МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РЕСПУБЛИКИ ТАДЖИКИСТАН

ТАДЖИКСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ имени САДРИДДИНА АЙНИ

УДК 517.55

На правах рукописи

НАДИРОВА МОХРУХСОР ИНОЯТУЛЛОЕВНА

СИНГУЛЯРНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ РИМАНА С НЕПРЕРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

Д И С С Е Р Т А Ц И Я

на соискание ученой степени доктора философии (PhD), доктор по специальности 6D060100 – Математика (6D060102 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление)

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор Усмонов Н.

ДУШАНБЕ – 2025

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ……………………………………………….………………….………6

ГЛАВА 1. АНАЛИЗ ЛИТЕРАТУРЫ ПО СИНГУЛЯРНЫМ КРАЕВЫМ ЗАДАЧАМ РИМАНА ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА, С НЕПРЕРЫВНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

1.1. Обзор по краевым задачам теории аналитических функций……………..…………………………………………………………18

1.2. Анализ выполнения работы по общей граничной задаче линейно-сопряжённого вида……..………………………………..…………....23

1.3. Анализ работ по краевым задачам линейного сопряжения аналитических функций ………...…………………………………….25

ГЛАВА 2. ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА РИМАНА С НЕПРЕРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В СИНГУЛЯРНОМ СЛУЧАЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \psi(z)$

2.1. Граничная задача Римана для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа с непрерывными коэффициентами, имеющими особенности целого порядка………..…….............................28

2.2. Граничная задача Римана для системы уравнений эллиптического типа с коэффициентом, имеющим нули и полюса сопряжённо-аналитического вида…………….…………………………...............39

2.3. Граничная задача Римана для системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа с коэффициентами, имеющими особенности модульного порядка….………………………..47

ГЛАВА 3. КРАЕВАЯ ЗАДАЧА РИМАНА В СИНГУЛЯРНОМ СЛУЧАЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ $\frac{\partial W}{\partial \overline{z}} = A(z) \cdot W(z)$

3.1. Сингулярная граничная задача Римана для системы дифференциальных уравнений эллиптического вида в случае, когда коэффициент характеризует особенность аналитического порядка……...…....60

3.2. Краевая задача Римана для дифференциальных уравнений эллиптического типа, когда коэффициент характеризует особенности нулей и полюсов сопряженно – аналитического вида…………………...69

3.3. Краевая задача Римана для системы уравнений эллиптического типа с коэффициентом, обладающим особенностями модульного характера……………..74

ГЛАВА 4. ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ТИПА ЗАДАЧИ РИМАНА С НЕ ПРЕРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В СИНГУЛЯРНОМ СЛУЧАЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ: $\frac{\partial W}{\partial \overline{z}} = A(z) \cdot W(z) + B(z)\overline{W(z)} + c(z)$

4.1. Граничная задача Римана для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа, когда коэффициент имеет особенности аналитического характера……………………………………………....81

4.2. Граничная задача Римана с коэффициентами, имеющими нули и полюса сопряжённо-аналитического вида для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа…..……………….....91

4.3. Граничная задача Римана для системы дифференциальных уравнений, когда коэффициент обладает особенностями модульного характера…………………………………………………………………….96

4.4. Граничная задача Римана с непрерывными коэффициентами в сингулярном случае, когда коэффициент характеризует особенности аналитического вида……..…………....…….……………………………………….100

4.5. Граничная задача Римана с непрерывными коэффициентами в сингулярном случае, когда коэффициент имеет особенности сопряжённо-аналитического вида……...……..…….……………………………………109

4.6. Задача сопряжения обобщенных аналитических функций в сингулярном случае…………….....……...……….……………………………..……….117

ЗАКЛЮЧЕНИЕ……………………………….…………………….……...122

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ……………………………………..…………124

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. Краевым задачам теории функций комплексного переменного посвящено большое количество научных работ. Особенно это касается краевых задач Римана. Однако до настоящего времени краевые задачи Римана с непрерывными коэффициентами в сингулярном случае, а также для эллиптических уравнений первого порядка, остаются недостаточно исследованными.

Данная работа посвящена исследованию краевых задач Римана с непрерывными коэффициентами в случае, когда коэффициенты обладают нулями, полюсами, нулями и полюсами сопряжённого вида, а также в случае, когда коэффициенты характеризуют особенности модульного порядка для систем дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа.

Степень научной разработанности изучаемой проблемы. В этом направлении основными являются научные работы: И.Н. Векуа, Л.Г. Михайлова, Н. Усмонова и других авторов. Эти исследования являются решениями задачей Римана в сингулярном случае для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа. Задачи о решениях эллиптических уравнений и задач Римана с коэффициентом из класса Гёльдера и её сингулярные случаи были предметом исследований в научных трудах И.Н. Векуа, Л.Г. Михайлова, Н. Усмонова и ряда других математиков.

И.Н. Векуа [15] исследовал обобщённые аналитические функции для следующей системы дифференциальных уравнений, вида:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial v}{\partial y} = au + bv + f \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = cu + dv + g, \end{cases} \tag{0.0.1}$$

или в комплексном переменном:

$$\partial_{\bar{z}} W = AW + B\overline{W} + F, \tag{0.0.2}$$

где

$$W = u + iv, \qquad \overline{W} = u - iv, \quad \bar{z} = x - iy, \qquad z = x + iy$$

и

$$A = \frac{1}{4}(a + d + ic - ib), \quad B = \frac{1}{4}(a - d + ic + ib), \quad F = \frac{1}{2}(f + ig).$$

В данной системе уравнений (0.0.1) И.Н. Векуа рассматривал краевую задачу типа Гильберта. И.Н. Векуа не исследовал задачу Римана, задача Римана для данной системы была исследована Л.Г. Михайловым. Отметим, что коэффициент задачи Римана в работе Л.Г. Михайлова удовлетворял условия Гёльдера.

Кроме того, Л.Г. Михайловым была поставлена и исследована задача Римана-Газемана:

$$W^{+}(t)[\alpha(t)] = A(t)W^{-}(t) + c(t),$$

он исследовал для системы уравнений:

$$\partial_{\bar{z}} W = AW + B\overline{W}.$$

Для указанной системы рассматривается следующая граничная задача:

$$W^{+}(t) = a(t)W^{-}(t) + b(t)\overline{W}^{-}(t) + c(t);$$

$$W^{+}(t) = a(t)\frac{\partial W^{-}(t)}{\partial t} + b(t)\frac{\partial \overline{W}^{-}(t)}{\partial t} + p(t)W^{-}(t) + q(t)\overline{W}^{-}(t) + c(t).$$

В дальнейшем Н. Усмоновым и С. Шавкатзода были исследованы сингулярные случаи этих задач. Настояшая работа посвящена исследованию сингулярных случаев задач Римана, обобщённых систем уравнений Коши-Римана. Но коэффициент задачи Римана $A(t)$- непрерывная функция.

Связь работы с научными программами (проектами), темами. Тема настоящей диссертации связана с научным направлением темой кафедры математического анализа Таджикского государственного педагогического университета имени С. Айни: «Исследования по краевым задачам теории аналитических функций в сингулярном случае».

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ИССЛЕДОВАНИЯ

Цель исследования. Целью диссертационной работы являются решение сингулярной краевой задачи Римана для эллиптического уравнения в случае, когда коэффициент задачи является непрерывной функцией:

- когда коэффициент задачи характеризуется особенностью нулей и полюсов аналитического вида;
- когда коэффициент задачи Римана характеризуется особенностью нулей и полюсов сопряжённо-аналитического вида;
- когда коэффициент задачи характеризуется особенностью модульного порядка.

Задачи исследования. В соответствии с поставленной целью, исследуется ряд задач при условиях:

- В первом случае, изучаются задачи Римана для эллиптических уравнений, вида: $\frac{\partial W}{\partial \overline{z}} = \psi(x,\ y),$ с непрерывными коэффициентами в условиях, когда коэффициент задачи характеризует собой нули и полюса целого порядка, нули и полюса сопряжённого вида, также, когда коэффициент задачи обладает особенностями нулей и полюсов модульного порядка.

- Затем, исследуются сингулярные случаи задачи Римана для эллиптических уравнений, вида: $\frac{\partial W}{\partial \overline{z}} = A(x,\ y)\cdot W(x,\ y),$ когда коэффициент задачи Римана, непрерывная функция и характеризует собой нули и полюса аналитической структуры, нули и полюса сопряжённо-аналитического вида, а также, когда коэффициент имеет особенности модульного характера.
- Далее исследуются сингулярные случаи задачи Римана для эллиптических уравнений, вида:

$$\frac{\partial W}{\partial \overline{z}} = A(x,\ y)\cdot\left(W(x,\ y) + \frac{B(x,\ y)\cdot\overline{W(x,\ y)}}{A(x,\ y)} + \frac{c(x,\ y)}{A(x,\ y)}\right),$$

когда коэффициент задачи является непрерывной функцией, и характеризуется особенностью, нулей и полюсов аналитического вида, сопряжённо-аналитического вида, а также дробного порядка.

Объект исследования. Объектом исследования являются изучение сингулярных краевых задач Римана с непрерывными коэффициентами для системы уравнений первого порядка эллиптического типа:

$$\frac{\partial W}{\partial \overline{z}} = \psi(z), \quad \frac{\partial W}{\partial \overline{z}} = A(z)\cdot W(z),$$

$$\frac{\partial W}{\partial \overline{z}} = A(z)\cdot W(z) + B(z)\overline{W(z)} + c(z),$$

Предмет исследования. Предметом исследования является доказательство теорем, определяющих число решений однородной задачи l и число условий разрешимости неоднородной задачи p.

Научная новизна исследования. Результаты диссертационной работы являются новыми и заключаются в следующих решениях краевых однородных и неоднородных задач Римана, т.е.:

ЗАДАЧА R₁. Потребовалось найти две аналитические функции: $W^{\pm}(x,\ y)$ – которые удовлетворяют регулярное решение настоящего уравнения: $\dfrac{\partial W}{\partial \overline{z}} = \psi(x,\ y)$, принадлежащего к областям $D^{\pm}$, по следующему однородному граничному условию:

$$W^{+}(t) = A_1(t)W^{-}(t) + c(t),$$

здесь $A_1(t) = \prod\limits_{r=1}^{\mu}(t-\xi_r)^{d_r} \cdot \prod\limits_{j=1}^{\gamma}(t-\eta_j)^{-q_j} \neq 0$ – является коэффициентом задачи Римана и непрерывная функция, которая имеет конечный порядок на бесконечности на границе, где $c(t)$ – из класса $H(\varGamma)$, ξ_r, η_j – различные точки контура, причем $d_r,\ q_j \succ 0$.

ЗАДАЧА R₂. Надо найти пару аналитических функций: $W^{\pm}(z)$ являющихся регулярным решением эллиптического уравнения: $\dfrac{\partial W}{\partial \overline{z}} = \psi(z)$, принадлежащего областям $D^{\pm}$, и в конечной точке контура стремящегося на бесконечности по следующему граничному условию, вида:

$$W^{+}(t) = A_1(t)W^{-}(t) + c(t),$$

в этом случае, коэффициент задачи Римана, $A_1(t) = \prod\limits_{r=1}^{\mu}\overline{(t-\xi_r)}^{d_r} \cdot \prod\limits_{j=1}^{\gamma}\overline{(t-\eta_j)}^{-q_j}$ - везде непрерывная функция, где $c(t) \in H(\Gamma)$ и ξ_r, η_j – находящие точки контура, причём, $d_r,\ q_j > 0$.

ЗАДАЧА R₃. Потребуется найти две аналитические функции: $W^{\pm}(z)$, которые являются регулярными решениями эллиптического уравнения, вида: $\dfrac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \psi(x, y)$, находящие в областях $D^{\pm}$, по следующему неоднородному граничному условию:

$$W^{+}(t) = \frac{\prod_{r=1}^{\mu} \left| t - \xi_r \right|^{d_r}}{\prod_{j=1}^{\gamma} \left| t - \eta_j \right|^{q_j}} A_1(t) W^{-}(t) + c(t),$$

в данной задаче, где $\xi_r (r = 1, 2, ..., \mu)$, $\eta_j (j = 1, 2, ..., \gamma)$ – разные точки из Г, d_r, q_j – целые числа, $A_1(t)$ – отличная от нуля, причем непрерывная функция и $c(t) \in H(\Gamma)$. Поскольку данная задача имеет модульный характер, и решение находится в классе функций, интегрируемой на контуре.

ЗАДАЧА R₄. Необходимо найти две аналитические функции, $W^{\pm}(x, y)$, которые являются регулярным решением настоящего уравнения: $\dfrac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(x, y) \cdot W(x, y)$, принадлежащие к областям $D^{\pm}$, подчиняющиеся следующим граничным условиям, на контуре Γ:

$$\textbf{а)}\ W^{+}(t) = \frac{\prod_{r=1}^{\mu} (t - \xi_r)^{d_r}}{\prod_{j=1}^{\gamma} (t - \eta_j)^{q_j}} A_1(t) W^{-}(t) + c(t),$$

$$\textbf{б)}\ W^{+}(t) = \frac{\prod_{r=1}^{\mu} \overline{(t - \xi_r)}^{d_r}}{\prod_{j=1}^{\gamma} \overline{(t - \eta_j)}^{q_j}} A_1(t) W^{-}(t) + c(t),$$

$$\textbf{в)}\ W^{+}(t)=\frac{\prod\limits_{r=1}^{\mu}\left|t-\xi_r\right|^{d_r}}{\prod\limits_{j=1}^{\gamma}\left|t-\eta_j\right|^{q_j}}A_1(t)W^{-}(t)+c(t),$$

где $\xi_r(r=1,\ 2,...,\mu)$, $\eta_j(j=1,\ 2,...,\gamma)-$ различные точки контура, $d_r,\ q_j>0$ и коэффициент задачи Римана, $A_1(t)=\prod\limits_{r=1}^{\mu}\left|t-\xi_r\right|^{d_r}\cdot\prod\limits_{j=1}^{\gamma}\left|t-\eta_j\right|^{-q_j}\neq 0,$ причем, непрерывная функция, $c(t)-$ из класса $H(\Gamma)$.

Поскольку, данная задача представлена в общем виде и её решение, в случаях **а)** и **б)** найдены в классе функций, ограниченных на контуре Γ, а в задаче **в)** решение задачи Римана наблюдается в классе функций, интегрируемых на контуре.

ЗАДАЧА R₅. Потребовалось найти две аналитические функции: $W^{\pm}(x,\ y)$, регулярного решения уравнения, вида:

$$\frac{\partial W}{\partial\bar{z}}=A(z)\cdot\left(W(z)+\frac{B(z)\overline{W(z)}}{A(z)}+\frac{c(z)}{A(z)}\right),$$

принадлежащихся к областям $D^{\pm}$, которые удовлетворяют следующие краевые условиям:

$$\textbf{а)}\ W^{+}(t)=A_1(t)W^{-}(t)+c(t),$$

здесь

$$A_1(t)=\prod_{r=1}^{\mu}(t-\xi_r)^{d_r}\cdot\prod_{j=1}^{\gamma}(t-\eta_j)^{-q_j},$$

$$\textbf{б)}\ W^{+}(t)=A_1(t)W^{-}(t)+c(t),$$

здесь

$$A_1(t) = \prod_{r=1}^{\mu} \overline{(t-\xi_r)}^{d_r} \cdot \prod_{j=1}^{\gamma} \overline{(t-\eta_j)}^{-q_j},$$

$$\textbf{в)}\ W^+(t) = A_1(t)W^-(t) + c(t),$$

здесь

$$A_1(t) = \prod_{r=1}^{\mu} \left|t-\xi_r\right|^{d_r} \cdot \prod_{j=1}^{\gamma} \left|t-\eta_j\right|^{-q_j},$$

где $\xi_r (r = 1,\ 2,\ldots,\ \mu)$, $\eta_j (j = 1,\ 2,\ldots,\ \gamma)$ – точки, лежащие на контуре и здесь $d_r,\ q_j > 0$, $c(t)$ – из класса $H(\Gamma)$. Решение задачи **а)** и **б)** наблюдается в классе функций, ограниченных на контуре Γ, а, в случае **в)** решение наблюдается в классе функций, интегрируемых на границе.

Теоретическая и научно-практическая значимость работы. Работа имеет теоретический характер. Методы развития и полученные результаты, диссертационной работы можно применять при исследовании краевых задач теории гармонических функций, краевых задач теории аналитических функций и теории обобщённых аналитических функций.

Положения, выносимые на защиту:

1. Нахождение теорем о краевой задаче Римана для эллиптических уравнений, вида: $\frac{\partial W}{\partial \overline{z}} = \psi(x,\ y)$, когда коэффициент непрерывной функции характеризуется особенностью аналитического вида.

2. Теорема о краевой задаче Римана для уравнений, вида: $\frac{\partial W}{\partial \overline{z}} = \psi(x,\ y)$, с непрерывными коэффициентами, имеющими нули и полюса сопряжённо-аналитического вида.

3. Теорема о сингулярной граничной задаче Римана, когда коэффициент задачи Римана имеет особенность дробного порядка, для уравнений первого порядка, следующего вида: $\frac{\partial W}{\partial \overline{z}} = \psi(x,\ y)$.

4. Нахождение новой теоремы, определяющей число решений однородной сингулярной граничной задачи Римана для эллиптических дифференциальных уравнений, следующего вида: $\frac{\partial W}{\partial \overline{z}} = A(x,\ y) \cdot W(x,\ y)$ с непрерывными коэффициентами, когда коэффициент характеризуется особенностью аналитического вида.

5. Нахождение новой теоремы о неоднородной сингулярной граничной задаче Римана для эллиптических уравнений, $\frac{\partial W}{\partial \overline{z}} = A(x,\ y) \cdot W(x,\ y)$, когда коэффициент, характеризуется особенностью нулей и полюсов сопряжённо-аналитического порядка.

6. Нахождение новой теоремы о граничной краевой задаче Римана для системы дифференциальных эллиптических уравнений, вида: $\frac{\partial W}{\partial \overline{z}} = A(x,\ y) \cdot W(x,\ y)$, когда коэффициент является непрерывной функцией и имеет особенность модульного порядка.

7. Теорема о сингулярной краевой задаче Римана для системы уравнений, эллиптического типа, в виде:

$$\frac{\partial W}{\partial \overline{z}} = A(x,\ y) \cdot \left(W(x,\ y) + \frac{B(x,\ y) \cdot \overline{W(x,\ y)}}{A(x,\ y)} + \frac{c(x,\ y)}{A(x,\ y)} \right)$$

с непрерывными коэффициентами, когда коэффициент характеризуется особенностью целого порядка.

8. Теорема о сингулярной граничной задаче Римана для системы эллиптических уравнений, вида:

$$\frac{\partial W}{\partial \overline{z}} = A(x,\ y)\cdot\left(W(x,\ y)+\frac{B(x,\ y)\cdot\overline{W(x,\ y)}}{A(x,\ y)}+\frac{c(x,\ y)}{A(x,\ y)}\right),$$

когда коэффициент задачи Римана непрерывная функция, и она обладает нулями и полюсами сопряжённо-аналитического порядка.

9. Теорема о получении результатов для краевой задачи Римана для уравнений вида:

$$\frac{\partial W}{\partial \overline{z}} = A(z)\cdot\left(W(z)+\frac{B(z)\overline{W(z)}}{A(z)}+\frac{c(z)}{A(z)}\right),$$

когда коэффициент задачи Римана имеет особенность модульного характера.

Степень достоверности результатов. Все теоремы, утверждения и формулы в диссертационном исследовании обеспечены строгими доказательствами; ряд выводов согласуются с исследованиями других авторов.

Соответствие диссертации паспорту научной специальности (формуле и области исследования). Диссертационная работа выполнена по специальности 6D060100 - Математика (6D060102-Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление), относятся к составной части этой специальности.

Личный вклад соискателя учёной степени. Постановка и выбор метода принадлежат научному руководителю. Все результаты, приведённые в разделе **«*Научная новизна исследования*»**, получены лично соискателем.

Апробация и реализация результатов диссертации. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах:

На республиканской научно-практической конференции «Подготовка современных специалистов по математике в отрасли науки и образования вузов и средних учреждений». (2020 г.) г.Дангара; на международной конференции «Актуальные проблемы современной математики», посвященной 80-летию со дня рождения доктора физико-математических наук, профессора Темура Собира. (25-26 июня, 2021г.) г.Душанбе; на республиканской научно-методической конференции «Применение алгебры и теории чисел в решении современных задач», посвящен «Двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических наук в области науки и образования (2020-2040гг.)», празднованию 90-летия основания Таджикского государственного педагогического университета имени Садриддина Айни и 30-летию государственной Независимости Республики Таджикистан. (2021г.) г.Душанбе; на Международной конференции «Современные проблемы теории чисел и математического анализа», посвященной 80-летию со дня рождения доктора физико-математических наук, профессора Дододжона Исмоилова НАНТ. Институт математики им. А. Джураева и ТНУ. (29-30 апреля, 2022г.) г.Душанбе; на Международной научно-практической конференции «Современные проблемы математики и её приложения», посвящённой «20-летию развития естественных, точных и математических наук 2020-2040 годы». ТНУ и Женский комитет всемирного союза математиков. (20-21 октября, 2022г.) г.Душанбе; на республиканской научно-практической конференции «Актуальные проблемы развития естественных, точных и математических наук в современных условиях», посвященной «20-летию развития естественных, точных и математических наук 2020-2040». (29 ноября, 2022г.) г.Душанбе; на Международной научно-теоритической конференции на тему: «Вклад математики в развитие естественных, точных и математических наук», посвящённой двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических наук. (2020-2040 годы) г.Душанбе; на Международной научно-практической конференции «Фундаментальные и прикладные научные исследования: актуальные вопросы современной науки, достижения и инновации». Сборник научных статей по материалам – 27 мая 2025г. –г.Уфа; на Международной научно-практической конференции, посвященной «Двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических наук в сфере науки и образования (2020-2040годы)».-2025г. –г. Душанбе.

Публикации по теме диссертации. По материалам диссертационного исследования опубликовано 15 научных статей, в том числе, 4 статьи в изданиях, рецензируемых ВАК при Президенте Республики Таджикистана и 11 статей в трудах республиканских и Международных конференции.

Структура и объём диссертации. Работа состоит из: введения, обшей характеристики, четырёх глав, заключения и списка литературы из 142 наименований. В диссертации для формул и параграфов используется тройная нумерация, первый номер совпадает с номером главы, второй – с номером параграфа и третий – с номерами формул. Общий объём диссертации 142 страницы компьютерного набора.

ГЛАВА 1. АНАЛИЗ ЛИТЕРАТУРЫ ПО СИНГУЛЯРНЫМ КРАЕВЫМ ЗАДАЧАМ РИМАНА ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА С НЕПРЕРЫВНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

1.1. Обзор по краевым задачам теории аналитических функций

В данной главе даётся анализ выполнения работы по краевой задаче Римана с непрерывными коэффициентами, в том числе, полученных и неполученных результатов по теме диссертации.

Целью настоящей диссертации является исследование краевых задач теории аналитических функций и её приложений к решению интегральных уравнений с ядром Коши. Здесь рассматривается задача с одной неизвестной функцией.

Излагаемые теории зарождались в XX столетии в трудах видных ученых, в том числе:

Р.Н. Абдуллаева [5-7]; В.А. Батырева [8]; Ф.Д. Беркович [10-12]; И.Н. Векуа [13-21]; Н.П. Векуа [22]; Ф.Д. Гахова [24-37]; Э.И. Зверович [40-45]; Д.А. Квеселава [49-53]; М.В. Кельдыш [54-55]; В.Д. Купрадзе [56-57]; Г.С. Литвинчука [58-69]; Г.Ф. Манджавидзе [70]; А.И. Маркушевича [71]; Л.Г. Михайлова [72-77]; Н.И. Мусхелешвили [78]; И.И. Привалова [79]; И.Х. Сабитова [85-86]; С.Г. Самко [87-88]; И.Б. Симоненко [89-91]; В.И. Смирнова [3]; Н. Усмонова, М.Б. Холиковой [92-94]; Н. Усмонова, С. Шавкатзода [95-98]; Усмонова Н. [105-109]; Н. Усмонова, М.У. Шадманова [110-120]; Б.В. Хведелидзе [121-122]; Ю.А. Черского [123], и многих других авторов.

Анализ этих и некоторых других работ дан во втором и в третьем параграфах.

В 1936 году решение задачи Римана для односвязной области было исследовано Ф.Д. Гаховым.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Дан гладкий замкнутый контур L, в котором разделяет внутреннюю область D^+ и D^-- внешнюю область, причём, на контуре границы, $A(t),\ c(t) \in H$.

ЗАДАЧА РИМАНА. Найти две функции $W^+(z)$, лежащие на внутренней области и $W^-(z)$ – аналитическую, принадлежащую вне области, по следующим краевым условиям:

$$W^+(t) = A(t)W^-(t) \quad \textbf{(однородная задача Римана),}$$

и

$$W^+(t) = A(t)W^-(t) + c(t) \qquad \textbf{(неоднородная задача Римана),}$$

здесь $A(t)$ и $c(t) \in H$.

ТЕОРЕМА (Ф.Д. Гахова [1]). *При индексе* $æ > 0$, *однородная задача имеет* $æ + 1$ *решений:*

$$\varphi_r^+(z) = z^r e^{\Gamma^+(z)}, \qquad \varphi_r^-(z) = z^{r-æ} e^{\Gamma^-(z)},$$

в данном решении имеется $æ + 1$ *-произвольных постоянных чисел. Если* $æ < 0$, *задача неразрешима.*

ТЕОРЕМА 2 (Ф.Д. Гахова [1]). *Общее решение неоднородной задачи при* $æ \geq 0$, *всегда будет разрешима и имеет следующий вид:*

$$\varphi(z) = \frac{\chi(z)}{2\pi i} \int_L \frac{c(\tau)}{\chi^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z} + \chi(z) P_æ(z),$$

здесь $\chi(z)$- *каноническая функция и* $P_æ(z)$ –*многочлен степени* $æ$ *с произвольными комплексными коэффициентами.*

При $æ = -1$, *неоднородная задача всегда имеет единственное решение.*

Если $\text{æ} < -1$, *в общем виде задача неразрешима, т.е. для разрешимости требуется* $-\text{æ} - 1$ *дополнительные условия разрешимости.*

Также особые случаи задачи Римана изучены Ф.Д. Гаховым [1] и Л.А. Чикином [124] разными методами постановки. Требовалось, чтобы коэффициент задачи Римана был непрерывен и не обращался в нуль. В особых случаях требуется, чтобы коэффициент в отдельных точках обращался к бесконечности. В задаче Римана, когда коэффициент обладает нулями и полюсами сопряжённо-аналитического вида для много связности области, доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА (Н. Усмонова, М.Б. Холиковой [93]). *Дана гладкая многосвязная область, ограниченная контуром* $L_0, L_1, ..., L_m$ *и получен следующий результат.*

Когда l *(число однородной задачи)* $= \text{æ} - d$ *линейно независимости решений и p (число условий разрешимости задачи) =0.*

Тогда:

При $\text{æ} - d = -1,\ l = 1,\ \ p = 1$.

В случае $\text{æ} - d < -1$, $\ l = 0,\ p = \text{æ} - d - 1$ *условий разрешимости следующего вида:*

$$\int_L \frac{q_1(\tau)}{\chi^+(\tau)} \tau^{r-1} d\tau = 0 \qquad (r = 1,2,..., -\text{æ} + d - 1).$$

При написании истории этого вопроса и анализа существующих работ по данной тематике, автор использовал работу Ф.Д. Гахова [1].

Задача Римана обобщалась и развивалась в разных направлениях.

1⁰. Далее эту задачу исследовал Б.В. Хведелидзе [121], исследование ученого имеет место для коэффициентов задачи Римана удовлетворяющих условия Гёльдера, а свободный член интегрируем по

Лебегу, т.е. $c(t) \in L_p$. В данной работе точно определено число решений однородной задачи и число решений неоднородной.

Метод И.Б. Симоненко в исследовании данной задачи заключается в приближении функция, удовлетворяющей условию Гёльдера на непрерывную функцию и выясняется, что малые отклонения коэффициентом на характер разрешимости задачи Римана не влияет.

В качестве условия Римана:

$$\varphi^{+}(t) = A(t)\varphi^{-}(t) + c(t)$$

здесь коэффициент задачи непрерывная функция, а свободный член из класса L_p.

✓ В этой работе Б.В. Хведелидзе используется следующая оценка интеграла, типа Коши:

$$\left\|\varphi^{\pm}(t)\right\| = \left\|\pm\frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2}S_{\varphi}\right\| \le \frac{1+\mathrm{M}_p}{2}\left\|\varphi(t)\right\|.$$

✓ Далее, используя принцип сжатых отображений, автор доказывает, что задача Римана, как измеримая функция, удовлетворяет следующее неравенство:

$$\left|A(t) - 1\right| < \frac{2}{1+\mathrm{M}_p}.$$

✓ Когда индекс задачи равен нулю, то берётся $A(t) \in H$, не обращающий в нуль и близок к коэффициенту задачи $A(t)$:

$$\left|A(t)A_1^{-}(t) - 1\right| < \frac{2}{1+\mathrm{M}_p};$$

Построим канонические функции, следующим образом:

$$A_1(t) = \chi_1^+(t)(\chi_1^-(t))^{-1},$$

введём новые функции: $\varphi_1^\pm(t) = \varphi^\pm(t)(\chi_1^\pm(t))^{-1}$.

В результате, получится задача с непрерывными коэффициентами, вида: $A(t) \cdot A_1^{-1}(t)$.

✓ В случае сведения задачи к нулевому индексу, получим такой же результат, как результат у Б.В. Хведелидзе [121].

2⁰. Л.А. Чикин [124] изучал в Банаховом пространстве, где коэффициент задачи Римана является линейным оператором, а искомые функции и свободный член принадлежат пространству Банаха.

В этом случае, индекс определяется через определённый оператор.

3⁰. Решение задачи Римана приближённым методом принадлежит А.В. Батырёву [8]. Там сказано, что коэффициент задачи приближается следующеми равенству:

$$r_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} a_k t^k .$$

ТЕОРЕМА (Н. Усмонова, М.Б. Холиковой [94]). *Пусть* Γ *ограничивает многосвязную область,* $\Gamma_0, \Gamma_1, .\Gamma_m$, *здесь* D^+ – *обозначает внутреннюю область, а внешняя область обозначается через* D^-, *свободный член из класса* $L_p(\Gamma)$.

Картина разрешимости имеет следующий результат:

а) *если* $æ - p = 0$, *задача имеет единственное решение;*

б) *в случае* $æ - p > 0$, *однородная задача имеет* $æ - p$ *линейно-независимых решений, а неоднородная задача, безусловно, разрешима.*

в) *в случае* $æ - p < 0$, *вообще говоря, задача неразрешима, она будет разрешима, если выполняется следующее условие:* $S_k g(t) = 0$.

1.2. Анализ выполнения работы по общей граничной задаче линейно-сопряжённого вида

Данная задача, т.е., общая задача сопряжения, имеет следующий вид:

$$W^{+}(t) = A(t)W^{-}(t) + B(t)\overline{W^{-}(t)} + C(t). \qquad (1.2.1)$$

В 1946 году эта задача была составлена А.И. Маркушевичем [71], в 1952 году исследовал её, в частном случае, И.Н. Векуа [15]. Он привёл задачу к сингулярному уравнению и доказал её в классах мероморфной функции. И.Н. Векуа использовал эту задачу в изгибаниях поверхностей.

Полную теорию задачи сопряжения общего вида исследовал в своих работах Л.Г. Михайлов [4], где требовалось, чтобы первый коэффициент был непрерывной функцией, а второй коэффициент ограничен и измерим; свободный член принадлежал классу L_p.

В работе Леонида Григорьевича Михайлова различаются три случая:

1) $|a(t)| > |b(t)|$ – эллиптический,

2) $|a(t)| \equiv |b(t)|$ – параболический,

3) $|a(t)| < |b(t)|$ – гиперболический.

ТЕОРЕМА (Л.Г. Михайлова [4]). *Если* $a(t)$ *непрерывная функция, и она отличная от нуля, обозначим её через,* $Ind_{\Gamma} a(t) = æ$ *и* $b(t)$ *требуем, чтобы она была ограниченная и измеримая функция, причем* $c(t)$ *принадлежит классу* L_p *при* $p \succ 0$.

Ищем решение вида интеграла типа Коши, а функцию $\varphi^{\pm}(t)$ *принадлежащую, пространству* L_p *и для него выполняются условия:*

$$\sup_{t\in\Gamma}\left|\frac{b(t)}{a(t)}\right| < \frac{2}{1+S_p},$$

где S_p *– норма оператора и отсюда имеет следующее равенство:*

$$S_\mu \equiv \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\mu(\tau)}{\tau - t}\,d\tau.$$

Если при æ > 0, *то* $l = 2$æ *(l – число решения однородной задачи), а* $p = 0$ *(p – число условий неоднородной задачи Римана).*

Если æ $= 0$, *то однородная задача имеет нулевое решение.*

Если æ < 0, *то* |æ| *решение, а* р $= 2$|æ| *вещественных или* æ *условий разрешимости, следующего вида:*

$$\int_\Gamma t^{-r}\cdot Q[c(t)]dt = 0, \qquad (r = 0, 1, \ldots, |æ| - 1),$$

здесь Q *– вполне непрерывный оператор.*

ТЕОРЕМА (Л.Г. Михайлова [4]). *Если в данной задаче выполняется параболическое условие, т.е.:*

$$|a(t)| \equiv |b(t)| > 0 \quad и \quad a(t), b(t), c(t) \in H.$$

Пусть:

$$\lambda = Ind_\Gamma a(t) + Ind_\Gamma b(t), \;\; \mu = Ind_\Gamma a(t) - Ind_\Gamma b(t),$$

и индекс:

$$Ind_\Gamma a(t) = æ$$

здесь, через l *– обозначим, число линейно-независимых решений однородной задачи и* p*-число условий разрешимости неоднородной задачи.*

Здесь исключается многосвязная область, т.е. изучается задача Римана только, на одной связной области и для данной задачи имеет место следующая картина:

1. Пусть $\lambda < 0$ и $\mu < 0$, то $l = 0$, $p = 2$|æ| $- 2$;

2. Пусть $\lambda < 0$ и $\mu \geq 0$, то $l = \mu + 1, \ p = |\lambda| - 1$;

3. Пусть $\lambda \geq 0$ и $\mu < 0$, тогда для разрешимости задачи определяется $|\mu| - 1$ уравнение, которое имеет $\lambda + 1$ неизвестные решения.

Здесь выделяются различные случаи:

Первый. При æ ≥ -1, $p = 0$ в этом случае имеется между функции $a(t)$ и $b(t)$ - скалярные зависимости число решения однородной задачи, $l -$ может быть наибольшая из них,

$$2æ + 2 \leq l \leq \lambda + 1;$$

Второй. Если æ < -1, тогда, $l = 0$, $p = -2$æ $- 2$.

1.3. Анализ работ по краевым задачам линейного сопряжения в аналитических функциях

Граничная задача Римана с разрывными коэффициентами возникла одновременно с постановкой задачи Римана с непрерывными коэффициентами.

В 1946 году задача Римана в разомкнутом контуре была поставлена Д.А. Квеселавым [49], позднее, в 1968 году, её решение было исследовано Н.И. Мусхелишвили [2].

Н.И. Мусхелишвили, Ф.Д. Гахов и Д.А. Квеселава решали задачу с разрывными коэффициентами, причём, у каждого из авторов был собственный метод исследования.

Ф.Д. Гаховым [1], была решена задача Римана со многими неизвестными функциями, и ему удалось устранить разрыв для одной неизвестной функции.

Для решения задачи Римана, в случае сложного контура, применяется метод Н.И. Мусхелишвили. Д.А. Квеселава, которая предложила, что решение задачи уместно в виде отношения двух канонических функций, но этот метод был сложным для канонических функций, а ее решение в разомкнутых контурах.

Ф.Д. Гахов предложил для получения канонического решения, свой простой метод и его метод намного упростил решение задачи для сложного контура.

ТЕОРЕМА (Ф.Д. Гахова [1]). *Пусть* æ − *индекс задачи Римана положительный, тогда общее решение неоднородной задачи имеет* æ + 1 - *произвольные постоянные и определяется, следующим образом:*

$$\varphi^{+}(z)=\prod_{r=1}^{l}(z-t_r)^{\nu_r}\,\chi_1^{+}(z)\left[\psi^{+}(z)+P_{æ}(z)\right],$$

$$\varphi^{-}(z)=\prod_{r=1}^{l}\left(\frac{z-t_r}{z-z_0}\right)^{\nu_r}\chi_1^{-}(z)\left[\psi^{-}(z)+P_{æ}(z)\right],$$

здесь

$$\chi_1^{+}(z)=e^{\Gamma^{+}(z)},\qquad \chi_1^{-}(z)=(z-z_0)^{-æ}e^{\Gamma^{-}(z)},$$

где функции:

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{(\tau-z_0)^{-æ}\prod_{r=1}^{l}(\tau-z_0)^{-\gamma_r}A(\tau)}{\tau-z_0}\,d\tau$$

-является непрерывной функцией и

$$\psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\prod_{r=1}^{l}(\tau-t_k)^{-\gamma_r}c(\tau)}{\chi_1^{+}(\tau)(\tau-z_0)}\,d\tau,$$

-есть аналитическая функция, тогда, когда если имеются, исчезающие на бесконечности, то степень полинома уменьшается на единицу.

Если $æ \leq 0$, то l (число решений однородной задачи равно нулю), а p (число решений неоднородной задачи Римана) равно $|-æ|$, следующему виду:

$$\int_L \frac{\prod_{r=1}^{l}(t-t_r)^{-\gamma_r}\, c(\tau)}{\chi_1^+(\tau)} \tau^{j-1} d\tau = 0 \qquad (j = 1,2,\dots,-æ).$$

Если данное условие выполняется, то задача имеет единственное решение.

ГЛАВА 2. ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА РИМАНА С НЕПРЕРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В СИНГУЛЯРНОМ СЛУЧАЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \psi(z)$

2.1. Граничная задача Римана для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа с непрерывными коэффициентами, имеющими особенности целого порядка

В этом параграфе исследуется граничная задача Римана, для системы дифференциального уравнения эллиптического типа с непрерывными коэффициентами, имеющие особенности целого порядка.

Рассматривается: $W(z) = u(x,\ y) + iv(x,\ y)$, где функции $u(x,\ y),\quad v(x,\ y)$ аналитические и удовлетворяют системе дифференциальных уравнений, вида:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = h(x,\ y) \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = g(x,\ y) \end{cases},$$

эту систему уравнения запишем виды комплексного переменного следующим образом:

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \psi(z), \tag{2.1.1}$$

здесь рассматривается граничная задача типа Римана.

Согласно методу Ф.Д. Гахова [1], если $\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial v}{\partial y}$ непрерывная функция, то

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

и

$$\lim_{D\to 0} \frac{1}{2iD}\int_{\Gamma} W(z)dz,$$

здесь через D будем бозначать данную область. Если $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}}$ непрерывная функция, и $W(z)$ принадлежит классу $\bar{z}$. И.Б. Симоненко в литературе [91] рассматривает следующий пример, т.е.:

$$E(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_{D}\frac{\psi(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta\ ,$$

здесь $D-$область многосвязного контура Γ:

$$\zeta = \xi + i\eta, \qquad d\zeta = d\xi\cdot d\eta, \qquad \psi(D) = \psi(\xi,\,\eta),$$

и $\psi-$называется плотностью, а сама формула называется фундаментальным интегралом, причем, функция $E(z)$ обладает следующими свойствами:

1) $E(z)\in C_{\bar{z}}$;

2) $E(z)-$ на всей плоскости непрерывная функция;

3) $E(z)-$ аналитические внутри области D;

4) $E(z)-$ на бесконечности исчезает $E(\infty)=0$;

5) $|E(z_2)-E(z_1)| < A|z_2 - z_1|\cdot\ln|z_2 - z_1|$, т.е. $E(z)\in H$,

$E(z)-$является решением уравнения (2.1.1), это следует из свойства (1).

Полагаем, что функция:

$$W(z)=\varphi(z)+E(z), \tag{2.1.2}$$

отсюда, имеем:

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}}=\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}}+\frac{\partial E}{\partial \bar{z}}=\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}}+\psi(z), \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}}=0.$$

Согласно условию Коши-Римана:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=0\right),$$

где $\varphi(z)=u+iv$-является аналитической функцией.

Допустим, что $\varphi(z)$ в равенстве (2.1.2) является кусочно–голоморфной функцией, это означает, что функция $\varphi(z)$ аналитическая в области D^{+} и в области D^{-}. Тогда из равенства (2.1.2) видно, что $W(z)$ распространяется в D^{-}. Эти функции удовлетворяют, следующее соотношение:

Будем изучать следующую задачу:

ЗАДАЧА R$_{2.1}$. Надо найти функцию $W^{+}(z)-$регулярное решение уравнения (2.1.1) в области D^{+}и функцию $W^{-}(z)-$аналитическую в области D^{-}, которые имеют конечный порядок на бесконечности, удовлетворяющей следующее условие:

$$W^{+}(t)=\frac{\prod_{r=1}^{\mu}(t-\xi_r)^{d_r}}{\prod_{j=1}^{\gamma}(t-\eta_j)^{q_j}}A_1(t)W^{-}(t)+c(t), \tag{2.1.3}$$

здесь $A_1(t) \neq 0$ на границе и $A_1(t)$ – непрерывная функция, $c(t) \in H$, $\xi_r (r = 1, 2, ..., \mu)$, $\eta_j (j = 1, 2, ..., \gamma)$ – точки, лежащие на контуре, $d_r > 0$, $q_j > 0$ – целые числа.

Обозначим:

$$d = \sum_{r=1}^{\mu} d_r , \qquad q = \sum_{j=1}^{\gamma} q_j .$$

В силу значений $W^+(t)$ и $W^-(t)$, перепишем краевое условие (2.1.3), в виде:

$$\varphi^+(t) + F(t) = \frac{\prod_{r=1}^{\mu} (t-\xi_r)^{d_r}}{\prod_{j=1}^{\gamma} (t-\eta_j)^{q_j}} A_1(t)\left[\varphi^-(t) + F(t)\right] + c(t),$$

будем преобразовывать граничное условие, в виде:

$$\varphi^+(t) = \frac{\prod_{r=1}^{\mu} (t-\xi_r)^{d_r}}{\prod_{j=1}^{\gamma} (t-\eta_j)^{q_j}} A_1(t)\left[\varphi^-(t) + F(t)\right] + c(t) - F(t),$$

$$\varphi^+(t) = \frac{\prod_{r=1}^{\mu} (t-\xi_r)^{d_r}}{\prod_{j=1}^{\gamma} (t-\eta_j)^{q_j}} A_1(t) + \varphi_1^-(t) + c_1(t), \qquad (2.1.4)$$

здесь:

$$\varphi_1^-(t) = \varphi^-(t) + F(t), \quad c_1(t) = c(t) - F(t).$$

Решение задачи ищем в классе функций, ограниченных на границе. Требуем, чтобы функция $c_1(t)$ в сингулярной точке $t = \xi_r$ была дифференцируема сколько угодно раз.

Построим полином $Q(t)$ так, чтобы она подчиняла, следующее равенство:

$$c_1^{(l)}(\alpha_r) = Q^{(l)}(\alpha_r), \ (l = 0, 1, 2, ..., \mu - 1, \quad r = 1, 2, ..., \mu) \quad (2.1.5)$$

При помощи равенства (2.1.5), преобразуем краевое условие (2.1.4), таким образом:

$$\varphi^+(t) - Q(t) = \prod_{r=1}^{\mu}(t - \xi_r)^{d_r} \cdot \prod_{j=1}^{\gamma}(t - \eta_j)^{-q_j} \times$$

$$\times A_1(t)\varphi_1^-(t) + c_1(t) - Q(t),$$

и

$$\varphi^+(t) - Q(t) = \prod_{r=1}^{\mu}(t - \xi_r)^{d_r} \cdot \prod_{j=1}^{\gamma}(t - \eta_j)^{-q_j} \times$$

$$\times A_1(t)\varphi_1^-(t) + \prod_{r=1}^{\mu}(t - \xi_r)^{d_r} c_2(t),$$

здесь $c_2(t) \in H$ удовлетворяет условию Гёльдера:

$$\left(\varphi^+(t) - Q(t)\right)\prod_{r=1}^{\mu}(t - \xi_r)^{-d_r} = A_1(t) \cdot \prod_{j=1}^{\gamma}(t - \eta_j)^{-q_j} \varphi_1^-(t) + c_2(t),$$

где

$$\varphi_1^+(t) = A_1(t) \cdot \prod_{j=1}^{\gamma}(t - \eta_j)^{-q_j} \varphi_1^-(t) + c_2(t), \quad (2.1.6)$$

через $\varphi_1^{+}(t)$, обозначим следующее выражение, т.е.

$$\varphi_1^{+}(t) = \left(\varphi^{+}(t) - Q(t)\right)\prod_{r=1}^{\mu}\left(t - \xi_r\right)^{-d_r}.$$

Используя следующую постановку, имеем:

$$\varphi_1^{-}(z) = \frac{\prod_{j=1}^{\gamma}\left(z - \eta_j\right)^{q_j}}{z^q} \cdot \varphi_2^{-}(z),$$

$$\varphi_1^{+}(t) = \frac{A_1(t)}{t^q} \cdot \varphi_2^{-}(t) + c_2(t). \qquad (2.1.7)$$

В результате, мы получили задачу Римана, коэффициентом которой является непрерывная функция.

Используем метод исследования И.Б. Симоненко для суммируемых функций, тогда имеем:

$$\varphi(t) = \varphi_1^{+}(t) - \varphi_2^{-}(t) \qquad (2.1.8)$$

здесь $\varphi_1^{+}(t)$ и $\varphi_2^{-}(t)$ – являются предельными значениями аналитических функций в областях $D^{\pm}$.

Предположим, что функции $\varphi^{\pm}(t)$ – принадлежат пространству $L_p(\Gamma)$ при $p > 0$, имеет единственное продолжение.

Используя формулу Сохоцкого, отсюда имеем следующие равенства:

$$\varphi^{+}(t) = \frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau,$$

$$\varphi^{-}(t) = -\frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau. \qquad (2.1.9)$$

Интегральный оператор, $\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau -$ограниченная в пространстве $L_p(\Gamma)$, при $p > 1$.

Действительно,

$$\left(\int_{\Gamma}\left|\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau\right|^{p} ds\right)^{\frac{1}{p}} \le M_p\left(\int_{\Gamma}|\varphi(t)|^{p} ds\right)^{\frac{1}{p}},$$

в настоящем $M_p -$является постоянным числом

$$\left\|\varphi^{\pm}(t)\right\|_{L_p} \le \frac{1}{2}\left\|\varphi(t)\right\|_{L_p} + \frac{M_p}{2}\left\|\varphi(t)\right\|_{L_p} = \frac{M_{p+1}}{2}\left\|\varphi(t)\right\|_{L_p},$$

где $\left\|\varphi(t)\right\|_{L_p} = M_p\left(\int_{\Gamma}|\varphi(t)|^{p} ds\right)^{\frac{1}{p}}.$

В результате, задача сопряжения (2.1.7) формулируется следующим образом:

ЗАДАЧА $\mathbf{R}_{1.1/2}$. Найти функцию $\varphi(t)$, принадлежащую классу $L_p(\Gamma)$, удовлетворяющему соотношение (2.1.7), где $\varphi^{+}(t)$ и $\varphi^{-}(t)$ - являются операторами, заданными в равенстве (2.1.9).

В начале, изучаем случай задачи сопряжения, когда $A_1(t)$- измеримая функция и здесь выполняются, следующие условия:

$$\left|A_1(t) - 1\right| \le c < \frac{2}{1 + M_p},$$

здесь $c_1(t)-$принадлежит классу $L_p(\Gamma)$ при $p>1$. Тогда, в этом случае преобразуем равенство (2.1.7), следующим образом:

$$\varphi^+(t)=[A_1(t)-1]\varphi^-(t)+c_1(t) \qquad (2.1.10)$$

где оператор $[A_1(t)-1]\varphi^-(t)$ из класса $L_p(\Gamma)$

На самом деле:

$$\left\|[A_1(t)-1]\varphi^-(t)\right\|_{L_p}=\left(\int_\Gamma |A_1(t)-1|^p\left|\varphi^-(t)\right|^p ds\right)^{\frac{1}{p}}\leq$$

$$\leq\left(\int_\Gamma \left|\varphi^-(t)\right|^p ds\right)^{\frac{1}{p}}=\frac{1+M_p}{2}\|\varphi(t)\|_{L_p}.$$

Используя принцип сжатых отображений, утверждаем, что задача (2.1.10) имеет единственное решение. Индекс задачи обозначим через æ и допустим, что $æ_0=æ_1=...=æ_m=0$.

В данном случае $\ln A_1(t)$ приблизим к функции $f\in H$, так, чтобы она удовлетворяла следующему соотношению:

$$\left|e^{(\ln A_1(t)-f)}-1\right|\leq c<\frac{2}{1+M_p}.$$

Коэффициент задачи Римана $A_1(t)=\chi^+(t)\left[\chi^-(t)\right]^{-1}$ можно представить, в виде отношения двух канонических функций: $\chi^\pm(t)$. Эти функции принадлежат области $D^\pm+\Gamma$ и в замкнутой области, они не обращаются в нуль. Используя новые функции, граничное условие преобразуется следующим образом:

$$\varphi_1^\pm(t)=\Phi^\pm(t)\cdot\left[\chi^\pm(t)\right]^{-1},$$

т.е.

$$\varphi_1^{\pm}(t) = t^{-s}\,\frac{A_1(t)}{A_2(t)}\varphi_1^{-}(t) + \frac{c_1(t)}{\chi^{+}(t)}. \qquad (2.1.11)$$

В случае, когда $æ_0 = æ_1 = ... = æ_m = 0$, равенство (2.1.11) имеет единственное решение.

Теперь исследуем общий случай в краевом условии (2.1.11):

❖ Если индекс задачи Римана $æ - \delta = 0$,

вводя новое обозначение функции, имеем следующее соотношение:

$$\varphi_*^{+}(z) = \prod_{k=1}^{m}(z - z_k)^{æ_k}\varphi^{+}(z), \qquad (2.1.12)$$

где

$$z \in D_k^{-} \quad \text{и} \quad \varphi_*^{-}(z) = \varphi^{-}(z),$$

здесь:

$$A_1^*(t) = \prod_{k=1}^{m}(z - z_k)^{æ_k} A_1(t) \quad \text{и} \quad c_1^*(t) = \prod_{k=1}^{m}(z - z_k)^{æ_k} c_1(t).$$

Отметим, что:

$$æ_k^* = \frac{1}{2\pi}\left[\arg A_1^{+}(z - z_k)^{æ_k} A_1(t)\right]_{\Gamma_k} = æ = 0, \quad k = 1, 2, ..., m.$$

В случае, индекс задачи $æ = 0$ из равенства (2.1.12) и равенства (2.1.11), задача имеет решение.

❖ В случае, когда $æ - \delta > 0$.

Задача принимает следующий вид:

$$\frac{\varphi^{+}(z)}{(t-z_0)^{æ}}-\frac{Q_{æ-\delta-1}(t)}{(t-z_0)^{æ}}=$$

$$=\frac{A_1(t)\varphi^{-}(t)}{(t-z_0)^{æ}}+\frac{c_1(t)}{(t-z_0)^{æ}}-\frac{Q_{æ-\delta-1,}(t)}{(t-z_0)^{æ}},$$

здесь z_0 – внутренняя точка в области D, т.е., подберём полином $Q_{æ-\delta-1}(t)$, и функцию $\frac{\varphi^{+}(z)-Q_{æ-\delta-1}(z)}{(t-z_0)^{æ}}$, так, чтобы они имели особенность в точке z_0.

Через, $R^{\pm}$ – обозначим оператора, решающего данное, краевое условие с коэффициентом $\frac{A_1(t)}{(t-z_0)^{æ}}$.

В результате, получим:

$$\frac{\varphi^{+}(t)-Q_{æ-\delta-1}(t)}{(t-z_0)^{æ}}=R^{+}(t)\left[c_1(t)-\frac{Q_{æ-\delta-1}(t)}{(t-z_0)^{æ}}\right],$$

и

$$\varphi^{-}(t)=R^{-}(t)\left[c(t)-\frac{Q_{æ-\delta-1}(t)}{(t-z_0)^{æ}}\right], \qquad (2.1.13)$$

Используя первое равенство (2.1.13), можно найти $\varphi^{+}(t)$, следующим образом:

$$\varphi^{+}(t)=Q_{æ-\delta-1}(t)+(t-z_0)^{æ}R^{+}(t)[c_1(t)-\frac{Q_{æ-\delta-1}(t)}{(t-z_0)^{æ}}]. \qquad (2.1.14)$$

И полученное выражение будет общим решением данной задачи.

❖ Если индекс задачи $æ-\delta<0$, то краевую задачу, можно представить, в виде:

$$(t-z_0)^{-æ}\varphi^+(t)=A_1(t)\frac{\varphi^-(t)}{(t-z_0)^æ}+\frac{c_1(t)}{(t-z_0)^æ},$$

здесь:

$\frac{\varphi^-(t)}{(t-z_0)^æ}$ – аналитическая функция вне области, а $Ind\frac{A_1(t)}{(t-z_0)^æ}=0$.

Через, $R^{\pm}(t)$ – обозначим оператора, задачи сопряжения с коэффициентом $\frac{A_1(t)}{(t-z_0)^æ}$.

Рассуждая аналогично предыдущему случаю, находим $\varphi^{\pm}(z)$, следующим равенством:

$$\varphi^+(z)=(z-z_0)^æ R^+(t)[(t-z_0)^æ c_1(t)],$$

$$\varphi^-(z)=(z-z_0)^æ R^-(t)[(t-z_0)^{-æ} c_1(t)]. \tag{2.1.15}$$

Таким образом, в общем случае, задача не имеет решений, т.е. в точке z_0 задача имеет полюс порядка $|æ|$. Чтобы задача имела решение для него, требуем $|æ-\delta|$ дополнительных условий разрешимости вида:

$$\int_\Gamma (t-z_0)^æ R^+(t)[(t-z_0)^{-æ} c_1(t)]dt=0. \tag{2.1.16}$$

В этом случае, задача (2.1.16) имеет решение. В результате исследования, имеем следующую теорему:

ТЕОРЕМА 2.1.1.

Когда индекс задачи Римана $æ-\delta=0$, *то граничная задача сопряжения имеет единственное решение. Если* $æ-\delta>0$, *рассматриваемая граничная задача сопряжения, также имеет* $æ-\delta$ *решений. Когда* $æ-\delta<0$, *рассматриваемая задача сопряжения в общем виде неразрешима. Для разрешимости требуем дополнительное условие разрешимости* $|æ-\delta|$. *(2.1.16):*

2.2. Граничная задача Римана для системы уравнений эллиптического типа с коэффициентом, имеющим нули и полюса сопряжённо-аналитического вида

Исследуется граничная задача Римана для системы уравнений эллиптического типа, когда коэффициент обладает нулями и полюсами сопряжённо-аналитического вида, т.е. для следующей системы:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{\partial v}{\partial y}=h(x,\ y) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}=g(x,y) \end{cases}. \qquad (2.2.1)$$

ЗАДАЧА R$_{2.2}$. Необходимо найти пару аналитических функций $W^{\pm}(x,\ y)$, регулярного решения уравнения (2.2.1), принадлежащие к областям $D^{\pm}$, которым удовлетворяет следующее краевое условие:

$$W^{+}(t)=\prod_{r=1}^{\mu}\left(\overline{t-\xi_r}\right)^{d_r}\cdot\prod_{j=1}^{\gamma}\left(\overline{t-\eta_j}\right)^{-q_j}A_1(t)W^{-}(t)+c(t), \qquad (2.2.2)$$

здесь: $A_1(t)=\prod_{r=1}^{\mu}\left(\overline{t-\xi_r}\right)^{d_r}\cdot\prod_{j=1}^{\gamma}\left(\overline{t-\eta_j}\right)^{-q_j}A(t)\neq 0$, в этом случае функция непрерывная и $c(t)$ из класса Гёльдера, ξ_r,η_j – точки, лежащие на контуре Г, $d_r>0,\ q_j>0-$ целые числа.

Имеют место, следующие равенства:

$$\prod_{r=1}^{\mu}(\overline{t-\xi_r})^{d_r} = \prod_{r=1}^{\mu}(t-\xi_r)^{d_r}\cdot e^{-2i\sum\limits_{r=1}^{\mu}\theta_r^{(1)}d_r}, \quad \theta_r^{(1)} = \arg(t-\xi_r)$$

(2.2.3)

$$\prod_{j=1}^{\gamma}(\overline{t-\eta_j})^{q_j} = \prod_{j=1}^{\gamma}(t-\eta_j)^{q_j}\cdot e^{-2i\sum\limits_{j=1}^{\gamma}\theta_j^{(2)}q_j}, \quad \theta_j^{(2)} = \arg(t-\eta_j).$$

$e^{-2i\sum\limits_{r=1}^{\mu}\theta_r^{(1)}d_r}$, $e^{-2i\sum\limits_{j=1}^{\gamma}\theta_j^{(2)}q_j}$ - являются непрерывными функциями и имеют индексы -d и -q. Обозначим, суммы через:

$$\sum_{r=1}^{\mu}d_r = d, \quad \sum_{j=1}^{\gamma}q_j = q.$$

В силу последнего равенства, перепишем его в следующем виде:

$$W^+(t) = \prod_{r=1}^{\mu}(t-\xi_r)^{d_r}\cdot\prod_{j=1}^{\gamma}(t-\eta_j)^{-q_j}A_2(t)W^-(t)+c(t), \qquad (2.2.4)$$

здесь:

$$A_1(t)\cdot e^{2i\left(\sum\limits_{j=1}^{\gamma}\theta_j^{(2)}q_j-\sum\limits_{r=1}^{\mu}\theta_r^{(1)}d_r\right)} = A_2(t).$$

Так, как значение функции $W^+(t) = \varphi^+(t)+F(t)$, $W^-(t) = \varphi^-(t)+F(t)$ в краевом условии (2.2.4), принимает следующее соотношение:

$$\varphi^+(t)+F(t) = \prod_{r=1}^{\mu}(t-\xi_r)^{d_r}\cdot\prod_{j=1}^{\gamma}(t-\eta_j)^{-q_j}A_2(t)\left[\varphi^-(t)+F(t)\right]+c(t)$$

где

$$A_1(t) = \prod_{r=1}^{\mu}(t-\xi_r)^{d_r}\cdot\prod_{j=1}^{\gamma}(t-\eta_j)^{-q_j}A_2(t).$$

Требуем, чтобы функция $c_1(t)$, существовала и имела производный произвольный порядок.

Построим полином $Q(t)$ так, чтобы он удовлетворял следующее равенство:

$$c_1^{(i)}(\xi_r) = Q^{(i)}(\xi_r), \ \ (r = 1, 2, ..., \mu, \ \ i = 0, 1, ..., d_{r-1}), \qquad (2.2.5)$$

в силу равенства (2.2.5), краевое условие задачи перепишем в следующем виде:

$$\varphi^{+}(t) - Q(t) = \prod_{r=1}^{\mu} (t - \xi_r)^{d_r} \cdot \prod_{j=1}^{\gamma} (t - \eta_j)^{-q_j} A_2(t) \varphi_1^{-}(t) + c_1(t) - Q(t),$$

$$\varphi^{+}(t) - Q(t) = \prod_{r=1}^{\mu} (t - \xi_r)^{d_r} \cdot \prod_{j=1}^{\gamma} (t - \eta_j)^{-q_j} A_2(t) \varphi_1^{-}(t) +$$

$$+ \prod_{r=1}^{\mu} (t - \xi_r)^{d_r} c_2(t). \qquad (2.2.6)$$

Обе стороны равенства (2.2.6), необходимо разделить на $\prod_{r=1}^{\mu} (t - \xi_r)^{d_r}$ и, в результате, будем иметь:

$$\varphi_1^{+}(t) = A_2(t) \cdot \prod_{j=1}^{\gamma} (t - \eta_j)^{-q_j} \varphi_1^{-}(t) + c_2(t), \qquad (2.2.7)$$

здесь:

$$\varphi_1^{+}(t) = \left[\varphi^{+}(t) - Q(t)\right] \prod_{r=1}^{\mu} (t - \xi_r)^{-d_r}.$$

В равенстве (2.2.7), произведём замену:

$$\varphi_1^{-}(z) = \prod_{j=1}^{\gamma} (z - \eta_j)^{q_j} \cdot z^{-q} \varphi_2^{-}(z), \qquad (2.2.8)$$

Тогда, получим:

$$\varphi_1^+(t) = t^{-q} A_2(t) \varphi_2^-(t) + c_2(t)\,. \qquad (2.2.9)$$

Следует отметить, что:

$$Ind\left[t^{-q} A_2(t)\right] = Indt^{-q} + IndA_2(t) = Indt^{-q} + IndA_1(t) +$$

$$Ind\left(e^{2i\sum\limits_{j=1}^{\gamma} \theta_j^{(2)} q_j} \right) + Ind\left(e^{-2i\sum\limits_{r=1}^{\mu} \theta_r^{(1)} d_r} \right) = -q + æ + q - \delta = æ - \delta.$$

Известно, что суммируемую функцию можно представить, формулой:

$$\varphi(t) = \varphi^+(t) - \varphi^-(t) \qquad (2.2.10)$$

где $\varphi^{\pm}(t)$ – есть предельные значения аналитической функции $\varphi^{\pm}(z)$.

Если

$$\varphi^{\pm}(t) \in L_p(\Gamma), \text{ при } \; p > 0 \quad \text{и} \quad \varphi^-(\infty) = 0,$$

тогда, согласно формуле Сохоцкого для предельных значений $\varphi^{\pm}(t)$ имеет место:

$$\varphi^+(t) = \frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau\,,$$

$$\varphi^-(t) = -\frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau\,, \qquad (2.2.11)$$

где

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau,$$

сингулярный оператор в пространстве L_p по контуру Γ при $p > 1$.

$$\left(\int_{\Gamma}\left|\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau\right|^{p}ds\right)^{\frac{1}{p}} \le M_{p}\left(\int_{\Gamma}|\varphi(t)|^{p}ds\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Тогда имеет место, следующее неравенство:

$$\left\|\varphi^{\pm}(t)\right\|_{L_p} \le \frac{1}{2}\|\varphi(t)\|_{L_p} + \frac{M_p}{2}\|\varphi(t)\|_{L_p} = \frac{M_{p+1}}{2}\|\varphi(t)\|_{L_p},$$

Здесь

$$\|\varphi(t)\|_{L_p} = M_p\left(\int_{\Gamma}|\varphi(t)|^{p}ds\right)^{\frac{1}{p}}.$$

В результате, можно сформулировать задачу, в следующем виде:

ЗАДАЧА R$_{2.2/1}$. Требуется найти функцию $\varphi(t)\in L_p$, которая должна удовлетворять условию (2.2.9), здесь $\varphi_1^{+}(t)$ и $\varphi_2^{-}(t)$ обозначены операторами, заданными равенствами (2.2.11), если $A_1(t)=1$, тогда задача получается от скачка, в котором она всегда разрешима.

Если $A_1(t)-$измеримая функция, то для неё справедливо, следующее неравенство:

$$|A_1(t)-1| \le c_1 < \frac{2}{1+M_p}$$

здесь $c_1(t)$ принадлежит классу $L_p(\Gamma)$ при $p>1$.

Граничное условие можно записать, в следующем виде:

$$\varphi^{+}(t) = |A_1(t)-1|\varphi^{-}(t) + c_1(t), \tag{2.2.12}$$

$|A_1(t)-1|\varphi^{-}(t)$ - есть оператор в пространстве $L_p(\Gamma)$.

На самом деле:

$$\left\| [A_1(t)-1]\varphi^-(t) \right\|_{L_p} = \left(\int_\Gamma |A_1(t)-1|^p |\varphi^-(t)|^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\le c_1 \left(\int_\Gamma |\varphi^-(t)|^p ds \right)^{\frac{1}{p}} = c_1 \frac{1+M_p}{2} \|\varphi(t)\|_{L_p}.$$

Используя принцип сжатых отображений, утверждаем, что равенство (2.2.12) разрешимо и имеет единственное решение.

Теперь изучим случай $æ_0 = æ_1 = ... = æ_m = 0$.

В данном случае, $\ln A_1(t)$- непрерывная функция. Приблизим $\ln A_1(t)$ к функции $f \in H$:

$$\left| e^{(\ln A_1(t) - f)} - 1 \right| \le c < \frac{2}{1+M_p}, \qquad A_1(t) = \chi^+(t) \cdot \left[\chi^-(t) \right]^{-1},$$

здесь $\chi^{\pm}(t)$- аналитическая функция в областях $D^{\pm}$.

С учетом ввода новых функций, $\varphi_1^{\pm}(t) = \varphi^{\pm}(t)\left[\chi^{\pm}(t)\right]^{-1}$, краевое условие преобразуется, в следующем виде:

$$\varphi_1^+(t) = t^{-q} \frac{A_1(t)}{A_2(t)} \varphi_1^-(t) + \frac{c_1(t)}{\chi^+(t)}.$$

Если $æ_0 = æ_1 = ... = æ_m = 0$, задача имеет единственное решение.

❖ Для $æ - \delta = 0$.

Вводя новые неизвестные функции, получим:

$$\varphi_*^+(z) = \prod_{k=1}^{m} (z - z_k)^{m_k} \varphi^+(z), \qquad z_k \in D_k^-, \quad \varphi_*^-(z) = \varphi^-(z),$$

$$\varphi_*^+(t) = A_1^*(t)\varphi_*^-(t) + c_1^*(t), \qquad A_1^*(t) = \prod_{k=1}^{m} (z - z_k)^{m_k} A_1(t),$$

$$c_1^*(t) = \prod_{k=1}^{m} (z - z_k)^{æ_k} c_1(t),$$

$$æ_k^* = \frac{1}{2\pi}\left[\arg A_1^*(t)\right]_{\Gamma_k} = æ = 0, \quad k = 1, 2, ..., m.$$

В случае индекс $æ = 0$, задача, безусловно, разрешима, и она имеет единственное решение.

❖ Если $æ - \delta > 0$.

Тогда краевое условие можно написать, в следующем виде:

$$\frac{1}{(t - z_0)^{æ}}[\varphi^+(t) - Q_{æ-\delta-1}(t)] =$$

$$= \frac{1}{(t - z_0)^{æ}}[A_1(t)\varphi^-(t) + c_1(t) - Q_{æ-\delta-1,}(t)],$$

где z_0 принадлежит области D^+ и $Q_{æ-\delta-1}(t)$ – полином не выше степени $æ$ - δ -1, причём, подобранная функция не имеет полюса в точке z_0.

Оператор $R^{\pm}$, есть решение задачи сопряжения со следующими коэффициентами:

$$\frac{A_1(t)}{(t - z_0)^{æ}}, \qquad Ind\,\frac{A_1(t)}{(t - z_0)^{æ}} = 0.$$

$$\left[\frac{\varphi^+(t) - Q_{æ-\delta-1}(t)}{(t - z_0)^{æ}}\right] = R^+(t)\left[c_1(t) - \frac{Q_{æ-\delta-1}(t)}{(t - z_0)^{æ}}\right], \tag{2.2.13}$$

В силу равенства (1.2.13), можно найти функцию $\varphi^+(t)$:

$$\varphi^{+}(t) = Q_{æ-\delta-1}(t) + (t-z_0)^{æ} R^{+}(t)\left[c_1(t) - \frac{Q_{æ-\delta-1}(t)}{(t-z_0)^{æ}}\right] \qquad (2.2.14)$$

Итак, равенствами (2.2.13) и (2.2.14)-определяются общие решения данной задачи.

❖ Для $æ - \delta < 0$.

Тогда, задачу преобразуем в следующем виде:

$$\frac{\varphi^{+}(t)}{(t-z_0)^{æ}} = \frac{A_1(t)\varphi^{-}(t)}{(t-z_0)^{æ}} + \frac{c_1(t)}{(t-z_0)^{æ}},$$

здесь, $Ind\frac{A_1(t)}{(t-z_0)^{æ}} = 0$, функция $\frac{\varphi^{-}(t)}{(t-z_0)^{æ}}$ - аналитическая в области D^{-}. Операторы $R^{\pm}$ – обозначим как обращающие задачу сопряжения с коэффициентом $\frac{A_1(t)}{(t-z_0)^{æ}}$.

В этом случае, будем иметь следующее равенство:

$$\begin{aligned} \varphi^{+}(z) &= (z-z_0)^{æ} R^{+}(t)[(t-z_0)^{æ} c_1(t)], \\ \varphi^{-}(z) &= (z-z_0)^{æ} R^{-}(t)\frac{c_1(t)}{(t-z_0)^{æ}}. \end{aligned} \qquad (2.2.15)$$

Равенство (2.2.15) в точке z_0 имеет полюс порядка $|æ|$. Поэтому в общем виде, задача неразрешима, для его аннулирования, требуется $|æ - \delta|$ дополнительное условие разрешимости, следующего вида:

$$\int_{\Gamma} (t-z_0)^{-æ} R^{+}(t)\frac{c_1(t)}{(t-z_0)^{æ}}dt = 0. \qquad (2.2.16)$$

Задача (2.2.9) будет разрешима, если выполняется условие разрешимости (2.2.16). В результате, имеем следующую теорему:

ТЕОРЕМА 2.2.1.

Допустим, что $A_1(t)$*–является коэффициентом задачи Римана и она непрерывная функция,* $c(t)-$*удовлетворяет условию Гёльдера,* $IndA_1(t)=$ æ *- есть индекс задачи Римана,*

Тогда, данная задача разрешима и имеет единственное решение, при æ $-\delta=0$. *Когда* æ $-\delta>0$, *тогда рассматриваемая однородная задача сопряжения имеет* æ $-\delta$ *решений. В случае, индекс* æ $-\delta<0$, *задача будет разрешима тогда и только тогда, когда выполняется* $|$æ $-\delta|$ *условие разрешимости, вида:*

$$\int_{\Gamma}(t-z_0)^{-æ}R^{+}(t)\frac{c_1(t)}{(t-z_0)^{æ}}dt=0.$$

2.3. Граничная задача Римана для системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа с коэффициентами, имеющими особенности модульного порядка

Проведем исследование задачи с коэффициентами, имеющими особенности модульного порядка, для следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{\partial v}{\partial y}=h(x,y)\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}=g(x,y),\end{cases} \tag{2.3.1}$$

запишем систему в виде одного комплексного уравнения, таким образом:

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}}=\psi(z).$$

ЗАДАЧА R$_{2.3}$. Требуется найти аналитическую функцию: $W^{+}(z)$- регулярного решения для уравнения, $\dfrac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \psi(x,\, y)$ в области D^{+} и $W^{-}(z)$- аналитическую вне области, по следующему граничному условию:

$$W^{+}(t) = \prod_{r=1}^{\mu} \left| t - \xi_r \right|^{d_r} \cdot \prod_{j=1}^{\gamma} \left| t - \eta_j \right|^{-q_j} A_1(t) W^{-}(t) + c(t),$$

здесь $\xi_r \ (r = 1,\, 2, \ldots \mu)$, $\eta_j \ (j = 1,\, 2, \ldots \gamma)$-точки, лежащие на Г, $d_r,\ q_j \succ 0$, $A(t) = \prod_{r=1}^{\mu} \left| t - \xi_r \right|^{d_r} \cdot \prod_{j=1}^{\gamma} \left| t - \eta_j \right|^{-q_j} A_1(t) \neq 0$ и $c(t)$−из класса $H(\Gamma)$.

Решения найдены в классе функций, интегрируемых на контуре.

Так как,

$$\begin{aligned}
&\prod_{r=1}^{\mu} \left| t - \xi_r \right|^{d_r} = \prod_{r=1}^{\mu} \left(t - \xi_r \right)^{d_r} \cdot e^{-\sum_{r=1}^{\mu} i\theta_r^{(1)} d_r}, \quad \theta_r^{(1)} = \arg\left(t - \xi_r \right), \\
&\prod_{j=1}^{\gamma} \left| t - \eta_j \right|^{q_j} = \prod_{j=1}^{\gamma} \left(t - \eta_j \right)^{q_j} \cdot e^{-\sum_{j=1}^{\gamma} i\theta_j^{(2)} q_j}, \quad \theta_j^{(2)} = \arg\left(t - \eta_j \right).
\end{aligned} \tag{2.3.3}$$

Подставляя равенство (2.3.3) в (2.3.2), имеем:

$$W^{+}(t) = \prod_{r=1}^{\mu} \left(t - \xi_r \right)^{d_r} \cdot \prod_{j=1}^{\gamma} \left(t - \eta_j \right)^{-q_j} \cdot e^{i\left(\sum_{j=1}^{\gamma} \theta_j^{(2)} q_j - \sum_{r=1}^{\mu} \theta_r^{(1)} d_r \right)} \times$$

$$\times A_1(t) W^{-}(t) + c(t)$$

или

$$W^{+}(t)=\prod_{r=1}^{\mu}\left(t-\xi_r\right)^{d_r}\cdot\prod_{j=1}^{\gamma}\left(t-\eta_j\right)^{-q_j}\cdot A_2(t)W^{-}(t)+c(t), \qquad (2.3.4)$$

здесь

$$A_2(t)=A_1(t)\cdot e^{i\left(\sum_{j=1}^{\gamma}\theta_j^{(2)}q_j-\sum_{r=1}^{\mu}\theta_r^{(1)}d_r\right)}.$$

Вводя обозначения, вида:

$$\sum_{r=1}^{\mu}d_r=\sum_{r=1}^{\mu}\left(p_r^{(1)}-q_r^{(1)}\right), \qquad \sum_{j=1}^{\gamma}q_j=\sum_{j=1}^{\gamma}\left(p_j^{(2)}-q_j^{(2)}\right),$$

в последнем равенстве:

$\sum_{r=1}^{\mu}p_r^{(1)}, \quad \sum_{j=1}^{\gamma}p_j^{(2)}$ -является целым числом и $\sum_{r=1}^{\mu}q_r^{(1)}, \quad \sum_{j=1}^{\gamma}q_j^{(2)}$,

при $0<q_r^{(1)}<1, \quad 0<q_j^{(2)}<1.$

Подставляя, значение функции $W^{+}(t)=\varphi^{+}(t)+F(t)$ и $W^{-}(t)=\varphi^{-}(t)+F(t)$ в равенство (2.3.4), получим следующую задачу. Причем, $F(t)$ в последнем равенстве обладает свойствами:

1) Функция $F(t)-$ принадлежит классу $G_{\bar{z}}(D+\Gamma)$, причём $\dfrac{\partial F}{\partial \bar{z}}=\varphi(z);$

2) Функция $F(t)-$ на всей плоскости непрерывная функция;

3) Функция $F(t)-$ аналитическая вне области D^{-};

4) Функция $F(t)-$на бесконечности обращается в нуль, т.е., $F(\infty)=0$

5) $\left|F(t_2)-F(t_1)\right|<A\left|t_2-t_1\right|\cdot\lg\left|t_2-t_1\right|$, т.е. $F(t)-$удовлетворяют условию Гёльдера.

Тогда:

$$\varphi^{+}(t)+F(t)=\prod_{r=1}^{\mu}\left(t-\xi_r\right)^{d_r}\cdot\prod_{j=1}^{\gamma}\left(t-\eta_j\right)^{-q_j}A_2(t)\left[\varphi^{-}(t)+F(t)\right]+c(t),$$

или короче, имеет вид:

$$\varphi_1^{+}(t)=\prod_{r=1}^{\mu}\left(t-\xi_r\right)^{d_r}\cdot\prod_{j=1}^{\gamma}\left(t-\eta_j\right)^{-q_j}\cdot A_2(t)\cdot\varphi_1^{-}(t)+c(t),$$

здесь:

$$\varphi_1^{+}(t)=\varphi^{+}(t)+F(t),\qquad \varphi_1^{-}(t)=\varphi^{-}(t)+F(t)$$

Отсюда, используя верхнюю постановку задачи, имеем:

$$\varphi_1^{+}(t)=\frac{\prod_{r=1}^{\mu}\left(t-\xi_r\right)^{p_r^{(1)}}}{\prod_{j=1}^{\gamma}\left(t-\eta_j\right)^{p_j^{(2)}}}\prod_{r=1}^{\mu}\left(t-\xi_r\right)^{q_r^{(1)}}\cdot\prod_{j=1}^{\gamma}\left(t-\eta_j\right)^{q_j^{(2)}}\cdot A_2(t)\cdot\varphi_1^{-}(t)+c(t),$$

или

$$\varphi_1^{+}(t)=\prod_{r=1}^{\mu}\left(t-\xi_r\right)^{p_r^{(1)}}\cdot\prod_{j=1}^{\gamma}\left(t-\eta_j\right)^{-p_j^{(2)}}A_3(t)\cdot\varphi_1^{-}(t)+c(t),\qquad (2.3.5)$$

где в равенстве (2.3.5),

$$A_3(t)=\prod_{r=1}^{\mu}\left(t-\xi_r\right)^{q_r^{(1)}}\cdot\prod_{j=1}^{\gamma}\left(t-\eta_j\right)^{q_j^{(2)}}\cdot A_2(t).$$

Пусть функция $c(t)$ имеет производный произвольный порядок в точке контура ξ_r.

Полином $Q(t)$ выбираем так, чтобы он удовлетворял, следующим условиям:

$$c_1^{(i)}(\xi_r)=Q^{(i)}(\xi_r).\qquad (2.3.6)$$

В силу того, что равенство (2.3.6), вместе с ней, равенство (2.3.5), перепишем в следующем виде:

$$\frac{\varphi_1^{+}(t)-Q(t)}{\prod\limits_{r=1}^{\mu}\left(t-\xi_r\right)^{p_r^{(1)}}}=\frac{A_3(t)}{\prod\limits_{j=1}^{\gamma}\left(t-\eta_j\right)^{p_j^{(2)}}}\cdot\varphi_1^{-}(t)+\frac{c(t)-Q(t)}{\prod\limits_{r=1}^{\mu}\left(t-\xi_r\right)^{p_r^{(1)}}},$$

или

$$\frac{\varphi_1^{+}(t)-Q(t)}{\prod\limits_{r=1}^{\mu}\left(t-\xi_r\right)^{p_r^{(1)}}}=\frac{A_3(t)}{\prod\limits_{j=1}^{\gamma}\left(t-\eta_j\right)^{p_j^{(2)}}}\varphi_1^{-}(t)+c_1(t)$$

или написать коротко:

$$\varphi_2^{+}(t)=\frac{A_3(t)}{\prod\limits_{j=1}^{\gamma}\left(t-\eta_j\right)^{p_j^{(2)}}}\varphi_1^{-}(t)+c_1(t), \tag{2.3.6}$$

здесь:

$$\varphi_2^{+}(t)=\frac{\varphi_1^{+}(t)-Q(t)}{\prod\limits_{r=1}^{\mu}\left(t-\xi_r\right)^{p_r^{(1)}}}$$

и

$$c_1(t)=\frac{c(t)-Q(t)}{\prod\limits_{r=1}^{\mu}\left(t-\xi_r\right)^{p_r^{(1)}}}$$

Полагая в равенстве (2.3.6):

$$\varphi_1^{-}(z)=\frac{\prod\limits_{j=1}^{\gamma}\left(z-\eta_j\right)^{p_j^{(2)}}\cdot\varphi_2^{-}(z)}{z^{p_j^{(2)}}}, \tag{2.3.7}$$

тогда, имеем:

$$\varphi_2^+(t)=\frac{A_3(t)\varphi_2^-(t)}{t^{p_j^{(2)}}}+c_1(t).\qquad(2.3.8)$$

В равенстве (2.3.8), коэффициент задачи $A_3(t)$ – многозначная непрерывная функция. Чтобы избавиться из многозначности, приведём разрез, в результате, получим задачу с разрывными коэффициентами.

Далее, построим новые функции, следующим образом:

$$\varphi_2^+(z)=\prod_{r=1}^{\mu}(z-\xi_r)^{q_r^{(1)}}\prod_{j=1}^{\gamma}(z-\eta_j)^{q_j^{(2)}}\varphi_3^+(z),$$

$$\varphi_2^-(z)=\prod_{r=1}^{\mu}\left(\frac{z-\xi_r}{z-z_0}\right)^{q_r^{(1)}}\prod_{j=1}^{\gamma}\left(\frac{z-\eta_j}{z-z_0}\right)^{q_j^{(2)}}\varphi_3^-(z).\qquad(2.3.9)$$

После введения новых функций, граничные условия в данной задаче, принимают, следующий вид:

Итак,

$$\prod_{r=1}^{\mu}(t-\xi_r)^{q_r^{(1)}}\cdot\prod_{j=1}^{\gamma}(t-\eta_j)^{q_j^{(2)}}\cdot\varphi_3^+(t)=$$

$$=\frac{A_3(t)\cdot\prod_{r=1}^{\mu}\left(\frac{t-\xi_r}{t-z_0}\right)^{q_r^{(1)}}\cdot\prod_{j=1}^{\gamma}\left(\frac{t-\eta_j}{t-z_0}\right)^{q_j^{(2)}}\cdot\varphi_3^-(t)}{t^{p_j^{(2)}}}+c_1(t),$$

$$\varphi_3^+(t)=\frac{A_3(t)\prod_{r=1}^{\mu}(t-z_0)^{-q_r^{(1)}}\prod_{j=1}^{\gamma}(t-z_0)^{-q_j^{(2)}}\cdot\varphi_3^-(t)}{t^{p_j^{(2)}}.}+$$

$$+\frac{c_1(t)}{\prod_{r=1}^{\mu}(t-\xi_r)^{q_r^{(1)}}\prod_{j=1}^{\gamma}(t-\eta_j)^{q_j^{(2)}}}.$$

В результате, мы получили задачу, когда коэффициент задачи Римана – непрерывная функция.

$$\varphi_3^+(t) = A_4(t)\varphi_3^-(t) + c_2(t), \qquad (2.3.10)$$

где

$$A_4(t) = \frac{A_3(t)}{t^{p_j^{(2)}} \cdot \prod_{r=1}^{\mu}(t-z_0)^{q_r^{(1)}} \cdot \prod_{j=1}^{\gamma}(t-z_0)^{q_j^{(2)}}} - \text{непрерывная функция}$$

и

$$c_2(t) = \frac{c_1(t)}{\prod_{r=1}^{\mu}(t-\xi_r)^{q_r^{(1)}} \prod_{j=1}^{\gamma}(t-\eta_j)^{q_j^{(2)}}} - \text{интегрируемая функция.}$$

Используя результат работы И.Б. Симоненко [91], суммируемую функцию представим, в следующем виде:

$$\varphi_3(t) = \varphi_3^+(t) - \varphi_3^-(t),$$

где $\varphi_3^{\pm}(t)-$ предельные значения аналитической функции $\varphi_3^{\pm}(z)$ в областях $D^{\pm}$. Если предположить $\varphi_3^{\pm}(t) \in L_p(\Gamma)$ при $p>0$ и $\varphi_3^-(\infty) = 0$, то решение представленной задачи будет единственной.

Используя формулы Сохоцкого, имеем:

$$\varphi_3^+(t) = \frac{1}{2}\varphi_3(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi_3(\tau)}{\tau - t}d\tau,$$

$$\varphi_3^-(t) = -\frac{1}{2}\varphi_3(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi_3(\tau)}{\tau - t}d\tau \ .$$

В пространстве $L_p(\Gamma)$ при $p>1$, интегральный оператор $\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\Phi_3(\tau)}{\tau - t}d\tau$ ограничен:

$$\left(\int_{\Gamma}\left|\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\Phi_3(\tau)}{\tau-t}d\tau\right|^p ds\right)^{\frac{1}{p}} \le M_p\left(\int_{\Gamma}\left|\Phi_3(t)\right|^p ds\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad (2.3.11)$$

здесь M_p – постоянная, не зависящая от $\Phi_3(t)$.

Используя равенство (2.3.11) получим, следующее выражение:

$$\left\|\varphi_3^{\pm}(t)\right\|_{L_p} \le \frac{1}{2}\left\|\varphi_3(t)\right\|_{L_p} + \frac{M_p}{2}\left\|\varphi_3(t)\right\|_{L_p} = \frac{M_{p+1}}{2}\left\|\varphi_3(t)\right\|_{L_p},$$

где $\left\|\varphi_3(t)\right\|_{L_p} = M_p\left(\int_{\Gamma}\left|\varphi_3(t)\right|^p ds\right)^{\frac{1}{p}}$.

Учитывая сказанное, сформулируем задачу.

ЗАДАЧА R$_{2.3/1}$. Требуется найти функцию $\varphi_3(t)$, принадлежащую пространству L_p по контуру Γ, удовлетворяющую граничному условию (2.3.9), здесь функции $\varphi_3^+(t)$ и $\varphi_3^-(t)$ означают операторы, заданные неравенствами (2.3.10).

Пусть $A_4(t)=1$, в этом случае, получим задачу о скачке, которая в классе функции $L_p(\Gamma)$, будет, безусловно, разрешима.

Для измеримой функции, функцию $A_4(t)$, напишем в виде следующего неравенства:

$$\left|A_4(t)-1\right| \le c_2(t) < \frac{2}{1+M_p}, \qquad c_2(t)\in L_p(\Gamma) \quad (p>1).$$

При помощи $\varphi_3^{\pm}(t)$, получим следующее равенство:

$$\varphi_3^+(t) = \left|A_4(t)-1\right|\varphi_3^-(t) + c_2(t), \qquad (2.3.12)$$

здесь $\left|A_4(t)-1\right|\varphi_3^-(t)$ -является оператором из класса функций $L_p(\Gamma)$.

Действительно,

$$\left\| |A_4(t)-1| \varphi_3^-(t) \right\|_{L_p} = \left(\int_\Gamma |A_4(t)-1|^p \left|\varphi_3^-(t)\right|^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\le c_2(t) \left(\int_\Gamma \left|\varphi_3^-(t)\right|^p ds \right)^{\frac{1}{p}} = c_2(t) \frac{1+M_p}{2} \left\| \varphi_3(t) \right\|_{L_p} .$$

Используя метод принципа сжатых отображений, задача (2.3.9), безусловно, разрешима и имеет единственное решение, вида (2.3.11).

Теперь рассмотрим случай, когда $æ_0 = æ_1 = ... = æ_m = 0$ ($æ$-индекс задачи (2.3.8)).

В данном случае, $\ln A_4(t)$ –является оператором, непрерывной функции. Приблизим её к функции $f \in H$. Тогда:

$$\left| e^{(\ln A_4(t) - f)} - 1 \right| \le c_2(t) < \frac{2}{1+M_p},$$

здесь:

$$A_4(t) = \frac{\chi^+(t)}{\chi^-(t)},$$

где $\chi^{\pm}(t)$-аналитическая функция, непрерывная в области $D^{\pm} + \Gamma$.

Используя новые функции:

$$\varphi_3^{\pm}(t) = \varphi_3^{\pm}(t) \left[\chi^{\pm}(t) \right]^{-1},$$

краевое условие можно записать, в следующем виде:

$$\varphi_3^+(t) = \frac{1}{\chi^+(t)} \varphi_3^-(t) + \frac{c_2(t)}{\chi^+(t)} . \qquad (2.3.13)$$

В этом случае, когда $æ_0 = æ_1 = ... = æ_m = 0$ задача (2.3.13), безусловно, разрешима и имеет единственное решение.

❖ Если индекс задачи Римана $æ = 0$.

Вводя новые функции, имеем:

$$\overset{*}{\varphi}{}_3^{+}(z) = \prod_{k=1}^{m}(z - z_k)^{æ_k}\,\overset{*}{\varphi}{}_3^{+}(z), \qquad z_k \in D_k^-, \qquad \overset{*}{\varphi}{}_3^{-}(z) = \varphi_3^-(z),$$

получим неоднородную задачу Римана:

$$\overset{*}{\varphi}{}_3^{+}(t) = \overset{*}{A}_4(t)\,\overset{*}{\varphi}{}_3^{-}(t) + c_2(t), \tag{2.3.14}$$

где

$$\prod_{k=1}^{m}(z - z_k)^{æ_k} A_4(t) = \overset{*}{A}_4(t),$$

и

$$\prod_{k=1}^{m}(z - z_k)^{æ_k} c_2(t) = \overset{*}{c}_2(t).$$

Отметим, что

$$\overset{*}{æ}_k = \frac{1}{2\pi i}\left[\arg \overset{*}{A}_4(t)\right]_{\Gamma_k} = æ = 0, \quad k = 1, 2, ..., m,$$

$$\overset{*}{æ}_k = \frac{1}{2\pi}\left[\arg \overset{*}{A}_4(t)\right]_{\Gamma_0} = æ = 0.$$

Неоднородная задача (2.3.14), когда её индекс $æ = 0$, тогда краевое условие имеет единственное решение.

❖ Если индекс задачи Римана $æ > 0$.

Перепишем задачу, в следующем виде:

$$\frac{1}{(t - z_0)^{æ}}\left[\varphi_3^+(t) - Q_{æ}(t)\right] =$$

$$=\frac{1}{(t-z_0)^{æ}}\left[A_4(t)\varphi_3^-(t)+c_2(t)-Q_{æ}(t)\right],$$ здесь точка z_0 принадлежит в области D^+ и подберём коэффициент многочлена $Q_{æ}(t)$ функции

$$\frac{\varphi_3^+(z)-Q_{æ}(z)}{(z-z_0)^{æ}}.$$

Тогда, имеем следующую задачу:

$$\frac{\varphi_3^+(t)-Q_{æ}(t)}{\left(t-z_0\right)^{æ}}=R^+(t)\left[c_2(t)-\frac{Q_{æ}(t)}{\left(t-z_0\right)^{æ}}\right], \tag{2.3.15}$$

где индекс $Ind\,\frac{A_4(t)}{(t-z_0)^{æ}}=0$ и обозначим её через $R^{\pm}$ оператора, решающего задачу сопряжения с коэффициентом: $\frac{A_4(t)}{(t-z_0)^{æ}}$.

Отсюда, из равенства (2.3.15), найдём функцию $\varphi_3^+(t)$,

$$\varphi_3^+(t)=Q_{æ}(t)+\left(t-z_0\right)^{æ}R^+(t)\left[c_2(t)-\frac{Q_{æ}(t)}{\left(t-z_0\right)^{æ}}\right],$$

$$\varphi_3^-(t)=R^-(t)\left[c_2(t)-\frac{Q_{æ}(t)}{\left(t-z_0\right)^{æ}}\right]. \tag{2.3.16}$$

Из наших рассуждений выясняется, что решение задач (2.3.15) и (2.3.16), должны иметь вид:

❖ Пусть индекс задачи Римана $æ<0$.

Запишем задачу, в следующем виде:

$$\frac{\varphi_3^+(t)}{\left(t-z_0\right)^{æ}}=\frac{A_4(t)}{\left(t-z_0\right)^{æ}}\varphi_3^-(t)-\frac{c_2(t)}{\left(t-z_0\right)^{æ}}.$$

Итак, известно, что $Ind\dfrac{A_4(t)}{(t-z_0)^{æ}}=0$, и $\dfrac{\varphi_3^-(z)}{(t-z_0)^{æ}}$ – аналитическая функция, при этом она находится во внешней области, т.е., D^-.

Через $R^{\pm}$, снова обозначим оператора, обращающего задачу сопряжения с коэффициентом $\dfrac{A_4(t)}{(t-z_0)^{æ}}$.

Аналогично предыдущему, получим:

$$\varphi_3^+(z)=(z-z_0)^{æ}R^+(t)[(t-z_0)^{æ}c_2(t)],$$
$$\varphi_3^-(z)=(z-z_0)^{æ}R^-(t)\frac{c_2(t)}{(t-z_0)^{æ}}. \tag{2.3.17}$$

В равенстве (2.3.17), определяемой функции в точке z_0, имеет полюс порядка $|æ|$. Для решения задачи сопряжения, требуем $|æ|$ условий разрешимости, следующего вида:

$$\int_{\Gamma}(t-z_0)^{-æ}R^+(t)\left[(t-z_0)^{-æ}c_2(t)\right]dt=0. \tag{2.3.18}$$

ТЕОРЕМА 2.3.1. *Пусть в задаче* $\overset{*}{\varphi}{}_3^+(t)=\overset{*}{A}_4(t)\overset{*}{\varphi}{}_3^-(t)+c_2(t)$, $A_4(t)\neq 0$ *и является непрерывная функция,* $c_2(t)$ *из класса Гёльдера:* $(æ=IndA_4(t))$ *индекс задачи Римана.*

Тогда:

Когда индекс $æ=0$, *задача сопряжения вида:* $\overset{*}{\varphi}{}_3^+(t)=\overset{*}{A}_4(t)\overset{*}{\varphi}{}_3^-(t)+c_2(t)$ (2.3.14), *имеет единственное решение, а в случае* $æ>0$ *данная задача сопряжения имеет* æ *решений. Когда*

$æ < 0$, *задача сопряжения Римана неразрешима. Для решения задачи (2.3.14) требуется дополнительное условие разрешимости* $|æ|$*:*

$$\int\limits_{\Gamma}(t-z_0)^{-æ}R^{+}(t)\left[(t-z_0)^{-æ}c_2(t)\right]dt = 0.$$

ГЛАВА 3. КРАЕВАЯ ЗАДАЧА РИМАНА В СИНГУЛЯРНОМ СЛУЧАЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot W(z)$

3.1. Сингулярная граничная задача Римана для системы дифференциальных уравнений эллиптического вида в случае, когда коэффициент характеризует особенность аналитического порядка

В этом параграфе диссертационной работы изучается сингулярная граничная задача Римана для системы дифференциальных эллиптических уравнений в случае, когда коэффициент имеет особенность аналитического характера, т.е. для:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = a \cdot (u + \frac{b}{a} \cdot v) \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = a \cdot (u + v) \end{cases},$$

настоящую систему напишем в виде комплексных переменных таким образом:

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot W(z). \tag{3.1.1}$$

Решение этой задачи, как показал И.Н. Векуа см. [15], в виде:

$$W(z) = \varphi(z) \cdot e^{\omega(z)}, \tag{3.1.2}$$

где, $\omega(z) = -\frac{1}{\pi} \iint\limits_D \frac{A(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma$ -есть аналитическая функция в области D, здесь $\omega(z)$ имеет такие же свойства 1-5, функции $E(z)$ из первого параграфа, главы 2.

ЗАДАЧА R$_{3.1}$. Требуется найти аналитические функции: $W^{\pm}(x,\ y)$, являющие регулярным решением уравнения: $\dfrac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z)\cdot W(z)$ принадлежащими к областям $D^{\pm}$, удовлетворяет следующему условию:

$$W^{+}(t) = \prod_{r=1}^{\mu}(t-\xi_r)^{d_r}\cdot\prod_{j=1}^{\gamma}(t-\eta_j)^{-q_j}\cdot A_1(t)\cdot W^{-}(t)+c(t),$$

здесь $A_1(t)$ – непрерывная функция, $c(t)$ – свободный член задачи из класса Гёльдера, ξ_r,η_j – различные точки контура, $d_r,\ q_j$ – положительные числа.

Используя значения функции: $W^{+}(t)=\varphi^{+}(t)\cdot e^{\omega(t)}$, $W^{-}(t)=\varphi^{-}(t)\cdot e^{\omega(t)}$, краевое условие перепишем, в следующем виде:

$$\varphi^{+}(t)\cdot e^{\omega(t)} = \frac{\prod_{r=1}^{\mu}(t-\xi_r)^{d_r}}{\prod_{j=1}^{\gamma}(t-\eta_j)^{q_j}} A_1(t)\varphi^{-}(t)e^{\omega(t)}+c(t), \qquad (3.1.4)$$

или

$$\varphi^{+}(t) = \prod_{r=1}^{\mu}(t-\xi_r)^{d_r}\cdot\prod_{j=1}^{\gamma}(t-\eta_j)^{-q_j} A_1(t)\varphi^{-}(t)+\frac{c(t)}{e^{\omega(t)}}. \qquad (3.1.5)$$

Функция $c(t)e^{-\omega(t)}\in H$, по известной теореме Ф.Д.Гахова, представим в виде:

$$\frac{c(t)}{e^{\omega(t)}} = \psi^{+}(t)-\psi^{-}(t), \qquad (3.1.6)$$

здесь:

$$\psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{c(t)e^{-\omega(t)}}{t-z}dz.$$

Тогда, подставляя равенство (3.1.6) в (3.1.5), задача преобразуется в виде:

$$\varphi^{+}(t)-\psi^{+}(t)=\prod_{r=1}^{\mu}(t-\xi_r)^{d_r}\cdot\prod_{j=1}^{\gamma}(t-\eta_j)^{-q_j}A_1(t)\varphi^{-}(t)-\psi^{-}(t).$$

Подберём коэффициент полинома $Q(t)$ так, чтобы он удовлетворял следующему условию:

$$\psi^{-(l)}(\xi_r)=Q^{(l)}(\xi_r),\qquad (r=1,2,...,\mu\quad (l=0,1,...,d_{r-1})),\tag{3.1.7}$$

Используя данный полином, преобразуем граничные условия, в таком виде:

$$\varphi^{+}(t)-\psi^{+}(t)-Q(t)=\frac{\prod_{r=1}^{\mu}(t-\xi_r)^{d_r}}{\prod_{j=1}^{\gamma}(t-\eta_j)^{q_j}}A_1(t)\varphi^{-}(t)-\psi^{-}(t)-Q(t),$$

$$\varphi^{+}(t)-\psi^{+}(t)-Q(t)=\frac{\prod_{r=1}^{\mu}(t-\xi_r)^{d_r}}{\prod_{j=1}^{\gamma}(t-\eta_j)^{q_j}}A_1(t)\varphi^{-}(t)-\prod_{r=1}^{\mu}(t-\xi_r)^{d_r}\psi_1^{-}(t).$$

Разделив, обе стороны, полученной краевой задачи на $\prod_{r=1}^{\mu}(t-\xi_r)^{d_r}$, имеем:

$$\frac{\varphi^{+}(t)-\psi^{+}(t)-Q(t)}{\prod_{r=1}^{\mu}(t-\xi_r)^{d_r}}=\frac{A_1(t)}{\prod_{j=1}^{\gamma}(t-\eta_j)^{q_j}}\varphi^{-}(t)-\psi_1^{-}(t),$$

или

$$\varphi_1^{+}(t)=\frac{A_1(t)}{\prod\limits_{j=1}^{\gamma}(t-\eta_j)^{q_j}}\varphi^{-}(t)-\psi_1^{-}(t). \qquad (3.1.8)$$

Полагаем в равенстве (3.1.8):

$$\varphi^{-}(z)=\prod_{j=1}^{\gamma}(t-\eta_j)^{q_j}z^{-q}\varphi_1^{-}(z), \qquad q=\prod_{j=1}^{\gamma}q_j. \qquad (3.1.9)$$

Подставляя, равенство (3.1.9) в краевое условие (3.1.8), имеем:

$$\varphi_1^{+}(t)=t^{-q}A_1(t)\varphi_1^{-}(t)-\psi_1^{-}(t). \qquad (3.1.10)$$

В результате, мы получили, задачу изученную И.Б.Симоненко, с непрерывными коэффициентами.

Так как, наша функция суммируема, в данной области, поэтому её можно представить в следующем виде:

$$\Phi_1(t)=\Phi_1^{+}(t)-\Phi_1^{-}(t) \qquad (3.1.11)$$

такое представление будет единственным, если учесть, что

$$\varphi_1^{\pm}(t)\in L_p(\Gamma), \quad p>0 \quad \text{и} \quad \varphi_1^{-}(\infty)=0.$$

Предельные значения функции $\varphi_1^{\pm}(t)$, определяются по формуле Сохоцкого:

$$\varphi_1^{+}(t)=\frac{1}{2}\varphi_1(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi_1(\tau)}{\tau-t}d\tau,$$

$$\varphi_1^{-}(t)=-\frac{1}{2}\varphi_1(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi_1(\tau)}{\tau-t}d\tau, \qquad (3.1.12)$$

в равенства (3.1.12), $\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\varphi_1(\tau)}{\tau - t}d\tau$ – является интегральный оператор в норме пространства L_p по контуру Γ, в случае $p > 1$ есть ограниченный оператор, т.е.

$$\left(\int\limits_{\Gamma}\left|\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\varphi_1(\tau)}{\tau - t}d\tau\right|^p ds\right)^{\frac{1}{p}} \le M_p\left(\int\limits_{\Gamma}|\varphi(t)|^p ds\right)^{\frac{1}{p}},$$

где M_p - постоянное число.

Отсюда, имеем:

$$\left\|\varphi_1^{\pm}(t)\right\|_{L_p} \le \frac{1}{2}\left\|\varphi_1(t)\right\|_{L_p} + \frac{M_p}{2}\left\|\varphi_1(t)\right\|_{L_p} = \frac{M_p + 1}{2}\left\|\varphi_1(t)\right\|_{L_p},$$

здесь:

$$\left\|\varphi_1(t)\right\|_{L_p} = M_p\left(\int\limits_{\Gamma}|\varphi_1(t)|^p ds\right)^{\frac{1}{p}}.$$

В результате, можно сформулировать граничную задачу, следующим образом:

ЗАДАЧА R$_{3.1/1}$. Определить функцию: $\varphi_1(t) \in L_p(\Gamma)$ и удовлетворяющую граничному условию (3.1.10), если функции $\varphi_1^{+}(t)$, $\varphi_1^{-}(t)$ даются равенствами (3.1.12).

В случае, когда $A_1(t) \equiv 1$ считается задача о скачке и она, безусловно, разрешима в пространстве L_p на контуре Γ.

В случае, когда $A_1(t)$-измеримая функция и для неё выполняется следующее неравенство:

$$\left|A_1(t)-1\right| \le \psi_1^{-}(t) < \frac{2}{1+M_p}, \qquad \psi_1(t) \in L_p(\Gamma), \qquad (p>1).$$

Тогда, граничные условия можно преобразовать, в следующем виде:

$$\varphi_1^{+}(t) = [A_1(t)-1]\varphi_1^{-}(t) - \psi_1(t), \tag{3.1.13}$$

где оператор $[A_1(t)-1]\varphi_1^{-}(t)$ лежит в пространстве $L_p(\Gamma)$.

На самом деле:

$$\left\|A_1(t)-1\right\|A_1^{-}(t)\Big\|_{L_p} = \left(\int_{\Gamma}\left|A_1(t)-1\right|^p \left|\varphi^{-}(t)\right|^p ds\right)^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\le \psi_1^{-}(t)\left(\int_{\Gamma}\left|\varphi^{-}(t)\right|^p ds\right)^{\frac{1}{p}} = \psi_1 \frac{1+M_p}{2}\left\|\varphi_1(t)\right\|_{L_p}.$$

Используя метод, принципа сжатых отображений, задача имеет единственное решение.

Пусть индекс задачи $æ_0 = æ_1 = ... = æ_m = 0$.

В случае, когда $\ln A_1(t)$-является непрерывной функцией. Теперь можем приблизить её к функции $f \in H$, так, чтобы она удовлетворяла, условию:

$$\left|e^{(\ln A_1(t)-f)}-1\right| \le \psi_1^{-}(t) < \frac{2}{1+M_p}, \quad A_1(t) = \frac{\chi^{+}(t)}{\chi^{-}(t)},$$

где $\chi^{+}(t)$ и $\chi^{-}(t)$ - соответственно, аналитические функции в областях D^{+} и D^{-}.

Введём новое обозначения функций:

$$\varphi_2^{\pm}(t) = \frac{\varphi_1^{\pm}(t)}{\chi^{\pm}(t)}$$

Тогда, равенство (3.1.10), принимает вид:

$$\chi^+(t)\cdot\varphi_2^+(t) = \frac{t^{-q}A_1(t)}{\chi^-(t)}\varphi_2^+(t) - \frac{\psi_1^-(t)}{\chi^+(t)}. \tag{3.1.14}$$

В случае, когда индекс задачи Римана $æ_0 = æ_1 = ... = æ_m = 0$, тогда равенство (3.1.14), безусловно, разрешимо.

❖ Пусть, теперь индекс: $æ - d - 1 = 0$.

Вводим новые неизвестные функции в равенство (3.1.10):

$$\overset{*}{\varphi}_2{}^+(\mathrm{z}) = \prod_{k=1}^{m}(z - z_k)^{æ_k}\varphi_1^+(z), \quad z_k \in D_k^-, \quad \overset{*}{\varphi}_2{}^-(z) = \overset{*}{\varphi}_1{}^-(z),$$

тогда, перейдём к задаче:

$$\overset{*}{\varphi}_1{}^+(t) = A_1^*(t)\overset{*}{\varphi}_1{}^-(t) + \psi_1^*(t) \tag{3.1.15}$$

где

$$A_1^*(t) = \prod_{k=1}^{m}(z - z_k)^{æ_k}A_1(t), \quad \psi_1^*(\mathrm{t}) = \prod_{k=1}^{m}(z - z_k)^{æ_k}\psi_1^-(t).$$

Отметим, что

$$æ_k^* = \frac{1}{2\pi i}\left[\arg A^*(t)\right]_{\Gamma_k} = æ = 0, \quad k = 1, 2, ..., m,$$

$$æ_k^* = \frac{1}{2\pi}\left[\arg A_1^*(t)\right]_{\Gamma_0} = æ = 0.$$

В случае, когда индекс, $æ = 0$, тогда равенство (3.1.15), имеет единственное решение.

❖ Если $æ-d-1>0$,

тогда преобразуем задачу (3.1.10), в следующем виде:

$$\frac{\varphi_1^{+}(t)}{(t-z_0)^{æ}}-\frac{Q_{æ-d-1}(t)}{(t-z_0)^{æ}}=$$

$$=\frac{t^{-q}A_1(t)\varphi_1^{-}(t)}{(t-z_0)^{æ}}-\frac{\psi_1^{-}(t)}{(t-z_0)^{æ}}-\frac{Q_{æ\text{-}d\text{-}1}(t)}{(t-z_0)^{æ}},$$

здесь $z_0\in D^{+}$, $Q_{æ-d-1}(t)$-полином в степени не выше $æ-d-1$.

В этом случае, функция $\dfrac{\varphi_1^{+}(z)-Q_{æ-d-1}(z)}{(z-z_0)^{æ}}$ не имеет полюса в точке z_0. Заметим, что функция $Ind\dfrac{A_1(t)}{(t-z_0)^{æ}}=0$ имеет нулевой индекс. Отметим, что $R^{\pm}$, решение задачи сопряжения записывается со следующими коэффициентами, вида: $\dfrac{A_1(t)}{(t-z_0)^{æ}}$.

В этом случае, имеем следующие равенства:

$$\frac{\varphi_1^{+}(t)-Q_{æ-d-1}(t)}{(t-z_0)^{æ}}=R^{+}(t)\left[\psi_1^{-}(t)-\frac{Q_{æ-d-1}(t)}{(t-z_0)^{æ}}\right],$$

$$\varphi^{-}(t)=R^{-}(t)\left[\psi_1^{-}(t)-\frac{Q_{æ-d-1}(t)}{(t-z_0)^{æ}}\right]. \qquad (3.1.16)$$

Отсюда, можно найти:

$$\varphi^{+}(t)=Q_{æ-d-1}(t)+(t-z_0)^{æ}R^{+}(t)\left[\psi_1^{-}(t)-\frac{Q_{æ-d-1}(t)}{(t-z_0)^{æ}}\right], \qquad (3.1.17)$$

Итак, мы получили решение задачи, в виде:

❖ Пусть теперь индекс задачи Римана $æ - d - 1 < 0$.

Запишем задачу в виде:

$$\frac{\varphi_1^{+}(t)}{(t-z_0)^{æ}} = \frac{A_1(t)\varphi_1^{-}(t)}{(t-z_0)^{æ}} - \frac{\psi_1^{-}(t)}{(t-z_0)^{æ}}.$$

Очевидно, что $Ind\,\frac{A_1(t)}{(t-z_0)^{æ}} = 0$, а $\frac{\varphi_1^{-}(t)}{(t-z_0)^{æ}}$-аналитическая функция в области D^{-}. Обозначим снова оператора, обращающегося к задаче сопряжения через $R^{\pm}$.

Тогда, получим:

$$\varphi_1^{+}(z) = (z-z_0)^{æ} R^{+}(t)\left[(t-z_0)^{æ}\psi_1^{-}(t)\right],$$

$$\varphi_1^{-}(z) = (z-z_0)^{æ} R^{-}(t)\left[\frac{\psi_1^{-}(t)}{(t-z_0)^{æ}}\right]. \qquad (3.1.18)$$

В общем виде, функция, определяющая равенством (3.1.18) в точке z_0, имеет полюс порядка $|æ|$. Для его аннулирования, должно выполнять $|æ - d - 1|$ условие разрешимости, вида:

$$\int_{\Gamma} \frac{R^{+}(t)}{(t-z_0)^{æ}}\left[\frac{\psi_1^{-}(t)}{(t-z_0)^{æ}}\right]dt = 0. \qquad (3.1.19)$$

Итак, для этого случая, имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3.1.1.

Когда индекс задачи Римана $æ - d - 1 = 0$*, тогда, краевая задача:* $\overset{*}{\varphi}_1^{+}(t) = A_1^{*}(t)\overset{*}{\varphi}_1^{-}(t) + \psi_1^{*}(t)$ *в классе функций, ограниченных на контуре Г, имеет единственное решение.*

Когда: $æ - d - 1 > 0$, *тогда искомая задача имеет* $æ - d - 1$ *решение. Тогда, при индексе:* $æ - d - 1 < 0$, *задача Римана неразрешима. Для её разрешимости требуется* $|æ - d - 1|$ *дополнительное условие, вида:* $\int\limits_{\Gamma} \frac{R^{+}(t)}{(t - z_0)^{æ}} \left[\frac{\psi_1^{-}(t)}{(t - z_0)^{æ}} \right] dt = 0$.

3.2. Краевая задача Римана для дифференциальных уравнений эллиптического типа, когда коэффициент характеризует особенности нулей и полюсов сопряженно–аналитического вида

В данном случае, изучаем краевую задачу Римана для дифференциальных уравнений эллиптического типа, когда коэффициент характеризует нули и полюса сопряженно-аналитического вида, т.е. для обобщённой системы Коши-Римана:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial v}{\partial y} = a \cdot u + b \cdot v \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = a \cdot u + a \cdot v \end{cases}.$$

Эту систему в комплексной форме, напишем в виде:

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot W(z). \tag{3.2.1}$$

Следуя методу исследования И.Н. Векуа [91], общее представление всех регулярных в области D решений (3.2.1), запишем в виде:

$$W(z) = \varphi(z) \cdot e^{\omega(z)},$$

где $\varphi(z)$ – аналитическая функция в области D и $\omega(z) = -\frac{1}{\pi} \iint\limits_{D} \frac{A(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma$ – является непрерывной функцией и для неё существуют такие свойства:

1) $\omega(z)-$из класса $C_{\bar{z}}$;

2) $\omega(z)-$ во всей плоскости непрерывной функции;

3) $\omega(z)-$ аналитические внутри области D;

4) $\omega(z)-$ на бесконечности исчезает $\omega(\infty)=0$;

5) $|\omega(z_2)-\omega(z_1)|<A|z_2-z_1|\cdot\ln|z_2-z_1|$, т.е. функция $\omega(z)\in H$,

$\omega(z)-$является решением уравнения (3.2.1), это следует из свойства (1).

ЗАДАЧА R$_{3.2}$. Необходимо найти пару аналитических функций: $W^{\pm}(x,\ y)$, регулярного решения дифференциального уравнения, вида, $\dfrac{\partial W}{\partial \bar{z}}=A(x,\ y)\cdot W(x,\ y)$, лежащего в областях $D^{\pm}$, которые удовлетворяют следующему граничному условию:

$$W^{+}(t)=\prod_{r=1}^{\mu}(\overline{t-\xi_r})^{d_r}\cdot\prod_{j=1}^{\gamma}(\overline{t-\eta_j})^{-q_j}\cdot A_1(t)W^{-}(t)+c(t), \qquad (3.2.2)$$

здесь $A_1(t)=\prod_{r=1}^{\mu}(\overline{t-\xi_r})^{d_r}\cdot\prod_{j=1}^{\gamma}(\overline{t-\eta_j})^{-q_j}\neq 0$ и непрерывная функция, $c(t)\in H$, $\xi_r,\ \eta_j$ $-$точки, лежащие на контуре Γ, $d_r,\ q_j$ $-$целые положительные числа.

$$\sum_{r=1}^{\mu}d_r=d\,,\ \sum_{j=1}^{\gamma}q_j=q\,.$$

Преобразуем:

$$\prod_{r=1}^{\mu}\left(\overline{t-\xi_r}\right)^{d_r}\ \text{ и }\ \prod_{j=1}^{\gamma}\left(\overline{t-\eta_j}\right)^{q_j}$$

в следующем виде:

$$\prod_{r=1}^{\mu}\left(\overline{t-\xi_r}\right)^{d_r} = \prod_{r=1}^{\mu}\left(t-\xi_r\right)^{d_r}\cdot e^{-2i\sum\limits_{r=1}^{\mu}\theta_r^{(1)}d_r}, \quad \theta_r^{(1)}=\arg\left(t-\xi_r\right),$$
$$\prod_{j=1}^{\gamma}\left(\overline{t-\eta_j}\right)^{q_j} = \prod_{j=1}^{\gamma}\left(t-\eta_j\right)^{q_j}\cdot e^{-2i\sum\limits_{j=1}^{\gamma}\theta_j^{(2)}q_j}, \quad \theta_j^{(2)}=\arg\left(t-\eta_j\right). \tag{3.2.3}$$

Подставляя равенство (3.2.3) в равенство (3.2.2), отсюда, имеем:

$$W^+(t)=\frac{\prod\limits_{r=1}^{\mu}\left(t-\xi_r\right)^{d_r}}{\prod\limits_{j=1}^{\gamma}\left(t-\eta_j\right)^{q_j}}A_1(t)\cdot e^{2i\left(\sum\limits_{j=1}^{\gamma}\theta_j^{(2)}q_j-\sum\limits_{r=1}^{\mu}\theta_r^{(1)}d_r\right)}\cdot W^-(t)+c(t), \tag{3.2.4}$$

или

$$W^+(t)=\frac{\prod\limits_{r=1}^{\mu}\left(t-\xi_r\right)^{d_r}}{\prod\limits_{j=1}^{\gamma}\left(t-\eta_j\right)^{q_j}}A_2(t)W^-(t)+c(t), \tag{3.2.5}$$

где в равенстве (3.2.5)

$$A_2=A_1(t)\cdot e^{2i\left(\sum\limits_{j=1}^{\gamma}\theta_j^{(2)}q_j-\sum\limits_{r=1}^{\mu}\theta_r^{(1)}d_r\right)} - \text{непрерывная функция.}$$

Подставляя значения функции:

$$W^+(t)=\varphi^+(t)\cdot e^{\omega(t)},\ W^-(t)=\varphi^-(t)\cdot e^{\omega(t)},$$

в равенстве (3.2.5), получим:

$$\varphi^+(t)\cdot e^{\omega(t)}=\frac{\prod\limits_{r=1}^{\mu}\left(t-\xi_r\right)^{d_r}}{\prod\limits_{j=1}^{\gamma}\left(t-\eta_j\right)^{q_j}}A_2(t)e^{\omega(t)}\varphi^-(t)+c(t),$$

или

$$\varphi^{+}(t)=\frac{\prod\limits_{r=1}^{\mu}\left(t-\xi_r\right)^{d_r}}{\prod\limits_{j=1}^{\gamma}\left(t-\eta_j\right)^{q_j}}A_2(t)\varphi^{-}(t)+\frac{c(t)}{e^{\omega(t)}},$$

или

$$\varphi^{+}(t)=\frac{\prod\limits_{r=1}^{\mu}\left(t-\xi_r\right)^{d_r}}{\prod\limits_{j=1}^{\gamma}\left(t-\eta_j\right)^{q_j}}A_2(t)\varphi^{-}(t)+c_1(t),$$

где $c_1(t)=c(t)\cdot e^{-\omega(t)}$.

Пусть функция $c_1(t)$ в окрестности точки $t=\xi_r$, дифференцируемая $d_{r-1}-$раз.

Построим полином $Q(t)$, удовлетворяющий следующему равенству:

$$c_1^{(l)}(\xi_r)=Q^{(l)}(\xi_r)\qquad (r=1,2,...,\mu,\ \ l=0,1,...,d_{r-1}). \qquad (3.2.7)$$

Используя, построенный полином, граничные условия перепишем, в следующем виде:

$$\varphi^{+}(t)-Q(t)=\frac{\prod\limits_{r=1}^{\mu}\left(t-\xi_r\right)^{d_r}}{\prod\limits_{j=1}^{\gamma}\left(t-\eta_j\right)^{q_j}}A_2(t)\varphi^{-}(t)+c_1(t)-Q(t),$$

или

$$\varphi^{+}(t)-Q(t)=\frac{\prod\limits_{r=1}^{\mu}\left(t-\xi_r\right)^{d_r}}{\prod\limits_{j=1}^{\gamma}\left(t-\eta_j\right)^{q_j}}A_2(t)\varphi^{-}(t)+\prod_{r=1}^{\mu}\left(t-\xi_r\right)^{d_r}c_2(t),$$

или

$$\varphi_1^{+}(t)=\frac{A_2(t)}{\prod\limits_{j=1}^{\gamma}\left(t-\eta_j\right)^{q_j}}\varphi^{-}(t)+c_2(t), \qquad (3.2.8)$$

где $\varphi_1^{+}(t)=\dfrac{\varphi^{+}(t)-Q(t)}{\prod\limits_{j=1}^{\gamma}\left(t-\eta_j\right)^{q_j}}$.

Полагая в (3.2.8):

$$\varphi^{-}(z)=\prod_{j=1}^{\gamma}\left(z-\eta_j\right)^{q_j}\cdot z^{-q}\varphi_1^{-}(z), \quad q=\sum_{j=1}^{\gamma}q_j\,. \qquad (3.2.9)$$

Подставляя (3.2.9) в (3.2.8), получим:

$$\varphi_1^{+}(t)=t^{-q}A_2(t)\varphi_1^{-}(t)+c_2(t). \qquad (3.2.10)$$

Равенство (3.2.10) является задачей Римана с непрерывными коэффициентами.

Подсчитаем ее индекс:

$$Ind\,t^{-q}A_2(t)=Ind\,t^{-q}+Ind\,A_1(t)+Ind\,e^{\left(2i\sum\limits_{j=1}^{\gamma}\theta_j^{(2)}q_j-2i\sum\limits_{r=1}^{\mu}\theta_r^{(1)}d_r\right)}=$$

$$=-q+æ+q-d=æ-d\,.$$

При этом, для задачи (3.2.10) применима теорема И.Б. Симоненко.

ТЕОРЕМА 3.2.1. *Пусть в задаче:* $\varphi_1^+(t) = t^{-q} A_2(t)\varphi_1^-(t) + c_2(t)$, *а вместо равенства:* $\dfrac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z)\cdot W(z)$, *где* $A_2(t)$ *– отличная от нуля и непрерывная функция,* $c_2(t)$ *– из класса Гёльдера, она дифференцируема в любом порядке.*

Тогда, имеет место следующий результат:

В случае, индекса $æ - d = 0$, *рассматриваемая граничная задача сопряжения Римана имеет единственное решение. В случае,* $æ - d > 0$, *задача сопряжения Римана имеет* $æ - d$ *решений в классе, ограниченном на контуре.*

3.3. Краевая задача Римана для системы уравнений эллиптического типа с коэффициентом, обладающим особенностями модульного характера

Рассматривается краевая задача Римана для системы уравнений эллиптического типа, когда коэффициент характеризуется особенности модульного порядка, т.е. для системы:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial v}{\partial y} = a\cdot u + b\cdot v, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = a\cdot u + a\cdot v, \end{cases}$$

или в комплексной форме:

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z)\cdot W(z). \tag{3.3.1}$$

Следуя методам исследования И.Н. Векуа, [91], решение этой системы можно записать, в следующем виде:

$W(z) = \varphi(z) \cdot e^{\omega(z)}$, здесь $\varphi(z)$ – есть аналитическая функция в области D, $\omega(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_D \frac{A(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma$, где $\omega(z)$ – обладает свойством, как в предыдущем, параграфе:

ЗАДАЧА R$_{3.3}$. Необходимо найти пару аналитических функций $W^{\pm}(x, y)$, регулярного решения уравнения, вида: $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(x, y) \cdot W(x, y)$ принадлежащей внутри области и вне области D, удовлетворяющую граничному условию, вида:

$$W^{+}(t) = \prod_{r=1}^{\mu} \left| t - \xi_r \right|^{d_r} \cdot \prod_{j=1}^{\gamma} \left| t - \eta_j \right|^{-q_j} A_1(t) W^{-}(t) + c(t), \qquad (3.3.2)$$

здесь: ξ_r, $\eta_j \in \Gamma$, d_r, q_j – произвольные числа. Коэффициент задачи $A(t) = \prod_{r=1}^{\mu} \left| t - \xi_r \right|^{d_r} \cdot \prod_{j=1}^{\gamma} \left| t - \eta_j \right|^{-q_j} \neq 0$ и непрерывная функция, $c(t)$ – из класса Н(Г). В искомой задаче Римана, решения найдены в классе функций, интегрируемых на контуре Г.

При помощи равенства (3.3.2), предыдущее краевое условие, преобразуется в виде:

$$W^{+}(t) = \varphi^{+}(t) \cdot e^{\omega(t)} \text{ и } W^{-}(t) = \varphi^{-}(t) \cdot e^{\omega(t)},$$

$$\varphi^{+}(t) \cdot e^{\omega(t)} = \frac{\prod_{r=1}^{\mu} \left| t - \xi_r \right|^{d_r}}{\prod_{j=1}^{\gamma} \left| t - \eta_j \right|^{q_j}} A_1(t) \varphi^{-}(t) \cdot e^{\omega(t)} + c(t), \qquad (3.3.3)$$

Очевидно, что имеют место, следующие равенства:

$$\prod_{r=1}^{\mu}\left|t-\xi_r\right|^{d_r}=\prod_{r=1}^{\mu}\left(t-\xi_r\right)^{d_r}\cdot e^{-2\sum\limits_{r=1}^{\mu} i\theta_r^{(1)}d_r},\quad \theta_r^{(1)}=\arg(t-\xi_r),$$

$$\prod_{j=1}^{\gamma}\left|t-\eta_j\right|^{q_j}=\prod_{j=1}^{\gamma}\left(t-\eta_j\right)^{q_j}\cdot e^{-2\sum\limits_{j=1}^{\gamma} i\theta_j^{(2)}q_j},\quad \theta_j^{(2)}=\arg(t-\eta_j). \tag{3.3.4}$$

Теперь подставляем равенство (3.3.4) в равенство (3.3.3) отсюда, получим:

$$\varphi^{+}(t)=\frac{\prod\limits_{r=1}^{\mu}\left(t-\xi_r\right)^{d_r}}{\prod\limits_{j=1}^{\gamma}\left(t-\eta_j\right)^{q_j}}A_1(t)\cdot e^{2i\left(\sum\limits_{j=1}^{\gamma}\theta_j^{(2)}q_j-\sum\limits_{r=1}^{\mu}\theta_r^{(1)}d_r\right)}\cdot\varphi^{-}(t)+\frac{c(t)}{e^{\omega(t)}},$$

или

$$\varphi^{+}(t)=\frac{\prod\limits_{r=1}^{\mu}\left(t-\xi_r\right)^{d_r}}{\prod\limits_{j=1}^{\gamma}\left(t-\eta_j\right)^{q_j}}A_2(t)\cdot\varphi^{-}(t)+c_1(t), \tag{3.3.5}$$

где

$$A_2(t)=A_1(t)\cdot e^{2i\left(\sum\limits_{j=1}^{\gamma}\theta_j^{(2)}q_j-\sum\limits_{r=1}^{\mu}\theta_r^{(1)}d_r\right)},\qquad c_1(t)=e^{-\omega(t)}c(t).$$

Введём следующее обозначение:

$$\sum_{r=1}^{\mu}d_r=\sum_{r=1}^{\mu}\left(p_r^{(1)}-q_r^{(1)}\right),\qquad \sum_{j=1}^{\gamma}q_j=\sum_{j=1}^{\gamma}\left(p_j^{(2)}-q_j^{(2)}\right),$$

$\sum\limits_{r=1}^{\mu}p_r^{(1)},\quad \sum\limits_{j=1}^{\gamma}p_j^{(2)}$ -натуральные числа,

а дробную часть обозначим, следующим образом:

$$\sum_{r=1}^{\mu}q_r^{(1)},\ \sum_{j=1}^{\gamma}q_j^{(2)},\quad 0<q_r^{(1)}<1,\quad 0<q_j^{(2)}<1.$$

Преобразуем равенство (3.3.5), в виде:

$$\varphi^{+}(t)=\frac{\prod\limits_{r=1}^{\mu}\left(t-\xi_r\right)^{p_r^{(1)}}}{\prod\limits_{j=1}^{\gamma}\left(t-\eta_j\right)^{p_j^{(2)}}}A_3(t)\cdot\varphi^{-}(t)+c_1(t), \qquad (3.3.6)$$

где

$$A_3\left(t\right)=\frac{A_2(t)\cdot\prod\limits_{r=1}^{\mu}\left(t-\xi_r\right)^{p_r^{(1)}}}{\prod\limits_{j=1}^{\gamma}\left(t-\eta_j\right)^{p_j^{(2)}}}.$$

В краевом условии (3.3.6), функция

$$A_3(t)=\frac{A_2(t)\cdot\prod\limits_{r=1}^{\mu}\left(t-\xi_r\right)^{p_r^{(1)}}}{\prod\limits_{j=1}^{\gamma}\left(t-\eta_j\right)^{p_j^{(2)}}} - \text{ есть многозначная функция.}$$

Методом решения задачи (3.3.6) является задача с непрерывными коэффициентами. Так как коэффициент этой задачи - многозначная функция, проведём разрез; в результате, получим задачу с разрывными коэффициентами.

Итак, в результате, мы получили однозначную функцию. Введём новые функции, следующего вида:

$$\varphi^{+}(z)=\prod_{r=1}^{\mu}\left(z-\xi_r\right)^{q_r^{(1)}}\cdot\prod_{j=1}^{\gamma}\left(z-\eta_j\right)^{q_j^{(2)}}\cdot\varphi_1^{+}(z),$$

$$\varphi^{-}(z)=\prod_{r=1}^{\mu}\left(\frac{z-\xi_r}{z-z_0}\right)^{q_r^{(1)}}\cdot\prod_{j=1}^{\gamma}\left(\frac{z-\eta_j}{z-z_0}\right)^{q_j^{(2)}}\cdot\varphi_1^{-}(z).$$

Граничные условия можно преобразовать, в виде:

$$\prod_{r=1}^{\mu}(t-\xi_r)^{q_r^{(1)}}\prod_{j=1}^{\gamma}(t-\eta_j)^{q_j^{(2)}}\cdot\varphi_1^{+}(z)=\frac{\prod_{r=1}^{\mu}(t-\xi_r)^{p_r^{(1)}}}{\prod_{j=1}^{\gamma}(t-\eta_j)^{p_j^{(2)}}}\times$$

$$\times A_3(t)\prod_{r=1}^{\mu}\left(\frac{t-\xi_r}{t-z_0}\right)^{q_r^{(1)}}\prod_{j=1}^{\gamma}\left(\frac{t-\eta_j}{t-z_0}\right)^{q_j^{(2)}}\varphi^{-}(t)+c_1(t),$$

или

$$\varphi_1^{+}(t)=\frac{A_3(t)\varphi^{-}(t)\cdot\prod_{r=1}^{\mu}(t-\xi_r)^{p_r^{(1)}}}{\prod_{j=1}^{\gamma}(t-\eta_j)^{p_j^{(2)}}\cdot\prod_{r=1}^{\mu}(t-z_0)^{q_r^{(1)}}\cdot\prod_{j=1}^{\gamma}(t-z_0)^{q_j^{(2)}}}+$$

$$+\frac{c_1(t)}{\prod_{r=1}^{\mu}(t-\xi_r)^{q_r^{(1)}}\cdot\prod_{j=1}^{\gamma}(t-\eta_j)^{q_j^{(2)}}},$$

или

$$\varphi_1^{+}(t)=\frac{\prod_{r=1}^{\mu}(t-\xi_r)^{p_r^{(1)}}}{\prod_{j=1}^{\gamma}(t-\eta_j)^{p_j^{(2)}}}A_4(t)\varphi^{-}(t)+c_2(t), \qquad (3.3.7)$$

здесь в равенстве (3.3.7), коэффициент задачи и её свободный член,

$$A_4(t)=\frac{A_3(t)}{\prod_{r=1}^{\mu}(t-z_0)^{q_r^{(1)}}\prod_{j=1}^{\gamma}(t-z_0)^{q_j^{(2)}}},$$

$$c_2(t)=\frac{c_1(t)}{\prod_{r=1}^{\mu}(t-\xi_r)^{q_r^{(1)}}\cdot\prod_{j=1}^{\gamma}(t-\eta_j)^{q_j^{(2)}}},$$

где $A_4(t)=\dfrac{A_3(t)}{\prod_{r=1}^{\mu}(t-z_0)^{q_r^{(1)}}\prod_{j=1}^{\gamma}(t-z_0)^{q_j^{(2)}}}$ – непрерывная функция и $c_2(t)$ – интегрируемая функция, её также можно записать в следующем виде:

$$c_2(t) = \psi^+(t) - \psi^-(t), \qquad \psi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{c_2(\tau)}{\tau - z}\,d\tau\,.$$

Учитывая (3.3.7), преобразуем данное краевое условие, в виде:

$$\varphi_1^{\;+}(t) - \psi^+(t) = \frac{\prod\limits_{r=1}^{\mu}(t-\xi_r)^{p_r^{(1)}}}{\prod\limits_{j=1}^{\gamma}(t-\eta_j)^{p_j^{(2)}}}\cdot A_4(t)\varphi^-(t) - \psi^-(t).$$

Построим полином $Q(t)$, удовлетворяющий условию:

$$\psi^{(l)}(\xi_r) = Q^{(l)}(\xi_r), \qquad (r = 1,\ 2,\ldots,\ \mu, \quad l = 0,\ 1,\ldots,\ d_r^{(1)}) \tag{3.3.8}$$

Используя многочлен $Q(t)$, краевое условие преобразуем, в следующий вид:

$$\varphi_1^{\;+}(t) - \psi^+(t) - Q(t) = \frac{\prod\limits_{r=1}^{\mu}(t-\xi_r)^{p_r^{(1)}}}{\prod\limits_{j=1}^{\gamma}(t-\eta_j)^{p_j^{(2)}}}\cdot A_4(t)\varphi^-(t) - \psi^-(t) - Q(t),$$

или

$$\varphi_1^{\;+}(t) - \psi^+(t) - Q(t) = \frac{\prod\limits_{r=1}^{\mu}(t-\xi_r)^{p_r^{(1)}}}{\prod\limits_{j=1}^{\gamma}(t-\eta_j)^{p_j^{(2)}}}\cdot A_4(t)\varphi^-(t) -$$

$$-\prod_{r=1}^{\mu}(t-\xi_r)^{p_r^{(1)}}\psi^-(t),$$

или

$$\frac{\varphi_1^+(t) + \psi^+(t) - Q(t)}{\prod\limits_{r=1}^{\mu}(t-\xi_r)^{p_r^{(1)}}} = \frac{A_4(t)}{\prod\limits_{j=1}^{\gamma}(t-\eta_j)^{p_j^{(2)}}}\varphi^-(t) + \psi_1^-(t),$$

$$\varphi_2^+(t) = \frac{A_4(t)}{\prod\limits_{j=1}^{\gamma}(t-\eta_j)^{p_j^{(2)}}}\varphi^-(t) + \psi_1^-(t), \tag{3.3.9}$$

где в равенстве (3.3.9):

$$\varphi_2^+(t) = \frac{\varphi_1^+(t) + \psi^+(t) - Q(t)}{\prod\limits_{r=1}^{\mu}(t-\xi_r)^{p_r^{(1)}}}.$$

Полагаем, в равенстве (3.3.8):

$$\varphi^-(z) = \frac{\prod\limits_{j=1}^{\gamma}(z-\eta_j)^{p_j^{(2)}}}{z^{p_j^{(2)}}} \cdot \varphi_1^-(z), \tag{3.3.10}$$

отсюда, имеем:

$$\varphi_2^+(t) = \frac{A_4(t)\varphi_1^-(t)}{t^{p_j^{(2)}}} + \psi_1^-(t). \tag{3.3.11}$$

Итак, получили задачу с непрерывными коэффициентами, рассуждая и анализируя, как профессор И.Б. Симоненко см. [91], получим следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3.3.1.

В случае индекса задачи $æ = 0$*, тогда рассматриваемая задача сопряжения в искомом классе функции, будет разрешима. Тогда, когда индекс каппа больше нуля, задача имеет каппа линейно-независимых решений. Если индекс каппа меньше нуля, тогда задача сопряжения в общем виде неразрешима. Для её разрешимости требуется дополнительное условие разрешимости* $|æ|$*, (3.3.11).*

ГЛАВА 4. ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ТИПА ЗАДАЧИ РИМАНА С НЕПРЕРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В СИНГУЛЯРНОМ СЛУЧАЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ: $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z)\cdot W(z) + B(z)\overline{W(z)} + c(z)$

4.1. Граничная задача Римана для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа, когда коэффициент имеет особенности аналитического характера

Рассматривается граничная задача Римана для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа в случае, когда коэффициент, имеющий особенности аналитического характера, т.е. для системы:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = a\cdot u + b\cdot v + f \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = a\cdot u - b\cdot v + g \end{cases},$$

или в комплексном виде:

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z)\cdot W(z) + B(z)\overline{W(z)} + c(z) \qquad (4.1.1)$$

Следуя методу исследованию И.Н. Векуа, решение уравнения (4.1.1) даётся формулой:

$$W(z) = \left[F(z) + \varphi(z)\right]\cdot e^{\omega(z)} \qquad (4.1.2)$$

где в равенстве (4.1.2), функция:

$F(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_D \frac{\left[B(\varsigma)\overline{W(z)} + c(z)\right]e^{-\omega(z)}}{\varsigma - z}d\varsigma$ - аналитической функцией

и

$$\omega(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_D \frac{A(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma$$ -является непрерывной функцией.

Функция $\omega(z)$ обладает всеми свойствами предыдущего параграфа.

Теперь сформулируем задачу.

ЗАДАЧА $\mathbf{R_{4.1}}$. Требуется найти аналитическую функцию $W^+(x, y)$ − регулярного решения уравнения, вида: $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z)W(z) + B(z)\overline{W(z)} + c(z)$ в области D^+ и функцию $W^-(x, y)$ − аналитическую во внешней области, по следующему граничному условию:

$$W^+(t) = \prod_{r=1}^{\mu}(t-\xi_r)^{d_r} \cdot \prod_{j=1}^{\gamma}(t-\eta_j)^{-q_j} A_1(t)W^-(t) + c(t), \qquad (4.1.3)$$

здесь $A_1(t) = \prod_{r=1}^{\mu}(t-\xi_r)^{d_r} \cdot \prod_{j=1}^{\gamma}(t-\eta_j)^{-q_j} \neq 0$ и непрерывная функция, $c(t) \in H$, ξ_r, η_j −несовпадающие точки контура, d_r, q_j −целые числа, $\delta = \sum_{r=1}^{\mu}\delta_r$, $S = \sum_{j=1}^{\gamma} s_j$.

Используем постановку

$$W^+(t) = [F(t) + \varphi^+(t)] \cdot e^{\omega(t)} \text{ и } W^-(t) = [F(t) + \varphi^-(t)] \cdot e^{\omega(t)},$$

теперь подставляем данные значения в равенство (4.1.3), отсюда имеем:

$$[F(t) + \varphi^+(t)] \cdot e^{\omega(t)} = \frac{\prod_{r=1}^{\mu}(t-\xi_r)^{d_r}}{\prod_{j=1}^{\gamma}(t-\eta_j)^{q_j}} A_1(t)[F(t) + \varphi^-(t)] \cdot e^{\omega(t)} + c(t),$$

необходимо разделить обе стороны равенства на $e^{\omega(t)}$, получим следующее равенство:

$$F(t)+\varphi^{+}(t)=\frac{\prod\limits_{r=1}^{\mu}(t-\xi_r)^{d_r}}{\prod\limits_{j=1}^{\gamma}(t-\eta_j)^{q_j}}A_1(t)[F(t)+\varphi^{-}(t)]+\frac{c(t)}{e^{\omega(t)}}.$$

Вводим обозначения: $F(t)+\varphi^{-}(t)=\varphi_1^{-}(t)$, где данная задача, принимает вид:

$$\varphi^{+}(t)=\prod_{r=1}^{\mu}(t-\xi_r)^{d_r}\cdot\prod_{j=1}^{\gamma}(t-\eta_j)^{-q_j}A_1(t)\varphi_1^{-}(t)+\frac{c(t)}{e^{\omega(t)}}-F(t),$$

или

$$\varphi^{+}(t)=\prod_{r=1}^{\mu}(t-\xi_r)^{d_r}\cdot\prod_{j=1}^{\gamma}(t-\eta_j)^{-q_j}A_1(t)\varphi_1^{-}(t)+c_1(t), \qquad (4.1.4)$$

через $c_1(t)$ и обозначим $c_1(t)=\dfrac{c(t)}{e^{\omega(t)}}-F(t)$.

Пусть $c_1(t)$ имеет производную произвольного порядка. Построим полином $Q(t)$, так, чтобы удовлетворял нижнему условию:

$$c_1^{(l)}(\xi_r)=Q^{(l)}(\xi_r), \qquad (r=1,\,2,\ldots,\,\mu, \quad l=0,\,1,\ldots,\,d_{r-1}) \qquad (4.1.5)$$

В силу равенств: (4.1.4) и (4.1.5), преобразуем граничное условие, вида:

$$\varphi^{+}(t)-Q(t)=\frac{\prod\limits_{r=1}^{\mu}(t-\xi_r)^{d_r}}{\prod\limits_{j=1}^{\gamma}(t-\eta_j)^{q_j}}\cdot A_1(t)\varphi_1^{-}(t)+c_1(t)-Q(t),$$

или

$$\varphi^{+}(t)-Q(t)=\frac{\prod\limits_{r=1}^{\mu}(t-\xi_r)^{p_r^{(1)}}}{\prod\limits_{j=1}^{\gamma}(t-\eta_j)^{p_j^{(2)}}}\cdot A_1(t)\varphi_1^{-}(t)+\prod_{r=1}^{\mu}(t-\xi_r)^{d_r}c_2(t),$$

$$\varphi_1^{+}(t)=\frac{A_1(t)}{\prod\limits_{j=1}^{\gamma}(t-\eta_j)^{q_j}}\varphi_1^{-}(t)+c_2(t), \qquad (4.1.6)$$

где $\varphi_1^{+}(t)=\dfrac{\varphi^{+}(t)-Q(t)}{\prod\limits_{r=1}^{\mu}(t-\xi_r)^{d_r}}$.

Полагаем, что в краевом условии (4.1.6):

$$\varphi_1^{-}(z)=\frac{\prod\limits_{j=1}^{\gamma}(z-\eta_j)^{q_j}\cdot\varphi_2^{-}(z)}{z^{q}}, \qquad (4.1.7)$$

тогда, имеем:

$$\varphi_1^{+}(t)=\frac{A_1(t)\varphi_2^{-}(t)}{t^{q}}+c_2(t)\ . \qquad (4.1.8)$$

Итак, мы получили задачу сопряжения с непрерывными коэффициентами.

Используя обозначения:

$$\varphi_1^{+}(t)=\varphi_2^{-}(t),\qquad \frac{A_1(t)}{t^{q}}=A_2(t)$$

отсюда имеем:

$$\varphi_1^{+}(t)=A_2(t)\varphi_2^{-}(t)+c_2(t), \qquad (4.1.9)$$

Далее, рассуждения производятся, аналогично исследованию И.Б. Симоненко [91].

Так как функцию $\varphi_2(t),$ можно представить в виде:

$$\varphi_2(t) = \varphi_2^+(t) - \varphi_2^-(t), \tag{4.1.10}$$

где $\varphi_2^\pm(t)$ являются предельными значениями функции: $\varphi_2^\pm(z),$ на контуре Γ, и она является аналитическим в областях $D^\pm$.

Итак, функция $\varphi_2^\pm(t) \in L_p(\Gamma),$ $p > 0$ и $\varphi^-(\infty) = 0$, поэтому представление решения задачи единственно.

По формуле Ю.В. Сохоцкого, найдены предельные значения функции $\varphi_2^\pm(t)$, тогда имеем:

$$\varphi_2{}^+(t) = \frac{1}{2}\varphi_2(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi_2(\tau)}{\tau - t}d\tau$$

$$\varphi_2{}^-(t) = -\frac{1}{2}\varphi_2(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi_2(\tau)}{\tau - t}d\tau. \tag{4.1.11}$$

Интегральная формула: $\dfrac{1}{\pi i}\displaystyle\int_\Gamma \frac{\varphi_1(\tau)}{\tau - t}d\tau -$ является особым оператором в пространстве, $L_p(\Gamma),$ причём она ограниченна, т.е.

$$\left(\int_\Gamma \left|\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi_2(\tau)}{\tau - t}d\tau\right|^p ds\right)^{\frac{1}{p}} \le M_p\left(\int_\Gamma |\varphi(t)|^p ds\right)^{\frac{1}{p}},$$

здесь $M_p -$не зависит от функции $\varphi_2(t),$ так как она является постоянным числом.

В результате, получим следующие неравенства:

$$\left\|\varphi_2^{\pm}(t)\right\|_{L_p} \leq \frac{1}{2}\|\varphi_2(t)\|_{L_p} + \frac{M_p}{2}\|\varphi_2(t)\|_{L_p} = \frac{M_{p+1}}{2}\|\varphi_2(t)\|_{L_p}$$

здесь

$$\|\varphi_2(t)\|_{L_p} = M_p\left(\int_{\Gamma}|\varphi_2(t)|^p ds\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Итак, задачу сопряжения сформируем следующим образом:

Найти функцию $\varphi_2(t)$ – из класса $L_p(\Gamma)$, удовлетворяющую граничному условию (4.1.9), где $\varphi_2^{\pm}(t)$, задаются равенством (4.1.11).

Пусть, теперь $A_2(t) = 1$, граничное условие (4.1.9) превратится в задачу о скачке, которая разрешима и однозначна в классе $L_p(\Gamma)$.

Если $A_2(t)$- функция и для него выполняет следующее условие:

$$|A_2(t) - 1| \leq c_2(t) < \frac{2}{1 + M_p}, \qquad c_2(t) \in L_p(\Gamma), \qquad (p > 1).$$

или из обеих частей равенства (4.1.9), то имеем следующее:

$$\varphi_2^{+}(t) = [A_2(t) - 1]\varphi_2^{-}(t) - c_2(t), \tag{4.1.12}$$

где оператор $[A_2(t) - 1]\varphi_2^{-}(t) \in L_p(\Gamma)$.

На самом деле:

$$\|A_2(t) - 1\|\varphi_2^{-}(t)\|_{L_p} = \left(\int_{\Gamma}|A_2(t) - 1|^p \left|\varphi_2^{-}(t)\right|^p ds\right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq c_2(t)\left(\int_{\Gamma}\left|\varphi_2^{-}(t)\right|^p ds\right)^{\frac{1}{p}} = c_2(t)\frac{1+M_p}{2}\left\|\varphi_2(t)\right\|_{L_p}.$$

Используя принцип сжатых отображений, утверждаем, что задача (4.1.12), имеет единственное решение.

Если $æ_0 = æ_1 = ... = æ_m = 0$.

Так как, $\ln A_2(t)$ будет непрерывной функцией, поэтому, приблизим её к функции $f \in H$.

$$\left|e^{(\ln A_2(t) - f)} - 1\right| \leq c_2(t) < \frac{2}{1+M_p}.$$

Представим, что функция: $A_2(t) = \dfrac{\chi^{+}(t)}{\chi^{-}(t)}$, где $\chi^{+}(t)$ и $\chi^{-}(t)$ есть аналитическая, и она не обращается в нуль.

Введём новые функции:

$$\varphi_2^{+}(t) = \frac{A_1(t)}{A_2(t)}\varphi_2^{-}(t) + \frac{c_2(t)}{\chi^{+}(t)} \qquad (4.1.13).$$

Полученное решение единственно, если $æ_0 = æ_1 = ... = æ_m = 0$.

Теперь исследуем задачу в случае, когда $Ind A_2(t) = 0$.

❖ Допустим, что $æ = 0$.

$$\overset{*}{\varphi}_2(z) = \prod_{r=1}^{\mu}(z - z_r)^{æ_r}\varphi_2^{+}(z), \quad z_r \in D_r^{-}, \quad \overset{*}{\varphi}_2^{-}(z) = \overset{*}{\varphi}_2^{-}(z),$$

тогда получим следующее краевое условие, вида:

$$\overset{*}{\varphi}_2^{+}(t) = A_2^{*}(t)\overset{*}{\varphi}_2^{-}(t) + c_2^{*}(t), \qquad (4.1.14)$$

где

$$A_2^*(\mathrm{t}) = \prod_{r=1}^{\mu} (z - z_r)^{æ_r}\, A_2(t), \qquad c_2^*(\mathrm{t}) = \prod_{r=1}^{\mu} (z - z_r)^{æ_r}\, c_2(t).$$

Пусть, индекс задачи равен нулю, т.е.

$$æ_r^* = \frac{1}{2\pi}\left[\arg A_2{}^*(t)\right]_{\Gamma_r} = æ = 0, \quad r = 1, 2, ..., \mu,$$

$$æ_r^* = \frac{1}{2\pi}\left[\arg A_2{}^*(t)\right]_{\Gamma_0} = æ = 0.$$

Тогда задача (4.1.14) разрешима и имеет единственное решение.

❖ Пусть теперь: $IndA_2(t) = æ > 0$, тогда краевое условие (4.1.13), принимает вид:

Преобразуем задачу, следующим образом:

$$\frac{1}{(t - z_0)^{æ}}[\varphi_2{}^+(t) - Q_{æ-1}(t)] =$$

$$= \frac{1}{(t - z_0)^{æ}}\left(A_2(t)\varphi_2{}^-(t) + g_2(t) - Q_{æ\text{-}1}(t)\right),$$

здесь точка z_0 принадлежит к области D^+ и $Q_{æ-1}(t)$ полином степени $æ - 1$, подберём его коэффициенты так, чтобы для $\dfrac{\varphi_2{}^+(z) - Q_{æ-1}(z)}{(z - z_0)^{æ}}$ выполнялось следующее равенство.

В случае, когда $Ind\dfrac{A_2(t)}{(t - z_0)^{æ}} = 0$ и через $\mathrm{R}^{\pm}$ обозначим оператора, решающего задачу сопряжения со следующими коэффициентами: $\dfrac{A_2(t)}{(t - z_0)^{æ}}$, тогда:

$$\frac{\varphi_2^{+}(t)-Q_{æ-1}(t)}{(t-z_0)^{æ}}=R^{+}(t)\left[c_2(t)-\frac{Q_{æ-1}(t)}{(t-z_0)^{æ}}\right],$$

$$\varphi_2^{-}(t)=R^{-}(t)\left[c_2(t)-\frac{Q_{æ-1}(t)}{(t-z_0)^{æ}}\right]. \qquad (4.1.15)$$

Найдём $\varphi_2^{+}(t)$,

$$\varphi_2^{+}(t)=Q_{æ-1}(t)+(t-z_0)^{æ}R^{+}(t)\left[c_2(t)-\frac{Q_{æ-1}(t)}{(t-z_0)^{æ}}\right] \qquad (4.1.16)$$

Наши рассуждения приводят к мысли, о том, что решение задачи (4.1.9) должно иметь как раз в виде равенства (4.1.16), здесь $Q_{æ-1}(t)$ – является многочленом и формулы (4.1.15) и (4.1.16) - есть общие решения данной задачи.

❖ Если $æ<0$, т.е. $IndA_2(t)=æ$.

Данную задачу преобразуем, следующим образом:

$$\frac{\varphi_2^{+}(t)}{(t-z_0)^{æ}}=\frac{A_2(t)}{(t-z_0)^{æ}}\varphi_2^{-}(t)-\frac{c_2(t)}{(t-z_0)^{æ}}.$$

Здесь $Ind\,\frac{A_2(t)}{(t-z_0)^{æ}}=0$, а это функция $\frac{A_2(t)}{(t-z_0)^{æ}}$ - аналитическая в области D^{-}. В этом случае, тоже обозначим оператора, обращающего задачу сопряжения с коэффициентом $\frac{A_2(t)}{(t-z_0)^{æ}}$, через $R^{\pm}$.

Тогда получим:

$$\varphi_2^{+}(z)=(z-z_0)^{æ}R^{+}(t)[(t-z_0)^{æ}c_2(t)],$$

$$\varphi_2^-(z)=(z-z_0)^{æ}R^-(t)\frac{c_2(t)}{(t-z_0)^{æ}} \tag{4.1.17}$$

Функция, определяемая равенством (4.1.17), вообще говоря, задача не имеет решения, так как в точке z_0, имеет полюс порядка $|æ|$. Для того, чтобы задача была разрешима, требуются $|æ|$ условия, разрешимости вида:

$$\int_{\Gamma}(t-z_0)^{-æ}R^+(t)[(t-z_0)^{-æ}c_2(t)]dt=0 \tag{4.1.18}$$

При выполнении краевого условия (4.1.18), задача имеет единственное решение.

В результате, сформулируем теорему.

ТЕОРЕМА 4.1.1.

Если $A_4(t)=\prod_{r=1}^{\mu}(t-\xi_r)^{d_r}\cdot\prod_{j=1}^{\gamma}(t-\eta_j)^{-q_j}\neq 0$ и $A_4(t)-$*непрерывная функция,* $c_2(t)$, *удовлетворяет условию H, тогда имеет место следующее:*

Когда индекс задачи $æ=0$, *тогда рассматриваемая краевая задача сопряжения имеет единственное решение. Когда индекс каппа больше нуля, тогда задача сопряжения разрешима и имеет каппа решение. В случае, индекс задачи, каппа меньше нуля, в этом случае, задача будет разрешима тогда и только тогда, когда требуются* $|æ|$ *дополнительные условия разрешимости:*

$$\int_{\Gamma}\frac{R^+(t)}{(t-z_0)^{æ}}\left[(t-z_0)^{-æ}c_2(t)\right]dt=0.$$

4.2. Граничная задача Римана с коэффициентами, имеющими нули и полюса сопряжённо-аналитического вида для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа

В этом параграфе изучается краевая задача типа Римана с коэффициентами, имеющими нули и полюса сопряжённо-аналитического вида для системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial v}{\partial y} = a \cdot u + b \cdot v + f \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = a \cdot u - b \cdot v + g \end{cases}$$

или в виде одного комплексного переменного можно написать таким образом:

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot W(z) + B(z)\overline{W(z)} + c(z) \qquad (4.2.1)$$

И.Н. Векуа [15] показал, что решение данного уравнения, имеет вид:

$$W(z) = e^{\omega(z)} \cdot [F(z) + \varphi(z)],$$

здесь:

$$F(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_D \frac{[B(\varsigma)\overline{W(z)} + c(z)]e^{-\omega(z)}}{\varsigma - z} d\varsigma$$

и

$$\omega(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_D \frac{A(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma,$$

здесь $\omega(z)$ – является аналитической функцией, обладающей свойствами 1-5 предыдущего параграфа.

ЗАДАЧА R$_{4.2}$. Требуем найти аналитическую функцию: $W^{+}(x,\ y)$, регулярного решения дифференциальных уравнений, $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z)\cdot\left[W(z) + \frac{B(z)\overline{W(z)}}{A(z)} + \frac{c(z)}{A(z)}\right]$ в области D^{+}, и $W^{-}(x,\ y)$ – аналитическую во внешней области, по граничному условию:

$$W^{+}(t) = \frac{\prod_{r=1}^{\mu}(\overline{t-\xi_r})^{d_r}}{\prod_{j=1}^{\gamma}(\overline{t-\eta_j})^{q_j}} A_1(t) W^{-}(t) + c(t), \tag{4.2.2}$$

здесь $A_1(t) = \prod_{r=1}^{\mu}(\overline{t-\xi_r})^{d_r} \prod_{j=1}^{\gamma}(\overline{t-\eta_j})^{-q_j} \neq 0$ и непрерывная функция на контуре Γ, $c(t) \in H(\Gamma)$, ξ_r и η_j –точки, лежащие на контуре, d_r, q_j – натуральные числа, где $\sum_{r=1}^{\mu} d_r = d$, $\sum_{j=1}^{\gamma} q_j = q$.

Теперь, используя подстановку значений функций:

$$W^{+}(t) = e^{\omega(t)}[F(t) + \varphi^{+}(t)], \qquad W^{-}(t) = e^{\omega(t)}[F(t) + \varphi^{-}(t)]. \tag{4.2.3}$$

Тогда граничное условие (4.2.2), при помощи равенства (4.2.3), преобразовывается в следующем:

Итак,

$$e^{\omega(t)}[F(t) + \varphi^{+}(t)] = \frac{\prod_{r=1}^{\mu}(\overline{t-\xi_r})^{d_r}}{\prod_{j=1}^{\gamma}(\overline{t-\eta_j})^{q_j}} A_1(t) e^{\omega(t)}[F(t) + \varphi^{-}(t)] + c(t),$$

$$F(t)+\varphi^{+}(t)=\frac{\prod\limits_{r=1}^{\mu}(\overline{t-\xi_r})^{d_r}}{\prod\limits_{j=1}^{\gamma}(\overline{t-\eta_j})^{q_j}}A_1(t)[F(t)+\varphi^{-}(t)]+\frac{c(t)}{e^{\omega(t)}} \qquad (4.2.4)$$

здесь $\varphi_1^{-}(t)=\varphi^{-}(t)+F(t)$.

Очевидно, что имеют место, следующие равенства:

$$\prod_{r=1}^{\mu}(\overline{t-\xi_r})^{d_r}=\prod_{r=1}^{\mu}(t-\xi_r)^{d_r}\cdot e^{-2i\sum\limits_{r=1}^{\mu}\theta_r^{(1)}d_r}, \qquad \theta_r^{(1)}=\arg(t-\xi_r),$$

$$\prod_{j=1}^{\gamma}(\overline{t-\eta_j})^{q_j}=\prod_{j=1}^{\gamma}(t-\eta_j)^{q_j}\cdot e^{-2i\sum\limits_{j=1}^{\gamma}\theta_j^{(2)}q_j}, \qquad \theta_j^{(2)}=\arg(t-\eta_j) \qquad (4.2.5)$$

Используя равенство (4.2.5), граничное условие (4.2.4) преобразуется, в следующем виде:

$$\varphi^{+}(t)=\frac{\prod\limits_{r=1}^{\mu}(t-\xi_r)^{d_r}}{\prod\limits_{j=1}^{\gamma}(t-\eta_j)^{q_j}}A_1(t)e^{2i\left(\sum\limits_{j=1}^{\gamma}\theta_j^{(2)}q_j-\sum\limits_{r=1}^{\mu}\theta_r^{(1)}d_r\right)}\varphi_1^{-}(t)+c_1(t),$$

здесь:

$$c_1(t)=\frac{c(t)}{e^{\omega(t)}}-F(t),$$

или

$$\varphi^{+}(t)=\frac{\prod\limits_{r=1}^{\mu}(t-\xi_r)^{d_r}}{\prod\limits_{j=1}^{\gamma}(t-\eta_j)^{q_j}}A_2(t)\varphi_1^{-}(t)+c_1(t) \qquad (4.2.6)$$

Требуется, чтобы функция $c_1(t)$ имела производную произвольного порядка.

Коэффициенты многочлена $Q(t)$ подберём так, чтобы для него выполнялось, следующее равенство:

$$c_1^{(l)}(\xi_r) = Q^{(l)}(\xi_r), \tag{4.2.7}$$

при $(l = 0, 1,..., d_{r-1}, \quad r = 1, 2,..., \mu)$.

Используя, равенство (4.2.7), граничное условие (4.2.6) преобразуется, в следующем виде:

$$\varphi^+(t) - Q(t) = \frac{\prod_{r=1}^{\mu}(t-\xi_r)^{d_r}}{\prod_{j=1}^{\gamma}(t-\eta_j)^{q_j}} \cdot A_2(t)\varphi_1^-(t) + c_1(t) - Q(t),$$

$$\varphi^+(t) - Q(t) = \frac{\prod_{r=1}^{\mu}(t-\xi_r)^{p_r^{(1)}}}{\prod_{j=1}^{\gamma}(t-\eta_j)^{p_j^{(2)}}} \cdot A_2(t)\varphi_1^-(t) + \prod_{r=1}^{\mu}(t-\xi_r)^{d_r} c_2(t). \tag{4.2.8}$$

Итак, разделим обе части равенства (4.2.8) на граничное условие, $\prod_{r=1}^{\mu}(t-\xi_r)^{d_r} c_2(t)$, отсюда имеем:

$$\frac{\varphi^+(t) - Q(t)}{\prod_{r=1}^{\mu}(t-\xi_r)^{d_r}} = \frac{A_2(t)}{\prod_{j=1}^{\gamma}(t-\eta_j)^{q_j}} \varphi_1^-(t) + c_2(t),$$

или в сокращённом виде:

$$\varphi_1^+(t) = \frac{A_2(t)}{\prod\limits_{j=1}^{\gamma}(t-\eta_j)^{q_j}}\varphi_1^-(t) + c_2(t), \tag{4.2.9}$$

Полагая в равенстве (4.2.9):

$$\varphi_1^-(z) = \frac{\prod\limits_{j=1}^{\gamma}(z-\eta_j)^{q_j} \cdot \varphi_2^-(z)}{z^q}, \tag{4.2.10}$$

получим:

$$\varphi_1^+(t) = \frac{A_2(t)\varphi_2^-(t)}{t^q} + c_2(t). \tag{4.2.11}$$

В результате, получим краевую задачу с непрерывными коэффициентами, для неё имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4.2.1.

Если $A_1(t) = \prod\limits_{r=1}^{\mu}(\overline{t-\xi_r})^{d_r} \prod\limits_{j=1}^{\gamma}(\overline{t-\eta_j})^{-q_j} \neq 0$ *непрерывная функция, здесь* $c(t) \in H$ *индекс задачи Римана* $æ = IndA_1(t) - Indt^{-q}A_2(t) = æ - d$.

Тогда, когда $æ - d \geq 0$*, задача разрешима и имеет единственное решение, рассматриваемая задача сопряжения, имеет* $æ - \delta$ *решения.*

Когда, $æ - d < 0$*, задача в общем виде неразрешима. Для существования её решения, необходимо выполнение условий разрешимости, вида* $|æ - d|$ *(4.2.11).*

4.3. Граничная задача Римана для системы дифференциальных уравнений, когда коэффициент обладает особенностями модульного характера

Изучается граничная задача Римана для системы дифференциальных уравнений, когда коэффициент имеет особенности модульного характера, т.е.,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial v}{\partial y} = a \cdot u + b \cdot v + f \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = a \cdot u - b \cdot v + g \end{cases} \tag{4.3.1}$$

И.Н. Векуа [15] доказал, что решения системы (4.3.1), имеют вид:

$$W(z) = e^{\omega(z)} \cdot \left[F(z) + \varphi(z)\right],$$

здесь:

$$F(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_D \frac{\left[B(\varsigma)\overline{W(z)} + c(z)\right]e^{-\omega(z)}}{\varsigma - z}\,d\varsigma \text{ и } \omega(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_D \frac{A(\varsigma)}{\varsigma - z}\,d\varsigma,$$

где функция $\omega(z)$ – аналитическая и обладает всеми свойствами 1-5 из первого параграфа, как непрерывные функции. Теперь, сформулируем следующую задачу:

ЗАДАЧА R$_{4.3}$. Требуется, найти пару аналитических функций $W^+(x,\ y)$ – регулярное решение эллиптического уравнения, вида: $\dfrac{\partial W}{\partial \overline{z}} = A(x,\ y)\cdot W(x,\ y) + B(x,\ y)\cdot \overline{W(x,\ y)} + c(x,\ y)$, принадлежащего ко всей области D, которая удовлетворяет следующие условия:

$$W^+(t) = \prod_{r=1}^{\mu}\left|t - \xi_r\right|^{d_r} \cdot \prod_{j=1}^{\gamma}\left|t - \eta_j\right|^{-q_j} A_1(t) W^-(t) + c(t), \tag{4.3.2}$$

где $A_1(t)$ – непрерывная функция, и она не равна нулю, здесь $c(t) \in H(\Gamma)$. $\xi_r,\ \eta_j \in \Gamma$, $\sum\limits_{r=1}^{\mu} d_r = d$, $\sum\limits_{j=1}^{\gamma} q_j = q$, $d_r,\ q_j$ – любые действительные числа.

Используя значения:

$$W^+(t) = [F(t) + \varphi^+(t)] \cdot e^{\omega(t)}, \qquad W^-(t) = [F(t) + \varphi^-(t)] \cdot e^{\omega(t)},$$

в (4.3.2), получим:

$$[F(t) + \varphi^+(t)] \cdot e^{\omega(t)} = \frac{\prod\limits_{r=1}^{\mu} |t - \xi_r|^{d_r}}{\prod\limits_{j=1}^{\gamma} |t - \eta_r|^{q_r}} A_1(t)[F(t) + \varphi^-(t)] \cdot e^{\omega(t)} + c(t),$$

или

$$F(t) + \varphi^+(t) = \frac{\prod\limits_{r=1}^{\mu} |t - \xi_r|^{d_r}}{\prod\limits_{j=1}^{\gamma} |t - \eta_j|^{q_j}} A_1(t)[F(t) + \varphi^-(t)] + \frac{c(t)}{e^{\omega(t)}},$$

$$\varphi^+(t) = \frac{\prod\limits_{r=1}^{\mu} |t - \xi_r|^{d_r}}{\prod\limits_{j=1}^{\gamma} |t - \eta_j|^{q_j}} A_1(t)\varphi_1^-(t) + c_1(t), \tag{4.3.3}$$

где

$$\varphi_1^-(t) = F(t) + \varphi^-(t), \qquad c_1(t) = c(t) e^{-\omega(t)} - F(t).$$

Так как:

$$\prod_{r=1}^{\mu} |t - \xi_r|^{d_r} = \prod_{r=1}^{\mu} (t - \xi_r)^{d_r} \cdot e^{-2i \sum\limits_{r=1}^{\mu} \theta_r^{(1)} d_r}, \qquad \theta_r^{(1)} = \arg \theta_r^{(1)},$$

$$\prod_{j=1}^{\gamma}\left|t-\eta_j\right|^{q_j} = \prod_{j=1}^{\gamma}(t-\eta_j)^{q_j}\cdot e^{-2i\sum\limits_{j=1}^{\gamma}\theta_j^{(2)}q_j}, \qquad \theta_j^{(2)} = \arg\theta_j^{(2)}. \quad (4.3.4)$$

Из (4.3.4) и (4.3.3), имеем:

$$\varphi^{+}(t) = \frac{\prod\limits_{r=1}^{\mu}(t-\xi_r)^{d_r}}{\prod\limits_{j=1}^{\gamma}(t-\eta_j)^{q_j}} A_1(t) e^{2i\left(\sum\limits_{j=1}^{\gamma}\theta_j^{(2)}q_j - \sum\limits_{r=1}^{\mu}\theta_r^{(1)}d_r\right)}\varphi_1^{-}(t) + c_1(t). \quad (4.3.5)$$

Обозначим:

$$\sum_{r=1}^{\mu} d_r = \sum_{r=1}^{\mu}\left(p_r^{(1)} - q_r^{(1)}\right), \qquad \sum_{j=1}^{\gamma} q_j = \sum_{j=1}^{\gamma}\left(p_j^{(2)} - q_j^{(2)}\right),$$

$$\sum_{r=1}^{\mu} p_r^{(1)}, \quad \sum_{j=1}^{\gamma} p_j^{(2)} - \text{натуральные числа},$$

$$\sum_{r=1}^{\mu} q_r^{(1)}, \ \sum_{j=1}^{\gamma} q_j^{(2)} \ \text{и} \ 0 < \sum_{r=1}^{\mu} q_r^{(1)} < 1, \quad 0 < \sum_{j=1}^{\gamma} q_j^{(2)} < 1.$$

Преобразуем краевое условие (4.3.5), в виде:

$$\varphi^{+}(t) = \frac{\prod\limits_{r=1}^{\mu}(t-\xi_r)^{p_r^{(1)}}}{\prod\limits_{j=1}^{\gamma}(t-\eta_j)^{p_j^{(2)}}}\cdot\frac{\prod\limits_{r=1}^{\mu}(t-\xi_r)^{-q_r^{(1)}}}{\prod\limits_{j=1}^{\gamma}(t-\eta_j)^{q_j^{(2)}}}\times$$

$$\times e^{2i\left(\sum\limits_{j=1}^{\gamma}\theta_j^{(2)}q_j - \sum\limits_{r=1}^{\mu}\theta_r^{(1)}d_r\right)} A_1(t)\varphi_1^{-}(t) + c_1(t),$$

или

$$\varphi^{+}(t)=\frac{\prod\limits_{r=1}^{\mu}\left(t-\xi_r\right)^{p_r^{(1)}}}{\prod\limits_{j=1}^{\gamma}\left(t-\eta_j\right)^{p_j^{(2)}}}A_2(t)\cdot\varphi_1^{-}(t)+c_1(t), \qquad (4.3.6)$$

где

$$A_2(t)=\frac{e^{2i\left(\sum\limits_{j=1}^{\gamma}\theta_j^{(2)}q_j-\sum\limits_{r=1}^{\mu}\theta_r^{(1)}d_r\right)}\cdot A_1(t)}{\prod\limits_{j=1}^{\gamma}(t-\eta_j)^{q_j^{(2)}}\cdot\prod\limits_{r=1}^{\mu}(t-\xi_r)^{q_r^{(1)}}}.$$

Обозначим $\varphi_1^{-}(t)$ - следующим образом,

$$\varphi_1^{-}(t)=\prod_{j=1}^{\gamma}(t-\eta_j)^{q_j^{(2)}}\cdot t^{-q^{(2)}}\varphi_2^{-}(t),$$

в результате, имеем следующее граничное условие:

$$\varphi^{+}(t)=\prod_{r=1}^{\mu}(t-\eta_j)^{q_j^{(2)}}\cdot t^{-q^{(2)}}\varphi_2^{-}(t)+c_1(t). \qquad (4.3.7)$$

Отсюда требуется, чтобы $c_1(t)$ имело производные произвольного порядка.

$$c_1^{(l)}(\xi_r)=Q^{(l)}(\xi_r), \quad (r=1,2,...,\mu, \quad l=0,1,...,p_r^{(1)}-1), \quad (4.3.8)$$

Подберём коэффициенты многочлена $Q(t)$ так, чтобы удовлетворяло следующие условия:

В силу (4.3.8), граничное условие (4.3.7), принимает вид:

$$\varphi^{+}(t)=\frac{\prod\limits_{r=1}^{\mu}(t-\xi_r)^{p_r^{(1)}}A_2(t)\varphi_2^{-}(t)}{t^{q^{(2)}}}+c_1(t).$$

Из обеих сторон равенства, минусуем $Q(t)$.

$$\varphi^{+}(t)-Q(t)=\frac{\prod\limits_{r=1}^{\mu}(t-\xi_r)^{p_r^{(1)}}A_2(t)\varphi_2^{-}(t)}{t^{q^{(2)}}}+c_1(t)-Q(t),$$

$$\varphi_1^{+}(t)=\frac{\prod\limits_{r=1}^{\mu}(t-\xi_r)^{p_r^{(1)}}A_2(t)}{t^{q^{(2)}}}+\prod_{r=1}^{\mu}(t-\xi_r)^{p_r^{(1)}}\cdot c_2(t), \qquad (4.3.9)$$

где

$$\varphi_1^{+}(t)=\varphi^{+}(t)-Q(t),$$

$$\frac{\varphi_1^{+}(t)}{\prod\limits_{r=1}^{\mu}(t-\xi_r)^{p_r^{(1)}}}=\frac{A_2(t)\varphi_2^{-}(t)}{t^{q^{(2)}}}+c_2(t),$$

или

$$\varphi_2^{+}(t)=\frac{A_2(t)\varphi_2^{-}(t)}{t^{q^{(2)}}}+c_2(t), \qquad (4.3.10)$$

здесь:

$$\varphi_2^{+}(t)=\frac{\varphi_1^{+}(t)}{\prod\limits_{r=1}^{\mu}(t-\xi_r)^{p_r^{(1)}}}.$$

В результате, мы получили граничную задачу сопряжения с непрерывными коэффициентами, для которой имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4.3.1.

Пусть $A_1(t) = \prod_{r=1}^{\mu} |t-\xi_r|^{d_r} \cdot \prod_{j=1}^{\gamma} |t-\eta_j|^{-q_j} \neq 0,$ *и непрерывная функция на контуре* Γ *и* $Ind A_1(t) = æ,$ *здесь* $c(t)$ *из класса Гёльдера.*

Тогда, когда индексом задачи $æ - q^{(2)} = 0$ *в этом случае, однородная задача является разрешимой. При* $æ - q^{(2)} > 0$ *рассматриваемая неоднородная краевая задача сопряжения, безусловно разрешима. Когда индекс задачи Римана* $æ - q^{(2)} < 0$*, тогда рассматриваемая неоднородная задача неразрешима, для разрешимости неоднородной задачи требуем* $\left|æ - q^{(2)}\right|$ *условия разрешимости (4.3.10).*

4.4. Граничная задача Римана с непрерывными коэффициентами в сингулярном случае, когда коэффициент характеризует особенности аналитического вида

В данном параграфе исследуется граничная задача Римана в сингулярном случае с непрерывными коэффициентами, когда коэффициент характеризует нулей и полюсов аналитического вида. Установлено, что число решений задачи в классе функций, ограниченных на контуре Γ, не меняется от наличия нулей аналитического характера у коэффициента задачи и уменьшаются на суммы порядков всех полюсов аналитического вида.

Пусть дан контур -Г, состоящий из $m+1$ простых замкнутых контуров Ляпунова $\Gamma_0, \Gamma_1, ..., \Gamma_m$, ограничивающих односвязную область D^+, дополнительную к ней часть плоскости, состоящую из суммы m конечных односвязных областей D_k^- $(k = 1, 2, ..., m)$ и бесконечной области D_k^-, будем в дальнейшем для краткости называть также областью и обозначим через D^-.

ЗАДАЧА R$_{4.4}$. Необходимо найти функции $W^{\pm}(z)$, аналитические в областях $D^{\pm}$, имеющие почти всюду на контуре Г, предельные угловые значения, $W^{\pm}(t)$ удовлетворяющие граничные условия:

$$W^{+}(t)=\frac{\prod\limits_{r=1}^{\mu}(t-\xi_r)^{d_r}}{\prod\limits_{j=1}^{\gamma}(t-\eta_j)^{q_j}}A_1(t)W^{-}(t)+c(t), \tag{4.4.1}$$

здесь ξ_r, η_j –некоторые точки контура Г и ξ_r – является нулями функции $A_1(t)$, η_j –являются полюсами функции $A_1(t)$, d_r, q_j-натуральные числа, $A_1(t)$–непрерывная функция, $c(t) \in H(\Gamma)$.

Обозначим индексом задачи Римана $æ = IndA_1(t)$, $p=\sum\limits_{j=1}^{\nu} p_j$, $m=\sum\limits_{k=1}^{\mu} m_k$. Решение будем искать в классе функций ограниченных на контуре Г.

Из краевого условия (4.4.1) видно, что в классе функций, ограниченных на контуре Г, а функция $W^{-}(z)$, представлена в виде:

$$W^{-}(t)=\prod_{j=1}^{\gamma}(t-\eta_j)^{-q_j}\cdot t^{-q_j}W_1^{-}(t)+c(t). \tag{4. 4.2}$$

От функции $c(t)$ требуем, чтобы она в точке $t=\xi_r$ была дифференцируема $q-1$ раз. Построим интерполяционный многочлен $Q(t)$, так чтобы для неё выполнялось следующее равенство:

$$Q^{(i)}(\xi_r)=c^{(i)}(\xi_r), \quad (r=1,2,...,\mu, \quad i=0,1,...,d_{r-1}). \tag{4.4.3}$$

При помощи равенства (4.4.3), краевое условие (4.4.2) преобразуется следующим образом:

$$W^{+}(t)-Q(t)=\prod_{r=1}^{\mu}(t-\xi_r)^{d_r}t^{-q_j}W_1^{-}(t)+c(t)-Q(t), \qquad (4.4.4)$$

или

$$W^{+}(t)-Q(t)=\prod_{r=1}^{\mu}(t-\xi_r)^{d_r}\cdot t^{-q_j}W_1^{-}(t)+\prod_{r=1}^{\mu}(t-\xi_r)^{d_r}c_1(t),$$

Разделив обе части краевого условия на $\prod_{r=1}^{\mu}(t-\xi_r)^{d_r}$, получим следующее равенство:

Тогда:

$$\frac{W^{+}(t)-Q(t)}{\prod_{r=1}^{\mu}(t-\xi_r)^{d_r}}=t^{-q_j}W_1^{-}(t)+c_1(t),$$

и

$$W_1^{+}(t)=t^{-q_j}W_1^{-}(t)+c_1(t), \qquad (4.4.5)$$

где $W_1^{+}(t)=\dfrac{W^{+}(t)-Q(t)}{\prod_{r=1}^{\mu}(t-\xi_r)^{d_r}}$.

Итак, мы получили задачу Римана в регулярном случае. Задача Римана для случая, удовлетворяющего условиям Гёльдера, когда функция $A(t)$ и $c(t)$ из класса Н(Г) данной задачи в замкнутой форме была решена Ф.Д. Гаховым. Далее, Б.В. Хведелидзе обобщил эти решения на случай многосвязной области и $c(t)-$суммируемая функция со степенью $q>1$.

В данном случае мы доказали, что результаты Ф.Д. Гахова, относительно краевой задачи Римана, верны и тогда, когда $A(t)$ лишь непрерывная функция.

Известно, что каждую суммируемую функцию, можно представить в виде:

$$\varphi(t) = \varphi^{+}(t) - \varphi^{-}(t), \tag{4.4.6}$$

где $\varphi^{\pm}(t)$ почти всюду являются предельными значениями функций $\varphi^{\pm}(z)$ аналитических в областях $D^{\pm}$. Представление (4.4.6) единственно, если предположить, что $\varphi^{\pm}(t) \in L_p(\Gamma)$ и $\varphi^{-}(\infty) = 0$.

Функции $\varphi^{\pm}(t)$ даются при помощи формул Сохоцкого:

$$\varphi^{+}(t) = \frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau ,$$

$$\varphi^{-}(t) = -\frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau. \tag{4.4.7}$$

Обоснование формул (4.4.7), на случай суммируемой функции $\varphi(t)$ дано И.В. Приваловым.

Далее, Б.В. Хведелидзе показал, что принадлежность функции $\varphi(t)$ классу $L_p(\Gamma)$, $(p > 1)$, влечет принадлежность $\varphi^{+}(t)$ и $\varphi^{-}(t)$ к тому же классу и $L_p(\Gamma)$ – является ограниченным оператором в пространстве, т.е.:

$$\left(\int_{\Gamma}\left|\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau\right|^{p} ds\right)^{\frac{1}{p}} \le M_p\left(\int_{\Gamma}|\varphi(t)|^{p} ds\right)^{\frac{1}{p}},$$

где M_p – постоянная, не зависящая от $\varphi(t)$. Отсюда следует, что:

$$\left\|\varphi^{\pm}\right\|_{L_p} \le \frac{1}{2}\|\varphi\|_{L_p} + \frac{M_p}{2}\|\varphi\|_{L_p} = \frac{M_{p+1}}{2}\|\varphi\|_{L_p},$$

где $\|\varphi\|_{L_p} = M_p \left(\int\limits_{\Gamma} |\varphi(t)|^p \, ds \right)^{\frac{1}{p}}$.

Сказанное позволит сформулировать задачу Римана, следующим образом:

Найти функцию $\varphi(t)$, принадлежащую классу $L_p(\Gamma)$ и удовлетворяющую краевому условию (4.4.6), где функции $\varphi^+(t)$ и $\varphi^-(t)$ обозначены операторами, заданными равенствами (4.4.7).

В основе исследования лежит следующая простая идея. В случае $A_1(t) = 1$, краевая задача Римана обращается в задачу о скачке, который безусловно, разрешимо и однозначен в классе L_p. Оказывается, что малые отклонения коэффициента функций $A_1(t)$ от единиц, не имеют характера решения задачи. Переходя к общему случаю, производится при помощи приближения функций $\ln A_1(t)$ функциями, удовлетворяющими условия Гёльдера:

Случай $æ_0 = æ_1 = ... = æ_m = 0$. В этом случае $\ln A_1(t) -$является непрерывной функцией. Приблизим функцию f так, чтобы она удовлетворяла условия Гёльдера:

$$\left| e^{(\ln A(t) - f)} - 1 \right| \le c < \frac{2}{1 + M_p}. \tag{4.4.8}$$

Далее, используя метод Ф.Д. Гахова, функцию $A_1(t) = e^f$, представим в виде отношения $A_1(t) = \dfrac{\chi^+(t)}{\chi^-(t)}$, функциями непрерывной в замкнутых областях $D^{\pm} + \Gamma$ нигде не обращающихся в нуль, где $\chi^{\pm}(t) -$аналитические функции в областях $D^{\pm}$.

Введём новые функции $\varphi_1^{\pm}(t)=\varphi^{\pm}(t)\left[\chi^{\pm}(t)\right]^{-1}$, относительно которых задача Римана перепишется следующим образом:

$$\varphi_1^{+}(t)=\frac{A(t)}{A_1(t)}\varphi_1^{-}(t)+\frac{c(t)}{\chi^{+}(t)}. \tag{4.4.9}$$

Задача (4.4.9) в случае $æ_0=æ_1=...=æ_m=0$ безусловно, разрешима и имеет единственное решение.

❖ Перейдём к исследованию самого общего случая: $æ-q=0$, вводя новые неизвестные функции, получим:

$$\varphi_*^{+}(z)=\prod_{r=1}^{\mu}(z-z_r)^{æ_r}\varphi^{+}(z), \qquad \varphi_*^{-}(z)=\varphi^{-}(z), \qquad (z_r\in D_k^{-}).$$

Придём к задаче

$$\varphi_*^{+}(t)=A^*(t)\varphi_*^{-}(t)+c^*(t), \qquad c^*(t)=\prod_{r=1}^{\mu}(t-z_r)^{æ_r}c(t),$$

$$A^*(t)=\prod_{r=1}^{\mu}(t-z_r)^{d_r}A(t),$$

отметим, что

$$æ_r^*=\frac{1}{2\pi}\left[\arg A_1^*(t)\right]_{\Gamma_r}=æ=0, \quad r=1,\ 2,...,m,$$

$$æ_0^*=\frac{1}{2\pi}\left[\arg A_1^*(t)\right]_{\Gamma_0}=0.$$

Отсюда, в случае $æ=0$, задача, безусловно, разрешима и имеет единственное решение.

❖ Задачу перепишем в следующем виде, при $æ-q>0$.

$$\frac{\varphi^+(t)}{(t-z_0)^{æ}} - \frac{\mathrm{P}_{æ-q-1}(t)}{(t-z_0)^{æ}} =$$

$$= \frac{A(t)\varphi^-(t)}{(t-z_0)^{æ}} + \frac{c(t)}{(t-z_0)^{æ}} - \frac{\mathrm{P}_{æ-q-1,}(t)}{(t-z_0)^{-æ}},$$

где $z_0 \in D^+$, $\mathrm{P}_{æ-q-1}(t)-$многочлен степени не меньше æ-1 подобран, так, чтобы функция $\frac{\varphi^+(z)}{(z-z_0)^{æ}} - \frac{\mathrm{P}_{æ-q-1}(z)}{(z-z_0)^{æ}}$ не имела полюс в точке z_0. Заметим, что $Ind\,\frac{A(t)}{(t-z_0)^{æ}} = 0$ и обозначим, оператор, решающий задачу Римана с коэффициентом $\frac{A(t)}{(t-z_0)^{æ}}$ через $\mathrm{R}^{\pm}$. Тогда, будем иметь, следующее равенство:

$$\left[\frac{\varphi^+(t) - \mathrm{P}_{æ-q-1}(t)}{(t-z_0)^{æ}}\right] = R^+(t)\left[c(t) - \frac{\mathrm{P}_{æ-q-1}(t)}{(t-z_0)^{æ}}\right], \qquad (4.4.10)$$

$$\varphi^-(t) = R^-(t)\left[\left(\frac{c(t)}{(t-z_0)^{æ}} - \frac{\mathrm{P}_{æ-q-1}(t)}{(t-z_0)^{æ}}\right)(t-z_0)^{-æ}\right].$$

Из первого равенства, найдём $\varphi^+(t)$:

$$\varphi^+(t) = \mathrm{P}_{æ-q-1}(t) + (t-z_0)^{æ} R^+(t)\left[\left(\frac{c(t)}{(t-z_0)^{æ}} - \frac{\mathrm{P}_{æ-q-1}(t)}{(t-z_0)^{æ}}\right)\right]. \qquad (4.4.11)$$

❖ Запишем задачу иначе, когда индекс задачи: $æ - q < 0$.

$$\varphi^+(t)(t-z_0)^{-æ} = A(t)(t-z_0)^{-æ}\varphi^-(t) + c(t)(t-z_0)^{-æ},$$

очевидно, что $Ind(t-z_0)^{-æ}A(t)=0$, а $(t-z_0)^{-æ}$ – аналитическая функция в области D^+. Обозначим снова через $R^{\pm}$ оператора, обращающегося к задаче Римана с коэффициентом $\dfrac{1}{(t-z_0)^{æ}}$.

Тогда, получим:

$$\begin{aligned}\varphi^+(z)&=(z-z_0)^{æ}R^+(t)[(t-z_0)^{æ}c(t)],\\ \varphi^-(z)&=R^-(t)\frac{c(t)}{(t-z_0)^{-æ}}.\end{aligned}\tag{4.4.12}$$

Функция, определяемая выражением (4.4.12), в общем виде, в точке z_0, имеет полюс порядка $|æ-q|$. Поэтому, для того, чтобы существовало решение поставленной задачи, должно выполняться, условие разрешимости $|æ-q|$:

$$\int_{\Gamma}(t-z_0)^{æ}R^+(t)\frac{c_1(t)}{(t-z_0)^{æ}}dt=0.\tag{4.4.13}$$

При выполнении равенства (4.4.13) решение искомой задачи существует и оно единственно.

ТЕОРЕМА 4.4.1.

Краевая задача Римана в случае $æ-q=0$*, безусловно, разрешима и имеет единственное решение. Задача, также в случае,* $æ-q>0$*, безусловно, разрешима и имеет* $æ-q$ *линейно–независимое решение. Задача разрешима лишь в случае,* $æ-q<0$*, при выполнении* $|æ-q|$ *условий разрешимости, решение существует и оно единственно.*

4.5. Граничная задача Римана с непрерывными коэффициентами в сингулярном случае, когда коэффициент имеет особенности сопряжённо-аналитического вида

В данном параграфе исследуется граничная задача Римана в сингулярном случае с непрерывными коэффициентами, когда коэффициент задачи Римана характеризует собой нулей и полюсов сопряжённо-аналитического вида.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Пусть Γ-контур, состоящий из $m+1$ простых замкнутых контуров Ляпунова $\Gamma_0, \Gamma_1, ..., \Gamma_m$, ограничивающих односвязную область D^+, дополнительная к ней часть плоскости, состоящая из суммы m конечных односвязных областей D_k^- $(k = 1, 2, ..., m)$ и бесконечной области D_k^-, будем в дальнейшем для краткости называть также областью и обозначим через D^-.

ЗАДАЧА R$_{4.5}$. Найти функции $W^{\pm}(z)$, аналитические в областях $D^{\pm}$ имеющие почти всюду на контуре Г, предельные значения, $W^{\pm}(t)$ удовлетворяющие граничному условию:

$$W^+(t) = \frac{\prod_{r=1}^{\mu}\left(\overline{t-\xi_r}\right)^{d_r}}{\prod_{j=1}^{\gamma}\left(\overline{t-\eta_j}\right)^{q_j}} A_1(t) W^-(t) + c(t), \qquad (4.5.1)$$

здесь ξ_r, η_j – некоторые точки контура Г и ξ_r – является нулями функции $A_1(t)$, η_j –являются полюсами функции $A_1(t)$, d_r, q_j - натуральные числа, $A_1(t)$ – непрерывная функция, $c(t) \in H(\Gamma)$.

Обозначим $æ = IndA_1(t)$, $p = \sum_{j=1}^{\nu} p_j$, $m = \sum_{k=1}^{\mu} m_k$. Решение будем искать в классе функций, ограниченных на контуре Г.

Очевидны следующие равенства:

$$\prod_{r=1}^{\mu}\left(\overline{t-\xi_r}\right)^{d_r} = \prod_{r=1}^{\mu}\left(t-\xi_r\right)^{d_r} \cdot e^{-2i\sum_{r=1}^{\mu}\psi_r^{(1)}d_r},$$

$$\prod_{j=1}^{\gamma}\left(\overline{t-\eta_j}\right)^{q_j} = \prod_{j=1}^{\gamma}\left(t-\eta_j\right)^{q_j} \cdot e^{-2i\sum_{j=1}^{\gamma}\psi_j^{(2)}q_j}. \tag{4.5.2}$$

где $e^{-2i\sum_{r=1}^{\mu}\psi_r^{(1)}d_r}$ и $e^{-2i\sum_{j=1}^{\gamma}\psi_j^{(2)}q_j}$ − непрерывная функция на контуре Г и их индексы, соответственно равны $-d$ и $-q$.

Подставляя, выражения (4.5.2) в равенства (4.5.1), получим:

$$W^+(t) = \prod_{r=1}^{\mu}\left(t-\xi_r\right)^{d_r} \cdot \prod_{j=1}^{\gamma}\left(t-\eta_j\right)^{-q_j} A_2(t)W^-(t) + c(t), \tag{4.5.3}$$

где $A_2(t) = A_1(t)\cdot e^{-2i\left(\sum_{j=1}^{\gamma}\psi_j^{(2)}q_j - \sum_{r=1}^{\mu}\psi_r^{(1)}d_r\right)}$.

Отсюда, следует, что $IndA_2(t) = IndA_1(t) + æ + q - d$, $æ = IndA_1(t)$. Из краевого условия (4.5.3) видно, что в классе функций, ограниченных на контуре Г, и функция $W^-(t)$ представлена в виде:

$$W^-(t) = \prod_{j=1}^{\gamma}\left(t-\xi_r\right)^{d_r} \cdot t^{-q_j} W_1^-(t) + c(t). \tag{4.5.4}$$

От функции $c(t)$ требуем, чтобы она в точке $t=\xi_r$ была дифференцируема $p-1$ раз. Построим интерполяционный многочлен $Q(t)$ так, чтобы для неё выполнялись следующие условия:

$$Q^{(i)}(\xi_r)=c^{(i)}(\xi_r), \quad (r=1,2,...,\mu, \quad i=0,1,...,d_{r-1}). \tag{4.5.5}$$

При помощи равенства (4.5.5), краевое условие (4.5.4), преобразуется следующим образом:

$$W^{+}(t)-Q(t)=\prod_{r=1}^{\mu}(t-\xi_r)^{d_r}t^{-q_j}W_1^{-}(t)+c(t)-Q(t), \tag{4.5.6}$$

или

$$W^{+}(t)-Q(t)=\prod_{r=1}^{\mu}(t-\xi_r)^{d_r}\cdot t^{-q_j}W_1^{-}(t)+\prod_{r=1}^{\mu}(t-\xi_r)^{d_r}c_1(t),$$

$$\frac{W^{+}(t)-Q(t)}{\prod_{r=1}^{\mu}(t-\xi_r)^{d_r}}=t^{-q_j}W_1^{-}(t)+c_1(t),$$

$$W_1^{+}(t)=t^{-q_j}W_1^{-}(t)+c_1(t), \tag{4.5.7}$$

где

$$W_1^{+}(t)=\frac{W^{+}(t)-Q(t)}{\prod_{r=1}^{\mu}(t-\xi_r)^{d_r}}.$$

Итак, мы получили задачу Римана в регулярном случае. Задача Римана для случая, удовлетворяющего условия Гёлдера, когда функции $A(t)$ и $c(t)$ из класса Гёлдера, задача в замкнутой форме была решена Ф.Д. Гаховым. Далнейшем, Б.В. Хведелидзе обобщил эти решения на случай многосвязной области. В настоящем параграфе, мы докажем, что результаты Ф.Д. Гахова, относительно краевой задачи Римана, верны и тогда, когда $A(t)$ лишь непрерывная функция.

Известно, что каждую суммируемую функцию можно представить в виде:

$$\varphi(t) = \varphi^{+}(t) - \varphi^{-}(t), \tag{4.5.8}$$

где $\varphi^{\pm}(t)$ почти всюду являются предельными угловыми значениями функций $\varphi^{\pm}(z)$ аналитических в областях $D^{\pm}$. Представление (4.5.8) единственно, если предположить, что $\varphi^{\pm}(t) \in L_p(\Gamma)$ и $\varphi^{-}(\infty) = 0$.

Функции $\varphi^{\pm}(t)$ даются при помощи формулами Сохоцкого

$$\varphi^{+}(t) = \frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau ,$$

$$\varphi^{-}(t) = -\frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau \tag{4.5.9}$$

В своей работе Б.В. Хведелидзе, показал, что принадлежность функции $\varphi(t)$ классу $L_p(\Gamma)$, $(p > 1)$, влечет принадлежность $\varphi^{+}(t)$ и $\varphi^{-}(t)$ к тому же классу и $L_p(\Gamma) -$является ограниченным оператором, т.е.,

$$\left(\int_{\Gamma}\left|\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau\right|^{p} ds\right)^{\frac{1}{p}} \le M_p\left(\int_{\Gamma}|\varphi(t)|^{p} ds\right)^{\frac{1}{p}},$$

где M_p постоянная, не зависящая от $\varphi(t)$. Отсюда следует, что

$$\left\|\varphi^{\pm}\right\|_{L_p} \le \frac{1}{2}\|\varphi\|_{L_p} + \frac{M_p}{2}\|\varphi\|_{L_p} = \frac{M_{p+1}}{2}\|\varphi\|_{L_p}$$

где $\|\varphi\|_{L_p} = M_p \left(\int_{\Gamma} |\varphi(t)|^p \, ds \right)^{\frac{1}{p}}$.

Сказанное позволяет формулировать задачу Римана, следующим образом:

Найти функцию $\varphi(t)$, принадлежащую классу $L_p(\Gamma)$, удовлетворяющую краевому условию (4.5.7), где $\varphi^+(t)$ и $\varphi^-(t)$, означаются оператором, заданным равенством (4.5.8).

В основе исследования лежит следующая простая идея. В случае $A_1(t) = 1$, краевая задача Римана обращается к задаче о скачке, который безусловно, разрешим и однозначен в классе L_p. Оказывается, что малые отклонения коэффициента функций $A_1(t)$ от единиц, не имеет характера решения задачи. Переходя к общему случаю, производится при помощи приближения функции $\ln A_1(t)$ функциями, удовлетворяющими условия Гёльдера.

Случай $æ_0 = æ_1 = ... = æ_m = 0$. В этом случае, $\ln A_1(t)-$является непрерывной функцией. Приблизим её функцию f так, чтобы она удовлетворяла условиям Гёльдера:

$$\left| e^{(\ln A(t) - f)} - 1 \right| \le c < \frac{2}{1 + M_p}. \tag{4.5.10}$$

Далее, используя метод Ф.Д. Гахова, функцию $A_1(t) = e^f$ представим в виде отношения $A_1(t) = \dfrac{\chi^+(t)}{\chi^-(t)}$, непрерывны функций в замкнутых областях $D^{\pm} + \Gamma$ и нигде не обращающихся в нуль, где $\chi^{\pm}(t)-$аналитические функции в областях $D^{\pm}$.

Введём новые функции:

$$\varphi_1^{\pm}(t) = \varphi^{\pm}(t)\left[\chi^{\pm}(t)\right]^{-1},$$

Относительно, которых задача Римана выглядит, следующим образом:

$$\varphi_1^{+}(t) = \frac{A(t)}{A_1(t)}\varphi_1^{-}(t) + \frac{c(t)}{\chi^{+}(t)} \tag{4.5.11}$$

задача (4.5.11) в случае $æ_0 = æ_1 = ... = æ_m = 0$, безусловно, разрешима и имеет единственное решение.

❖ Перейдём к исследованию самого общего случая $æ - p = 0$, вводя новые неизвестные функции, получим:

$$\varphi_*^{+}(z) = \prod_{r=1}^{\mu}(z - z_r)^{æ_r}\varphi^{+}(z), \qquad \varphi_*^{-}(z) = \varphi^{-}(z), \qquad (z_r \in D_k^{-}).$$

Перейдём к задаче:

$$\varphi_*^{+}(t) = A^*(t)\varphi_*^{-}(t) + c^*(t), \qquad c^*(t) = \prod_{r=1}^{\mu}(t - z_r)^{æ_r} c(t),$$

$$A^*(t) = \prod_{r=1}^{\mu}(t - z_r)^{d_r} A(t),$$

отметим, что

$$æ_r^* = \frac{1}{2\pi}\left[\arg A_1^*(t)\right]_{\Gamma_r} = æ = 0, \quad r = 1,\ 2, ..., m,$$

$$æ_0^* = \frac{1}{2\pi}\left[\arg A_1^*(t)\right]_{\Gamma_0} = 0.$$

Отсюда, в случае $æ = 0$, задача, безусловно, разрешима и имеет единственное решение.

❖ Задачу перепишем в следующем виде, при индексе $æ - p > 0$.

$$\frac{\varphi^+(t)}{(t-z_0)^{æ}} - \frac{P_{æ-p-1}(t)}{(t-z_0)^{æ}} =$$

$$= \frac{A(t)\varphi^-(t)}{(t-z_0)^{æ}} + \frac{c(t)}{(t-z_0)^{æ}} - \frac{P_{æ-p-1,}(t)}{(t-z_0)^{-æ}},$$

где $z_0 \in D^+$, $P_{æ-p-1}(t)$ – многочлен степени не меньше æ-1, подобранные так, чтобы функция $\frac{\varphi^+(z)}{(z-z_0)^{æ}} - \frac{P_{æ-p-1}(z)}{(z-z_0)^{æ}}$ не имела полюса в точке z_0.

Заметим, что $Ind\frac{A(t)}{(t-z_0)^{æ}} = 0$ и обозначим оператора, решающего задачи Римана с коэффициентом $\frac{A(t)}{(t-z_0)^{æ}}$ через $R^{\pm}$. Тогда будем иметь, следующее равенство:

$$\left[\frac{\varphi^+(t) - P_{æ-p-1}(t)}{(t-z_0)^{æ}}\right] = R^+(t)\left[c(t) - \frac{P_{æ-p-1}(t)}{(t-z_0)^{æ}}\right], \qquad (4.5.12)$$

$$\varphi^-(t) = R^-(t)\left[\left(\frac{c(t)}{(t-z_0)^{æ}} - \frac{P_{æ-p-1}(t)}{(t-z_0)^{æ}}\right)(t-z_0)^{-æ}\right].$$

Из первого равенства найдём $\varphi^+(t)$:

$$\varphi^+(t) = P_{æ-p-1}(t) + (t-z_0)^{æ} R^+(t)\left[\left(\frac{c(t)}{(t-z_0)^{æ}} - \frac{P_{æ-p-1}(t)}{(t-z_0)^{æ}}\right)\right]. \qquad (4.5.13)$$

❖ Запишем задачу иначе, когда индекс задачи: $æ - p < 0$.

$$\varphi^+(t)(t-z_0)^{-æ} = A(t)(t-z_0)^{-æ}\varphi^-(t) + c(t)(t-z_0)^{-æ}$$

Очевидно, что $Ind(t-z_0)^{-æ}A(t)=0$, а $(t-z_0)^{-æ}$ – аналитическая функция в области D^+. Обозначим снова через $R^{\pm}$ оператора, обращающего задачу Римана с коэффициентом $\dfrac{1}{(t-z_0)^{æ}}$.

Тогда, получим:

$$\varphi^+(z)=(z-z_0)^{æ}R^+(t)[(t-z_0)^{æ}c(t)],$$
$$\varphi^-(z)=R^-(t)\frac{c(t)}{(t-z_0)^{-æ}}. \tag{4.5.14}$$

Функция, определяемая выражением (4.5.14), в общем случае, имеет в точке z_0 полюс порядка $|æ-p|$. Поэтому, для того, чтобы существовало решение поставленной задачи, нужно, выполнить, условие разрешимости $|æ-p|$:

$$\int_\Gamma (t-z_0)^{æ}R^+(t)\frac{c_1(t)}{(t-z_0)^{æ}}dt=0. \tag{4.5.15}$$

При выполнении равенства (4.5.15), решение искомой задачи существует и оно единственно.

ТЕОРЕМА 4.5.1.

Краевая задача Римана в случае $æ-p=0$, *безусловно, разрешима и имеет единственное решение. Задача также, в случае,* $æ-p>0$, *безусловно, разрешима и имеет* $æ-p$ *линейно – независимые решения. Задача разрешима лишь, в случае,* $æ-p<0$, *при выполнении* $|æ-p|$ *условий разрешимости* $S_k g=0$. *При выполнении условий разрешимости, решение существует и оно единственно.*

4.6. Задача сопряжения обобщенных аналитических функций в сингулярном случае

В этом параграфе диссертационной работы исследуется задача сопряжения обобщенных аналитических функций в сингулярном случае. Установлено, что число решений задачи в классе функций, ограниченных на контуре, не изменяется от наличия нулей у коэффициента задачи и уменьшается на суммарный порядок всех полюсов.

Рассмотрим обобщенную систему Коши-Римана

$$\partial_{\bar{z}} W = A(z)W + B(z)\overline{W^{-}(z)} + C(z), \tag{4.6.1}$$

где $W = u + iv,\ \overline{W} = u - iv,\quad \dfrac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x}\right),\quad A(z),\ B(z) -$ заданный

на всей плоскости E и $A(z),\ B(z) \in L_p$, при $p > 2$ то есть, если E круг

$|z| \le 1,$ то $A(z),\ B(z)$ и $|z|^{-2} A\left(\dfrac{1}{z}\right),\quad |z|^{-2} B\left(\dfrac{1}{z}\right) \in L_p(E_1),\ p > 2$.

Эти условия выполняются, например, если $A(z),\ B(z)$ измеримы и ограниченны, и в окрестности бесконечно удаленной точки допускается оценка

$$|A(z)|,\ |B(z)| < \frac{M}{|z|^{1+\varepsilon}},\ M, \varepsilon > 0.$$

Функция $W(z)$ называется регулярным решением уравнения (4.6.1), если она непрерывна, имеет обобщенную производную Соболева $\partial_{\bar{z}} W(z)$ и почти всюду удовлетворяет (4.6.1).

Требуется найти решение $W^{+}(z), W^{-}(z)$ регулярные в D и D^{-} и непрерывные вплоть до контура, где они сопряжены условием:

$$W^{+}(t)=\frac{\prod\limits_{r=1}^{R}(t-\eta_r)^{d_r}}{\prod\limits_{m=1}^{M}(t-\xi_m)^{q_m}}a(t)W^{-}(t)+$$

$$+\frac{\prod\limits_{r=1}^{R}(t-\eta_r)^{d_r}}{\prod\limits_{m=1}^{M}(t-\xi_m)^{q_m}}b(t)\overline{W^{-}(t)}+c(t),\ W^{-}(\infty)=0. \qquad (4.6.2)$$

Как показал И.Н. Векуа [21], всякое решение уравнения (4.6.1), допускает представление:

$$W(z)=\varphi(z)\exp\omega(z), \qquad (4.6.3)$$

где $\varphi(z)$ - голоморфная функция и

$$\omega(z)=-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{E}B(\zeta)\frac{\overline{W(\zeta)}}{W(\zeta)}\cdot\frac{ds}{\zeta-z}, \qquad (4.6.4)$$

$$\zeta=\xi+i\eta,\ ds=d\xi\cdot d\eta.$$

Введем следующие обозначения:

$$\sum_{r=1}^{R}d_r=d,\ \sum_{m=1}^{M}q_m=q.$$

Переходим, непосредственно к исследованию задачи (4.6.2).

Предположим, что функция $c(t)$ в окрестности точек $t=\eta_r$ имеет производные порядка d_r-1, удовлетворяющее условию Гёльдера.

Построим интерполяционный многочлен $T(t)$ степени $d-1$ так, чтобы она удовлетворяла следующим условиям:

$$c^{(\nu)}(\eta_r) = T^{(\nu)}(\eta_r),\ (r = 1,2,\dots, d_r - 1). \tag{4.6.5}$$

Такой многочлен определяется единственным образом и в дальнейшем понадобится для представления (4.6.2) к задаче, коэффициенты которой не обращаются в нуль.

Вычитаем из обеих частей (4.6.2) полином $T(t)$, имеем:

$$W^+(t) - T(t) = \frac{\prod_{r=1}^{R}(t-\eta_r)^{d_r}}{\prod_{m=1}^{M}(t-\xi_m)^{q_m}} a(t)W^-(t) +$$

$$+ \frac{\prod_{r=1}^{R}(t-\eta_r)^{d_r}}{\prod_{m=1}^{M}(t-\xi_m)^{q_m}} b(t)\overline{W^-(t)} + c(t) - T(t),$$

или

$$W^+(t) - T(t) = \frac{\prod_{r=1}^{R}(t-\eta_r)^{d_r}}{\prod_{m=1}^{M}(t-\xi_m)^{q_m}} a(t)W^-(t) +$$

$$+ \frac{\prod_{r=1}^{R}(t-\eta_r)^{d_r}}{\prod_{m=1}^{M}(t-\xi_m)^{q_m}} b(t)\overline{W^-(t)} + \prod_{r=1}^{R}(t-\eta_r)^{d_r} c_1(t). \tag{4.6.6}$$

Разделив краевое условие (4.6.6) на $\prod_{r=1}^{R}(t-\eta_r)^{d_r}$, получим

$$\frac{W^+(t) - T(t)}{\prod_{r=1}^{R}(t-\eta_r)^{d_r}} = \frac{a(t)}{\prod_{m=1}^{M}(t-\xi_m)^{q_m}} W^-(t) + \frac{b(t)}{\prod_{m=1}^{M}(t-\xi_m)^{q_m}} \overline{W^-(t)} + c_1(t).$$

или

$$W_1^+(t) = \frac{a(t)}{\prod\limits_{m=1}^{M}(t-\xi_m)^{q_m}} W^-(t) + \frac{b(t)}{\prod\limits_{m=1}^{M}(t-\xi_m)^{q_m}} \overline{W^-(t)} + c_1(t). \qquad (4.6.7)$$

где

$$W_1^+(t) \frac{W^+(t) - T(t)}{\prod\limits_{r=1}^{R}(t-\eta_r)^{d_r}}.$$

Полагая в равенстве (4.6.7):

$$\overline{W^-(z)} = \prod_{m=1}^{M} \overline{(z-\xi_m)}^{q_m} \cdot \overline{z^{-m}} \overline{W_1^-(z)} = \prod_{m=1}^{M}(z-\xi_m)^{q_m} \cdot \overline{z^{-m}} e^{-2i\sum\limits_{m=1}^{M}\theta_m q_m},$$

где $\theta_m = \arg(t-\xi_m)$, преобразуем краевое условие (4.6.7), в виде:

$$W_1^+(t) = a(t)\cdot t^{-m} W_1^-(t) + b(t)\cdot \overline{t^{-m}} \exp(-2i\sum_{m=1}^{M}\theta_m q_m) + c_1(t).$$

Всякое решение уравнения (4.6.1), допускает представление:

$$W(z) = \varphi(z)\exp\omega(z), \qquad (4.6.8)$$

где $\varphi(z)$ - голоморфная функция и

$$\omega(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_E B(\zeta)\frac{\overline{W(\zeta)}}{W(\zeta)}\cdot\frac{ds}{\zeta - z}, \qquad (4.6.9)$$

где $\zeta = \xi + i\eta,\ ds = d\xi\cdot d\eta$. Функция $\omega(z)-$непрерывная на всей плоскости и $\omega^-(\infty) = 0$.

В формуле (4.6.8) $\varphi(z)$ выражается через $W(z)$. Имеет место и обратное утверждение: $W(z)$ выражается через $\varphi(z)$ формулу:

$$W(z)=\varphi(z)R\left[\frac{\overline{\varphi(z)}}{\varphi(z)}\right], \qquad (4.6.10)$$

где R - оператор обращения интегрального уравнения:

$$V(z)=1-\frac{1}{\pi}\iint_E \frac{A(\zeta)V(\zeta)+B(\zeta)\dfrac{\overline{\varphi(\zeta)}}{\varphi(\zeta)}\cdot\overline{V(\zeta)}}{\zeta-z}ds.$$

Через l - обозначим число решений однородной задачи Римана. Через p - обозначим число условий разрешимости неоднородной задачи. Тогда существует следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4.6.1. *Пусть* $a(t)$ *непрерывная функция,* $Inda(t)\cdot t^{-m}=æ-m$, $æ=Ind_{\Gamma}a(t)$, $b(t)$ - *ограничена и измерима,* $c(t)\in L_p$, $p>1$.

И пусть:

$$\sup_{t\in\Gamma}\left|\frac{b(t)}{a(t)}\right|<\frac{2}{1+s_p},$$

где s_p *- норма в* L_p *сингулярного оператора*

$$s_{\mu}=\frac{1}{\pi}\int_{\Gamma}\frac{\mu(\tau)}{\tau-z}d\tau.$$

Тогда:

при $æ-m\geq 0,\ l=2(æ-m),\ p=0;$

при $æ-m<0,\ l=0,\ p=2(æ-m).$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты работы заключаются в следующем:

- Найдены решения уравнения вида: $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \psi(x,\ y)$ в случае, когда коэффициент задачи непрерывная функция, но в конечной точке контура, характеризует особенность аналитического порядка [1-А];

- Найдены решения эллиптических уравнений вида: $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \psi(x,\ y)$, коэффициенты которых являются непрерывной функцией, отметим, что непрерывность функции в конечной точке стремится на бесконечность, либо нарушается условии нормальной разрешимости [14-А];

- Найдены решения эллиптического уравнения первого порядка, вида: $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \psi(x,\ y)$, когда коэффициент задачи Римана имеет особенность дробного порядка [7-А];

- Найдены решение уравнения: $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot W(z)$ в случае, когда коэффициент задачи Римана имеет особенность аналитического характера [11-А];

- Найдены решения уравнения: $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot W(z)$ в случае, когда коэффициент задачи имеет особенность сопряжённо-аналитического характера [12-А];

- Найдены решения уравнения: $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z) \cdot W(z)$ в случае, когда коэффициент задачи характеризует особенность модульного характера [2-А];

- Найдены решения уравнения: $\dfrac{\partial W}{\partial \overline{z}} = A(z) \cdot W(z) + B(z)\overline{W(z)} + c(z)$, в случае, когда коэффициент обладает нулями и полюсами аналитического характера [15-А];

- Найдены решения уравнения: $\dfrac{\partial W}{\partial \overline{z}} = A(z) \cdot W(z) + B(z)\overline{W(z)} + c(z)$, когда коэффициент задачи Римана имеет особенность сопряжённо-аналитического вида [13-А];

- Найдены решения уравнения: $\dfrac{\partial W}{\partial \overline{z}} = A(z) \cdot W(z) + B(z)\overline{W(z)} + c(z)$, когда коэффициенты имеют особенности модульного характера [3-А].

Рекомендации по практическому использованию результатов. Результаты, полученные в диссертационной работе можно применять в теории краевых задач, теории аналитических функций, обобщённо - аналитических и гармонических функций, а также-в теории упругости и электродинамики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

А) СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

[1]. Гахов Ф.Д. Краевые задачи [Текст] /Ф.Д. Гахов // Москва,1977, 640с.

[2]. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения [Текст] / Н.И. Мусхелишвили // Москва, 1968, 511с.

[3]. Смирнов В.И. Курс высшей математики [Текст] /В.И.Смирнов // т.(1) ч.2. 1951. Физматгиз,1959, 289с.

[4]. Михайлов Л.Г. Новый класс особых интегральных уравнений и его применения к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами [Текст] Монография /Л.Г. Михайлов // Душанбе, 1963, 183с.

[5]. Абдуллаев Р.Н. Об условии разрешимости однородной задачи Римана на замкнутых римановых поверхностях [Текст] / Р.Н. Абдуллаев // ДАН СССР 152, №6, 1963, – С.1279-1281.

[6]. Абдуллаев Р.Н. К условиям разрешимости однородной задачи Римана на замкнутых римановых поверхностях [Текст] /Р.Н. Абдуллаев // сообщ. АН Груз. ССР 35 №3, 1964, – С.519-522.

[7]. Абдуллаев Р.Н. Однородная задача Римана на замкнутых Римановых поверхностях [Текст] /Р.Н. Абдуллаев // ДАН СССР 160, №5, 1965, 983-985.

[8]. Батырев А.В. Приближенное решение задачи Римана-Привалова. [Текст] /А.В. Батырев // УМН 11, вып.5, 1956, – С.71-76.

[9]. Башкарёв П.Г. К теории краевых задач со сдвигами [Текст] /П.Г. Башкарёв, А.П. Нечаев. // Докл. АН УССР А, №2, 1973, – С.99-102.

[10]. Беркович Ф.Д. Интегральные уравнения типа свертки с бесконечным числом решений. [Текст] /Ф.Д. Беркович // Сб. «Матем. анализ и его приложения» Изд-во Ростовск, ун-та, 1969, – С.27-33.

[11]. Беркович Ф.Д. О приложении краевых задач с бесконечным индексом к исследованию интегральных уравнений [Текст] /Ф.Д.

Беркович // Материалы Всес. конфер. по краевым задачам, Изд-во Казанск. ун-та, 1970, – С.49-54.

[12]. Беркович Ф.Д., Говоров Н.В. О краевой задаче Карлемана с бесконечным индексом [Текст] /Ф.Д. Беркович, Н.В. Говоров // Сиб. матем. ж. 12, №5, 1971, – С.1001-1014.

[13]. Векуа И.Н. Обобщённые аналитические функции [Текст] /И.Н. Векуа // М.:Физматгиз, 1959, - С.672

[14]. Векуа И.Н. Новые методы решение эллиптических уравнений [Текст] /И.Н. Векуа // М.: - Гостехиздат. – 1948. – С.296

[15]. Векуа И.Н. Системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа и граничные задачи с применением к теории оболочек [Текст] /И.Н. Векуа // - Матем.сб. 1952.Т31(73), 217 – 314с.

[16]. Векуа И.Н. О сингулярных линейных интегральных уравнениях [Текст] /И.Н. Векуа // ДАН СССР 26, №8, 1940, – С.335-338.

[17]. Векуа И.Н. Интегральные уравнения с особым ядром типа Коши [Текст] /И.Н. Векуа // Тр. Тбил. матем. ин-та АН Груз. ССР X, 1941, – С.45-72.

[18]. Векуа И.Н. К теории сингулярных интегральных уравнений [Текст] /И.Н. Векуа // Сообщ. АН Груз. ССР III, №9, 1942, – С.869-876.

[19]. Векуа И.Н. Об одной линейной граничной задаче Римана [Текст] /И.Н. Векуа // Тр. Тбил. матем. ин-та АН Груз. ССР XI, 1942, – С.109-139.

[20]. Векуа И.Н. О некоторых свойствах решений системы уравнений эллиптического типа [Текст] /И.Н. Векуа // ДАН СССР 98, №2, 1954, – С.181-184.

[21]. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции [Текст] /Н.П. Векуа // Москва.: 1959г. – С.632с.

[22]. Векуа Н.П. Об одной обобщенной граничной задаче Карлемана для нескольких неизвестных функций [Текст] /Н.П. Векуа // Изв. АН СССР, сер. матем. 20, №3, 1956, – С.377-384.

[23]. Владимиров В.С. Задача линейного сопряжения для голоморфных функций [Текст] /В.С. Владимиров // Изв. АН СССР, сер. матем. 29, №4, 1965, – С.807-834.

[24]. Гахов Ф.Д. Краевые задачи [Текст] /Ф.Д. Гахов // Матем. сб. 2 (44), №4, 1937, – С.673-683.

[25]. Гахов Ф.Д. Об обратных краевых задачах. [Текст] /Ф.Д. Гахов // ДАН СССР 86, №4, 1952, – С.649-652.

[26]. Гахов Ф.Д. Об обратной краевой задаче для многосвязной области [Текст] /Ф.Д. Гахов // Уч. зап. Ростовск. пед. ин-та 3, 1955, – С.19-27.

[27]. Гахов Ф.Д. О новых типах интегральных уравнений, разрешимых в замкнутой форме [Текст] / Ф.Д. Гахов // Сб. «Проблемы механ. сплошн. среды», Изд-во АН СССР, 1961, – С.102-114.

[28]. Гахов Ф.Д. О нелинейной краевой задаче, обобщающей краевую задачу Римана [Текст] /Ф.Д. Гахов // ДАН СССР 181, №2, 1968, – С.271-274.

[29]. Гахов Ф.Д. Вырожденные случаи особых интегральных уравнений с ядром Коши [Текст] /Ф.Д. Гахов // Дифференц. ур-ния 2, №4, 1966, – С.533-543.

[30]. Гахов Ф.Д. О нелинейной краевой задаче с допустимыми нулями на контуре [Текст] /Ф.Д. Гахов // ДАН СССР 210, №6, 1973, – С.21-24.

[31]. Гахов Ф.Д., Зверович Э.И., Самко С.Г. Приращение аргумента, логарифмический вычет и обобщенный принцип аргумента [Текст] / Ф.Д. Гахов, Э.И. Зверович, С.Г. Самко // ДАН СССР 215, №3, 1974, – С.432-435.

[32]. Гахов Ф.Д., Какичев В.А. Случаи вырождения двумерных сингулярных интегральных уравнений с ядрами Коши и постоянными коэффициентами [Текст] /Ф.Д. Гахов, В.А. Какичев // Сб. «Функцион. анализ и теория функций», вып. 4, Изд-во Казанск. ун-та, 1967, – С.91-96.

[33]. Гахов Ф.Д., Крикунов Ю.М. Топологические методы комплексного переменного и их приложения к обратным краевым задачам [Текст] /Ф.Д. Гахов, Ю.М. Крикунов // Изв. АН СССР, сер. матем. 20, 1956, – С.206-240.

[34]. Гахов Ф.Д., Мельник И.М. Особые точки контура в обратной краевой задаче теории аналитических функций [Текст] /Ф.Д. Гахов, И.М. Мельник // Укр. матем. ж. 11, №1, 1959, – С.25-37.

[35]. Гахов Ф.Д., Хасабов Э.Г. О краевой задаче Гильберта для многосвязной области [Текст] /Ф.Д. Гахов, Э.Г. Хасабов // Изв. вузов, Математика, т. 2, №1, 1958, – С.12-21.

[36]. Гахов Ф.Д., Чибрикова Л.И. О некоторых типах сингулярных интегральных уравнений, разрешаемых в замкнутой форме [Текст] /Ф.Д. Гахов, Л.И. Чибрикова // Матем. сб. 35, №3, 1954, – С.395-436.

[37]. Гахов Ф.Д., Чибрикова Л.И. О краевой задаче Римана для случая пересекающихся контуров [Текст] /Ф.Д. Гахов, Л.И. Чибрикова // Уч. зап. Казанск. ун-та 113, №10, 1953, – С.107-110.

[38]. Данилюк И.И. О задаче Гильберта с измеримыми коэффициентами [Текст] /И.И. Данилюк // Сиб. матем. ж. 1, №2, 1960, – С.171-197.

[39]. Данилюк И.И. К теории одномерных сингулярных уравнений [Текст] /И.И. Данилюк // Сб. «Пробл. механ. сплошн. среды», Изд-во АН СССР, 1961, – С.135-144.

[40]. Зверович Э.И. Краевые задачи со сдвигом на абстрактных римановых поверхностях [Текст] /Э.И. Зверович // ДАН СССР 157, №1, 1964, – С.26-29.

[41]. Зверович Э.И. Краевая задача типа задачи Карлемана для многосвязной области. [Текст] /Э.И. Зверович // Матем. сб. 64 (106), №4, 1964, – С.618-627.

[42]. Зверович Э.И. Краевые задачи со сдвигом на абстрактных римановых поверхностях. [Текст] /Э.И. Зверович // Сиб. матем. ж. VII, №4, 1966, – С.804-819.

[43]. Зверович Э.И. Построение в явном виде аналога ядра Коши на римановых поверхностях некоторых алгебраических функций [Текст] /Э.И. Зверович // Матем. заметки 8, №6, 1970, – С.693-701.

[44]. Зверович Э.И. Односторонние краевые задачи теории аналитических функций [Текст] /Э.И. Зверович, Г.С. Литвинчук // Изв. АН СССР, сер. матем. 28, №5, 1964, – С.1003-1036.

[45]. Зверович Э.И. Краевая задача Карлемана на римановой поверхности с краем [Текст] /Э.И. Зверович, В.А. Чернецкий // Укр. матем. ж. 22, №5, 1970, – С.591-599.

[46]. Иванов В.В. Приближенное решение особых интегральных уравнений [Текст] /В.В. Иванов // ДАН СССР ,№1, 1956, – С.15-18с.

[47]. Карапетянц Н.К., Самко С.Г. Об одном новом подходе к исследованию сингулярных интегральных уравнений со сдвигом [Текст] / Н.К. Карапетянц, С.Г. Самко // ДАН СССР 202, №2, 1972, – С.273-276.

[48]. Карапетянц Н.К., Самко С.Г. Сингулярный интегральный оператор со сдвигом на разомкнутом контуре [Текст] /Н.К. Карапетянц, С.Г. Самко // ДАН СССР 204, №3, – С.536-539.

[49]. Квеселава Д.А. Решение одной граничной задачи теории функций [Текст] /Д.А. Квеселава // ДАН СССР 53, №8, 1946, 683-686.

[50]. Квеселава Д.А. Некоторые граничные задачи теории функций [Текст] / Д.А. Квеселава // Тр. Тбил. матем. ин-та АН Груз. ССР XVI, 1948, – С.39-80.

[51]. Квеселава Д.А. Граничная задача Гильберта и сингулярные интегральные уравнения в случае пересекающихся контуров [Текст] /Д.А. Квеселава // Тр. Тбил. матем. ин-та АН Груз. ССР XVII, 1949, – С.1-27.

[52]. Квеселава Д.А. Задача Римана-Гильберта для многосвязной области [Текст] /Д.А. Квеселава // Сообщ. АН Груз. ССР VI, №8, 1945, – С.581-590 (на груз. яз.).

[53]. Квеселава Д.А. Сингулярные интегральные уравнения с разрывными коэффициентами [Текст] /Д.А. Квеселава // Тр. Тбил. матем. ин-та АН Груз. ССР XIII, 1944, – С.1-27 (на груз. яз. с подробным русским резюме).

[54]. Келдыш М.В. Конформные отображения многосвязных областей на канонические области [Текст] /М.В. Келдыш // УМН VI, 1939, – С.90-119.

[55]. Келдыш М.В., Седов Л.И. Эффективное решение некоторых краевых задач для гармонических функций [Текст] /М.В. Келдыш // ДАН СССР 16, №1, 1937, – С.7-10.

[56]. Купрадзе В.Д. Теория интегральных уравнений с интегралом в смысле главного значения по Коши [Текст] /В.Д. Купрадзе // Сообщ. АН Груз. ССР II, №7, 1941, – С.587-596.

[57]. Купрадзе В.Д. О проблеме эквивалентности в теории особых интегральных уравнений [Текст] /В.Д. Купрадзе // Сообщ. АН Груз. ССР II, №9, 1941, – С.793-798.

[58]. Литвинчук Г.С. Теория Нётера системы сингулярных интегральных уравнений со сдвигом Карламена и комплексно - сопряженными неизвестными [Текст] /Г.С. Литвинчук // Изв. АН СССР, сер. матем. 31, №3, 1967, 563-586; 32, №6, 1968, – С.1414-1417.

[59]. Литвинчук Г.С. Об устойчивости одной краевой задачи теории аналитических функций [Текст] /Г.С. Литвинчук // ДАН СССР 174, №6, 1967, – С.1268-1270.

[60]. Литвинчук Г.С. Об одной задаче, обобщающей краевую задачу Карлемана [Текст] /Г.С. Литвинчук // ДАН СССР 139, №2, 1961, – С.290-293.

[61]. Литвинчук Г.С. Об одном типе особых функциональных уравнений и краевых задач со сдвигом для аналитических функций [Текст] /Г.С. Литвинчук // Изв. АН СССР, сер. матем. 25, №6, 1961, – С.871-886.

[62]. Литвинчук Г.С. К теории краевых задач со сдвигом Карлемана [Текст] /Г.С. Литвинчук // ДАН УССР, сер. А, №11, 1967, – С.1019-1022.

[63]. Литвинчук Г.С. Об индексе и нормальной разрешимости одного класса функциональных уравнений [Текст] /Г.С. Литвинчук // ДАН СССР, 149, №5, 1963, 1029-1032.

[64]. Литвинчук Г.С. К теории обобщенной краевой задачи Карлемана [Текст] /Г.С. Литвинчук, А.П. Нечаев // ДАН СССР 189, №1, 1969, – С.38-41.

[65]. Литвинчук Г.С. Обобщенная краевая задача Карлемана [Текст] /Г.С. Литвинчук, А.П. Нечаев // Матем. сб. 82, №1, 1970, – С.30-54.

[66]. Литвинчук Г.С. О краевой задаче Гильберта со сдвигом [Текст] /Г.С. Литвинчук, Э.Г. Хасабов // ДАН СССР 142, №2, 1962, – С.274-277.

[67]. Литвинчук Г.С. Об индексе обобщенной краевой задачи Гильберта [Текст] /Г.С. Литвинчук, Э.Г. Хасабов // УМН 20, вып. 6, 1965, – С.124-130.

[68]. Литвинчук Г.С. Об одном типе сингулярных интегральных уравнений. [Текст] /Г.С. Литвинчук, Э.Г. Хасабов // Сиб. матем. ж. 5, №3, 1964, – С.608-625.

[69]. Литвинчук Г.С. Один класс сингулярных интегральных уравнений и обобщенная краевая задача типа задачи Карлемана [Текст] /Г.С. Литвинчук, Э.Г. Хасабов // Сиб. матем. ж. 5, №4, 1964, – С.858-880.

[70]. Манджавидзе Г.Ф. О задаче Римана-Привалова с непрерывными коэффициентами [Текст] /Г.Ф. Манджавидзе, Б.В. Хведелидзе // ДАН СССР 123, №5, 1958, – С.791-794.
[71]. Маркушевич А.И. Об одной граничной задаче теории аналитических функций [Текст] /А.И. Маркушевич // Уч. зап. МГУ, т. I, вып. 100, 1946, – С.20-30.
[72]. Михайлов Л.Г. Особые случаи в теории обобщённых аналитических функции [Текст] /Л.Г. Михойлов // научн. Конф., посвящ. Ленинским дням. Тез.докл. АН Таджикистан – Сталинабад. 22-23 апреля 1958г. – С.7-9.
[73]. Михайлов Л.Г. Краевая задача Римана для системы уравнений эллиптического типа [Текст] / Л.Г. Михайлов // Тадж. гос. ун.-т. – Т.4 Труды физико-математического факультета. – Сталинабад, 1955, -С.19-28.
[74]. Михайлов Л.Г. Задача линейного сопряжения решений системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа с аналитическими функциями [Текст] / Л.Г. Михайлов // Учён. Зап. Тадж. гос. ун.-т. –Т.10: Труды физико-математического факультета.– 1957, -С.23-31.
[75]. Михайлов Л.Г. Краевая задача типа Римана для систем дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа [Текст] /Л.Г. Михайлов // Уч. зап. Тадж. ун-та X, 1957, – С.32-79.
[76]. Михайлов Л.Г. Исследование обобщённой системы Коши-Римана, когда коэффициенты имеют особенности первого порядка [Текст] /Л.Г. Михайлов, Н. Усмонов // Доклады Российской академии наук. 2002г. Т.387, №3, – С.309-313.
[77]. Михайлов Л.Г., Усмонов Н. Сингулярные краевые задачи сопряжения [Текст] /Л.Г. Михайлов, Н. Усмонов // Доклады АН СССР. 1959г. Т.129, №3, – С.507-510.

[78]. Мусхелишвили Н.И., Квеселава Д.А. Сингулярные интегральные уравнения с ядрами типа Коши на разомкнутых контурах [Текст] /Н.И. Мусхелишвили, Д.А. Квеселава // Тр. Тбил. матем. ин-та АН Груз. ССР XI, 1942, – С.141-172.

[79]. Рогожин В.С. Некоторые краевые задачи для полигармонического уравнения [Текст] / В.С. Рогожин // Уч. зап. Казанск. ун-та 110, №3, 1950, – С.71-94.

[80]. Рогожин В.С. Новое интегральное представление кусочно-аналитической функции и его приложение [Текст] /В.С. Рогожин // ДАН СССР 135, №4, 1960, – С.791-793.

[81]. Рогожин В.С. Краевые задачи Римана и Гильберта в классе обобщенных функций [Текст] /В.С. Рогожин // Сиб. матем. ж. 2, №5, 1961, – С.734-745.

[82]. Рогожин В.С. Краевая задача Римана в классе обобщенных функций [Текст] /В.С. Рогожин // Изв. АН СССР, сер. матем. 28, №6, 1964, – С.1325-1344.

[83]. Рогожин В.С. Общая схема решения краевых задач в пространстве обобщенных функций [Текст] /В.С. Рогожин // ДАН СССР 164, №2, 1965, – С.277-280.

[84]. Рогожина И.С. Об одной краевой задаче со смещением для кусочно - аналитических функций [Текст] /И.С. Рогожина // Изв. вузов. Математика, №2 (45), 1965, – С.139-151.

[85]. Сабитов И.Х. Об одной граничной задаче линейного сопряжения [Текст] /И.Х. Сабитов // Матем. сб. 64, (106), №2, 1964, – С.262-274.

[86]. Сабитов И.Х. Об общей краевой задаче линейного сопряжения на окружности [Текст] /И.Х. Сабитов // Сиб. матем. ж. 5, №1, 1964, – С.124-129.

[87]. Самко С.Г. О разрешимости в замкнутой форме сингулярных интегральных уравнений [Текст] /С.Г. Самко // ДАН СССР 189, №3, 1969, – С.483-485.

[88]. Самко С.Г. Общее сингулярное уравнение в исключительном случае [Текст] /С.Г. Самко // Дифференц. ур-ния I, №8, 1965, – С.1108-1116.

[89]. Симоненко И.Б. Краевая задача Римана с непрерывными коэффициентами [Текст] /И.Б. Симоненко // ДАН СССР 124, №2, 1959, – С.278-281.

[90]. Симоненко И.Б. Краевая задача Римана с измеримым коэффициентом [Текст] /И.Б. Симоненко // ДАН СССР 135, №3, 1960, – С.538-541.

[91]. Симоненко И.Б. Краевая задача Римана для n - пар функций с измеримыми коэффициентами и её применение к исследованию сингулярных интегралов в пространстве L_p с весами [Текст] /И.Б. Симоненко // Изв. АН СССР, сер. матем. 28, №2, 1964, – С.277-306.

[92]. Усмонов Н. Решение задачи линейного сопряжения с разрывными коэффициентами для круга [Текст] /Н. Усмонов, М.Б. Холикова // Тезисы докладов республиканской научно - практической конференции «Технический прогресс и производство», посвящённый 1100-летию государства Саманидов. Душанбе 1999. – С.68-69.

[93]. Усмонов Н. Граничные задачи сопряжения аналитических функций с наличием нулей и бесконечностей сопряжённого аналитического вида коэффициентов на контуре [Текст] /Н. Усмонов, М.Б. Холикова // Вестник педуниверситета, серия естественных наук. Душанбе, 2005. №4. – С.23-29.

[94]. Усмонов Н. Об одной смешанной краевой задаче для пары кусочно-аналитических функций в многосвязной области в сингулярном

случае [Текст] /Н. Усмонов, М.Б. Холикова // Известия АН Республики Таджикистан, 2007, №2 (127), – С.17-25.

[95] Усмонов Н. Сингулярные граничные задачи сопряжения для системы уравнений эллиптического типа [Текст] /Н.Усмонов, Сайхуна Шавкатзода // Вестник Таджикского национального университета. Душанбе «Сино», 2016. 1/1(192). – С.40-44.

[96]. Усмонов Н. Граничная задача с коэффициентом, имеющим нули или полярной особенностью не целого порядка и не голоморфной структуры для системы уравнений эллиптического типа [Текст] /Н. Усмонов, Сайхуна Шавкатзода // Вестник Таджикского национального университета, Душанбе «Сино», 2016, 1/2 (196), – С.39-43.

[97]. Усмонов Н. Сингулярная граничная задача линейного сопряжения для системы уравнений эллиптического типа [Текст] /Н. Усмонов, Сайхуна Шавкатзода // «Известия Академии наук Республики Таджикистан», №3 (164), 2016г. – С.32-43.

[98]. Усмонов Н. Сингулярная краевая задача Римана для системы уравнений эллиптического типа [Текст] /Н.Усмонов, Сайхуна Шавкатзода // «ДАН Республики Таджикистан», том 59, №9-10, 2016г, Душанбе, – С.373-379.

[99]. Усмонов Н. О задачах сопряжения гармонических функкий в сингулярном случае [Текст] /Н. Усмонов, Б.Б. Саидов // Вестник ТНУ, серия естественных наук. №1/2 (81), 2012, – С.53-53.

[100]. Усмонов Н., Саидов Б.Б. Некоторые задачи сопряжения гармонических функций с сингулярными точками на контуре [Текст] /Н. Усмонов, Б.Б. Саидов // Вестник ТНУ. Серия естественных наук. №1/1 (156), 2015, – С.58-61.

[101]. Усмонов Н. Сингулярная граничная задача сопряжения гармонических функций [Текст] /Н. Усмонов, Б.Б. Саидов // Доклады Академии наук РТ, 2015, т.58, №12, – С.1078-1083.

[102]. Усмонов Н. Задача линейного сопряжения гармонических функций для полуплоскости [Текст] /Н. Усмонов, Б.Б. Саидов // Материалы международной конференции, посвящённой 20-летию Конституции Республики Таджикистан и 60-летию учёных-математиков А. Мухсинова, А.Б. Нозимова, С. Байзоева, Д. Осимовой, К. Тухлиева. Худжанд. 2014, №2 (29), ч.1. – С.254-256.

[103]. Усмонов Н. Задача сопряжения гармонических функций с сингулярными точками на контуре [Текст] /Н. Усмонов, Б.Б. Саидов// Материалы республиканской научно-теоретической конференции, посвящённой 70-летию Кулябского госуниверситета им. Абуабдулло Рудаки. Куляб. 2015, ч.1. – С.184-186.

[104]. Усмонов Н. Задача сопряжения гармонических функций в сингулярном случае [Текст] /Н. Усмонов, Б.Б. Саидов // Материалы международной конференции, посвящённой 20-летию XVI-ой Сесии Верховного Совета РТ и 60-летию доктора физико-математических наук, профессора Сафарова Д.С. Курган-Тюбе. 2012г, – С.114-118.

[105]. Усманов Н. Граничные задачи дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка эллиптического типа [Текст] /Н. Усманов // Тр. Ин-та физ. и матем. Латв. ССР, вып. 1, 1950, – С.41-100.

[106]. Усмонов Н. Сингулярные случаи общей граничной задачи линейного сопряжения [Текст] /Н. Усмонов // Мат. заметки. Якутск. 2001. т.8, выпуск №2, – С.46-47.

[107]. Усмонов Н. О задачах сопряжения гармонических функций с разрывными и с разомкнутыми контурами [Текст] / Н. Усмонов // Доклады Академии наук РТ.Т.39, №9-10.1996г. – С.61-86.

[108]. Усмонов Н. Обобщенная граничная задача линейного сопряжения с разрывными коэффициентами и с разомкнутыми контурами

[Текст] / Н. Усмонов // Вестник педагогического университета. Душанбе, 1999г. Т.5. – С.89-94.

[109]. Усмонов Н. Общая граничная задача линейного сопряжения со сдвигом с сингулярным граничным условием [Текст] / Н.Усмонов // Доклады Академии наук Таджикской ССР.1984г. Т. XXVII, №1. – С.14-18.

[110]. Усмонов Н. Сингулярная краевая задача Римана со сдвигом [Текст] /Н. Усмонов, М.У. Шадманов // Материалы республиканской научной конференции. Теория дифференциальных и интегральных уравнений и их приложения. Душанбе. 2011г, – С.120-124.

[111]. Усмонов Н. Сингулярная краевая задача линейного сопряжения в параболическом случае[Текст] /Н. Усмонов, М.У. Шадманов // Сборник научных трудов. Украина Чернавцы. 2012г, Выпуск №21 (37), – С. 316-320.

[112]. Усмонов Н. Задача Гильберта со сдвигом в сингулярном случае [Текст] /Н. Усмонов, М.У. Шадманов // Материалы международной научной конференции, посвященной 85-летию академика АН Республика Таджикистан Михайлова Леонида Григоровича. Душанбе, 2013, – С. 137-140.

[113]. Усмонов Н. Внешняя краевая задача Карлемана в сингулярном случае [Текст] /Н. Усмонов, М.У. Шадманов // Вестник Национального университета. Серия естественных наук, №1/1 (102). 2013, – С. 60-67.

[114]. Усмонов Н. Граничная задача линейного сопряжения со сдвигом с сингулярностью в граничном условии [Текст] /Н. Усмонов, М.У. Шадманов // Материалы республиканской научно-теоритической конференции «Неклассические уравнения математической физики и смежные вопросы анализа». ТНУ, Душанбе. 2016. – С.125-127.

[115]. Усмонов Н. Сингулярная граничная задача со сдвигом [Текст] /Н. Усмонов, М.У. Шадманов // Вестник национального университета. Серия естественных наук, №1/2, 2017, – С.29-33.
[116]. Усмонов Н. Сингулярная граничная задача линейного сопряжения в эллиптическом случае [Текст] / Н. Усмонов, М.У. Шадманов // Вестник национального университета, серия естественных наук, №1/5. Душанбе, 2017, – С.216-220.
[117]. Усмонов Н. Сингулярные случаи общей граничной задачи линейного сопряжения со сдвигом [Текст] /Н. Усмонов, М.У. Шадманов // Материалы международной конференции «Дифференциальные и интегральные уравнения с сингулярными коэффициентами и краевые задачи теории функций». Посвященной 90-летию академика АН Республики Таджикистан, Лауреату Государственной премии имени Абуали ибн Сино Л.Г. Михайлова. Душанбе, 2018. – С.159-162.
[118]. Усмонов Н. Некоторые краевые задачи сопряжения со сдвигом в сингулярном случае и сингулярные граничные задачи сопряжения для системы уравнений первого порядка эллиптического типа / Н. Усмонов, М. У. Шадманов // Типография министерства образования и науки РТ. Душанбе, 2021 г. 111 с.
[119]. Усмонов Н. Краевая задача теории аналитических функций для полуплоскости в сингулярном случае [Текст] / Н. Усмонов, Шадманов М.У.// Вестник филиала Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова в городе Душанбе, Том 1. №4(43), серия естественных и геологических наук. Душанбе, 2024, стр.28-33
[120]. Усмонов Н. Общая граничная задача линейного сопряжения в сингулярном случае [Текст] /Н. Усмонов, Шадманов М.У.// Вестник филиала Московского государ- ственного университета им. М.В.

Ломоносова в городе Душанбе, серия естественных и геологических наук, ISSN 2709-6238, Том 1, №5, стр. 221-234. 2025г.

[121]. Хведелидзе Б.В. Линейные разрывные граничные задачи теории функций с сингулярными интегральными уравнениями и некоторые их приложения [Текст] /Б.В. Хведелидзе// – Труды Тбилисского Математического института АН грузин. ССР, 1956г. Т.23. – С. 3-158.

[122]. Хведелидзе Б.В. О краевой задаче Пуанкаре теории логарифмического потенциала для многосвязной области [Текст] / Б.В. Хведелидзе // Сообщ. АН Груз. ССР 2, №7,1941, – С. 865-872.

[123]. Черский Ю.И. Общее сингулярное уравнение типа свёртки [Текст] / Ю.И. Черский // Матем. сб. 41, №3, 1957, – С.277-295.

[124]. Чикин Л.А. Особый случай краевой задачи Римана и сингулярных интегральных уравнений. [Текст] /Л.А. Чикин // Уч. зап. Казанского ун-та, 113, №10, 1952. – С.57-105.

[125]. Гахов Ф.Д. Краевые задачи теории аналитических функций и сингулярные интегральные уравнения [Текст] /Ф.Д. Гахов // Докторская диссертация, Тбилиси, 1941.

[126]. Н. Усмонов. Некоторые граничные задачи сопряжения гармонических функций с сингулярными точками на контуре [Текст] / Н. Усмонов, Б. Саидов // Монография. Душанбе. – 2022 г.- с.195.

[127]. Михайлов Л.Г. Новый класс особых интегральных уравнений и его применения к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами [Текст] / Л.Г. Михайлов // Душанбе. Из-во «Дониш». –1963. – С. 183.

Б) РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. В журналах, зарегистрированных в ВАК при Президенте Республики Таджикистан

[1-А]. Надирова М.И. Сингулярные краевые задачи Римана с непрерывными коэффициентами для системы уравнений эллиптического типа [Текст] / Н. Усмонов, М.И. Надирова //Вестник Таджикского национального университета. – 27 декабря 2021. –г. Душанбе №4. – С. 74-86.

[2-А]. Надирова М.И. Краевая задача типа Римана для системы уравнений первого порядка эллиптического типа: $\frac{\partial u}{\partial \overline{z}} = \varphi(z)$, когда коэффициент имеет особенности нецелого порядка и не голоморфной структуры [Текст] / М.И. Надирова // Вестник филиала МГУ имени М.В. Ломоносова в городе Душанбе. Серия естественных наук. – 2022. –Том 1. №3(25). – С. 22-31.

[3-А]. Надирова М.И. Краевая задача типа задачи Римана, когда коэффициент имеет особенности нецелого порядка и не голоморфной структуры для системы уравнений первого порядка эллиптического типа: $\frac{\partial u}{\partial \overline{z}} = A(z) \cdot U(z) + B(z)$ [Текст] / М.И. Надирова // Вестник Хорогского университета. – 2023. – №3(27). – С. 262-267.

[4-А]. Надирова М.И. Граничная задача Римана с непрерывными коэффициентами в сингулярном случае [Текст] / Н. Усмонов, М.И. Надирова // Вестник филиала МГУ имени М.В. Ломоносова в городе Душанбе. Серия естественных наук. – 2025. –Том 1, №2(47). – С.30-37.

2. В других изданиях:

[5-А]. Надирова М.И. Сингулярные граничные задачи сопряжения [Текст] / М.Б. Холиќова, М.И. Надирова // Материалы республиканской научно-теорической конференции «Неклассические уравнения математической физики и смежные вопросы анализа». ТНУ-Душанбе, 02-апреля 2016 г. –С.136-139.

[6-А]. Надирова М.И. Задача сопряжения аналитических функций с нулями и полюсами коэффициента модульного характера [Текст] /М.Б. Холиќова, М.И. Надирова// Материалы международной научно-практической конференции «Современные проблемы обучения математике, физике и информатике в средней и высшей школе»- ДДОТ, -Душанбе, 2016. – С.109-111.

[7-А]. Надирова М.И. Краевая задача Римана с непрерывными коэффициентами с наличием нулей и бесконечностей дробного порядка на контуре [Текст] / Холиќова М.Б., Усмонов М.А., Надирова М.И. // Материалы республиканской научно-практической конференции, «посвященные 2020-2040гг. «Двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических наук в области науки и образования республики Таджикистан», Данѓара. – 2020. – с.26-30.

[8-А]. Надирова М.И. Краевая задача типа задачи Римана, когда коэффициент имеет нули и полюсы сопряженно-аналитической структуры для системы уравнения первого порядка эллиптического типа [Текст] /Н. Усмонов, М.Б. Холикова, М.И. Надирова // Материалы международной конференции, посвященной 80-летию со дня рождения доктора физико-математических наук, профессора Темурова Собира. Душанбе. 25-26 июня 2021. – с.233-237.

[9-А]. Надирова М.И. Общая краевая задача линейного сопряжения для полуплоскости в сингулярном случае [Текст] /М.Б. Холикова, М.А. Усмонов, М.И. Надирова// Материалы республиканской научно-методической конференции на тему: «Применение алгебры и теории чисел в решении современных задач», посвященной «Двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических наук в области науки и образования (2020-2040гг.)». Празднованию 90-летия основания Таджикского государственного педагогического университета имени Садриддина Айни и 30-летию государственной Независимости Республики Таджикистан. Душанбе.-2021. –с.92-95.

[10-А]. Надирова М.И. Сингулярные краевые задачи типа Римана с непрерывными коэффициентами для системы $\frac{\partial u}{\partial \overline{z}} = A(z) \cdot U(z)$ [Текст] /Н. Усмонов, М.И. Надирова// Материалы международной конференции «Актуальные проблемы современной математики», посвященной 80-летию со дня рождения доктора физико-математических наук, профессора Додожона Исмоилова. НАНТ, Инст. математики им. А. Джураева, ТНУ –Душанбе. 29-30 апреля 2022. – с. 223-226.

[11-А]. Надирова М.И. Краевая задача типа Римана, когда коэффициент имеет нули и полюсы сопряженно-аналитической структуры для системы уравнения первого порядка эллиптического типа [Текст] / Н. Усмонов, М.И. Надирова// Материалы международной научно-практической конференции, посвящённой 20-летию развития естественных, точных и математических наук 2020-2040 годы «Современные проблемы математики и её приложения». ТНУ и Женский комитет всемирного союза математиков –г.Душанбе. 20-21 октября 2022г. – с.232-236.

[12-А]. Надирова М.И. Сингулярная краевая задача типа задачи Римана с непрерывными коэффициентами для системы [Текст] / Н. Усмонов, М.И. Надирова // Сборник материалов республиканской научно-практической конференции на тему: «Актуальные проблемы развития естественных, точных и математических наук в современных условиях». Посвященной «Развитию естественных, точных и математических наук» (2020-2040). – 29 ноября 2022. -г. Душанбе. – С. 187-193.

[13-А]. Надирова М.И. Граничная задача Римана с непрерывными коэффициентами для системы уравнения первого порядка эллиптического типа в сингулярном случае [Текст] /Н. Усмонов, М.И. Надирова // Сборник научных статей международной научно-теоритической конференции на тему: «Вклад математики в развитие естественных, точных и математических наук», посвящённой двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических наук. (2020-2040 годы) –30-31 мая 2023г. г.Душанбе. – Стр. 251-254.

[14-А]. Надирова М.И. Сингулярная граничная задача Римана для эллиптических уравнений вида $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = A(z)\cdot W(z) + B(z)\overline{W(z)} + c(z)$, когда коэффициент задачи непрерывная функция [Текст] /Н. Усмонов, М.И. Надирова //НИЦ Вестник науки. «Фундаментальные и прикладные научные исследования: актуальные вопросы современной науки, достижения и инновации». Сборник научных статей по материалам Международной научно-практической конференции – 27 май 2025г. –г.Уфа, № К-554. – С. 18-29.

[15-А]. Надирова М.И. Краевая задача Римана для дифференциальных уравнений эллиптического типа, когда коэффициент имеет нули и полюсы сопряженно – аналитического вида [Текст] /Н. Усмонов, М.И. Надирова // Международная научно-практическая конференция, посвященная «Двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических наук в сфере науки и образования (2020-2040годы)».- 2025г. –г. Душанбе, – С. 312-317.