ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертационную работу **Мухсинова Едгора Мирзоевича «О разрешимости задач преследования и убегания в дифференциальных играх»,** представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02-Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

АКТУАЛЬНОСТЬ ТЕМЫ ДИССЕРТАЦИИ

В середине 50-х годах прошлого века современная математика обогатилась новыми направлениями, среди которых наиболее интенсивно стали развиваться теория оптимального управления. Причиной послужило, в основном, необходимость решения актуальных задач управления техническими системами(задачи космической навигации, управления ядерными реакторами, атмосферными процессами и др.) Теоретическими достижениями в теории управляемых процессов в тот период явились создание принципа максимума Л.С.Понтрягина(СССР) и динамического программирования Р.Беллмана(США).

Почти одновременно и параллельно стала развиваться теория управляемых процессов в условиях конфликта, здесь первые фундаментальные достижения связаны с именами Л.С.Понтрягина, Н.Н.Красовского (оба-СССР и Россия) и Р.Айзекса(США), последний считается основателем теории дифференциальных игр.

Наряду с известным центрами, развивающими теории оптимального управления и дифференциальных игр (Москва, Санкт-Петербург, Екатеринбург и Киев), в Республике Узбекистан в 70-е годы прошлого столетия сложилась собственная школа международного уровня по теории управления и дифференциальным играм, основателем которой является Академик Н.Ю. Сатимов (1939-2006).

Заметим, что сложившаяся «Ташкентская школа по теории управления дифференциальных игр» объединяла исследователей многих стран Центральной Азии.

В процессе развития теории дифференциальных игр объекты исследования становились все более сложными, что отражалось в последовательно возрастающей сложности описания классов исследуемых динамических систем. На первом этапе развития теории дифференциальных игр рассматривались управляемые объекты, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями в конечномерных пространствах. В дальнейшем классы исследуемых объектов (теоретических и практических) усложнялись, что привело к рассмотрению дифференциальных игр в бесконечномерных пространствах. Выяснилось, что такое обобщение на бесконечномерный случай не явилось тривиальным «переносом конечномерных результатов», более того, получаемые результаты позволяли исследовать новые классы дифференциальных игр(преследования и убегания), описываемые уравнениями в частных производных, дробного порядка, с запаздывающим аргументом и др.

Рецензируемая диссертация Е.М. Мухсинова посвящена исследованию дифференциальных игр преследования и убегания, описываемых уравнениями в бесконечномерных пространствах, при этом задачи преследования и убегания исследовались в мало изученной постановке Л.С.Понтрягина(задачи преследования) и Л.С.Понтрягин-Е.Ф.Мищенко(задачи убегания). Полученные диссертантом результаты обобщают известные «конечномерные» результаты Л.С.Понтрягина, Е.Ф.Мищенко, Н.Н.Красовского, Л.А.Петросяна, Б.Н.Пшеничного, Н.Сатимова и их многочисленных учеников. На известных в дифференциальных играх примерах показаны эффективность полученных теоретических результатов и возможности практических приложений в различных сферах (техника, военная сфера, экономика, физика и биология и пр.).

Новизна рассматриваемых задач и полученных результатов свидетельствует об **актуальности темы исследования** диссертанта Е.М.Мухсинова.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, общей характеристики исследований, пяти глав, разбитых на 26 параграфов, обсуждения и выводов, и списка литературы из 355 наименований. Объем диссертации - 306 страниц компьютерного текста.

Во введении дан детальный обзор современного состояния теории дифференциальных игр, выявлены недостаточно исследованные направления в задачах преследования и убегания, на основе которых указана тема исследования диссертации и обоснована ее актуальность. В разделе **«Общая характеристика исследований»** изложена цель исследований, намечена детальная программа исследований, указаны математические методы для решения поставленных задач и сформулированы итоговые результаты автора, выносимые на защиту.

В Главе 1 «Анализ литературы по дифференциальным играм и некоторые вспомогательные понятия и результаты» дан анализ литературы по дифференциальным играм и приведены некоторые важные вспомогательные результаты. В §1.1 подробно рассмотрены различные постановки задач в теории дифференциальных игр(Р.Айзекс, Н.Н.Красовский,Б.Н.Пшеничный-А.А.Чикрицй, У.Флеминг и др.) для которых указаны общие черты и различия в постановках. В §1.2 первой главы изложена постановка задач преследования и убегания, впервые сформулированная Л.С.Понтрягиным, и которая является основным объектом

исследования в диссертации. В §1.3 и §1.3 изложены известные фундаментальные результаты решения дифференциальных игр, в основном, в конечномерных пространствах, а также приведены формулы решений задач типа Коши для различных дифференциальных уравнений(обыкновенных, с запаздывающим аргументом, с дробной производной), которые в последующем будут основным инструментом для разрешимости задач преследования и убегания в бесконечномерных(банаховых) пространствах.

В Главе 2 «Линейные и квазилинейные дифференциальные игры преследования» исследованы линейные и квазилинейные дифференциальные игры преследования в банаховом пространстве, когда на управление игроков наложены геометрические ограничения. Основными теоремами второй главы являются теоремы 2.2.1, 2.3.1, 2.3.2, 2.4.1, 2.4.2, 2.4.5, 2.4.6, 2.4.7, 2.4.8 и 2.5.1. В частности, используя первый метод Л.С.Понтрягина и метод Н.Ю.Сатимова в теоремах 2.4.5–2.4.8 исследуется разрешимость задачи преследования для квазилинейной дифференциальной игры нейтрального типа

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} B_i \dot{x}(t-h_i) + Ax(t) + \sum_{i=1}^{n} A_i x(t-h_i) + f\big(t, u(t), v(t)\big), \qquad (1)$$

когда линейный замкнутый оператор A порождает сильно непрерывную полугруппу. Кроме этого, в теоремах 2.4.6 и 2.4.8, когда терминальное множество M выпукло и компактно относительно слабой топологии $\sigma(X, X^*)$ при соответствующих предположениях, используя теорему о строгой отделимости в локально выпуклом топологическом пространстве, доказана оптимальность времени преследования.

В Главе 3 «Линейные и квазилинейные дифференциальные игры преследования с интегральными ограничениями» исследованы линейные и квазилинейные дифференциальные игры в гильбертовом пространстве, когда на управления игроков наложены интегральные ограничения. Известно, что интегральные ограничения на управления имеют смысл «энергетических» ограничений на возможности игроков.

Получены достаточные условия для разрешимости преследования для конфликтно управляемых объектов, фазовые векторы которых находятся в гильбертовых пространствах.

Основные результаты третьей главы изложены в теоремах 3.3.1, 3.3.3, 3.3.4 и 3.3.6. В частности, используя конструкцию, аналогичную первому методу преследования Л.С.Понтрягина(конечномерный случай) и идею о растяжении времени в теореме 3.3.3. описано множество начальных положений, из которых в игре (1) возможно завершение преследования. При этом, задан аналитический вид управления, обеспечивающего завершение преследования из заданного начального положения игры. В параграфе 3.4 третьей главы приведены два примера, подтверждающие теоретические результаты по дифференциальным играм с запаздывающим аргументом и представляющие самостоятельный интерес.

В **Главе 4 «Нелинейные дифференциальные игры преследования и убегания»** исследованы задачи преследования и убегания для объектов описываемых нелинейными уравнеиями в гильбертовых пространствах. Основные результаты главы по задачам убегания содержатся в первых трех параграфах и доказаны в теоремах 4.1.1, 4.2.1 и 4.3.1. В частности, в теореме 4.2.1, используя, ставшую уже классической, конструкцию Л.С. Понтрягина об убегании (конечномерный случай) решается задача убегания для нелинейной дифференциальной игры нейтрального типа

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(u,v) + \mu g(\dot{x}(t-h), x(t-h), u, v) \qquad (2)$$

с терминальным множеством M, которое является замкнутым линейным подпространством некоторого гильбертова пространства. При этом управление убегания строится таким образом, что оно обеспечивает эффективную оценку снизу для расстояния фазовой точки траектории до терминального множества.

В теореме 4.4.1, используя аппарат теории дифференциальных неравенств, решается задача преследования для нелинейной дифференциальной игры с запаздывающим аргументом

$$\dot{x}(t) = f(x_t, u(t), v(t), t).$$

В параграфе 4.5 приведены два примера, в которых дифференциальная игра описывается интегро-дифференциальными уравнениями и для этой игры показана возможность убегания из любых возможных начальных положений, кроме того, в Примере 4.5.1 получено в явном виде выражения для управления убегания. Заметим,что конечномерные аналоги таких примеров, неизвестны.

В **пятой главе** исследованы линейные и квазилинейные дифференциальные игры, в которых объекты описываются дифференциальными и интегро-дифференциальными уравнениями дробного порядка. Заметим, что дифференциальные уравнения дробного порядка являются объектом исследования в самых различных разделах математики, и только в последние два десятилетия детально исследуются задачи управления такими объектами. Основными теоремами пятой главы являются теоремы 5.1.1, 5.1.2, 5.2.1, 5.2.2, 5.2.4, 5.3.1, 5.3.2, 5.4.1, 5.5.2, 5.6.1, 5.6.2. В частности, в теореме 5.1.1, используя обобщенную функцию Миттаг–Леффлера решается задача преследования для линейной дифференциальной игры дробного порядка α

$$D^{\alpha}x(t) = Ax(t) + f(u(t), v(t), t),$$

когда A- линейный ограниченный оператор, D^{α} - дробная производная Капуто порядка α и на управление игроков наложены интегральные ограничения. В теореме 5.4.1, используя первый прямой метод преследования Л.С. Понтрягина, решается задача преследования для дифференциальной игры, когда динамика игры описывается интегро-дифференциальным уравнением дробного порядка

$$D^{\alpha}x(t) = Ax(t) + \int_0^t B(t-s)x(s)ds + f(u(t), v(t), t),$$

где $A-$ линейный замкнутый оператор порождающий сильно непрерывную полугруппу, а на управление игроков наложены геометрические ограничения.

Отметим, что в конце каждой главы соискателем исследованы интересные примеры с сосредоточенными и с распределенными параметрами. В задаче

преследования найдено время преследования и указан закон выбора управления преследователя, а в задаче убегания указан закон выбора управления убегающего.

Диссертационная работа Е.М. Мухсинова выполнена на высоком математическом уровне, все доказательства теорем отличаются полнотой и строгостью.

ЗАМЕЧАНИЯ И НЕДОСТАТКИ

1. В теории дифференциальных игр основными примерами, на которых проверяется теория, являются следующие: Игра «Простое движение», игра «Мальчик и крокодил» и «Контрольный пример Л.С.Понтрягина». Диссертант подробно проводил расчеты для игр «Простое движение» и «Мальчик и крокодил»(американское название-«Изотропные ракеты»). Однако для Контрольного примера Понтрягина результаты не приведены. Возможно, объяснением может служить незавершенность полного исследования этого примера к настоящему времени и трудности вычислительного характера.
2. Соискателем исследованы примеры, когда динамика игры описывается линейным дифференциальным уравнением. Желательно было бы исследовать и такие примеры, когда динамика игры описывается нелинейным дифференциальным уравнением, например, «маятниковые» конфликтно управляемые системы.
3. Во второй главе при соответствующих предположениях доказаны несколько теорем об оптимальности времени преследования, когда динамика игры описывается дифференциальным уравнением запаздывающего типа и нейтрального типа. Желательно было бы получить подобные теоремы об оптимальности времени преследования, когда динамика игры описывается дифференциальным уравнением дробного порядка.
4. Более конкретное название диссертации, например, « О разрешимости задач преследования и убегания в дифференциальных играх в бесконечномерных пространствах» только усилило бы интерес специалистов к полученным диссертантом результатам.

5. На страницс 249 (строка 9), написано “**запаздавщего типа**”. Следовало бы писать “**запаздывающего типа**”.

Следует отметить, что приведённые **недостатки никак не снижают ценности полученных соискателем результатов,** а скорее, являются направляющими на дальнейшие исследования.

ВЫВОДЫ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Работа Е.М. Мухсинова посвящена **актуальной теме, имеет теоретическую и практическую ценность** и **является завершенным научным исследованием**. Ценность данной работы заключается в том, что полученные результаты являются **новыми и открывают новое направление** в теории дифференциальных игр преследования и убегания в бесконечномерных банаховых пространствах.

Основные результаты работы опубликованы в 40 работах, из них 17 статьи в изданиях из перечня ВАК России, Узбекистана и Таджикистана. При этом они прошли апробацию в известных научных центрах как Воронеж, Ташкент, Долгопрудный, Казань, Душанбе, София (Болгария) и могут быть использованы в научных учреждениях и вузах, где ведутся исследования по теории дифференциальных игр (например, в Санкт-Петербургском госуниверситете РФ, в Национальном университете Узбекистана, Филиале МГУ им. М.В. Ломоносова в Ташкенте и в некоторых вузах Таджикистана). Все положения и выводы диссертации **достоверны** и **обеспечены строгими математическими доказательствами**. **Автореферат полностью и правильно отражает содержание диссертации.**

Считаю, что диссертационная работа **Мухсинова Едгора Мирзоевича « О разрешимости задач преследования и убегания в дифференциальных играх»** соответствует специальности 01.01.02. и **отвечает всем требованиям, предъявляемым к докторским диссертациям,** а её автор **Мухсинов Е.М. заслуживает присуждения ему ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.**

Официальный оппонент:

Л.П. Югай,

доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Спортивное право, социальные и естественно-научные дисциплины» Узбекского государственного университета физической культуры и спорта

/проф. Л.П. Югай/

Подпись профессора Л.П. Югая заверяю:

Начальник отдела «Управление человеческими ресурсами»

Г.Р. Собирова

05.09.2023