«Утверждаю»
Проректор по научной работе и инновациям
Национального университета
Узбекистана имени М. Улугбека
д.ф.-м.н., профессор Эргашов Я.С.
08.09 2023г.

ОТЗЫВ

ведущей организации на диссертационную работу **Мухсинова Едгора Мирзоевича «О разрешимости задач преследования и убегания в дифференциальных играх»,** представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 – “Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление”

Актуальность темы диссертационной работы

Толчком к изучению дифференциальных игр послужили различные задачи из военной сферы, физики, биологии и экономики, протекающие в условиях конфликта или неопределенности. В начале 60-годов двадцатого века в этой области фундаментальные работы выполнили академики Н.Н. Красовский и Л.С. Понтрягин. Если работы Н.Н. Красовского были посвящены, в основном, позиционным дифференциальным играм, то в работах Л.С. Понтрягина принят другой подход к дифференциальным играм. Л.С. Понтрягин рассматривает дифференциальную игру отдельно с точки зрения преследующего и отдельно с точки зрения убегающего. Рассматривая дифференциальную игру с точки зрения преследующего (соответственно с точки зрения убегающего), при построении управляющей функции $u(\cdot)$ (соответственно управляющей функции $v(\cdot)$) в момент времени t, используется информация о $x(s)$ $и$ $v(s)$ (соответственно, информация о $x(s)$ $и$ $u(s)$) на отрезке $0 \leq s \leq t$. В связи с тем, что при различных подходах игроками используются различные информации, то рассматриваемая задача разбивается на две различные задачи: задачу преследования и задачу убегания. Именно такой подход к изучению дифференциальных игр принят и в данной диссертационной работе. Если классические работы Н.Н. Красовского и Л.С. Понтрягина посвящены конечномерным дифференциальным играм, то диссертационная работа Е.М. Мухсинова посвящена бесконечномерным

дифференциальным играм. При этом, динамика игры описывается дифференциальным уравнением:

- с линейным замкнутым оператором;
- запаздывающего типа;
- нейтрального типа;
- дробного порядка;
- с несколькими дробными производными.

Заметим, что переход из конечномерных игр к бесконечномерным играм существенно расширяет круг рассматриваемых задач. В связи с этим работа Е.М. Мухсинова посвящена актуальной и мало изученной теме, когда задачи преследования и убегания понимаются в смысле Л.С. Понтрягина.

Структура и основное содержание диссертации

Диссертация состоит из введения, пяти глав и списка литературы.

Первая глава посвящена анализу литературы и некоторым вспомогательным результатам. Если в первом параграфе приведены различные подходы к дифференциальным играм, начиная с подхода Р. Айзекса до подхода Н.Н. Красовского, то во втором параграфе приводится подход Л.С. Понтрягина. В третьем параграфе приведены, в основном, некоторые известные конечномерные результаты по дифференциальным играм, когда задача преследования и убегания понимается в смысле Л.С. Понтрягина. Четвёртый параграф посвящен некоторым вспомогательным результатам.

Вторая глава посвящена разрешимости задачи преследования для дифференциальных игр, когда динамика игры описывается:

- дифференциальным уравнением

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(u(t), v(t), t), \tag{1}$$

-дифференциальным уравнением запаздывающего типа

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + \int_{-h}^{0} d\eta\,(s)x(t+s) + f(u(t), v(t), t),$$

-дифференциальным уравнением нейтрального типа

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} B_i\dot{x}(t-h_i) + Ax(t) + \sum_{i=1}^{n} A_i x(t-h_i) + f\big(t, u(t), v(t)\big) \tag{2}$$

с линейным замкнутым оператором A. В частности, когда M выпукло и слабо компактно, используя первый метод Л.С. Понтрягина, лемму о существовании измеримого селектора у неявно заданного отображения и теорему о строгой отделимости выпуклых множеств соискатель доказывает оптимальностью времени преследования. В конце главы (§2.6) исследованы некоторые игровые

примеры. В частности, в пространстве $L_2[0,\pi]$ для игры (пример 2.6.3), описываемая параболическим уравнением

$$\frac{\partial}{\partial t}(z(t,s) - Bz(t-1,s)) = Az(t,s) + \bar{u}(t,s) - \bar{v}(t,s),$$

где $A = \frac{\partial^2}{\partial s^2}$, приведены условия, при которых возможно завершения преследования с оптимальным временем. А из результатов полученные соискателем в игре (пример 2.6.5) с запаздывающим аргументом

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = k\dot{x}(t-1) + y(t) + \bar{v}(t) \\ \dot{y}(t) = -\bar{u}(t) \end{cases},$$

при $k = 0$, следуют соответствующие конечномерные результаты Л.С. Понтрягина и Н.Ю. Сатимова.

Третья глава посвящена разрешимости задачи преследования для игр, описываемы уравнениями (1) и (2), когда на управление игроков наложены интегральные ограничения

$$\int_0^\infty \|u(t)\|^2\,dt \le \rho^2, \quad \int_0^\infty \|v(t)\|^2\,dt \le \sigma^2 .$$

В частности, в теореме 3.3.1. доказывается, что из начального положения $\varphi(0)$ в игре (2) возможно завершение преследования. При этом, управление преследования выбирается по формуле

$$u(t) = \begin{cases} p(t) + L(T-t)\vartheta(t), & 0 \le t \le T, \\ 0, & t > T. \end{cases}$$

Заметим, что полученные в этой главе результаты обобщают конечномерные результаты А.Я. Азимова и М.С. Никольского.

Четвёртая глава посвящена разрешимости задачи убегания для нелинейных дифференциальных игр нейтрального типа

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(\dot{x}(t-h), x(t-h), u(t), v(t), t),$$

где линейный замкнутый оператор A порождает сильно непрерывную полугруппу, а терминальное множество M инвариантно относительно этой полугруппы и

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(u,v) + \mu g(\dot{x}(t-h), x(t-h), u, v),$$

где A – линейный ограниченный оператор. В этой главе, используя аппарат теории дифференциальных неравенств, доказывается разрешимость задач преследования и убегания, когда игра описывается нелинейным дифференциальным уравнением с запаздывающим аргументом

$$\dot{x}(t) = f(x_t, u(t), v(t), t)$$

Полученные в этой главе результаты теоремы 4.1.1 и 4.2.1 обобщают соответствующие конечномерные результаты Л.С. Понтрягина, Е.Ф. Мищенко и Н.Ю. Сатимова.

Пятая глава посвящена разрешимости задачи преследования, когда игра описывается:

- дифференциальным уравнением дробного порядка α, $m-1<\alpha<m$, $m=1,2,\ldots$,
$$D^{\alpha}x(t)=Ax(t)+f(u(t),v(t),t)$$
- интегро-дифференциальным уравнением дробного порядка α
$$D^{\alpha}x(t)=Ax(t)+\int_0^t B(t-s)x(s)ds+f(u(t),v(t),t)$$
- дифференциальным уравнением с несколькими дробными производными Герасимова-Капуто
$$D^{\alpha}z(t)=\sum_{k=1}^{n}D^{\alpha_k}A_k z(t)+f(u(t),v(t),t)$$

Отметим, что когда на управление игроков наложены геометрические ограничения, то результаты теоремы 5.3.1 и 5.3.2 обобщают соответствующие конечномерные результаты М.Ш. Маматова. А результаты, полученные в теоремах 5.1.1, 5.1.2, 5.2.1, 5.2.2, 5.2.3, 5.2.4, 5.5.1, 5.5.2 и 5.5.3. с интегральными ограничениями на управления игроков не имеют аналогов даже в конечномерном пространстве.

Замечания по содержанию диссертации

В целом, работа написана аккуратно и на высоком математическом уровне. Но имеются некоторые недостатки:

1. В §1.4. приведены некоторые вспомогательные результаты, используемые в последующих главах. На все приведенные вспомогательные леммы и теоремы (кроме леммы 1.4.4) имеются соответствующие ссылки. Но про лемму 1.4.4 сказано, что она очевидна. Желательно было бы привести доказательство этой леммы.
2. В примере 2.6.1 утверждается, что функция
$$\eta(T)=-\frac{T^3}{3}+\frac{5}{4}T^2-3T+20$$
убывающая и $\eta(T)>0$ при $0\le T<\sigma$, где $\sigma\in(4,5)$ и $\eta(\sigma)=0$. Действительно, это функция убивающая и $\eta(T)>0$ на некотором отрезке $0\le T<\sigma$. Желательно на число σ дать более **точную оценку**.
3. В диссертации (страница 135, строка 3) следовало бы писать: рассматривается дифференциальная игра **с запаздывающим**

аргументом $h = 1$.

Заметим, что эти недостатки не снижают ценности полученных соискателем результатов.

Степень обоснованности, апробация, теоретическая и практическая ценность работы

Степень обоснованности полученных в диссертационной работе научных результатов подтверждается строгими математическими доказательствами, полученными в результате применения современных методов функционального анализа, теории многозначных отображений, теории дифференциальных уравнений и теории дифференциальных игр.

Полученные соискателем результаты опубликованы в 40 работах. В том числе 4 статьи в журналах, индексируемых SCOPUS и 13 статей в престижных изданиях из перечня ВАК России, Узбекистана и Таджикистана. Эти результаты обсуждались в 23 международных и республиканских конференциях России, Болгарии, Японии, Узбекистана и Таджикистана.

Результаты Е.М. Мухсинова носят теоретический характер и могут быть использованы в теории дифференциальных игр преследования и убегания, в математической теории управляемых процессов, протекающих в условиях конфликта и неопределенности, в теории и технике автоматического управления для систем с запаздывающим аргументом, нейтрального типа и с производными дробного порядка, а также при решении практических задач, которых можно моделировать как дифференциальные игры преследования и убегания в подходящих банаховых пространствах.

Автореферат вполне отражает структуру, содержание, практическую значимость и основные положения диссертации.

Заключение

Считаем, что диссертация Мухсинова Едгора Мирзоевича «О разрешимости задач преследования и убегания в дифференциальных играх» является завершенным научным исследованием, полученные в ней результаты являются новыми и открывают новое направление в теории дифференциальных игр в бесконечномерных банаховых пространствах. Она соответствует специальности 01.01.02 – “Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление” и отвечает всем требованиям, предъявляемым к докторским диссертациям, и её автор Мухсинов Е.М. заслуживает присуждения ему ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 – “Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление”.

Отзыв составлен экспертом, доктором физико-математических наук по специальности 01.01.02 – “Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление”, профессором кафедры дифференциальных уравнений и математической физики Нацального университета Узбекистана имени М.Улугбека Мамадалиевым Н.А.

Отзыв на диссертацию обсуждён и одобрен на заседании кафедры дифференциальных уравнений и математической физики от 28 августа 2023г., протокол №1.

Заведующий кафедрой дифференциальных уравнений и математической физики, доктор физико-математических наук, профессор — А.Р.Халмухамедов

Доктор физико-математических наук, профессор — Н.А.Мамадалиев

Секретарь заседания, доцент — Т.Н.Аликулов

Личные подписи, А.Р.Халмухамедова, Н.А. Мамадалиева и Т.Аликулова заверяю

Начальник — Б.Тўраев

Mamadaliev imzosini tasdiqlayman:
O'z MU KB katta inspektori
«08» 09 2023 yil.

913

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY TA'LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI * MIRZO ULUG'BEK NOMIDAGI O'ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI * XODIMLAR BO'LIMI