Отзыв

официального оппонента на диссертационную работу Ибодзода Мохрухсор Иноятулло **«Сингулярные краевые задачи Римана с непрерывными коэффициентами для системы уравнений первого порядка эллиптического типа»**, представленную на соискание ученой степени доктора философии (PhD) – доктор по специальности 6D060100 – Математика (6D060103 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление)

Актуальность темы диссертации

Основополагающими работами, в этом направлении являются работы: И.Н. Векуа, Л.Г. Михайлова, Н. Усмонова и других авторов.

Вопросы, касающиеся решений эллиптических уравнений, задач Римана с коэффициентами из класса Гёльдера и их сингулярных случаев, изучались в работах И. Н. Векуа, Л. Г. Михайлова, Н. Усмонова и ряда других авторов.

И. Н. Векуа изучал обобщённые аналитические функции для системы дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = au + bv + f \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = cu + dv + g, \end{cases} \tag{0.0.1}$$

или в комплексном виде:

$$\partial_{\bar{z}} W = AW + B\bar{W} + F, \tag{0.0.2}$$

где

$$W = u + iv, \quad \bar{W} = u - iv, \quad \bar{z} = x - iy, \quad z = x + iy$$

и

$$A = \frac{1}{4}(a + d + ic - ib), B = \frac{1}{4}(a - d + ic + ib), F = \frac{1}{2}(f + ig).$$

И. Н. Векуа в системе уравнений (0.0.1) рассматривал краевую задачу типа Гильберта. Задача Римана для этой системы была исследована Л. Г. Михайловым, при этом коэффициент удовлетворял условию Гёльдера.

Кроме того, Л. Г. Михайловым была поставлена и исследована задача Римана–Газемана:

$$W^{+}(t)[\alpha(t)] = A(t)W^{-}(t) + c(t),$$

он исследовал для системы уравнений:

$$\partial_{\bar{z}}W = AW + B\bar{W}.$$

Для указанной системы рассматривается следующая граничная задача:

$$W^{+}(t) = a(t)W^{-}(t) + b(t)\bar{W}^{-}(t) + c(t);$$

$$W^{+}(t) = a(t)\frac{\partial W^{-}(t)}{\partial t} + b(t)\frac{\partial \bar{W}^{-}(t)}{\partial t} + p(t)W^{-}(t) + q(t)\bar{W}^{-}(t) + c(t).$$

В дальнейшем Н. Усмоновым и С. Шавкатзода были исследованы сингулярные случаи этих задач.

Настоящая работа посвящена исследованию краевой задачи Римана для системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа в случае непрерывных коэффициентов, обладающих нулями, полюсами, нулями и полюсами сопряжённого вида, а также особенностями модульного характера.

Структура и основные результаты диссертации

Диссертация включает введение, четыре главы, заключение и список использованной литературы (142 наименования) общим объёмом 141 страницы компьютерного набора.

Во введении обоснована актуальность темы, сформулированы цель и задачи исследования, представлен краткий обзор работ по теме, раскрыты научная новизна и практическая значимость, изложены основные результаты диссертации.

В первой главе диссертации приведён обзор литературных источников по теме и сформулированы нерешённые краевые задачи Римана.

Вторая глава диссертации (три параграфа) посвящена исследованию граничных задач типа Римана с непрерывными коэффициентами для уравнений эллиптического типа в сингулярном случае.

В первом параграфе второй главы диссертационной работы исследуется краевая задача Римана для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа с непрерывными коэффициентами, имеющими особенности целого порядка.

ЗАДАЧА R1.1. Необходимо найти аналитическую функцию: $W^{\pm}(x,y)$, являющуюся регулярным решением дифференциального уравнения

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \psi(\mathrm{x},\mathrm{y}),$$

где $\psi(\mathrm{x},\mathrm{y})$ – заданная функция, а решение должно принадлежать областям $D^{\pm}$ и удовлетворять следующим краевым условиям:

$$W^{+}(t) = \frac{\prod_{r=1}^{\mu}(t-\xi_r)^{d_r}}{\prod_{j=1}^{\gamma}(t-\eta_j)^{q_j}} A_1(t)W^{-}(t) + c(t),$$

здесь $A_1(t) \neq 0$ на границе, $A_1(t)$ –непрерывная функция, $c(t) \in \mathrm{H}$, $\xi_r(r=1,2,\ldots,\mu), \eta_j(j=1,2,\ldots,\gamma)$ – точек лежащие на контуре, $d_r > 0, q_j > 0$ –целые числа.

Во втором параграфе второй главы диссертационной работы исследуется краевая задача типа Римана с непрерывными коэффициентами для дифференциальных уравнений вида:

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \psi(\mathrm{x},\mathrm{y}),$$

при этом рассматриваются уравнения, обладающие в конечной точке контура нулями и полюсами сопряжённо-аналитического характера.

ЗАДАЧА R 2.2. Требуется найти пару аналитических функций $W^{\pm}(\mathrm{x},\mathrm{y})$, являющихся регулярными решениями уравнения вида $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \psi(\mathrm{x},\mathrm{y})$, при этом решения принадлежат областям $D^{\pm}$ и должны удовлетворять следующему краевому условию:

$$W^{+}(t) = \prod_{r=1}^{\mu}\left(\overline{t-\xi_r}\right)^{d_r} \cdot \prod_{j=1}^{\gamma}\left(\overline{t-\eta_j}\right)^{-q_j} A(t)W^{-}(t) + c(t),$$

здесь $A_1(t) = \prod_{r=1}^{\mu} \left(\overline{t-\xi_r}\right)^{d_r} \cdot \prod_{j=1}^{\gamma} \left(\overline{t-\eta_j}\right)^{-q_j} A(t) \neq 0$, в этом случае, она непрерывная функция и $c(t)$ из класса Гёльдера, ξ_r, η_j – точки, лежащие на контуре Г, $d_r > 0, q_j > 0$ –целые числа.

В третьем параграфе второй главы диссертационной работы исследуется краевая задача типа Римана, когда коэффициент уравнения имеет особенности модульного характера. Рассматриваемые уравнения имеют вид:

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \psi(z).$$

ЗАДАЧА R2.3. Требуется найти аналитическую функцию: $W^+(z)$ - являющуюся регулярным решением уравнения: $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \psi(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ в области D^+ и $W^-(z)$ - являющуюся аналитической вне области, при условии, что они удовлетворяют следующему краевому условию:

$$W^+(t) = \prod_{r=1}^{\mu} |t-\xi_r|^{d_r} \cdot \prod_{j=1}^{\gamma} \left|t-\eta_j\right|^{-q_j} A_1(t) W^-(t) + c(t),$$

здесь $\xi_r (r = 1,2, \dots \mu), \eta_j (j = 1,2, \dots \gamma)$ - точки, лежащие на Г, $d_r, q_j > 0$, $\mathrm{A}(t) = \prod_{r=1}^{\mu} |t-\xi_r|^{d_r} \cdot \prod_{j=1}^{\gamma} \left|t-\eta_j\right|^{-q_j} A_1(t) \neq 0$ и $\mathrm{c}(t)$ – из класса Н(Г).

Решения найдены в классе функций, интегрируемых на контуре.

В третьей главе диссертационной работы, состоящей из трёх параграфов, исследуется краевая задача Римана в сингулярном случае для дифференциальных уравнений вида: $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \cdot W(\mathrm{x}, \mathrm{y})$.

В первом параграфе третьей главы диссертационной работы рассматривается сингулярная краевая задача Римана с непрерывными коэффициентами, в которой коэффициент имеет особенности аналитического характера. Задача исследуется для системы дифференциальных уравнений следующего вида: $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \cdot W(\mathrm{x}, \mathrm{y})$.

В втором параграфе третьей главы диссертационной работы исследуется краевая задача Римана для уравнения: $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \cdot W(\mathrm{x}, \mathrm{y})$, с коэффициентом, имеющим нулей и полюсов следующего сопряжённо-аналитического вида.

В третьем параграфе третьей главы диссертационной работы рассматривается краевая задача Римана с непрерывными коэффициентами, при этом коэффициент в конечной точке имеет особенность модульного характера. Задача изучается для уравнений следующего вида: $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(x,y) \cdot W(x,y)$.

В четвёртой главе настоящей диссертационной работы, состоящей из шести параграфов, рассматривается краевая задача типа Римана для системы уравнений следующего вида: $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(x,y) \cdot W(x,y) + B(x,y) \cdot \overline{W(x,y)} + c(x,y)$ с непрерывными коэффициентами в сингулярном случае.

В первом параграфе четвёртой главы диссертационной работы рассматриваются сингулярные краевые задачи Римана с непрерывными коэффициентами, при этом коэффициент задачи Римана характеризует особенности целого порядка для системы эллиптических уравнений следующего вида: $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(x,y) \cdot W(x,y) + B(x,y) \cdot \overline{W(x,y)} + c(x,y)$.

Во втором параграфе четвёртой главы диссертационной работы рассматривается сингулярная краевая задача Римана для эллиптических уравнений следующего вида:: $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(x,y) \cdot W(x,y) + B(x,y) \cdot \overline{W(x,y)} + c(x,y)$, когда коэффициент задачи характеризуется особенностями нулей и полюсов сопряжённо-аналитического вида.

В третьем параграфе четвёртой главы диссертационной работы рассматривается получение результатов для задачи Римана, поставленной для системы эллиптических уравнений следующего вида:

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(x,y)W(x,y) + B(x,y)\overline{W(x,y)} + c(x,y),$$

когда коэффициент непрерывная функция и имеет особенность модульного характера.

В четвёртом параграфе этой главы рассматривается краевая задача Римана в сингулярном случае с непрерывными коэффициентами, при этом коэффициент задачи Римана характеризует особенности целого порядка. Задача решается с учётом этих особенностей и анализируется влияние особенностей целого порядка на решение задачи..

Результаты, изложенные в диссертационной работе, являются новыми и получены автором самостоятельно.

Научные положения, выводы и рекомендации, представленные в диссертации, обоснованы строгими математическими доказательствами, основанными на методах теории краевых задач аналитических и обобщённых аналитических функций, а также на элементах функционального анализа. Все результаты согласуются с известными выводами других авторов.

Заключение

Диссертация Ибодзода Мохрухсор Иноятулло, представленная на соискание учёной степени доктора философии (PhD) по специальности 6D060100 — математика (6D060103 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление), обладает внутренним единством и представляет собой завершённое научное исследование. Работа включает новые и значимые научные результаты в области теории краевых задач аналитических, гармонических и обобщённых аналитических функций, которые являются несомненным самостоятельным вкладом автора в развитии данной теории.

Основное содержание диссертации опубликовано в 15 работах автора, в том числе 4 в изданиях из перечня рецензируемых изданий ВАК РТ.

Результаты работы прошли всестороннюю апробацию на международных и республиканских конференциях и семинарах. Полученные в диссертации М.И. Ибодзода результаты могут быть использованы при дальнейшем развитии теории краевых задач для аналитических, гармонических и обобщённо-аналитических функций.

Автореферат правильно отражает основное содержание диссертационной работы.

Вместе с достоинствами в работе имеются отдельные недостатки технического характера, допущены некоторые грамматические и стилистические ошибки.

Например, имеются следующие замечания по оформлению и содержанию диссертации:

1. В диссертации в формуле (2.1.4) вместо $A_1(t)\varphi_1^-(t)$ написана $A_1(t)+\varphi_1^-(t)$.
2. В теореме 4.1.1 на странице 89 вместо греческой буквы æ написана каппа на русском алфавите.
3. В формулировке теореме 4.2.1 вместо слова “ выполнение условий разрешимости вида $|æ-d|$ ” следовало бы писать “ выполнение $|æ-d|$ условий разрешимости ”.

Высказанные замечания не снижают научное достоинство диссертации, и не могут существенно повлиять на ее общую оценку.

Полученные автором результаты, имеют значительное значение для дальнейшего развития теории краевых задач для аналитических, гармонических и обобщённо-аналитических функций.

Исследования, представленные в диссертации, носят теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы для дальнейшего развития теории краевых задач для аналитических, гармонических и обобщённо-аналитических функций, а также для решения различных прикладных задач, возникающих в физике, механике и других областях прикладной математики. Эти результаты могут найти применение в научных исследованиях, проводимых в таких учебных и исследовательских учреждениях, как Таджикский национальный университет (ТНУ), филиал Московского государственного университета им. В.И. Ломоносова, Самарский государственный университет, Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики им. А. Джураева НАНТ, Таджикский педагогический университет им. С. Айни и Бохтарский государственный университет им. Носира Хусрава.

Диссертационная работа Ибодзода Мохрухсор Иноятулло, представленная на соискание учёной степени доктора философии (PhD) по специальности 6D060100 — математика (6D060103 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление), соответствует всем требованиям ВАК при Президенте Республики Таджикистан. Автор работы, Ибодзода Мохрухсор Иноятулло, заслуживает присуждения ей учёной степени доктора философии (PhD) по указанной специальности.

Официальный оппонент:
доктор физико –математических наук,
и.о. профессора кафедры математического анализа и
дифференциальных уравнений Бохтарского
государственного университета им. Носира Хусрава :

Шамсудинов Файзулло Мамадуллоевич

Адрес: 735140 Таджикистан, г. Бохтар, ул. Айни д - 67.

Тел.: моб. (+992) 918 66 70 65; e-mail: faizullo100@yahoo.com

Подпись Ф.М. Шамсудинова заверяю.

Начальник ОК и СЧ Бохтарского
государственного университета
им. Носира Хусрава: Нажмиддинов М.М.

26.03.26