РЕСПУБЛИКА ТАДЖИКИСТАН
ТАДЖИКСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УДК:51+517.11+004.4+63
ББК: 22.1+22.161В6+32.973.202+65.9 (2Р.)
Н-28

На правах рукописи

НАРЗУЛЛОЗОДА ПАРВИЗ ЛУТФУЛЛО

РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКИХ И КОМПЬЮТЕРНЫХ МОДЕЛЕЙ ОПТИМИЗАЦИИ ПРОЦЕССА ЗАЩИТЫ РАСТЕНИЙ С УЧЁТОМ ВРЕМЕННО-ВОЗРАСТНОЙ СТРУКТУРЫ И ПРОСТРАНСТВЕННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Д И С С Е Р Т А Ц И Я

на соискание ученой степени доктора философии (PhD)
– доктор по специальности 6D060100 – Математика (6D060110 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ)

Научный руководитель:
Одинаев Раим Назарович, доктор физико-математических наук, и.о. профессор кафедры математического и компьютерного моделирования Таджикского национального университета.

Душанбе-2026

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. В условиях Республики Таджикистан, где сельское хозяйство является важнейшей отраслью экономики, разработка адаптированных математических моделей оптимизации защиты растений приобретает особую значимость. Специфика агроклиматических условий страны - резко континентальный климат, ограниченность водных ресурсов и преобладание горных ландшафтов - создаёт уникальные требования к системам защиты сельхозкультур.

Современные проблемы защиты сельскохозяйственных культур требуют принципиально новых подходов к математическому моделированию и оптимизации защитных мероприятий. Быстрое развитие агротехнологий и ужесточение экологических требований выдвигают на первый план задачи создания точных, адаптивных систем защиты растений, учитывающих комплекс биологических и экологических факторов. В этом направлении особую значимость приобретают методы математического моделирования, позволяющие анализировать сложные взаимосвязи между возрастной динамикой растений, их пространственным распределением и эффективностью защитных мероприятий.

Фундаментальной основой для решения подобных задач служат классические работы по дифференциальным уравнениям и математической физике. «Исследования Тихонова А.Н. и Самарского А.А. в области уравнений математической физики создали теоретический базис для анализа динамических процессов в сложных системах» [41]. «Одним из основных работ, которые описывали биологических процессы при помощи математических моделей считаются модели разработанные В.Вольтерра» [8]. «Дальнейшие разработки и исследования в этой области нашли своё отражения в работах таких ученных как Р.А.Полуэктов и Н.Н.Моисеев, которые ввели принципы математического моделирования в биологических системах» [33,13]. «В изучении математического моделирования биологических процессов, математических методов анализа популяций с учетом возрастной структуры, а также принципов оптимизации управления систем при защите растений, значительный вклад внесли работы М.К.Юнуси, М.Н.Нарзикулова и Р.Н.Одинаева» [155-170, 171-172, 92-114].

В настоящее время одним из направлений математического моделирования биологических процессов является моделирования как временных, так и пространственных распределений, «одним из первых работ в этом направлении были посвящены работы Мюррея Дж.Д. и Окубо А.» [19-21, 24-25].

«Оптимизационные аспекты защиты растений получили развитие в работах Тихомирова И.А.» [143], где были предложены математические методы поиска оптимальных стратегий защиты с учетом экономических и экологических ограничений. Однако существующие оптимизационные модели, как правило, не учитывают в полной мере ни возрастную динамику растений, ни пространственную неоднородность их распределения.

Степень разработонности темы исследуемой проблемы. Математическое моделирование процессов защиты растений имеет глубокие исторические корни, восходящие к фундаментальным работам по динамике популяций. «Основы математического описания биологических взаимодействий были заложены в классических трудах Вольтерра В.»[51] и Лотки А.Т. [11-13], разработавших первые модели межвидовой конкуренции. Эти работы создали теоретическую базу для последующего развития математических методов в агроэкологии.

Значительный вклад в развитие математических моделей защиты растений внесли советские и российские исследователи. В работах «Свирежева Ю.М. и Логофета [138] были разработаны принципы анализа устойчивости биологических сообществ, а в исследованиях Юнуси М.К.» [155-171] предложены специализированные модели борьбы с вредителями агроценозов. Особое внимание в этих работах уделялось вопросам стабильности экосистем и оптимизации защитных мероприятий.

Современный этап развития математического моделирования в защите растений характеризуется возрастающим вниманием к учету временно-возрастных факторов. В работах Одинаева Р.Н. [92-114] последовательно развивается подход, учитывающий возрастную структуру популяций вредных и полезных насекомых. Автором были предложены нелинейные математические модели защиты растений с возрастной структурой, методы решения интегро-дифференциальных уравнений защиты растений, а также модели с произвольными трофическими функциями и разработаны математические модели, учитывающие пространственное распределение популяций. Эти исследования демонстрируют возможность интеграции временных и пространственных факторов в единой модели.

Важным направлением стали работы по оптимизации защитных мероприятий. «В совместных исследованиях Одинаева Р.Н. [97,99,110] и Юнуси М.К. [167-169] предложены оптимизационные модели интегрированного метода борьбы с вредителями.»

Теоретической основой для решения оптимизационных задач стали методы, разработанные Понтрягиным Л.С. [121]. Применение этих подходов к задачам защиты растений позволило создать строгий математический аппарат для поиска оптимальных стратегий.

Несмотря на значительные достижения в области математического моделирования защиты растений, остаются нерешенными проблемы недостаточной разработанности комплексных моделей, одновременно учитывающих временно-возрастную структуру и пространственное распределение, необходимости дальнейшего развития методов численного решения соответствующих интегро-дифференциальных уравнений, а также адаптации существующих моделей к специфике горных агроценозов.

Настоящее диссертационное исследование направлено на преодоление этих ограничений путем разработки интегрированной математической и компьютерной модели, объединяющей анализ временно-возрастной динамики и пространственного распределения в едином методологическом подходе.

Связь работы с научными программами, проектами и темам. Диссертационная работа выполнена в рамках реализации перспективного плана научно-исследовательских работ кафедры математического и компьютерного моделирования механико-математического факультета Таджикского национального университета на 2016 - 2020 гг. по теме «Разработка математических моделей, алгоритмов и программ для решения прикладных задач» и на 2020-2025гг. по теме «Разработка математических и компьютерных моделей, алгоритмов, комплекс программ и методики преподавания информатики, математики и естественных наук».

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ИССЛЕДОВАНИЯ

Цель исследования – заключается в построении математической и компьютерной модели позволяющей оптимизировать систему защиты растений на основе комплексного анализа временно-возрастной динамики роста растений и вредителей с учётом пространственного фактора.

Задачи исследования: Основные задачи исследования данной диссертационной работы заключаются в следующем:

- Разработка математической модели в виде системы интегро-дифференциальных уравнений, отражающих изменения численности популяций насекомых в зависимости от возрастного состава, пространственного фактора и характера трофических связей;
- Проведение теоретического анализа модели, в ходе которого доказывается существования единственности решений и обоснование выполнения принципа максимума Л.С.Понтрягина к задачам оптимального управления, возникающим в рамках данной модели;
- Оптимизация стратегий защиты растений с разработкой комбинированных методов и адаптацией модели для условий Таджикистана, включая учёт региональные особенностей агроценозов и специфики хлопководства;

- Создание и анализ численных методов решения системы уравнений, включая адаптацию методов Эйлера и Адамса с оценкой погрешностей;
- Разработка программного комплекса на C++ для численного моделирования, представления пространственно-временной динамики и верификации результатов.

Объект исследования. Объектом исследования в диссертационной работе является динамическая система «растение-вредные насекомые-полезные насекомые» с учётом возрастной структуры популяций, пространственного распределения и трофических взаимодействий.

Предмет исследования. Предметом исследования выступают закономерности динамики численности популяций вредных и полезных насекомых, методы их математического моделирования с учётом возрастной структуры и пространственного распределения, а также алгоритмы оптимизации стратегий защиты хлопчатника.

Научная новизна диссертационного исследования. В диссертации получены следующие результаты, характеризующиеся научной новизной:

- Построены системы интегро-дифференциальных уравнений позволяющие описывать популяционную динамику насекомых с учетом возрастного состава, пространственного фактора и трофических связей;
- Выполнено теоретическое обоснование разработанных моделей включающее доказательство существования решения и проверку применимости принципа максимума Понтрягина для решаемых задач оптимального управления;
- Предложены интегрированные способы оптимизации защиты растений и адаптационные модели для условий Таджикистана, включая учёт региональные особенностей агроценозов и специфики хлопководства;

- Созданы и проанализированы численные методы решения системы уравнений, включая адаптацию методов Эйлера и Адамса с оценкой погрешностей;
- Разработан программный комплекс на C++ для численного моделирования, представления пространственно-временной динамики и верификации результатов.

Теоретическая и научно-практическая значимость исследования.

Теоретическая значимость исследования заключается в развитии математического аппарата для моделирования биологических систем с учетом возрастной структуры и пространственного распределения популяций, расширении теории оптимального управления для интегро-дифференциальных уравнений с произвольными трофическими функциями, а также в разработке новых численных методов анализа устойчивости агроэкологических систем.

Научно-практическая значимость состоит в создании адаптированного для условий Таджикистана программного комплекса, позволяющего оптимизировать стратегии защиты хлопчатника, разработке конкретных рекомендаций по комбинированному применению химических и биологических методов с учетом региональных особенностей, что обеспечит снижение экономических затрат и экологической нагрузки при сохранении урожайности. Полученные результаты могут быть использованы сельхозпроизводителями, службами защиты растений и экологического мониторинга.

Положение диссертации, выносимые на защиту:

- Разработана математическая модель динамики популяций насекомых в виде системы интегро-дифференциальных уравнений, учитывающая возрастную структуру, пространственную неоднородность и трофические взаимодействия;
- Установлены теоретические характеристики построенных моделей, то есть, получены доказательства существования и единственности решений,

выполнен анализ равновесных состояний, а также обоснована корректность использования принципа максимума Понтрягина для постановки и решения задач оптимального управления. Представлены адаптированные для условий Республики Таджикистан стратегии защиты растений, которые построены на основе комбинированных оптимизационных методов с учётом региональных специфики агроценозов;

- Выполнена разработка и последующее исследование численных методов, применяемых для решения системы интегро-дифференциальных уравнений, включая модификации методов Эйлера и Адамса с оценкой погрешностей. Создан программный комплекс на C++ для численного моделирования и визуализации пространственно-временной динамики популяций, включающий верификацию моделей на реальных данных.

Степень достоверности результатов. Все теоремы, утверждения и формулы в диссертационном исследовании обеспечены строгими доказательствами, ряд выводов согласуются с исследованиями других авторов.

Соответсвия диссертации паспорту научной специальности (формуле и области исследования). Диссертационная работа выполнена в соотвествии со следующими разделами паспорта специальности 6D060110 – Математическое и компьютерное моделирование обосновывает исследование математических и компьютерных моделирований, их численных методов, комплексов программ и прикладных проблем (пункты 2,4,26):

- ***пункт 2.*** Развитие качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей;
- ***пункт 4.*** Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента;

- ***пункт 26.*** Комплексное исследование научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента.

Личный вклад соискателя учёной степени. Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Все представленные в диссертации результаты, опубликованные в работах с соавторами получены лично автором.

Апробация и реализация результатов диссертации. Материалы диссертации докладовались и обсуждались на международных и республиканских конференциях: Республиканская научно-практическая конференция профессорско-преподавательского состава ТНУ, посвященная 30-летию государственной независимости Республики Таджикистан, 110-летию народного поэта Таджикистана, Героя Таджикистана Мирзо Турсунзода, 110-летию народного писателя Таджикистана Сотима Улугзода и «двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических наук в сфере науки и образования (2020-2040 годы)» Душанбе 2021 год; Международной научно-практической конференции «Компьютерный анализ проблем науки и технологий», посвященная «2020-2040 годы, 20-летию изучения и развития естественных, точных и математических наук в области науки и образования» и «75-летию Таджикского национального университета» г.Душанбе 2023 год; Международной научной конференции посвященной 75-летию ТНУ, 20-летию развития точных, естественных и математических наук 2020-2040 годы, и 85-летию академика НАН Таджикистана Раджабова Нусрата г. Душанбе 2023 год; XII-международной научно-практической конференции «Современные проблемы математического моделирования и её приложения», посвященной «Объявления 2020-2040 годы, 20-летию изучения и развития естественных, точных и математических наук в области науки и образования» и «75-летию Таджикского национального университета»

(Таджикистан, Душанбе,18 май 2024). Международной научно-практической конференции XIV ломоновские читения «Роль филиала Московского государственного Университета имени М.В. Ломоносова в городе Душанбе в развитии науки и образования». –Душанбе 2024.

Публикации по теме диссертации. Результаты исследований автора по теме диссертационной работы опубликованы в 13 научных работах, из них 7 статьи опубликованы в изданиях, входящих в действующий перечень ВАК Республики Таджикистан и в трудах международных конференций.

Стуктура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, списка цитированной литературы из 173 наименования, занимает 143 страницы машинописного текста. Для удобства в диссертации применена сквозная нумерация теорем, следствий и формул. Они имеют тройную нумерацию, в которой первая цифра совпадает с номером главы, вторая указывает на номер параграфа, а третья на порядковый номер теорем, следствий или формулы в данном параграфе.

ГЛАВА 1. АНАЛИЗ ЛИТЕРАТУРЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО И КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ОПТИМИЗАЦИИ ПРОЦЕССА ЗАЩИТЫ РАСТЕНИЙ С УЧЁТОМ ВРЕМЕННО-ВОЗРАСТНОЙ СТРУКТУРЫ И ПРОСТРАНСТВЕННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Современное развитие сельскохозяйственного производства требует всё более совершенных подходов к управлению агроэкосистемами. В условиях загрязнения окружающей среды, расширения посевных площадей под монокультурами и глобальных климатических изменений особую актуальность приобретает проблема оптимизации защиты растений от вредных организмов. Традиционные эмпирические методы, основанные на календарных сроках обработок или пороговых значениях численности вредителей, зачастую оказываются недостаточно эффективными, поскольку не учитывают сложную динамику взаимодействия популяций насекомых в агроэкосистемах. Это приводит либо к неоправданно высоким экономическим и экологическим затратам (то есть, многократные обработки пестицидами), либо к потерям урожая из-за несвоевременности защитных мероприятий растений.

В связи с этим актуальным направлением научных исследований становится разработка и применение методов математического и компьютерного моделирования, позволяющих количественно описывать процессы развития популяций вредных и полезных видов, прогнозировать их пространственно-временную динамику и на этой основе находить оптимальные стратегии управления биосистемами. Моделирование предоставляет возможность описывать различные сценарии воздействия (химические обработки, биологический контроль, агротехнические методы) в среде, что значительно сокращает время и стоимость поиска рациональных решений по сравнению с полевыми экспериментами. Особое значение при этом приобретает учёт двух ключевых факторов: временной (возрастной) структуры популяции вредителя, определяющей к защитным мероприятиям, и пространственного распределения видов, влияющего на миграцию, пересечения с хищниками и эффективность обработки.

Данная глава представляет собой систематизированный обзор литературных источников, отражающих развитие научных взглядов от первых математических моделей популяционной динамики до современных пространственно-распределённых моделей и моделей оптимизационных компьютерных систем. Целью обзора является выявление ключевых теоретических подходов, математического аппарата, программных реализаций, а также нерешённых задач в области моделирования защиты растений с учётом временно-возрастной и пространственной неоднородности. Анализ литературы структурирован по историческому принципу — от классических работ конца XIX — первой половины XX века к современным исследованиям, что позволяет проследить логику развития методов, смену парадигм и накопление знаний, необходимых для построения эффективной оптимизационной модели.

Первая глава содержит систематический обзор литературных источников, посвященных вопросам математического и компьютерного моделирования, направленных на оптимизацию систем защиты растений. Рассматривается эволюция подходов от классических популяционных моделей до современных пространственно-распределенных систем.

1.1. Краткий исторический обзор по математическому моделированию

Начальные этапы математического моделирования в биологии относятся к концу XIX и первой половине XX века. Они связаны с формализацией базовых закономерностей динамики численности популяций. Идеи экспоненциального роста получили свою математическую форму. Более совершенной стала модель, учитывающая внутривидовую конкуренцию за ограниченные ресурсы. «Однако классические модели взаимодействия видов, разработанные Лоткой и Вольтеррой, считаются фундаментальным началом математической экологии» [4,10]. Эти модели, при всей своей простоте, впервые показали возможность анализа устойчивости сообществ и цикличности численности, возникающей из взаимодействия. Данные работы заложили основу для «использования аппарата дифференциальных уравнений в экологии» [4,10]. «Параллельно развивался математический аппарат, впоследствии сыгравший важную роль в описании пространственных процессов; труды по уравнениям математической физики стали теоретической базой для подобных описаний» [11-21].

«Середина XX века отмечена становлением теоретической и математической биофизики. Этот период характеризуется осознанием биоценоза как сложной динамической системы, что потребовало привлечения идей кибернетики и общей теории систем» [38,42,46,66,120,127,146]. В отечественной науке сформировалась школа математического моделирования биологических процессов. «Работы Свирежева Ю.М и его соавторов заложили основы моделирования биосистем разного уровня организации» [137-140] . «Вопросы системного анализа сложных объектов, включая изучение принципов управления, были подняты в исследованиях Моисеева» [90]. «Динамические модели экологических систем, их устойчивость и регуляция были систематизированы в работах Полуэктова» [120].

Важным направлением стало моделирование возрастной структуры популяций, что вывело модели за рамки точечного описания. «Исследования, посвященные учету возрастного состава, позволили учитывать различия в выживаемости, плодовитости и уязвимости особей разного возраста» [68,69,96,99,138,173]. «Это оказалось существенным для прогнозирования и управления в прикладных областях, таких как защита растений» [93,95]. В то же время формировалась теоретическая база для учета пространственной неодророгдности. «Работы по диффузионным моделям в экологии показали, как процессы перемещения особей могут взаимодействовать с локальной динамикой, приводя к формированию пространственных структур» [45,54,63,68,136,149].

Наряду с развитием математических моделей взаимодействий популяций ещё с 1960-х годов в рассмотрении биологических процессов вводится понятие теории оптимального управления. «Это было обусловлено тем что с потребностями как теоретической экологии, так и применения использования ресурсов и защиты растений» [29]. Работы в этой области таких ученных как «Новосельцева В.Н. и Моисеева Н.Н. позволили определить методологические принципы, которые в свою очередь могут быть применены для рассмотрения биосистем как вопрос контроля, например, применены пестициды, как разработка качественных функций и поиска оптимальных решений» [34,36,64,85,91,90]. Это привело к переходу от описательного математического моделирования к подходу, который позволяет найти наилучший способ воздействия на биологические системы.

«Исследования по возрастным моделям и их применению для защиты растений осуществлялись под руководством Юнуси М.К. который внёс значитетльный вклад в этой области» [155-172]. Его работы «систематизировали подходы к учету возрастного состава как вредителей, так и полезных энтомофагов» [156,161,162]. Это открыло путь к построению более реалистичных моделей для оптимизации сроков и интенсивности защитных мероприятий. Стало возможным математически обосновывать стратегию обработок, приуроченную к наиболее уязвимой возрастной фазе вредителя.

Развитие пространственного моделирования шло от описания диффузии к анализу сложных паттернов. Одновременно с усложнением описания временной динамики возникала необходимость отказа от предположения о пространственной однородности системы. Первые подходы к моделированию пространственного распределения основывались на уравнениях диффузии, описывающих случайные перемещения особей. «Работа Окубо А. показала, как комбинация локальной динамики и диффузионного расселения приводит к возникновению бегущих волн и пространственных неоднородностей» [24-25]. Однако диффузионные модели часто были упрощенными для описания реальных процессов расселения.

Прогресс в понимании роли пространства в экологической динамике связан с работами по нелинейной динамике и теории диссипативных структур. «Исследования Свирежева Ю.М. и его школы продемонстрировали, что в нелинейных системах, далеких от равновесия, процессы диффузии и реакции могут не приводить к усреднению, а спонтанно генерировать устойчивые пространственные структуры» [137-139]. Это открытие показало, что пространственная неоднородность может быть внутренним, самоорганизующимся свойством системы. «В задаче защиты растений это означало, что очаги вспышек вредителей могут возникать и поддерживаться не только из-за внешних неоднородностей среды, но и вследствие внутренних нелинейных механизмов взаимодействия видов» [137-140]. «Анализ нелинейной динамики взаимодействующих популяций, включая пространственные аспекты, представлен в работе Базыкина А.Д, где показано разнообразие возможных режимов» [41,42].

Современный этап определяется развитием компьютерного моделирования, которое расширило возможности исследователей. Переход к численному эксперименту позволил работать с высокоразмерными, нелинейными системами. Появился класс индивидуально-ориентированных моделей, где поведение системы возникает из взаимодействия множества дискретных видов с заданными правилами. Это позволяет учитывать индивидуальную изменчивость и сложные пространственные конфигурации. Пространственное моделирование получило новый импульс. «Методы математического моделирования пространственных явлений в биологии систематизированы в трудах Мюррея Дж.» [19-21]. Так же этому направлению соответствуют «исследования нелинейных волн и диссипативных структур в экологии» [149], а также «разработка интегральных моделей пространственно-временной динамики» [173]. Математические методы, разработанные для теоретической экологии, начинают целенаправленно адаптироваться для решения задач сельского хозяйства.

Формируется прикладное направление – математическое моделирование в фитосанитарии и защите растений. В этот период появляются работы, в которых популяционные модели напрямую связываются с экономическими критериями, такими как порог вредоносности. Задача моделирования смещается с общего описания взаимодействий на поиск управляющих решений, ограничивающих ущерб культурам при минимальных затратах. «В трудах Тихомирова И.А. системно изложены математические методы и постановки оптимизационных задач именно для агросферы» [143]. Эти работы закрепили использование аппарата оптимального управления, математического программирования и теории дифференциальных игр для планирования защитных мероприятий.

Особое внимание в этот период уделяется повышению реалистичности моделей за счет отказа от упрощенных предположений о характере трофических взаимодействий и «исследования в этом направлении включая анализ моделей с произвольными трофическими функциями, приведены в работах» [40,92,97,157].

Экологическая система агроценоза не является изолированным по отношению к популяции вредителя, она включает в себя ряд других взаимосвязанных составляющих таких как: вредное насекомое, полезное насекомое, растение-хозяин, и другие абиотические компоненты. «Следовательно перспективным направление в этой области становятся разработка математических моделей, которые состоят из трофических уровней к примеру математическая модель трёх трофических уровней «растение-вредные насекомые-полезные насекомые»« [97]. «Работы Одинаева Р.Н. рассматривают математические модели защиты растений с явным учетом возрастной структуры популяций насекомых. В других работах Одинаева Р.Н. пространственный фактор вводится через рассмотрение системы с определенными параметрами или через анализ пространственно неоднородных стационарных решений» [92-114].

Современный этап можно охарактеризовать как период интеграции. Интегрируются различные математические методы: аппарат дифференциальных уравнений с частными производными, теория оптимального управления, численные методы и алгоритмы. Интегрируются разные уровни описания: от индивидуального поведения насекомых до популяционной динамики. Интегрируются данные из разных источников: результаты полевого мониторинга, географические информационные системы.

1.2. Анализ литературы математического моделирования процесса защиты растений

Процесс защиты растений представляет собой сложную управляемую систему, ключевыми компонентами которой являются популяции вредных организмов, культивируемые растения, естественные враги вредителей, абиотические факторы среды и применяемые защитные мероприятия. Математическое моделирование данного процесса ставит целью формализацию взаимодействий между этими компонентами для описания, прогноза и поиска рациональных стратегий управления.

В моделях динамики популяций вредных организмов часто обходятся без детального учёта пространственного распределения. Это один из самых базовых и давно используемых подходов. Здесь всё строится на обычных детерминированных дифференциальных уравнениях, которые просто показывают, как со временем меняется численность вредителя. «Самые простые варианты опираются на классическое логистическое уравнение — оно учитывает, что среда не может прокормить бесконечное количество особей» [87]. Чтобы сделать описание ближе к реальности, исследователи начинают добавлять влияние внешних факторов. Например, температуру часто учитывают через накопленные дни, а иногда привязывают развитие вредителя к определённым фенологическим стадиям растения-хозяина.

Но для задач защиты растений по-настоящему критично учитывать возрастную или стадийную структуру популяции, так как на разных этапах жизни насекомого его уязвимость к обработкам и способность причинять вред сильно отличаются. «Поэтому применяют более сложные конструкции: непрерывные модели на основе уравнений с частными производными (вроде модели Маккендрика–фон Фёрстера) или дискретные матричные модели Лесли. В работах по агроценозам такие структурированные модели хорошо себя показали при описании развития насекомых-вредителей — взять хотя бы хлопковую совку или разные виды тлей. Благодаря им удаётся довольно точно выявлять те периоды, когда обработки будут наиболее эффективными» [22,31]. Ещё одно важное направление — «это модели, которые описывают взаимодействие вредных и полезных насекомых (энтомофагов). Классической отправной точкой здесь выступают различные модификации модели Лотки–Вольтерры» [4,10].

Однако в прикладных исследованиях эти модели уже давно вышли за рамки простых схем. С одной стороны, вместо «линейных зависимостей вводят нелинейные трофические функции — они гораздо лучше отражают, как хищник ведёт себя при разной плотности жертвы» [92]. «С другой стороны, рассматривают целые цепочки с тремя и более уровнями, например «растение — вредное насекомое — полезное насекомое»« [97,104]. Такой подход даёт возможность оценить не только прямой эффект от инсектицида на целевой вредный вид, но и косвенные последствия — в частности, что происходит, когда погибают полезные насекомые. А это уже напрямую перекликается с основными принципами интегрированной защиты растений.

Однако для оптимизации временного графика обработок требуются динамические модели, учитывающие кинетику действующего вещества: его нанесение, осаждение на растения, деградацию под действием солнечной радиации и осадков, системное действие в тканях растения. Такие модели часто строятся на основе уравнений кинетики первого порядка или более сложных схем.

Существенное место в моделировании занимает учет экономических критериев. Практически любая прикладная модель защиты растений включает понятие экономического порога вредоносности. Математически экономический порог вредоносности может задаваться как фиксированный уровень численности вредителя или как функция от стадии развития культуры и прогнозируемой цены урожая. Задача управления часто формулируется как удержание плотности популяции ниже этого порога с минимальными затратами. В простейшем случае используется принцип однократного вмешательства при достижении порога. «Более сложные постановки, рассматриваемые в работах Тихомирова И.А» [143] и в «ряде исследований по оптимальному управлению, ставят задачу нахождения программы обработок (моментов времени и интенсивностей), минимизирующей совокупные затраты, включающие стоимость химических веществ, работ и потери урожая, на заданном временном интервале» [36,121,155,157].

Несмотря на развитый аппарат, анализ литературы выявляет ряд характерных ограничений в традиционных подходах. Многие модели носят точечный характер, предполагая пространственную однородность всех компонентов системы. Это серьезное упрощение, так как в реальных агроценозах распределение вредителей, влажность почвы, микроклимат существенно неоднородны. Популяции распределены в пространстве пятнами, а заражение часто начинается с локальных очагов. Игнорирование пространственного фактора делает невозможным моделирование процессов распространения, анализа эффективности локализации очагов или оптимизации размещения ловушек и других элементов технологии. «Хотя работы, посвященные пространственному моделированию в экологии, существуют давно, их интеграция в сугубо прикладные модели защиты растений долгое время была ограниченной» [20, 25, 37].

Другим часто встречающимся ограничением является статичность в учете возрастной структуры в оптимизационных постановках. Модели могут учитывать возраст для описания динамики, но управляющее воздействие при этом рассматривается как единое для всей популяции. В реальности эффективность воздействия различается для разных возрастных стадий. Современные технологические возможности, такие как обработки в определенные фенологические окна (фенологические окна — это периоды в развитии растений или животных, которые используются для планирования работ в сельском хозяйстве или изучения сезонных явлений в природе.) или использование селективных препаратов, требуют моделей, где управление может быть адресовано конкретным возрастным значениям. «Первые шаги в этом направлении представлены в исследованиях, где поиск оптимального момента обработки связывается с прохождением популяцией наиболее уязвимой стадии» [125-127].

Кроме того, наблюдается определенный разрыв между сложными динамическими моделями и возможностями их параметризации на основе данных полевого мониторинга. Модели с большим числом параметров, особенно пространственно-распределенные, требуют для своей настройки обширных и детальных данных, сбор которых трудоемок. Поэтому многие теоретические разработки остаются в области концептуальных исследований, в то время как в практическом использовании часто применяются более простые, эмпирические модели. Преодоление этого разрыва связано с развитием методов идентификации моделей, использованием данных дистанционного зондирования и созданием специализированных баз данных.

Математическое моделирование процесса защиты растений сформировалось как прикладное направление, опирающееся на методы популяционной экологии, теории управления и математической биофизики. За многие годы накопился довольно большой опыт создания динамических моделей с возрастной структурой, моделей межвидовых взаимодействий и даже моделей, которые учитывают экономические показатели. Тем не менее, когда речь заходит о комплексной оптимизации защиты растений, особенно в неоднородных агроценозах, становится ясно, что существующие подходы имеют серьёзные ограничения. Чтобы исследователь более реалистичные модели, нужно преодолеть несколько ключевых проблем: перейти от простых точечных моделей к пространственно-распределённым, глубже встроить возрастную структуру прямо в алгоритмы оптимизации и существенно улучшить методы подбора параметров для сложных моделей. Именно эти задачи и определяют актуальность разработки новых моделей, которые одновременно учитывали бы и временно-возрастные характеристики популяций, и их пространственное размещение. Об этом подробнее пойдёт речь в следующем параграфе, где будет дан обзор оптимизационных исследований.

Отдельный толчок развитию моделирования дала бурное развитие вычислительной техники. Благодаря этому появился новый класс моделей — имитационные компьютерные модели. Они быстро стали одним из самых востребованных инструментов при изучении процессов защиты растений. В отличие от классических аналитических моделей, которые в первую очередь помогают выявлять общие закономерности, имитационные модели позволяют с высокой детализацией проигрывать конкретные сценарии того, что может происходить в агроценозе. Чаще всего их строят на объектно-ориентированном подходе: каждый вредитель, каждое растение или полезное насекомое представляется как отдельный объект со своими правилами поведения и взаимодействия с окружающими. Такой подход даёт возможность учитывать индивидуальную изменчивость особей, сложное пространственное размещение и различные случайные факторы, которые очень трудно (а иногда и невозможно) описать с помощью обычных дифференциальных уравнений.

Примеры подобных имитационных моделей можно встретить в работах, посвящённых распространению фитопатогенов или расселению насекомых по сельскохозяйственному ландшафту. «Особое внимание в научной литературе уделяется работам, в которых модели разного типа пытаются объединить в единую систему — чаще всего это программные комплексы или системы поддержки принятия решений. Такие системы обычно включают несколько ключевых блоков: прогноз развития популяции вредителя, оценку эффективности средств защиты, экономические расчёты и, в некоторых случаях, блок оптимизации стратегии защиты» [44,47,64].

В последние два десятилетия прослеживается отчетливый тренд на учет пространственного фактора в прикладных моделях защиты растений. Это связано как с развитием теории, так и с практическим внедрением технологий прецизионного земледелия. «Если ранние пространственные модели в экологии были в основном теоретическими, то сейчас активно развиваются подходы, позволяющие использовать данные геоинформационных систем и дистанционного зондирования для параметризации моделей распространения вредителей и болезней» [61]. Модели начинают учитывать неоднородность рельефа, почвенных условий, микроклимата, которая напрямую влияет на пространственное распределение вредных объектов. Однако в задачах оперативного управления защитой растений на уровне отдельного поля такие модели часто оказываются избыточно сложными, а более простые пространственно-распределенные модели только начинают появляться в литературе.

«Проблема совместного учета возрастной структуры и пространственного распределения до сих пор остается одной из наименее разработанных. Большинство исследований фокусируется на одном из этих аспектов. Модели с возрастной структурой, как правило, точечные» [68,69,96,99,102,104]. Пространственные модели, особенно диффузионные, часто предполагают однородность популяции по возрасту. «Существуют работы, в которых предпринимаются попытки совместить эти подходы. Это направление представляется наиболее соответствующим реальной сложности объекта моделирования, так как в природе особи разного возраста распределены в пространстве неодинаково, а их миграционная активность может сильно различаться. Дальнейшее развитие требует привлечения аппарата систем уравнений с частными производными, структурированных по возрасту и пространству, что связано со значительными математическими и вычислительными трудностями» [104-107,109].

Анализ литературы также указывает на возрастающую роль математических моделей в обосновании стратегий интегрированной защиты растений.

Интегрированная защита растений предполагает разумное сочетание различных методов (агротехнических, биологических, химических), и математическое моделирование оказывается практически незаменимым инструментом для оценки долгосрочных последствий и эффективности таких комбинаций. «Модели позволяют сравнивать сценарии, основанные только на химических обработках, со сценариями, включающими, например, создание резерваций для энтомофагов или использование феромонов. «Работы, в которых анализируется процесс оптимизации для интегрированного метода защиты растений, хорошо показывают, какой потенциал заложен в модельном подходе при решении подобных задач» [110].

1.3. Обзор исследования по математического моделирования оптимизации процесса защиты растений

Оптимизация защиты растений — это уже не просто описание того, как развивается вредитель, а настоящая научная задача: найти наилучшие управляющие решения в сложной, постоянно меняющейся биологической системе. В отличие от обычных описательных моделей, здесь обязательно нужно чётко задать, что именно мы считаем оптимизацией, и какие ограничения накладываются на решение. «Чаще всего в качестве главного критерия эффективности берут экономический показатель. Это может быть максимизация прибыли от полученного урожая, минимизация общих затрат на защиту плюс потери от вредителей, или достижение нужного уровня урожайности при наименьших издержках.» [34,99]. Ограничениями являются биологические законы динамики популяций, технологические возможности применения средств защиты, экологические нормативы и лимиты финансовых ресурсов. Обзор литературы позволяет выделить основные направления, в рамках которых ведется поиск оптимальных стратегий.

Одним из традиционных подходов является применение методов оптимального управления к детерминированным динамическим системам. Популяция вредителя описывается одним или несколькими дифференциальными уравнениями. Управляющей функцией обычно выступает интенсивность применения химического средства (например, количество инсектицида на единицу площади в единицу времени) или факт проведения обработки в дискретные моменты времени. «Для поиска оптимальной программы управления используется принцип максимума Понтрягина или методы динамического программирования» [121].

В работах «Юнуси М.К. данный аппарат применяется к моделям типа «хищник-жертва», а также к моделям, учитывающим возрастной состав» [155-172]. Результатом является определение оптимального графика обработок, который часто имеет вид импульсного воздействия при достижении определенного порога численности. Однако в таких постановках пространственный фактор, как правило, не учитывается, а управление воздействует на популяцию в целом, без дифференциации по возрастным группам.

Принцип максимума Понтрягина считается одним из наиболее мощных аналитических методов в теории оптимального управления. Он даёт возможность находить необходимые условия оптимальности для широкого класса задач, связанных с управлением динамическими системами, в том числе и для моделей защиты растений.

Рассмотрим общую постановку задачи оптимального управления, на которую опираются последующие исследования. Пусть состояние системы описывается вектором $x(t) = \big(x_1(t), \ldots, x_n(t)\big)$, удовлетворяющим системе обыкновенных дифференциальных уравнений (прямая система):

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t), u(t), t), \quad x(t_0) = x_0, \tag{1.3.1}$$

где $u(t) = \big(u_1(t), \dots, u_m(t)\big)$ — вектор управляющих воздействий, принадлежащий в каждый момент времени некоторому допустимому множеству U.

Критерий качества (целевой функционал) задается в виде:

$$J(u) = \int_{t_0}^{T} f^0\,(x(t), u(t), t)dt + \Phi\big(x(T)\big), \tag{1.3.2}$$

где f^0 — функция текущих затрат, а Φ — терминальный член (функция, которая оценивает «цену» конечного состояния системы в целевой момент времени *T)*.

Для применения принцип максимума Понтрягина вводятся сопряженные переменные (ψ -функции) $\psi(t) = \big(\psi_0(t), \psi_1(t), \dots, \psi_n(t)\big)$ и формируется функция Гамильтона-Понтрягина (гамильтониан):

$$H(\psi, x, u, t) = \psi_0 f^0(x, u, t) + \sum_{i=1}^{n} \psi_i\, f_i(x, u, t). \tag{1.3.3}$$

Величина ψ_0 обычно является неположительной константой; в регулярных задачах её можно положить равной -1.

Принцип максимума Понтрягина утверждает, что для оптимальности допустимого управления $u^*(t)$ и соответствующей траектории $x^*(t)$ необходимо существование нетривиального вектора $\psi^*(t)$, такого что:

Переменные состояния $x^*(t)$ и сопряженные переменные $\psi^*(t)$ которые удовлетворяют канонической системе уравнений вида:

$$\frac{dx^*}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \psi}, \quad \frac{d\psi^*}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}. \tag{1.3.4}$$

Условие максимума гласит: в каждой точке непрерывности оптимального управления функция Гамильтона должна достигать своего максимального значения по $u \in U$:

$$H(\psi^*(t), x^*(t), u^*(t), t) = \max_{u \in U} H(\psi^*(t), x^*(t), u, t). \tag{1.3.5}$$

На правом конце траектории (при $t = T$) накладываются условия трансверсальности.

Что касается сопряжённых переменных, то их часто трактуют как показатель того, насколько сильно изменится оптимальное значение целевого функционала при небольшом возмущении той или иной фазовой координаты.

В экономической интерпретации их называют «теневой ценой» соответствующей переменной. «Особенно формулировка Гамильтона–Понтрягина оказывается наиболее применимой при решении задач оптимизации для пространственно-распределённых моделей с возрастной структурой популяций» [121].

В этом случае уравнения динамики являются уравнениями с частными производными, и гамильтониан становится функционалом, зависящим от распределенных переменных (плотности насекомых по возрасту и координате). Применение принципа максимума в такой постановке приводит к краевой задаче для системы уравнений в частных производных, включающей как прямые уравнения динамики популяций, так и сопряженные уравнения, которые решаются «назад» по времени. Решение этой сложной краевой задачи дает условия, определяющие не только оптимальные моменты времени для обработок, но и их оптимальное пространственное распределение по полю, что соответствует принципам точечного земледелия.

«Применение принципа максимума Понтрягина в задачах защиты растений рассматривается в ряде работ» [34,97,110,111]. В указанных исследованиях показано, как данная общая схема реализуется для конкретных биологических моделей. Для системы типа «растение – вредитель – энтомофаг» с управлением, влияющим на смертность вредных насекомых, формируется расширенная система, включающая прямые и сопряженные уравнения.

«Анализ, проведенный в работах, демонстрирует, что в рассматриваемых задачах оптимальное управление, вытекающее из условия максимума, часто имеет пороговый (релейный) или импульсный характер. Это означает, что управляющее воздействие (например, обработка инсектицидом или выпуск энтомофагов) экономически оправдано и должно применяться с максимальной (или заданной) интенсивностью только тогда, когда «цена» ущерба от вредителей (определяемая соответствующей сопряженной переменной) превышает «цену» проведения мероприятия» [34,97,110,111]. Это означает, что любое управляющее воздействие — будь то обработка инсектицидом или выпуск энтомофагов — экономически оправдано и должно применяться с максимальной (или заранее заданной) интенсивностью только в том случае, когда «цена» ущерба, причиняемого вредителями, превышает «цену» самого мероприятия. Эту «цену» ущерба как раз и показывает соответствующая сопряжённая переменная. Если же ущерб меньше затрат на защиту, то оптимальная интенсивность воздействия падает до нуля.

Структура управления приводит к тому, что защитные мероприятия проводятся не постоянно, а именно в критические моменты — когда численность вредителя приближается к порогу вредоносности.

Дальнейшее развитие этого направления связано с включением возрастной структуры популяции в оптимизационные задачи. Когда модель учитывает распределение насекомых по возрастам, управляющее воздействие можно направлять на конкретные возрастные группы. Это хорошо соответствует реальной практике защиты растений: обработки чаще всего бывают наиболее эффективны против определённых, самых уязвимых фаз развития вредителя (например, против личинок младших возрастов). Благодаря этому можно ставить задачу выбора не только момента времени для обработки, но и типа воздействия, направленного именно на нужную стадию. Такие модели получаются более гибкими и ближе к действительности, однако их математический анализ и численное решение заметно сложнее. Приходится работать либо с уравнениями в частных производных, либо с системами высокого порядка.

Отдельный раздел литературы посвящён оптимизации с использованием экономических порогов вредоносности. Здесь стратегия управления часто формулируется довольно просто: проводить обработку, когда прогнозируемая или фактическая численность вредителя превышает установленный экономический порог. Задача оптимизации в этом случае сводится к поиску наилучших значений этих порогов. Они могут зависеть от фазы развития культуры, цены урожая, стоимости обработки и прогноза развития популяции.

В более сложных моделях рассматривается уже целая последовательность решений в течение сезона. Каждое решение об обработке зависит не только от текущего состояния поля, но и от ожиданий на будущее. Такие задачи обычно решаются в рамках теории стохастического динамического программирования. Этот подход лучше учитывает неопределённость, которая всегда присутствует в сельскохозяйственном производстве, но требует надёжной оценки вероятностей перехода системы из одного состояния в другое.

Ещё одно активно развивающееся направление — пространственная оптимизация защитных мероприятий. В самом простом случае всё поле разбивается на небольшие элементарные участки (ячейки). В каждой ячейке динамика описывается своей точечной моделью, а управление выбирается локально. Затем решается задача минимизации общих затрат при ограничениях на среднюю по полю или локальную численность вредителя. Связь между ячейками можно учитывать через миграцию насекомых или распространение инфекции. В работе Одинаева Р.Н., Назруллоева П.Л. и Раимзода Ф. «рассматривается оптимизационный процесс для интегрированного метода, где управление включает как химический, так и биологический компоненты. Подобные исследования соответствуют современной парадигме устойчивого сельского хозяйства, но требуют построения многокритериальных моделей, в которых необходимо находить компромисс между часто противоречивыми целями» [110].

Анализ показывает, что многие существующие оптимизационные модели носят теоретический характер и слабо связаны с возможностями оперативного получения данных для управления в реальном времени. Параметры моделей (коэффициенты смертности, плодовитости, скорости развития) часто берутся из литературы или оцениваются для усредненных условий. Для практической реализации оптимизационных схем необходимы системы, способные ассимилировать данные мониторинга – результаты учетов численности, данные с феромонных ловушек, спутниковые снимки – и оперативно корректировать прогнозы и рекомендации. Развитие в этом направлении связано с созданием адаптивных систем управления и использованием методов машинного обучения для идентификации моделей и прогнозирования.

Обзор исследований позволяет сделать вывод о наличии существенного потенциала для дальнейшего развития. Наиболее перспективным представляется синтез трех ключевых аспектов в единой оптимизационной постановке: 1) детального учета временно-возрастной динамики популяций вредителей и полезных насекомых; 2) явного описания пространственной неоднородности и процессов распространения; 3) формулировки многокритериальных задач, отражающих экономические и экологические цели интегрированной защиты. Существующие работы, такие как «исследования Одинаева Р.Н. и Юнуси М.К., где предпринимаются попытки совместного учета возрастной структуры и пространства, указывают путь для таких разработок» [92-114, 155-172]. Однако для создания практически применимых инструментов потребуется решение ряда проблем: разработка эффективных численных методов для сложных распределенных систем, создание алгоритмов оперативной оптимизации и разработка интерфейсов для интеграции моделей с системами точного земледелия. Решение этих проблем будет способствовать переходу от теоретических расчетов к обоснованному планированию защитных мероприятий в конкретных хозяйствах.

Развитие вычислительных мощностей и алгоритмов стимулирует интерес к прямым методам оптимизации, особенно при работе с имитационными моделями, для которых построение классического необходимого условия в виде принципа максимума затруднено или невозможно. К ним относятся методы математического программирования (линейного, нелинейного, целочисленного), применяемые к дискретным по времени и пространству аппроксимациям исходной динамической системы. Для решения оптимизационной задачи применяется численный метод, основанный на применении принципа максимума и итерационных процедурах. Выбор конкретного метода оптимизации во многом определяется типом модели, требованиями к скорости вычислений и характером управляющих переменных.

Важным аспектом, отраженным в современных исследованиях, является оптимизация в условиях неполной информации. В реальной практике полные данные о возрастном распределении или точном пространственном размещении вредителя отсутствуют. Модели, претендующие на практическую применимость, должны учитывать этот факт. Это приводит к постановкам задач адаптивного или стохастического управления, где система оценивания состояния работает в связке с алгоритмом оптимизации.

Ещё один распространённый подход заключается в том, чтобы сначала разработать простые эвристические правила, которые достаточно устойчивы к ошибкам и неполноте данных, а уже потом проверять и настраивать их с помощью более детальных имитационных моделей. При этом одной из главных методологических трудностей остаётся проблема идентификации параметров распределённых моделей с возрастной структурой, когда исходные данные наблюдений неполные или сильно ограничены.

Глубокое аналитическое исследование систем типа «хищник-жертва» было проведено А.Н. Колмогоровым [68]. Исследования Колмогорова ограничились некоторыми качественными предположениями о характере межвидовых взаимодействий и условиях, при которых система имеет устойчивое состояние или устойчивый предельный цикл. Однако необходимые и достаточные условия для существования устойчивых предельных циклов получены не были. Качественные свойства и устойчивость моделей экосистем изучались классическими методами, основанными на теории дифференциальных уравнений. Проблема устойчивости поведенческих механизмов математических моделей природных сообществ является очень важной. А.Д. Базыкин [41-42] провел детальное и всестороннее исследование разнообразия динамических механизмов моделей взаимодействия двух и трех популяций, связанных различными биологическими и природными отношениями.

В классической модели Лотки–Вольтерра трофическая функция также довольно проста: она не зависит от количества хищников и возрастает пропорционально количеству жертв $-V(N) = \alpha N$.

В работе Свирежева Ю.М. и Логофет Д.О. [81] одним из основных понятий в теории трофических систем является трофическая функция характеризующая зависимость среднего рациона хищника от плотности взаимодействий популяций между хищниками и жертвами. Значение трофической функции $V = V_i(N_i),\ i = 1,2$ (или «functional response» - функциональный отклик) при заданных условиях определяет среднее количество жертв, который потребляется хищником за единицу времени. В большинстве нелинейных или классических вольтеровских моделях представлено, что это величина рассчитывается количеством (плотность) жертв, т.е. $V = V(N)$, и это гипотеза подтверждается при наблюдении за небольшой пространственно-однородной системой, в которой передвижение особей имеет наиболее случайных характер.

В заключение стоит отметить исследования, которые прямо подчёркивают необходимость объединить временно-возрастные и пространственные аспекты в рамках единой оптимизационной постановки задачи. Такие работы создают важную теоретическую базу для дальнейших разработок в этой области. Однако обзор литературы показывает, что полноценных оптимизационных моделей, где стратегия управления одновременно зависит и от пространственных координат, и от возрастного состава популяции, а критерий оптимальности учитывает как экономические, так и экологические показатели, пока ещё совсем немного.

Чаще рассматриваются либо пространственные модели без детальной возрастной структуры, либо модели с возрастной структурой без явного пространственного компонента.

Вывод по первой главе

Подводя итоги систематического обзора литературных источников, выполненных в рамках первой главы диссертационной работы, целесообразно выделить несколько обобщающих положений, которые отражают как достигнутый уровень научных знаний в области математического и компьютерного моделирования оптимизации защиты растений, так и сохраняющиеся нерешённые задачи. Представленный анализ позволяет сформулировать концептуальное видение современного состояния исследований, определить наиболее продуктивные теоретические подходы.

Прежде всего, необходимо констатировать, что развитие рассматриваемой области прошла несколько качественно различных этапов, каждый из которых вносил свой вклад в формирование современного понятий и математического аппарата. Первый этап (конец XIX — середина XX века) характеризовался зарождением математической экологии как таковой: были сформулированы базовые законы динамики численности популяций (экспоненциальный и логистический рост), разработаны классические модели взаимодействия «хищник-жертва» А.Лотки и В.Вольтерры, созданы первые математические описания конкуренции и взаимодействия. Именно на этом этапе был заложен фундаментальный принцип использования дифференциальных уравнений для описания биологических процессов, который остаётся основным инструментом и по сей день. Второй этап (середина — вторая половина XX века) ознаменовался осознанием внутренней структурированности популяций, что привело к созданию возрастно-структурированных моделей. Третий этап (конец XX — начало XXI века) связан с бурным развитием вычислительной техники, появлением прикладных программ для численного моделирования и, как следствие, возможностью решать ранее недоступные для анализа сложные нелинейные задачи. Именно на этом этапе началось активное применение методов оптимального управления (принципа максимума Понтрягина) к задачам защиты растений. Четвёртый этап характеризуется стремлением к интеграции, то есть объединению в рамках единой модели возрастной структуры, пространственной распределенной и оптимизационных модулей, а также попытками создания систем поддержки принятия решений, пригодных для практического использования в реальных агротехнических предприятиях.

Систематизируя проанализированные литературные данные, можно выделить следующие ключевые достижения рассматриваемого направления. Разработан математический аппарат для описания возрастной структуры популяций вредителей, позволяющий учитывать различия в выживаемости, плодовитости и уязвимости особей разных стадий развития. Это открывает принципиальную возможность для обоснования дифференцированных по срокам защитных мероприятий, приуроченных к наиболее чувствительным фазам жизненного цикла вредителя. Созданы теоретические основы пространственного моделирования распространения вредителей, включая диффузионные модели. Разработаны эффективные методы поиска оптимальных управляющих стратегий, среди которых наибольшее распространение получили принцип максимума Понтрягина для непрерывных систем. Эти методы позволяют находить оптимальные сроки, дозы и количество обработок, а также решать задачу оптимального распределения ограниченных ресурсов между различными участками. Создан ряд имитационных компьютерных систем, которые демонстрируют принципиальную возможность применения разработанных математических моделей для реального управления фитосанитарной ситуацией.

Наряду с указанными достижениями, проведённый обзор позволяет выявить и системные недостатки современного состояния исследований, которые выступают в качестве препятствий на пути создания полноценной, комплексной оптимизационной модели защиты растений. Наиболее существенным из этих недостатков является фрагментарность учёта ключевых факторов. Как убедительно показывает анализ литературы, подавляющее большинство публикаций сосредоточено на каком-либо одном аспекте моделирования в ущерб другим.

Проведенный в первой главе анализ научной литературы позволяет констатировать, что математическое и компьютерное моделирование процессов защиты растений сформировалось как самостоятельное и динамично развивающееся направление на стыке фундаментальной экологии, прикладной математики и агрономии. Исторический путь развития от простых аналитических моделей взаимодействия популяций к сложным компьютерным имитационным системам демонстрирует устойчивую тенденцию к повышению адекватности моделей за счет учета все более сложных и существенных факторов. К ним относятся внутренняя структура популяций, в первую очередь возрастная, нелинейный характер трофических взаимодействий, экономические критерии принятия решений и пространственная неоднородность среды.

Анализ существующих подходов к моделированию непосредственно процесса защиты растений показал наличие солидного арсенала методов для описания динамики вредных организмов, действия средств защиты и оценки экономической эффективности мероприятий. Вместе с тем выявлен ряд системных ограничений, присущих многим традиционным моделям. Наиболее значимым из них является раздельный, изолированный учет ключевых аспектов системы: временной динамики, возрастной структуры популяций и их пространственного распределения. Модели, детально описывающие возрастной состав, как правило, являются точечными и не учитывают пространственную дифференциацию условий и процессов расселения. Пространственные же модели, особенно в оптимизационных постановках, часто оперируют усредненными, неструктурированными популяциями. Этот разрыв между глубиной описания биологической составляющей и учетом пространственного контекста снижает практическую ценность модельных разработок для обоснования решений в реальных, неоднородных агроценозах.

Обзор исследований, посвященных оптимизации процесса защиты, подтверждает, что поиск оптимальных стратегий ведется преимущественно в рамках указанных выше изолированных подходов. Задачи оптимизации сроков и интенсивности воздействий с учетом возрастной структуры решаются для точечных моделей. Пространственная оптимизация, связанная с прецизионным применением средств, чаще строится на упрощенных моделях динамики. При этом методологической основой для решения таких задач выступает принцип максимума Понтрягина, применение которого позволяет получать аналитические условия оптимальности в форме пороговых стратегий управления. Формализм Гамильтона-Понтрягина демонстрирует свою эффективность и для распределенных систем, открывая путь к синтезу оптимального управления, зависящего одновременно от времени, пространственных координат и возрастной структуры популяций. Однако в существующих работах потенциал этого аппарата раскрыт не полностью в контексте комплексных моделей, объединяющих все три аспекта.

ГЛАВА 2. РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ И МЕТОДОВ ОПТИМИЗАЦИИ ДЛЯ ЗАЩИТЫ РАСТЕНИЙ С ТРОФИЧЕСКИМИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯМИ, ВРЕМЕННО-ВОЗРАТСНОГО СОСТАВА И ПРОСТРАНСВЕННОГО РАЗМЕЩЕНИЯ.

Переход от аналитического обзора существующих литературных источников, выполненного в первой главе, к собственно разработке новых математических моделей и методов оптимизации, составляющей содержание второй главы, является закономерным и необходимым этапом диссертационного исследования. Если первая глава позволила выявить системные пробелы и ограничения современных подходов к моделированию защиты растений, то есть в первую очередь учёт возрастной структуры, пространственного распределения и оптимизационных механизмов. Тогда вторая глава призвана предложить конструктивные пути преодоления этих недостатков. Основная идея, заложенная в основу исследований данной главы, заключается в создании и математических моделей, которые позволяют последовательно наращивать сложность описания агроценоза, начиная с простейших точечных постановок и заканчивая комплексными пространственно-распределёнными возрастно-структурированными системами с оптимизационным управлением. Данный подход обеспечивает не только теоретическую обоснованность и математическую строгость, но и практическую гибкость в зависимости от доступных исходных данных и требуемой точности прогноза.

Прежде чем переходить к изложению конкретных математических моделей, целесообразно сформулировать общие методологические принципы, которыми руководствуется автор при разработке моделей в рамках второй главы. Принцип адекватной сложности, то есть модель не должна быть проще, чем это необходимо для решения поставленной задачи, но и не должна быть сложнее, чем допускают имеющиеся данные и вычислительные возможности. Избыточная детализация приводит к появлению большого числа трудно идентифицируемых параметров и неоправданному росту вычислительных затрат. Недостаточная детализация, напротив, делает модель нечувствительной к важным факторам (например, к возрастной чувствительности к пестицидам), что обесценивает полученные оптимизационные рекомендации. Поэтому в данной главе предлагается последовательное усложнение моделей: от точечных неструктурированных к точечным возрастно-структурированным моделям, а после к пространственно-распределённым возрастно-структурированным. Каждый следующий уровень включает в себя предыдущий как частный случай, что позволяет проследить, как учёт новых факторов модифицирует условия оптимальности и вид оптимального управления.

Динамика популяций описывается системами дифференциальных уравнений (обыкновенных или в частных производных), трофические взаимодействия задаются произвольными, но удовлетворяющими определённым условиям гладкости и монотонности функциями, а управляющие воздействия вводятся в правые части уравнений с коэффициентами эффективности, отражающими чувствительность различных возрастных стадий к применяемым средствам защиты. Для решения задач оптимизации используется принцип максимума Понтрягина в его классической форме для систем с обыкновенными дифференциальными уравнениями и в форме для распределённых систем с частными производными. Единый аппарат обеспечивает сопоставимость результатов, полученных для моделей разного уровня сложности, и позволяет выявлять, какой вклад вносит каждый дополнительно учтённый фактор в формирование оптимальной стратегии управления.

Все вводимые переменные, параметры и функциональные критерии должны иметь чёткий экономико-биологический смысл, понятный не только математикам, но и специалистам в области защиты растений. Численность популяций измеряется в биологически осмысленных единицах (особи на единицу площади т.п.), управляющие воздействия в дозах препарата или кратности обработок, целевые функционалы в экономических показателях (предотвращённый ущерб, затраты на защиту). Это требование, на первый взгляд очевидное, на практике часто нарушается, когда исследователи увлекаются математическими преобразованиями в ущерб прикладной ценности получаемых результатов.

Переходя к содержательной части второй главы, необходимо отметить, что её логическая структура подчинена идее последовательного наращивания сложности модели и соответствующего усложнения методов оптимизации. В начале главы рассматриваются базовые точечные модели защиты агроценоза, в которых популяции вредителя и полезного энтомофага описываются системами обыкновенных дифференциальных уравнений. Для этих моделей исследуются стационарные и нестационарные режимы, проводится анализ устойчивости, а затем формулируется задача оптимального управления с целевым функционалом экономического типа. Важно подчеркнуть, что даже в рамках этого относительно простого класса моделей уже могут возникать содержательные биологические и математические эффекты — например, существование нескольких равновесных состояний, колебательные режимы типа «хищник-жертва» при изменении параметров.

Следующий этап модели с возрастной структурой популяции вредителя. Как показал анализ литературы, учёт возрастного состава является критически важным для обоснования рациональных сроков защитных мероприятий. Оптимизационная задача для такой системы существенно сложнее, чем для неструктурированной, поскольку размерность фазового пространства возрастает пропорционально числу учитываемых возрастных стадий. Тем не менее, как будет показано ниже, принцип максимума Понтрягина сохраняет свою силу, а необходимые условия оптимальности принимают форму системы двухточечной краевой задачи для сопряжённых переменных, каждая из которых соответствует своей возрастной группе.

Математически такая модель описывается системой уравнений в частных производных с граничными условиями отсутствия потоков на границах области. Управляющее воздействие (например, локальное внесение инсектицида) может зависеть не только от времени, но и от пространственных координат, что отражает возможность выборочных, прецизионных обработок. Задача оптимального управления для таких распределённых систем является значительно более сложной в вычислительном отношении, но даёт и значительно больше возможности для практики.

Важным теоретическим результатом второй главы является доказательство адаптированного принципа максимума Понтрягина для указанного класса задач. Классический принцип максимума, разработанный для систем с обыкновенными дифференциальными уравнениями, нуждается в модификации при переходе к уравнениям в частных производных (распределённым системам) и при наличии фазовых ограничений. В работе приводится строгое доказательство того, что необходимые условия оптимальности для рассматриваемых моделей защиты растений могут быть сформулированы в форме, аналогичной классической, но с заменой обыкновенных сопряжённых уравнений на уравнения в частных производных, с дополнительными условиями на границах пространственной области. Это доказательство опирается на вариационные методы и теорию полугрупп операторов, однако итоговые условия оптимальности формулируются в терминах, доступных для численной реализации. При этом порог может быть не постоянным, а эволюционировать во времени в зависимости от возрастной структуры и пространственного распределения.

Также во второй главе рассматриваются частные случаи, допускающие аналитическое решение, что позволяет верифицировать численные алгоритмы и получить наглядные представления о структуре оптимального управления.

Вторая глава имеет исследовательскую направленность и содержит результаты разработки, аналитического изучения и оптимизации математических моделей, описывающих процессы защиты растений от сельскохозяйственных вредителей.

В первой части главы рассматриваются базовые математические модели защиты агроценоза для нестационарных и стационарных состояний при произвольном задании трофических функций. Приведена общая формулировка задачи защиты растений для точечных моделей и дано обоснование её адекватности в рамках непрерывного класса функций. Выполнен анализ решений, которые характеризируют состояния модельного агроценоза, находящегося в нестационарном либо стационарном режиме. Далее осуществляется переход от точечных моделей к более сложным конструкциям, учитывающим структурные особенности популяций. В рамках исследования приводится математическая модель задачи защиты агроценоза, в котором отражены возрастная динамика популяций вредных насекомых во времени, их пространственная неоднородность и произвольного вида трофических взаимодействий. На следующем этапе на основе разработанных моделей решается задача оптимизации интегрированного подхода к защите растений с учетом временных и возрастных структур. Исследуются вопросы оптимального управления модельным агроценозом. Применительно к исследуемой биосистеме выделяются и обосновываются ключевые условия достаточные для решения оптимизационной задачи в области защиты растений. В качестве ключевого математического инструментария выступает доказательство адаптированного задачам оптимального управления подобными биологическими объектами принципа максимума Понтрягина.

Данная задача направлена на оптимизацию защиты растений с одновременным учётом временной динамики возрастной структуры популяций насекомых и их особенности пространственного распределения.

Здесь разрабатывается математическая модель, позволяющая на единой теоретической основе оценивать и сравнивать эффективность различных методов защиты (химических, биологических, агротехнических) в условиях, максимально приближенных к реальной агроэкологической обстановке.

2.1 Исследование математической модели защиты растений в стационарном и нестационарном случае с произвольными трофическими функциями.

Вопросы математического описания мероприятий по охране урожая сохраняют свою значимость. В настоящее время данная тема находится в центре внимания широкого научного сообщества, что обусловлено её важностью для ключевых направлений развития науки, технологий и аграрного сектора Республики Таджикистан. Математическое моделирование в данной сфере выступает ключевым инструментом для прогнозирования состояния и регулирования природных систем. Повышение эффективности систем, направленных на охрану культурных растений от вредоносных организмов, представляет собой одну из наиболее важных задач в экономической, социальной и экологической сферах. Для Республики Таджикистан хлопчатник имеет статус основной сельскохозяйственной культуры. Необходимость моделирования процессов защиты будущего урожая требует совершенствования региональных систем охраны хлопка. Это совершенствование должно опираться на целенаправленные экологические и биологические исследования, выявляющие особенности становления и функционирования агроэкосистем в условиях интенсивного земледелия.

Разработка математических моделей, описывающих изменение численности биологических популяций, имеет богатую историю. Родоначальником этого направления, по всей видимости, следует считать модель Мальтуса, описывающую экспоненциальный рост и ставшую отправной точкой для создания подобных конструкций. «Следующий шаг в развитии связан с моделью Ферхюльста (логистическая кривая), которая легла в основу целой серии выдающихся работ В. Вольтерра [51], А. Лотки» [11-13] и других учёных. «В этих и последующих исследованиях (например, [4,10]) значительное место отводится вопросам устойчивости точечных биологических сообществ». Основным математическим инструментом в этих работах выступают нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения, то есть рассматривались модели с непрерывным временем.

Кроме того, создание математических моделей в биологии сопряжено со значительными трудностями, поскольку немногие биологи обладают достаточной математической подготовкой, а среди математиков также нечасто встречаются специалисты с необходимыми интересами и глубокими познаниями в биологии. В связи с этим, построением моделей, описывающих биологические процессы, должны заниматься коллективы, объединяющие как математиков, так и биологов.

Однако для решения множества задач биологии, экономики и техники, носящих кибернетический характер и связанных с потоками информации и управлением, методы классического математического анализа часто оказываются неприменимы. Подобные проблемы стимулировали развитие новых математических дисциплин, таких как теория управления, теория игр, различные разделы математического программирования и другие. Общей отличительной особенностью этих новых областей является их дискретный характер.

Сформулирована общая постановка задачи математического моделирования защиты растений применительно к точечным моделям сопровождающимся доказательством корректности в заданном $V(\cdot)$ классе функций. Внутри такого класса функций проведено исследование решений которые характеризуют динамику защиты агроценоза при её нахождении в нестационарном или стационарном состоянии.

«Динамика межвидовых взаимодействий в рассматриваемой биологической системе формализуется комбинированным уравнением, объединяющим вольтерровский подход с дополнительным функциональным откликом $V(.)$ в следующем виде»: [93], [101-103]:

$$
\begin{cases}
Q-\alpha_0 V_0(N_0)N_1=0,\\
k_0\alpha_0 V_0(N_0)-\alpha_1\widetilde{N}_2-m_1=0, \qquad \widetilde{N}_i=\int\limits_{\alpha_i}^{\beta_i}N_i(a)da\\
\dfrac{dN_2}{da}=N_2\left(k_1\alpha_1 N_1-\alpha_2\widetilde{N}_3-m_2\right), \qquad N_2(0)=\int\limits_0^\infty B_2(a)N_2(a)da,\\
\dfrac{dN_3}{da}=N_3\left(k_2\alpha_2 N_2-\varepsilon N_3-m_3\right), \qquad N_3(0)=\int\limits_0^\infty B_3(a)N_3(a)da.
\end{cases} \tag{2.1.1}
$$

Рассмотрим диапазон допустимых значений биомассы сельскохозяйственной культуры $N_1^p,\ N_1^p\in\left[N_1^{\min},\ N_1^{\max}\right]$, который представляет заданный допустимый уровень средней биомассы, удовлетворяющий условию:

$$
N_1^\tau \ge N_1^p,\quad N_1^p\in\left[N_1^{\min},\ N_1^{\max}\right]. \tag{2.1.2}
$$

Тогда, в данном случае задача защиты растений формулируется как определение критических значений N_2^p, и N_3^p из системы уравнений (2.1.1) [101], при соблюдении следующих условий:

$$
N_2^\tau \le N_2^p,\quad N_3^\tau \ge N_3^p, \tag{2.1.3}
$$

где

N_1^p − целевой показатель урожайности биомассы хлопчатника.

N_2^p − пороговое значение вредоносности вредителей,

N_3^p − показатель эффективности энтомофагов (полезных насекомых).

Теоретическое обоснование существования стационарного решения системы защиты растений включает следующее доказанное утверждение.

Теорема 2.1.1. *Чтобы имело место*

$$
N_1^\tau \ge N_1^p,\quad N_1^p\in[N_1^{\min},N_1^{\max}],\ N_1^{\min}=\frac{m_2}{k_1\alpha_1},N_1^{\max}=\frac{k_0 Q}{m_1}
$$

необходимо и достаточно выполнение следующей системы неравенств

$$
\begin{cases}
V_0(N_0) \le \dfrac{Q}{\alpha_0 N_1^p}, \\
\widetilde{N}_2 \le N_2^p, \quad N_2^p = \dfrac{k_0 Q}{\alpha_1 N_1^p} - \dfrac{m_1}{\alpha_1}, \\
\widetilde{N}_3 \ge N_3^p, \quad N_3^p = \dfrac{k_1 \alpha_1}{\alpha_2} N_1^p - \dfrac{m_2}{\alpha_2}.
\end{cases}
\qquad (2.1.4)
$$

$$N_1^\tau \ge N_1^p, \qquad N_1^p \in [N_1^{\min}, N_1^{\max}],$$

Доказательство.

Необходимость. Для доказательства неравенства (2.1.4) рассмотрим первое уравнение системы (2.1.1). Из него непосредственно следует, что

$$Q - \alpha_0 V_0(N_0) N_1 = 0,$$

то есть

$$V_0(N_0) \le \frac{Q}{\alpha_0 N_1^p} = \widetilde{V}_0$$

Рассмотрим второе уравнение (1). Преобразуя его, приходим к выражению

$$k_0 \alpha_0 V_0(N_0) - \alpha_1 \widetilde{N}_2 - m_1 = 0,$$

$$k_0 \alpha_0 \frac{Q}{\alpha_0 N_1^p} - \alpha_1 \widetilde{N}_2 - m_1 \ge 0 \ ,$$

$$\widetilde{N}_2 \le \frac{k_0 Q}{\alpha_1 N_1^p} - \frac{m_1}{\alpha_1} = N_2^p$$

$$\widetilde{N}_2 \le N_2^p.$$

В силу третьего уравнения из системы (2.1.1) можно записать

$$\frac{dN_2}{da} = N_2\left(k_1 \alpha_1 N_1 - \alpha_2 \widetilde{N}_3 - m_2\right).$$

Умножив последнее равенство на $N_2(a)$ и проинтегрировав по a, приходим к следующему:

$$\int_0^\infty N_2(a) \frac{dN_2}{da} da = \int_0^\infty N_2^2(a) da [k_1 \alpha_1 N_1 - \alpha_2 \widetilde{N}_3 - m_2]$$

$$\frac{1}{2} N_2^2(\infty) - \frac{1}{2} N_2^2(0) = \int_0^\infty N_2^2(a) da [k_1 \alpha_1 N_1 - \alpha_2 \widetilde{N}_3 - m_2]$$

$$k_1\alpha_1 N_1 - \alpha_2 \widetilde{N}_3 - m_2 \le 0, \widetilde{N}_3 \ge \frac{k_1\alpha_1}{\alpha_2} N_1^p - \frac{m_2}{\alpha_2} = N_3^p,$$

Следовательно

$$\widetilde{N}_3 \ge N_3^p.$$

Перейдём к оценке N_3.

В силу четвёртого уравнения системы (2.1.1) получим

$$N_3(a) = \frac{N(0)\exp\int_0^a A(\xi)d\xi}{1+\varepsilon N(0)\int_0^a \exp(\int_\tau^a A(\xi)d\xi)d\tau} \le N_{\max}$$

где

$$A(a) = k_2\alpha_2 N_2 - m_2.$$

В соответствии с четвёртым уравнением системы (2.1.1) имеем

$$\frac{dN_3}{da} = N_3\left(k_1\alpha_2 N_2 - \varepsilon N_3 - m_3\right), \quad A(a) = k_2\alpha_2 N_2 - m_3.$$

$$\frac{dN_3}{da} = N_3 A(a) - \varepsilon N_3^2(a).$$

Разделив обе части уравнения $-N_3^2(a)$ получим

$$-\frac{1}{N_3^2(a)}\cdot\frac{dN_3}{da} = -\frac{A(a)}{N_3(a)} + \varepsilon.$$

Вводя следующие обозначения

$$\frac{1}{N_3(a)} = y, \ \frac{dy}{da} = -\frac{1}{N_3^2(a)}\frac{dN_3}{da}$$

получим

$$\frac{dy}{da} = -A(a)y + \varepsilon. \qquad (2.1.5)$$

Однородное уравнение (2.1.5), принимает вид

$$\frac{dy}{da}\cdot\frac{1}{y} = -A(a); \ \frac{d(\ln y)}{da} = -A(a).$$

Выполнив интегрирование по a имеем

$$\ln y = -\int_0^a A(\xi)d\xi + y_1(0), \quad y(a) = \exp(-\int_0^a A(\xi)d\xi)\cdot y_1(0) \qquad (2.1.6)$$

Выполняя дифференцирование (2.1.6) по a получим

$$\frac{dy}{da}=\exp(-\int_0^a A(\xi)d\xi)(-A(a))\cdot y_1(0)+\exp(-\int_0^a A(\xi)d\xi)y_1^{'}(0).$$

В результате подстановки y и $\frac{dy}{da}$ в уравнение (2.1.5) получаем

$$\exp(-\int_0^a A(\xi)d\xi)(-A(a))y_1(0)+\exp(-\int_0^a A(\xi)d\xi)y_1^{'}(0)=$$

$$=-A(a)\exp(-\int_0^a A(\xi)d\xi)\cdot y_1(0)+\varepsilon.$$

$$\exp(-\int_0^a A(\xi)d\xi)y_1^{'}(0)=\varepsilon$$

Следовательно, получаем

$$y_1^{'}(0)=\frac{\varepsilon}{\exp(-\int_0^a A(\xi)d\xi)}=\varepsilon\exp(\int_0^a A(\xi)d\xi).$$

Проинтегрировав по a, получим:

$$y_1(0)=\varepsilon\int_0^a \exp(\int_\tau^a A(\xi)d\xi)d\tau+y(0).$$

После подстановки величины $y_1(0)$ в выражение (2.1.6), находим

$$\begin{aligned} y(a)&=\exp(-\int_0^a A(\xi)d\xi)(\varepsilon\int_0^a \exp(-\int_\tau^a A(\xi)d\xi)d\tau+y(0))=\\ &=y(0)\exp(-\int_0^a A(\xi)d\xi)+\varepsilon\exp(-\int_0^a A(\xi)d\xi)\int_0^a \exp(-\int_\tau^a A(\xi)d\xi)d\tau. \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

С учетом того, что $y=\frac{1}{N_3(a)}$ и $y(0)=\frac{1}{N_3(0)}$ в соответствии с (2.1.7) имеем

$$N_3(a)=\frac{N_3(0)\exp(\int_0^a A(\xi)d\xi)}{1+\varepsilon N_3(0)\int_0^a \exp(\int_\tau^a A(\xi)d\xi)d\tau}.$$

Достаточность. Переходя к обоснованию достаточности, предположим выполнение неравенств (2.1.4). Докажем, что из этого следует

$$N_1\ge N_1^p\ ,\quad N_1^p\in[\frac{m_2}{k_1\alpha_1},\frac{k_0Q}{m_1}].$$

В соответствии с третьим уравнением (2.1.1) верно следующее

$$k_1\alpha_1 N_1 - \alpha_2 \widetilde{N}_3 - m_2 \geq 0$$

$$k_1\alpha_1(N_1 - N_1^p) \geq 0$$

$$N_1 \geq N_1^p.$$

Согласно тому, что $N_2^p \geq 0, \quad N_3^p \geq 0$, то

$$\frac{m_2}{k_1\alpha_1} \leq N_1^p \leq \frac{k_0 Q}{m_1}, \qquad Q \geq \frac{m_1 m_2}{k_0 k_1 \alpha_1}.$$

На основе предложенной модели можно заключить, что пороговые значения вредоносности популяции и эффективности её естественных врагов определяются соотношениями:

$$N_2^P = \frac{k_0 Q}{\alpha_1 N_1^P} - \frac{m_1}{\alpha_1}, \quad N_3^P = \frac{k_1\alpha_1}{\alpha_2} N_1^P - \frac{m_2}{\alpha_2}. \tag{2.1.8}$$

Рассмотрим нестационарную постановку задачи защиты растений в классе $V(.)$ трофических моделей.

«Состояние модельного агроценоза задаётся системой уравнений» [101-103]:

$$\begin{cases} \dfrac{dN_0}{dt} = Q - \alpha_0 V_0(N_0) N_1, \\ \dfrac{dN_1}{dt} = N_1(k_0\alpha_0 V_0(N_0) - \alpha_1 \widetilde{N}_2 - m_1), \\ \dfrac{dN_2}{dt} = N_2(k_1\alpha_1 N_1 - \alpha_2 \widetilde{N}_3 - m_2), \\ \dfrac{dN_3}{dt} = N_3(k_2\alpha_2 N_2 - \varepsilon N_3 - m_3). \end{cases} \tag{2.1.9}$$

$$\widetilde{N}_1(t_k) = \frac{1}{t_k}\int_0^{t_k} N_1(t)dt.$$

«Математическое доказательство существования решений в нестационарной постановке задачи защиты растений основывается на следующем утверждении» [93], [101-103].

Теорема 2.1.2. Для того чтобы данное условие имело место

$$\lim_{t_k\to\infty} \widetilde{N}_1(t_k) \geq N_1^p(t_k \to \infty), \ N_1^p \in \left[\frac{m_2}{k_1\alpha_1}, \frac{k_0 Q}{m_1}\right]$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства:

$$\begin{cases} N_0(t) \le \dfrac{Q}{\alpha_0 N_1^p}, \quad 0 \le t \le t_k \\ \lim\limits_{t_k \to \infty} \widetilde{N}_2(t_k) \le N_2^p, \quad \lim\limits_{t_k \to \infty} \widetilde{N}_3(t_k) \ge N_3^p \\ \widetilde{N}_i(t_k) = \dfrac{1}{t_k}\int\limits_0^{t_k} N_i(t)dt, \quad i = 2,3 \end{cases} \tag{2.1.10}$$

$$N_2^p = \frac{k_0 Q}{\alpha_1 N_1^p} - \frac{m_1}{\alpha_1}, \quad N_3^p = \frac{k_1 \alpha_1}{\alpha_2} N_1^p - \frac{m_2}{\alpha_2}.$$

Доказательство.

Необходимость. Предположим, что условия **теоремы 2.1.2** имеют место, то есть:

$$\lim_{t_k \to \infty} \widetilde{N}_2(t_k) \ge N_1^p$$

Пусть в системе (2.1.9) трофические связи между видами задаются смешанным типом, включающим как классические вольтерровские зависимости, так и функции из класса *V(·),* а именно:

Согласно первому уравнению (2.1.9) справедливо

$$\frac{dN_0}{dt} = Q - \alpha_0 V_0(N_0) N_1,$$

В самом деле, соответствующее первому уравнению системы (2.1.9) однородное уравнение записывается как

$$\frac{d\,ln\,N_0}{dt} = -\frac{\alpha_0 V_0(N_0) N_1}{N_0} \tag{2.1.11}$$

После интегрирования равенства (2.1.11) получаем

$$ln\,N_0 = -\int\limits_0^{t_k} \frac{\alpha_0 V_0(N_0)}{N_0} N_1(\xi) d\xi + N_0^*(0)$$

или

$$N_0(t) = exp(-\int\limits_0^{t_k} \frac{\alpha_0 V_0(N_0)}{N_0} N_1(\xi) d\xi) N_0^*(0) \tag{2.1.12}$$

где $N_0^*(0)$ - произвольная постоянная.

Дифференцируя выражение (2.1.12), имеем

$$\frac{dN_0}{dt}=exp(-\int_0^{t_k}\frac{\alpha_0 V_0(N_0)}{N_0}N_1(\xi)d\xi)(-\frac{\alpha_0 V_0(N_0)}{N_0}N_1)\cdot N_0^*(0)+$$

$$+exp(-\int_0^{t_k}\frac{\alpha_0 V_0(N_0)}{N_0}N_1(\xi)d\xi)(N_0^*(0))'$$

Подставляя найденное значение $\frac{dN_0}{dt}$, в первое уравнение системы (2.1.9), приходим к выражению:

$$exp(-\int_0^{t_k}\frac{\alpha_0 V_0(N_0)}{N_0}N_1(\xi)d\xi)(-\frac{\alpha_0 V_0(N_0)}{N_0}N_1)\cdot N_0^*(0)+$$

$$+exp(-\int_0^{t_k}\frac{\alpha_0 V_0(N_0)}{N_0}N_1(\xi)d\xi)(N_0^*(0))'=$$

$$=Q-\frac{\alpha_0 V_0(N_0)}{N_0}N_1\cdot exp(-\int_0^{t_k}\frac{\alpha_0 V_0(N_0)}{N_0}N_1(\xi)d\xi)\cdot N_0^*(0).$$

или

$$(N_0^*(0))'=Q\cdot exp(\int_0^{t_k}\frac{\alpha_0 V_0(N_0)}{N_0}N_1(\xi)d\xi). \qquad (2.1.13)$$

После интегрирования последнего равенства находим

$$N_0^*(0)=\int_0^{t_k}Q\cdot exp(\int_0^{t_k}\frac{\alpha_0 V_0(N_0)}{N_0}N_1(\xi)d\xi)dt+N_0(0), \qquad (2.1.14)$$

где $N_0(0)$ - произвольная постоянная.

Подставляя найденное значение $N_0^*(0)$ из равенств (2.1.14) в (2.1.12) получим

$$N_0(t)=\exp(-\int_0^{t_k}\frac{\alpha_0 V_0(N_0)}{N_0}N_1(\xi)d\xi)[N_0(0)+$$

$$+\int_0^{t_k}Q\cdot\exp(\int_0^{t_k}\frac{\alpha_0 V_0(N_0)}{N_0}N_1(\xi)d\xi)dt]. \qquad (2.1.15)$$

Введем обозначение $N_1^p t_k=\int_0^{t_k}\frac{V_0(N_0)}{N_0}N_1 dt,$ тогда из соотношения (2.1.15) получим следующее неравенство:

$$N_0(t) \le exp(-\alpha_0 N_1^p t_k)[N_0(0) + Q\int_0^{t_k} exp(\alpha_0 N_1^p (t_k - \tau) d\tau] =$$

$$= exp(-\alpha_0 N_1^p t_k) N_0(0) + exp(-\alpha_0 N_1^p t_k) Q \int_0^{t_k} exp(\alpha_0 N_1^p t_k) exp(-\alpha_0 N_1^p \tau) d\tau] =$$

$$= exp(-\alpha_0 N_1^p t_k) N_0(0) + Q\int_0^{t_k} exp(-\alpha_0 N_1^p \tau) d\tau] =$$

$$= exp(-\alpha_0 N_1^p t_k) N_0(0) + Q\int_0^{t_k} exp(-\alpha_0 N_1^p (\tau)) \frac{d(-\alpha_0 N_1^p \tau)}{-\alpha_0 N_1^p} =$$

$$= exp(-\alpha_0 N_1^p t_k) N_0(0) + Q \cdot \left. \frac{exp(-\alpha_0 N_1^p (\tau))}{-\alpha_0 N_1^p} \right|_0^{t_k} =$$

$$= exp(-\alpha_0 N_1^p t_k) N_0(0) - \frac{Q}{\alpha_0 N_1^p} \cdot exp(-\alpha_0 N_1^p t_k) + \frac{Q}{\alpha_0 N_1^p} = \frac{Q}{\alpha_0 N_1^p}.$$

Отсюда следует, что

$$N_0(t) \le \frac{Q}{\alpha_0 N_1^p}.$$

Из второго уравнения системы (2.1.9) следует:

$$\frac{dN_1}{dt} = N_1(k_0 \alpha_0 N_0 - \alpha_1 \widetilde{N}_2 - m_1).$$ т.е.

$$\frac{d(ln\, N_1(t))}{dt} = -m_1 + k_0 \alpha_0 N_0 - \alpha_1 \widetilde{N}_2$$

$$\widetilde{N}_2(t) \le \frac{k_0 Q}{\alpha_0 N_1^p} - \frac{m_1}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_1}\frac{d(ln\, N_1(t))}{dt},$$

Выполняя интегрирование по переменной t от 0 до t_k находим:

$$\lim_{t_k \to \infty} \widetilde{N}_2(t_k) \le \frac{k_0 Q}{\alpha_0 N_1^p} - \frac{m_1}{\alpha_1} = N_2^p,$$

$$\lim_{t_k \to \infty} \widetilde{N}_2(t_k) \le N_2^p.$$

Согласно третьему уравнению (2.1.9) имеем:

$$\frac{dN_2}{dt} = N_2(k_1 \alpha_1 N_1 - \alpha_2 \widetilde{N}_3 - m_2)$$

$$\frac{d(ln\, N_2)}{dt} = -m_2 + k_1 \alpha_1 N_1 - \alpha_2 \widetilde{N}_3$$

$$\widetilde{N}_3(t)=\frac{k_1\alpha_1}{\alpha_2}N_1(t)-\frac{m_2}{\alpha_2}-\frac{1}{\alpha_2}\frac{d(ln\,N_2)}{dt}$$

Выполняя интегрирование по переменной t от 0 до t_k находим

$$\lim_{t_k\to\infty}\widetilde{N}_3(t_k)\geq\frac{k_1\alpha_1}{\alpha_2}N_1^p-\frac{m_2}{\alpha_2}=N_3^p,$$

$$\lim_{t_k\to\infty}\widetilde{N}_3(t_k)\geq N_3^p$$

Достаточность. Пусть неравенство (2.1.10) выполнено. Требуется доказать, что отсюда следует справедливость условия теоремы $\lim\limits_{t_k\to\infty}\widetilde{N}_2(t_k)\geq N_1^p$ и в силу известных фактов $N_2^p\geq 0, N_3^p\geq 0$ тогда

$$\frac{m_2}{k_1\alpha_1}\leq N_1^p\leq\frac{k_0Q}{m_1}$$

$$N_0(t_k)\geq N_0(0)+\frac{Qt_k}{N_1^p}\left[N_1^p-\widetilde{N}_1(t_k)\right],$$

и так

$$\widetilde{N}_1(t_k)-N_1^p\geq\frac{N_0(0)-N_0(t_k)}{Q_t},$$

в результате имеем искомое неравенство

$$\lim_{t_k\to\infty}\widetilde{N}_1(t_k)\geq N_1^p.$$

2.2 Построение математических моделей защиты растений, объединяющие факторы временно-возрастной структуры, пространственного неоднородности и произвольно задаваемых трофичеких функций

Современное состояние агропромышленного комплекса характеризуется повышенным вниманием к проблеме обеспечения сохранности выращиваемой продукции на всех этапах ее производства. Эффективное решение данной проблемы невозможно без глубокого понимания механизмов, определяющих динамику численности организмов, наносящих ущерб сельскохозяйственным культурам. В связи с этим, особое место в системе научного знания занимает вопрос формализации процессов взаимодействия в системе «растение – вредитель – среда» и поиска методов адекватного описания защитных мероприятий. Применение методологии математического моделирования открывает широкие перспективы для изучения данных процессов, позволяя перейти от качественных описаний к строгим количественным соотношениям.

Математическое моделирование, как метод познания, базируется на построении абстрактных формальных конструкций (моделей), отражающих существенные свойства изучаемого объекта или явления. В рассматриваемой проблеме, такая модель представляет собой совокупность математических соотношений (уравнений, неравенств, логических условий), которые с заданной степенью точности описывают развитие популяций вредных организмов, влияние на них защитных мер и изменение состояния самого агроценоза.

В связи с вышесказанных факторов задача корректного формального описания защиты сельскохозяйственного урожая в рамках математического моделирования приобретают несомненную актуальность.

От того, насколько полно и точно в модели будут учтены биологические особенности вида-вредителя, его трофические связи, влияние абиотических факторов и механизмы действия защитных препаратов, зависит прогностическая ценность получаемых результатов. Неудивительно, что сегодня эта проблематика привлекает внимание большого круга ученых, работающих на стыке биологии, экологии и прикладной математики.

Это позволяет не только прогнозировать развитие ситуации, но и выбирать оптимальные параметры защитных воздействий, обеспечивая тем самым научную обоснованность практических рекомендаций по сохранению урожая.

«Исследуем математическую модель агроценоза, включающую три трофических уровня по схеме «растение – вредные насекомые – полезные насекомые» с учётом возрастной структуры популяций, их пространственного распределения и произвольного вида трофических взаимодействий.

Динамика моделируемой системы описывается следующей системой дифференциальных уравнений» [93,97,108,137,138,162]:

$$\begin{cases} \dfrac{dN_0}{dt} = Q - \alpha_0 N_0 N_1, \\ \dfrac{dN_1}{dt} = N_1\left(k_0\alpha_0 N_0 - \dfrac{V_1(N_1)}{N_1}\widetilde{N}_2 - m_1\right) \\ \dfrac{\partial N_2}{\partial t} + \dfrac{\partial N_2}{\partial a} + \dfrac{\partial N_2}{\partial x} = N_2\left(k_1 V_1(N_1) - \dfrac{V_2(N_2)}{N_2}\widetilde{N}_3 - m_2\right) \\ \dfrac{\partial N_3}{\partial t} + \dfrac{\partial N_3}{\partial a} + \dfrac{\partial N_3}{\partial x} = N_3(k_2 V_2(N_2) - \varepsilon N_3 - m_3), \end{cases} \tag{2.2.1}$$

с начальными и краевыми условиями

$$N_i(x,a,0) = N_i^0(x,a), \quad x \in \overline{G},\ 0 \le a < \infty, \quad i = 2,3$$

$$N_2(x,0,t) = \int_0^\infty B_2(\xi,t,N_1)N_2(x,\xi,t)dt,$$

$$N_3(x,0,t) = \int_0^\infty B_3(\xi,t,\widetilde{N}_2)N_3(x,\xi,t)dt, \quad 0 \le t \le \tau.$$

$$N_i\big|_s = 0, \qquad i = 2,3.$$

«Здесь Q – скорсть поступления внешнего ресурса, $N_0 = N_0(t) -$ масса внешнего ресурса (минеральные удобрения, вода для полива и солнечная энергия) в момент времени *t*, $N_1 = N_1(t) -$ биомасса растения в момент времени *t*, $N_i = N_1(x,a,t) -$ биомасса или численность вредных насекомых $(i = 2)$ и полезных насекомых $(i = 3)$ в момент времени *t*, возраста a и в точке *x, x*-пространственная координата, $t \in [0,\tau],\ \tau - const < \infty,\ a \in [0,\infty).$ $B_2(\cdot), B_3(\cdot)$ коэффициенты рождаемости вредных и полезных насекомых, суммарная численность, соответственно вредных и полезных насекомых, сумма берётся по тем возрастам, которые наносят вред сельскохозяйственным культурам и уничтожают насекомых-вредителей.» [93,97,108,137,138,162]

$$\widetilde{N}_i = \widetilde{N}_i(t) = \int_{\alpha_i}^{\beta_i}\int_G \widetilde{N}_i(x,a,t)dadx, \quad \alpha_i, \beta_i = const > 0, \quad i = 2,3. \tag{2.2.2}$$

m_i −средние коэффиценты естественной смертности, $i = 1,2,3$; $k_i -$ доля биомассы потребления, $i = 0,1,2$; $\alpha_i -$ коэффициент трофической функции, $i = 0,1,2$; $\varepsilon -$ коэффициент самоограничения роста полезных насекомых, $V_i(\,\cdot) -$ $i = 1,2$ произвольная трофическая функция со свойствами:

$$\frac{dV(N)}{dN} > 0,\ \ \frac{d^2V(N)}{dN^2} \le 0.$$

Пусть $V = V_i(N_i)$, $i = 1,2$ – численность (или биомасса) скорости, потребляемая одним хищником в единицу времени. Обозначим $M_i(a,t) = \max_x N_i(x,a,t)$, $i = 2,3.$ $\ 0 \le a < \infty,\ 0 \le t \le \tau.$ и

$$B_2(\cdot) = b_2(a)N_1,\ B_3(\cdot) = b_3(a)N_2\ .$$

Тогда, поставленная задача, то есть задача (2.2.1), принимает следующий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dN_0}{dt} = Q - \alpha_0 N_0 N_1, \\ \dfrac{dN_1}{dt} = N_1(k_0\alpha_0 N_0 - \dfrac{V_1(N_1)}{N_1}\widetilde{N}_2 - m_1), \qquad N_i(0) = N_i^0, i = 0,1. \\ \dfrac{\partial M_2}{\partial t} + \dfrac{\partial M_2}{\partial a} = M_2(k_1 V_1(N_1) - \dfrac{V_2(N_2)}{N_2}\widetilde{N}_3 - m_2), \\ \dfrac{\partial M_3}{\partial t} + \dfrac{\partial M_3}{\partial a} = M_3(k_2 V_2(N_2) - \varepsilon N_3 - m_3),\ \ M_i|_{t=0} = \ M_i^0(a), i = 2,3. \\ M_2(0,t) = \displaystyle\int_0^\infty b_2(\xi)N_1(t)\, M_2(\xi,t)d\xi \\ M_3(0,t) = \displaystyle\int_0^\infty b_3(\xi)N_2(t)\, M_3(\xi,t)d\xi \end{cases} \tag{2.2.3}$$

Введем следующие обозначения:

$$N_1^\tau = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau N_1(t)dt \ \text{ и } \ \widetilde{N}_i^\tau = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \widetilde{N}_i(t)dt \quad i = 2,3,\ \ \tau > 0$$

-средняя биомасса (или средняя численность) за промежуток времени τ.

Требуется, чтобы числа N_2^p, N_3^p, были найдены таким образом, чтобы выполнялись неравенства

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \tilde{N}_2(t)dt \le N_2^P, \quad \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \tilde{N}_3(t)dt \ge N_3^P, \qquad (2.2.4)$$

для которых гарантируется выполнение следующего условия

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau N_1(t)dt \ge N_1^P, \qquad N_1^P \in \left[N_1^{min}, N_1^{max}\right], \qquad (2.2.5)$$

N_1^p – заданная плановая величина биомассы растений, N_2^p, N_3^p – соответственно предел вредоносности вредных насекомых и уровень эффективности полезных насекомых (энтомофагов).

Теперь получим необходимые и достаточные условия достижения планового урожая для биологической системы (2.2.3).

Имеет место, следующая теорема.

Теорема 2.2.1. Пусть

$$V_i(.) \ge 0, \ \frac{dV_i}{dN} > 0, \ \frac{d^2V_i}{dN^2} \le 0, \ i = 1,2.$$

$$0 < \min_t \frac{V_1(N_1(t))}{N_1(t)} = \overline{\alpha}_1 < \infty, \quad 0 < \max_a \frac{V_2(N_2(a,t))}{N_2(a,t)} = \overline{\alpha}_2 < \infty \ ,$$

$$\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2 = \text{const},$$

Тогда для того, чтобы имело место условие

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau N_1(t)dt \ge N_1^P, \quad N_1^p \in \left[N_1^{min}, N_1^{max}\right]$$

необходимо и достаточно выполнение следующих неравенств:

$$\begin{cases} N_0(t) \le \dfrac{Q}{\alpha_0 N_1^P}, \ \ 0 \le t \le \tau, \\ \dfrac{1}{\tau}\displaystyle\int_0^\tau \tilde{N}_2(t)dt \le N_2^P, \\ \dfrac{1}{\tau}\displaystyle\int_0^\tau \tilde{N}_3(t)dt \ge N_3^P. \end{cases} \qquad (2.2.6)$$

здесь N_2^P, N_3^P – определяется по формулам:

$$N_2^P = \frac{k_0 Q}{\bar{\alpha}_1 N_1^P} - \frac{m_1}{\bar{\alpha}_1} - \frac{1}{\bar{\alpha}_1 \tau} ln \frac{N_1(\tau)}{N_1(0)},$$

$$N_3^P = \frac{k_2 \bar{\alpha}_1}{\bar{\alpha}_2} N_1^P - \frac{m_2}{\bar{\alpha}_2} - \frac{1}{\bar{\alpha}_2 \tau} \max_x ln \frac{N_2(x,a,\tau)}{N_2(a,0)}.$$

Доказательство необходимости:

Пусть выполняется условие

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau N_1(t)dt \geq N_1^P, N_1^p \in \left[N_1^{min}, N_1^{max}\right].$$

Покажем, что неравенства (2.2.6) также выполняются. На основании первого уравнения системы (2.2.3)

$$\frac{dN_0}{dt} = Q + F_0(N_0, N_1),$$

$$N_0(t) \leq N_0 \exp\left(-\alpha_0 \int_0^t N_1(\tau)d\tau\right) + Q\int_0^t \exp\left(-\alpha_0 \int_\tau^t N_1(\xi)d\xi\right)d\tau \leq \left[N_0(0) - \frac{Q}{\alpha_0 N_1^p}\right]\exp\left(-\alpha_0 N_1^p t\right) + \frac{Q}{\alpha_0 N_1^p}.$$

Следовательно,

$$N_0(t) \leq \frac{Q}{\alpha_0 N_1^p},\ 0 \leq t \leq t_k \qquad \left(N_0(0) = \frac{Q}{\alpha_0 N_1^p}\right)$$

Из второго уравнения системы (2.2.3) получаем:

$$\frac{dN_1}{dt} = k_0 \alpha_0 N_0 N_1 - V_1(N_1)\widetilde{N}_2 - m_1 N_1,$$

отсюда

$$\frac{d}{dt} lnN_1 = k_0 \alpha_0 N_0 - \frac{V_1(N_1)}{N_1}\widetilde{N}_2 - m_1,$$

поскольку

$$\frac{V_1(N_1)}{N_1}\widetilde{N}_2 = k_0 \alpha_0 N_0 - m_1 - \frac{d}{dt} lnN_1 \text{ и}$$

$$\frac{V_1(N_1)}{N_1}\widetilde{N}_2 = \frac{k_0 Q}{N_1^P} - m_1 - \frac{d}{dt} lnN_1$$

Тогда, интегрируя по t в пределах от 0 до τ, получаем:

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \frac{V_1(N_1(t))}{N_1(t)}\widetilde{N}_2(t)\,dt = \frac{k_0 Q}{N_1^P} - m_1 - \frac{1}{\tau} ln \frac{N_1(\tau)}{N_1(0)},$$

то есть

$$0<\min_{0\le t\le\tau}\frac{V_1(N_1(t))}{N_1(t)}\widetilde{N}_2\le\frac{k_0Q}{N_1^P}-m_1-\frac{1}{\tau}ln\frac{N_1(\tau)}{N_1(0)},$$

поскольку $0<\min_{0\le t\le\tau}\frac{V_1(N_1(t))}{N_1(t)}=\bar{\alpha}_1<\infty$ отсюда

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau\widetilde{N}_2(t)\,dt\bar{\alpha}_1\le\frac{k_0Q}{N_1^P}-m_1-\frac{1}{\tau}ln\frac{N_1(\tau)}{N_1(0)},$$

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau\widetilde{N}_2(t)\,dt\le\frac{k_0Q}{\bar{\alpha}_1N_1^P}-\frac{m_1}{\bar{\alpha}_1}-\frac{1}{\bar{\alpha}_1\tau}ln\frac{N_1(\tau)}{N_1(0)}=N_2^p$$

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau\widetilde{N}_2\,(t)dt\le N_2^P.$$

Для доказательства третьего неравенства (2.2.6) рассмотрим третье уравнение (2.2.3):

$$\frac{\partial M_2}{\partial t}+\frac{\partial M_2}{\partial a}=M_2(k_1V_1(N_1)-\frac{V_2(N_2)}{N_2}\widetilde{N}_3-m_2),$$

$$(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial a})lnM_2=k_1V_1(N_1)-\frac{V_2(N_2)}{N_2}\widetilde{N}_3-m_2$$

Отсюда

$$\frac{V_2(N_2)}{N_2}\widetilde{N}_3\ge k_1V_1(N_1)-m_2-(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial a})lnM_2$$

Введем замену переменных

$$a=t+\xi,\ \varphi(t,\xi)=M_2(t+\xi,\,t)$$

и принимая во внимание условие $\frac{da}{dt}=1$, приходим к выводу, что

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\frac{\partial M_2}{\partial t}+\frac{\partial M_2}{\partial a},$$

и из последнего уравнения имеем

$$\frac{V_2(N_2)}{N_2}\widetilde{N}_3\ge k_1V_1(N_1)-m_2-\frac{\partial}{\partial t}ln\varphi$$

Интегрируя последнее уравнение по t от 0 до τ, находим

$$\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}\frac{V_2(N_2)}{N_2}\widetilde{N}_3\,dt = k_1\overline{\alpha}_1 N_1^P - m_2 - \frac{1}{\tau} ln\frac{M_2(a,\tau)}{M_2(a,0)},$$

отсюда

$$0<\max_a \frac{V_2(N_2(a,t))}{N_2(a,t)}\widetilde{N}_3 \geq \frac{k_0 Q}{N_1^P} - m_1 - \frac{1}{\tau} ln\frac{M_2(a,\tau)}{M_2(a,0)}.$$

Поскольку

$$0 < \max_a \frac{V_2(N_2(a,t))}{N_2(a,t)} = \bar{\alpha}_2 < \infty,\ \text{тогда}$$

$$\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}\widetilde{N}_3(t)\,dt \geq \frac{k_1\bar{\alpha}_1}{\bar{\alpha}_2}N_1^P - \frac{m_2}{\bar{\alpha}_2} - \frac{1}{\tau\bar{\alpha}_2}\max_x ln\frac{N_2(x,a,\tau)}{N_2(a,0)} = N_3^p.$$

Отсюда

$$\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}\widetilde{N}_3\,(t)dt \geq N_3^P\ .$$

Доказательство достаточности. Пусть выполняются неравенства (2.2.6). Покажем, что

$$\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} N_1(t)\,dt \geq N_1^P,$$

также выполняется, где N_1^P- планируемое из интервала $[N_1^{min}, N_1^{max}]$.

Из первого уравнения (2.2.3) находим

$$N_0(t) = N_0(0) + Qt - \alpha_0\int_0^{\tau} N_0 N_1(t)dt$$

отсюда

$$N_0(t) \geq N_0(0) + Qt - \frac{Q}{N_1^P}\int_0^{\tau} N_1(t)dt \quad \text{и, следовательно,}$$

$$\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} N_1(t) - N_1^p \geq \frac{\left[N_0(0) - \dfrac{Q}{\alpha_0 N_1^p}\right]N_1^p}{Qt_k},\quad \left(N_0(0) = \frac{Q}{\alpha_0 N_1^p}\right).$$

Таким образом, получаем

$$\frac{1}{\tau}\int_{0}^{\tau} N_1(t)dt \geq N_1^P.$$

На основании того, что N_2^P, N_3^P неотрицательны, тогда

$$\frac{m_2}{k_1\bar{\alpha}_1} + \frac{1}{\bar{\alpha}_2\tau}\max_x ln\frac{N_2(x,a,\tau)}{N_2(a,0)} \leq N_1^P \leq \frac{k_0 Q}{m_1\frac{\bar{\alpha}_1}{\tau}ln\frac{N_1(\tau)}{N_1(0)}}.$$

2.3. Оптимизационная модель интегрированного метода борьбы с вредителями сельскохозяйственных культур в биосистеме типа «хищник-жертва» с произвольными трофическими функциями

Математическое моделирование процессов, направленных на сохранение планируемого объема сельскохозяйственной продукции, занимает ключевое место как один из фундаментальных инструментов анализа, прогнозирования динамики природных объектов и выработки управленческих решений в отношении них. Актуальность совершенствования существующих и разработки новых систем защиты культурных растений от повреждения вредными организмами на современном этапе развития общества приобретает характер одной из приоритетных народнохозяйственных задач, имеющей одновременно выраженную социальную значимость и природоохранную направленность.

Использование математического аппарата, а также реализующих его программных вычислительных комплексов при решении задач, связанных с обеспечением сохранности будущего урожая, позволяет существенно повысить качество планово-экономических расчетов, обеспечить не только кратное сокращение временных затрат на проведение вычислений, но и гарантировать получение оптимальных с точки зрения заданных критериев решений.

«В области математической экологии и теоретической биофизики широкое признание получила фундаментальная модель межпопуляционного взаимодействия, разработанная А. Лоткой и В. Вольтерра» [11-13, 51]. Данная модель, описываемая системой обыкновенных дифференциальных уравнений, формализует взаимоотношения изолированных популяций, в частности, по типу «хищник – жертва». Впоследствии значительное развитие получили обобщения данной модели, учитывающие способность экосистемы к адаптации в условиях изменяющейся внешней среды для произвольного числа N взаимодействующих видов. История развития математических подходов к описанию колебаний численности биологических популяций насчитывает не одно десятилетие.

«Основополагающими работами в данной области следует считать модель экспоненциального роста, предложенную Т. Мальтусом» [14], а также «логистическую модель П. Ферхюльста, описывающую рост численности в условиях ограниченности ресурсов. Именно эти исследования послужили теоретическим фундаментом для последующих классических трудов В. Вольтерра» [51], А. Лотки [11-13], а также более поздних работ Р. Мэя [15,16] и других авторов, заложивших основы «современной математической популяционной динамики» [4-10].

«Исследованию вопросов устойчивости математических конструкций, описывающих динамику популяций и сообществ, с учетом наличия временных запаздываний и пространственных взаимодействий, посвящены труды таких ученых, как Ю.М. Свирежев, Д.О. Логофет, Р.А., Полуэктов и М.К. Юнуси» [120,138,155-172]. В указанных работах в качестве основного инструментария, как правило, выступают нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения, что предполагает рассмотрение динамики численности биологических объектов как непрерывного во времени процесса.

В условиях Республики Таджикистан в последние годы наблюдается внедрение отдельных компонентов интегрированной системы, направленной на защиту хлопчатника от комплекса вредных организмов и заболеваний. Исследователями и практикующими специалистами в этой области проводится активная работа по внедрению в производственную практику многочисленных хлопководческих хозяйств республики интегрированного подхода к защите данной культуры. В рамках реализуемых мероприятий пристальное внимание уделяется развитию биологического метода, как наиболее экологически безопасного и перспективного направления.

Регуляция вредных видов, понимаемая как управление их численностью, представляет собой конструктивный подход к решению проблемы защиты хлопчатника, непосредственной целью которого является предотвращение потерь урожая, наносимых фитофагами. При формулировке и решения задач, которые в научной литературе принято обозначать как «регулирование численности вредных организмов» или «защиты от вредителей» исследование ведётся на биологических система организованных по типу «хищник-жертва» или же «паразит-хозяин». В подобных задачах возникает необходимость определения оптимальных режимов применения как биологической, так и химических способов борьбы исходя из требований минимизации конечной численности вредных насекомых. Помимо этого, актуальными являются задачи перевода биологической системы из одного фазового состояния в другое, характеризующееся большей практической значимостью с точки зрения сельскохозяйственного производства.

Реализация практических мероприятий, направленных на защиту сельскохозяйственной культуры от негативного воздействия вредных организмов, предполагает последовательное решение двух взаимосвязанных классов задач, а именно: задач подготовительного характера и задач оптимизационного содержания. Содержание подготовительной задачи заключается в определении количественных значений порогов вредоносности фитофагов, а также в установлении уровней эффективности полезной энтомофауны (энтомофагов). Указанные параметры выводятся из условия, обеспечивающего сохранение потенциально возможного объема урожая и минимизацию потерь. В том случае, если условия существования решения подготовительной задачи не выполняются (то есть естественные регулирующие механизмы не справляются с сдерживанием популяции вредителя), возникает необходимость перехода к решению задачи оптимального управления состоянием агроценоза. Это, в свою очередь, подразумевает применение против вредоносных видов насекомых стратегий защиты представляющего собой единую систему, объединяющую различные методы. Указанная стратегия основывается на комплексном задействовании агротехнических, биологических, химических, механических и прочих способов подавления численности вредных насекомых применяемых не изолировано, а во взаимосвязи друг с другом.

Ключевыми параметрами, определяющими эффективность функционирования интегрированной системы защиты, служат показатели полезной деятельности энтомофагов и величины порогов вредоносности вредных насекомых. Эти параметры поддаются формализации и выражаются в виде математических соотношений и формул что предоставляет возможность заменить качественные описания к точным количественным характеристикам.

Рассмотрение поставленной выше задачи осуществимо в рамках анализа биологических систем, которые функционируют по принципу взаимодействия «хищник – жертва» либо «паразит – хозяин». Биологический метод защиты в данном контексте представляет собой целенаправленное использование паразитических и хищных организмов для регуляции численности популяций вредных видов. Сущность данного подхода заключается в интродукции (ввозе) и последующей колонизации паразитов и хищников в агроценоз с целью достижения такого снижения обилия фитофагов, которое соответствует экономически и экологически приемлемому уровню, не наносящему существенного ущерба культуре. В отличие от биологического, химический метод защиты, обеспечивая высокую начальную смертность вредных насекомых, обладает существенным недостатком, заключающимся в одновременной гибели полезных энтомофагов, что может приводить к нарушению естественных регуляторных механизмов и последующим вспышкам численности вредителей. В связи с указанным обстоятельством принципиальное значение приобретает вопрос обоснованного выбора между применением биологического либо химического метода защиты в конкретных складывающихся условиях.

Использование аппарата теории оптимального управления позволило получить аналитические выражения позволяющие определять рациональные параметры использования различным способов защиты хлопчатника от вредителей применительно к модельным экосистемам биоценоза. Проведенные исследования позволили выявить следующие закономерности, которые имеют прикладное значение. При условии того, что текущая численность популяции вредных насекомых превышает установленный пороговый уровень, а численность популяции хищников и паразитических видов не превышает их порогового значения (либо находятся на их уровне), применение биологического метода борьбы является рациональным и эффективным. Такая картина наблюдается в случае, когда численность популяций хищников и паразитов оказывается выше соответствующих пороговых величин: в таком режиме более предпочтительным и результативным становится использование химического метода, позволяющего оперативно снизить численность вредных насекомых.

Пусть задана модель агроценоза хлопчатника, которая включает в себя произвольные трофические функции из класса $V(\cdot)$, имеющий следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{dN_2}{dt} &= k_1\alpha_1V_1(N_1)N_2 - V_2(N_2)N_3 - m_2N_2 - \mu(\mathrm{D})\mathrm{N}_2 \\ \frac{dN_3}{dt} &= k_2V_2(N_2)N_3 - \varepsilon N_3^2 - m_3N_3 - \alpha\mu(\mathrm{D})\mathrm{N}_3 + \mathrm{PN}_3 \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

где $N_i = N_i(t)$ - соответственно численности вредных насекомых (i=2) и полезных насекомых $(i = 3)$. $V = V(N)-$трофическая функция взаимодействия вредных и полезных насекомых с обычными свойствами $i = 1,2$:

$$\frac{dV_i(N)}{dN} > 0, \qquad \frac{d^2V_i(N)}{dN^2} \le 0, \; i = 1,2.$$

Пусть начальные значения численности популяций насекомых заданы следующим образом:

$N_0 = N(t_0) = \{N_2(t_0), N_3(t_0)\} \in S^0 \subset E^2$ и пусть $U-$ множество кусочно-непрерывных функций, $P = P(t)$, $D = D(t),\ t_0 \le t \le t_k$ причем $0 \le P(t) \le P_{\max}, 0 \le D(t) \le D_{\max}$, $t \in [t_0, t_k]$.

Исследуем задачу оптимального управления, связанную с приведением биосистемы в практически наилучшее состояние. Входные данные должны удовлетворять определенным условиям, гарантирующим существование решения.

Постановка задачи оптимального управления процессом защиты растений (2.3.1) имеет вид.

Задача состоит в нахождении таких $P^* = P(t)$, $D^* = D(t),$ из U, при которых к моменту t_k биосистема приходит в заданное состояние $N_2 = N(t_K),\ N_2 \in S^1 \subset E^2$ обеспечивая при этом минимальное значение целевого функционала

$$I(P,D) = \int_{t_0}^{t_k} f^0(N_2, N_3, P, D)dt + \varphi(N_2, N_3, P, D)\Big|_{t_k}. \qquad (2.3.2)$$

Будем предполагать, что функции $f^0(\cdot)$, $\varphi = \varphi(\cdot)$ имеют непрерывные первые производные по переменным (N_2, N_3) и $f(\cdot) \ge 0, \varphi(\cdot) \ge 0,$ а функция «доза-эффект» $\mu = \mu(D)$ удовлетворяет условиям: $\mu(D) > 0, \dfrac{d\mu}{dD} > 0, \dfrac{d^2\mu}{dD^2} < 0$.

Совокупность таких управлений будем обозначать через U (множество допустимых управлений).

Умножим обе части второго уравнения (2.3.1) на $\left(-\dfrac{1}{N_3^2}\right)$ в результате получим

$$-\frac{dN_3}{dt}\cdot\frac{1}{N_3^2}=-k_2V_2(N_2)\cdot\frac{1}{N_3}+m_3\frac{1}{N_3}+\alpha\mu(D)\frac{1}{N_3}-P\frac{1}{N_3}+\varepsilon=$$
$$=\left[m_3+\alpha\mu(D)-P-k_2V_2(N_2)\right]\frac{1}{N_3}+\varepsilon \tag{2.3.3}$$

Введём обозначения $y=\frac{1}{N_3(t)}$ и $y_0=\frac{1}{N_3(0)}$. Продифференцировав по t получим

$$\frac{dy}{dt}=\frac{\frac{-dN_3}{dt}}{N_3^2}=-\frac{dN_3}{dt}\cdot\frac{1}{N_3^2}.$$

Если подставить значения y и $\frac{dy}{dt}$ в формулу (2.3.3) то будем иметь

$$\frac{dy}{dt}=\left[m_3+\alpha\mu(D)-P-k_2V_2(N_2)\right]y+\varepsilon \tag{2.3.4}$$

Для рассматриваемого случая однородное уравнение представляется в виде

$$\frac{dy}{dt}=\left[m_3+\alpha\mu(D)-P-k_2V_2(N_2)\right]y.$$

Перепишем последнее равенство в виде

$$\frac{d\ln y}{dt}=m_3+\alpha\mu(D)-P-k_2V_2(N_2).$$

В результате интегрирования по переменной t имеем

$$\ln y=\int_0^t\left[m_3+\alpha\mu(D)-P-k_2V_2(N_2)\right]d\tau+y_0^*$$

или

$$y=\exp\left[\int_0^t(m_3+\alpha\mu(D)-P-k_2V_2(N_2))d\tau\right]\cdot y_0^* \tag{2.3.5}$$

После дифференцирования соотношения (2.3.5) находим

$$y'=\exp\left[\int_0^t(m_3+\alpha\mu(D)-P-k_2V_2(N_2))d\tau\right]\cdot\left[m_3+\alpha\mu(D)-P-k_2V_2(N_2)\right]y_0^*+$$
$$+\exp\left[\int_0^t(m_3+\alpha\mu(D)-P-k_2V_2(N_2))d\tau\right]\cdot y_0'$$

затем, подставляя (2.3.4)

$$\exp\left[\int_0^t (m_3+\alpha\mu(D)-P-k_2V_2(N_2))d\tau\right]\cdot\left[m_3+\alpha\mu(D)-P-k_2V_2(N_2)y_0^*\right]+$$
$$+\exp\left[\int_0^t (m_3+\alpha\mu(D)-P-k_2V_2(N_2))d\tau\right]\cdot y_0^{*/}=$$
$$=\left[m_3+\alpha\mu(D)-P-k_2V_2(N_2)\right]\exp\left[\int_0^t (m_3+\alpha\mu(D)-P-k_2V_2(N_2))d\tau\right]\cdot y_0^*+\varepsilon$$

имеем

$$\exp\left[\int_0^t (m_3+\alpha\mu(D)-P-k_2V_2(N_2))d\tau\right]y^{*/}=\varepsilon$$

или

$$y^{*/}=\varepsilon\exp\left[-\int_0^t (m_3+\alpha\mu(D)-P-k_2V_2(N_2))d\tau\right]. \qquad (2.3.6)$$

Выполняя интегрирование (2.3.6) по t, находим y_0^* в следующей форме

$$y_0^*=\varepsilon\int_0^t \exp(-\lambda(\tau))d\tau+y_0.$$

где

$$\lambda(t)=\int_0^t\left[m_3+\alpha\mu(D)-P-k_2V_2(N_2)\right]d\xi.$$

После подстановки y_0^* в соотношение (2.3.5) приходим к следующему

$$y=\exp(\lambda(t))[y_0+\varepsilon\int_0^t \exp(-\lambda(\tau))d\tau]. \qquad (2.3.7)$$

С учётом введенных обозначений $y=\dfrac{1}{N_3(t)}$ и $y_0=\dfrac{1}{N_3(0)}$, выражение (2.3.7) принимает вид

$$\frac{1}{N_3(t)}=\exp(\lambda(t))\left(\frac{1}{N_3(0)}+\varepsilon\int_{t_0}^t \exp(-\lambda(\tau))d\tau\right)=$$
$$=\frac{1}{N_3(0)}\exp(\lambda(t))\cdot(1+\varepsilon N_3(0)\int_{t_0}^t \exp(-\lambda(\tau))d\tau).$$

Следовательно

$$N_3(t) = \frac{N_3(0)\exp(\lambda(t))}{1+\varepsilon N_3(0)\int\limits_{t_0}^{t_k}\exp(-\lambda(\tau))d\tau} \qquad (2.3.8)$$

Если подставить (2.3.8) в первое уравнение системы (2.3.1), то получим систему, определяемую функцией $N_2 = N_2(t)$ которая удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{dN_2}{dt} = k_1V_1(N_1)N_2 - V_2(N_2)\cdot\frac{N_3(0)\exp(\lambda(t))}{1+\varepsilon N_3(0)\int\limits_{t_0}^{t_k}\exp(-\lambda(\tau))d\tau} - m_2N_2 - \mu(D)N_2. \qquad (2.3.9)$$

Рассмотрим теперь задачу оптимального управления процессом защиты растений (2.3.1) которая формулируется так:

Задача состоит в отыскании такого допустимого управления $(P^*, D^*) \in U$ обеспечивающий перевод системы (2.3.9) из точки $N_2(t) = N_2^0$ в точку $N_2(t_k*) = N_2 = 0$, за минимальное возможное время $t_k^* \le t_k$, $t_k^* = \min\limits_U t_k(P, D)$.

Докажем существование оптимального управления $(P^*, D^*) \in U$, переводящего систему из состояния $N^0 \in N$ в $N_2 = 0$ за минимальное время $t_k = \inf t_k(P, D) \le t_k$. Для этого запишем первое уравнение системы (2.3.1) в однородной форме:

$$\frac{dN_2}{dt} = k_1V_1(N_1)N_2 - m_2N_2 - \mu(D)N_2. \qquad (2.3.10)$$

Обе части уравнение (2.3.10) умножая на $\frac{1}{N_2(t)}$ имеем

$$\frac{dN_2}{dt}\cdot\frac{1}{N_2(t)} = k_1V_1(N_1) - m_2 - \mu(D)$$

или

$$\frac{d\ln N_2}{dt} = (k_1V_1(N_1) - m_2 - \mu(D)).$$

В результате интегрирования последнего равенство по t, будем иметь:

$$\ln N_2=\int_{t_0}^{t_k}(k_1V_1(N_1)-m_2-\mu(D))dt+N_2^*(0)$$

отсюда

$$N_2(t)=N_2^*(0)\exp\{\int_{t_0}^{t_k}[k_1V_1(N_1)-m_2-\mu(D)]d\tau\}. \quad (2.3.11)$$

После продифференцировав последнее равенство по переменной t, и подставляя в равенство (2.3.9) получим

$$\exp\{\int_{t_0}^{t_k}[k_1V_1(N_1)-m_2-\mu(D)]d\tau\}\cdot(k_1V_1(N_1)-m_2-\mu(D))N_2^*(0)+$$

$$+\exp\{\int_{t_0}^{t_k}[k_1V_1(N_1)-m_2-\mu(D)]d\tau\}(N_2^*(0))'=$$

$$=(k_1V_1(N_1)-m_2-\mu(D))\exp\{\int_{t_0}^{t_k}[k_1V_1(N_1)-m_2-\mu(D)]d\tau\}\cdot N_2^*(0)-$$

$$-V_2(N_2)\cdot\frac{N_3(0)\exp(\lambda(t))}{1+\varepsilon N_3(0)\int_{t_0}^{t_k}\exp(-\lambda(\tau))d\tau}.$$

отсюда

$$(N_2^*(0))'=-\exp\{\int_{t_0}^{t_k}[k_1V_1(N_1)-m_2-\mu(D)]d\tau\}V_2(N_2)\cdot\frac{N_3(0)\cdot V_2(N_2)\cdot\exp(\lambda(t))}{1+\varepsilon N_3(0)\int_{t_0}^{t_k}\exp(-\lambda(\tau))d\tau}.$$

интегрируя по t, имеем

$$N_2^*(0)=-\int_{t_0}^{t_k}\frac{N_3(0)\cdot V_2(N_2)\cdot\exp(\lambda(t))}{1+\varepsilon N_3(0)\int_{t_0}^{t_k}\exp(-\lambda(\tau))d\tau}\exp\{-\int_{t_0}^{t_k}[k_1V_1(N_1)-m_2-\mu(D)]d\tau'\}d\tau+N_2(0)$$

Значение $N_2^*(0)$, подставляя в (2.3.11), отсюда получим

$$N_2(t)=\exp\{\int_{t_0}^{t_k}[k_1V_1(N_1)-m_2-\mu(D)]d\tau\}[N_2(0)-$$

$$-N_3(0)\int_{t_0}^{t_k}\frac{V_2(N_2)\cdot\exp(\lambda(t))}{1+\varepsilon N_3(0)\int_{t_0}^{t_k}\exp(-\lambda(\tau))d\tau}\exp\{\int_{t_0}^{\tau}[m_2+\mu(D)-k_1V_1(N_1)]d\tau'\}d\tau], \quad (2.3.12)$$

где

$$\lambda(t)=\int_0^t\left[m_3+\alpha\mu(D)-P-k_2V_2(N_2)\right]d\xi.$$

Чтобы система оказалась в конечном состоянии $N_2=0$, установим $N_2(t_k)=0$. Тогда, как легко видеть, множество конечных состояний содержит единственный элемент $N_2=0$. Следовательно, перевод системы в эту точку возможен при выполнении:

$$\int_{t_0}^{t_k}W(N_2)\exp\left(\int_{t_0}^{t}U(\tau)d\tau\right)dt=\frac{N_2(0)}{N_3(0)}$$

где
$$U(t)=m_2-k_1V_1(N_1)+\mu(D),$$

$$W(N_2)=\frac{V_2(N_2)\cdot\exp(\lambda(t))}{1+\varepsilon N_3(0)\int_{t_0}^{t_k}\exp(-\lambda(\tau))d\tau}.$$

Следует отметить, что другие постановки оптимизационных задач, относящиеся к задаче (2.3.1) (перевод системы из некоторого множества состояний в другое множество) с минимизацией целевого функционала, исследуется по аналогичной схеме.

$$I(u)=\int_{t_0}^{t_k}f(N_2,N_3,u)dt+\varphi(N_2(t_k),N_3(t_k)),$$

здесь $f=f(\cdot)$ представляет собой суммарные затраты, связанные с производством новых биологических полезных видов, а $\varphi=\varphi(\cdot)$ - является функцией, зависящей от конечного состояния системы.

2.4. Оптимизационный процесс интегрированного метода защиты растений с учетом временной и возрастной структуры

В современных условиях ведения сельскохозяйственного производства все более актуальное значение приобретает разработка научно обоснованных подходов к защите культурных растений от комплекса вредных организмов.

Традиционные методы борьбы, ориентированные преимущественно на тотальное уничтожение вредных насекомых, зачастую не учитывают сложность экологических взаимосвязей в агроценозах и могут приводить к нежелательным последствиям, таким как нарушение устойчивости экосистем, сокращение численности полезной фауны и возникновение резистентности вредителей к применяемым препаратам. В этой связи особого внимания заслуживает интегрированный подход, который в настоящее время рассматривается как наиболее перспективное направление развития систем защиты растений.

Под интегрированным методом защиты агроценозов от вредных организмов понимается научно обоснованное сочетание различных способов и приемов, направленных на регуляцию численности вредных насекомых. Такое сочетание предполагает комплексное задействование агротехнических, биологических, химических, механических и прочих способов подавления численности вредных насекомых. Принципиальным отличием интегрированного подхода от традиционных схем защиты является не просто механическое суммирование различных методов, а их целенаправленная координация, обеспечивающая достижение требуемого эффекта при минимальном негативном воздействии на окружающую среду и полезную фауну.

Ключевыми параметрами, характеризующими эффективность функционирования интегрированной системы защиты, обусловлены параметры, которые выражают уровень полезного действия энтомофагов и уровень вредоносности фитофагов. Именно эти параметры ложатся в основу решений о целесообразности применения мер защиты. Необходимо отметить, что для использования в рамках математического моделирования данные параметры должны быть формализованы, то есть представлены в виде строгих математических выражений и соотношений. Только при таком подходе становится возможным корректное описание процессов взаимодействия в системе «хищник–жертва» или «паразит–хозяин» и последующий анализ различных сценариев управления численностью.

В параграфе основное внимание уделяется рассмотрению задач оптимального управления, возникающих при задаче защиты агроценозов. Объектом исследования выступает модельная биологическая система, отражающая существенные черты реальных взаимодействий между популяциями вредных и полезных насекомых. В рамках проводимого анализа для указанной модельной системы формулируются и подвергаются обоснованию необходимые условия, при выполнении которых становится возможным существование решения оптимизационного процесса защиты растений от вредителей. Иными словами, определяются те требования, которым должны удовлетворять параметры системы и управляющие воздействия, чтобы задача поиска оптимальной стратегии защиты имела содержательный смысл и могла быть корректно поставлена.

«Особое место в проводимом исследовании занимает доказательство применимости принципа максимума Л.С. Понтрягина» [121] к рассматриваемому классу задач оптимального управления, связанных с модельными биологическими системами. Принцип максимума, являясь фундаментальным результатом теории оптимального управления, позволяет свести исходную вариационную задачу к краевой задаче для системы дифференциальных уравнений и дает необходимые условия оптимальности управления.

Включение этих аспектов в оптимизационную постановку задачи позволяет получить более адекватные и практически значимые результаты по сравнению с упрощенными моделями, не учитывающими структурную неоднородность популяций.

В работе рассматривается постановка задач оптимального управления характерных для исследования биосистем с тремя трофическими уровнями «растение – вредные насекомые – полезные насекомые» при условии наличия внешнего ресурса. Задача реализации защитных мероприятий против вредных насекомых сводится к поиску оптимальных управляющих воздействий для разных версий модели взаимодействия «хищник-жертва» или «паразит-хозяин». В качестве внешнего ресурса, поступающего в систему, могут выступать разнообразные факторы, такие как удобрения, вода для орошения, а также солнечную энергию, являющуюся основой продукционных процессов.

«Математическая постановка задачи включает определение трех ключевых параметров управления: оптимальной концентрации токсичного вещества *D*, интенсивности введения полезных видов насекомых *P* и скорости поступления внешних ресурсов *Q*. Критериями оптимальности могут служить либо минимизация численности вредных насекомых (с учетом экономических затрат на защитные мероприятия и потенциального ущерба), либо максимизация урожайности сельскохозяйственных культур. Формальная математическая формулировка указанной задачи приведена в работах» [108].

Необходимо найти минимум функционала, который может интерпретироваться как суммарный экономический ущерб либо совокупные затраты на проведения биологических и химических мероприятий по защите растений:

$$I(u) = \int_0^{t_k} f^0\left(N_1, N_2, N_3, u\right)dt + \varphi\left(N_1, N_2, N_3, u\right)\big|_{t_k} \tag{2.4.1}$$

в случае выполнения следующих ограничений:

$$\begin{cases} \dfrac{dN_0}{dt} = Q - F_0(N_0, N_1), \qquad N_i\big|_{t=0} = N_i^0, \qquad i = 0,1,2,3. \\ \dfrac{dN_1}{dt} = N_1 F_1\left(N_0, N_1, \widetilde{N}_2\right), \\ \dfrac{dN_2}{dt} = N_2 F_2\left(N_1, N_2, \widetilde{N}_3\right) - \mu(D) N_2, \\ \dfrac{dN_3}{dt} = N_3 F_3\left(N_2, N_3\right) - \alpha\mu(D) N_3 + P N_3. \end{cases} \tag{2.4.2}$$

« $N_i = N_i(t),\ i = \overline{0,3},$ соответственно биомассы (численности i-го трофического уровня), $F_i = F_i(.)$ - удельная скорость роста $\boldsymbol{i}$ -го трофического уровня $i = 0,1,2,3.$ u= (Q,P,D) - управляющие функции, $u \in U, \alpha$ –доли погибших хищников и паразитов после химобработки, $f^0 = f^0(\cdot) -$ характеризует ущерб со стороны вредителей и затраты на реализацию биологического, химического методов борьбы и на использовании удобрений, воды, $\varphi = \varphi(\cdot) -$ аналогичный ущерб при $t = t_k,\ \mu = \mu(D) -$ функции «доза – эффекта» от применения дозы $D,\ \widetilde{C}^1_{[0,t_k]} -$ пространства кусочно-непрерывной функции» [108].

В дальнейшем принимается, что функции $\varphi = \varphi(\cdot),\ f^0 = f^0(\cdot),\ F_i = F_i(\cdot) -$ обладают непрерывными частными производными первого порядка по совокупности своих аргументов причём выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial F_i}{\partial N_i} \le 0,\ \frac{\partial F_i}{\partial N_j} = \begin{cases} \le 0,\ i < j,\ i = \overline{0,3} \\ \ge 0,\ i > j,\ j = \overline{0,3} \end{cases}, \\ &F_i(\cdot) \ge 0,\ \varphi(\cdot) \ge 0,\ f^0(\cdot) \ge 0, \end{aligned} \tag{2.4.3}$$

Кроме того справедливы неравенства $F_i(\cdot) \ge 0,\ \varphi(\cdot) \ge 0,\ f^0(\cdot) \ge 0.$ Для функции $\mu = \mu(D)$ отражающих зависимость «дозы-эффект» предполагается выполнения следующих условий:

$$\mu = \mu(D) \ge 0,\ \frac{d\mu}{dD} \ge 0,\ \frac{d^2\mu}{dD^2} \le 0,\ \text{при}\ D \ge 0.$$

Очевидно, что условие (2.4.3) является следствием биологического смысла рассматриваемой задачи.

«В качестве конкретной реализации предложенной методики рассмотрим случай взаимодействия видов по закону В.Вольтерра» [51]. Соответствующая система имеет вид:

$$\begin{cases} F_0(\cdot) = -\alpha_0 N_0 N_1, \\ F_1(\cdot) = k_0\alpha_0 N_0 - \alpha_1 N_2 - m_1, \\ F_2(\cdot) = k_1\alpha_1 N_1 - \alpha_2 N_3 - m_2, \\ F_3(\cdot) = k_2\alpha_2 N_2 - \varepsilon N_3 - m_3. \end{cases} \tag{2.4.4}$$

где α_i, m_i , k_i, ε – биологические параметры популяций, входящие в агроценоз.

Теорема 2.4.1. *Пусть справедливы условия (2.4.3) а функции* $f^0(\cdot)$ *и* $\varphi(\cdot)$ *задаются выражениями*

$$f^0(\cdot) = CN_2 + C_P PN_3 + C_D D + Q, \qquad \varphi(\cdot) = CN_2 + C_P PN_3 + C_D D + Q.$$

Тогда для оптимального управления, доставляющего минимум функционалу в задаче (2.4.1)-(2.4.2) выполняются следующие соотношения:

$$\begin{cases} Q^* = \begin{cases} Q_{\max}, \psi_0 > 1 \\ 0,\ \psi_0 < 1 \end{cases}, \quad P^* = \begin{cases} P_{\max},\ \psi_3 > C_P \\ 0,\ \psi_3 < C_P \end{cases}, \\ D^* = \begin{cases} D_{\max},\ C_D + \psi_2 N_2 + \alpha\psi_3 N_3 < 0 \\ 0,\ C_D + \psi_2 N_2 + \alpha\psi_3 N_3 > 0,\ \mu(D) \equiv D \\ -\mu_0 + \sqrt{-\dfrac{\mu_0\mu_1}{C_D}\left(\psi_2 N_2 + \alpha\psi_3 N_3\right)},\ \psi_2 N_2 + \alpha\psi_3 N_3 < 0,\ \mu(D) = \dfrac{\mu_1 D}{\mu_0 + D}, \end{cases} \end{cases} \tag{2.4.5}$$

- через $\psi_i = \psi_i(t)$, $i = \overline{0,3}$ обозначены решения сопряженной системы соответствующей задаче (2.4.2);
- $\mu_0, \mu_1, Q_{\max}, P_{\max}, C, C_P, C_D$ – фиксированные положительные числовые параметры, (величины C, C_P, C_D означают соответственно цену единицы биомассы вредителя и издержки затраты на химические и биологические методы борьбы).

Доказательство: Построим функцию Гамильтона – Понтрягина для рассматриваемой задачи (2.4.1) – (2.4.2):

$$H=-CN_2-C_PPN_3-C_DD-Q+\psi_0\left[Q+F_0\left(N_0,N_1\right)\right]+\psi_1N_1F_1\left(N_0,N_1,N_2\right)+\psi_2N_2\left[F_2\left(N_1,N_2,N_3\right)-\mu(D)\right]+$$

$$+\psi_3N_3\left[F_3\left(N_2,N_3\right)-\alpha\mu(D)+P\right]$$

отсюда

$$H=\left(\psi_0-1\right)Q+\left(\psi_3-C_P\right)PN_3+\left[-C_DD-\psi_2N_2\mu(D)-\alpha N_3\psi_3\mu(D)\right]-CN_2+\sum_{i=1}^{3}\psi_iF_i(\cdot).$$

Применяя условие максимума к функции H по переменной u, приходим к выражению (2.4.5). В силу того, что $\psi_i=-\frac{\partial H}{\partial N_i},\ \psi_i\left(t_k\right)=-\left.\frac{\partial\psi}{\partial N_i}\right|_{t_k},\ i=0,1,2,3,$ то получим

$$\begin{cases}\dot{\psi}=A^*\psi+b, \quad b=(0,0,c,0), & (2.4.6)\\ \psi\left(t_k\right)=-\psi^0, \quad \psi^0=b, \\ A^*=\left(a_{ij}\right),\ a_{ij}=\frac{\partial F_i}{\partial N_j},\ F_i=F_i(\cdot), \quad i\text{ - я правая часть системы } (2.4.2), \text{ где}\end{cases}$$

$$A^*=\begin{bmatrix}\frac{\partial F_0}{\partial N_0} & N_1\frac{\partial F_1}{\partial N_0} & 0 & 0\\ \frac{\partial F_2}{\partial N_1} & \left(N_1\frac{\partial F_1}{\partial N_1}+F_1\right) & N_2\frac{\partial F_2}{\partial N_1} & 0\\ 0 & N_1\frac{\partial F_1}{\partial N_2} & \left(N_2\frac{\partial F_2}{\partial N_2}+F_2-\mu\right) & N_3\frac{\partial F_3}{\partial N_2}\\ 0 & 0 & N_2\frac{\partial F_2}{\partial N_3} & \left(N_3\frac{\partial F_3}{\partial N_3}+F_3-\alpha\mu+P\right)\end{bmatrix},\ b=\left(0,\ \frac{\partial F}{\partial N_1},\ \frac{\partial F}{\partial N_2},\ \frac{\partial F}{\partial N_3}\right).$$

Теорема 2.4.2. *Решение сопряженной задачи (2.4.6) может быть найдено в следующем виде*

$$\psi(t)=\left(I-K\right)^{-1}\psi_P(t),\ \ 0\le t\le t_k \qquad (2.4.7)$$

где $\psi_P(t)=b\left[\left(A_0^*\right)^{-1}-\left(\psi_0+b\left(A_0^*\right)^{-1}\exp\left(A_0^*\left(t_k-t\right)\right)\right)\right]$

$$K=\int_t^{t_k}e^{A_0^*\left(t_k-t\right)}\Delta A(t)dt, \quad \Delta A(t)=A^*(t)-A_0^*, \quad A_0^*=\left.A^*\right|_{t_k}.$$

Доказательство: Рассмотрим также систему с постоянной матрицей коэффициентов A_0^*, отличную от (2.4.6).

$$\dot{\psi} = A_0^*\psi + b, \;\; \psi(t_k) = -\psi^0. \qquad (2.4.8)$$

Решение рассматриваемой задачи может быть представлено в следующем виде:

$$\psi_P(t) = -\psi^0 e^{A_0^*(t_k - t)} - b\left(A_0^*\right)^{-1}\left[e^{A_0^*(t_k - t)} - I\right]$$

Введя $\Delta\psi = \psi(t) - \psi_P(t)$, последовательным вычитанием (2.4.8) из (2.4.6) выводим следующее выражение,

$$\Delta\dot{\psi} = -A_0^*\Delta\psi - \Delta A\,\psi, \quad 0 \le t \le t_k, \;\; \Delta\psi(t_k) = 0,$$

отсюда

$$\Delta\psi(t) = \int_t^{t_k} e^{A_0^*(\tau - t)}\Delta A(\tau)\psi(\tau)d\tau \qquad \text{и}$$

$$\psi(t) = \psi_P(t) + \int_t^{t_k} e^{A_0^*(\tau - t)}\Delta A(\tau)\psi(r)d\tau. \qquad (2.4.9)$$

В результате получена система интегральных уравнений типа Вольтерра. В случае введения функции $K\psi = \int_t^{t_k} e^{A_0^*(\tau - t)}\Delta A(\tau)\psi(\tau)d\tau,$ имеем (2.4.7). Кроме того, для стационарного режима системы (2.4.2) имеет место следующая теорема.

Теорема 2.4.3. *Пусть* вектор $N^* = \left(N_0^*, N_1^*, N_2^*, N_3^*\right)$ *есть стационарное решение системы (2.4.2), тогда*

$$N(t) \approx N^* + \left(N^0 - N^*\right)\sum_{i=0}^{3}\frac{e^{A\cdot t}}{\prod\limits_{i \ne j}\left(\lambda_j - \lambda_i\right)}\prod_{i \ne j}\left(A_0 - \lambda_i I\right), \qquad (2.4.10)$$

где λ_i *– собственные значения матрицы* $A_0 = \left(a_{ij}\right),\; i = \overline{0,3};\;\; j = \overline{0,3},\;\; N^0 = N(0).$

Доказательство. Пусть $\Delta N = N(t) - N^*$, где $N(t)$ – является решением задачи (2.4.2): $\dot{N} = f(N),\; N(0) = N^0,\; f - \lambda_i,\; i = \overline{0,2}$ – правая часть системы (2.4.2); N^* – решение $f(N^*) = 0.$ тогда легко видеть, что

$\Delta\dot{N} \approx A_0\Delta N,\; \Delta N(0) = N^0 - N^*,$ где A_0 – транспонированная с A_0^* матрица, и следовательно $\Delta N \approx \left(N^0 - N^*\right)e^{A_0 t}$.

С учётом того, что $\Delta\dot{N} = N(t) - N^*$, и используя интерполяционную формулу Лагранжа – Сильвестра получим (2.4.10).

Таким образом, для проведения оптимального мероприятия необходимо определить функции $N(t)$ и $\psi(t)$ соответственно по формулам (2.4.10), (2.4.8), числа N_i^P, $i = 2{,}3$ по формулам

$$N_2^P = \frac{k_0 Q}{\alpha_1 N_1^P} - \frac{m_1}{\alpha_1},\ N_3^P = \frac{k_1 \alpha_1}{\alpha_2} N_1^P - \frac{m_2}{\alpha_2},$$

(N_2^P, N_3^P - соответствующие критические уровни вредоносности популяции и эффективности их естественных врагов, после чего использовать выражение (2.4.5))

Перейдём к рассмотрению задачи оптимизации процесс защиты растений с учётом возрастной структуры популяций. Постановка соответствующей оптимизационной задачи имеет следующий вид.

Необходимо найти минимум функционала, который может интерпретироваться как суммарный экономический ущерб либо совокупные затраты на проведения биологических и химических мероприятий по защите растений:

$$I(u) = \int_0^{t_k}\int_0^{\infty} f^0(a, N, u)\,da\,dt + \int_0^{\infty} f^1(a, N_2, u)\Big|_{t_k} da \qquad (2.4.11)$$

при условиях

$$\begin{cases} \partial_{ta} N = F(N, a, t, u_0), \ \ 0 < a < \infty, \ \ 0 < t < t_k, \\ N(a, 0) = N_0(a), \ 0 \le a < \infty, \\ N(0, t) = \displaystyle\int_0^{\infty} B(\xi) N(\xi, t)\, d\xi, \ 0 \le t \le t_k\,, \end{cases} \qquad (2.4.12)$$

где $N_i = N_i(a,t)$ – численность вредных $(i = 2)$ и полезных $(i = 3)$ насекомых возраста a, в момент времени t, $B_i = B(N, a, t) \ge 0$ –функция рождаемости вредных и полезных насекомых, *i=2,3,* *a*-возраст, *t*-время, $\partial_{ta} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial a}$, $u = (u_0, u_1)$, $u_0 = (Q, P, D)$, $u \in U$, U -допустимое множество, то есть

$$U=\left\{u:\begin{matrix}0\le u(t)\le u_{\max}\\ u=u(t).\ к.н.\end{matrix},u_{\max}=\left\{Q_{\max},P_{\max},D_{\max},\overline{u}\right\}\right\}$$

кроме того, $N=(N_0,N_1,N_2,N_3),\ N_0=N_0(t),N_1=N_1(t)$, $N_i=N_i(a,t),\ i=2,3,$

$$F=(Q+F_0,N_1F_1,N_2F_2-\mu(D)N_2,N_3F_3-\alpha\mu(D)N_3+PN_3),$$

$$B=(b_0(a),b_1(a),B_1(N),B_2(N)),\ \text{причем}\quad \int_0^\infty b_i(a)da=0,\ i=0,1.$$

Теорема 2.4.3. *Предположим, что функции* $f^0(.),f^1(.),F(.),N_0(.),B(.)$ *являются достаточно гладкими и что для каждого управления* $u\in U$ *системы (2.4.12) имеет единственное решение. Тогда для оптимальности управление* $u^*=u^*(t)\in U$ *в задаче (2.4.11), (2.4.12) необходимо выполнение неравенства:*

$$\int_0^{t_k}\int_0^\infty\left\{\left[\frac{\partial f^0}{\partial u_0}+\left(\frac{\partial F}{\partial u_0}\right)^*\psi\right](u_0-u_0^*)+\left[\frac{\partial f^0}{\partial u_1}+\left(\frac{\partial F}{\partial u_1}\right)^*\psi\Big|_{a=0}\right](u_1-u_1^*)\right\}dadt\ge 0 \qquad (2.4.13)$$

при всех допустимых $u\in U$.

Через $\psi=\psi(a,t)$ *обозначается решение следующей сопряженной системы:*

$$\begin{cases}(\partial_{ta})^*\psi=-\dfrac{\partial H}{\partial N},\\ \psi(a,t_k)=-\dfrac{\partial f^1}{\partial N}\Big|_{t_k},\ \psi(\infty,t)=0\end{cases} \qquad (2.4.14)$$

в которой $H(.)=(F,\phi)+(B,\psi\big|_{a=0})-f^0(.)$.

Доказательство. Пусть $u=u(t)\in U$ решение $N=N(a,t),\quad u+\Delta u\in U$ - решение N+ΔN. Тогда легко видеть, что

$$\begin{cases}\partial_{ta}\Delta N=\dfrac{\partial F}{\partial N}\Delta N+\dfrac{\partial F}{\partial u_0}+R_0,\\ \Delta N\big|_{t=0}=0\\ \Delta N\big|_{t=0}=\displaystyle\int_0^\infty\left[\frac{\partial B}{\partial N}\Delta N+\frac{\partial B}{\partial u_1}\Delta u_1\right]d\xi+R_1\end{cases} \qquad (2.4.15)$$

$R_i=0(|\Delta N_i|),\ i=0,1.$

Системы (2.4.15) умножим на $\psi=\psi(a,t)\in C_2^1$ и результат проинтегрируем по (a,t) имеем

$$\int_0^{t_k}\int_0^{\infty}\left(-\frac{d\psi}{dt}-\frac{d\psi}{da}\right)\Delta N dadt=\int_0^{t_k}\int_0^{\infty}\left\{\left[\frac{\partial F}{\partial N}\Delta N+\frac{\partial F}{\partial u_0}\Delta u_0\right]\psi+\left[\frac{\partial B}{\partial N}\Delta N+\frac{\partial B}{\partial u_1}\Delta u_1\right]\psi\big|_{a=0}\right\}dadt+$$

$$+\int_0^{\infty}\Delta N\psi\Big|_{t_k=0}da+\int_0^{t_k}\Delta N\psi\big|_{a=0}dt+R_2. \qquad (2.4.16)$$

Здесь R_2 зависит от R_0, R_1 и имеет порядок $0(|\Delta u|)$,

$$|\Delta u|=|\Delta u_0|+|\Delta u_1|.$$

Тогда (2.4.14) и с учетом (2.4.15) системы (2.4.16) перепишем следующим образом

$$\Delta I=I(u+\Delta u)-I(u)=\int_0^{t_k}\int_0^{\infty}\left\{\left[\frac{\partial f^0}{\partial u_0}+\left(\frac{\partial F}{\partial u_0}\right)^*\psi\right]\Delta u_0+\left[\frac{\partial f^0}{\partial u_1}+\left(\frac{\partial B}{\partial u_1}\right)^*\psi\big|_{a=0}\right]\Delta u_1\right\}dadt+R \quad (2.4.17)$$

где $R=0(|\Delta u|)$.

Разработанный подход может быть использован для нахождения оптимальных режимов использования природных биологических систем.

2.5. Постановка оптимизационной задачи защиты растений при учёте временно-возрастной структуры насекомых и их пространственного распределения

В данном параграфе рассматривается постановка оптимизационной задачи защиты растений при учёте временно-возрастной структуры насекомых и их пространственного распределения на агроэкосистемах. Современные подходы к защите растений требуют комплексного учета биологических характеристик вредителей, таких как возрастные стадии развития, а также пространственных факторов, влияющих на распространение популяций. В статье разработана математическая модель, которая интегрирует эти аспекты для повышения эффективности применения методов защиты, таких как химическая обработка, биологическая борьба и агротехнические мероприятия. Модель позволяет точно оценить динамику популяций насекомых, прогнозировать их пространственное распределение и на основе этого оптимизировать распределение защитных мероприятий на сельскохозяйственных полях.

«Для биологической системы трёх трофических уровней типа «растение – вредные насекомые – полезные насекомые» с учётом поступления внешнего ресурса, временно-возрастной структуры, пространственных распределений, математически общая постановка задачи оптимального управления формулируется следующим образом:
Необходимо минимизировать функционал (затраты или суммарный ущерб)» [109,110,168]:

$$I(u) = \int_0^{t_k}\int_0^{\infty}\int_G f^0(N,u)\,dx\,da\,dt + \int_0^{\infty}\int_G \varphi(N,u)\big|_{t_k}\,dx\,da \tag{2.5.1}$$

при условии

$$\begin{cases} \dfrac{dN_0}{dt} = Q + F_0(N_0, N_1), \\ \dfrac{dN_1}{dt} = N_1 F_1(N_0, N_1, \widetilde{N}_2), \\ \dfrac{\partial N_2}{\partial t} + \dfrac{\partial N_2}{\partial a} + \sum_{i=1}^{2} \vartheta_{i2}\dfrac{\partial N_2}{\partial x_i} = N_2 F_2\big(N_1, N_2, \widetilde{N}_3\big) + \sum_{i=1}^{2} D_{i2}\dfrac{\partial^2 N_i}{\partial x_i^2} - \mu(D) N_2, \\ \dfrac{\partial N_3}{\partial t} + \dfrac{\partial N_3}{\partial t} + \sum_{i=1}^{2} \vartheta_{i3}\dfrac{\partial N_3}{\partial x_i} = N_3 F_3(N_2, N_3) + \sum_{i=1}^{n} D_{i3}\dfrac{\partial^2 N_3}{\partial x_i^2} - \alpha\mu(D) N_3 + P_1 N_3, \\ x \in G, \quad 0 < a < \infty, \quad 0 < t \le t_k. \end{cases} \tag{2.5.2}$$

$$N_i|_{t=0} = N_i^0, \quad i = 0,1,2,3. \tag{2.5.3}$$

$$N_i|_s = 0, \quad \left(\beta_i \frac{\partial N_i}{\partial n} - \alpha_i N_i|_s = 0\right), i = 2,3, \qquad x \in G, 0 \le a < \infty. \tag{2.5.4}$$

$$N_2|_{a=0} = \int_0^{\infty} B_2\left(\widetilde{N}_3, \xi, t\right) N_2(x,\xi,t)\,d\xi, \tag{2.5.5}$$

$$N_3|_{a=0} = \int_0^{\infty} B_2\left(\widetilde{N}_3, \xi, t, P\right) N_3(x,\xi,t)\,d\xi, \qquad 0 < t \le t_k. \tag{2.5.6}$$

$$\widetilde{N}_2(t) = \int_{\delta_1}^{\delta_2}\int_0^{\infty} N_2\,(x,\xi,t)\,dx\,d\xi \;\le N_2^p, \tag{2.5.7}$$

$$\int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \widetilde{N}_3\,(r) = \int_0^{\infty} N_3\,(x,\xi,t)dxd\xi \ \le N_2^3. \tag{2.5.8}$$

«Здесь Q -скорость поступления внешнего ресурса $N_0, N_i = N_i(.)$ - усреднение численности (или биомассы) i-го трофического уровня, $i = \overline{1,3}$; $F_i = F_i(.)$ соответствующие скорости роста i-го трофического уровня, $B_2(.), B_3(.)$ -коэффициенты рождаемости, $\mu = \mu(D) -$ функции «доза-эффекта» от применения дозы $D, U = (Q, D, P_1, P_2), u \in U, U$ - допустимое множество, N_2^p - пороги вредносности вредителей, N_3^p -уровень эффективности энтомофагов, $\vartheta_{i2}, \vartheta_{i3}$ - скорости перемещения вредных и полезных насекомых по i-му направлению, D_{i2}, D_{i3} - соответствующие коэффициенты диффузии, $i = 1,2$; $f^0(.), \varphi(.)$ - суммарный ущерб со стороны насекомых вредителей, затраты на производство биологического вида с целью управления и на ядохимикаты.»[109,110,168]

Пусть функция $F_i = F_i(.)$, удовлетворяет условие

$$\frac{\partial F_i}{\partial N_i} \le 0,\ \frac{\partial F_i}{\partial N_i} = \begin{cases} \le 0, & i < j \\ \ge 0, & i > j \end{cases},\quad F_i(.) \ge 0,\ \varphi(.) \ge 0,\ f^0(.) \ge 0,$$

$$\text{а}\ \ \mu = \mu(D),\quad \mu(D) \ge 0,\ \frac{d\mu}{dD} \ge 0,\ \frac{d^2\mu}{dD^2} \le 0, \qquad D \ge 0.$$

Рассмотрим оптимизационную задачу, процесса защиты растений с учетом временно-возрастной структуры и пространственных распределений в биосистемы типа «растение – вредные насекомые – полезные насекомые» виде.

«Сформулируем оптимизационную задачу защиты растений следующим образом» [108,109,157]:

Найти минимальной значения функционала

$$I(U) = \int_0^{t_k} \int_0^{\infty} \int_G f^0\,(x,a,t,N,u)\,dx\,da\,dt +$$

$$+\int_0^\infty \int_G +f^1(x,a,t,N,u)\,dx\,da|_{t_к} \tag{2.5.9}$$

при условии

$$\begin{cases} \partial_{ta} N = F(N,a,t,u_0), \quad x\in G,\ 0<a<\infty,\ 0\le t\le t_k \\ N(x,a,0) = N_0(x,a), \quad x\in \bar G,\ 0<a<\infty \\ N(x,0,t) = \int_0^\infty B\,(N,\xi,t,u_1)d\xi \\ N|_s = 0 \\ N = (N_1,\ldots,N_m), \quad x=(x_1,x_2)\in \bar G,\ \bar G = G+S \\ \bar G = \{x: 0\le x_i\le L_i\}, \quad u=(u_0,u_1), \quad u_i = u_i(x,a,t) \end{cases} \tag{2.5.10}$$

где $\left(\partial_{tax} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial a}\left[\sum_{i=1}^{2} V_i \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(D_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)\right]\right)$, u_0, u_1- кусочно – непрерывного управления, причем $0\le u_i \le u_i^{\max}$, $i=0,1$, V_i, D_i-постоянные диагональные матрицы порядка m, $i=1,2.$

Пусть управление u соответствует решение N, а управление $u+\Delta u$ решение $N+\Delta N$, тогда легко видеть, что ΔN удовлетворяет условиям:

$$\partial_{tax} N = \frac{\partial F}{\partial N}\Delta N + \frac{\partial F}{\partial u_0}\Delta u_0 + R_0, \tag{2.5.11}$$

$$\Delta N|_{t=0} = 0, \quad \Delta N|_{s=0},$$

$$\Delta N(x,0,t) = \int_0^\infty \left(\frac{\partial B}{\partial N}\Delta N + \frac{\partial B}{\partial u_1}\Delta u_1\right) d\xi + R_1 \tag{2.5.12}$$

где $R_i = 0(|\Delta u|)$, $i=0,1.$

$$\Delta I = \int_0^{t_k}\int_0^\infty\int_G^\infty \left(\frac{\partial f^0}{\partial N}\Delta N + \frac{\partial f^0}{\partial u}\Delta u\right) dxdadt + \int_0^\infty\int_G^\infty \left(\frac{\partial f^1}{\partial N}\Delta N + \frac{\partial f^1}{\partial u}\Delta u\right)\Big\|_{t_k} dxda + R_3 \tag{2.5.13}$$

где $R_3 = 0(|\Delta u|)$.

Уравнение (2.5.13) приращение функционала (2.5.9).

Системы (2.5.10) умножая $\psi = \psi(x,a,t)$ из $C_2^{1,1}$ и результат проинтегрируем по (x,a,t) $x\in \bar G$, $0\le a\le\infty$, $0\le t\le t_k$.

Далее выполняя обычные преобразования имеем.

$$\int_0^{t_k}\int_0^{\infty}\int_G\left(-\frac{\partial\psi}{\partial t}-\frac{\partial\psi}{\partial a}-\sum_{i=1}^{2}V_i\frac{\partial\psi}{\partial x_i}-\sum_{i=1}^{2}D_i\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right)\Delta N dxdadt=\int_0^{t_k}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial N}\Delta N+\frac{\partial F}{\partial u_0}\Delta u_0\right)\psi(x,a,t)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial B}{\partial N}\Delta N+\frac{\partial B}{\partial u_1}\Delta u_1\right)\psi(x,a,t)\right\}dxdadt+\int_0^{\infty}\int_G^{\infty}\Delta N\Big|_{t_k}dxda+\int_0^{t_k}\int_G\Delta N\psi\big|_{a=\infty}dxdt+$$

$$+\sum_{i=1}^{2}\int_0^{t_k}\int_0^{\infty}D_i\frac{\partial\Delta N}{\partial x_i}\psi\big|_s dadt+R_4, \tag{2.5.14}$$

где R_4 –зависит от функций $R_0,\ R_1$ и имеет порядок $0(|\Delta u|)$. Введем функцию

$$H(N,\psi)=(F,\psi)+\left(B,\psi\big|_{a=0}\right)-f^0$$

и

$$\psi=\psi(x,a,t)$$

является решением следующей краевой задачи:

$$\begin{cases}\partial^*_{tax}\psi=\dfrac{\partial H}{\partial n},\ x\in G, 0<a<\infty, \quad 0\le t\le t_k\\ \psi(x,a,t_k)=-\dfrac{\partial f'}{\partial N}\Big|_{t_k}\\ \psi\big|_{a=\infty}=0,\ \psi\big|_s=0,\end{cases}$$

где ∂^*_{tax} – сопряженной к ∂_{tax} оператор.

Тогда (2.5.11), (2.5.12) в силу (2.5.14) перепишем так:

$$\Delta I=\int_0^{t_k}\int_0^{\infty}\int_G\left\{\frac{\partial f^0}{\partial u_0}+\left(\frac{\partial f^0}{\partial u_0}\right)^*\psi\right\}\Delta u_0 dxdadt+\int_0^{t_k}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\left\{\frac{\partial f^0}{\partial u_1}+\left(\frac{\partial B}{\partial u_1}\right)^*\psi\big|_{a=0}\right\}\Delta u_1 dxdadt+R \tag{2.5.15}$$

где R зависит от $R_3,R_4,R=0(|\Delta u|)$.

Отсюда из условия минимума имеем:

$$\Delta I\big|_{u=u^*}\ge 0\ \ u\ \ I_{u_0}=\left(\frac{\partial f^0}{\partial u_0}+\left(\frac{\partial f^0}{\partial u_0}\right)^*\psi\right),$$

$$I_{u_1}=\left(\frac{\partial f^0}{\partial u_1}+\left(\frac{\partial B}{\partial u_1}\right)^*\psi(x,0,t)\right).$$

При $U=E^r$ имеем:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f^0}{\partial u_0} + \left(\dfrac{\partial F}{\partial u_0}\right)^* \psi = 0, \dfrac{\partial f^1}{\partial u_0}|_{t_k} = 0 \\ \dfrac{\partial f^0}{\partial u_1} + \left(\dfrac{\partial B}{\partial u_1}\right)^* \psi(x,0,t) = 0\,, \dfrac{\partial f^1}{\partial u_1}|_{t_k} = 0 \end{cases} \tag{2.5.16}$$

В настоящем параграфе разработана математическая модель для оптимизации защиты растений с учетом временно-возрастной структуры насекомых и их пространственного распределения. Проведённый анализ показал, что использование интегрированного подхода, который учитывает возрастные стадии насекомых и их динамику в пространстве, значительно повышает эффективность защитных мероприятий, позволяя точнее прогнозировать и минимизировать затраты на защиту растений.

Выводы по второй главе

Основные положения и выводы по каждому из параграфов могут быть сформулированы следующим образом.

В первом параграфе осуществлена постановка и анализ математической модели защиты растений как для стационарного, так и для нестационарного случаев при использовании произвольных трофических функций. Показано, что выбор конкретного вида трофических зависимостей существенным образом влияет на существование и устойчивость стационарных состояний системы. Данные результаты создают теоретическую основу для последующего анализа более сложных моделей, включающих возрастную структуру и пространственные неоднородности.

Во втором параграфе разработана математическая модель, учитывающая одновременно временно-возрастную структуру популяций насекомых и их пространственное распределение. В отличие от классических подходов, ограничивающихся либо пространственной, либо возрастной неоднородностью, предложенная модель позволяет описывать процессы миграции особей разных возрастных групп в зависимости от плотности популяций и обеспеченности пищевыми ресурсами.

В третьем параграфе исследована оптимизационная модель интегрированного метода защиты растений с произвольными трофическими функциями в биосистеме типа «хищник-жертва». Исследована задача управления популяции вредителей при комплексном задействовании биологических и химических методов, при котором энтомофаги выступают в роли естественных регуляторов, а химические обработки используются в качестве дополнительных и крайний необходимых средств при превышении критической численности вредных насекомых. Сформулирована задача оптимального управления с функционалом, включающим затраты на проведение мероприятий и экономический ущерб от повреждения растений. На основе принципа максимума Понтрягина получены необходимые условия оптимальности, позволяющие определить моменты начала и окончания обработок, а также интенсивность применения химических и биологических средств. Показано, что оптимальная стратегия в большинстве случаев носит смешанный характер: на начальном этапе доминирует биологический метод, а при достижении вредителем определенной численности подключаются химические обработки. Установлено, что при правильно подобранных параметрах система может переходить в режим, при котором химические обработки требуются лишь эпизодически, а основную регуляцию осуществляют энтомофаги. Данный результат имеет важное практическое значение, поскольку позволяет минимизировать пестицидную нагрузку на агроценозы.

Четвертый параграф посвящен дальнейшему развитию оптимизационного подхода применительно к системам, учитывающим временные и возрастные структуры. Исследованы вопросы оптимального управления модельным агроценозом, в котором популяции вредителей и энтомофагов разделены на несколько возрастных групп с различной уязвимостью к средствам защиты и различной трофической активностью. Показано, что наличие возрастной структуры приводит к необходимости использования распределенных по времени управляющих воздействий, ориентированных на наиболее уязвимые фазы развития насекомых.

В пятом параграфе рассмотрена наиболее полная постановка оптимизационной задачи защиты растений, объединяющая временную, возрастную структуру насекомых и пространственные распределения. Для этого случая построен функционал качества, учитывающий пространственно-временные затраты на проведение защитных мероприятий и ущерб от повреждения растений в различных точках поля. С использованием методов теории оптимального управления системами с распределенными параметрами получены необходимые условия оптимальности в форме вариационных неравенств.

Разработанный комплекс математических моделей охватывает различные уровни детализации описания агроценозов — от точечных моделей с произвольными трофическими функциями до пространственно-распределенных систем с учетом возрастной структуры. Каждый из рассмотренных уровней имеет свою область применимости и позволяет решать специфические задачи анализа и оптимизации.

Сформулированные оптимизационные задачи и полученные необходимые условия оптимальности создают теоретическую базу для разработки практических рекомендаций по применению средств защиты растений. Показано, что оптимальные стратегии, как правило, предполагают комбинированное использование химических и биологических методов, причем доля каждого из них зависит от текущего состояния популяций и внешних условий.

Полученные во второй главе результаты могут служить основой для дальнейших исследований, направленных на совершенствование систем защиты растений.

ГЛАВА 3. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ БИОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ И КОМПЛЕКС КОМПЬЮТЕРНЫХ ПРОГРАММ.

Необходимость использования численных методов необходима для самой природой задач оптимального управления биологическими системами. Аналитические решения существуют лишь для простейших, сильно идеализированных случаев. Уже при добавлении возрастной структуры популяции (когда динамика описывается дифференциальных уравнений) или пространственной координаты (уравнения в частных производных) получить явные формулы для оптимального управления невозможно. Только численное моделирование позволяет для конкретных значений биологических и экономических параметров определить точные сроки, дозы и зоны обработок.

Кроме того, практическая ценность диссертации напрямую зависит от того, насколько разработанные методы доведены до работающего программного комплекса. Создание такого инструмента — одна из главных задач третьей главы.

Таким образом, в данной главе решаются три взаимосвязанные задачи. Первая задача это выбор численных схем, приспособленных к особенностям биологических моделей защиты растений: нелинейности, не отрицательности фазовых переменных, разным временным масштабам процессов. Вторая задача это реализация этих схем в виде алгоритмов и исследование их свойств: сходимости, точности, вычислительной сложности. Третья задача, создание комплекса компьютерных программ, объединяющего ввод данных, численное интегрирование, оптимизацию, визуализацию результатов и экспорт отчётов.

Для точечных моделей, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, используются многошаговые методы Адамса. Выбор конкретного метода зависит от свойств системы. Для систем с возрастной структурой, применяются специализированные схемы, учитывающие эту особенность. Для пространственно-распределённых моделей используется метод прямых: пространственные производные аппроксимируются конечными разностями, что сводит задачу к системе обыкновенных дифференциальных уравнений большой размерности, которая затем интегрируется по времени. Разработанный программный комплекс имеет модульную структуру. Модуль ввода данных загружает параметры модели, начальные условия, экономические критерии и ограничения.

В первом параграфе разработан алгоритм решения задачи оптимального управления для системы трёх трофических уровней. Во втором параграфе этой главы рассмотрены и исследованы численные методы для оптимизации защитных мероприятий с учетом возрастного состава насекомых. И заключительный параграф главы посвящен результатам компьютерного моделирования.

Представленные методы дают возможность получить необходимые решения для задач оптимального управления.

Предложена математическая модель, описывающая динамику численности популяции на разных стадиях развития, а также влияние агротехнических и химических методов защиты. Для численного решения системы дифференциальных уравнений, лежащей в основе модели, применяются методы Эйлера и методы Адамса второго порядка, обеспечивающие баланс между точностью и вычислительной эффективностью.

Проведен анализ устойчивости численных схем, оценена их применимость в условиях различных сценариев обработки растений. На основе вычислительных экспериментов определены оптимальные стратегии применения средств защиты, минимизирующие экономический ущерб при заданных экологических ограничениях. Показано, что учет возрастной структуры популяции позволяет существенно повысить эффективность управления вредителями по сравнению с традиционными подходами.

Полученные результаты могут быть использованы в сельском хозяйстве, обеспечивающих рациональное применение пестицидов с учетом биологических особенностей целевых видов.

3.1. Численный метод решения задачи оптимального управления в биосистеме трёх трофических уровней «растение – вредные насекомые – полезные насекомые»

Исследование динамики биологических систем, включающих взаимодействие нескольких трофических уровней, представляет собой одну из ключевых задач современной экологии, математического моделирования и теории управления. Трёхуровневая биосистема «растение – вредные насекомые – полезные насекомые» имеет важное практическое значение для сельского хозяйства, экологии и устойчивого развития. Управление подобными системами требует разработки эффективных методов оптимизации, направленных на минимизацию ущерба от вредителей, повышение продуктивности растений и поддержание экологического баланса. Численные методы решения дифференциальных уравнений, описывающих динамику таких систем, являются важным инструментом для анализа, прогнозирования и оптимизации управления.

«Исторически численные методы решения дифференциальных уравнений начали активно развиваться в XX веке в ответ на потребности науки, техники и экономики в точном моделировании сложных динамических процессов. Одним из первых и наиболее простых методов численного интегрирования стал метод Эйлера, предложенный Леонардом Эйлером в XVIII веке. Этот метод, основанный на аппроксимации решения с помощью линейной интерполяции, до сих пор используется благодаря своей простоте и наглядности, хотя и обладает ограниченной точностью» [119,154]. Более сложным и точным подходом является метод Адамса, разработанный Джоном Коучем Адамсом в XIX веке. Методы Адамса, включая явные (Адамса-Башфорта) и неявные (Адамса-Моултона) схемы, основаны на использовании предыдущих значений решения для повышения точности аппроксимации. Эти методы широко применяются для решения задач с умеренной точностью и высокой вычислительной эффективностью.

«С развитием вычислительной техники в середине XX века были разработаны более сложные методы, включая метод конечных разностей, метод конечных элементов и методы адаптивного интегрирования. Значительный вклад в развитие численных алгоритмов внесли работы Джона фон Неймана и его коллег, которые заложили основы современных вычислительных подходы» [22].

«В области биологического моделирования численные методы нашли широкое применение благодаря работам Роберта Мэя, исследовавшего динамику популяций с использованием нелинейных дифференциальных уравнений» [15,16]. «Классические модели Лотки и Вольтерры, описывающие взаимодействие хищников и жертв, стали фундаментом для дальнейших исследований в области экологического моделирования» [4,11-13,51]. В последние десятилетия численные методы активно используются для анализа сложных биологических систем, включая задачи управления и оптимизации. Современные исследования в области агроэкологии и управления экосистемами демонстрируют применение методов оптимального управления для снижения негативного воздействия вредителей и повышения урожайности.

Современные исследования в этой области активно развиваются благодаря появлению новых вычислительных технологий и методов машинного обучения. «Численными методами исследовано влияние нелокальных эффектов на динамику популяции микроорганизмов в рамках диффузионной модели с квадратично-нелинейным, нелокальным взаимодействием приведено в» [36,40,46,58,136]. В работе [46] предлагается численный метод решения задачи оптимального управления системой линейных по фазовым переменным нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений с начальным и (локальными) и с неразделенными многоточечным и (нелокальными) условиями. В [136] изложены фундаментальные принципы и методы, включая принцип максимума Понтрягина, который является одним из ключевых результатов в теории управления. «В работе Т.В.Горбовой рассмотрен численный алгоритм для модели популяционной динамики» [58]. «Оптимизационные процессы задачи защиты растений были детально рассмотрены в трудах» [34-36,99,111,112].

В рамках данного исследования разработаны и проанализированы численные методы оптимизации управления в трёхуровневой биосистеме «растение – вредные насекомые – полезные насекомые». В работе рассматриваются подходы к решению системы дифференциальных уравнений, описывающих динамику взаимодействия трофических уровней, и предлагаются методы оптимизации управляющих параметров для достижения устойчивого состояния системы.

Результаты исследования могут быть использованы для разработки стратегий управления агроэкосистемами, снижения экологического ущерба и повышения устойчивости сельскохозяйственных систем. Предлагаемые методы также могут быть адаптированы для анализа других биологических систем, что открывает новые перспективы для дальнейших исследований.

Постановка задачи оптимального управления

В рамках защиты сельскохозяйственных культур от вредителей перед исследователями стоят две основные задачи: подготовительная и оптимизационная. На начальном этапе ставится подготовительная задача включающая в себя вычисление пороговых уровней вредных насекомых и определение эффективности энтомофагов при учёте того, что потенциальный урожай сохраняется. При не выполнении условий подготовительной задачи, возникает объективная необходимость для перехода к более сложной постановки, а именно оптимизационной задачи, которая связана с управлениями агроценозами. Тогда в таком случае, задействуется интегрированная схема объединяющая агротехнические мероприятия, биологические способы защиты культурных растений и химические обработки.

Наиболее детально в работе рассматриваются задачи оптимального управления применительно к биологическим системам с тремя трофическими уровнями взаимодействия «растение-вредитель-энтомофаг» при учете наличия внешнего ресурса. В число таких задач входит контроль численности вредных насекомых, которая представляется как поиск оптимальных управляющих параметров в модификациях моделей «хищник-жертва» или «паразит-хозяин». Наглядный пример такой биологической системы могут послужить поле сельскохозяйственных культур, например поле пшеницы, поле засеянное рисом или хлопком, в которых популяции вредных насекомых существуют с их природные враги (энтомофаги).

Критерий оптимальности интегрирует как прямые потери от вредителей, так и затраты на биологический контроль, обеспечивая экологически устойчивое регулирование системы.

Требуется минимизировать функционал [99,107,109-111]:

$$I(u)=\int_0^{t_k} f^0\left(N_1,N_2,N_3,u\right)dt+\varphi\left(N_1,N_2,N_3,u\right)\Big|_k \tag{3.1.1}$$

при условиях:

$$\begin{cases} \dfrac{dN_0}{dt}=Q-\alpha_0 N_0 N_1, \\ \dfrac{dN_1}{dt}=N_1\left(k_0\alpha_0 N_0-\alpha_1 N_2-m_1\right). \\ \dfrac{\partial N_2}{\partial t}+\dfrac{\partial N_2}{\partial a}=N_2\left(k_1\alpha_1 N_1-\alpha_2 N_3-m_2\right)-\mu(D)N_2, \\ \dfrac{\partial N_3}{\partial t}+\dfrac{\partial N_3}{\partial a}=N_3\left(k_2\alpha_2 N_2-\varepsilon N_3-m_3\right)-\alpha\mu(D)N_3+PN_3. \\ N_i\big|_{t<0}=N_i^0,\ i=\overline{0,3} \\ N_2\big|_{a=0}=\int\limits_0^\infty B_2(\xi,t,N_1)N_2(\xi,t)d\xi,\quad 0<t\le t_k, \\ N_3\big|_{a=0}=\int\limits_0^\infty B_3\left(\xi,t,\widetilde{N}_2\right)N_3(\xi,t)d\xi,\quad 0<a\le\infty \\ \widetilde{N}_i=\widetilde{N}_i(t)=\int\limits_{\alpha_i}^{\beta_i} N_i(a,t)da,\ \alpha_i,\beta_i-const>0,\ i=2,3. \end{cases} \tag{3.1.2}$$

«Здесь Q – скорость поступления внешнего ресурса N_0, $\widetilde{N}_i = \widetilde{N}_i(t) -$ суммарные численности вредных и полезных насекомых, $i = 2{,}3,$ $N_i = N_i(\cdot) -$ биомассы (или численности видов) *i*- го трофического уровня $i = 1{,}2{,}3$, $B_2(\cdot), B_3(\cdot) -$ коэффициенты рождаемости вредных и полезных насекомых, где

$$u \in U = \begin{cases} u = (P, D, Q);\ 0 \le u(t) \le u^{\max} \\ \qquad 0 \le t < t_k \\ \qquad u(t) \in \widetilde{C}^1_{[0,t_k]}. \end{cases}$$

$f^0 = f^0(\cdot) -$ характеризует ущерб со стороны вредителей и затраты на реализацию биологического, химического методов борьбы и на использовании удобрений, воды, $\varphi = \varphi(\cdot) -$ аналогичный ущерб при $t = t_k$, функция $\mu = \mu(D)$ «доза – эффекта» от применения дозы *D,* удовлетворяет условиям $\mu = \mu(D) \ge 0,\ \dfrac{d\mu}{dD} \ge 0,\ \dfrac{d^2\mu}{dD^2} \le 0,$ при $D \ge 0$, а $\widetilde{C}^1_{[0,t_k]} -$ пространства кусочно-непрерывной функции.» [99,107,109-111]

Теорема 3.1.1. *Пусть имеют место равенства*

$$f^0(\cdot) = CN_2 + C_P P N_3 + C_D D + Q,$$
$$\varphi(\cdot) = CN_2 + C_P P N_3 + C_D D + Q,$$

тогда оптимальное управление задачи (3.1.1)-(3.1.2) характеризуется соотношениями:

$$\begin{cases} Q^* = \begin{cases} Q_{\max}, \psi_0 > 1 \\ 0, \psi_0 < 1 \end{cases}, \quad P^* = \begin{cases} P_{\max},\ \psi_3 > C_P \\ 0,\ \psi_3 < C_P \end{cases}, \\ D^* = \begin{cases} D_{\max},\ C_D + \psi_2 N_2 + \alpha\psi_3 N_3 < 0 \\ 0,\ C_D + \psi_2 N_2 + \alpha\psi_3 N_3 > 0,\ \mu(D) \equiv D \\ -\mu_0 + \sqrt{-\dfrac{\mu_0\mu_1}{C_D}\left(+\psi_2 N_2 + \alpha\psi_3 N_3\right)},\ \psi_2 N_2 + \alpha\psi_3 N_3 < 0,\ \mu(D) = \dfrac{\mu_1 D}{\mu_0 + D}, \end{cases} \end{cases} \tag{3.3.3}$$

где $\mu_0, \mu_1, Q_{\max}, P_{\max}, C, C_P, C_D -$ *заданные положительные числа, (* $C, C_P, C_D -$ *соответственно стоимости единицы биомассы вредителя, затраты на* *химических и биологических методов борьбы),* $\psi_i=\psi_i(t)$ *− решения сопряженной к (3.1.2) задачи, i=0,1,2,3.*

Доказательство: Составим функцию Гамильтона – Понтрягина для задачи (3.1.1) – (3.1.2):

$$H=-CN_2-C_PPN_3-C_DD-Q+\psi_0\left[Q-\alpha_0N_0N_1\right]+\psi_1N_1\left(k_0\alpha_0N_0-\alpha_1N_2-m_1\right)+$$
$$+\psi_2N_2\left[\left(k_1\alpha_1N_1-\alpha_2N_3-m_2\right)-\mu(D)\right]+\psi_3N_3\left[\left(k_2\alpha_2N_2-\varepsilon\ N_3-m_3\right)-\alpha\ \mu\ (D)\ +P\right]$$

Из условия максимума функции *H* по *u* получим (3.1.3).

Так как $\psi_i=-\dfrac{\partial H}{\partial N_i},\ \psi_i(t_k)=-\left.\dfrac{\partial\psi}{\partial N_i}\right|_{t_k},\ i=0,1,2,3,$ то имеем

$$\begin{cases}\dot{\psi}=A^*\psi+b,\ \ b=(0,0,c,0),\\ \psi\left(t_k\right)=-\psi^0,\ \ \psi^0=b,\\ A^*=\left(a_{i,j}\right),\end{cases}\tag{3.1.4}$$

A^* – матрица взаимодействия биологических систем.

Теорема 3.1.2. *Решение сопряженной задачи (3.1.4) представляется в виде*

$$\psi(t)=\left(I-K\right)^{-1}\psi_P(t),\ \ 0\le t\le t_k\tag{3.1.5}$$

где

$$\psi_P(t)=b\left[\left(A_0^*\right)^{-1}-\left(\psi_0+b\left(A_0^*\right)^{-1}\exp\left(A_0^*\left(t_k-t\right)\right)\right)\right],$$

$$K=\int_t^{t_k}e^{A_0^*(t_k-t)}\Delta A(t)dt,\ \ \Delta A(t)=A^*(t)-A_0^*,\ \ A_0^*=\left.A^*\right|_{t_k}.$$

Доказательство: Наряду с системой (3.1.4) рассмотрим систему с постоянной матрицей A_0^*

$$\dot{\psi}=A_0^*\psi+b,\ \ \psi\left(t_k\right)=-\psi^0.\tag{3.1.6}$$

Решение последней задачи представляется в следующем виде:

$$\psi_P(t)=-\psi^0e^{A_0^*\left(t_k-t\right)}-b\left(A_0^*\right)^{-1}\left[e^{A_0^*\left(t_k-t\right)}-I\right]$$

Теперь введем следующее обозначения $\Delta\psi=\psi(t)-\psi_P(t),$ тогда постепенно из (3.1.4) вычитая (3.1.6) получим

$$\Delta\dot{\psi}=-A_0^*\Delta\psi-\Delta A\,\psi,\ \ 0\le t\le t_k,$$
$$\Delta\psi\left(t_k\right)=0,$$

отсюда $\Delta\psi(t)=\int\limits_t^{t_k} e^{A_0^*(\tau-t)}\Delta A(\tau)\psi(\tau)d\tau$ и следовательно

$$\psi(t)=\psi_P(t)+\int\limits_t^{t_k} e^{A_0^*(\tau-t)}\Delta A(\tau)\psi(r)d\tau. \qquad (3.1.7)$$

Получим систему интегральных уравнений типа В.Вольтерра. Если ввести следующую функцию $K\psi=\int\limits_t^{t_k} e^{A_0^*(\tau-t)}\Delta A(\tau)\psi(\tau)d\tau,$ получим (3.1.5).

Численные методы решения

Для численного решения системы (3.1.2) были применены методы Эйлера и Адамса. Эти методы позволяют получать приближённые решения дифференциальных уравнений, описывающих динамику популяций растений, вредных и полезных насекомых, а также изменение внешнего ресурса. Метод Адамса, как правило, обеспечивает более высокую точность по сравнению с методом Эйлера, особенно в случае сложных систем.

В качестве базового подхода к численному интегрированию выбран явный метод Эйлера. Данный метод представляет собой простейший способ приближённого решения дифференциальных уравнений. Его реализация требует минимальных вычислительных затрат, что делает метод особенно удобным для получения предварительных оценок. Однако следует учитывать, что простота алгоритма достигается за счёт существенных ограничений по шагу интегрирования - для обеспечения приемлемой точности требуется использование достаточно малых шагов, что увеличивает общий объём вычислений.

Ниже представлены результаты численного решения исследуемой задачи, полученные с применением метода Эйлера при различных значениях шага интегрирования, а также скриншоты программы «Метод Эйлера» и программы «Метод Адамса». Анализ этих данных позволяет оценить, как качественное поведение решения, так и характер накопления вычислительной погрешности.

Численное решение задачи оптимального управления в биосистеме трёх трофических уровней «растение – вредные насекомые – полезные насекомые» методом Эйлера.

Для каждого шага *n* от *0* до *M-1* имеем:

$$N_{0,n+1} = N_{0,n} + h(Q - \alpha_0 N_{0,n} N_{1,n}),$$
$$N_{1,n+1} = N_{1,n} + h(N_{1,n}(\kappa_0 \alpha_0 N_{0,n} - \alpha_1 N_{2,n} - m_1)),$$
$$N_{2,n+1} = N_{2,n} + h(N_{2,n}(\kappa_1 \alpha_1 N_{1,n} - \alpha_2 N_{3,n} - m_2) - \mu(D) N_{2,n}),$$
$$N_{3,n+1} = N_{3,n} + h(N_{3,n}(\kappa_2 \alpha_2 N_{2,n} - \in N_{3,n} - m_3) - \alpha\mu(D) N_{3,n} + PN_{3,n}).$$

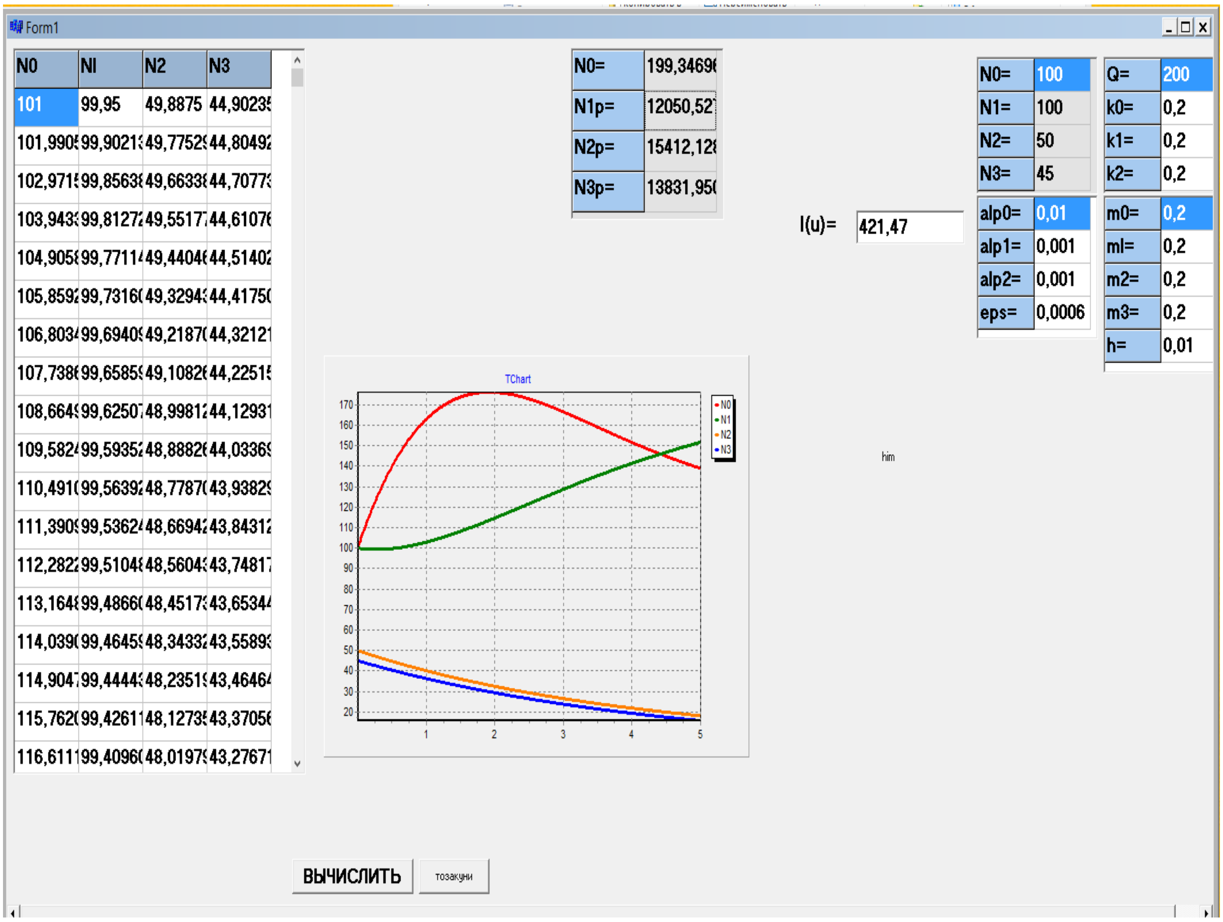


Рисунок 1. Скриншот программы «Метод Эйлера»

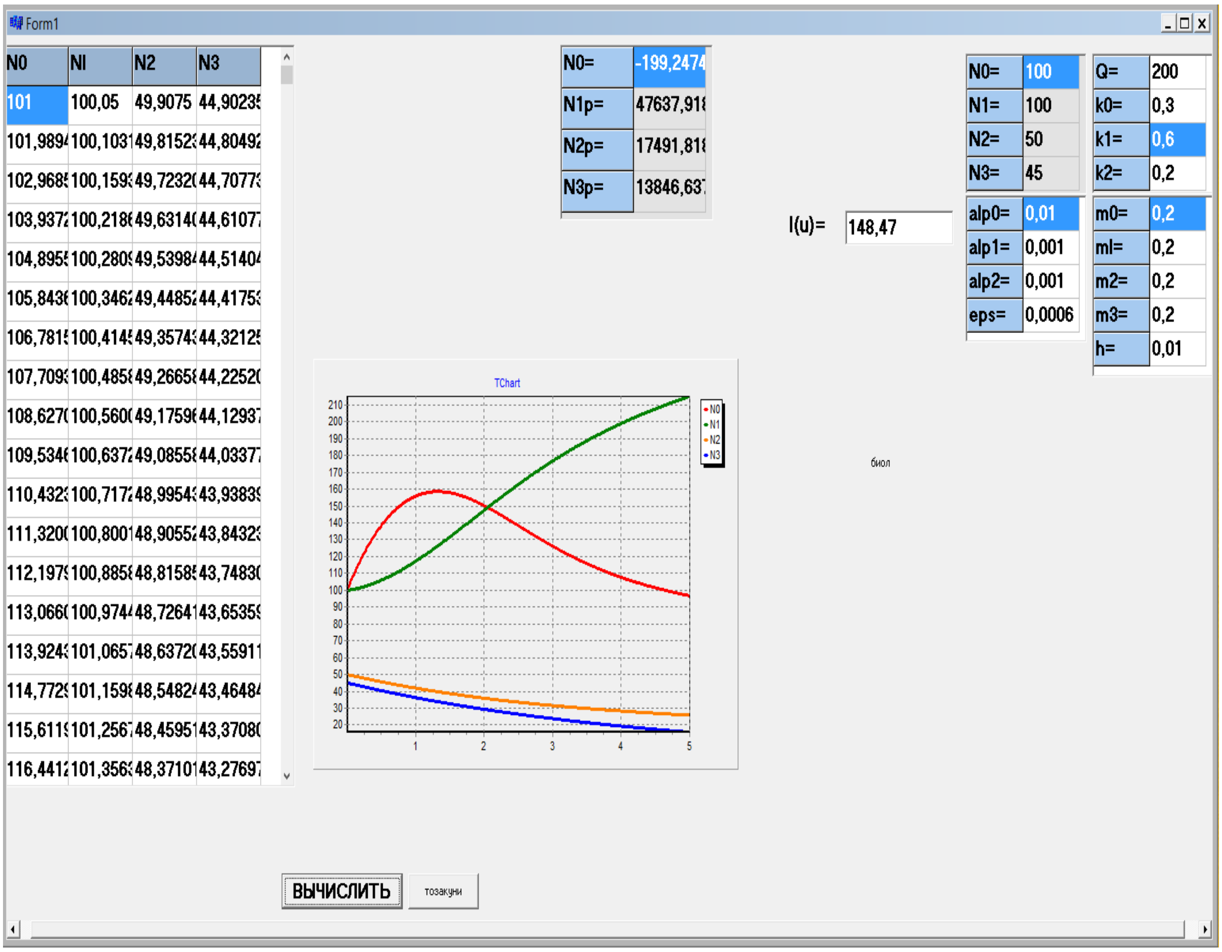


Рисунок 2. Скриншот программы «Метод Эйлера»

Для получения более точных результатов обратимся к многошаговому методу Адамса, в отличие от одношагового метода Эйлера, данный подход использует информацию о нескольких предыдущих точках решения, что позволяет существенно повысить точность вычислений без значительного уменьшения шага интегрирования. Особенностью метода является необходимость использования стартовых точек, которые могут быть получены, например, тем же методом Эйлера или методами Рунге-Кутты.

Представленные далее результаты демонстрируют существенное улучшение точности по сравнению с методом Эйлера при сопоставимых вычислительных затратах. Особенно наглядно преимущества метода Адамса проявляются при интегрировании на протяжённых интервалах, где накопление погрешности в методе Эйлера становится критическим.

Для каждого шага *n* от *0* до *M-1* имеем:

$$N_{0,n+1} = N_{0,n} + \frac{h}{2}(3(Q - \alpha_0 N_{0,n} N_{1,n}) - (Q - \alpha_0 N_{0,n-1} N_{1,n-1}),$$

$$N_{1,n+1} = N_{1,n} + \frac{h}{2}(3(N_{1,n}(\kappa_0 \alpha_0 N_{0,n} - \alpha_1 N_{2,n} - m_1) - (N_{1,n-1}(\kappa_0 \alpha_0 N_{0,n-1} - \alpha_1 N_{2,n-1} - m_1)),$$

$$N_{2,n+1} = N_{2,n} + \frac{h}{2}(3(N_{2,n}(\kappa_1 \alpha_1 N_{1,n} - \alpha_2 N_{3,n} - m_2) - \mu(D) N_{2,n}) -$$

$$-((N_{2,n-1}(\kappa_1 \alpha_1 N_{1,n-1} - \alpha_2 N_{3,n-1} - m_2) - \mu(D) N_{2,n-1})),$$

$$N_{3,n+1} = N_{3,n} + \frac{h}{2}(3(N_{3,n}(\kappa_2 \alpha_2 N_{2,n} - \in N_{3,n} - m_3) - \alpha\mu(D) N_{3,n} + P N_{3,n}) -$$

$$-(N_{3,n-1}(\kappa_2 \alpha_2 N_{2,n-1} - \in N_{3,n-1} - m_3) - \alpha\mu(D) N_{3,n-1} + P N_{3,n-1})).$$

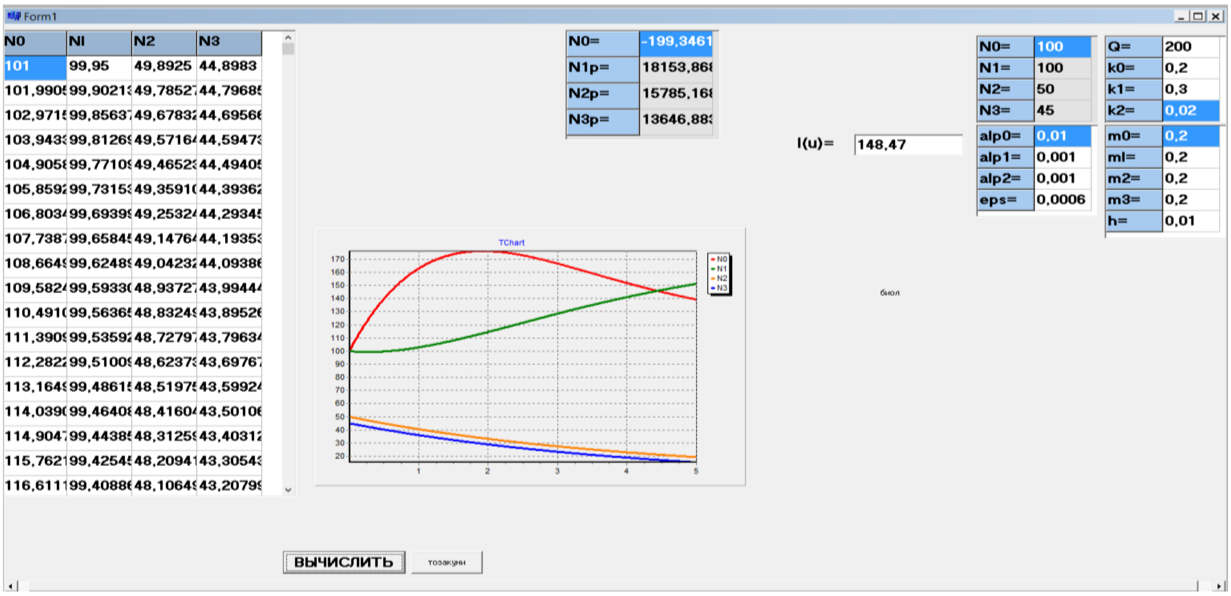


Рисунок 3. Скриншот программы «Метод Адамса»

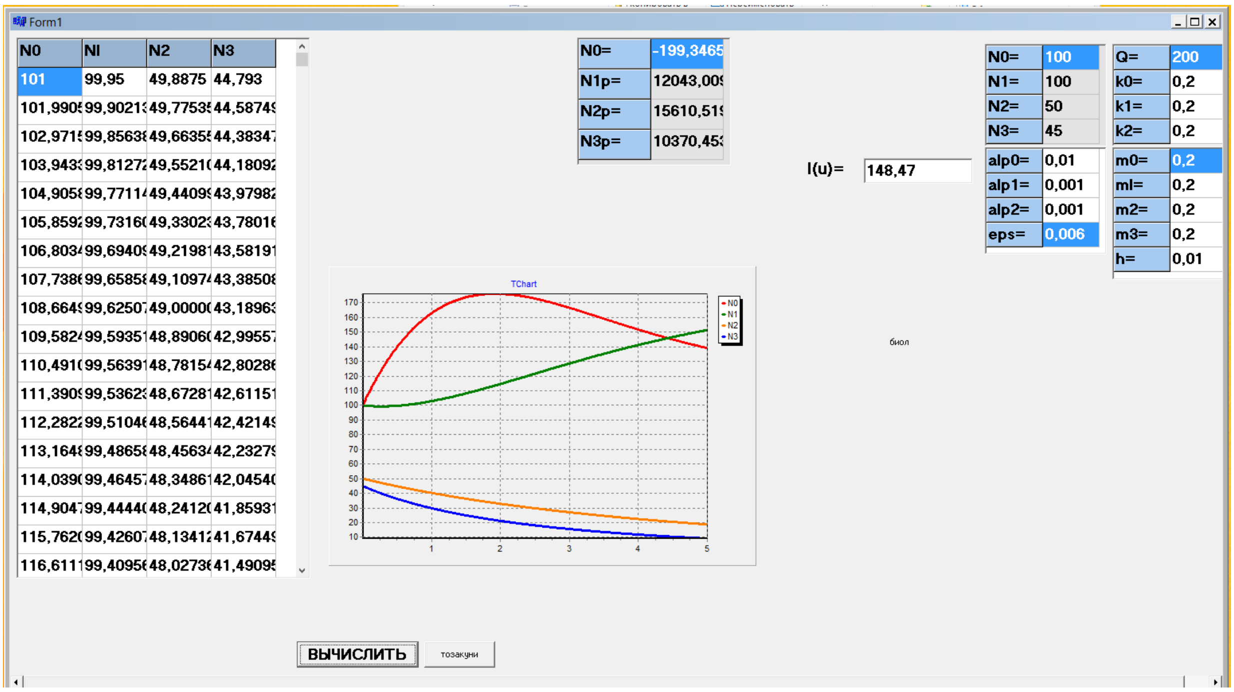


Рисунок 4. Скриншот программы «Метод Адамса»

В параграфе рассмотрена задача оптимального управления в трёх трофической биосистеме с использованием численных методов Эйлера и Адамса. Полученные решения демонстрируют возможность эффективного управления популяциями с учётом экологических ограничений. Результаты могут быть полезны при разработке стратегий биоконтроля в агроэкосистемах, позволяя минимизировать использование химических средств защиты растений.

3.2. Численные методы в исследовании оптимизации защиты растений с возрастной структурой популяции насекомых

Современное сельское хозяйство сталкивается с необходимостью эффективной защиты растений от вредителей, что требует учета сложных биологических процессов, включая динамику популяций насекомых.

Пусть задан функционал, характеризующий совокупный ущерб от вредителей и затраты на защитные мероприятия. Требуется определить такое допустимое управление, при котором данный функционал достигает минимального значения при заданных ограничениях на динамику популяций.

$$I(u) = \int_0^{t_k} f^0(N_1, N_2, N_3, u)dt + f^1(N_1, N_2, N_3, u)|t_k \tag{3.2.1}$$

с учетом следующих ограничений:

$$\begin{cases} \partial_{ta} N = F(N, a, t.u_0),\ 0 < a < \infty,\ 0 < t < t_k \\ N(a,0) = N_0(a),\ 0 \le a < \infty \\ N(0,t) = \int_0^{\infty} B(N(\xi,t), \xi, t, u_1)d\xi,\ 0 \le t \le t_k \end{cases} \tag{3.2.2}$$

где $f^0(\cdot),\ f^1(\cdot), F(\cdot), N_0(\cdot), B(\cdot) -$ заданные достаточно гладкие функции своих аргументов, $u = (u_0, u_1),\ u_0 = (Q, P, D), u \in U, U -$ допустимое множество, т.е. множество ограниченных и кусочно-непрерывных функций

$$U=\begin{cases} u: 0\le u(t)\le u_{\max} \\ u_{\max}=\{Q_{\max}, P_{\max}, D_{\max}\} \\ u=u(t) \end{cases}$$

и, кроме того,

$N=(N_0, N_1, N_2, N_3),\quad N_0=N_0(t)-$масса внешнего ресурса в момент времени *t*,

$N_1=N_1(t)-$биомасса растений сельхозкультуры в момент времени *t*,

$N_1=N_i(a,t)-$численность вредных (*i=2*) и полезных (*i=3*) насекомых возраста a, в момент времени *t*.

$F=(Q+F_0, N_1F_1, N_2F_2-\mu(D)N_2, N_3F_3-\alpha\mu(D)N_3+PN_3),\ Q-$скорость поступления внешнего ресурса, $F_i=F_i(\cdot)$ – соответствующие удельные скорости роста биологических видов агроценоза, причем

$$\frac{\partial F_i}{\partial N_i}\le 0,\quad \frac{\partial F_i}{\partial N_j}=\begin{cases}\le 0,\ i<j,\ i=\overline{0,3}\\ \ge 0,\ i>j,\ j=\overline{0,3}\end{cases}$$

$\mu=\mu(D)-$ функции «доза – эффекта» от применения дозы D и удовлетворяет условиям:

$$\mu=\mu(D)\ge 0,\ \frac{d\mu}{dD}\ge 0,\ \frac{d^2\mu}{dD^2}\le 0,$$

при $D\ge 0$.

где P — биологическое управление, то есть количество выпускаемых в популяцию паразита или хищника,

D — химическое управление, то есть концентрация ядовитого вещества, применяемого для подавления вредных насекомых.

$B=(b_0(a), b_1(a), B_2(N), B_3(N)),\quad B_2(\cdot), B_3(\cdot)-$коэффициенты рождаемости вредных и полезных насекомых, причем

$$\int_0^\infty b_i(a)da=0,\quad i=0,1.$$

Заметим, что в функционале (3.2.1) функции $f^0(\cdot), f^1(\cdot)$ может характеризовать или ущерб, или вред, со стороны насекомых вредителей, затраты на производства биологического вида с целью управления и затраты на ядохимикаты и др., причем

$$\begin{cases} f^0(\cdot) = \sum_{i=1}^{3} f_i^0(N) + C_1 P + C_2 D \geq 0, \;\; f_i^0(N) \geq 0 \\ f^1(\cdot) = \sum_{i=1}^{3} f_i^1(N) + C_1 P + C_2 P \geq 0, \;\; f_i^1(N) \geq 0, \; i = 1,2,3 \end{cases}$$

где $C_i = const > 0, \; i = 1,2.$

Теорема 3.2.1. *Пусть функции* $f^0(\cdot), f^1(\cdot), F(\cdot), N_0(\cdot), B(\cdot) -$ *достаточно гладкие и для них, и для любого* $u \in U$ *существует единственное решение задачи (3.2.2). Тогда для того, чтобы* $u^* = u^*(t) \in U$ *являлся оптимальным управлением задачи (3.1.1), (3.1.2) необходимо выполнение неравенства:*

$$\int_0^{t_k}\int_0^{\infty} \left\{ \left[\frac{\partial f^0}{\partial u_0} + \left(\frac{\partial F}{\partial u_0} \right)^* \psi \right] \left(u_0 - u_0^* \right) + \left[\frac{df^0}{\partial u_1} + \left(\frac{\partial F}{\partial u_1} \right)^* \psi\big|_{a=0} \right] \left(u_1 - u_1^* \right) \right\} dadt \geq 0 \qquad (3.3.3)$$

при всех $u \in U$*. Здесь* $\psi = \psi(a,t)$ *является решением сопряженной системы:*

$$\begin{cases} \left(\partial_{ta} \right)^* \psi = -\dfrac{\partial H}{\partial N} \\ \psi\left(a, t_k \right) = -\dfrac{\partial f^1}{\partial N} \;\; \Big|_{t_k}, \; \psi\left(\infty, t \right) = 0 \end{cases} \qquad (3.1.4)$$

Где $H(\cdot) = \left(F, \phi \right) + \left(B, \psi\big|_{a=0} \right) - f^0(\cdot).$

Заметим, что $\left(\partial_{ta} \right) = -\left(\partial_{ta} \right)^*.$

Численное решение задачи минимизации функционала $\boldsymbol{I(u)}$

Требуется минимизировать функционал:

$$I(u) = \int_0^{t_k} \left(CN_2(t) - C_p PN_3(t) + C_{\mathcal{D}}\mathcal{D}(t) + Q \right) dt + (CN_2(t_k) -$$

$$-C_p PN_3(t_k) + C_{\mathcal{D}}\mathcal{D}(t_k) + Q)$$

Принцип максимума Понтрягина.

Функция Гамильтона – Понтрягина представляется в следующем виде:

$$H = \left(CN_2 - C_pPN_3 + C_{\mathcal{D}}\mathcal{D} + Q\right) + \psi_0(Q + \alpha_0 N_0 N_1) +$$
$$+\psi_1 N_1(k_0\alpha_0 N_0 - \alpha_1 N_2 - m_1) + \psi_2(N_2(k_1\alpha_1 N_1 - \alpha_2 N_3 - m_2) - \mu(\mathcal{D})N_2) +$$
$$+\psi_3(N_3(k_2\alpha_2 N_2 - \varepsilon N_3 - m_3) - \alpha\mu(\mathcal{D})N_3 + PN_3).$$

Сопряженные переменные $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3$ удовлетворяют уравнениям:

$$\frac{d\psi_0}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial N_0} = -\psi_0\alpha_0 N_1 - \psi_1 k_0\alpha_0 N_1,$$

$$\frac{d\psi_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial N_1} = -\psi_0\alpha_0 N_1 - \psi_1(k_0\alpha_0 N_0 - \alpha_1 N_2 - m_1) - \psi_2 k_1\alpha_1 N_2,$$

$$\frac{d\psi_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial N_2} = C - \psi_1\alpha_1 N_1 - \psi_2\left(k_1\alpha_1 N_1 - \alpha_2 N_3 - m_2 - \mu(\mathcal{D})\right) - \psi_3 k_2\alpha_2 N_3,$$

$$\frac{d\psi_3}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial N_3} = C_P P - \psi_2\alpha_2 N_2 - \psi_2(k_2\alpha_2 N_2 - \varepsilon N_3 - m_3 - \alpha\mu(\mathcal{D}) + P).$$

Численное решение системы (3.1.2) методом Эйлера:

$$\begin{cases} N_0^{n+1} = N_0^n + h(Q + \alpha_0 N_0^n N_1^n), \\ N_1^{n+1} = N_1^n + h\left(N_1^n(k_0\alpha_0 N_0^n - \alpha_1 N_2^n - m_1)\right), \\ N_2^{n+1} = N_2^n + h(N_2^n(k_1\alpha_1 N_1^n - \alpha_2 N_3^n - m_2) - \mu(\mathcal{D}^n)N_2^n), \\ N_3^{n+1} = N_3^n + h(N_3^n(k_2\alpha_2 N_2^n - \varepsilon N_3^n - m_3) - \alpha\mu(\mathcal{D}^n)N_3^n + PN_3^n), \end{cases}$$

где $\mu(\mathcal{D}^n) = k\mathcal{D}^n$.

Метод Адамс 2 – го порядка

Первый шаг (выполняется методом Эйлера):

$$N_i^1 = N_i^0 + hf_i^0, i = 0,1,2,3.$$

Последующие шаги ($n \geq 1$):

$$N_i^{n+1} = N_i^n + \frac{h}{2}\left(3f_i^n - f_i^{n-1}\right),$$

где:

$f_0^n = Q + \alpha_0 N_0^n N_1^n,$

$f_1^n = N_1^n(k_0\alpha_0 N_0^n - \alpha_1 N_2^n - m_1),$

$f_2^n = N_2^n(k_1\alpha_1 N_1^n - \alpha_2 N_3^n - m_2) - \mu(\mathcal{D}^n)N_2^n,$

$f_3^n = N_3^n(k_2\alpha_2 N_2^n - \varepsilon N_3^n - m_3) - \alpha\mu(\mathcal{D}^n)N_3^n + PN_3^n.$

Оптимальное управление (из принципа максимума Понтрягина):

$$\mathcal{D}^n = \frac{C_{\mathcal{D}}}{k(\psi_2^n N_2^n + \alpha \psi_3^n N_3^n)},$$

где ψ_2^n и ψ_3^n – сопряженные переменные на n – ом шаге.

Результаты численного решения

Ниже представлены результаты численного моделирования оптимизации защиты растений с учетом возрастной структуры популяций насекомых. На графиках отображена динамика численности вредных и полезных видов по возрастным группам при различных стратегиях управления. Также показаны оптимальные траектории применения защитных мероприятий, включая интенсивность и периодичность обработок. Результаты демонстрируют эффективность предложенного подхода и позволяют сравнить влияние разных методов контроля на состояние агроэкосистемы. Численные расчеты подтверждают сходимость используемого алгоритма и его применимость для решения подобных задач.

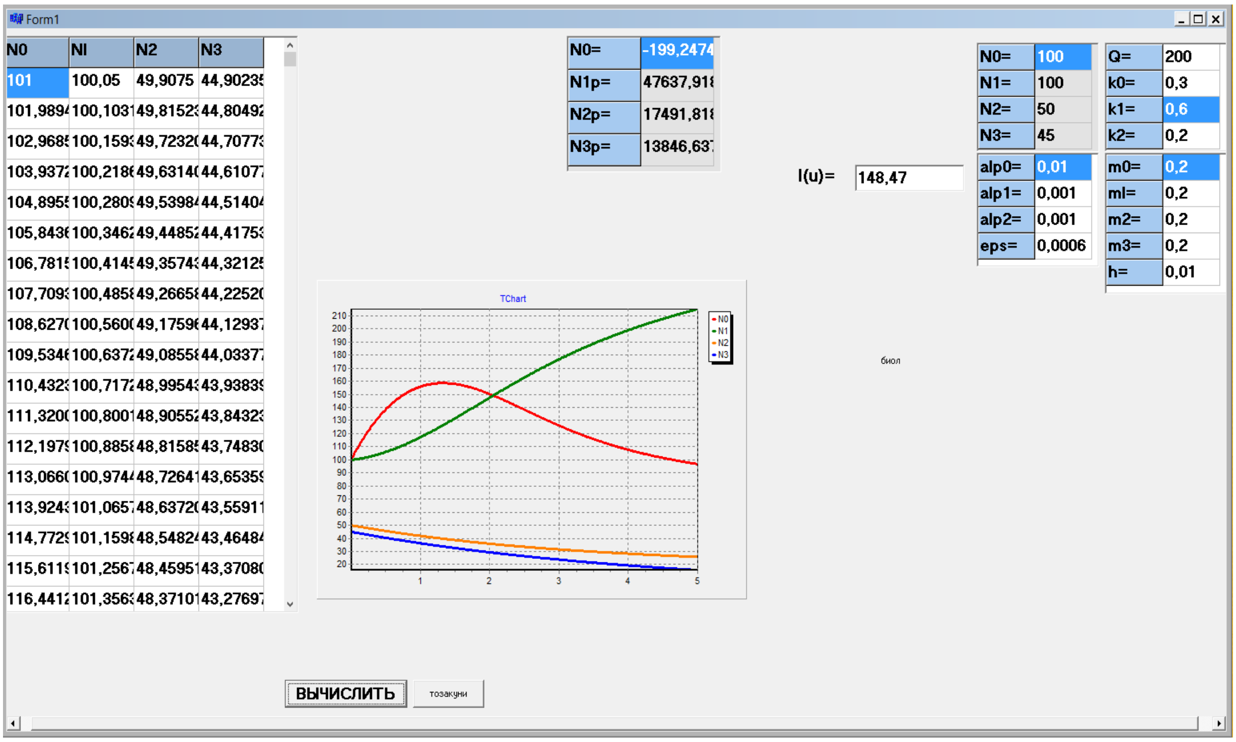


Рисунок 5. Скриншот результатов компьютерной программы «Оптимизации защиты растений с возрастной структурой популяции насекомых».

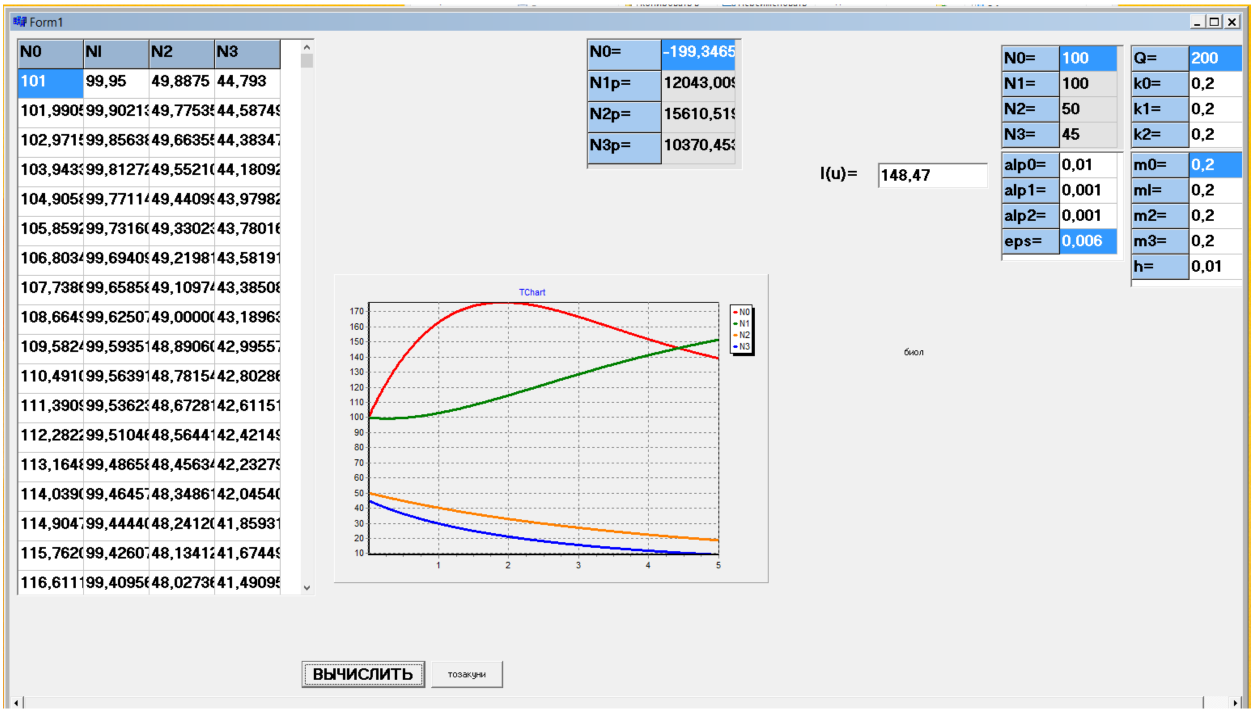
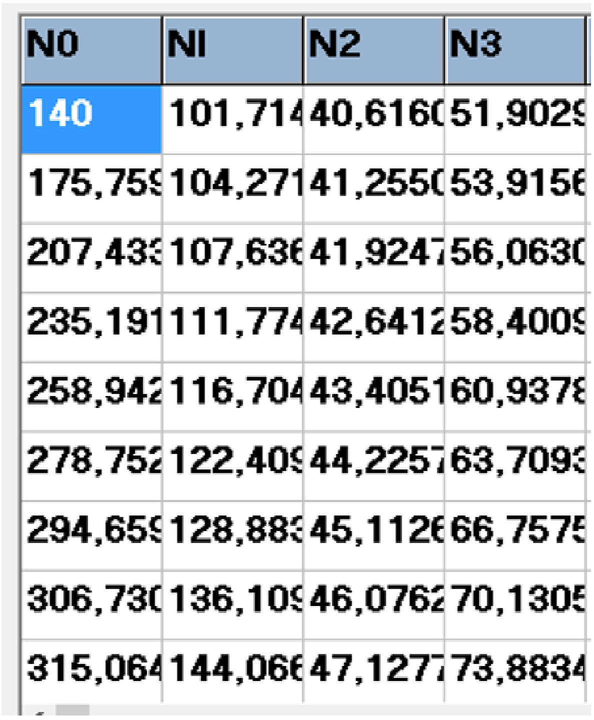


Рисунок 6. Скриншот результатов компьютерной программы «Оптимизации защиты растений с возрастной структурой популяции насекомых».



N0	NI	N2	N3
140	101,714	40,616(	51,9029
175,759	104,271	41,255(	53,9156
207,433	107,636	41,9247	56,0630
235,191	111,774	42,6412	58,4009
258,942	116,704	43,4051	60,9378
278,752	122,409	44,2257	63,7093
294,659	128,883	45,1126	66,7575
306,730	136,109	46,0762	70,1305
315,064	144,066	47,1277	73,8834

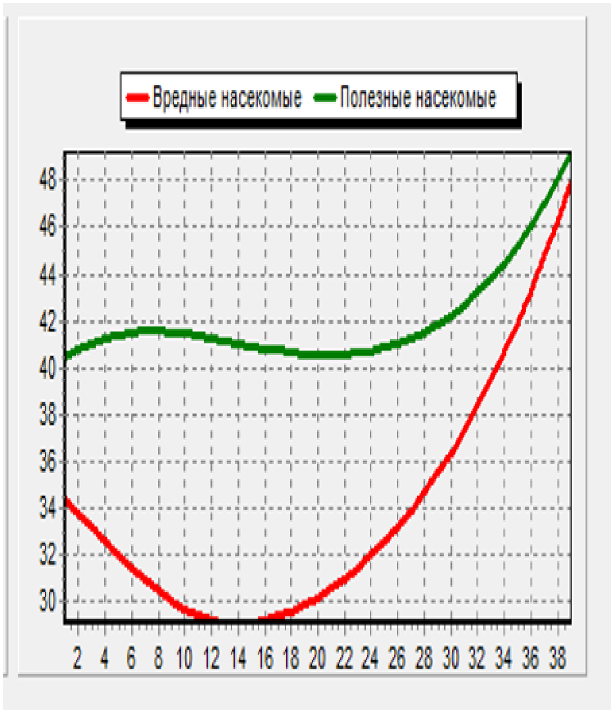


Рисунок 7. Скриншот результатов компьютерной программы «Оптимизации защиты растений с возрастной структурой популяции насекомых».

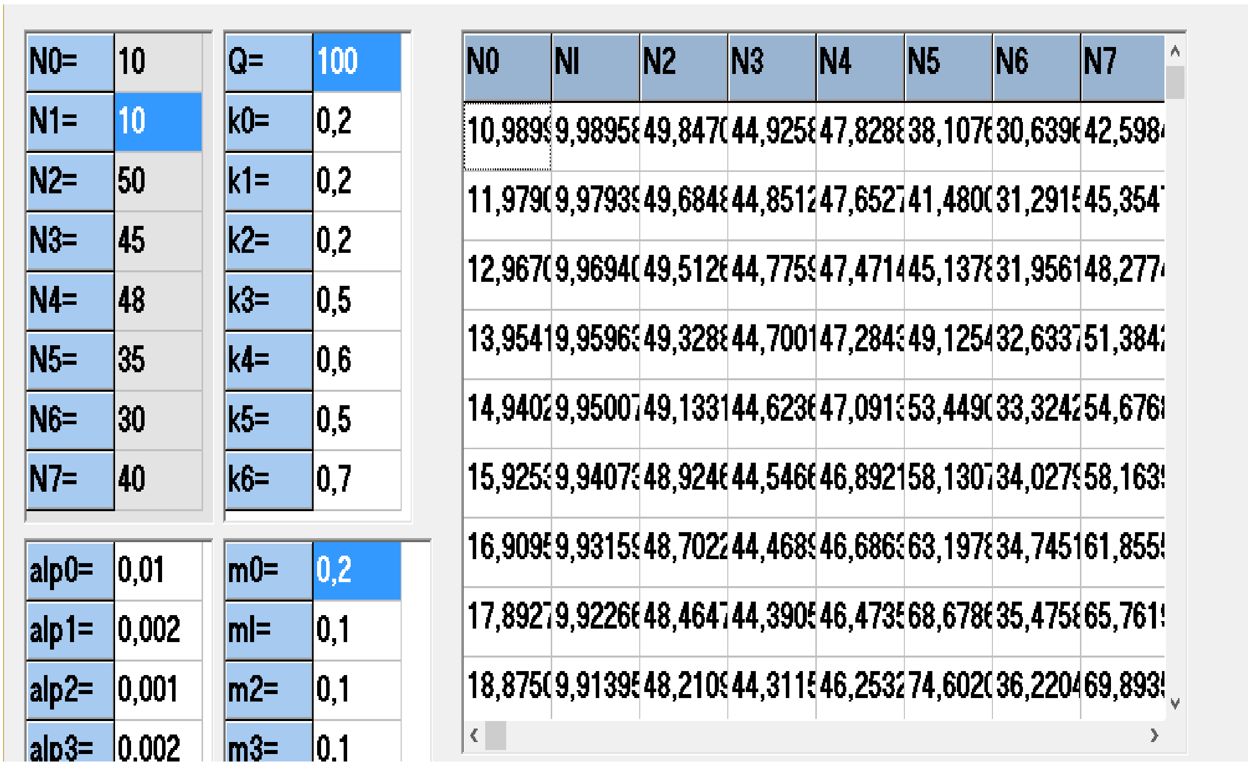


Рисунок 8. Скриншот результатов компьютерной программы «Оптимизации защиты растений с возрастной структурой популяции насекомых».

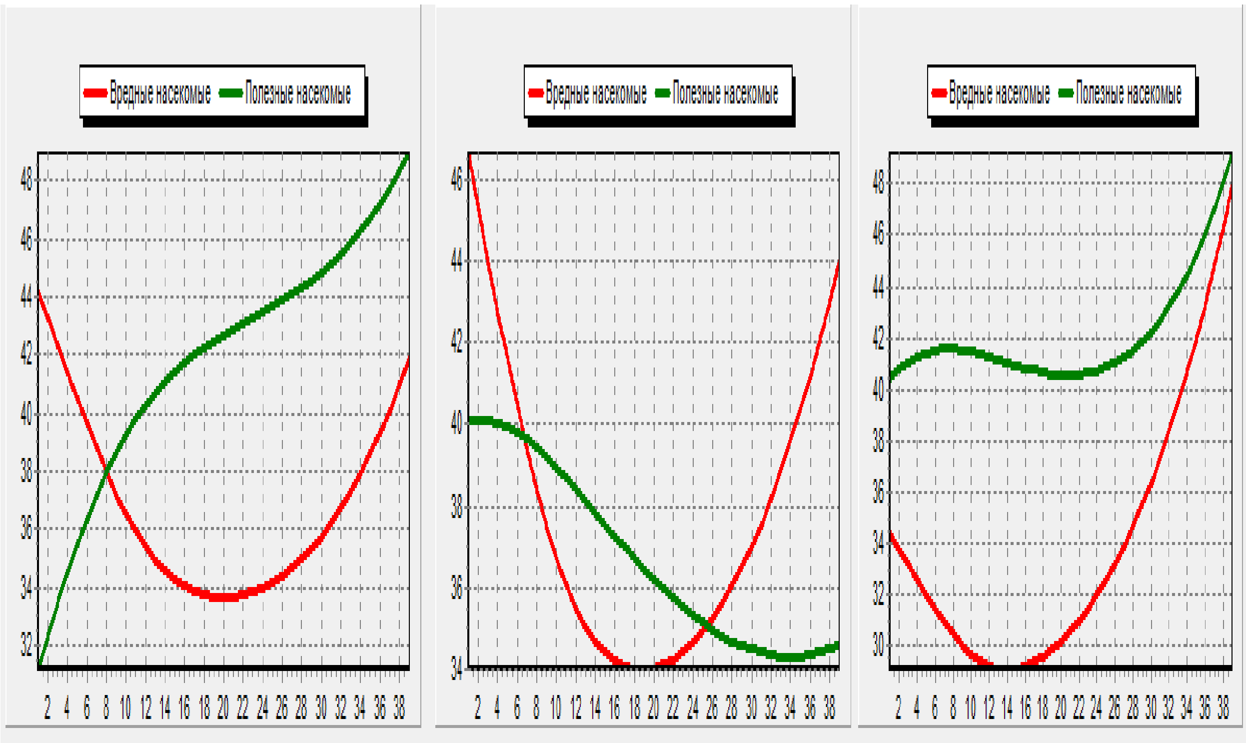


Рисунок 9. Скриншот результатов компьютерной программы «Оптимизации защиты растений с возрастной структурой популяции насекомых».

3.3. Результаты комплекса компьютерных программ

Для реализации разработанных математических моделей и методов оптимизации был разработан комплекс компьютерных программ. Данный комплекс позволяет проводить вычислительные эксперименты, визуализировать динамику агроценоза и определять оптимальные стратегии управления в различных сценариях при защите растений.

Результаты компьютерного моделирования защиты растений в стационарном и нестационарном случае с произвольными трофическими функциями

В данном разделе приведены результаты компьютерной программы «Определение критических значений насекомых». Компьютерная программа разработана на языке «C++», широко используемого в научных, инженерных, математических и компьютерных областях. Компьютерная модель экосистемы в хлопковом агроценозе представляет собой комплекс программ. Компьютерная программа предназначена для вычисления пороговых значений вредителей и энтомофагов агроценоза при заданном урожае хлопчатника, который необходимо получить в агроценозе. Результаты программы можно получить в виде таблицы, и в виде графика. Вычисления проводились в нескольких вариантах, на основе предварительных данных. Каждый вариант выполняется при различных начальных значениях численности насекомых и разных интервалах времени. Из анализа численных результатов следует, что они удовлетворительно аппроксимируют натуральные данные.

Скриншоты результатов полученных компьютерной программой «Определение критических значений насекомых» приведены на рисунках 10-12.

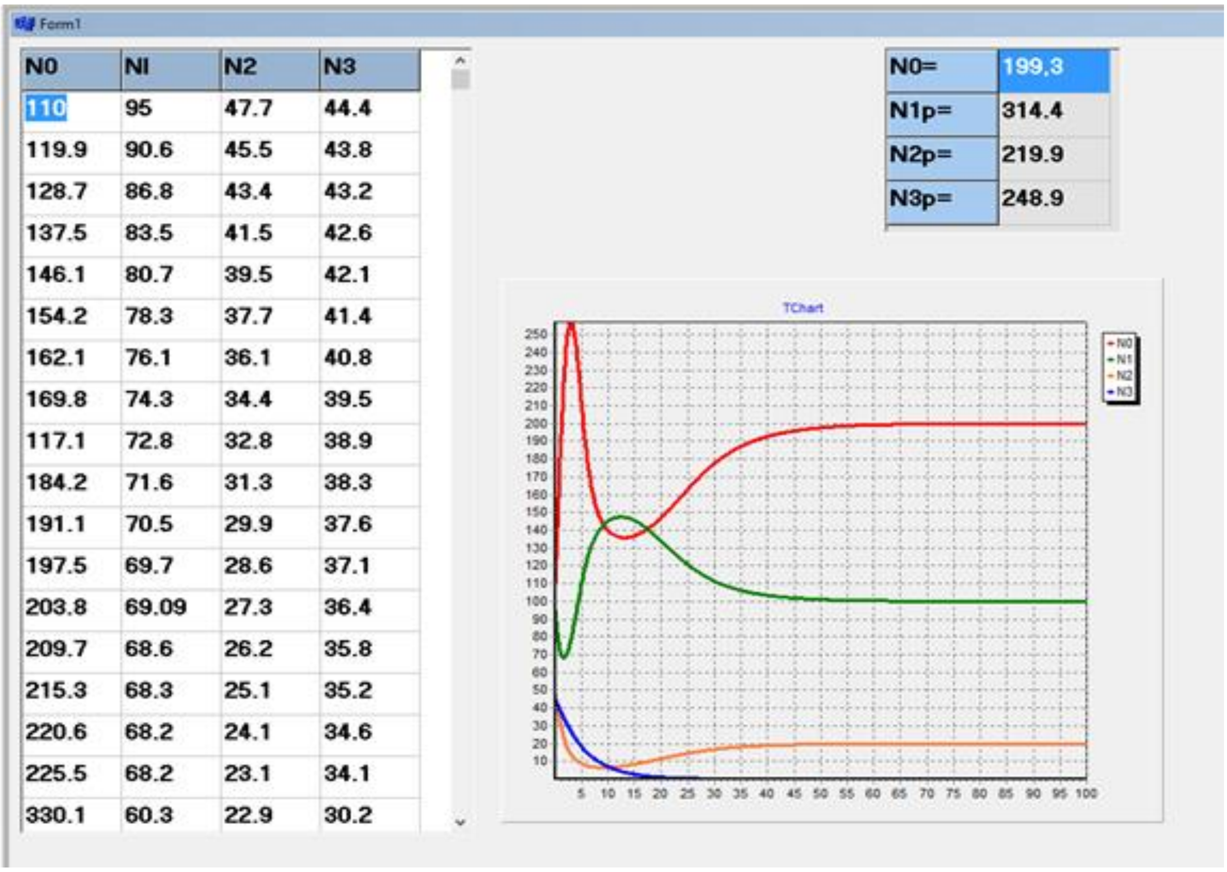


Рисунок 10. Скриншот результатов компьютерной программой «Определение критических значений насекомых».

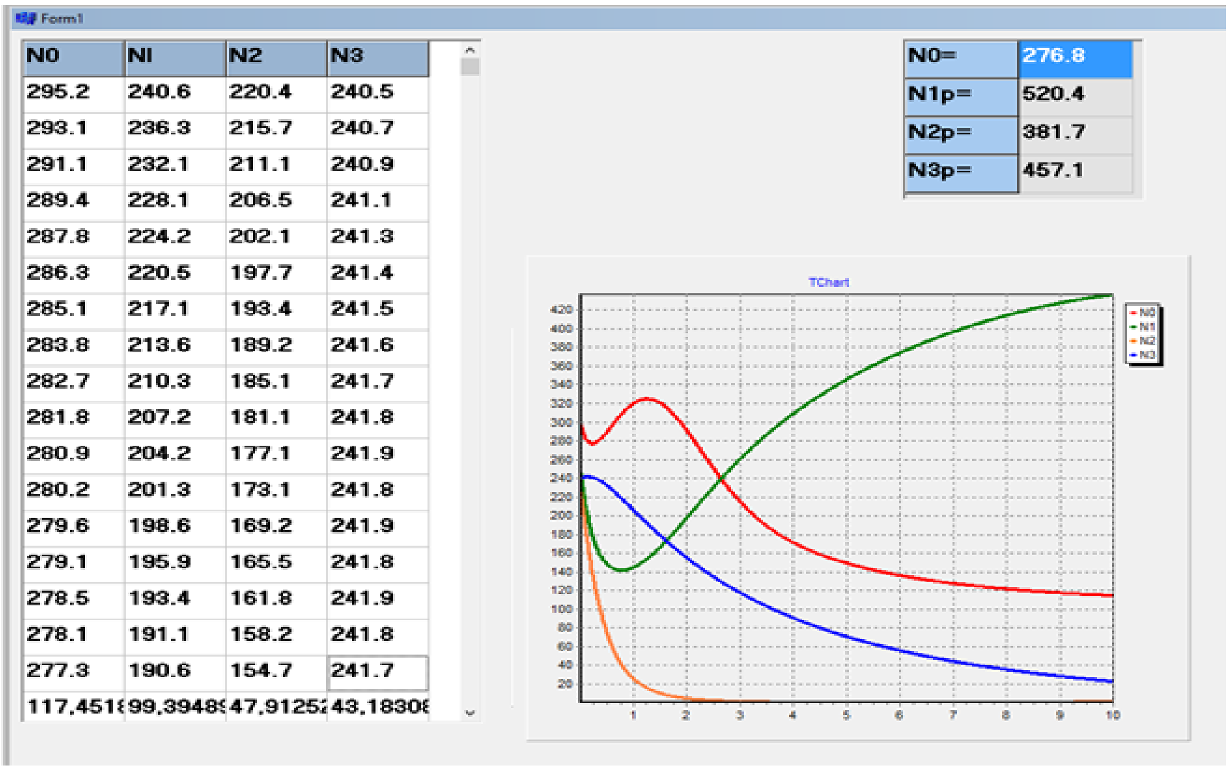
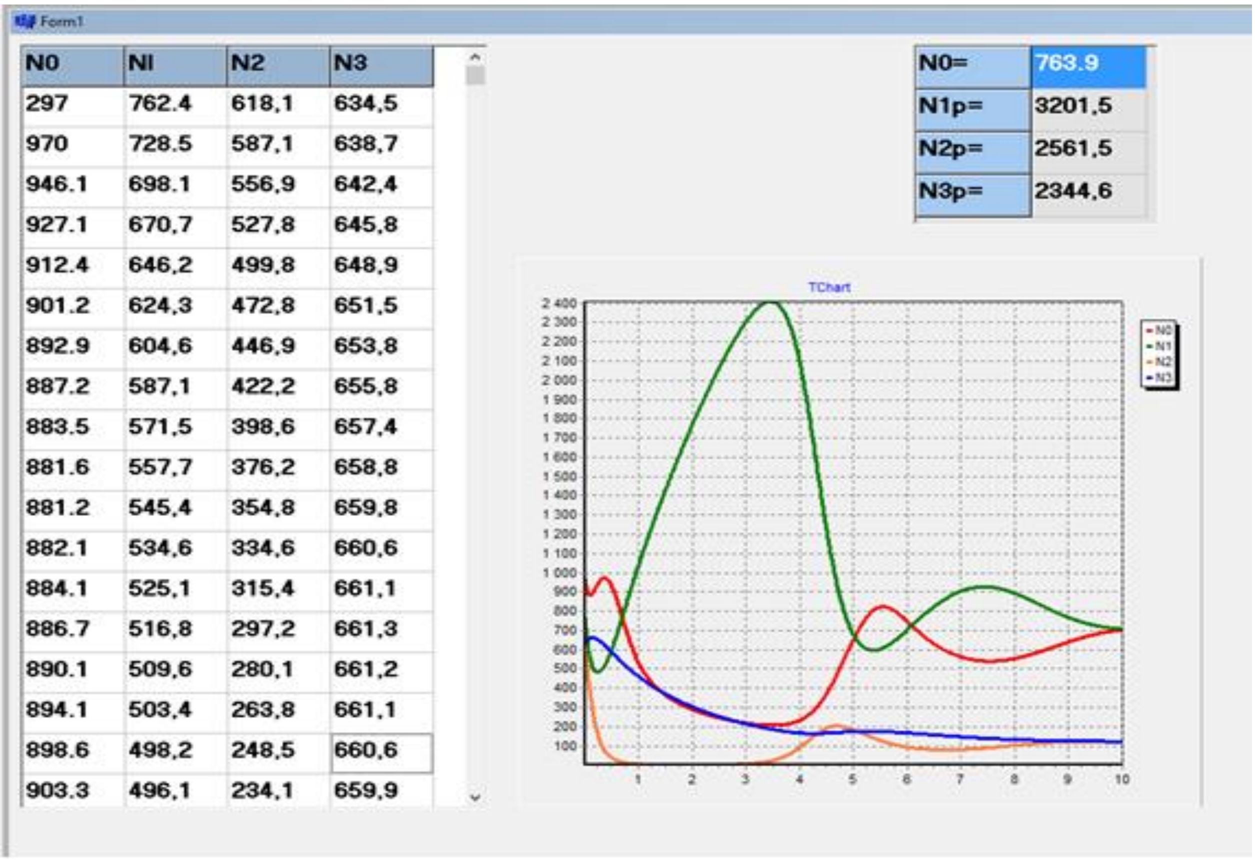


Рисунок 11. Скриншот результатов компьютерной программой «Определение критических значений насекомых».



N0	NI	N2	N3
297	762.4	618,1	634,5
970	728.5	587,1	638,7
946.1	698.1	556,9	642,4
927.1	670,7	527,8	645,8
912.4	646,2	499,8	648,9
901.2	624,3	472,8	651,5
892.9	604,6	446,9	653,8
887.2	587,1	422,2	655,8
883.5	571,5	398,6	657,4
881.6	557,7	376,2	658,8
881.2	545,4	354,8	659,8
882.1	534,6	334,6	660,6
884.1	525,1	315,4	661,1
886.7	516,8	297,2	661,3
890.1	509,6	280,1	661,2
894.1	503,4	263,8	661,1
898.6	498,2	248,5	660,6
903.3	496,1	234,1	659,9

N0=	763.9
N1p=	3201,5
N2p=	2561,5
N3p=	2344,6

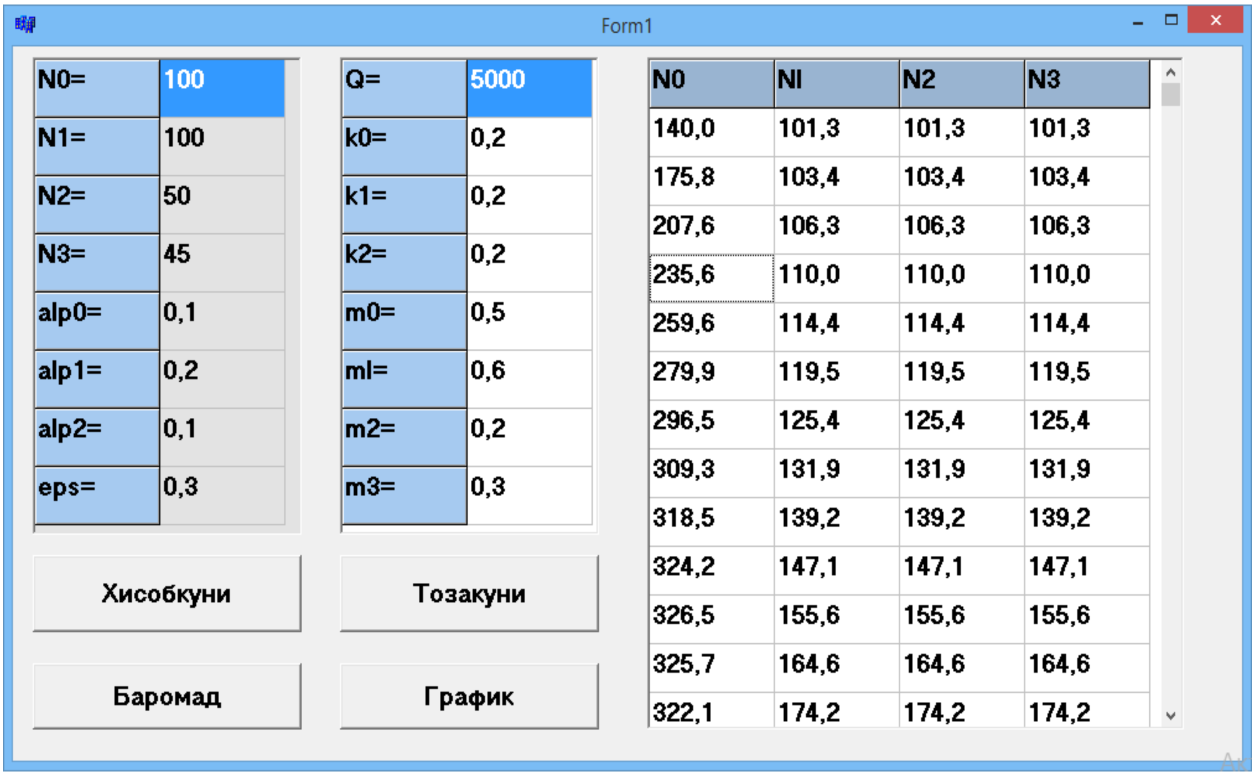
Рисунок 12. Скриншот результатов компьютерной программой «Определение критических значений насекомых».

Полученные компьютерные результаты качественно соответствуют результатам натурных экспериментов ученых отдела защиты растений Института растениеводства ТАСХН.

Результаты компьютерного моделирования процесса защиты растений в биологической системе «растении-вредные насекомые-полезные насекомые» с учетом временно-возрастной структуры и пространственного распределения с произвольными трофическими функциями

Получены численные решения задачи защиты растений в биологической системе «растении-вредные насекомые-полезные насекомые» с учётом временно-возрастной структуры и пространственного распределения с произвольными трофическими функциями. Для получения компьютерных результатов, на языке программирования С++ была разработана программа, результаты которой можно получить в табличной и графической форме.

Сценария 1.

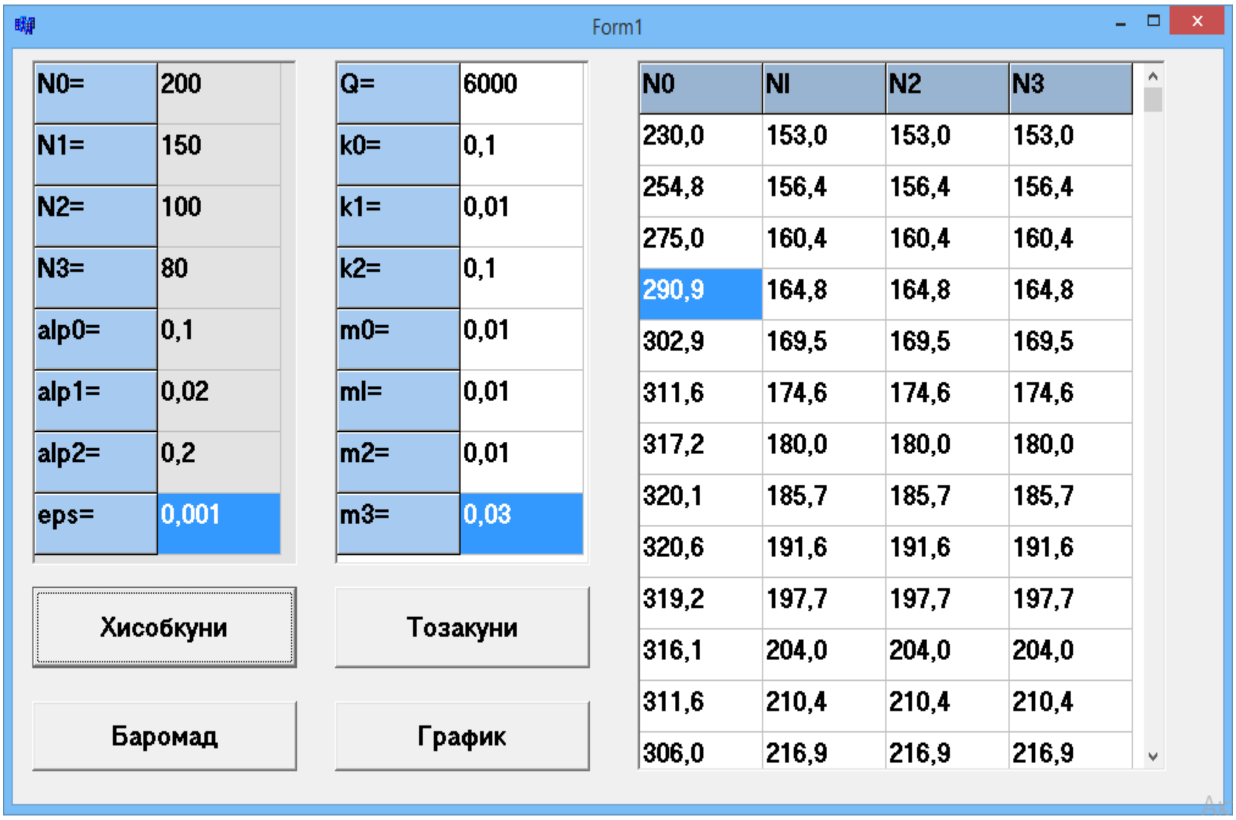


N0	NI	N2	N3
140,0	101,3	101,3	101,3
175,8	103,4	103,4	103,4
207,6	106,3	106,3	106,3
235,6	110,0	110,0	110,0
259,6	114,4	114,4	114,4
279,9	119,5	119,5	119,5
296,5	125,4	125,4	125,4
309,3	131,9	131,9	131,9
318,5	139,2	139,2	139,2
324,2	147,1	147,1	147,1
326,5	155,6	155,6	155,6
325,7	164,6	164,6	164,6
322,1	174,2	174,2	174,2

Рисунок 13. Результаты расчета в табличной форме.

Рисунок 14. Результаты расчета в графическом виде.

Сценария 2



N0=	200
N1=	150
N2=	100
N3=	80
alp0=	0,1
alp1=	0,02
alp2=	0,2
eps=	0,001

Q=	6000
k0=	0,1
k1=	0,01
k2=	0,1
m0=	0,01
ml=	0,01
m2=	0,01
m3=	0,03

N0	NI	N2	N3
230,0	153,0	153,0	153,0
254,8	156,4	156,4	156,4
275,0	160,4	160,4	160,4
290,9	164,8	164,8	164,8
302,9	169,5	169,5	169,5
311,6	174,6	174,6	174,6
317,2	180,0	180,0	180,0
320,1	185,7	185,7	185,7
320,6	191,6	191,6	191,6
319,2	197,7	197,7	197,7
316,1	204,0	204,0	204,0
311,6	210,4	210,4	210,4
306,0	216,9	216,9	216,9

Рисунок 15. Результаты расчета в табличной форме.

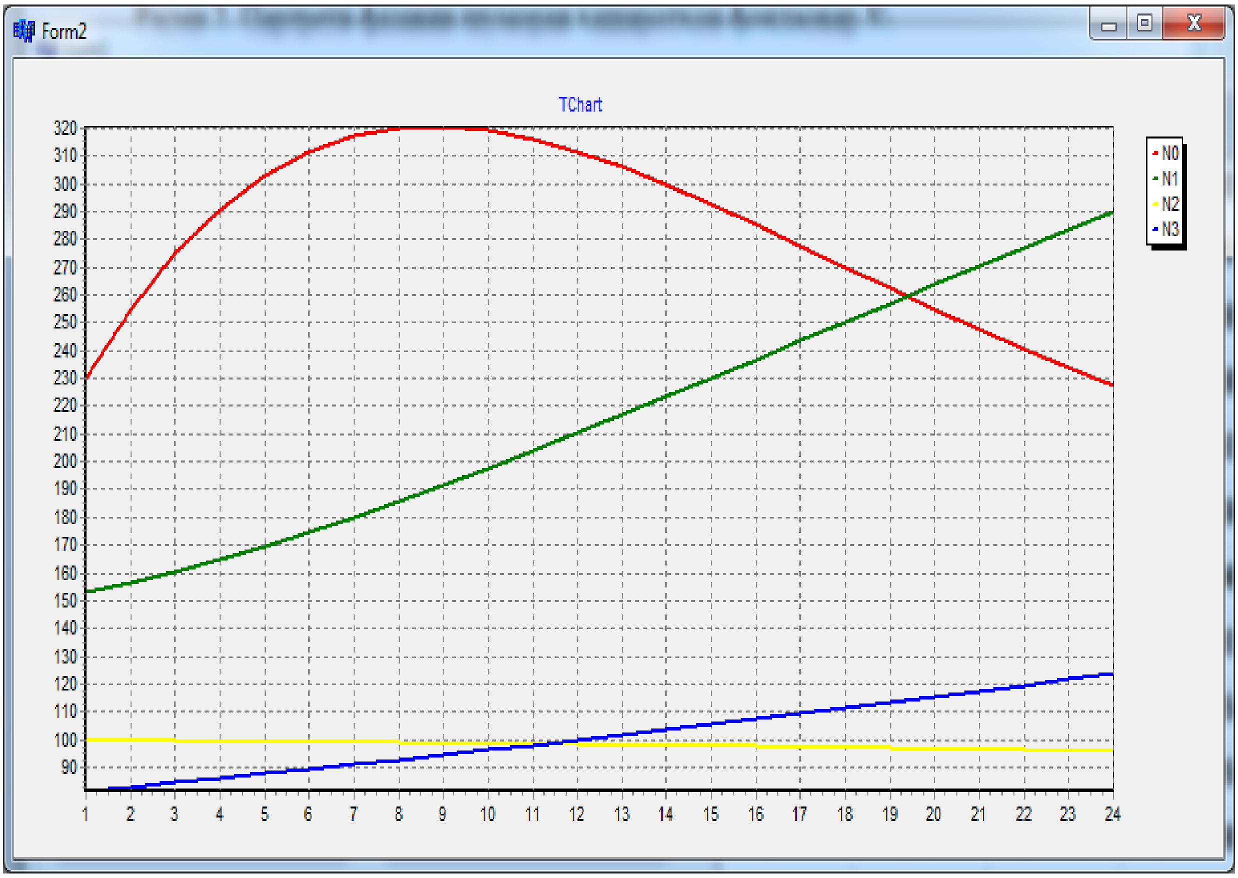


Рисунок 16. Результаты расчета в графическом виде.

Сценария 3

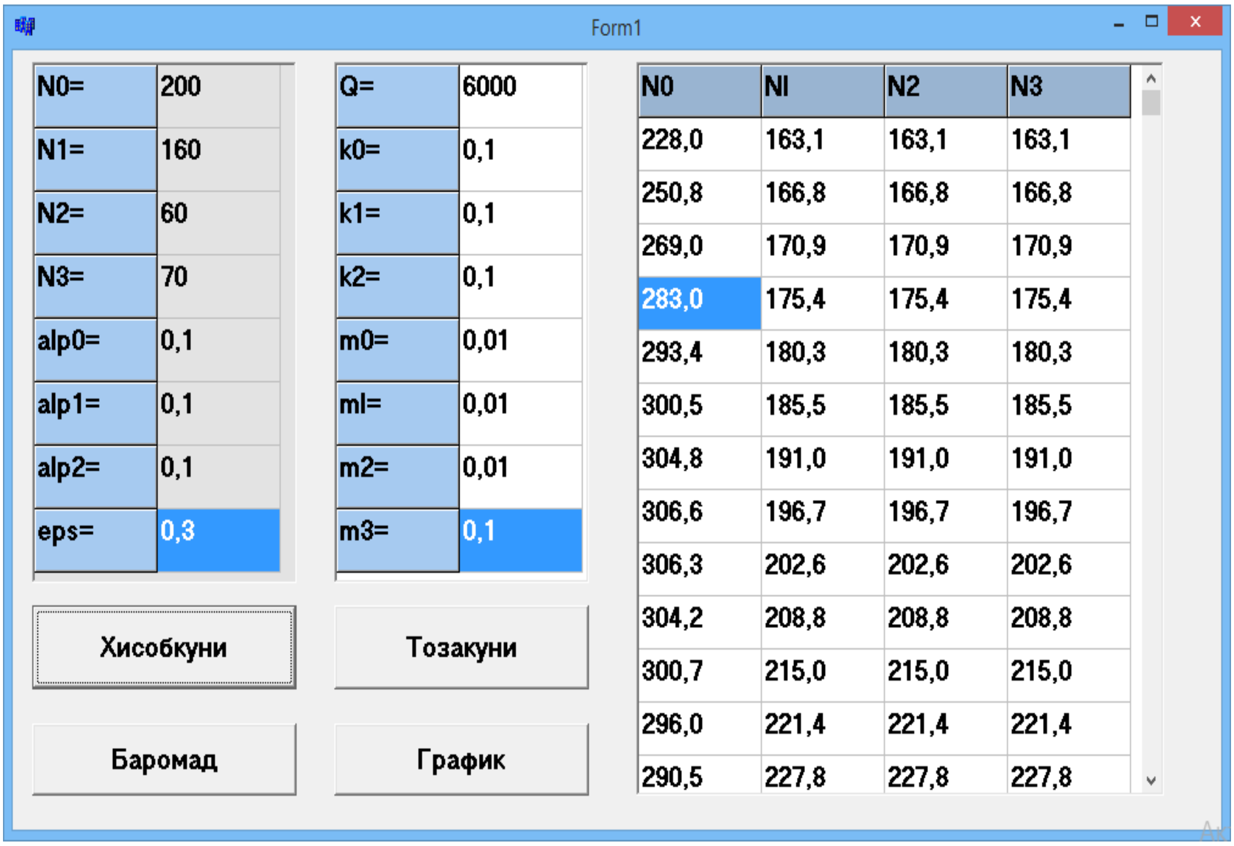


Рисунок 17. Результаты расчета в табличной форме.

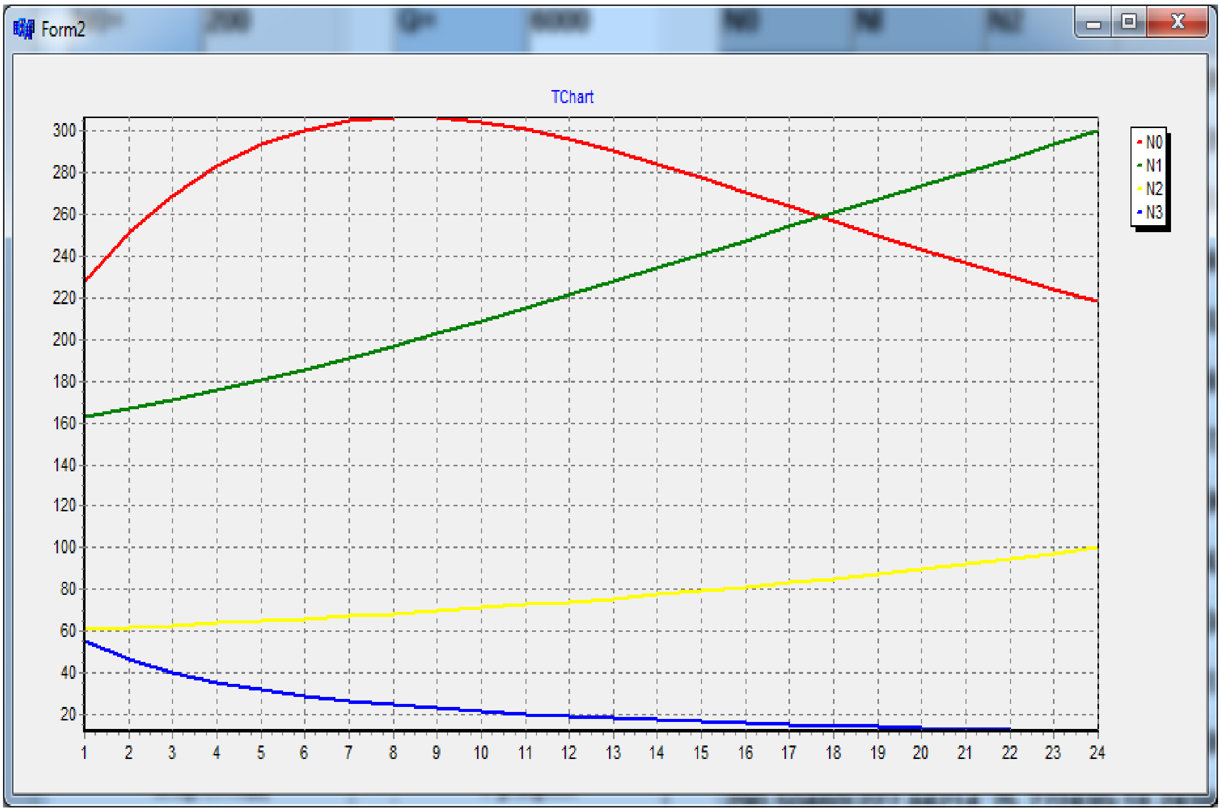


Рисунок 18. Результаты расчета в графическом виде.

Анализ результатов показывает, что если при заданных значениях параметров и функций биологической системы условия (1-А, 3-А, 7-А, 8-А) и (3.2.5) не выполняются и задача защиты растений не решается, то для поиска допустимого решения используется оптимальное управление. Это предполагает применение комплексных методов борьбы, включающих агротехнические, химические и биологические мероприятия.

Выводы по третьей главе

В третьей главе диссертационной работы представлены результаты разработки численных методов решения задач оптимального управления для биологических систем защиты растений и созданного на их основе комплекса компьютерных программ. Проведенное исследование позволяет сформулировать следующие основные выводы.

В первом параграфе разработан алгоритм решения задачи оптимального управления для системы трех трофических уровней. Предложенный алгоритм основан на сочетании методов последовательного квадратичного программирования и конечно-разностной аппроксимации сопряженной системы.

Во втором параграфе разработаны численные методы исследования оптимизации защиты растений с учетом возрастной структуры популяции насекомых. В работе был предложен метод, позволяющий свести исходную задачу с распределёнными параметрами к системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

Учёт возрастной структуры популяции заметно изменил характер оптимальных стратегий защиты. В частности, оптимальные моменты проведения обработок стали чётко привязываться к периодам, когда вредители переходят в наиболее уязвимые фазы своего развития.

В третьем параграфе представлены результаты компьютерных экспериментов, выполненных с помощью разработанного комплекса программ. Была проведена серия вычислительных экспериментов для разных сценариев развития популяций и различных наборов управляющих параметров. Полученные результаты показали, что предложенные численные методы обеспечивают устойчивую сходимость при самых разных начальных приближениях.

Сравнение решений, полученных на моделях различной сложности, показало, что использование возрастно-структурированных моделей позволяет снизить расчетные затраты на защиту растений за счет более точного выбора моментов обработок.

Разработанный комплекс компьютерных программ реализован на языке программирования высокого уровня и включает модули ввода данных, численного интегрирования, решения задачи оптимального управления, визуализации результатов. Программная реализация выполнена с использованием объектно-ориентированного подхода, что обеспечивает гибкость при модификации модели и возможность добавления новых функциональных возможностей. Проведено тестирование программного комплекса на наборе модельных задач, подтвердившее корректность реализации численных методов.

Практическая значимость разработанных методов и программного комплекса заключается в возможности их использования для обоснования стратегий защиты растений в конкретных агроклиматических условиях.

ГЛАВА 4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИССЛЕДОВАНИЯ

Четвертая глава диссертационной работы является заключительной и посвящена обсуждению полученных результатов, а также рассмотрению вопросов их практического применения. Глава состоит из двух параграфов, в которых проводится анализ и интерпретация разработанных теоретических положений, оценивается их соответствие результатам других исследователей, рассматриваются ограничения предложенных моделей и перспективы их использования в сельскохозяйственной практике.

4.1. Анализ и интерпретация полученных результатов

Проведенное в диссертационной работе исследование позволило разработать комплекс математических моделей и методов оптимизации процессов защиты растений, учитывающих временно-возрастную структуру популяций насекомых и их пространственное распределение. Анализ полученных результатов показывает, что учёт данных факторов является необходимым условием построения эффективных стратегий управления агроценозами.

Сопоставление разработанных моделей с известными подходами, представленными в работах других авторов, позволяет сделать следующие заключения. «Классические модели защиты растений, базирующиеся на точечных уравнениях типа Лотки-Вольтерра и их модификациях, дают адекватное описание лишь в условиях, когда популяции насекомых распределены равномерно, а их возрастная структура не оказывает существенного влияния на динамику численности. Как показано в первой главе, такие условия в реальных агроценозах наблюдаются достаточно редко. Исследования, выполненные во второй и третьей главах, подтверждают: если не учитывать возрастную структуру популяции и пространственную неоднородность агроценоза, то прогноз динамики вредителей получается довольно грубым» [4-10].

Модели с произвольными трофическими функциями, разработанные во второй главе, заметно расширяют возможности теоретического анализа. В отличие от многих предыдущих работ, где использовались только линейные или строго заданные нелинейные зависимости, предложенный подход позволяет брать практически любые трофические функции — главное, чтобы они были гладкими и монотонными. Благодаря этому модель можно легче подстраивать под конкретные виды вредителей и энтомофагов, для которых уже известны экспериментальные данные о характере их взаимодействия. Полученные условия существования и устойчивости стационарных состояний носят достаточно общий характер, и их можно конкретизировать, просто подставив нужный вид функций.

Одним из ключевых теоретических результатов стало доказательство существования и единственности решения для моделей, которые одновременно учитывают и временно-возрастную структуру, и пространственное распределение популяции. Этот результат важен тем, что обосновывает корректность постановки соответствующих краевых задач и даёт надёжную основу для построения численных методов. Нужно отметить, что такие интегро-дифференциальные уравнения с частными производными крайне редко удаётся исследовать аналитически, поэтому даже качественные результаты здесь имеют самостоятельную теоретическую ценность.

Численные методы, разработанные в третьей главе, ориентированы прежде всего на решение практических задач защиты растений. Предложенные алгоритмы позволяют находить оптимальные управляющие воздействия с учётом реальных ограничений: лимита на общее количество обработок, ограничений по интенсивности применения препаратов, необходимости сохранять полезных насекомых и других. Сравнительный анализ показал, что выбор конкретного метода зависит от размерности задачи и требуемой точности. Для небольших задач удобнее всего напрямую применять принцип максимума Понтрягина. При средней размерности хорошо работают методы последовательного квадратичного программирования, а для больших задач целесообразнее переходить к методам динамического программирования.

Выяснилось, что сильнее всего результат зависит от параметров, которые определяют скорость размножения вредителей и эффективность энтомофагов. Это важно с практической точки зрения: именно эти параметры нужно определять особенно тщательно при настройке модели под конкретные условия. В то же время многие другие коэффициенты можно задавать приближённо — качество оптимальных решений от этого сильно не пострадает, что заметно упрощает применение моделей на практике.

Сопоставление результатов, полученных на моделях разной сложности, помогло понять, где можно пользоваться упрощёнными подходами, а где — уже нельзя. Если возрастная дифференциация выражена слабо и поле относительно однородно, то обычные точечные модели дают приемлемую точность. Но при наличии ярко выраженной возрастной структуры или заметной пространственной неоднородности упрощённые модели начинают Не учёт пространственного распределения занижает оценку необходимых объёмов обработок, поскольку не учитывает возможность локального превышения порогов вредоносности.

4.2. Практические аспекты применения разработанных моделей и методов

Разработанные в диссертационной работе модели и методы ориентированы на решение прикладных задач защиты растений и могут найти применение в деятельности агрономических служб, фермерских хозяйств, научно-исследовательских учреждений аграрного профиля. Рассмотрим основные направления и условия практического использования полученных результатов.

Применение разработанных моделей для планирования защитных мероприятий предполагает наличие системы сбора и обработки исходной информации. Минимально необходимый объём данных включает сведения о видовом составе вредителей и энтомофагов, их численности и возрастной структуре на начало вегетационного периода, а также параметры, характеризующие скорость развития, плодовитость, смертность, трофические связи. Часть этих параметров может быть получена из литературных источников, часть требует проведения полевых наблюдений. Разработанный комплекс программ предусматривает возможность калибровки модели по данным текущих наблюдений, что позволяет повышать точность прогнозов по мере накопления информации.

Особенностью предложенного подхода является возможность учета пространственной неоднородности полей при планировании обработок. На практике защиту растений до сих пор часто проводят сплошными обработками по всему полю. Из-за этого расход препаратов получается неоправданно высоким, а нагрузка на агроценоз — избыточной. Разработанные модели позволяют перейти к более точечным, дифференцированным обработкам: средства защиты применяются только там, где численность вредителя действительно превышает экономический порог вредоносности.

Один из важных достатков моделей — возможность лучше сбалансировать химические и биологические методы защиты. Они помогают определить, в каких случаях энтомофаги сами способны удержать численность вредителей ниже опасного уровня, а когда уже нужно подключать химию. Результаты показывают, что в большинстве ситуаций оптимальная стратегия — комбинированная. На ранних этапах развития популяции лучше отдавать предпочтение биологической регуляции, а химические обработки использовать только тогда, когда численность вредителя начинает резко расти.

Учёт возрастной структуры популяции даёт возможность точнее выбирать сроки проведения обработок. В отличие от привычных подходов, где ориентируются на календарные даты или просто на видимые фазы развития культуры, модели позволяют рассчитывать оптимальное время воздействия с учётом текущего возрастного состава вредителей, погоды и прогноза дальнейшего развития. Это особенно важно для химических обработок, ведь их эффективность сильно зависит от того, на какие возрастные группы приходится основной удар.

Разработанный комплекс компьютерных программ можно использовать как самостоятельно, так и встраивать в более крупные системы поддержки принятия решений в растениеводстве.

Конечно, при внедрении этих методов в реальную практику нужно понимать их ограничения. Предложенные модели работают наиболее точно в агроценозах, где доминирует небольшое число видов вредителей и энтомофагов. Если же видовое разнообразие высокое и взаимодействия между ними очень сложные, то может потребоваться упростить описание или перейти к агрегированным показателям. Ещё одно важное ограничение — качество исходных данных. Если информации о параметрах популяционной динамики мало, результаты моделирования стоит рассматривать как ориентировочные и обязательно корректировать их по фактическим наблюдениям.

Дальнейшее развитие моделей и методов может идти по нескольким направлениям. Полезно включать в них дополнительные факторы: погодно-климатические условия, свойства почвы, особенности сортов культурных растений. Имеет смысл создавать специализированные версии моделей для основных сельскохозяйственных культур и самых опасных вредителей применительно к разным регионам. Актуально разработать упрощённые версии программного комплекса, которые будут удобны для хозяйств с ограниченными возможностями по сбору и обработке данных.

Экономическая эффективность применения разработанных методов определяется снижением затрат на защитные мероприятия за счет оптимизации объёмов, сроков и способов обработок, а также сокращением потерь урожая от повреждения вредителями.

Результаты, полученные в диссертационной работе, имеют не только теоретическое значение, но и обладают потенциалом практического использования для повышения эффективности защиты растений в сельскохозяйственном производстве. Разработанные модели и методы создают научную основу для перехода к адаптивным, экологически ориентированным системам защиты растений, учитывающим специфику конкретных агроценозов и динамику происходящих в них процессов.

РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПРАКТИЧЕСКОМУ ИСПОЛЬЗОВАНИЮ РЕЗУЛЬТАТОВ

Разработанный программный комплекс на языках C++ рекомендуется к внедрению в практическую деятельность районных и областных служб защиты растений для оперативного прогнозирования численности основных вредителей хлопчатника с учётом их возрастной структуры и пространственной неоднородности распределения по полям. Сельскохозяйственным предприятиям, специализирующимся на выращивании хлопчатника, целесообразно применять предложенные математические модели для расчёта экономически безопасного уровня численности вредителя, что позволяет принимать обоснованные решения о необходимости проведения защитных мероприятий без превышения пороговых значений. При планировании интегрированной системы защиты хлопчатника рекомендуется использовать полученные аналитические выражения для оптимальной дозы пестицида и оптимальной интенсивности интродукции энтомофагов, что обеспечивает минимизацию химической нагрузки на агроценоз при сохранении урожайности на уровне не ниже заданных целевых показателей.

Разработанные математические модели обладают свойством адаптируемости к другим сельскохозяйственным культурам посредством замены трофических функций и биологических параметров, что существенно расширяет область применения полученных результатов за пределы хлопководства. Службам экологического мониторинга предлагается использовать программный комплекс для оценки долгосрочных последствий применения химических средств защиты растений, поскольку разработанная модель учитывает не только прямое уничтожение целевых видов вредителей, но и побочное негативное воздействие на популяции полезных насекомых-энтомофагов. В учебном процессе высших учебных заведений, в частности на механико-математическом факультете Таджикского национального университета, полученные результаты целесообразно включить в содержание специальных курсов по математическому моделированию биологических систем, численным методам в экологии и теории интегро-дифференциальных уравнений.

Для того чтобы точнее определять оптимальные сроки и количество обработок на сельскохозяйственных полях, имеет смысл активно применять численные методы, которые я адаптировал специально под задачи этой работы. Если сравнивать их между собой, то метод Адамса второго порядка заметно выигрывает по точности, особенно когда расчёты нужно вести на длинных временных интервалах — фактически на протяжении всего вегетационного периода хлопчатника. Метод Эйлера проще и быстрее, но на больших промежутках времени погрешность в нём накапливается довольно быстро, в то время как Адамс позволяет сохранять приемлемую точность без сильного уменьшения шага интегрирования.

Особое внимание стоит обратить на то, как в этой системе учитывается возрастная структура популяций вредных насекомых. В большинстве существующих на сегодняшний день цифровых моделей этот аспект проработан очень слабо или вообще отсутствует. Именно возрастной состав во многом определяет, когда и как нужно воздействовать на вредителя, чтобы получить максимальный эффект при минимальных затратах и минимальном ущербе для окружающей среды.

Сельскохозяйственных предприятия, которые уже активно применяют или только планируют внедрять биологический метод защиты растений, будет полезно обращаться к расчётам оптимальной интенсивности выпуска энтомофагов, полученным в рамках диссертационной работы. Эти расчёты, основанные на соответствующих теоремах, помогают точно определить, сколько полезных насекомых действительно нужно выпустить в конкретных условиях. Благодаря этому можно избежать излишнего, экономически неоправданного выпуска энтомофагов, который часто встречается на практике. При этом уровень биологической защиты остаётся достаточным, а лишние затраты на приобретение и выпуск полезных насекомых удаётся существенно сократить.

В целом, практическое применение разработанных моделей и методов позволяет перейти от шаблонных, сплошных обработок к более точечным и обоснованным решениям. Это особенно актуально для хлопчатника — культуры, где вегетационный период длинный, а динамика вредителей сильно зависит от погодных условий и фаз развития растений.

Выводы

Основные научные результаты диссертационной работы

- Построены системы интегро-дифференциальных уравнений позволяющие описывать популяционную динамику насекомых с учетом возрастного состава, пространственного фактора и трофических связей [6-А; 10-А];
- Выполнено теоретическое обоснование разработанных моделей включающее доказательство существования решения и проверку применимости принципа максимума Понтрягина для решаемых задач оптимального управления [3-А; 13-А];
- Предложены интегрированные способы оптимизации защиты растений и адаптационные модели для условий Таджикистана, включая учёт региональные особенностей агроценозов и специфики хлопководства [4-А; 5-А];
- Созданы и проанализированы численные методы решения системы уравнений, включая адаптацию методов Эйлера и Адамса с контролем устойчивости и оценкой погрешностей [7-А; 8-А];
- Разработан программный комплекс на C++ для численного моделирования, представления пространственно-временной динамики и верификации результатов [10-А; 13-А];

Рекомендации по практическому использованию результатов

В теоретическом плане значимость диссертационного исследования определяется развитием математического инструментария для описания биологических систем с включением возрастного состава и пространственной локализации популяций насекомых, так же обобщение методов теории оптимального управления на класс интегро-дифференциальных уравнений, содержащих трофические функции взаимодействия произвольного вида.

Научно-практическая значимость состоит в создании адаптированного для условий Таджикистана программного комплекса, позволяющего оптимизировать стратегии защиты хлопчатника, разработке конкретных рекомендаций по комбинированному применению химических и биологических методов с учетом региональных особенностей, что обеспечит снижение экономических затрат и экологической нагрузки при сохранении урожайности. Полученные результаты могут быть использованы сельхозпроизводителями, службами защиты растений и экологического мониторинга.

Список литературы

[1] Ablowitz M.J., Zeppetella A. Explicit solutions of Fisher's equation for a special wave speed. Bull. Math. Biology, 1979, Vol. 41, pp. 835–840.

[2] Auger P., Poggiale J.-Ch. Emergence of population growth models: fast migration and slow growth. J. Theor. Biology, 1996, Vol. 182, pp. 99–108.

[3] Bazykin A.D., Khibnik A.I., Aponina E.A. A model of evolutionary appearance of dissipative structure in ecosystems. J. Math. Biology, 1983, No. 18, pp. 13–23.

[4] Chow P.L., Tam W.C. Periodic and travelling wave solution to Volterra-Lotka equation with diffusion. Bull. Math. Biol., 1976, Vol. 38, pp. 643–658.

[5] Demetrius L. Statistical mechanics and population biology. Journal of Statistical Physics, 1983, Vol. 30, No. 3, pp. 709–753.

[6] Dubey B., Das B., Hassain J. A predator-prey interaction model with self and cross-diffusion. Ecol. Model., 2002, Vol. 141, pp. 67–76.

[7] Hilborn K. Some long term dynamics of predator-prey models with diffusion. Ecol. Modelling, 1979, Vol. 6, pp. 23–33.

[8] Jambhulkar P.P., Murlibhar S. Information technology in plant protection. In: S. Banik (ed.), Current concepts in plant protection, Studium Press India Pvt. Ltd., New Dehli, 2013, p. 30.

[9] Kermack W.O., McKendrick A.G. Contributions to the mathematical theory of epidemics. Proc. Roy. Soc. A, 1927, Vol. 16, pp. 35–55.

[10] Liu B., Zhang Y., Chen I. The dynamical behaviors of Lotka–Volterra predator-prey model concerning integrated pest management. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2005, Vol. 6, No. 2, pp. 227–243. doi: 10.1016/j.nonrwa.2004.08.001.

[11] Lotka A.T. The stability of the normal age distributions. Proc. Nat. Acad. Sci., 1922, No. 6, pp. 339–345.

[12] Lotka A.T. Theoric analytique des associations biologiques. Principles, Paris, 1939, 218 p.

[13] Lotka A.T. Elements of mathematical biology (Elements of physical biology). Dover Publications, New York, 1956, 460 p.

[14] Malthus T.R. An essay on the principle of population. J. Johnson, London, 1798, 134 p.

[15] May R. Biological Populations with Nonoverlapping Generations: Stable Points, Stable Cycles and Chaos. Science, New Series, 1974, Vol. 186, pp. 645–647.

[16] May R.M. Simple mathematical model with very complicated dynamics. Nature, 1976, Vol. 261, No. 560, pp. 459–467.

[17] Mitchell A.R., Griffiths D.F. The Finite Difference Method in Partial Differential Equations. Wiley, Chichester, 1980, 284 p.

[18] Murima M., Nishiura, Yamaguti M. Some diffusive prey and predator systems and their bifurcation problems. In: Bifurcation theory and applications in scientific disciplines, The New York Academy of Science, NY, 1979, pp. 490–510.

[19] Murray J.D. Nonexistence of wave solutions for the class of reaction diffusion equations given by the Volterra interacting populations equations with diffusion. J. Theor. Biology, 1975, Vol. 52, pp. 459–469.

[20] Murray J.D. Mathematical biology. I. An introduction. Springer, 2002.

[21] Murray J.D. Mathematical biology. II. Spatial models and biomedical applications. Springer, 2003.

[22] Von Neumann J., Goldstine H.H. Numerical inverting of matrices of high order. Bulletin of the American Mathematical Society, 1947, Vol. 53, pp. 1021–1100. doi: 10.1090/S0002-9904-1947-08909-6.

[23] Nicholson A.J., Bailey V.A. The balance of animal populations. Proceedings of the Zoological Society of London, 1935, Vol. 1, pp. 551–598.

[24] Okubo A. Diffusion and ecological problems: Mathematical models. Biomathematics, Vol. 10. Springer Verlag, Berlin, 1980, 254 p.

[25] Okubo A., Levin S.A. Diffusion and Ecological Problems. 2nd ed., Springer, 2002.

[26] Pearl R. The growth of populations. The Quart. Rev. of Biol., 1927, Vol. 2, No. 4, pp. 532–548.

[27] Richtmyer R.D., Morton K.W. Difference Methods for Initial-Value Problems. Wiley, New York, 1967, 420 p.

[28] Robles-Fernandez A.L., Lira-Noriega A. Combining phylogenetic and occurrence information for risk assessment of pest and pathogen integrations with host plants. Front. Appl. Math. Stat., 2017, Vol. 3, pp. 1–9. doi: 10.3389/fams.2017.00017.

[29] Rosenzweig M.L., MacArthur R.H. Graphical representation and stability conditions of predator-prey interactions. Amer. Natur., 1963, Vol. 97, No. 893, pp. 209–223.

[30] Volpert A.I., Volpert V.A., Volpert V.A. Traveling wave solutions of parabolic systems. American Mathematical Society, 2000, 448 p.

[31] Von Foester H. Some Remark on Changing Population. The kinetics of Cellular Proliferations, N.Y., 1959, pp. 131–139.

[32] Wang W., Takeuchi Y. Adaptation of prey and predators between patches. J. Theor. Biology, 2009, Vol. 258, pp. 603–613.

[33] Yuldashev T.K., Odinaev R.N., Zarifzoda S.K. On exact solutions of a class of singular partial integro-differential equations. Lobachevskii Journal of Mathematics, 2021, Vol. 42, No. 3, pp. 676–684.

[34] Абакумов А.И. Управление и оптимизация в моделях эксплуатируемых популяций. Дальнаука, Владивосток, 1993, 129 с.

[35] Абакумов А.И. Оптимальный сбор урожая в моделях популяций. Обозрение прикладной и промышленной математики, 1994, Т. 1, вып. 6, С. 834–849.

[36] Абдуллаев В.М., Айда-заде К.Р. Численное решение задач оптимального управления нагруженными сосредоточенными системами. Журнал вычислительной математики и математической физики, 2006, Т. 46, № 9, С. 1566–1581.

[37] Александров А.Ю., Платонов А.В., Старков В.Н., Степенко Н.А. Математическое моделирование и исследование устойчивости биологических сообществ. Соло, СПб., 2006, 186 с.

[38] Александров А.Ю., Платонов А.В., Чэнь Я. О диссипативности некоторых классов моделей популяционной динамики. Вестник СПбГУ. Сер. 10, 2010, Вып. 2, С. 3–17.

[39] Аматов М.А., Аматова Г.М. Математическое моделирование популяционных волн. Вопросы современной науки и практики. Университет им. В.И. Вернадского, 2015, № 2(56), С. 170–177.

[40] Апонин Ю.М., Апонина Е.А. Математическая модель сообщества хищник-жертва с нижним порогом численности жертвы. Компьютерные исследования и моделирование, 2009, Т. 1, № 1, С. 51–56.

[41] Базыкин А.Д. Математическая биофизика взаимодействующих популяций. Наука, Москва, 1985, 181 с.

[42] Базыкин А.Д. Нелинейная динамика взаимодействующих популяций. Институт компьютерных технологий, Москва–Ижевск, 2003, 368 с.

[43] Балыкина Ю.Е., Колпак Е.П. Математические модели функционирования фолликула щитовидной железы. Вестник СПбГУ. Сер. 10, 2013, № 3, С. 20–31.

[44] Батурин В.А., Скитневский Д.М., Черкашин А.К. Планирование и прогнозирование природно-экономических систем. Наука, Новосибирск, 1984, 169 с.

[45] Белотелое Я.В., Саранча Д.А. Линейный анализ устойчивости двухуровневых систем с диффузией. В кн.: Проблемы

экологического мониторинга и моделирования экосистем, Том VII, Гидрометеоиздат, Л., 1985, С. 179–194.
[46] Борисов А.В., Резаев Р.О., Трифонов А.Ю., Шаповалов А.В. Численное моделирование одномерной популяционной динамики с нелокальным воздействием. Известия Томского политехнического университета, 2009, Т. 315, № 2, С. 24–28.
[47] Васильев М.Д., Трофимцев Ю.И. Эколого-экономическая модель охраняемой популяции со случайной величиной добычи. Тр. Межд. науч. чтений «Приморские зори - 2012», Вып. 1, Изд-во ТАНЭБ, Владивосток, 2012, С. 75–78.
[48] Васильев М.Д., Григорьев М.П., Трофимцев Ю.И. Создание охраняемой территории: моделирование динамики популяции и оценка затрат. Мат. заметки ЯГУ, 2013, Т. 20, вып. 2, С. 222–236.
[49] Васильев М.Д., Трофимцев Ю.И. Модель охраняемой популяции при наличии конкуренции на билокальном ареале. Вестник Кемеровского университета, 2015, Т. 1, № 2(62), С. 11–22.
[50] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. Наука, Москва, 1988, 512 с.
[51] Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. Наука, Москва, 1976, 286 с. (также ИКИ, 2004, 288 с.)
[52] Гайко В.А. Глобальный бифуркационный анализ квартичной модели «хищник–жертва». Компьютерные исследования и моделирование, 2011, Т. 3, № 2, С. 125–134.
[53] Гимельфарб А.А., Гинзбург Л.Р., Полуэктов Р.А., Пых Ю.А., Ратнер В.А. Динамическая теория биологических популяций. Наука-Физматгиз, Москва, 1974, 455 с.
[54] Глызин С.Д. Разностная аппроксимация уравнения «реакция — диффузия» на отрезке. Моделирование и анализ информационных систем, 2009, Т. 16, № 3, С. 96–116.

[55] Говорухин В.Н., Загребнева А.Д. Популяционные волны и их бифуркации в модели «активный хищник – пассивная жертва». Компьютерные исследования и моделирование, 2020, Т. 12, № 4, С. 831–843.

[56] Горбунова Е.А., Колпак Е.П. Математические модели одиночной популяции. Вестник СПбГУ. Сер. 10, 2012, Вып. 4, С. 18–30.

[57] Горбунова Е.А., Колпак Е.П. Математические модели одиночной популяции. Вест. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10, 2012, Вып. 4, С. 18–30.

[58] Горбова Т.В. Численный алгоритм для модели популяционной динамики дробного порядка с запаздыванием. Известия института математики и информатики Удмуртского государственного университета, 2021, Т. 57, С. 91–103.

[59] Гроссман С., Тернер Дж. Математика для биологов. Высшая школа, Москва, 1983, 384 с.

[60] Гурман В.И., Дружинина И.П. Модели природных систем. Наука, Новосибирск, 1978, 222 с.

[61] Домбровский Ю.А., Маркман Г.С. Пространственная и временная упорядоченность в экологических и биохимических системах. Изд-во РГУ, Ростов-на-Дону, 1983, 120 с.

[62] Жукова И.В., Колпак Е.П. Математическая модель солидной опухоли. Естественные и математические науки в современном мире, 2013, № 13, С. 18–25.

[63] Журавлёв В.М. Нелинейные волны в многокомпонентных системах с дисперсией и диффузией. Точно решаемые модели. УлГУ, Ульяновск, 2001, 200 с.

[64] Ильичев В.Г., Рохлин Д.Б., Угольницкий Г.А. Об экономических механизмах управления биоресурсами. Известия Академии наук. Теория и системы управления, 2000, Вып. 4, С. 104–110.

[65] Кодиров О.К., Гадозода М., Юнуси М.К. Исследование процессов малых поперечных и продольных колебаний струны и тепловых волн

с особенностями, которые описываются дифференциальными уравнениями в частных производных второго порядка в экстремальных режимах. Вестник национального университета. Серия естественных наук, 2022, С. 134–162.
[66] Ковалева Е.С., Цибулин В.Г., Фришмут К. Динамика модели популяционной кинетики с косимметрией. Мат. моделирование, 2008, Т. 20, № 2, С. 85–92.
[67] Ковалева Е.С., Цибулин В.Г., Фришмут К. Семейство стационарных режимов в модели динамики популяций. Сибирский журнал индустриальной математики, 2009, Т. 12, № 1, С. 98–108.
[68] Колмогоров А.Н., Петровский И.Г., Пискунов Н.С. Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества, и его применение к одной биологической проблеме. Бюл. МГУ. Сер. А. Матем. и мех., 1937, Т. 1, Вып. 1, С. 1–26.
[69] Колмогоров А.Н., Петровский И.Г., Пискунов Н.С. Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества, и его применение к одной биологической проблеме. Бюл. МГУ. Сер. А, 1937, № 6, С. 1–26.
[70] Колобов А.В., Полежаев А.А. Влияние случайной подвижности злокачественных клеток на устойчивость фронта опухоли. Компьютерные исследования и моделирование, 2009, Т. 1, № 2, С. 225–332.
[71] Колпак Е.П., Балыкина Ю.Е., Котина Е.Д., Жукова И.В. Математическая модель нарушений функционирования щитовидной железы. Молодой ученый, 2014, № 2(61), С. 19–24.
[72] Колпак Е.П., Горбунова Е.А., Балыкина Ю.Е., Гасратова Н.А. Математическая модель одиночной популяции на билокальном ареале. Молодой ученый, 2014, № 1(6), С. 28–33.

[73] Колпак Е.П., Столбовая М.В. Математическая модель кинетики роста растений. Журнал научных публикаций аспирантов и докторантов, 2013, № 12(90), С. 230–232.

[74] Кудряшев Н.А. О точных решениях уравнений семейства Фишера. Теоретическая и математическая физика, 1993, Т. 94, № 2, С. 296–306.

[75] Курант Р. Уравнения с частными производными. Мир, Москва, 1964.

[76] Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. Наука, Москва, 1967.

[77] Леонов А.М., Трофимцев Ю.И. Качественный анализ динамики промысловых популяций при наличии охраняемых территорий. Мат. проблемы экологии. Тез. докл. II Всеросс. конф., Изд-во ИМ СО РАН, Новосибирск, 1994, С. 112–113.

[78] Леонов А.М., Трофимцев Ю.И. Восстановление популяции с помощью убежищ. Тез. докл. II Международной конференции по мат. моделированию, Изд-во ИМ СО РАН, Новосибирск, 1997, С. 66–67.

[79] Леонов А.М., Трофимцев Ю.М. Особые точки и бифуркационные параметры модели восстановления популяции. Мат. заметки ЯГУ, 2008, Т. 15, вып. 2, С. 106–118.

[80] Логофет Д.О. Исследование системы пар «хищник—жертва», связанных по конкуренции. Докл. АН СССР, 1975, Т. 224, № 3, С. 529–531.

[81] Логофет Д.О. Об устойчивости одного класса матриц, возникающих в математической теории биологических сообществ. Докл. АН СССР, 1975, Т. 221, № 6, С. 1272–1275.

[82] Логофет Д.О., Юнусов М.К. Вопросы качественной устойчивости и регуляризации в динамических моделях агроценоза хлопчатника. Вопросы кибернетики, 1979, Вып. 52, С. 62–74.

[83] Ляпунов А.А. Биогеоценозы и математическое моделирование. Природа, 1971, № 10, С. 38–41.

[84] Ляпунов А.А., Багриновская Г.П. О методологических вопросах математической биологии. Математическое моделирование в биологии, Мозжинка, 1973, Москва, 1975, С. 5–18.

[85] Мазалов В.В., Реттиева А.Н. Об одной задаче управления популяцией. Обозрение прикладной и промышленной математики, 2002, Т. 9, вып. 2, С. 293–306.

[86] Мальтус Т. Опыт закона о народонаселении. Петроком, Петрозаводск, 1993, 139 с.

[87] Марчук П.И. Математическое моделирование в проблеме охраны окружающей среды. Наука, Москва, 1982, 320 с.

[88] Марри Дж. Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. Мир, Москва, 1983, 397 с.

[89] Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. Наука, Москва, 1976, 391 с.

[90] Моисеев Н.Н. Модели экологии и эволюции. (Новое в жизни науке, технике. Сер. Математика, кибернетика. № 10). Знание, Москва, 1983, 64 с.

[91] Новосельцев В.Н. Теория управления и биосистемы. Наука, Москва, 1978, 320 с.

[92] Одинаев Р.Н. Задача защиты растений для точечных моделей и при произвольных трофических функциях. Вестник Таджикского национального университета, 2012, № 1-3, С. 25.

[93] Одинаев Р.Н. Исследование математической модели задачи защиты растений в стационарном случае. Вестник Таджикского национального университета. Сер. естественных наук, 2013, № 1/3 (110), С. 7–11.

[94] Одинаев Р.Н., Косимов Ш. Исследование математической модели задачи защиты растений в нестационарном случае. Вестн. Тадж. нац. ун-та, 2014, № 1/3 (134), С. 6–10.

[95] Одинаев Р.Н. Необходимое и достаточное условие существования решения задачи защиты растений. Доклады Академии наук Республики Таджикистан, 2015, Т. 58, Вып. 10, С. 879–866.

[96] Одинаев Р.Н. Об одной нелинейной математической модели защиты растений с учетом возрастной структуры. Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук, 2016, № 1-2 (196), С. 13–17.

[97] Одинаев Р.Н., Юнуси М.К. Оптимизационные модели интегрированного метода борьбы с вредителями биосистем трех трофических уровней. Вестник ТНУ. Сер. естественных наук, 2016, № 1/3 (200), С. 46–52. doi: 10.14357/08696527365216.

[98] Одинаев Р.Н. Об одном необходимом и достаточном условии существования решения задачи защиты растений. Евразийское Науч. Объединение, 2017, Т. 1, № 12 (34), С. 20–25.

[99] Одинаев Р.Н. Исследование оптимизационного процесса задачи защиты растений с учетом возрастной структуры насекомых. Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук, 2017, № 1/3, С. 6–9.

[100] Одинаев Р.Н. Численный метод решения интегро-дифференциальной задачи защиты растений. Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук, 2017, № 1/5, С. 112–116.

[101] Одинаев Р.Н. Математическая модель задачи защиты растений с учетом пространственного распределения и её решение при произвольных трофических функциях. Вестн. Тадж. нац. ун-та. Сер. Естеств. наук, 2018, № 1, С. 5–11.

[102] Одинаев Р.Н. Математическая модель процесса защиты растений с учетом возрастной структуры насекомых. Известия ВУЗов Кыргызстана, 2018, № 2, С. 3–7.

[103] Одинаев Р.Н. Компьютерный анализ и алгоритм определения неизвестных параметров в задаче защиты растений. Известия ВУЗов Кыргызстана, 2018, № 1, С. 11–14.

[104] Одинаев Р.Н. Разработка математических моделей процесса защиты растений с учетом временно-возрастной структуры в биосистеме типа «вредные насекомые - полезные насекомые» с произвольными трофическими функциями. Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана, 2018, № 2, С. 24–28.

[105] Одинаев Р.Н. Компьютерное моделирование процесса защиты растений с учетом временно-возрастной структуры и пространственного распределения с произвольными трофическими функциями. Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана, 2018, № 2, С. 33–38.

[106] Одинаев Р.Н. Разностная аппроксимация интегро-дифференциальной задачи защиты растений с учетом возрастной структуры насекомых и вычислительные эксперименты. Вестн. Тадж. нац. ун-та. Сер. Естеств. наук, 2018, № 1, С. 34–42.

[107] Одинаев Р.Н. Численный метод решения задачи защиты растений с учетом временно-возрастной структуры насекомых. Проблемы вычисл. и прикладной математики, Ташкент, 2018, № 1(13), С. 56–62.

[108] Одинаев Р.Н. Математическая модель задачи защиты растений в биосистеме типа «вредные насекомые – полезные насекомые» с произвольными трофическими функциями. Системы и средства информатики, 2019, Т. 29, Вып. 1, С. 96–108. doi: 10.14357/08696527190109.

[109] Одинаев Р.Н. Математическое и компьютерное моделирование агроценоза хлопчатника с учетом возрастной структуры и с

произвольными трофическими функциями. Системы и средства информатики, 2021, Т. 31, № 2, С. 173–183. doi: 10.14357/08696527210216.

[110] Одинаев Р.Н., Назруллоев П.Л., Раимзода Ф. Оптимизационный процесс интегрированного метода защиты растений для точечных моделей. Системы и средства информатики, 2021, Т. 32, № 4, С. 134–144. doi: 10.14357/08696527220413.

[111] Одинаев Р.Н. Методы оптимизации. ТНУ, Душанбе, 2021, 246 с.

[112] Одинаев Р.Н., Нарзуллоев П.Л. Оптимизационная модель интегрированного метода защиты растений от вредителей биосистемы типа «хищник-жертва» с произвольными трофическими функциями. Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук, 2021, № 1, С. 111–121.

[113] Одинаев Р.Н., Ғафоров А.Б. Амсилаи математикии масъалаи муҳофизати агросенозаи пахта аз зараррасониҳои хоҷагии қишлоқ. Паёми Донишгоҳи миллии Тоҷикистон. Бахши илмҳои табиӣ, 2019, № 4, С. 14–21. (на тадж. яз.)

[114] Одинаев Р.Н., Мусоев С.С., Муродова Т.И. Тадқиқи модели математикӣ ва компютерии масъалаи муҳофизати растанӣ дар системаи биологии намуди «дарранда-қурбонӣ». Паёми Донишгоҳи миллии Тоҷикистон. Бахши илмҳои табиӣ, 2021, № 1, С. 19–32. (на тадж. яз.)

[115] Одум Ю. Основы экологии. Мир, Москва, 1975, 740 с.

[116] Одум Ю.П. Экология. В 2-х томах. Мир, Москва, 1986, Т. 1, 328 с.; Т. 2, 376 с.

[117] Олейник О.А., Кружков С.Н. Квазилинейные параболические уравнения второго порядка со многими независимыми переменными. УМН, 1961, Т. 16, вып. 5, С. 115–155.

[118] Остер Г., Гукенхеймер Дж. Бифуркации в моделях популяции. В кн.: Дж. Марсден, М. Мак-Кракен Бифуркация рождения цикла и ее приложения, Мир, Москва, 1980, С. 254–273.
[119] Пискунов Н.С. Разностный метод приближённого решения дифференциальных уравнений, основанный на применении формулы Тейлора. Метод Адамса. В кн.: Дифференциальное и интегральное исчисления. В 2-х т. Т. II, Интеграл-Пресс, Москва, 2001, С. 123–129.
[120] Полуэктова Р.А. (под ред.) Динамическая теория биологических популяций. Наука, Москва, 1974, 455 с.
[121] Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. Наука, Москва, 1969, 393 с.
[122] Раимзода Фаррухшох. Исследование нелинейных популяционных волн с учетом возрастного состава и пространственных распределений. Материалы международной научной конференции, посвященной 70–летию академика НАН Таджикистана Шабозова М.Ш., Душанбе, 24-25 июня 2022 г., С. 312–314.
[123] Раимзода Фаррухшох. Решение неоднородной интегро-дифференциальной задачи с функциональными начальными условиями. Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математики и её приложения», Душанбе, 20-21 октября 2022 г., С. 180–182.
[124] Реттиева А.Н. Задача управления биоресурсами с меняющейся долей заповедной территории и миграцией. Тезисы докладов Третьей Всероссийской школы молодых ученых «Математические методы в экологии», Петрозаводск, 2008, С. 138–139.
[125] Ризниченко Г.Ю., Рубин А.Б. Математические модели биологических продукционных процессов. Изд-во МГУ, Москва, 1993, 302 с.

[126] Ризниченко Г.Ю. Математические модели в биофизике и экологии. ИКИ, Москва–Ижевск, 2003, 184 с.

[127] Ризниченко Г.Ю., Рубин А.Б. Биофизическая динамика продукционных процессов. Институт компьютерных технологий, Москва–Ижевск, 2004, 464 с.

[128] Романов М.Ф., Федоров М.П. Математические модели в экологии. Иван Федоров, СПб., 2003, 240 с.

[129] Романовский Ю.М., Степанова Н.В., Чернавский Д.С. Математическое моделирование в биофизике. Наука, Москва, 1972, 159 с.

[130] Романовский Ю.М., Степанова Н.В., Чернавский Д.С. Математическое моделирование в биофизике. Наука, Москва, 1975, 344 с.

[131] Самарский А.А., Михайлов А.П. Компьютеры и жизнь. Педагогика, Москва, 1987, 127 с.

[132] Самарский А.А. Теория разностных схем. Наука, Москва, 1989, 616 с.

[133] Самарский А.А., Вабищевич П.Н., Матус П.П. Разностные схемы с операторными множителями. ЦОТЖ, Минск, 1998, 442 с.

[134] Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Аддитивные разностные схемы для задач математической физики. Наука, Москва, 1999, 319 с.

[135] Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование. Идеи. Методы. Примеры. Физматлит, Москва, 2005, 320 с.

[136] Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения задач конвекции-диффузии. УРСС, Москва, 2009, 8 с.

[137] Свирежев Ю.М., Елизаров Е.Я. Математическое моделирование биологических систем. Наука, Москва, 1972, 160 с.

[138] Свирежев Ю.М., Логофет Д.О. Устойчивость биологических сообществ. Наука, Москва, 1978, 352 с.

[139] Свирежев Ю.М., Тимофеев Н.Н. О регулировании численности популяции с возрастной структурой. Журнал общей биологии, 1980, Вып. 2, С. 200–209.

[140] Свирежев Ю.М. Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии. Наука, Москва, 1987, 368 с.

[141] Скалецкая Е.И., Фрисман Е.Я., Шапиро А.П. Дискретные модели динамики численности популяций и оптимизация промысла. Наука, Москва, 1979, 165 с.

[142] Смит Дж.М. Модели в экологии. Мир, Москва, 1976, 183 с.

[143] Тихомиров И.А. Оптимизационные задачи сельского хозяйства. - М.: Наука, 1991.

[144] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. Наука, Москва, 1972.

[145] Тютюнов Ю.В., Титова Л.И., Бердников С.В. Механистическая модель эффекта Олли и интерференции в популяции хищников. Биофизика, 2013, Т. 58, вып. 2, С. 349–356.

[146] Тузинкевич А.В. Интегральные модели пространственно-временной динамики экосистем. ИАПУ ДВО АН СССР, Владивосток, 1989, 184 с.

[147] Филиппов А.Ф. Об условиях существования решений квазилинейного параболического уравнения. ДАН СССР, 1961, Т. 141, № 3, С. 568–570.

[148] Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. Мир, Москва, 1968, 423 с.

[149] Цыганов М.А., Бикташев В.Н., Бриндли Дж., Холден А.В., Иваницкий Г.Р. Волны в кросс-диффузионных системах — особый класс нелинейных волн. УФН, 2007, Т. 177, № 3, С. 275–300.

[150] Четвериков С.С. Волны жизни. Изв. о-ва любителей естествознания, антропологии и этнографии, 1905, Т. 3, № 6, С. 106–111.

[151] Чистяков А.Е., Першина Ю.В. Решение задачи динамики популяций на основе модели «хищник-жертва». Известия ЮФУ. Технические науки, 2013, № 1, С. 142–149.

[152] Шапиро А.П., Клещев А.С. Математические модели популяций. ДВНЦ АН СССР, Владивосток, 1979, 132 с.

[153] Шапиро А.П., Луппов С.П. Реккурентные уравнения в теории популяционной биологии. Наука, Москва, 1983, 134 с.

[154] Эйлер Л. Интегральное исчисление. Том 1. Гостехиздат, Москва, 1956, 415 с.

[155] Юнуси (ов) М.К. О задачах оптимального управления, связанных с моделями агроценозов. Докл. АН ТаджССР, 1978, Т. 21, № 4, С. 10–14.

[156] Юнусов М.К. Математическая модель интегрированного метода борьбы с вредителями. Докл. АН ТаджССР, 1979, Т. 22, № 2, С. 652–656.

[157] Юнуси М.К. Оптимальное управление в биосистеме «хищник-жертва». Известия АН Тадж. ССР, 1981, № 2, С. 81–86.

[158] Юнусов М.К. Необходимые и достаточные условия сбора планируемого урожая. Математическое моделирование в проблемах рационального природопользования, Ростов-н/Д., 1986, С. 182–183.

[159] Юнусов М.К. Некоторые математические вопросы охраны популяций животных. Докл. АН ТаджССР, 1989, Т. 32, № 2, С. 87–92.

[160] Юнусов М.К. Математические модели управления агроценозами и охраняемыми биологическими популяциями. Диссертация ... д-ра физ.-мат. наук. ВЦ АН СССР, Москва, 1990, 312 с.

[161] Юнусов М. О решении некоторых интегро-дифференциальных задач. Докл. АН ТаджССР, 1990, Т. 33, № 6, С. 368–371.

[162] Юнусов М.К. Математические модели борьбы с вредителями агроценозов. Дониш, Душанбе, 1991, 146 с.

[163] Юнусов М.К. Математические модели охраняемых популяций. ВЦ АН СССР, Москва, 1991, 27 с.

[164] Юнусов М.К. О решении одного класса нелокальных задач. ВЦ АН СССР, Москва, 1991, 30 с.

[165] Юнусов М.К. Решение одного класса интегро-дифференциальных задач и его приложения в биологии. Душанбе, 1991, 53 с.

[166] Юнусов М. Решение одной интегро-дифференциальной задачи методом Фурье. Докл. АН ТаджССР, 1984, Т. 27, № 9, С. 491–494.

[167] Юнуси М. О новых постановках задач для дифференциальных уравнений. Тезисы докл. апрельской науч. теор. конфер. проф.-преподавательского состава, Душанбе, 1991, С. 145.

[168] Юнуси М.К., Одинаев Р.Н. Исследование системы типа «Полезные насекомые – вредные насекомые» с учетом возрастного состава и пространственного распределения. Вестник Таджикского технического университета, 2012, № 1(17), С. 26–32.

[169] Юнуси М.К. Оптимальное управление в некоторых задачах управления агроценозами и охраняемых биологических видов. Вестн. Тадж. нац. ун-та. Сер. Естеств. наук, 2018, № 2, С. 38–48.

[170] Юнуси М.К. Оптимальное управление в задачах защиты планируемого урожая, охраняемыми биологическими популяциями и их приложения. ТНУ, Душанбе, 2018, 287 с.

[171] Юнуси М.К О математическом моделировании хлопковых экосистем / М.Н.Нарзикулов, Ш.Умаров, М. Юнуси // Книга: Численные методы в экологии животных. - Ленинград, 1980. С. 94.95.

[172] Юнуси М.К Об определении критических значений насекомых интегрированного метода защиты планируемого урожая / М.Н. Нарзикулов, М.К. Юнуси // Доклады ВАСХНИЛ. - 1981. - №2. - С.22-23.

[173] Яворский В.А., Киреев В.Б., Лобанов А.И. Возрастная структура и скорость изменения численности стабильной популяции, их связь с обобщенным ресурсом (на украинском языке). Демография достижения, 1997, Вип. 19, С. 178–190.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ СТАТЕЙ СОИСКАТЕЛЯ

А) Статьи в изданиях, рекомендованных ВАК РТ:

[1-А] П.Л. Нарзуллоев. Компьютерное моделирование задачи защиты растений с учётом возраста и пространственного распределения с произвольными трофическими функциями / Р.Н. Одинаев, П.Л. Нарзуллоев, А.Б. Гаффоров // Вестник Таджикского национального университета. — Душанбе. — 2020. — №2. — С. 16-24.

[2-А] П.Л. Нарзуллоев. Оптимизационная модель интегрированного метода защиты растений от вредителей биосистемы типа «хищник-жертва» с произвольными трофическими функциями / Р.Н. Одинаев, П.Л. Нарзуллоев // Вестник Таджикского национального университета. — Душанбе. — 2021. — №1. — С. 111-120.

[3-А] П.Л. Нарзуллоев. Исследование математической и компьютерной модели защиты растений в стационарном и нестационарном случае с произвольными трофическими функциями / Р.Н. Одинаев, П.Л. Нарзуллоев, С.С. Мусоев, К.Б. Юсуфзода // Вестник Таджикского национального университета. — Душанбе. — 2022. — №3. — С. 92-105.

[4-А] П.Л. Нарзуллоев. Оптимизационный процесс интегрированного метода защиты растений для точечных моделей / Р.Н. Одинаев, П.Л. Нарзуллоев, Ф. Раимзода // Системы и средства информатики АН РФ. — 2022. — Том 32. — №3. — С. 134-144.

[5-А] П.Л. Нарзуллоев. Оптимизационная задача защиты растений с учётом временной, возрастной структуры насекомых и пространственных распределений / Р.Н. Одинаев, П.Л. Нарзуллоев // Доклады НАН Таджикистан. — Душанбе. — 2025. — Том 68. — №3. — С. 218-224.

[6-А] П.Л. Нарзуллоев. Численный метод решения задачи оптимального управления в биосистеме трёх трофических уровней «растение — вредные насекомые — полезные насекомые» / Р.Н. Одинаев, П.Л. Нарзуллоев // Известия НАН Таджикистана. — Душанбе. — 2025. — №3 (200). — С. 47-58.

[7-А] П.Л. Нарзуллоев. Численные методы в исследовании оптимизации защиты растений с возрастной структурой популяции насекомых / П.Л. Нарзуллоев // Вестник Таджикского национального университета. — Душанбе. — 2025. — №4. — С. 25-34.

Б) Статьи в материалах конференций:

[8-А] Нарзуллоев П.Л. Компьютерное моделирование оптимизационного процесса защиты растений в биосистеме трёх трофических уровней «Растение — вредные насекомые — полезные насекомые» с произвольными трофическими функциями / Р.Н. Одинаев, А.Б. Гаффоров, П.Л. Нарзуллоев // Материалы XI международной научно-теоретической конференции. — Душанбе. — 2018. — С. 203-208.

[9-А] Нарзуллоев П.Л. Структура взаимосвязей компонентов экосистемы хлопчатника и достаточное условие для качественной устойчивости / Ш. Косимов, А.Х. Одинаев, П.Л. Нарзуллоев // Материалы XI международной научно-теоретической конференции. — Душанбе. — 2018. — С. 195.

[10-А] Нарзуллоев П.Л. Математическая модель процесса защиты растений в стационарном случае с произвольной трофической функцией / Р.Н. Одинаев, Ф. Раимзода, А.Б. Гаффоров, П.Л. Нарзуллоев // Республиканская научно-теоретическая конференция. — Душанбе. — 2019. — С. 203.

[11-А] Нарзуллоев П.Л. Исследование процесса защиты растений с учётом пространственного распределения и его решение при произвольных трофических функциях / Р.Н. Одинаев, П.Л. Нарзуллоев // Республиканская научно-практическая конференция. — Душанбе. — 2021. — С. 121.

[12-А] Нарзуллоев П.Л. Оптимизационная модель интегрированного метода борьбы с вредителями агроценоза / П.Л. Нарзуллоев, С.С. Мусоев // Республиканская научно-практическая конференция. — Душанбе. — 2023. — С. 221.

[13-А] Нарзуллоев П.Л. Доказательство принципа максимума для линейных интегро-дифференциальных задач с функциональными условиями / Раимзода Ф., Нарзуллоев П.Л., Раимзода Фарахноз // Материалы международной научно-практической конференции «Компьютерный анализ проблем науки и технологий». — Душанбе. — 2023. — С. 298-302.