. 60–75.

77. Корнев Д.В. Об одном численном методе решения задач конфликтного управления [Текст] / Д. В. Корнев // Изв. Института математики и информатики Удмурского госуниверситета. – 2012. – №1 (39). – С. 67–68.
78. Красовский А.А. Нелинейная позиционная дифференциальная игра в классе смешанных стратегий [Текст] / А.А. Красовский, А.Н. Красовский // Математическая теория управления и дифференциальные уравнения: сб. статей к 90-летию со дня рождения академика Е. Ф. Мищенко, Тр. МИАН. – Т. 277. – 2012. – С. 144–151.
79. Красовский Н.Н. Управление динамической системой [Текст] / Н.Н. Красовский. – М.: Наука, 1985. – 520 с.
80. Красовский Н.Н. Дифференциальные игры. Апроксимационные и формальные модели [Текст] / Н.Н. Красовский // Матем. сб. – 1978. – Т. 107 (149). – №4 (12). – С. 541–571.
81. Красовский Н.Н. Позиционные дифференциальные игры [Текст] / Н.Н Красовский, А.И. Субботин. – М.: Наука, 1974. - 456 с.
82. Красовский Н.Н. Линейные дифференциально-разностные игры [Текст] / Н.Н. Красовский, Ю.С. Осипов // ДАН СССР. – 1971. – Т. 197. – С. 777–780.
83. Красовский Н.Н. Игровые задачи о встрече движений [Текст] / Н.Н. Красовский. – М.: Наука, 1970. – 420 с.
84. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве [Текст] / С.Г. Крейн –М.: Наука, 1967. - 464 с.
85. Крицков Л.В. Граничное управление на одном конце при свободном втором для процесса, описываемого телеграфным уравнением с переменным коэффициентом [Текст] / Л.В. Крицков, М.Ф. Абдукаримов // ДАН России. – 2013. – Т. 450. – № 6. – С. 640–643.
86. Кряжимский А.В. К теории позиционных дифференциальных игр сближения-уклонения [Текст] / А.В. Кряжимский // ДАН СССР. – 1978. – Т. 239. №4. – С.779–782.
87. Кряжимский А.В. Аппроксимация линейных дифференциально разностных игр [Текст] / А.В. Кряжимский, В.И. Максимов // ПММ. – 1978. – Т. 42. –

№2. – С. 202–209

88. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности [Текст] / Куржанский А.Б. – М.: Наука, 1977. – 390 с.
89. Куржанский А.Б. Программное управление по неполным данным [Текст] / А.Б. Куржанский // Дифференц.уравнения. – 1974. – Т.10. – №12. – С. 2162–2172.
90. Куржанский А.Б. Дифференциальные игры в системах с запаздыванием [Текст] / А.Б. Куржанский // Дифференц.уравнения. – 1971. – №7. – С. 1398–1409.
91. Куржанский А.Б. Дифференциальные игры сближения при ограниченных фазовых координатах [Текст] / А.Б. Куржанский // ДАН СССР. – 1970. – Т.192. – №3. – С. 491–494.
92. Кучкаров А.Ш. О решении одной задачи преследования с фазовыми ограничениями [Текст] / А.Ш. Кучкаров, Б.Б. Рихсиев // Автомат. и телемех.. – 2001. – №8. – С. 41–45.
93. Лагунов В.Н. Асимметрические свойства некоторых нелинейных игр преследования [Текст] / В.Н. Лагунов // ДАН СССР. – 1971. – Т. 197. – №2. – С. 271–274.
94. Лагунов В.Н. Нелинейная дифференциальная игра убегания [Текст] / В.Н. Лагунов // ДАН СССР. – 1972. – Т. 202. – №3. – С. 522–525.
95. Лебедев П.Д. Численное моделирование решений дифференциальных игр в одном классе невыпуклых множеств с кусочно-гладкой границей [Текст] / П.Д. Лебедев, А.А. Успенский, А.В. Ушаков // Динамика систем и процессы управления. Тезисы докладов Международ. конф., посвящ. 90-летию со дня рождения акад. Н.Н. Красовского. – 2014. – С. 251–263.
96. Лионс Ж.Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными [Текст] / Ж.Л Лионс – М.:Мир. 1972. 416 с.
97. Ледяев Ю.С. Принцип максимума для оптимальных стратегий в дифференциальных играх [Текст] / Ю.С. Ледяев // Тр. МИАН – 1988. – Т.

185. – С. 171–193.

98. Ледяев Ю.С. Экстремальные задачи в теории дифференциальных игр [Текст] / Ю.С. Ледяев, Е.Ф. Мищенко // Тр. МИАН. – 1988. – Т. 185. – С.147–170.

99. Лукоянов Н.Ю. К теории позиционных дифференциальных игр для систем нейтрального типа [Текст] / Н.Ю. Лукоянов, А.Р. Пласкин // Тр.Ин-та мат-ки и механики УрО РАН. – 2019. – Т. 25. – №3. – С. 118–128.

100. Лукоянов Н.Ю. Дифференциальные игры для систем нейтрального типа: аппроксимационная модель [Текст] / Н.Ю. Лукоянов, А.Р. Плаксин // Тр. МИАН. – 2015. – Т. 291. – С. 202–214.

101. Лукоянов Н.Ю. О построении цены позиционной дифференциальной игры [Текст] / Н.Ю. Лукоянов // Дифференц. уравнения. – 2001. – Т. 37. – №1. – С. 18–26.

102. Максимов В.И. О существовании седловой точки в дифференциально-разностной игре сближения-уклонения [Текст] / В.И. Максимов // ПММ. – 1978. – Т. 42. – №1. – С. 15–22.

103. Малофеев О.А. Дифференциальные игры простого преследования на многообразиях [Текст] / О.А. Малофеев // Математические методы организации и управления в сложных системах. Калинин: Изд-во Калинин, ун-та. – 1982. – С. 69–74.

104. Малофеев О.А. Игра простого преследования на плоскости с препятствием [Текст] / О.А. Малофеев, Л.А. Петросян //. Тр. Ин-та мат-ки Сиб. отд. АН СССР. – 1971. – Т. 9. – С. 31–42.

105. Мамадалиев Н.А. Полное решение одного класса дифференциальных игр преследования с интегральным ограничением и импульсным управлением [Текст] / Н.А.Мамадалиев, Б.Х.Хайиткулов // Изв. вузов. Матем. – 2022. – №3. – С. 28–37.

106. Мамадалиев Н.А Квазилинейная дифференциальная игра преследования нейтрального типа [Текст] / Н.А. Мамадалиев, Х.Н. Муйдинов, Ш.Д. Акрамжонов // Материалы республиканской конференции «Современные

проблемы прикладной математики и их роль в формировании технического мировоззрения общества» (29-30 октября 2021г.).- Худжанд, 2021. – С. 104–105.

107. Мамадалиев Н.А. Об одной задаче преследования с интегральными ограничениями на управления игроков [Текст] / Н.А. Мамадалиев // Сиб. мат. ж.. – 2015. – Т. 56. – №1. – С. 129–148.

108. Мамадалиев Н.А. Об игровых задачах управления пучками траекторий при наличии запаздывания [Текст] / Н.А. Мамадалиев // Кибернетика и системный анализ. Киев. – 2012. – № 5. – С. 154–164.

109. Мамадалиев Н.А. Об одной линейной задаче преследования при наличии запаздывания [Текст] / Н.А. Мамадалиев // Сиб. журнал индустриальной математики. – 2010. – Т.13. – №3 (43). – С. 86–100.

110. Маматов М.Ш. Дифференциальные игры преследования дробного порядка с нелинейными управлениями [Текст] / М.Ш. Маматов, Х.Н. Алимов // Вестник российских университетов. Математика. – 2020. – Т. 25. – №132. – С. 401–409.

111. Маматов М.Ш. Дифференциальные игры преследования для двумерного уравнения теплопроводности с производными дробного порядка [Текст] / М.Ш. Маматов // Материалы международной конференции «Оптимальное управление и дифференциальные игры» посвященной 110-летию со дня рождения Л.С. Понтрягина (12-14 декабря 2018г.). – Москва, 2018. – С. 167–170.

112. Маматов М.Ш. Задача прессследования, описываемая дифференциальными уравнениями дробного порядка [Текст] / М.Ш. Маматов // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных. – 2016. – №1. – С. 28–32.

113. Маматов М.Ш. К решению задачи преследования в управляемых распределенных системах высокого порядка [Текст] / М.Ш. Маматов, Х.Н. Алимов // Математические труды. – Новосибирск. – 2013. – Т.16. – №2. – С. 1–16.

114. Маматов М.Ш. К теории дифференциальных игр преследования в системах с распределенными параметрами [Текст] / М.Ш. Маматов // Автоматика и вычислительная техника. Рига. – 2009. – №1. – С. 5–14.
115. Маматов М.Ш. О применении метода конечных разностей к решению задачи преследования в системах с распределенными параметрами [Текст] / М.Ш. Маматов // Автомат. и телемех.. – 2009. – №8. – С. 123–132.
116. Маркин Е.А. О задаче преследования для одного класса дифференциальных игр, описываемых волновым уравнением [Текст] / Е.А. Маркин //- ВМУ. Сер. математика, механика. – 1977. – №4. – С. 70–77.
117. Маслов Е.П. Дифференциальные игры преследования-уклонения с групповой целью [Текст] / Е.П. Маслов, Е.Я. Рубинович // Итоги науки и техники. Техническая кибернетика. –М.: ВИНИТИ. –1991. –Т. 32. – С. 32–59.
118. Мачтакова А.И. Преследование жестко скоординированных убегающих в линейной задаче с дробными производными и простой матрицей [Текст] / А.И. Мачтакова // Изв. Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. – 2019. – Т. 54. – С. 45–54.
119. Мезенцев А.В. О некоторых классах дифференциальных игр [Текст] / А.В. Мезенцев // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. – 1971. – №6. –С. 3–7.
120. Мезенцев А.В. Дифференциальные игры с интегральными ограничениями на управления [Текст] / А.В. Мезенцев // – М.: МГУ. 1988. 135 с.
121. Меликян А.А. Игровая задача простого преследования на двумерном конусе [Текст] / А.А. Меликян, Н.В. Овакимян // ПММ. – 1991. – Т. 55. – №5. – С. 741–750.
122. Меликян А.А. Игровая задача простого преследования на многообразиях [Текст] / А.А. Меликян, Н.В. Овакимян // ПММ. – 1991. – Т. 55. – №1. – С. 54–62.
123. Михалев Д. К. О двух алгоритмах приближенного построения множества позиционного поглощения в игровой задаче сближения [Текст] / Д. К.

Михалев, В. Н. Ушаков // Автомат. и телемех. – 2007. – №11. – С. 178–194.

124. Мищенко Е.Ф. Задача об уклонении от встречи в дифференциальных играх с нелинейными управлениями [Текст] / Е.Ф. Мищенко, Н. Сатимов // Дифференц. уравнения. – 1973. – Т. 9. – №10. – С. 1792–1797.

125. Мищенко Е.Ф. О некоторых игровых задачах преследования и уклонения от встречи [Текст] / Е.Ф. Мищенко // Автомат. и телемех.. – 1972. – №9. – С. 24–30.

126. Мищенко Е.Ф. Задачи преследования и уклонения от встречи в теории дифференциальных игр [Текст] / Е.Ф. Мищенко // Изв. АН СССР: Техн. кибернетика. – 1971. – № 5. – С. 3–9.

127. Мухсинов Е.М. Задача убегания для одной дифференциальной игры с запаздывающим аргументом при инвариантности терминального множества [Текст] / Е.М. Мухсинов, М.Н. Муродова // Вестник ТНУ. Серия естественных наук. – 2019. – №1. – С. 90–93.

128. Мухсинов Е.М. Задача преследования для дифференциальной игры с запаздывающим аргументом в бесконечномерном пространстве [Текст] / Е.М. Мухсинов, М.Н. Муродова // Вестник ТНУ. Серия естественных наук. – 2018. – №3. – С. 79–86.

129. Мухсинов Е.М. Линейные дифференциальные игры преследования при наличии запаздываний в гильбертовом пространстве [Текст] / Е.М. Мухсинов, М.Н. Муродова // Вестник ТНУ. Серия естественных наук. – 2016. – №1/1 (192). – С. 233–236.

130. Мухсинов Е.М. О задаче преследования в банаховом пространстве [Текст] / Е.М. Мухсинов // ДАН Тадж. ССР. – 1983. – Т. 26. – №5. – С. 270–274.

131. Мухсинов Е.М. О задачах преследования и убегания в гильбертовом пространстве [Текст] / Е.М. Мухсинов // ДАН Тадж. ССР. – 1983. – Т. 26. – №4. – С. 204–207.

132. Мухсинов Е.М. Дифференциальные игры убегания в гильбертовом пространстве [Текст] / Е.М. Мухсинов // Сб. научных трудов ТашГУ,

«Прикладная математика и механика». – Ташкент. – 1983. – С. 49–54.

133. Мухсинов Е.М. О дифференциальных играх преследования и убегания в банаховых пространствах [Текст] / Е.М. Мухсинов // дис. на соискание ученой степени к. ф.- м. наук: 01.01.02. Ташкент, 1982. – 111 с.

134. Мухсинов Е.М. Дифференциальные игры преследования в банаховом пространстве [Текст] / Е.М. Мухсинов // ДАН Уз. ССР. – 1981. – Т. 6. – С. 7–9.

135. Мухсинов Е.М. О задачах преследования и убегания в банаховом пространстве [Текст] / Е.М. Мухсинов // ДАН Тадж. ССР. – 1981. – Т. 24. – №11. – С. 653–655.

136. Нейман Д. Теория игр и экономическое поведение [Текст] / Д. Нейман, О. Моргенштерн. – М.: Наука, 1970. – 983 с.

137. Никольский М.С. Некоторые численные аспекты прямых методов Л.С. Понтрягина в линейных дифференциальных играх [Текст] / М.С. Никольский // Нелинейная динамика и управление. – 2010. – Т. 7. – С. 137–148.

138. Никольский М.С. Дифференциальная игра преследования с нарушением в динамике [Текст] / М.С. Никольский, Пэн Чж. // Дифференц. уравнения. – 1994. – Т. 30. – №11. – С. 1923–1927.

139. Никольский М.С. Линейные дифференциальные игры преследования с интегральными ограничениями [Текст] / М.С. Никольский // Дифференц. уравнения. – 1992. – Т. 28. – №2. – С. 219–223.

140. Никольский М.С. О нижнем альтернированном интеграле Понтрягина в линейных дифференциальных играх преследования [Текст] / М.С. Никольский // Мат. сб. 128(170): – 1985. – Т. 1. – №9. – С. 35–49.

141. Никольский М.С. Первый прямой метод Л.С. Понтрягина в дифференциальных играх [Текст] / М. С. Никольский. – М.: 1984. – 65 с.

142. Никольский М.С. Линейные дифференциальные игры с переменной структурой [Текст] / М. С. Никольский // ДАН СССР. – 1984. – Т.276. – №4 – С. 791–794.

143. Никольский М.С. Об одном прямом методе решения линейных дифференциальных игр преследования-убегания [Текст] / М. С. Никольский // Матем. заметки. – 1983. – Т.33. – №6. – С. 885–891.
144. Никольский М.С. Задача убегания от нескольких преследователей [Текст] / М.С. Никольский, Н. Сатимов // Краевые задачи для уравнений математической физики Фан. Ташкент. – 1980. – С. 133–146.
145. Никольский М.С. О линейной задаче убегания [Текст] / М.С. Никольский // ДАН СССР. – 1974. – Т. 218. – №5. – С. 1024–1027.
146. Никольский М.С. Нелинейные дифференциальные игры преследования [Текст] / М.С. Никольский // Кибернетика. –1974. – №2. –С.125-130.
147. Никольский М.С. О некоторых классах линейных дифференциальных игр [Текст] / М.С. Никольский // Вестн. Моск.ун-та. – 1973. – №5. – С. 41–47.
148. Никольский М.С. Прямой метод в линейных дифференциальных играх с общими интегральными ограничениями [Текст] / М.С. Никольский // Дифференц. уравнения. – 1972. – Т. 8. – №6. – С. 964–971.
149. Никольский М.С. Линейные дифференциальные игри преследования при наличии запаздываний [Текст] / М.С. Никольский // Дифференц. уравнения. – 1972. – Т. 8. – №2. – С. 260–267.
150. Никольский М.С. Об одном управлении при наличии противодействия [Текст] / М.С. Никольский // Вестн. Моск. ун-та. – 1972. – №1. – С. 67–72.
151. Никольский М.С. Динамические игры преследования [Текст] / М.С. Никольский //. Вестн. Моск. ун-та. – 1972. – №4. – С. 46–52.
152. Никольский М.С. Управление линейным объектом при наличии противодействия [Текст] / М.С. Никольский // Управляемые системы. – Новосибирск. – 1971. – В. 8. – С. 29–38.
153. Никольский М.С. О времени первого поглашения [Текст] / М.С. Никольский // Математические методы исследования и оптимизации систем. Киев. – 1970. – Т. 2. – С. 32–44.
154. Никольский М.С. Нестационарные линейные дифференциальные игры [Текст] / М.С. Никольский // Кибернетика. – 1970. – №6. – С. 98–101.

155. Никольский М.С. Прямой метод в линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями [Текст] / М.С. Никольский // Управляемые системы - Новосибирск. – 1969. – В.2. – С. 49–59.
156. Осипов Ю.С. О позиционном управлении при последействии в управляющих силах [Текст] / Ю.С. Осипов, В.Г. Пименов // ПММ. – 1981. – Т. 45. №2. – С. 223–229.
157. Осипов Ю.С. Аппроксимация в задачах позиционного управления параболическими системами [Текст] / Ю.С. Осипов, А.И. Короткий // ПММ. – 1978. – Т. 42. – №4. – С. 599–605.
158. Осипов Ю.С. Позиционное управление в параболических системах [Текст] / Ю.С. Осипов // ПММ. – 1977. – Т. 41. – №2. – С. 195–201.
159. Осипов Ю.С. К теории дифференциальных игр в системах с распределенными параметрами [Текст] / Ю.С. Осипов // ДАН СССР. – 1975. – Т. 223. – №6. – С. 1314–1317.
160. Осипов Ю.С. Альтернатива в дифференциально-разностной игре [Текст] / Ю.С. Осипов // ДАН СССР. – 1971. – Т.197. – №5. – С. 1022–1025.
161. Осипов Ю.С. Дифференциальные игры для систем с последействием // ДАН СССР. – 1971. – Т. 196. – №4. – С. 779–782.
162. Пахотинских В.Ю. Конструирование стабильных мостов в дифференциальных играх с фазовыми ограничениями [Текст] / В.Ю. Пахотинских, А.А. Успенский, В.Н. Ушаков // ПММ. – Т. 67. – В.5. – 2003. – С. 771–783.
163. Пацко В.С. Поверхности переключения в линейных дифференциальных играх [Текст] / В.С. Пацко // Современная математика и ее приложения, Тбилиси. – 2005. – Т. 23. – С. 79–122.
164. Пацко В.С. Численное решение дифференциальных игр на плоскости [Текст] / В.С. Пацко, В.Л. Турова. Екатеринбург: УрО РАН, 1995. – 77 с.
165. Петров Н.Н. К задаче группового преследования с дробными производными [Текст] / Н.Н. Петров. Удмуртский государственный университет. Россия, 2018. – 220 с.

166. Петров Н.Н. Многократная поимка заданного числа убегающих в задаче простого преследования [Текст] / Н.Н. Петров, А.Я. Нарманов // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. – 2018. – Т. 28. – №2. – С. 193–198.
167. Петров Н.Н. Одна задача группового преследования с дробными производными и фазовыми ограничениями [Текст] / Н.Н. Петров // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. – 2017. – Т. 27. – В.1. – С. 54–59.
168. Петров Н.Н. К задаче группового преследования [Текст] / Н.Н. Петров // Изв. Института математики и информатики Удмурского госуниверситета. – 2002. – №2 (25). – С. 73–74.
169. Петров Н.Н. Многократная поимка в примере Л.С. Понтрягина с фазовыми ограничениями [Текст] / Н.Н. Петров // ПММ. – 1997. – Т.61. – №5. – С. 725–732.
170. Петров Н.Н. Об одной задачи преследования группы убегающих [Текст] / Н.Н. Петров // Автомат. и телемех.. – 1996. – №6. – С. 48–54.
171. Петров Н.Н. Об одной задаче преследования группы убегающих [Текст] / Н.Н. Петров, В.А. Прокопенко // Дифференц. уравнения. – 1987. – Т.23. – №4. – С. 724–726.
172. Петров Н.Н. О существовании значения игры преследования [Текст] / Н.Н. Петров // ДАН СССР. – 1970. – Т. 190. – №6. – С. 621–624.
173. Петросян Л.А. Преследование на плоскости [Текст] / Л.А. Петросян, Б.Б. Рихсиев. - М.:Наука, 1991. – 96с.
174. Петросян Л.А. Геометрия простого преследования [Текст] / Л.А. Петросян, Г.В. Томский – Новосибирск: Наука, 1983.-143с.
175. Петросян Л.А. Дифференциальные игры преследования [Текст] / Л.А. Петросян. – Л.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1977. – 222 с.
176. Петросян Л.А. Игры преследования с "линией жизни" [Текст] / Л.А. Петросян // Вестник Ленинградского университета. Серия 1: Математика, Механика, Астрономия. – 1967. – Т. 3. – №13. – С. 76–85.

177. Пилипенко Ю.В. Колебательные конфликтно-управляемые процессы [Текст] / Ю.В. Пилипенко, А.А. Чикрий // ПММ. – 1993. – Т. 57. – В.3. – С. 3–14.
178. Питцык М.В. О задаче группового преследования [Текст] / М.В. Питцык, А.А. Чикрий // ПММ. – 1982. – Т. 46. – В.5. – С. 730–736.
179. Половинкин Е.С. Прямой метод Понтрягина для оптимизационных задач с дифференциальным включением [Текст] / Е.С. Половинкин // Труды МИАН. – 2019. – Т. 304. – С. 257–272.
180. Половинкин Е.С. Алгоритмы численного решения линейных дифференциальных игр [Текст] / Е.С. Половинкин, Г.Е. Иванов, М.В. Балашов, Р.В. Константинов, А.В. Хорев // Мат. сб. – 2001. – Т. 192. – №10. – С. 95–122.
181. Понтрягин Л.С. Избранные научные труды: Т.2: Дифференциальные уравнения. Теория операторов. Оптимальное управление. Дифференциальные игры. [Текст] / Л.С. Понтрягин. – М.: Наука, 1988. – 576 с.
182. Понтрягин Л.С. Линейные дифференциальные игры преследования [Текст] / Л.С. Понтрягин // Мат. сб. – 1980. – Т. 112. – №154. – С. 307–331.
183. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения [Текст] / Л.С. Понтрягин. – М.: Наука, 1974. – 331 с.
184. Понтрягин Л.С. Задача об уклонении от встречи в линейных дифференциальных играх [Текст] / Л.С. Понтрягин, Е.Ф. Мищенко // Дифференц. уравнения. – 1971. – Т. 7–3. – С. 436–445.
185. Понтрягин Л.С. Линейная дифференциальная игра убегания [Текст] / Л.С. Понтрягин // Тр. МИАН. – 1971. – Т. 112. – С. 30–63.
186. Понтрягин Л.С. Математическая теория оптимальных процессов [Текст] / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. – М.: Наука, 1969. – 384 с.
187. Понтрягин Л.С. О линейных дифференциальных играх 2 [Текст] / Л.С. Понтрягин // ДАН СССР. – 1967. – Т. 175. – № 4. – С. 764–766.

188. Понтрягин Л.С. О линейных дифференциальных играх 1[Текст] / Л.С. Понтрягин // ДАН СССР. – 1967. – Т. 174. – №6. – С. 1278–1281.

189. Понтрягин Л.С. К теории дифференциальных игр [Текст] / Л.С.Понтрягин // УМН. – 1966. – Т.21. – В. 4. – С. 219–274.

190. Прокопоеич П.В. Одна дифференциальная игра убегания [Текст] / П.В. Прокопоеич, А.А. Чикрий // ДАН УССР. Серия А. – 1989. – №1. – С. 71–74.

191. Пшеничный Б.Н. Дифференциальные игры [Текст] / Б.Н. Пшеничный, В.В. Остапенко – Киев: Наукова думка, 1992.-243с.

192. Пшеничный Б.Н. Групповое преследование в дифференциальных играх [Тескт] / Б.Н. Пшеничный, А.А. Чикрий, И.С. Раппопорт // Wiss. Z. Jechn. Hochsch. Leipzig. – 1982. – Т. 6. – №1. – С. 13–27.

193. Пшеничный Б.Н. Преследование несколькими управляемыми объектами при наличии ограничений [Текст] / Б.Н. Пшеничный, А.А. Чикрий, И.С. Раппопорт // ДАН СССР. – 1981. – Т. 259. – №4. – С. 785–789.

194. Пшеничный Б.Н. Эффективный метод решения дифференциальных игр со многими участниками [Текст] / Б.Н. Пшеничный, А.А. Чикрий, И.С. Раппопорт // ДАН СССР. – 1981. – Т. 256. – №3. – С. 530–535.

195. Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи [Текст] / Б.Н. Пшеничный. – М.: Наука, 1980. – 320 с.

196. Пшеничный Б.Н. К решению задачи простого преследования несколькими управляемыми объектами [Текст] / Б.Н. Пшеничный, А.А. Чикрий // Ин-т Кибернетики АН УССР. – 1979. – С. 3–6.

197. Пшеничный Б.Н. Об одной задаче группового преследования [Текст] / Б.Н. Пшеничный, И.С. Раппопорт, А.А. Чикрий // – Кибернетика. – 1979. – Т. 6. – С. 145–146.

198. Пшеничный Б.Н. Простое преследование несколькими объектами [Текст] / Б.Н. Пшеничный // Кибернетика. – 1976. – №3. – С. 145–146.

199. Пшеничный Б.Н. О дифференциальных играх с фиксированным временем [Текст] / Б.Н. Пшеничный, М.И. Сагайдак // Кибернетика. – 1970. – №2. – С. 54–63.

200. Пшеничный Б.Н. Структура дифференциальных игр [Текст] / Б.Н. Пшеничный // ДАН СССР. – 1969. – Т. 184. – №2. – С. 285–187.

201. Пшеничный Б.Н. О линейных дифференциальных играх [Текст] / Б.Н. Пшеничный // Кибернетика. – 1968. – №1. – С. 47–53.

202. Пшеничный Б.Н. Линейные дифференциальные игры с интегральными ограничениями [Текст] / Б.Н. Пшеничный // Изв. АН СССР. Сер. Техн. — Кибернетика. –1968. – №1. – С. 13–22.

203. Рихсиев Б.Б. О некоторых достаточных условиях оптимальности времени преследования в дифференциальной игре со многими преследующими [Текст] / Б.Б. Рихсиев, Г.И. Ибрагимов // Автомат. и телемех. – 2006. – №4. – С. 16–24.

204. Рихсиев Б.Б. Об одной линейной задаче преследования многих лиц с интегральными ограничениями на управления игроков [Текст] / Б.Б. Рихсиев // Матем заметки. – 2001. – Т. 70. – №2. – С. 2011–2012.

205. Рихсиев Б.Б. Простое преследование в кубе [Текст] / Б.Б. Рихсиев, Г.И. Ибрагимов // Изв. АН Уз.ССР. Серия физ-мат наук. – 1990. – №2. – С. 42–45.

206. Рихсиев Б.Б. Дифференциальные игры с простым движением [Текст] / Б.Б. Рихсиев // —Ташкент: Фан. 1989.-162 с.

207. Рихсиев Б.Б. Об оптимальности времени преследования в дифференциальных играх многих лиц с простым движением [Текст] / Б.Б. Рихсиев // Известия АН УзбССР. Серия физ-мат наук. – 1984. – №4. – С. 37–39.

208. Рихсиев Б.Б. Упрощенное доказательство теоремы Понтрягина об убегании [Текст] / Б.Б. Рихсиев // ДАН Уз ССР. – 1979. – №7. – С. 6–8.

209. Руш Н. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости [Текст] / Н. Руш, П. Абетс, М. Лалуа. – М.: Мир. 1980. – 302 с.

210. Савинов В.Б. Дифференциальная игра преследования одним преследователем нескольких убегающих [Текст] / В.Б. Савинов // Тр. Ин-та мат-ки и механики УрО РАН. – 1995. – Т. 3. – С. 147–171.

211. Саматов Б.Т. Задача преследования-убегания при интегрально-геометрических ограничениях на управления преследователя [Текст] / Б.Т. Саматов // Автомат. и телемех. – 2013. – №7. – С. 17–28.
212. Сатимов Н.Ю. Об уклонении от встречи в одном классе распределенных управляемых систем [Текст] / Н.Ю. Сатимов, М. Тухтасинов // Матем. заметки. – 2015. – Т. 97.- №5. – С. 749–760.
213. Сатимов Н.Ю. Об игровых задачах для эволюционных уравнений второго порядка [Текст] / Н.Ю. Сатимов, М. Тухтасинов // Изв. вузов. Матем. – 2007. – №1. – С. 54–62.
214. Сатимов Н.Ю. О задаче уклонения от встречи на полубесконечном отрезке в одном классе управляемых распределенных систем [Текст] / Н.Ю. Сатимов, М. Тухтасинов, С.К. Исматходжаев // Матем. заметки. – 2007. – Т. 81. – №2. – С. 294–303.
215. Сатимов Н.Ю. Об игровых задачах на фиксированном отрезке в управляемых эволюционных уравнениях первого порядка [Текст] / Н.Ю.Сатимов, М.Тухтасинов // Матем. заметки. – 2006. – Т. 80. – №4. – С. 613–626.
216. Сатимов Н.Ю. О некоторых игровых задачах в управляемых эволюционных уравнениях первого порядка [Текст] / Н.Ю. Сатимов, М. Тухтасинов // Дифференц. уравнения. – 2005. – Т.41 –№8. – С. 1114–1121.
217. Сатимов Н.Ю. О некоторых игровых задачах в распределенных управляемых системах [Текст] / Н.Ю.Сатимов, М.Тухтасинов // ПММ. Москва. – 2005. – Т. 69. – В. 6. – С. 997–1003.
218. Сатимов Н.Ю. Методы решения задачи уклонения от встречи в математической теории управления [Текст] / Н.Ю. Сатимов, Б.Б. Рихсиев – Ташкент: Фан. 2000.-176 с.
219. Сатимов Н.Ю. К методам решения задачи преследования в дифференциальных играх [Текст] / Н.Ю. Сатимов // ДАН Уз.ССР. – 1990. – №11. – С. 8–11.
220. Сатимов Н.Ю. Управляемые динамические системы и их приложения

[Текст] / Н.Ю. Сатимов. – Ташкент, 1987. – 104 с.

221. Сатимов Н.Ю. О задачах преследования и уклонения от встречи в дифференциальных играх между группами преследователей и убегающих [Текст] / Н.Ю. Сатимов, М.Ш. Маматов // ДАН Уз.ССР. – 1983. – №4. – С. 3–6.

222. Сатимов Н.Ю. О линейных дифференциальных играх убегания с интегральными ограничениями [Текст] / Н.Ю. Сатимов, Б.Б. Рихсиев // Дифференц. уравнения. – 1982. – Т. 18. – №4. – С. 599–607.

223. Сатимов Н.Ю. О задачах избежания взаимных столкновений [Текст] / Н.Ю. Сатимов // ДАН Уз.ССР. – 1981. – № 2. – С. 3–5.

224. Сатимов Н.Ю. Задача преследования и убегания для одного класса линейных дифференциальных игр многих лиц [Текст] / Н.Ю. Сатимов // Прикл. мат. и механика. Ташкент: Изд-воТашкентского ун-та. – 1981. – С. 64–75.

225. Сатимов Н.Ю. Простое преследование многими объектами одного убегающего [Текст] / Н.Ю. Сатимов, А.О. Азамов, Б.К. Хайдаров // ДАН Уз.ССР. – 1981. – №12. – С. 3–5.

226. Сатимов Н.Ю. К полному исследованию обобщенного контрольного примера Л.С. Понтрягина [Текст] / Н.Ю. Сатимов, Б.Б. Рихсиев // Дифференц. уравнения. – 1979. – Т. 15. – №3. – С. 436–443.

227. Сатимов Н. О задачах преследования и убегания в дифференциальных играх [Текст]: дисс. на соискание ученой степени д-ра ф.-м. наук: 01.01.02/ Н. Сатимов - Москва, 1977.-260 с.

228. Сатимов Н.Ю. Задача убегания для одного класса нелинейных дифференциальных игр [Текст] / Н.Ю. Сатимов // Дифференц. уравнения. – 1975. – Т. 11. – № 4. – С. 672–677.

229. Сатимов Н.Ю. К задаче убегания для одного класса дифференциальных игр [Текст] / Н.Ю. Сатимов // – Изв. вузов. Матем. – 1975. – №9 (160). – С. 48–52.

230. Сатимов Н.Ю. К задаче преследования в линейных дифференциальных

играх [Текст] / Н.Ю. Сатимов // Дифференц. уравнения. – 1973. – Т.9. – №11. – С. 2000–2009.

231. Сафаров Д.С. О решении одного класса дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными отклонениями аргумента [Текст] / Д.С. Сафаров, С.К. Миратов // Доклады НАН Таджикистана. – 2021. – Т.64. – №9–10. – С. 515–525.

232. Синицын А.В. Построение функции цены в игре преследования несколькими объектами [Текст] / А.В. Синицын // ПММ. – 1993. – Т. 57. – В. 1. – С. 52–57.

233. Соломатин А.М. Конструирование множества позиционного поглощения в линейной игре с интегральными ограничениями [Текст] / А.М. Соломатин, В.Н. Ушаков // Упр. и оценивание в динамических системах. – 1982. – С. 74–89.

234. Субботин А.И. Оптимизация гарантии в задачах управления [Текст] / А.И. Субботин, А.Г. Ченцов. – М.: Наука, 1981. – 288 с.

235. Субботин А.И. Альтернатива для дифференциальной игры сближения-уклонения при интегральных ограничениях на управления игроков [Текст] / А.И. Субботин, В.Н. Ушаков // ПММ. – 1975. – Т. 39. – №3. – С. 387–396.

236. Субботина Н.Н. Альтернатива для дифференциальной игры сближения-уклонения при ограничениях на импульсы управлений игроков [Текст] / Н.Н. Субботина, А.И. Субботин // ПММ. – 1975. – Т. 39. – №3. – С. 397–406.

237. Тарасьев А.М. Разностные операторы при построении аппроксимаций решений дифференциальных игр и уравнений типа Гамильтона-Якоби [Текст] / А.М. Тарасьев, А.А. Успенский, В.Н. Ушаков // Дифференциальные. уравнения и топология: Международная конференция, посвященная 100-летию со дня рождения Л.С. Понтрягина. Тезисы докладов. М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ имени М.В. Ломоносова, 2008. – 404 с.

238. Тарасьев А.М. О процедурах построения решений в дифференциальных играх на конечном промежутке времени [Текст] / А.М. Тарасьев, Т.Б.

Токманцев, А.А. Успенский, В.Н. Ушаков // Современная математика и ее приложения. Тбилиси. – 2005. – Т. 23. – С. 123–144.

239. Токманцев Т.Б. Численные аппроксимации стабильных мостов в дифференциальных играх на конечном промежутке времени [Текст] / Токманцев Т.Б., А.А. Успенский, В.Н. Ушаков // Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона-Якоби. Труды международного семинара, посвященного 60-летию академика А.И. Субботина. Екатеринбург. – 2006. – Т. 1. – С. 294–302.

240. Толстоногов А.А. Дифференциальные включения в банаховом пространстве [Текст] / А.А. Толстоногов. – Новосибирск: Наука. Сибирское отделение, 1986. – 296 с.

241. Тухтасинов М.Т. Линейная дифференциальная игра преследования с импульсным управлением и линейным интегральным ограничением на управления игроков [Текст] / М.Т. Тухтасинов // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. – 2017. – В. 143. – С.24–39.

242. Тухтасинов М.Т. ε-позиционные стратегии в первом прямом методе Понтрягина в линейных дифференциальных играх [Текст] / М.Т. Тухтасинов, Б.Х. Хайиткулов // Вестник НУУз. – 2017. – №2/2. – С. 219–226.

243. Тухтасинов М.Т. Линейная дифференциальная игра преследования с импульсными и интегрально-ограниченными управлениями игроков [Текст] / М.Т. Тухтасинов // Тр. Ин-та мат-ки и механики УрО РАН. – 2016. – №22:3. – С. 273–282.

244. Тухтасинов М.Т. Об инвариантных множествах при интегральном ограничении на управлении [Текст] / М.Т. Тухтасинов, У. Ибрагимов // Изв. вузов. Матем. – 2011. – №8. – С. 69–76.

245. Тухтасинов М.Т. О задачах преследования в управляемых распределенных системах [Текст] / М.Т. Тухтасинов, М.Ш. Маматов // Матем. заметки. – 2008. – Т.84.– №2. – С. 273–280.

246. Успенский А.А. Моделирование решений дифференциальных игр в одном классе невыпуклых множеств с гладкой границей [Текст] / А.А.

Успенский, А.В. Ушаков // Динамика систем и процессы управления. УрО РАН. – 2014. – С. 195–197.

247. Успенский А.А. Моделирование решений дифференциальных игр сближения-уклонения в классе множеств с ненулевым дефектом стабильности [Текст] / А.А. Успенский, А.В. Ушаков, П.Д. Лебедев // Вестник Тамбовского государственного университета. Сер.: Естественные и технические науки. – 2013. – Т. 18. – В. 5–2. – С. 2718–2719.

248. Ухоботов В.Н. Метод одномерного проектирования в линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями общего вида [Текст] / В.Н. Ухоботов // –Челябинск: Изд-во Челябинск. ун-та, 1998.-326 с.

249. Ухоботов В.И. Однотипная линейная игра со смешанными ограничениями на управления [Текст] / В.Н. Ухоботов // ПММ. – 1987. – Т. 51. – №2. – С. 179–185.

250. Ухоботов В.И. Об одном классе дифференциальных игр с интегральным ограничением [Текст] / В.Н. Ухоботов // ПММ. – 1977. – Т. 41. – №5. – С. 819–824.

251. Учайкин В.В. Метод дробных производных [Текст] / В.В. Учайкин // – Ульяновск: Артишок, 2008. - 380 с.

252. Ушаков В.Н. К решению задач о сближении управляемых систем [Текст] / В.Н. Ушаков, В.И. Ухоботов, А.В. Ушаков, Г.В. Паршиков // Труды МИАН. – 2015. – Т. 91. – С. 276–291.

253. Ушаков В.Н. Дифференциальные игры с фиксированным моментом окончания и оценка степени нестабильности множеств в этих играх [Текст] / В.Н. Ушаков, П.Д. Лебедев, А.Р. Матвийчук, А.Г. Малёв // Математическая теория управления и дифференциальные уравнения, Сборник статей к 90-летию со дня рождения академика Е.Ф. Мищенко. – 2012. – С. 275–287.

254. Ушаков В.Н. К свойству стабильности в дифференциальных играх [Текст] / В.Н. Ушаков, А.А. Успенский // ДАН России. – 2012, – Т. 443. – №5. – С. 549–554.

255. Ушаков В.Н. Использование дефекта стабильности для формирования

управления в дифференциальной игре [Текст] / В.Н. Ушаков, С.А. Брыкалов, Я.А. Латушкин // Вестник Удмуртского ун-та. Матем. Мех. Компьют. Науки. – 2008. – № 2. – С. 155–162.

256. Ушаков В.Н. Дефект стабильности множеств в игровых задачах управления [Текст] / В.Н. Ушаков, Я.А. Латушкин // Тр. Ин-та мат-ки и механики УрО РАН. – 2006. – Т. 12. – №2. – С. 178–194.

257. Ушаков В.Н. Стабильные мосты в дифференциальных играх на конечном промежутке времени [Текст] / В.Н. Ушаков, А.А. Успенский, Т.Б. Токманцев //. Тр. Ин-та мат-ки и механики УрО РАН. – 2004. – Т. 10. – №2. – С. 155–177.

258. Ушаков В.Н. О приближенном построении решений в игровых задачах управления [Текст] / В.Н. Ушаков, А.П. Хрипунов // ПММ. – 1997. – Т. 61. – №3. – С. 413–421.

259. Ушаков В.Н. К задаче построения стабильных мостов в дифференциальной игре сближения-уклонения [Текст] / В.Н. Ушаков // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. – 1980. – №4. – С. 29–36.

260. Ушаков В.Н. Экстремальные стратегии в дифференциальных играх с интегральными ограничениями [Текст] / В.Н. Ушаков // ПММ. – 1972. – Т.36. —№1. —С. 15–23.

261. Федоров В.Е. Начальные задачи для некоторых классов линейных эволюционных уравнений с несколькими дробными производными [Текст] / В.Е. Федоров, К.В. Бойко, Т.Д. Фуонг // Математические заметки СВФУ. – 2021. – Т.28. – №3. – С. 85–104.

262. Хайдаров Б.К. Позиционная поимка в игре одного убегающего и нескольких преследователей [Текст] / Б.К. Хайдаров // ПММ. – 1984. – Т. 48. – №4. – С. 574–579.

263. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений [Текст] / Дж. Хейл. – М.: Мир, 1984. – 421 с.

264. Хилле Э. Функциональный анализ и полугруппы [Текст] / Э. Хилле, Р. Филлипс. – М.: ИИЛ, 1962. – 832 с.

265. Ченцов А.Г. Дифференциальная игра сближения–уклонения: альтернативная разрешимость и релаксации задачи сближения [Текст] / А.Г. Ченцов // Труды МИАН. – 2021. – Т. 315. – С. 284–303.
266. Ченцов А. Г. Об игровой задаче сближения в заданный момент времени [Текст] / А.Г. Ченцов // Мат. сб. – 1976. – Т. 99. – №3. – С. 394–420.
267. Черноусько Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем [Текст] / Ф.Л. Черноусько. Метод эллипсоидов. – М.: Наука, 1988. – 319 с.
268. Черноусько Ф.Л. Игровые задачи управления и поиска [Текст] / Ф.Л. Черноусько, А.А.Меликян. – М.: Наука, 1978. – 270 с.
269. Черноусько Ф.Л. Одна задача уклонения от многих преследователей [Текст] / Ф.Л. Черноусько // ПММ. – 1976. – Т. 40. – №1. – С. 14–24.
270. Чикрий А.А. Первый прямой метод Л.С. Понтрягина. Развитие идей [Текст] / А.А. Чикрий // Институт кибернетики им. В.М. Глушкова НАНУ. Киев. – 2018. – С. 69–71.
271. Чикрий А.А. Верхняя и нижняя разрешающие функции в игровых задачах динамики [Текст] / А.А. Чикрий // Тр. Ин-та мат-ки Н.Н. Красовского. – 2017. – №1. – С. 293–305.
272. Чикрий А.А. О линейных дифференциальных играх с выпуклыми интегральными ограничениями [Текст] / А.А. Чикрий, А.А. Белоусов // Тр. Ин-та мат-ки и механики УрО РАН. – 2013. – Т. 19. – №4. – С. 308–319.
273. Чикрий А.А. О линейных конфликтно управляемых процессах с дробными производными [Текст] / А.А. Чикрий, И.И. Матичин // Тр. Ин-та мат-ки и механики УрО РАН. – 2011. – Т. 17. – №2. – С. 256–270.
274. Чикрий А.А. Об одном аналитическом методе в динамических играх сближения [Текст] / А.А. Чикрий // Тр.МИАН. – 2010. – Т. 271. – С. 76–92.
275. Чикрий А.А. Игровые задачи для линейных систем дробного порядка [Текст] / А.А. Чикрий, И.И. Матичин // Тр. Ин-та мат-ки и механики. УрО РАН. —2009. —Т. 15. —№ 3. —С. 262–278.
276. Чикрий А.А. Квазилинейные конфликтно управляемые процессы с переменной структурой [Текст] / А.А. Чикрий, И.И. Матичин // Проблемы

управления и информатики. – 1998. – №6. – С. 31–41.

277. Чикрий А.А. Линейная задача убегания при взаимодействии групп управляемых объектов [Текст] / А.А. Чикрий, П.В. Прокопович // ПММ. – 1994. – Т. 58. – № 4. – С. 12–21.

278. Чикрий А.А. Задача убегания от группы для однотипных инерционных объектов [Текст] / А.А.Чикрий, П.В. Прокопович // Дифференц. уравнения. – 1994. – Т. 30. – №6. – С. 998–1004.

279. Чикрий А.А. Задача убегания при взаимодействии групп линейных объектов [Текст] / А.А. Чикрий // ДАН СССР. – 1993. – Т. 333. – №5. – С. 591–593.

280. Чикрий А.А. Конфликтно управляемые процессы [Текст] / А.А. Чикрий. – Киев: Наукова думка, 1992. – 384 с.

281. Чикрий А.А. Преследование управляемым объектом группы убегающих [Текст] / А.А. Чикрий, С.Ф. Калашникова // Кибернетика. – 1987. – №4. – С. 1–8.

282. Чикрий А.А. О задаче группового преследования при наличии фазовых ограничений [Текст] / А.А. Чикрий, Н.Б. Шишкина // Автомат. и телемех.. – 1985. – №2. – С. 59–69.

283. Чикрий А.А. Сочетание усилий преследователей с различными динамическими возможностями [Текст] / А.А. Чикрий, М.В. Питцык // ДАН УССР. – 1984. – №1. – С. 73–76.

284. Чикрий А.А. Квазилинейные дифференциальные игры со многими участниками [Текст] / А.А. Чикрий // ДАН СССР. – 1979. – Т. 246. – № 6. – С. 1306–1309.

285. Чикрий А.А. Линейная задача преследования несколькими объектами [Текст] / А.А. Чикрий, И.С. Раппопорт // Кибернетика. – 1978. – №3. – С. 86–92.

286. Чикрий А.А. Линейная задача убегания от многих преследователей [Текст] / А.А. Чикрий // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. – 1976. – №4. – С. 46–50.

287. Чистяков С.В. К решению игровых задач преследования [Текст] / С.В. Чистяков // ПММ. – 1977. – Т. 41. – №5. – С. 825–832.

288. Чхартишвили А.Г. О простых играх поиска на бесконечном круглом цилиндре [Текст] / А.Г. Чхартишвили, Е.В Шикин. // Матем. заметки. – 1995. – Т. 58. – №5. – С. 762–772.

289. Шабозов М.Ш. Наилучшие полиномиальные приближения и поперечники некоторых функциональных классов в L_2 [Текст] / М.Ш. Шабозов, К. Тухлиев // Мат. заметки. – 2013. – Т. 94. – №6. – С. 908–917.

290. Шабозов М. Ш. О наилучшей совместной полиномиальной аппроксимации функций и их производных в пространстве Харди [Текст] / М.Ш. Шабозов, Г.А. Юсупов, Д.Д. Заргаров //Тр. Ин-та мат-ки и механики УрО РАН. – 2021. – Т. 27. – №4. – С.239–254.

291. Шевченко И.И. Поочередное преследование трех убегающих [Текст] / И.И. Шевченко // Автомат. и телемех. – 1983. – №7. – С. 70–75.

292. Югай Л.П. Задача уклонения траекторий от разреженного терминального множества [Текст] / Л.П. Югай // ДАН России. – 2020. – Т. 495. – №1. – С. 107–111.

293. Югай Л.П. Об $l-$ уклонении в линейной дифференциальной игре многих лиц [Текст] / Л.П. Югай // Дифференц. уравнения. – 1979. – Т. 15. – №5. – С. 840–845.

294. Югай Л.П. О дифференциальных играх с ограничениями на фазовое состояние и управления игроков [Текст] / Л.П. Югай // ДАН Уз. ССР. – 1977. – №4. – С. 6–7.

295. Baranovska L.V. Group Pursuit Differential Games with Pure Time-Lag [Text] / L.V. Baranovska // Contemporary Approaches and Methods in Fundamental Mathematics and Mechanics. Understanding Complex Systems. Springer International Publishing. – 2021. – P. 475–488.

296. Baranovska L.V. Pursuit differential-difference games with pure time-lag [Text] / L.V. Baranovska // Discrete and Continuous Dynamical Systems – Series B. – 2019. – Vol. 24 (3). – P. 1024–1031.

297. Berkovitz L.D. Differential game of generalized pursuit and evasion [Text] / L.D. Berkovitz // SIAM J. Control Optim. – 1986. – Vol. 24 (3). – P. 361–373. DOI: 10.1137/0324021.

298. Castaing C. Convex analysis and measurable multifunctions [Text] / C. Castaing, M. Valadier // Lecture Notes Math. – 1977. – Vol. 580. – P. 1–278.

299. Chandrasekaran S. Existence results for neutral functional integrodifferential equations with infinite delay in Banach spaces [Text] / S. Chandrasekaran, S. Karunanithi // J.Appl. Math. & Informatics.- 2015.- Vol.33. - No. 1-2. – P.45-60.

300. Chikrii A.A. On a Differential Game in a System Described by a Functional Differential Equation [Text] / A.A. Chikrii, A.G. Rutkas, L.A. Vlasenko // Proceedings of the International Conference “Stability, Control, Differential Games” (SCDG2019). – 2020. – P. 63–73.

301. Datko R. On the integration of set-valued mappings in a Banach space [Text] / R. Datko // Fundamenta Mathematicae. – 1973. – Vol.78. – Issue 3. – P. 205–208.

302. Datko R. Linear Autonomous Neutral Differential Equations in a Banach Space [Text] / R. Datko // J. Differential Equations. – 1977. – Vol.25. – P. 258–274.

303. Dhanapalan V. Existence and uniqueness of mild solutions for fractional integrodifferential equations [Text] / V. Dhanapalan, M. Thamilselvan, M. Chandrasekaran // Applied and Computational Mathematics. – 2014. – Vol.3(1). – P. 32–37.

304. Elliott R.J. The existence of value in differential games of pursuit and evasion [Text] / R.J. Elliott, N.J. Kalton // J. Differential Equations. – 1972. – Vol. 12. – No. 3. – P. 504–523. DOI: 10.1016/0022-0396(72)90022-8.

305. Esparza L.G. A brief introduction to differential games [Text] / L.G. Esparza, M. Torres, L.M. Torres // International J. of Physical and Mathematical Sciences. – 2013. – Vol.4(1). – P. 396–411.

306. Fleming W.H. The convergence problem for differential games [Text] / W.H. Fleming // J. of Mathematical Analysis and Applications. – 1986. – Vol.3. – P. 102–116.

307. Fleming W.H. The convergence problem for differential games [Text] / W.H. Fleming // II. In: Advances in Game Theory, M. Dresher, L.S. Shapley, A.W. Tucker (eds.). Ann. of Math. Stud. Princeton University Press. – 1964. – Vol.52. – P. 195–210. DOI: 10.1515/9781400882014-013.

308. Friedman A. Differential Games of Pursuit in Banach Space [Text] / A. Friedman // J. of Mathematical analysis and applications. – 1969. – Vol.25. – P. 93–113.

309. H´ajek O. Pursuit Games: An Introduction to the Theory and Applications of Differential Games of Pursuit and Evasion [Text] / O. H`ajek. New York: Dover Pub., 2008. - 288 p.

310. Ibragimov G.I. A pursuit problem described by infinite system of differential equations with coordinatewise integral constraints on control functions [Text] / G.I. Ibragimov, M. Tukhtasinov, R. Mat Hasim, I.A. Alias // Malaysian J. of Mathematical Sciences. – 2015. – Vol. 9(1). – P. 67–76.

311. Ibragimov G.I. The optimal pursuit problem reduced to an infinite system of differential equations [Text] / G.I. Ibragimov // J. of Applied Mathematics and Mechanics. – 2013. – Vol.77(5). – P. 657–666.

312. Ibragimov G.I. (2013b). Optimal pursuit time for a differential game in the hilbert space [Text] / G.I. Ibragimov // J. of Science Society Thailand. – 2013. – Vol.39(S). – P. 25–30.

313. Ibragimov G.I. A pursuit problem in an infinite system of second-order differential equations [Text] / G.I. Ibragimov, F. Allahabi, A. Kuchkarov // J. of Applied Mathematics and Mechanics. – 2013. – Vol.65(8). – P. 1080–1091.

314. Ibragimov G.I. Solution of a linear pursuit-evasion differential game with closed and convex terminal set [Text] / G.I. Ibragimov, M. Khakestari, A.S. Kuchkarov // ITB J. Sci. – 2012. – Vol. 44A(1). – P. 1–12.

315. Ibragimov G.I. Solution of a linear pursuit-evasion game with integral constraints [Text] / G.I. Ibragimov, A.A. Azamov, M. Khakestari // ANZIAM J.. – 2011. – Vol.52(E). – P. E59–E75.

316. Ibragimov G.I. A pursuit-evasion differential game with many pursuers and

one evader [Text] / G.I. Ibragimov, N.A. Hussin // Malaysian J. of Mathematics Sciences. – 2010. – Vol. 4(2). – P. 183–194.

317. Ibragimov G.I. Pursuit and evasion differential games in hilbert space [Text] / G.I. Ibragimov, R. Mat Hasim // International Game Theory Review. – 2010. – Vol.12(3). – P. 239–251.

318. Ibragimov G.I. Solution of a linear pursuitevasion game with integral constraints [Text] / G.I. Ibragimov, A.A. Azamov, M. Khakestari // ANZIAM J.. Electronic Supplement. – 2010. – Vol. 52. – P. E59–E75.

319. Ibragimov G.I. Existence and uniqueness of the solution for an infinite system of differential equations [Text] / G.I. Ibragimov, R. Mat Hasim, A. Azamov // J. Karya Asli Lorekan Ahli Matematik. – 2008. – Vol.1(2). – P. 9–14.

320. Ibragimov G.I. A group pursuit game [Text] / G.I. Ibragimov // Automation and Remote Control. – 2005. – Vol. 66(8). – P. 1214–1223.

321. Ibragimov G.I. Problems of linear discrete games of pursuit [Text] / G.I. Ibragimov // Mathematical Notes. – 2005. – Vol. 77(5). – P. 653–662.

322. Ibragimov G.I. Optimal pursuit with countably many pursuers and one evader [Text] / G.I. Ibragimov // Differ. Equ. – 2005. – Vol. 41(5). – P. 627–635.

323. Ibragimov G.I. A problem of optimal pursuit in systems with distributed parameters [Text] / G.I. Ibragimov // J. of Applied Mathematics and Mechanics. – 2002. – Vol. 66(5). – P. 719–724.

324. Ja’afaru A.B. On some pursuit and evasion differential game problems for an infinite number of first-order differential equations [Text] / A.B. Ja`afaru, G.I. Ibragimov // J. of Applied Mathematics. – 2012. – P. 1–13.

325. Ja’afaru A.B. Differential games described by infinite system of differential equations of second order: The case of negative coefficients [Text] / A.B. Ja`afaru, G.I. Ibragimov // International J. of Pure and Applied Mathematics. – 2011. – Vol. 70(7). – P. 927–938.

326. Kyrychenko N.F. On the class of linear differential-difference games of pursuit [Text] / N.F. Kyrychenko, L.V. Baranovskaya, Al.A. Chyckrij // Dopov. Akad. Nauk Ukr. – 1997. – Vol. 6. – P. 24–26.

327. Lakshmikantham V. Differential and integral inequalities / V. Lakshmikantham, S. Leela. – New York: Acad.Press, 1969. – 392 p.
328. Lukoyanov N.Yu. Hamilton-Jacobi functional equations and differential games for neutral-type systems [Text] / N.Yu. Lukoyanov, M.I. Gomoyunov, A.R. Plaksin // Dokl. Math. – 2017. – Vol. 96(3). – P. 654–657.
329. Mamatov M.Sh. Differential games of persecution of frozen order with separate dynamics [Text] / M.Sh. Mamatov, N.H. Alimov // J.Appl.Math.Phys. – 2018. – Vol. 6. – P. 475–487.
330. Mamatov M.Sh. Fractional integro-differential calculation and its appendices in the theory of differential games of prosecution of the fractional order [Text] / M.Sh. Mamatov, D. Durdiev, Kh. Alimov // Amer. Sci. J. – 2016. – Vol. 4(4). – P. 72–77.
331. Nakagiri S. Structural properties of functional differential equations in Banach spaces [Text] / S. Nakagiri // J. Math. Anil. Appl. – 1988. – Vol. 25. – P. 353–398.
332. Nikol'skiĭ M.S. Linear differential pursuit games with integral constraints [Text] / M.S. Nikol'skiĭ // Differential Equations. – 1992. – Vol. 28:2. – P. 190–193.
333. Nikol'skiĭ M.S. On a class of differential games with fixed time [Text] / M.S. Nikol'skiĭ // Soobshch. Akad. Nauk Gruzin. SSR. – 1980. – Vol. 99:2. – P. 293–296.
334. Nikol'skiĭ M.S. Some computational aspects of Pontrjagin's first direct method in differential games [Text] / M.S. Nikol'skiĭ // Vestnik Moskov. Univ. Ser. XV Vychisl. Mat. Kibernet. – 1980. – No. 4. – P. 27–32.
335. Nikol'skiĭ M.S. Some differential games with fixed time [Text] / M.S. Nikol'skiĭ // Dokl. Akad. Nauk SSSR. – 1978. – Vol. 240:2 – P. 272–275.
336. Parthasarathy T. Selection Theorems and their Applications [Text] / T. Parthasaraty // Lecture Notes in Mathematics. – 1972. – Vol. 263. – P. 1–10.
337. Petrov N.N. Multiple capture of given number of evaders in linear recurrent differential games [Text] / N.N. Petrov, N.A. Solov'eva // J. of Optimization Theory and Applications. – 2019. – Vol. 182(1). – P. 417–429.

338. Petrov N.N. Problem of pursuit of a group of coordinated evaders in linear recurrent differential games [Text] / N.N. Petrov, N.A. Solov'eva // J. of Computer and System Sciences International. – 2012. – Vol. 51. – P. 770–778.

339. Petrov N.N. A problem of group pursuit with phase constraints [Text] / N.N. Petrov, D.A. Vagin // J. of Applied Mathematics and Mechanics. – 2002. – Vol. 66(2). – P. 225–232.

340. Rockafellar T.R. Convex Integral Functionals and Duality [Text] / T.R. Rockafellar // Contribution to nonlinear functional analysis. Academic Press, Inc., New York and London. – 1971. – P. 215–236.

341. Samatov B.T. Pursuit-evasion differential games with Gr¨onwall-type constraints on controls [Text] / B.T. Samatov, G. Ibragimov, I.V. Khodjibayeva // Ural Math. J. – 2020. – Vol. 6(2). – P. 95–107.

342. Samatov B. T., Sotvoldiyev A. I. Intercept problem in dynamic flow field [Text] / B.T. Samatov, A.I. Sotvoldiyev // Uzbek. Mat. Zh. – 2019. – No. 2. – P. 103–112.

343. Samatov B.T. The Π-strategy in a differential game with linear control constraints [Text] / B.T. Samatov // J. Appl. Math. Mech. – 2014. – Vol. 78(3). – P. 258–263.

344. Samatov B.T. On a pursuit-evasion problem under a linear change of the pursuer resource [Text] / B.T. Samatov // Siberian Adv. Math. – 2013. – Vol. 23(10). – P. 294–302.

345. Samatov B.T. The pursuit-evasion problem under integral-geometric constraints on pursuer controls [Text] / B.T. Samatov // Autom. Remote Control. – 2013. – Vol. 74(7). – P. 1072–1081.

346. Samatov B.T. Problems of group pursuit with integral constraints on controls of the players [Text] / B.T. Samatov // I. Cybern. Syst. Anal. – 2013. – Vol. 49(5). – P. 756–767.

347. Samatov B.T. Problems of group pursuit with integral constraints on controls of the players [Text] / B.T. Samatov // II. Cybern. Syst. Anal. – 2013. – Vol. 49(6). – P. 907–921.

348. Tukhtasinov M. Differential Games for an Infinite 2-Systems of Differential Equations [Text] / M. Tukhtasinov, G. Ibragimov, S. Kuchkarova, R. Mat Hasim // Mathematics. – 2021. – Vol.9(13). – Article 1467.

349. Tukhtasinov M. Linear differential pursuit game with impulse control and linear integral constraint of controls of players [Text] / M. Tukhtasinov // J. of Mathematical Sciences. – 2020. – Vol. 245:1. – P. 23–29.

350. Tukhtasinov M. Sets invariant under an integral constraint on controls [Text] / M. Tukhtasinov, U. Ibragimov // Russian Math. (Iz. VUZ). – 2011. – Vol. 55:8. – P. 59–65.

351. Tukhtasinov M. On Pursuit Problems in Controlled Distributed Systems [Text] / M. Tukhtasinov, M.Sh. Mamatov // Math. Notes. – 2008. – Vol. 84:2. – P. 256–262.

352. Vagin D.A. The Two Problems of Group Pursuit [Text] / D.A. Vagin, N.N. Petrov // The Tenth International Symposium of Dynamic Games and Applications. Proceedings, V2, S-P. – 2002. – P. 691–695.

353. Vagin D.A. On One Problem of Pursuit of a Group of Evaders [Text] / D.A. Vagin, N.N. Petrov // International Conference Logic, Game Theory and Social Choice, S-P. – 2001. – P. 204–205.

354. Xiao-Bao Shu. The existence and uniqueness of mild solutions for fractional differential equations with nonlocal conditions of order $1<\alpha<2$ [Text] / Xiao-Bao Shu, Qianqian Wang // Computers and Mathematics with Applications. – 2012. – Vol. 64. – P. 2100–2110.

355. Yong J. Time optimal controls for semilinear distributed parameter systems-existence theory and necessary conditions [Text] / J. Yong // Kodai Math. J. – 1991. – Vol. 14. – P. 239–253.

Б) Работы автора по теме диссертации

***Монографии*:**

[1-А] **Мухсинов Е.М.** Дифференциальные игры преследования и убегания [Текст] / Е.М. Мухсинов. – Худжанд: Технопарк при ТГУПБП, 2022. – 200 с.

Статьи, опубликованные в рецензируемых журналах, рекомендованных ВАК при Президенте Республики Таджикистан и ВАК при Министерстве образования и науки РФ:

[2-А] **Мухсинов Е.М**. Разрешимость задачи преследования для одной дифференциальной игры в банаховом пространстве [Текст] / Е.М. Мухсинов // Дифференц. уравнения. – 2023. – Т.59. – №1. – С. 142–146.

[3-А] **Мухсинов Е.М**. Об одной дифференциальной игре нейтрального типа с интегральными ограничениями в гильбертовом пространстве [Текст] / Е.М. Мухсинов // Уфимский математический журнал. – 2022. – Т.14. – №3. – С. 90–100.

[4-А] **Мухсинов Е.М.** О задаче преследования для квазилинейной дифференциальной игры нейтрального типа [Текст] / Е.М. Мухсинов // Дифференц. уравнения и процессы управления. – 2022. –№2. – С. 66–82.

[5-А] **Мухсинов Е.М**. К задаче преследования в квазилинейных дифференциальных играх запаздывающего типа [Текст] / Е.М. Мухсинов // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. – 2022. – Т. 18. – Вып.3. – С. 328–336.

[6-А] **Мухсинов Е.М.** Задача преследования для одной интегро-дифференциальной игры в банаховом пространстве [Текст] / Е.М. Мухсинов // Вестник ТНУ. Серия естественных наук. – 2022. – №3. – С. 160–168.

[7-А] **Мухсинов Е.М.** Разрешимость задачи преследования для

дифференциальной игры с несколькими дробными производными в банаховом пространстве [Текст] / Е.М. Мухсинов // Изв. НАН Таджикистана. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. – 2022. – №4 (189). – С. 56–65.

[8-А] **Мухсинов Е.М.** Разрешимость задачи преследования для одной дифференциальной игры нейтрального типа [Текст] / Е.М. Мухсинов // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2021. – №1 (31). – С. 108–117.

[9-А] **Мухсинов Е.М.** О задаче преследования в нелинейных дифференциальных играх с запаздывающим аргументом [Текст] / Е.М. Мухсинов // Доклады НАН Таджикистана. – 2021. – Т. 64. – №1–2. – С. 42–46.

[10-А] **Мухсинов Е.М.** Разрешимость задачи преследования для одной дифференциальной игры нейтрального типа с интегральными ограничениями [Текст] / Е.М. Мухсинов // Изв. НАН Таджикистана. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук, – 2021. – №4 (185). – С. 14–24.

[11-А] **Мухсинов Е.М.** Разрешимость задачи преследования для одной интегро-дифференциальной игры с интегральными ограничениями [Текст] / Е.М. Мухсинов // Вестник ТНУ. Серия естественных наук – 2021. – №3. – С. 148–156.

[12-А] **Мухсинов Е.М.** Разрешимость одной дифференциальной игры преследования нейтрального типа [Текст] / Е.М. Мухсинов // Учёные записки. Серия: естественные и экономические науки. Издательство: Худжандский государственный университет им. акад. Б.Гафурова. – 2021. – №1(56). – С. 16–21.

[13-А] **Мухсинов Е.М.** Разрешимость задачи преследования для линейной дифференциальной игры запаздывающего типа с интегральными ограничениями [Текст] / Е.М. Мухсинов // Учёные записки. Серия: естественные и экономические науки. Издательство: Худжандский

государственный университет им. акад. Б.Гафурова. – 2021. – №1(56). – С. 12–15.

[14-А] **Мухсинов Е.М.** Об одной линейной интегро-дифференциальной игре в гильбертовом пространстве [Текст] / Е.М. Мухсинов // Учёные записки. Серия: естественные и экономические науки. Издательство: Худжандский государственный университет им. акад. Б.Гафурова. – 2021. – №3(58). – С. 12–15.

[15-А] **Мухсинов Е.М.** О задаче убегания в нелинейных дифференциальных играх с запаздывающим аргументом [Текст] / Е.М. Мухсинов // Вестник ТНУ. Серия естественных наук. –2020. – №4. – С. 74–78.

[16-А] **Мухсинов Е.М.** О дифференциальных играх преследования с интегральными ограничениями [Текст] / Е.М. Мухсинов // ДАН. Тадж. ССР. –1985. –Т.28. – №8. – С. 431–434.

[17-А] **Мухсинов Е.М.** О дифференциальных играх убегания с интегральными ограничениями [Текст] / Е.М. Мухсинов // ДАН. Тадж. ССР. –1985. – Т.28. –№5. –С. 258–261.

[18-А] **Мухсинов Е.М.** Об оптимальности времени преследования в дифференциальных играх [Текст] / Е.М. Мухсинов // Управляемые системы. –Выпуск 22. –Новосибирск – 1982. – С. 80–87.

Статьи, опубликованные в других изданиях:

[19-А] **Мухсинов Е.М.** Задача преследования для одной дифференциальной игры нейтрального типа в банаховом пространстве [Текст] / Е.М. Мухсинов // Материалы Международной научной конференции «Современные методы теории краевых задач». Понтрягинские чтения. Воронежская весенняя математическая школа. (3–9 мая 2023г.). – Воронеж, 2023. – С. 276–278.

[20-А] **Мухсинов Е.М.** Задача преследования для одной дифференциальной игры запаздывающего типа в банаховом пространстве [Текст] / Е.М. Мухсинов, М.Н. Муродова // Материалы Международной научно-

практической конференции «XIII Ломоносовские чтения», посвященной 115-летию академика Б.Гафурова. (28–29 апреля 2023г.). – Душанбе, 2023. – С. 77–80.

[21-А] **Мухсинов Е.М.** О разрешимости задачи преследования для одной дифференциальной игры дробного порядка [Текст] / Е.М. Мухсинов // Сборник трудов Международной научной конференции «Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий» (13–16 декабря 2022г.). – Воронеж, 2022. – С. 48–49.

[22-А] **Мухсинов Е.М.** Оптимальность времени преследования для одной дифференциальной игры нейтрального типа [Текст] / Е.М. Мухсинов // Материалы международной научной конференции «Неклассические уравнения математической физики и их приложения» (6–8 октября 2022г.). - Ташкент, 2022. – С. 152–153.

[23-А] **Мухсинов Е.М.** О нелинейной дифференциальной игре убегания нейтрального типа в гильбертовом пространстве [Текст] / Е.М. Мухсинов // Материалы республиканской научно-практической конференции «Актуальные проблемы и перспективы развития естественных и точных наук» (28–29 октября 2022 г.). – Душанбе, 2022. – С.39–41.

[24-А] **Мухсинов Е.М.** Об одной дифференциальной игре дробного порядка в гильбертовом пространстве [Текст] / Е.М. Мухсинов // Материалы международной конференции «Современные проблемы математического анализа и теории функций» посвященной 70-летию академика НАН Таджикистана М.Ш. Шабозова (24–25 июня 2022г.). – Душанбе, 2022. – С. 272–274.

[25-А] **Мухсинов Е.М**. Разрешимость задачи преследования для дифференциальной игры с несколькими дробными производными [Текст] / Е.М. Мухсинов // Материалы международной конференции «Современные проблемы теории чисел и математического анализа» посвященной 80-летию со дня рождения доктора физико-

математических наук, профессора Д. Исмоилова (29–30 апреля 2022г.). – Душанбе, 2022. – С. 137–140.

[26-A] **Мухсинов Е.М.** Разрешимость задачи преследования для одной линейной дифференциальной игры нейтрального типа [Текст] / Е.М. Мухсинов // Сборник трудов международной конференции по алгебре, анализу и геометрии (22–28 августа, 2021г.). – Казань, 2021. – С. 253–255.

[27-A] **Mukhsinov Y.M**. A Quasilinear Differential Game of Neutral Type with Integral Constraints in a Hilbert Space [Text] / Y.M. Mukhsinov // International Conference "Mathematical Physics, Dynamical Systems and Infinite-Dimensional Analysis" (June 30–July 9, 2021). – Russia, Moscow Region, Dolgoprudny, 2021. – P. 124.

[28-A] **Мухсинов Е.М.** Задача преследования для одной дифференциальной игры с интегральными ограничениями в гильбертовом пространстве [Текст] / Е.М. Мухсинов // International Scientific and Practical Conference. Scientific horizon in the context of social crises (11-12.04.2021). – Japan, Tokyo, 2021. – P. 560–564.

[29-A] **Мухсинов Е.М.** Разрешимость задачи преследования для одной квазилинейной дифференциальной игры нейтрального типа с интегральными ограничениями [Текст] / Е.М. Мухсинов // Материалы международной конференции «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики» (5–9 декабря 2021г.). Нальчик, 2021. – С. 149.

[30-A] **Мухсинов Е.М.** Задача преследования для одной дифференциальной игры дробного порядка с интегральными ограничениями [Текст] / Е.М. Мухсинов // Сборник трудов Всероссийской научной конференции «Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий» (14–16 декабря 2021г.). – Воронеж, 2021. – С. 109–111.

[31-A] **Мухсинов Е.М.** Разрешимость задачи преследования для одной

дифференциальной игры параболического типа [Текст] / Е.М. Мухсинов // Тезисы докладов республиканской научной конференции с участием зарубежных учёных «Сарымсаковские чтения» (16–18 сентября 2021г.). - Ташкент, 2021. – С. 110–111.

[32-А] **Мухсинов Е.М.** О разрешимости задачи преследования для квазилинейной дифференциальной игры дробного порядка в банаховом пространстве [Текст] / Е.М. Мухсинов // Сборник статей II международной научно-практической конференции на тему «О применении дифференциальных уравнений при решении прикладных задач» (4 ноября 2021г.). – Душанбе. 2021. – С. 103–106.

[33-А] **Мухсинов Е.М.** Задача преследования для одной интегро-дифференциальной игры с интегральными ограничениями [Текст] / Е.М. Мухсинов, М.Н. Муродова // Материалы международной конференции «Актуальные проблемы современной математики» посвящённой 80-летию профессора Т. Собирова (25–26 июня 2021г.). – Душанбе, 2021. – С. 165–167.

[34-А] **Мухсинов Е.М.** О разрешимости задачи преследования для дифференциальной игры дробного порядка в банаховом пространстве [Текст] / Е.М. Мухсинов // Материалы республиканской конференции «Современные проблемы прикладной математики и их роль в формировании технического мировоззрения общества» (29–30 октября 2021г.). – Худжанд, 2021. – С. 120–122.

[35-А] **Мухсинов Е.М.** Задача преследования для одной дифференциальной игры с распределенными параметрами [Текст] / Е.М. Мухсинов // Маводҳои конфронси илмӣ-амалии ҷумҳуриявӣ «Рушди илмҳои табиатшиносӣ, дақиқ ва риёзӣ: роҳҳои татбиқи натиҷаҳои онҳо дар истеҳсолот» бахшида ба эълон шудани солҳои 2020–2040 Бистсолаи омӯзиш ва рушди фанҳои табиатшиносӣ, дақиқ ва риёзӣ қисми 1. (21-22 апрели 2021с.). – Хуҷанд, 2021. – С. 111–113.

[36-А] **Мухсинов Е.М.** О линейных дифференциальных играх преследования

в гильбертовом пространстве [Текст] / Е.М. Мухсинов, М.Н. Муродова // Маводҳои конфронси илмӣ-амалии ҷумҳуриявӣ «Рушди илмҳои табиатшиносӣ, дақиқ ва риёзӣ: роҳҳои татбиқи натиҷаҳои онҳо дар истеҳсолот» бахшида ба эълон шудани солҳои 2020-2040 Бистсолаи омӯзиш ва рушди фанҳои табиатшиносӣ, дақиқ ва риёзӣ. қисми 2 (21-22 апрели 2021с.). – Худжанд, 2021. – С. 125–128.

[37-А] **Мухсинов Е.М.** Задача преследования для дифференциальной игры нейтрального типа в гильбертовом пространстве / Е.М. Мухсинов // Материалы республиканской научно-практической конференции, посвященной 80-летию профессора Исмати М. и 20- летию развития естественных, точных и математических наук на тему «Современные проблемы теории дифференциальных уравнений с сингулярными коэффициентами» (26 сентября 2020г.). – Душанбе, 2020. – С. 131–134.

[38-А] **Мухсинов Е.М.** О разрешимости задачи преследования для одной дифференциальной игры запаздывающего типа [Текст] / Е.М. Мухсинов, М.Н. Муродова // Материалы международной конференции «Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений» посвященной 70-летию со дня рождения академика НАН Таджикистана, д.ф.-м.н., профессора Бойматова К.Х. (25-26 декабря, 2020г.). – Душанбе, 2020. – С. 197–200.

[39-А] **Мухсинов Е.М.** Разрешимость задачи преследования в гильбертовом пространстве [Текст] / Е.М. Мухсинов, М.Н. Муродова // Маводи конференсияи илмии ҷумҳуриявии «Ташаккули самтҳои инноватсионии илмҳои дақиқ ва техникӣ дар замони муосир: муаммо ва дурнамои рушд» (19 ноябри 2015с.). – Хуҷанд, 2015. – С. 33–36.

[40-А] **Мухсинов Е.М.** О дифференциальных играх преследования и убегания [Текст] / Е.М. Мухсинов // Маводҳои конференсияи байналхалқии илмӣ «Проблемаҳои муосири математика ва таълимӣ он» (28–29 июни 2014с.). – Хуҷанд, 2014. – С. 319–320.