ОТЗЫВ

на диссертационную работу Мухсинова Едгора Мирзоевича «О разрешимости задач преследования и убегания в дифференциальных играх», представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Различные задачи из военной сферы, физики, биологии и экономики, протекающие в условиях конфликта или неопределенности, дали толчок к изучению дифференциальных игр. Первые работы, посвященные дифференциальным играм, появились в начале 50-х годов XX века в работах американского математика Р. Айзекса. Для решения целого ряда прикладных задач Р. Айзекс использовал метод динамического программирования. В начале 60-годов XX века в этой области фундаментальные работы выполнили академики Н.Н. Красовский и Л.С. Понтрягин. Работы Н.Н. Красовского и его сотрудников посвящены в основном позиционным дифференциальным играм. Н.Н. Красовский предложил формализацию дифференциальной игры, которая позволила ему разработать правило экстремального прицеливания и доказать фундаментальные теоремы об альтернативах. В работах Л.С. Понтрягина дифференциальная игра рассматривается отдельно с точки зрения преследующего и с точки зрения убегающего. При этом, при различных подходах, используются различные информации, что неизбежно разбивает задачу на две различные задачи: задачу преследования и задачу убегания.

Работы Л.С. Понтрягина и его последователей в основном относятся к конечномерным дифференциальным играм, когда динамика игры описывается обыкновенным дифференциальным уравнением. Но, в практике часто встречаются конфликтно управляемые процессы, описываемые дифференциальными уравнениями с запаздывающими аргументами, нейтрального типа или дробного порядка. Многие из этих

управляемых процессов можно моделировать и исследовать как дифференциальные игры в подходящих банаховых пространствах. Именно такой подход к изучению дифференциальных игр принят в данной диссертационной работе. При этом задачи преследования и убегания понимаются в смысле Л.С. Понтрягина. Заметим, что такой подход успешно используется многими учеными как в теории оптимального управления, так и в теории дифференциальных игр.

Диссертация Мухсинова Е.М. посвящена задачам преследования и убегания, когда динамики игры описывается дифференциальными уравнениями в бесконечномерных банаховых пространствах.

Работа состоит из пяти глав. В первой главе дан анализ литературы по дифференциальным играм и приведены некоторые вспомогательные понятия и результаты. Вторая глава посвящена линейным и квазилинейным дифференциальным играм преследования в банаховом пространстве, когда на управления игроков наложены геометрические ограничения. В третьей главе исследованы линейные и квазилинейные дифференциальные игры с интегральными ограничениями на управление игроков. Четвертая глава посвящена нелинейным дифференциальным играм преследования и убегания, а пятая – дифференциальным и интегро-дифференциальным играм дробного порядка, когда на управление игроков налагается геометрические или интегральные ограничения.

Глава 2 содержит шесть параграфов. В первом параграфе приведена постановка задач преследования и убегания в смысле Л.С.Понтрягина.

Во втором параграфе в банаховом пространстве рассматривается квазилинейная дифференциальная игра, описываемая дифференциальным уравнением

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(u(t), v(t), t)$$

и замкнутым терминальным множеством M, где заканчивается игра. Приведены условия, при которых время преследования будет оптимальным.

В третьем параграфе в гильбертовом пространстве X рассматривается

квазилинейная дифференциальная игра, описываемая дифференциальным уравнением запаздывающего типа

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + \int_{-h}^{0} d\eta\,(s)x(t+s) + f(u(t), v(t), t)$$

и замкнутым терминальным множеством $M = M_0 + M_1$, где M_0 – замкнутое подпространство из X, $M_1 \subset M_0^{\perp}$ – ортогональное дополнение к M_0. Найдено множество начальных положений, из которых возможно завершение преследования за оптимальное время.

В четвертом параграфе представлено решение задачи преследования для дифференциальной игры в банаховом пространстве, когда динамики игры описывается дифференциальным уравнением нейтрального типа

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} B_i\dot{x}(t-h_i) + Ax(t) + \sum_{i=1}^{n} A_i x(t-h_i) + f\big(t, u(t), v(t)\big) \quad (1)$$

и замкнутым терминальным множеством. Отметим, что результаты этого параграфа обобщают некоторые результаты Н. Сатимова, П.Б. Гусятникова и М.С. Никольского, полученные для конечномерного случая.

В пятом параграфе получено решение задачи преследования для игры нейтрального типа в гильбертовом пространстве.

В шестом параграфе даны приложения полученных результатов к конкретным задачам преследования. В частности, в сепарабельном и рефлексивном банаховом пространстве X исследована дифференциальная игра, описываемая системой

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = k\dot{x}(t-1) + y(t) + \bar{v}(t) \\ \dot{y}(t) = -\bar{u}(t) \end{cases}, \quad (2)$$

$$\|\bar{u}\| \le \alpha, \ \ \|\bar{v}\| \le \beta, \ \ k \ge 0, \qquad x(t), y(t) \in X, \quad M = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : \|x\| \le l\right\}.$$

Показано, что в игре (2) возможно преследование за оптимальное время.

Глава 3 содержит четыре параграфа. В первом параграфе получено решение задачи преследования для линейной дифференциальной игры

$$\dot{x}(t) = Ax(t) - Bu(t) + Cv(t),$$

с интегральными ограничениями на управления игроков:

$$\int_0^\infty \|u(t)\|^2\,dt \le \rho^2, \quad \int_0^\infty \|v(t)\|^2\,dt \le \sigma^2\,. \qquad (3)$$

Установленные утверждения обобщают результаты А.Я. Азимова и М.С. Никольского, полученные для конечномерного случая.

Во втором и третьем параграфах для задачи преследования для дифференциальной игры запаздывающего и нейтрального типа (1) с интегральными ограничениями (3) получены соответствующие решения.

В четвертом параграфе для конкретных задач преследования найдено время преследования и указан закон выбора управления преследователя.

Глава 4 состоит из пяти параграфов. В первом и втором параграфах исследована задача убегания в нелинейной дифференциальной игре нейтрального типа, когда терминальное множество инвариантно относительно соответствующей полугруппы и является замкнутым линейным подпространством гильбертового пространства соответственно. В третьем и четвертом параграфах в банаховом пространстве, с помощью теории дифференциальных неравенств, решаются задачи убегания и преследования в нелинейной дифференциальной игре с запаздывающим аргументом

$$\dot{x}(t) = f(x_t, u(t), v(t), t)$$

и замкнутым терминальным множеством соответственно.

Пятый параграф посвящён конкретным задачам убегания, когда динамика игры описывается интегро-дифференциальным уравнением.

Глава 5 содержит семь параграфов. В первом параграфе получено решение задачи преследования в квазилинейной дифференциальной игре дробного порядка $\alpha, m-1<\alpha<m,\ m=1,2,\ldots,$

$$D^\alpha x(t) = Ax(t) + f(u(t), v(t), t), \qquad (4)$$

с линейным ограниченным оператором A и интегральными ограничениями вида (3). Во втором параграфе решается такая же задача преследования с $\alpha \in [1,2)$ и линейным замкнутым оператором A. В третьем параграфе

решается аналогичные задачи с геометрическим ограничением. Надо заметить, что полученные в этом параграфе результаты обобщают соответствующие результаты Х.Н. Алимова и М.Ш. Маматова для конечномерного случая.

В четвертом параграфе решается задача преследования для дифференциальной игры, когда динамика игры описывается интегро-дифференциальным уравнением дробного порядка

$$D^{\alpha}x(t) = Ax(t) + \int_0^t B(t-s)x(s)ds + f(u(t), v(t), t) \quad (5)$$

с геометрическими ограничениями на управление игроков, замкнутым терминальным множеством и с линейным замкнутым оператором A, порождающий соответствующую сильно непрерывную полугруппу.

Отметим, что, используя первый метод Л.С. Понтрягина соискатель выбирает измеримое управление преследования $u(s)$ по формуле $w(s) = S_{\alpha}(T-s)f(u(s), v(s), s)$, где $S_{\alpha}(t)$ –резольвентный оператор удовлетворяющий уравнению

$$D^{\alpha}S_{\alpha}(t) = AS_{\alpha}(t) + \int_0^t B(t-s)S_{\alpha}(s)ds.$$

В пятом параграфе решается аналогичная задача, когда на управление игроков наложены интегральные ограничения.

В шестом параграфе решается задача преследования для дифференциальной игры в банаховом пространстве, когда динамика игры описывается дифференциальным уравнением с несколькими дробными производными Герасимова–Капуто

$$D^{\alpha}z(t) = \sum_{k=1}^{n} D^{\alpha_k} A_k z(t) + f(u(t), v(t), t)\,.$$

В седьмом параграфе исследованы конкретные примеры о разрешимости задачи преследования, когда динамика игры описывается линейным дифференциальным уравнением дробного порядка.

В целом в диссертационной работе получены новые и важные результаты, представляющие большой научный интерес. Эти результаты можно применить в теории дифференциальных игр преследования и убегания, в теории управляемых процессов, протекающих в условиях конфликта и неопределенности, динамика которых описывается дифференциальными уравнениями с запаздывающими аргументами, нейтрального типа и с дробными производными, а также при решении игровых задач, движение которых можно моделировать как дифференциальные игры преследования и убегания в подходящих банаховых пространствах.

При работе над диссертацией соискатель Мухсинов Е.М. показал себя как способный и творческий исследователь, самостоятельно решавшие многие игровые задачи.

Считаю, что диссертационная работа «О разрешимости задач преследования и убегания в дифференциальных играх» является завершенным научным исследованием, полученные в ней результаты имеют огромное значение для развития теории дифференциальных игр в банаховых пространствах. Она отвечает всем требованиям, предъявляемым к докторским диссертациям (Приложение 2 к постановлению Правительства Республики Таджикистан от 30 июня 2021 года, №267) и её автор Мухсинов Е.М. заслуживает присуждения ему ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управления.

Научный консультант,
д.ф.-м.н., профессор Байзаев С.

Подпись Байзаева С. заверяю.
Начальник управления кадров и специальных работ Мирпочоев И.Х.

ШУЪБАИ КАДРҲО ВА КОРҲОИ МАХСУС

19.01.2023