ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертацию Мухсинова Едгора Мирзоевича **«О разрешимости задач преследования и убегания в дифференциальных играх»**, представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 - Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Многочисленные задачи из военной сферы, физики, биологии и экономики, протекающие в условиях конфликта, сводятся к дифференциальным играм. В теории дифференциальных игр важную роль играет изучение разрешимости задач преследования и убегания, когда задачи преследования и убегания понимается в смысле Л.С. Понтрягина. В начале 60-годов двадцатого века в этой области фундаментальные работы выполнил академик Л.С. Понтрягин. Он в своих работах предложил первый и второй метод решения задачи преследования, а в работе, совместно с Е.Ф. Мищенко, доказал достаточные условия разрешимости задачи убегания. В дальнейшем основополагающие результаты Л.С. Понтрягина были перенесены на различные классы игр. Например, М.С. Никольский, Н.Ю. Сатимов, А.А. Чикрий, А.Я. Азимов, Б.Б. Рихсиев, Л.П. Югай, Н. Мамадалиев, М.Ш. Маматов и другие разрешили задачи преследования и убегания, когда на управление игроков были наложены геометрические или интегральные ограничения. Эти работы в основном относятся к конечномерным дифференциальным играм, когда динамика игры описывается обыкновенным дифференциальным уравнением. Но, в практике часто встречаются конфликтно управляемые процессы, описываемые дифференциальными уравнениями запаздывающего типа, нейтрального типа, дробного порядка и с частными производными. Многие из этих управляемых процессов можно моделировать и исследовать как дифференциальные игры в подходящих банаховых пространствах. Именно такой подход к изучению дифференциальных игр принят в данной диссертационной работе. Работа Е.М. Мухсинова посвящена разрешимости задач преследования и убегания, когда динамика игры описывается дифференциальным уравнением в бесконечномерном банаховом пространстве.

Структура и содержание диссертации. Диссертация Е.М. Мухсинова выполнена в рамках реализации перспективных планов научно-исследовательских работ кафедры математических дисциплин и современного естествознания Таджикского государственного университета права, бизнеса и политики и состоит из введения, пяти глав, выводов, списка использованной литературы, в котором включены 355 наименования работ и из 306

страниц.

Во введении обосновывается актуальность выбранной темы, уточняется цель и объект диссертационной работы.

В первой главе (§§ 1.1–1.4) дан анализ литературы, приведены известные результаты по дифференциальным играм и важные вспомогательные результаты.

Во второй главе (§§ 2.1–2.6) исследованы дифференциальные игры, когда динамика игры описывается обыкновенным дифференциальным уравнением, дифференциальным уравнением запаздывающего или нейтрального типа. Доказаны достаточные условия, позволяющие обеспечить возможность завершения преследования. Используя аппарат функционального анализа и теорию многозначных отображений в теоремах 2.2.1, 2.3.2, 2.4.6 и 2.4.8 получены достаточные условия, позволяющие завершить преследования за оптимальное время. В конце главы (§2.6) исследованы интересные примеры, когда на управление игроков наложены геометрические ограничения. Результаты этой главы являются бесконечномерными обобщениями известных результатов. Например, теоремы 2.2.1 и 2.4.8 обобщают соответствующие конечномерные результаты Л.С. Понтрягина, Л.Б. Гуятникова, М.С. Никольского и Н.Ю. Сатимова.

В третьей главе (§§ 3.1–3.4) исследованы дифференциальные игры,когда динамика игры описывается обыкновенным дифференциальным уравнением, дифференциальным уравнением запаздывающего или нейтрального типа, а на управление игроков наложены интегральные ограничения. Используя конструкцию типа первого прямого метода Понтрягина и идею о растяжении времени преследования, описано множество начальных положений, из которых возможно завершение преследования. При этом управление преследования выбирают по формуле

$$u(t) = \begin{cases} \bar{u}(t) & \text{при} \quad t \in [0,\tau), \\ p(t-\tau) + L(\tau+T-t)\cdot\vartheta\big(J(T) - J(\tau+T-t)\big)\times \\ \qquad \times J'(\tau+T-t) \text{ при } t \in [\tau,\tau+T], \\ 0 & \text{при} \quad t > \tau+T. \end{cases}$$

В конце главы (§ 3.4) приведены конкретные примеры. Найдено время преследования и указан закон выбора управления преследователя. Полученные в этой главе результаты обобщают конечномерные результаты А.Я. Азимова, М.С. Никольского и Н. Мамадалиева.

В четвертой главе (§§ 4.1–4.5) исследованы нелинейные дифференциальные игры преследования и убегания. Результаты, полученные в теоремах 4.1.1, 4.2.1 обобщают соответствующие конечномерные результаты Н.Ю. Сатимова и Е.Ф. Мищенко, когда игра описывается нелинейным дифференци-

альным уравнением нейтрального типа. В теоремах 4.3.1. и 4.4.1, используя аппарат теории дифференциальных неравенств, соответсвенно решается задача убегания и задача преследования, когда игра описывается нелинейным дифференциальным уравнением запаздывающего типа.

В пятой главе (§§ 5.1–5.7) исследованы дифференциальные игры дробного порядка, когда на управление игроков наложены геометрические или интегральные ограничения. Найдены множества начальных точек, из которых возможно завершение преследования, когда динамика игры описывается дифференциальным уравнением дробного порядка, интегро–дифференциальным уравнением дробного порядка или дифференциальными уравнениями с несколькими дробными производными. В конце главы (§ 5.7) исследованы интересные примеры, когда динамика игры описывается линейными дифференциальными уравнениями. В частности. в примере 5.7.1, исследуется дифференциальная игра дробного порядка

$$y'(t) + bD^{0,5}y(t) + cy(t) - \bar{u}(t) + \bar{\vartheta}(t) = 0,$$

которая может быть использована для описания многих физико-химических процессов в условиях конфликта, в частности, для процессов релаксации при стеклообразовании переохлаждённых жидкостей. А в примере 5.7.3 исследуется линейная дифференциальная игра описываемая диффузионно – волновым уравнением дробного порядка

$$(D^{0.5}y)(s,t) = \frac{\partial^2 y(s,t)}{\partial s^2} + \bar{u}(s,t) - \bar{v}(s,t).$$

Найдены достаточные условия, при которых из заданной точки возможно завершение преследования за время $\tau = 1$. При этом широко используется обобщенная функция Миттаг – Леффлера.

Степень обоснованности научных положений, выводов и рекомендаций, сформулированных в диссертации. Все приведенные в диссертации теоремы, научные положения, рекомендации, а также полученные формулы обоснованы и строго доказаны методами теории функционального анализа, теории многозначных отображений, теории дифференциальных уравнений в банаховых пространствах и теории дифференциальных игр.

Научная новизна полученных результатов. Результаты диссертации получены автором самостоятельно, являются новыми и заключаются в следующем:

- в банаховом пространстве для квазилинейной дифференциальной игры с замкнутым линейным оператором найдены достаточные условия, позволяющие обеспечить возможность завершения преследования за оптимальное время;
- в банаховом пространстве найдено множество начальных положений, из

которых возможно завершение преследования за оптимальное время в дифференциальных играх запаздывающего типа;

- в банаховом пространстве доказана разрешимость задачи преследования для дифференциальных игр, когда динамика игры описывается дифференциальным уравнением нейтрального типа, а на управление игроков наложены геометрические ограничения;
- в гильбертовом пространстве доказана разрешимость задачи преследования для дифференциальных игр, когда на управление игроков наложены интегральные ограничения;
- в гильбертовом пространстве найдены достаточные условия о разрешимости задачи убегания в нелинейной дифференциальной игре нейтрального типа;
- в банаховом пространстве доказаны теоремы о разрешимости задач преследования и убегания для нелинейной дифференциальной игры запаздывающего типа;
- найдено множество начальных положений, из которых возможно завершение преследования в дифференциальных играх дробного порядка, когда на управление игроков наложены геометрические или интегральные ограничения;
- доказаны теоремы о разрешимости задачи преследования в интегро-дифференциальных играх дробного порядка, когда на управление игроков наложены геометрические или интегральные ограничения;
- доказаны теоремы о разрешимости задачи преследования в дифференциальных играх с несколькими дробными производными.

Теоретическая и научно-практическая значимость полученных результатов. Диссертационная работа носит теоретический характер. Результаты работы можно использовать для дальнейшего развития теории дифференциальных игр, когда динамика игры описывается дифференциальным уравнением запаздывающего типа, нейтрального типа и дробного порядка, а также при решении практических задач, которых можно моделировать как дифференциальные игры преследования и убегания в подходящих банаховых пространствах. Эти же результаты можно использовать в научных учреждениях и в вузах, где ведутся исследования по дифференциальным уравнениям и дифференциальным играм.

Замечания по содержанию диссертации. Хотя, диссертация написана на достаточно хорошем математическом уровне, в работе имеются некоторые замечания:

1) В диссертации исследованы примеры, когда динамика игры линейно за-

висит от управления игроков. По нашему мнению, следовало бы рассмотреть и такие примеры, когда динамика игры нелинейно зависит от управления игроков.

2) В примере 5.7.1 исследована линейная дифференциальная игра дробного порядка $\alpha = 0{,}5$. Автор отмечает, что эта игра используется для описания процессов релаксации при стеклообразовании переохлажденных жидкостей. Хорошо было бы, если автор диссертации более подробно комментировал «процесс релаксации» и игровой момент этого процесса.
3) В диссертации (стр.59, строка 5) и в автореферате (стр. 14, строка 4 снизу) по нашему мнению было бы корректно писать: «в четвертом параграфе первой главы приведены ряд условий, при которых задача Коши (2.1.2) в частных случаях имеет решение в некотором классе функций».

Указанные замечания не снижают научных достоинств диссертации и не могут повлиять на ее общую оценку.

Подведя итоги, отметим, что:

- диссертация Мухсинова Е.М. является завершенным научным исследованием и полученные результаты являются важным дополнением к теории дифференциальных игр преследования и убегания в банаховых пространствах;

- содержание диссертации соответствует специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление;

- полученные в диссертации результаты являются новыми и свидетельствуют о весомом научном вкладе соискателя в исследовании актуальных задач в теорию дифференциальных игр преследования и убегания в банаховых пространствах;

- основные научные результаты диссертации опубликованы в 40 публикациях автора, из них 4 публикации в журналах, индексируемых SCOPUS и 13 публикации в изданиях из перечня ВАК России, Таджикистана и Узбекистана. Основные результаты диссертации обсуждались в престижных международных и республиканских конференциях России, Болгарии, Узбекистана и Таджикистана. Результаты работы можно использовать для дальнейшего развития теории дифференциальных игр, когда динамика игры описывается дифференциальным уравнением запаздывающего типа, нейтрального типа и дробного порядка, а также при решении практических задач, которых можно моделировать как дифференциальные игры преследования и убегания в подходящих банаховых пространствах.

- ссылки на авторов и источников заимствования материалов и отдельных результатов в диссертации имеются;

- полученные результаты могут быть использованы в научных учреждениях и в вузах, где ведутся исследования по дифференциальным уравнениям и дифференциальным играм. Например: в Таджикском национальном университете, Институте математики имени А. Джураева Национальной академии наук Таджикистана, в Бохтарском государственном университете имени Носира Хусрава, в Худжандском государственном университете имени Б.Гафурова, Кулябском государственном университете имени А.Рудаки и др.

Оформление диссертации соответствует требованиям ВАК при Президенте Республики Таджикистан, изложение грамотное и ясное.

Автореферат полностью отражает содержание диссертации.

Считаю, что диссертационная работа Мухсинова Едгора Мирзоевича «О разрешимости задач преследования и убегания в дифференциальных играх» отвечает всем требованиям, предъявляемым к докторским диссертациям, а её автор Мухсинов Е.М. заслуживает присуждения ему ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Официальный оппонент:
Доктор физико-математических наук,
01.01.02 – Дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление,
доцент кафедры математического анализа и
дифференциальных уравнений Бохтарского
государственного университета имени
Носира Хусрава Шамсудинов Файзулло Мамадуллоевич
12.09. 2023

Адрес: 735140, Республика Таджикистан, г. Бохтар, ул. Айни, 67

Тел.: моб. (+992) 918-66-70-65; e-mail: faizullo100@yahoo.com

Подпись Ф.М. Шамсудинова заверяю:

Начальник ОК и СЧ Бохтарского
государственного университета
им. Носира Хусрава Шукурзод Дж.А.