МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ ТАДЖИКИСТАН
ТАДЖИКСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УДК 517.53.517.945

На правах рукописи

НАЗАРОВ ДЖАМШЕД ЮСУФОВИЧ

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТИПА КОШИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА

01.01.02- Дифференциальные уравнения, динамические системы, оптимальное управление

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель: доктор
физико–математических наук, профессор
Сатторов Абдуманон Сатторович

Душанбе – 2023

ОГЛАВЛЕНИЕ

Общая характеристика работы

Актуальность и степень разработанности темы исследования. Теория уравнения с частными производными является одним из важнейших разделов математики, прежде всего благодаря своими приложениями в математику, физику, а также многих других областей науки. Так как дифференциальные уравнения с частными производными, которые имеют широкое применения в области физики, биологии, химии, экономики и многих других науках поэтому в XVII-XX веков интенсивно развивался.

Теория вырождающихся дифференциальных уравнений, возникшая в первой половине XX века и развивающаяся особенно интенсивно, начиная с 50-х годов прошлого века является одной из важнейших разделов теории дифференциальных уравнений в частных производных. Первые фундаментальные результаты в этом направлении были получены Ф. Трикоми [60].

Новый этап в развитии уравнения смешанного типа начался с появлений работы Ф.И. Френкель [61]. В этой работе было показано, что задача истечения сверхзвуковой струны из сосуда с плоскимЬ стенами сводится к задаче Трикоми для уравнения Чаплыгина. Следующим этапом развития вырождающихся дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка является работа М.В.Келдыша[3], в которой впервые были указаны случаи, когда при решении задачи Дирихле для уравнений с характеристическими линиями вырождения часть границы в эллиптической части следует освободить от граничного условия.

Исследование уравнений смешанного типа и с сингулярными коэффициентами важно в связи с ее многочисленными приложениями в газовой динамике, теории оболочек, гидродинамике, теории упругости и.т.д.

В Ф. Трикоми [60] отмечено, что изучение движения идеальной жидкости от сжимаемости которой нельзя отвлечься, приводит к уравнению в частных производных второго порядка оказывающемуся уравнением эллиптического типа в дозвуковой области и гиперболического типа в сверхзвуковой. Изучение двухмерных околозвуковых явлений приводит к изучению уравнения смешанного типа. Ф.И. Френкель [61] обнаружил важные приложения задачи Трикоми и других родственных ей задач в трансзвуковой газодинамике. И.Н. Векуа [3] указал на важность проблемы уравнений смешанного типа при решении задач, возникающих в теории бесконечного малых изгибающих поверхностей, а также в без моментной теории оболочек с кривизной переменного знака.

А.В. Бицадзе [2] получил существенно новые результаты значительной теоретической важности для модельного уравнения смешанного типа.

Постановке и исследованию новых задач для уравнений смешанного типа и с сингулярными коэффициентами посвящены работы К.И. Бабенко, В.Н. Врагов, Е.И. Моисеева, А.М. Нахушева, М.С. Салохиддинова, М.М. Смирнова, Л.Г. Михайлова, Н. Раджабова, В.И. Жегалова, А.С. Сатторова и других авторов были поставлены и исследованы новые задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами.

Дальнейшее развитие теории вырождающегося дифференциального уравнения с сингулярными коэффициентами получено в работах Советских математиков: М.М.Смирнова, Л.Г.Михайлова, Раджабова Н.Р., Е.И.Моисеева и др.

Исследованию вырождающихся дифференциальных уравнений посвящено большие число работ советских и зарубежных авторов.

Настоящая диссертация посвящена изучению вырождающихся дифференциальных уравнений второго и четвертого порядков первого рода. В работе получены интегральные представления решений данного класса дифференциального уравнения в зависимости от принимаемых значений коэффициентов уравнения. В дальнейшем полученные интегральные представления применяются для решения задач типов Коши в характеристической области. Далее полученные результаты для вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка обобщаются для исследования вырождающихся дифференциального уравнения четвертого порядка первого рода. Следует отметить, что выше названные результаты для этого класса уравнении получены в плоскости и в пространстве.

Объект исследования и связь работы с научными программами (проектами), темами. Данное диссертационное исследование выполнено в рамках реализации перспективного плана научно-исследовательской работы кафедры высшей математики Таджикского национального университета на 2016-2020г. по теме «Исследование вырождающихся дифференциальных уравнений»

Цель и задачи исследования. Основная цель диссертационный работы заключается в следующем:

- Получение интегральные представление решений вырождающееся дифференциальное уравнения второго порядка в характеристической области с одной и двумя линиями вырождения на плоскости;
- Получение интегральных представлений решения для вырождающееся дифференциального уравнений первого рода в пространстве;
- Получение интегральных представлений решения вырождающихся дифференциальных уравнений первого рода вида Гельмгольца на плоскости и в пространстве;
- Получение интегральных представлений решения для вырождающихся дифференциальных уравнений четвертого порядка вида Гельмгольца на плоскости и в пространстве;
- Постановка и исследование задачи типа Коши в случае, когда общее решение уравнения второго порядка содержит две произвольные функции;
- Постановка и исследование задачи типа Коши в случае, когда общее решение уравнения четвертого порядка содержит четыре произвольные функции на плоскости;
- Постановка и исследование задачи типа Коши в случае, когда общее решение уравнения четвертого порядка содержит четыре произвольные функции в пространстве;

- Постановка и исследование задачи типа Коши в случае, когда общее решение вырождающихся дифференциальных уравнений второго и четвертого порядков первого рода вида Гельмгольца содержит две и четыре произвольные функции в пространстве.

Методы исследования. В работе используются общие методы теории дифференциальных уравнений с частными производными, методы получения интегральных представлений решения вырождающихся дифференциальных уравнений. В работе также используется метод интегральных представлений решения вырождающихся дифференциальных уравнений через решение обыкновенных дифференциальных уравнений, разработанных в работах М.М Смирнова. Н. Раджабова и А.С. Сатторова.

Научная новизна исследования. Результаты диссертации являются новыми, получены автором самостоятельно и состоят в следующем:

- Получено интегральное представление решений дифференциальных уравнений второго порядка с одной линией вырождения в гиперболической части области;
- Полученные интегральные представления решения дифференциальных уравнений с одной линией вырождения применяются для решения задачи типа Коши в гиперболической части области;
- Получено интегральные представление решения дифференциального уравнения второго порядка с двумя линиями вырождения в характеристический области;
- Полученные интегральные представления решения дифференциальных уравнений второго порядка первого рода с двумя линиями вырождения применяются для решения задачи типа Коши в характеристический области;
- Получено интегральное представление решения дифференциального уравнения четвертого порядка первого рода с двумя линиями вырождения в гиперболический части области;
- Получено интегральное представление решения вырождающихся дифференциального уравнения второго и четвертого порядков первого рода вида Гельмгольца на плоскости и в пространстве;
- Полученные интегральные представления решения вырождающихся дифференциального уравнения второго и четвертого порядков первого рода вида Гельмгольца применяются для решения задач типов Коши на плоскости и в пространстве.

Положения выносимые на защиту:

- Теоремы о получении интегральных представлений решения вырождающихся дифференциальных уравнения второго порядка первого рода для различных значений коэффициентов уравнений;

- Теоремы о получении интегральных представлений решения вырождающихся дифференциальных уравнений четвертого порядка первого рода через произвольные функции в характеристической области;
- Теоремы о получении интегральных представлений решения вырождающихся дифференциальных уравнений второго и четвертого порядков первого рода вида Гельмгольца на плоскости и в пространстве;
- Решение задач типов Коши для выше названных вырождающихся дифференциальных уравнений с применением полученных интегральных представлений решения в гиперболической части области

- **Теоретическая и практическая ценность.** Исследования, содержащиеся в диссертации, носят теоретический характер. Результаты могут быть использованы для изучения многомерных вырождающихся дифференциальных уравнений второго и четвертого порядков с многими гиперплоскостями вырождения. Полученные результаты в дальнейшим могут быть использованы для решения задачи Трикоми в смешанной области.
- **Достоверность диссертационных результатов.** Достоверность результатов, полученных в диссертационной работе, определяется обоснованными теоретическими выводами и строгими математическими доказательствами, опирающимися на методы дифференциальных уравнений с частными производными. Для проверки достоверности результатов в каждой главе приведен ряд примеров.
- **Личный вклад автора.** Содержание диссертации и основные результаты, выносимые на защиту, являются вкладом автора в опубликованных работах. Постановка задач и руководство выполненных работ принадлежит руководителю диссертанта. В основном все результаты диссертационной работы получены диссертантом.

Апробация работы. Основные результаты диссертации обсуждались на:

- семинарах отдела дифференциальных уравнения научно-исследовательского института ТНУ под руководством д.ф.м.н., профессора Сатторова А.С. (Душанбе, 2010-2015г)
- семинарах кафедры высшей математики ТНУ (Душанбе, 2016-2020г)
- республиканской научно-теоретической конференции профессорско-преподавательского состава и студентов, посвященной «18-ой годовщине Независимости Республики Таджикистан» и «Году памяти Имама Аъзама» (Душанбе-2010);
- республиканской научной конференции «Современные проблемы естественных и социально-гуманитарных наук», посвященной 10-летию Научно- исследовательского института. (Душанбе-2014);
- республиканской научно-теоретической конференции «Актуальные проблемы современной математики и её преподавания», посвященной памяти профессора Муртазоева Д. М. (Душанбе-2014);
- республиканской научной конференции «Неклассические

дифференциальные уравнения и их приложения», посвященной 3000-летию Гиссара и 50-летию механико-математического факультета (Душанбе-2015);

- республиканской научно-теоретической конференции «Неклассические уравнения математической физики и смежные вопросы анализа» (Душанбе-2016);
- международной научно-теоретической конференции, посвященной 70-летию д.ф.м.н., профессора Юнуси М.К. (Душанбе, 27-28 декабри 2018г)
- международной научной конференции, посвященной 70-летию со дня рождения академика Академии наук Республики Таджикистан, доктора физико-математических наук, профессора Илолова Мамадшо (Душанбе-2018);

Публикации. Основные результаты исследований автора по теме диссертации опубликованы в 18 работах [1-А – 18-А], в научных журналах Республики Таджикистан, список которых приведен в конце автореферата. Из 18 работ 8 опубликовано в журналах, входящих в список журналов ВАК при Президенте Республики Таджикистан и ВАК РФ, а 10 в материалах международных и республиканских научных конференций.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, 2 глав, списка литературы, состоящего из 69 наименований. Общий объём диссертации - 103 страницы машинописного текста. Для удобства в диссертации использована сквозная нумерация теорем и формул, имеющих тройную нумерацию, в которой первый номер совпадает с номером главы, второй указывает на номер параграфа, а третий-на порядковый номер теорем или формул в данном параграфе.

Глава I. Интегральные представления и решение задачи типа Коши для одного класса вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка первого рода

В этой главе изучаются некоторые вырождающиеся дифференциальные уравнения с одной и двумя сингулярными линиями второго порядка. Для ряда вырождающиеся дифференциальных уравнений получены интегральные представления решения в зависимости от принимаемых значений коэффициентов уравнений и некоторые из этих интегральных представлений применяются для решения задачи типа Коши в характеристической области, когда начальные условия задаются линии вырождения.

§1.1. Интегральные представления и решение задачи типа Коши для одного вырождающегося дифференциального уравнения второго порядка первого рода с двумя сингулярными линиями

В этом параграфе рассматривается вырождающееся дифференциальное уравнение второго порядка первого рода с двумя сингулярными линиями следующего вида:

$$L_{\alpha,\beta}u \equiv y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{2\alpha y}{x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{6\beta - 1}{2y}\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \qquad (1.1.1)$$

где $\alpha, \beta -$ постоянные числа.

В [48] было изучено уравнение (1.1.1) в случае, когда $2\alpha \geq 1,\ 0 < 2\beta < 1$ и $2\alpha \geq 1,\ 0 < 2\beta < 1$. В этом параграфе изучаются остальные случаи.

Через D^- – обозначим область, ограниченную отрезком AB оси ox и характеристиками $AC:\ x - \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}} = 0,\quad BC:\ x + \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}} = 1$ уравнения (1.1.1), выходящими соответственно из точек $A(0;0), B(1;0)$, пересекающимся в точке $C\left[\frac{1}{2}; -\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}}\right]$.

Рассмотрим уравнение (1.1.1) в области D^-.

Введём следующий интегральный оператор:

$$P_{\alpha,\beta}\varphi_j \equiv \int_0^1 d\sigma \int_0^1 \frac{\psi_j\left[x(1-2\sigma)-\frac{2}{3}(-y)^{3/2}(1-2\tau)\right]d\tau}{[\sigma(1-\sigma)]^{\alpha}[\tau(1-\tau)]^{\beta}}, \tag{1.1.2}$$

где ψ_j $(j=1,2,3)$ -произвольные функции.

Определение. Регулярным решением уравнения (1.1.1) в области D^- будем называть функцию $u(x;y)$, непрерывную в $\overline{D}^-$- имеющую непрерывные частные производные первого и второго порядков в D^- и удовлетворяющую уравнению (1.1.1).

1.1.1. Интегральные представление решения уравнения (1.1.1).

Теорема 1.1.1. *Пусть* $2\alpha \geq 1$ *и* $2\beta \geq 1$. *То регулярное решение уравнения (1.1.1) в области* D^- *представимо в виде*

$$u(x;y) = A_\alpha A_\beta P_{1-\alpha,1-\beta}\psi_1 \tag{1.1.3}$$

где A_α, A_β *-постоянные числа,* ψ_1 *- произвольная функция из класса* $C^2(D^-)$.

Доказательство. Учитывая (1.1.2), берём от (1.1.3) частные производные первого и второго порядка по x и y и после некоторых упрощений получим:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = A_\alpha A_\beta \frac{2x}{\alpha}\int_0^1 d\sigma \int_0^1 \frac{\psi_1''\left[x(1-2\sigma)-\frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}(1-2\tau)\right]}{[\sigma(1-\sigma)]^{-\alpha}[\tau(1-\tau)]^{1-\beta}}d\tau,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = A_\alpha A_\beta \frac{2x}{\alpha}\int_0^1 d\sigma \int_0^1 \frac{\psi_1''\left[x(1-2\sigma)-\frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}(1-2\tau)\right]}{[\sigma(1-\sigma)]^{1-\alpha}[\tau(1-\tau)]^{1-\beta}}d\tau -$$
$$-4A_\alpha A_\beta \int_0^1 d\sigma \int_0^1 \frac{\psi_1''\left[x(1-2\sigma)-\frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}(1-2\tau)\right]}{[\sigma(1-\sigma)]^{-\alpha}[\tau(1-\tau)]^{1-\beta}}d\tau,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{4y^2}{3\beta}A_\alpha A_\beta \int_0^1 d\sigma \int_0^1 \frac{\psi_1''\left[x(1-2\sigma)-\frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}(1-2\tau)\right]}{[\sigma(1-\sigma)]^{-\alpha}[\tau(1-\tau)]^{-\beta}}d\tau,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{2y}{3\beta}A_\alpha A_\beta \int_0^1 d\sigma \int_0^1 \frac{\psi_1''\left[x(1-2\sigma)-\frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}(1-2\tau)\right]}{[\sigma(1-\sigma)]^{1-\alpha}[\tau(1-\tau)]^{-\beta}}d\tau -$$
$$-yA_\alpha A_\beta \int_0^1 d\sigma \int_0^1 \frac{\psi_1''\left[x(1-2\sigma)-\frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}(1-2\tau)\right]}{[\sigma(1-\sigma)]^{1-\alpha}[\tau(1-\tau)]^{1-\beta}}d\tau +$$
$$+4yA_\alpha A_\beta \int_0^1 d\sigma \int_0^1 \frac{\psi_1''\left[x(1-2\sigma)-\frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}(1-2\tau)\right]}{[\sigma(1-\sigma)]^{1-\alpha}[\tau(1-\tau)]^{-\beta}}d\tau.$$

Подставляя частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ в уравнение (1.1.1) имеем

$$
\begin{aligned}
L_{\alpha,\beta}u \equiv\ & y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{2\alpha y}{x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{6\beta-1}{2y}\frac{\partial u}{\partial y} = \\
= &\ yA_\alpha A_\beta \frac{2x}{\alpha}\int_0^1 d\sigma \int_0^1 \frac{\psi_1''\left[x(1-2\sigma) - \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}(1-2\tau)\right]}{[\sigma(1-\sigma)]^{1-\alpha}[\tau(1-\tau)]^{1-\beta}}d\tau - \\
& - 4yA_\alpha A_\beta \int_0^1 d\sigma \int_0^1 \frac{\psi_1''\left[x(1-2\sigma) - \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}(1-2\tau)\right]}{[\sigma(1-\sigma)]^{-\alpha}[\tau(1-\tau)]^{1-\beta}}d\tau - \\
& - \frac{2y}{3\beta}A_\alpha A_\beta \int_0^1 d\sigma \int_0^1 \frac{\psi_1''\left[x(1-2\sigma) - \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}(1-2\tau)\right]}{[\sigma(1-\sigma)]^{1-\alpha}[\tau(1-\tau)]^{-\beta}}d\tau - \\
& - yA_\alpha A_\beta \int_0^1 d\sigma \int_0^1 \frac{\psi_1''\left[x(1-2\sigma) - \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}(1-2\tau)\right]}{[\sigma(1-\sigma)]^{1-\alpha}[\tau(1-\tau)]^{1-\beta}}d\tau + \\
& + 4yA_\alpha A_\beta \int_0^1 d\sigma \int_0^1 \frac{\psi_1''\left[x(1-2\sigma) - \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}(1-2\tau)\right]}{[\sigma(1-\sigma)]^{1-\alpha}[\tau(1-\tau)]^{-\beta}}d\tau + \\
& + 4yA_\alpha A_\beta \int_0^1 d\sigma \int_0^1 \frac{\psi_1''\left[x(1-2\sigma) - \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}(1-2\tau)\right]}{[\sigma(1-\sigma)]^{-\alpha}[\tau(1-\tau)]^{1-\beta}}d\tau - \\
& - \frac{2y(6\beta-1)}{3\beta}A_\alpha A_\beta \int_0^1 d\sigma \int_0^1 \frac{\psi_1''\left[x(1-2\sigma) - \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}(1-2\tau)\right]}{[\sigma(1-\sigma)]^{-\alpha}[\tau(1-\tau)]^{-\beta}}d\tau
\end{aligned}
$$

После некоторых упрощений убедимся в том, что равенство (1.1.3) удовлетворяет уравнению (1.1.1). Теорема 1.1.1 доказана.

Теорема 1.1.2. *Пусть* $0 < 2\alpha < 1$ *и* $0 < 2\beta < 1$. *Тогда регулярное решение уравнения (1.1.1) в области* D^- *представимо в виде*

$$
\begin{aligned}
u(x;y) = &\ A_\alpha A_\beta P_{1-\alpha,1-\beta}\psi_1 + A_{1-\alpha}A_\beta x^{1-2\alpha}P_{\alpha,1-\beta}\psi_2 + \\
& + A_\alpha A_{1-\beta}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)}P_{1-\alpha,\beta}\psi_3 + A_{1-\alpha}A_{1-\beta}x^{1-2\alpha}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)}P_{\alpha,\beta}\psi_4,
\end{aligned}
\tag{1.1.4}
$$

где $A_\alpha, A_\beta, A_{1-\alpha}, A_{1-\beta}$ *- постоянные числа,* $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ *- произвольные функции одного аргумента из класса* $C^2(D^-)$.

Теорема 1.1.3. *Пусть* $2\alpha \geq 1$ *и* $-1 < 2\beta < 0$. *То регулярное решение уравнения (1.1.1) в области* D^- *представимо в виде*

$$u(x;y)=A_\alpha A_{1+\beta}(1+2\beta)P_{1-\alpha,-\beta}\psi_1-\frac{2}{3}A_\alpha A_{1+\beta}(-y)^{\frac{3}{2}}P_{1-\alpha,-\beta}\psi_1{'}\cdot(1-2\tau)+$$
$$+A_\alpha A_{1-\beta}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)}P_{1-\alpha,\beta}\psi_2, \qquad (1.1.5)$$

где $A_\alpha, A_{1-\beta}, A_{1-\beta}$ *- постоянные числа,* ψ_1,ψ_2 *- произвольные функции,* $\psi_1\in C^3(D^-)$ *и* $\psi_2\in C^2(D^-)$.

Теорема 1.1.4. *Пусть* $0<2\alpha<1$ *и* $-1<2\beta<0$. *Тогда регулярное решение уравнения (1.1.1) в области* D^- *представимо в виде*

$$u(x;y)=A_\alpha A_{1+\beta}(1+2\beta)P_{1-\alpha,-\beta}\psi_1-\frac{2}{3}A_\alpha A_{1+\beta}(-y)^{\frac{3}{2}}P_{1-\alpha,-\beta}\psi_1{'}\cdot(1-2\tau)+$$
$$A_{1-\alpha}A_{1+\beta}(1+2\beta)x^{1-2\alpha}P_{\alpha,-\beta}\psi_2-\frac{2}{3}A_{1-\alpha}A_{1+\beta}(-y)^{\frac{3}{2}}x^{1-2\alpha}P_{\alpha,-\beta}\psi_2{'}\cdot(1-2\tau)+ \qquad (1.1.6)$$
$$+A_\alpha A_{1-\beta}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)}P_{1-\alpha,\beta}\psi_3+A_{1-\alpha}A_{1-\beta}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)}x^{1-2\alpha}P_{\alpha,\beta}\psi_4,$$

где $A_\alpha, A_{1-\alpha}, A_{1-\beta}, A_{1+\beta}$ *- постоянные числа,* $\psi_1,\psi_2,\psi_3,\psi_4$ *- произвольные функции,* $\psi_1,\psi_2\in C^3(D^-)$ *и* $\psi_3,\psi_4\in C^2(D^-)$.

Теорема 1.1.5. *Пусть* $-1<2\alpha<0$ *и* $2\beta\ge 1$. *Тогда регулярное решение уравнения (1.1.1) в области* D^- *запысивается в виде*

$$u(x;y)=A_{1+\alpha}A_\beta(1+2\alpha)P_{-\alpha,1-\beta}\psi_1+A_{1+\alpha}A_\beta xP_{-\alpha,1-\beta}\psi_1{'}\cdot(1-2\sigma)+$$
$$+A_{1-\alpha}A_\beta x^{1-2\alpha}P_{\alpha,1-\beta}\psi_2, \qquad (1.1.7)$$

где $A_{1-\alpha}, A_{1+\alpha}, A_\beta, A_{1-\beta}$ *- постоянные числа,* ψ_1,ψ_2 *- произвольные функции одного аргумента,* $\psi_1\in C^3(D^-)$ *и* $\psi_2\in C^2(D^-)$.

Теорема 1.1.6. *Пусть* $-1<2\alpha<0$ *и* $0<2\beta<1$. *То регулярное решение уравнения (1.1.1) в области* D^- *записывается в виде*

$$u(x;y)=A_{1+\alpha}A_\beta(1+2\alpha)P_{-\alpha,1-\beta}\psi_1+A_{1+\alpha}A_\beta xP_{-\alpha,1-\beta}\psi_1{'}\cdot(1-2\sigma)+$$
$$A_{1+\alpha}A_{1-\beta}(1+2\alpha)(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)}P_{-\alpha,\beta}\psi_2+A_{1+\alpha}A_{1-\beta}x(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)}P_{-\alpha,\beta}\psi_2{'}\cdot(1-2\sigma)+ \qquad (1.1.8)$$
$$+A_{1-\alpha}A_\beta x^{1-2\alpha}P_{\alpha,1-\beta}\psi_3+A_{1-\alpha}A_{1-\beta}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)}x^{1-2\alpha}T_{\alpha,\beta}\psi_4,$$

здесь $A_{1+\alpha}, A_{1-\alpha}, A_\beta, A_{1-\beta}$ *- постоянные числа,* $\psi_1,\psi_2,\psi_3,\psi_4$ *- произвольные функции одного аргумента,* $\varphi_1,\varphi_2\in C^3(D^-)$ *и* $\varphi_3,\varphi_4\in C^2(D^-)$.

Теорема 1.1.7. *Пусть* $-1<2\alpha<0$ *и* $-1<2\beta<0$. *Тогда регулярное решение уравнения (1.1.1) в области* D^- *записывается в виде*

$$u(x;y)=A_{1+\alpha}A_{1-\beta}(1+2\alpha)(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)}P_{-\alpha,\beta}\psi_1+A_{1+\alpha}A_{1-\beta}x(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)}P_{-\alpha,\beta}\psi_1'\cdot(1-2\sigma)+$$
$$+A_{1-\alpha}A_{1+\beta}(1+2\beta)x^{1-2\alpha}P_{\alpha,-\beta}\psi_2-\frac{2}{3}A_{1-\alpha}A_{1+\beta}(-y)^{\frac{3}{2}}x^{1-2\alpha}P_{\alpha,-\beta}\psi_2'\cdot(1-2\tau)+ \quad (1.1.9)$$
$$+A_{1-\alpha}A_{1-\beta}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)}x^{1-2\alpha}P_{\alpha,\beta}\psi_3\ ,$$

где $A_{1+\alpha},A_{1-\alpha},A_{1+\beta},A_{1-\beta}$ *- постоянные числа,* ψ_1,ψ_2,ψ_3 *- произвольные функции одного аргумента,* $\psi_1,\psi_2\in C^3(D^-)$ *и* $\psi_3\in C^2(D^-)$.

Теоремы 1.1.2 – 1.1.7 доказываются аналогично теореме 1.1.1, чтобы убедится в этом, ниже приводим доказательство еще одной из них.

Доказательство теоремы 1.1.7.

В равенстве (1.1.9) применяем оператор $L_{\alpha,\beta}$:

$$L_{\alpha,\beta}u(x;y)=L_{\alpha,\beta}\left[A_{1+\alpha}A_{1-\beta}(1+2\alpha)(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)}P_{-\alpha,\beta}\psi_1+A_{1+\alpha}A_{1-\beta}x(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)}P_{-\alpha,\beta}\psi_1'\cdot(1-2\sigma)\right]+$$
$$+L_{\alpha,\beta}\left[A_{1-\alpha}A_{1+\beta}(1+2\beta)x^{1-2\alpha}P_{\alpha,-\beta}\psi_2-\frac{2}{3}A_{1-\alpha}A_{1+\beta}(-y)^{\frac{3}{2}}x^{1-2\alpha}P_{\alpha,-\beta}\psi_2'\cdot(1-2\tau)\right]+$$
$$+L_{\alpha,\beta}\left[A_{1-\alpha}A_{1-\beta}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)}x^{1-2\alpha}P_{\alpha,\beta}\psi_3\right]=J_1+J_2+J_3\,,$$

$$J_1=L_{\alpha,\beta}\left[A_{1+\alpha}A_{1-\beta}(1+2\alpha)(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)}P_{-\alpha,\beta}\psi_1+A_{1+\alpha}A_{1-\beta}x(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)}P_{-\alpha,\beta}\psi_1'\cdot(1-2\sigma)\right]=$$
$$y\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[A_{1+\alpha}A_{1-\beta}(1+2\alpha)(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)}P_{-\alpha,\beta}\psi_1+A_{1+\alpha}A_{1-\beta}x(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)}P_{-\alpha,\beta}\psi_1'\cdot(1-2\sigma)\right]+$$
$$+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[A_{1+\alpha}A_{1-\beta}(1+2\alpha)(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)}P_{-\alpha,\beta}\psi_1+A_{1+\alpha}A_{1-\beta}x(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)}P_{-\alpha,\beta}\psi_1'\cdot(1-2\sigma)\right]+$$
$$+\frac{2\alpha y}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left[A_{1+\alpha}A_{1-\beta}(1+2\alpha)(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)}P_{-\alpha,\beta}\psi_1+A_{1+\alpha}A_{1-\beta}x(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)}P_{-\alpha,\beta}\psi_1'\cdot(1-2\sigma)\right]+$$
$$+\frac{6\beta-1}{2y}\frac{\partial}{\partial y}\left[A_{1+\alpha}A_{1-\beta}(1+2\alpha)(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)}P_{-\alpha,\beta}\psi_1+A_{1+\alpha}A_{1-\beta}x(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)}P_{-\alpha,\beta}\psi_1'\cdot(1-2\sigma)\right]=$$
$$=A_{1+\alpha}A_{1-\beta}y(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)}P_{-\alpha,\beta}\psi_1''+A_{1+\alpha}A_{1-\beta}xy(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)}P_{-\alpha,\beta}\psi_1'''\cdot(1-2\sigma)+$$
$$+\left[\frac{9}{4}(1-2\beta)^2-\frac{3}{2}(1-2\beta)\right](1+2\alpha)A_{1+\alpha}A_{1-\beta}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)-2}P_{-\alpha,\beta}\psi_1-\frac{4y(1-2\beta)}{1-\beta}A_{1+\alpha}A_{1-\beta}(1+2\alpha)(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)}P_{-\alpha,\beta-1}\psi_1''-$$
$$-\frac{2y}{3(1-\beta)}A_{1+\alpha}A_{1-\beta}(1+2\alpha)(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)}P_{-\alpha,\beta-1}\psi_1''-A_{1+\alpha}A_{1-\beta}y(1+2\alpha)(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)}P_{-\alpha,\beta}\psi_1''+$$

$$+4yA_{1+\alpha}A_{1-\beta}(1+2\alpha)(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)}P_{-\alpha,\beta-1}\psi_1''+\left[\frac{9}{4}(1-2\beta)^2-\frac{3}{2}(1-2\beta)\right]A_{1+\alpha}A_{1-\beta}x(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)-2}P_{-\alpha,\beta}\psi_1'\cdot(1-2\sigma)-$$

$$-\frac{4xy(1-2\beta)}{1-\beta}A_{1+\alpha}A_{1-\beta}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)}P_{-\alpha,\beta-1}\psi_1'''\cdot(1-2\sigma)+\frac{2xy}{3(1-\beta)}A_{1+\alpha}A_{1-\beta}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)}P_{-\alpha,\beta-1}\psi_1'''\cdot(1-2\sigma)-$$

$$-A_{1+\alpha}A_{1-\beta}xy(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)}P_{-\alpha,\beta}\psi_1'''\cdot(1-2\sigma)+4A_{1+\alpha}A_{1-\beta}xy(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)}P_{-\alpha,\beta-1}\psi_1'''\cdot(1-2\sigma)+$$

$$+\frac{3(6\beta-1)(1-2\beta)}{4}A_{1+\alpha}A_{1-\beta}(1+2\alpha)(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)-2}P_{-\alpha,\beta}\psi_1-\frac{2y(6\beta-1)}{3(1-\beta)}A_{1+\alpha}A_{1-\beta}(1+2\alpha)(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)}P_{-\alpha,\beta-1}\psi_1''+$$

$$+\frac{3(6\beta-1)(1-2\beta)}{4}A_{1+\alpha}A_{1-\beta}x(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)-2}P_{-\alpha,\beta}\psi_1'\cdot(1-2\sigma)-$$

$$-\frac{2xy(6\beta-1)}{3(1-\beta)}A_{1+\alpha}A_{1-\beta}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)}P_{-\alpha,\beta-1}\psi_1'''\cdot(1-2\sigma)+2y\alpha A_{1+\alpha}A_{1-\beta}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)}P_{-\alpha,\beta}\psi_1''=0.$$

Теперь вычислим $\boldsymbol{L}_{\alpha,\beta}\boldsymbol{J}_2$ и $\boldsymbol{L}_{\alpha,\beta}\boldsymbol{J}_3$:

$$J_2=L_{\alpha,\beta}\left[A_{1-\alpha}A_{1+\beta}(1+2\beta)x^{1-2\alpha}P_{\alpha,-\beta}\psi_2-\frac{2}{3}A_{1-\alpha}A_{1+\beta}(-y)^{\frac{3}{2}}x^{1-2\alpha}P_{\alpha,-\beta}\psi_2'\cdot(1-2\tau)\right]=$$

$$y\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[A_{1-\alpha}A_{1+\beta}(1+2\beta)x^{1-2\alpha}P_{\alpha,-\beta}\psi_2-\frac{2}{3}A_{1-\alpha}A_{1+\beta}(-y)^{\frac{3}{2}}x^{1-2\alpha}P_{\alpha,-\beta}\psi_2'\cdot(1-2\tau)\right]+$$

$$+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[A_{1-\alpha}A_{1+\beta}(1+2\beta)x^{1-2\alpha}P_{\alpha,-\beta}\psi_2-\frac{2}{3}A_{1-\alpha}A_{1+\beta}(-y)^{\frac{3}{2}}x^{1-2\alpha}P_{\alpha,-\beta}\psi_2'\cdot(1-2\tau)\right]+$$

$$+\frac{2\alpha y}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left[A_{1-\alpha}A_{1+\beta}(1+2\beta)x^{1-2\alpha}P_{\alpha,-\beta}\psi_2-\frac{2}{3}A_{1-\alpha}A_{1+\beta}(-y)^{\frac{3}{2}}x^{1-2\alpha}P_{\alpha,-\beta}\psi_2'\cdot(1-2\tau)\right]+$$

$$+\frac{6\beta-1}{2y}\frac{\partial}{\partial y}\left[A_{1-\alpha}A_{1+\beta}(1+2\beta)x^{1-2\alpha}P_{\alpha,-\beta}\psi_2-\frac{2}{3}A_{1-\alpha}A_{1+\beta}(-y)^{\frac{3}{2}}x^{1-2\alpha}P_{\alpha,-\beta}\psi_2'\cdot(1-2\tau)\right]=$$

$$=-2A_{1-\alpha}A_{1+\beta}\alpha y(1-2\alpha)(1+2\beta)x^{-1-2\alpha}P_{\alpha,-\beta}\psi_2+\frac{4y(1-2\alpha)}{1-\alpha}(1+2\beta)A_{1-\alpha}A_{1+\beta}x^{1-2\alpha}P_{\alpha-1,-\nu}\psi_2''+$$

$$+A_{1-\alpha}A_{1+\beta}y(1+2\beta)x^{1-2\alpha}P_{\alpha,-\beta}\psi_2''-4yA_{1-\alpha}A_{1+\beta}(1+2\beta)x^{1-2\alpha}P_{\alpha-1,-\beta}\psi_2''+$$

$$+\frac{4y\alpha(1-2\alpha)}{3}A_{1-\alpha}A_{1+\beta}(-y)^{\frac{3}{2}}x^{-1-2\alpha}P_{\alpha,-\beta}\psi_2'-\frac{8y(1-2\alpha)}{3(1-\alpha)}A_{1-\alpha}A_{1+\beta}(-y)^{\frac{3}{2}}x^{1-2\alpha}P_{\alpha-1,-\beta}\psi_2'''\cdot(1-2\sigma)-$$

$$-\frac{2y}{3}A_{1-\alpha}A_{1+\beta}(-y)^{\frac{3}{2}}x^{1-2\alpha}P_{\alpha,-\beta}\psi_2'''\cdot(1-2\sigma)+\frac{8y}{3}A_{1-\alpha}A_{1+\beta}(-y)^{\frac{3}{2}}x^{1-2\alpha}P_{\alpha-1,-\beta}\psi_2'''\cdot(1-2\sigma)-$$

$$-\frac{4y}{3}A_{1-\alpha}A_{1+\beta}x^{1-2\alpha}P_{\alpha,-\beta}\psi_2''+\frac{2y}{3}A_{1-\alpha}A_{1+\beta}(-y)^{\frac{3}{2}}x^{1-2\alpha}P_{\alpha,-\beta}\psi_2'''\cdot(1-2\sigma)-$$

$$-\frac{y(6\beta-1)}{3}A_{1-\alpha}A_{1+\beta}x^{1-2\alpha}P_{\alpha,-\beta}\psi_2''+2A_{1-\alpha}A_{1+\beta}\alpha y(1-2\alpha)(1+2\beta)x^{-1-2\alpha}P_{\alpha,-\beta}\psi_2+$$

$$+\frac{4y\alpha}{1-\alpha}A_{1-\alpha}A_{1+\beta}(1+2\alpha)x^{1-2\alpha}P_{\alpha-1,-\beta}\psi_2''-\frac{4\alpha y(1-2\alpha)}{3}A_{1-\alpha}A_{1+\beta}(-y)^{\frac{3}{2}}x^{-1-2\alpha}P_{\alpha,-\beta}\psi_2'-$$

$$-\frac{8\alpha y}{3(1-\alpha)}A_{1-\alpha}A_{1+\beta}(-y)^{\frac{3}{2}}x^{1-2\alpha}P_{\alpha-1,-\beta}\psi_2{}'''\cdot(1-2\sigma)=0;$$

$$J_3=L_{\alpha,\beta}\left[A_{1-\alpha}A_{1-\beta}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)}x^{1-2\alpha}P_{\alpha,\beta}\psi_3\right]=y\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[A_{1-\alpha}A_{1-\beta}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)}x^{1-2\alpha}P_{\alpha,\beta}\psi_3\right]+$$

$$+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[A_{1-\alpha}A_{1-\beta}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)}x^{1-2\alpha}P_{\alpha,\beta}\psi_3\right]+\frac{2\alpha y}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left[A_{1-\alpha}A_{1-\beta}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)}x^{1-2\alpha}P_{\alpha,\beta}\psi_3\right]+$$

$$+\frac{6\alpha-1}{2y}\frac{\partial}{\partial y}\left[A_{1-\alpha}A_{1-\beta}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)}x^{1-2\alpha}P_{\alpha,\beta}\psi_3\right]=$$

$$=\left[(1-2\alpha)^2-(1-2\alpha)\right]yA_{1-\alpha}A_{1-\beta}x^{(1-2\alpha)-2}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)}P_{\alpha,\beta}\psi_3+$$

$$+\frac{4y(1-2\alpha)}{1-\alpha}A_{1-\alpha}A_{1-\beta}x^{(1-2\alpha)}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)}P_{\alpha-1,\beta}\psi_3{}''+yA_{1-\alpha}A_{1-\beta}x^{(1-2\alpha)}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)}P_{\alpha,\beta}\psi_3{}''-$$

$$-4yA_{1-\alpha}A_{1-\beta}x^{(1-2\alpha)}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)}T_{\alpha-1,\beta}\psi_3{}''+$$

$$+\left[\frac{9}{4}(1-2\beta)^2-\frac{3}{2}(1-2\beta)\right]A_{1-\alpha}A_{1-\beta}x^{(1-2\alpha)}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)-2}P_{\alpha,\beta}\psi_3-$$

$$-\frac{4y(1-2\beta)}{1-\beta}A_{1-\alpha}A_{1-\beta}x^{(1-2\alpha)}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)}P_{\alpha,\beta-1}\psi_3{}''-yA_{1-\alpha}A_{1-\beta}x^{(1-2\alpha)}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)}P_{\alpha,\beta}\psi_3{}''+$$

$$+4yA_{1-\alpha}A_{1-\beta}x^{(1-2\alpha)}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)}P_{\alpha,\beta-1}\psi_3{}''-\frac{2y}{3(1-\beta)}A_{1-\alpha}A_{1-\beta}x^{(1-2\alpha)}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)}P_{\alpha,\beta-1}\psi_3{}''+$$

$$+\frac{3}{4}A_{1-\alpha}A_{1-\beta}(1-2\beta)(6\beta-1)x^{(1-2\alpha)}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)-2}P_{\alpha,\beta}\psi_3-$$

$$-\frac{2y(6\beta-1)}{3(1-\beta)}A_{1-\alpha}A_{1-\beta}x^{(1-2\alpha)}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)-2}P_{\alpha,\beta-1}\psi_3{}''+$$

$$+2\alpha yA_{1-\alpha}A_{1-\beta}(1-2\beta)x^{(1-2\alpha)-2}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)}P_{\alpha,\beta}\psi_3+$$

$$+\frac{4\alpha y}{1-\beta}A_{1-\alpha}A_{1-\beta}x^{(1-2\alpha)}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)}P_{\alpha-1,\beta}\psi_3{}''=0.$$

Теорема 1.1.7 доказана.

1.1.2. Решение задач типа Коши

Теперь некоторые из этих полученных интегральных представлений используются для решения задачи типа Коши.

Задача $K_{1.1.1}$**.** Требуется найти регулярное решение уравнения (1.1.1) в области D^- при $2\alpha\geq 1$ и $2\beta\geq 1,$ удовлетворяющее следующим начальным условиям

$$\lim_{y\to -0} U(x;y)=g_1(x), \qquad \lim_{y\to -0}\frac{\partial U}{\partial y}=0, \qquad (K_{1.1.1})$$

где $g_1(x)$- заданная непрерывная функция на интервале $0<x<1$.

Для решения задачи $K_{1.1.1}$ используется интегральное представление решения (1.1.3). Из (1.1.3) с учётом условий $(K_{1.1.1})$ получим:

$$A_\mu \int_0^1 \frac{\psi_1[x(1-2\sigma)]}{[\sigma(1-\sigma)]^{1-\alpha}} d\tau = g_1(x),$$

здесь $A_\mu = \dfrac{1}{\mathrm{B}(\alpha;\alpha)}$, $\mathrm{B}(\alpha;\alpha)$- функция Эйлера второго рода.

В последнем равенстве выполним следующую подстановку:

$$x(1-2\sigma)=\eta, \quad 1-2\sigma=\frac{\eta}{x}, \quad \sigma=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\eta}{x}\right), \quad 1-\sigma=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\eta}{x}\right),$$

$$1)\ \sigma=0,\ \eta=x, \quad 2)\ \sigma=1,\ \eta=-x, \quad d\sigma=-\frac{d\eta}{2x}, \quad \sigma(1-\sigma)=\frac{1}{4x^2}\left(x^2-\eta^2\right).$$

Следовательно, получим

$$A_\alpha \int_0^x \frac{\psi_1(\eta)d\eta}{\left(x^2-\eta^2\right)^{1-\alpha}} = 2^{2\alpha-1}x^{2\alpha-1}g_1(x).$$

Обозначим через $k=[\alpha]$- целую часть, $\lambda=[\alpha]$- дробную часть, тогда имеем

$$\int_0^x \psi_1(\eta)\left(x^2-\eta^2\right)^{k+\lambda-1} d\eta = \frac{2^{2\alpha-1}x^{2\alpha-1}}{A_\alpha} g_1(x) \qquad (1.1.10)$$

Равенство (1.1.10) дифференцируем по x, $k-$ раз и после некоторых упрощений получим

$$\int_0^x \psi_1(\eta)\left(x^2-\eta^2\right)^{\lambda-1} d\eta = \underbrace{\frac{2^{2\alpha-1}A_\alpha^{-1}}{2^k(k+\lambda-1)(k+\lambda-2)\ldots(\lambda-1)}\left(\frac{d}{xdx}\right)^k x^{2\alpha-1}g_1(x)}_{\omega(x)}, \qquad (1.1.11)$$

где $\left(\dfrac{d}{xdx}\right)^k = \underbrace{\dfrac{d}{xdx}\cdots\cdots\dfrac{d}{xdx}}_{k-раз}$,

$$\int_0^x \psi_1(\eta)\left(x^2-\eta^2\right)^{\lambda-1} d\eta = \omega(x). \qquad (1.1.12)$$

В равенстве (1.1.12), заменяя x на s, умножая обе части (1.1.12) на

$\dfrac{sds}{\left(x^2-s^2\right)^{\lambda}}$, а затем, интегрируя по s в пределах от 0 до x, получим

$$\int_0^x \psi_1(\eta)d\eta\int_0^s \frac{sds}{\left(x^2-s^2\right)^{\lambda}\left(s^2-\eta^2\right)^{1-\lambda}}=\int_0^x \frac{\omega(s)sds}{\left(x^2-s^2\right)^{\lambda}}.$$

Вычислим внутренний интеграл. Выполняя подстановку $s^2=\eta^2+t\left(x^2-\eta^2\right)$, $2sds=\left(x^2-\eta^2\right)dt$, получим

$$1)\ s=x\quad mo\quad \mathrm{t}=1,\qquad\qquad 2)\ s=\eta\quad mo\quad \mathrm{t}=0,$$

$$\int_0^1 \frac{sds}{\left(x^2-s^2\right)^{\lambda}\left(s^2-\eta^2\right)^{1-\lambda}}=\int_0^1 \frac{\left(x^2-\eta^2\right)/2dt}{\left[(x^2-\eta^2)(1-t)\right]^{\lambda}\left[(x^2-\eta^2)t\right]^{1-\lambda}}=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\left(x^2-\eta^2\right)dt}{t^{1-\lambda}(1-t)^{\lambda}\left(x^2-\eta^2\right)}=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 t^{\lambda-1}(1-t)^{-\lambda}dt=\frac{1}{2}\mathrm{B}(1-\lambda;\lambda);$$

$$\int_0^x \psi_1(\eta)d\eta=\frac{2}{\mathrm{B}(1-\lambda;\lambda)}\int_0^x \frac{\omega(s)sds}{\left(x^2-s^2\right)^{\lambda}},$$

$$\psi_1(x)=\frac{2}{\mathrm{B}(1-\lambda;\lambda)}\frac{d}{\partial x}\int_0^x \frac{\omega(s)sds}{\left(x^2-s^2\right)^{\lambda}},\quad \psi_1(x)=F_1(x), \tag{1.1.13}$$

где

$$F_1(x)=\frac{2^{2\alpha}A_{\alpha}^{-1}\beta^{-1}(1-\lambda;\lambda)A_{\alpha}}{2^k(k+\lambda-1)(k+\lambda-2)\ldots(\lambda-1)}\frac{d}{\partial x}\int_0^x \left(\frac{d}{sds}\right)^k\left[s^{2\alpha}g_1(s)\right]\frac{ds}{\left(x^2-s^2\right)^{\lambda}}.$$

Теорема 1.1.8. *Если $\psi_1\in C^{2+k}$ и $2\alpha\geq 1$, $2\beta\geq 1$. Тогда регулярное решение уравнения (1.1.1), удовлетворяющее начальным условиям $(K_{1.1.1})$ в области D^-, даётся равенством (1.1.3), где ψ_1 определяется из равенства (1.1.13).*

Задача $K_{1.1.2}$. Требуется найти регулярное решение уравнения (1.1.1) при $2\alpha\geq 1$ и $-1<2\beta<0$ в области D^-, удовлетворяющее начальным условиям

$$\lim_{y\to -0} U(x;y)=g_1(x),\qquad \lim_{y\to -0}(-y)^{3\beta-\frac{1}{2}}\frac{\partial U}{\partial y}=g_2(x), \tag{$K_{1.1.2}$}$$

где $g_1(x), g_2(x)$- заданные непрерывные функции на интервале $0<x<1$.

Решение задачи $K_{1.1.2}$. В равенстве (1.1.5), применяя начальные условия $(K_{1.1.2})$, имеем

$$(1+2\beta)A_\alpha\int\limits_0^1\frac{\tilde{\psi}_1[x(1-2\sigma)]}{[\sigma(1-\sigma)]^{1-\alpha}}d\tau=\tilde{g}_1(x),\quad A_\alpha\int\limits_0^1\frac{\tilde{\psi}_2[x(1-2\sigma)]}{[\sigma(1-\sigma)]^{1-\alpha}}d\tau=\tilde{g}_2(x),\qquad(1.1.14)$$

здесь $A_{1+\beta}=\dfrac{1}{B(1+\beta;1+\beta)}$ и $A_{1-\beta}=\dfrac{1}{B(1-\beta;1-\beta)}$.

Аналогично решению задачи $K_{1.1.1}$, обращая равенство (1.1.14), находим:

$$\tilde{\psi}_1(x)=\tilde{F}_1(x),\ \ \tilde{\psi}_2(x)=\tilde{F}_2(x),\qquad(1.1.15)$$

$$\tilde{F}_1(x)=\frac{2^{2\alpha}A_\alpha^{-1}B^{-1}(1-\lambda;\lambda)A_\alpha}{(1+2\beta)2^k(k+\lambda-1)(k+\lambda-2)...(\lambda-1)}\frac{d}{\partial x}\int\limits_0^x\left(\frac{d}{sds}\right)^k\left[s^{2\alpha}\tilde{\psi}_1(s)\right]\frac{ds}{\left(x^2-s^2\right)^\lambda},$$

$$\tilde{F}_2(x)=\frac{2^{2\alpha}A_\alpha^{-1}B^{-1}(1-\lambda;\lambda)A_\alpha}{2^k(k+\lambda-1)(k+\lambda-2)...(\lambda-1)}\frac{d}{\partial x}\int\limits_0^x\left(\frac{d}{sds}\right)^k\left[s^{2\alpha}\tilde{\psi}_1(s)\right]\frac{ds}{\left(x^2-s^2\right)^\lambda}.$$

Теорема 1.1.9. *Если* $\tilde{\psi}_1\in C^{3+k}$ *и* $\tilde{\psi}_2\in C^{2+k}$, *тогда регулярное решение уравнения (1.1.1) при* $2\alpha\geq1,\ -1<2\beta<0$, *удовлетворяющее начальным условиям* $(K_{1.1.2})$ *в области* D^- *даётся равенством (1.1.5), где* $\tilde{\psi}_1,\tilde{\psi}_2$ *определяются из равенства (1.1.15).*

§ 1.2. Интегральные представления и решение задачи типа Коши для вырождающееся дифференциальное уравнения второго порядка первого рода с двумя линиями вырождения

В данном параграфе рассматривается вырождающееся дифференциальное уравнение второго порядка первого рода с двумя линиями вырождения следующего вида:

$$L_\beta u\equiv y\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+x\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{6\beta-1}{2}\left(\frac{x}{y}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{y}{x}\frac{\partial u}{\partial x}\right)=0,\qquad(1.2.1)$$

где β - постоянное число.

Пусть D-конечная область плоскости xoy. Части области D, в которых $y>0$ и $y<0$ соответственно обозначим через D^+ и D^-. Уравнение (1.2.1) рассмотрим в области D^-.

Определение. Регулярным решением уравнения (1.2.1) в области D^- будем называть функцию $u(x,y)$, имеющую непрерывные производные первого и второго порядка в D^-, непрерывную в $\overline{D}^-$ и удовлетворяющую уравнению (1.2.1).

Введём следующий интегральный оператор:

$$P_\beta \varphi_j \equiv \int_0^1 \frac{\psi_j \left[x^3 - y^3 - 2(-xy)^{3/2}(1-2\tau)\right] d\tau}{\left[\tau(1-\tau)\right]^\beta}, \tag{1.2.2}$$

ψ_j $(j=1,2,3)$-произвольные функции.

1.2.1. Интегральные представления решение уравнения (1.2.1).

Теорема 1.2.1. *Пусть* $2\beta \geq 1$ *. Тогда регулярное решение уравнения (1.2.1) в области* D^- *представимо в виде*

$$u(x,y) = A_\beta P_{1-\beta}\psi_1, \tag{1.2.3}$$

где $\psi_1 \in C^2(D^-)$ *- произвольная функция,* $A_\beta = \dfrac{1}{B(\beta,\beta)}$, $B(\beta,\beta)$ *-функция Эйлера второго рода.*

Теорема 1.2.2. *Пусть* $0 < 2\beta < 1$. *Тогда регулярное решение уравнения (1.2.1) в области* D^- *при представимо в виде*

$$u(x,y) = A_\beta P_{1-\beta}\psi_1 + A_{1-\beta}(-xy)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)} P_\beta \psi_2, \tag{1.2.4}$$

где A_β, $A_{1-\beta}$ *- постоянные числа,* $\psi_1, \psi_2 -$ *произвольные функции из класса* $C^2(D^-)$.

Теорема 1.2.3. *Регулярное решение уравнения (1.2.1) в области* D^- *при* $-1 < 2\beta < 0$ *представимо в виде*

$$\begin{aligned} u(x,y) = {} & (1+2\beta)A_{1+\beta}P_{-\beta}\psi_1 - 2A_{1+\beta}(-xy)^{\frac{3}{2}} P_{-\beta}\psi'_1 \cdot (1-2\tau) + \\ & + A_{1-\beta}(-xy)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)} P_\beta \psi_2, \end{aligned} \tag{1.2.5}$$

где $A_{1+\beta}$, $A_{1-\beta} -$ *постоянные число,* $\psi_1, \psi_2 -$ *произвольные функции из классов* $\psi_1 \in C^3(D^-)$ и $\psi_2 \in C^2(D^-)$.

Теоремы 1.2.1 - 1.2.3 доказываются непосредственно, чтобы убедится в этом, ниже приводим доказательство одной из этих теорем.

Доказательство теоремы 1.2.3. В равенстве (1.2.5) применим оператор L_{β}:

$$L_{\beta}u = L_{\beta}\left[(1+2\beta)\mathrm{A}_{1+\beta}P_{-\beta}\psi_1 - 2\mathrm{A}_{1+\beta}(-xy)^{\frac{3}{2}}P_{-\beta}\psi'_1\cdot(1-2\tau)\right]+$$
$$+L_{\beta}\left[\mathrm{A}_{1-\beta}(-xy)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)}P_{\beta}\psi_2\right] = J_1 + J_2.$$

$$J_1 = y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left[(1+2\beta)\mathrm{A}_{1+\beta}P_{-\beta}\psi_1 - 2\mathrm{A}_{1+\beta}(-xy)^{\frac{3}{2}}P_{-\beta}\psi'_1\cdot(1-2\tau)\right]+$$
$$+x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left[(1+2\beta)\mathrm{A}_{1+\beta}P_{-\beta}\psi_1 - 2\mathrm{A}_{1+\beta}(-xy)^{\frac{3}{2}}P_{-\beta}\psi'_1\cdot(1-2\tau)\right]+$$
$$+\frac{6\beta-1}{2}\cdot\frac{x}{y}\frac{\partial u}{\partial y}\left[(1+2\beta)\mathrm{A}_{1+\beta}P_{-\beta}\psi_1 - 2\mathrm{A}_{1+\beta}(-xy)^{\frac{3}{2}}P_{-\beta}\psi'_1\cdot(1-2\tau)\right]+$$
$$\frac{6\beta-1}{2}\cdot\frac{y}{x}\frac{\partial u}{\partial x}\left[(1+2\beta)\mathrm{A}_{1+\beta}P_{-\beta}\psi_1 - 2\mathrm{A}_{1+\beta}(-xy)^{\frac{3}{2}}P_{-\beta}\psi'_1\cdot(1-2\tau)\right]=$$

$$=6\mathrm{A}_{1+\beta}xy(1+2\beta)P_{-\beta}\psi'_1+9\mathrm{A}_{1+\beta}x^4y(1+2\beta)P_{-\beta}\psi''_1-\frac{120\mathrm{A}_{1+\beta}x^4y^4}{1+\beta}P_{-\beta-1}\psi'''_1-$$
$$-18\mathrm{A}_{1+\beta}x^4y(-xy)^{\frac{3}{2}}P_{-\beta}\psi'''_1\cdot(1-2\tau)+72\mathrm{A}_{1+\beta}x^4y^4P_{-\beta-1}\psi'''_1-12\mathrm{A}_{1+\beta}y^4xP_{-\beta}\psi''_1-$$
$$-18\mathrm{A}_{1+\beta}x^2y^5\sqrt{-xy}P_{-\beta}\psi'''_1\cdot(1-2\tau)-6\mathrm{A}_{1+\beta}xy(1+2\beta)P_{-\beta}\psi'_1+9\mathrm{A}_{1+\beta}y^4x(1+2\beta)P_{-\beta}\psi''_1+$$
$$+\frac{120\mathrm{A}_{1+\beta}x^4y^4}{1+\beta}P_{-\beta-1}\psi'''_1-18\mathrm{A}_{1+\beta}y^4x(-xy)^{\frac{3}{2}}P_{-\beta}\psi'''_1\cdot(1-2\tau)-36\mathrm{A}_{1+\beta}x^4y^4P_{-\beta}\psi'''_1+$$
$$+36\mathrm{A}_{1+\beta}x^4y^4P_{-\beta}\psi'''_1+72\mathrm{A}_{1+\beta}x^4y^4P_{-\beta-1}\psi'''_1-12\mathrm{A}_{1+\beta}x^4yP_{-\beta}\psi''_1-$$
$$-18\mathrm{A}_{1+\beta}x^5y^2\sqrt{-xy}P_{-\beta}\psi'''_1\cdot(1-2\tau)+\frac{\mathrm{A}_{1+\beta}xy(6\beta-1)(1+2\beta)}{2}P_{-\beta}\psi'_1-$$
$$-3\mathrm{A}_{1+\beta}xy(6\beta-1)(-xy)^{\frac{3}{2}}P_{-\beta}\psi''_1\cdot(1-2\tau)-3\mathrm{A}_{1+\beta}xy^4(6\beta-1)P_{-\beta}\psi_1''-$$
$$-\frac{3\mathrm{A}_{1+\beta}xy(6\beta-1)(1+2\beta)}{2}P_{-\beta}\psi'_1+3\mathrm{A}_{1+\beta}xy(6\beta-1)(-xy)^{\frac{3}{2}}P_{-\beta}\psi''_1\cdot(1-2\tau)-$$
$$-3\mathrm{A}_{1+\beta}yx^4(6\beta-1)P_{-\beta}\psi_1''=0.$$

Аналогичным образом доказывается, что J_2 также будет решением уравнения (1.2.1). Теорема 1.2.3 доказана.

Некоторые из этих полученных результатов применяются для решения задачи типа Коши в области D^-.

1.2.2. Решение задачи типа Коши

Задача $K_{1.2.1}$. Требуется найти регулярное решение уравнения (1.2.1) в области D^{-} при $2\beta \geq 1$, удовлетворяющее следующим начальным условиям

$$\lim_{y\to -0} u(x,y) = g_1(x), \quad \lim_{y\to -0} \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \qquad (K_{1.2.1})$$

где $g_1(x)$ - заданная непрерывная функция, $\beta -$ постоянное число.

Для решение задачи $K_{1.2.1}$ используем интегральным представлением (1.2.1).

Теорема 1.2.4. *Пусть* $2\beta \geq 1$. *Тогда решение задачи* $K_{1.2.1}$ *даётся формулой*

$$u(x,y) = \frac{1}{B(\beta,\beta)} \int_0^1 \frac{g_1\left[x^3 - y^3 - 2(-xy)^{3/2}(1-2\tau)\right]d\tau}{\left[\tau(1-\tau)\right]^{1-\beta}}, \qquad (1.2.6)$$

в которой $B(\beta,\beta)$ *- функция Эйлера второго рода,* $g_1(x) \in C^2\left(D^{-}\right) \cap C\left(\overline{D}^{-}\right)$.

Теорема 1.2.4 доказывается непосредственно, при этом используем равенство (1.2.3). Легко можно проверить, что равенство (1.2.6) удовлетворяет начальные условию задачи $K_{1.2.1}$ и уравнению (1.2.1).

Задача $K_{1.2.2}$. Требуется найти регулярное решение уравнение (1.2.1) в области D^{-} при $0 < 2\beta < 1$, удовлетворяющее начальным условиям

$$\lim_{y\to -0} u(x,y) = g_1(x), \quad \lim_{y\to -0} x^{\frac{3}{2}(2\beta-1)}(-y)^{3\beta-\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial y} = g_2(x), \qquad (K_{1.2.2})$$

где $g_1(x)$, $g_2(x)$-заданные функции, $\beta -$ постоянное число.

Для решения задачи $K_{1.2.2}$ применяется интегральное представление (1.2.4).

Теорема 1.2.5. *Пусть* $0 < 2\beta < 1$. *Тогда решение задачи* $K_{1.2.2}$ *в области* D^{-} *даётся формулой*

$$\begin{aligned} u(x,y) = {} & \frac{1}{B(\beta,\beta)} \int_0^1 \frac{g_1\left[x^3 - y^3 - 2(-xy)^{3/2}(1-2\tau)\right]d\tau}{\left[\tau(1-\tau)\right]^{1-\beta}} + \\ & + \frac{3}{2(1-2\beta)} \cdot \frac{(-xy)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)}}{B(1-\beta,1-\beta)} \int_0^1 \frac{g_2\left[x^3 - y^3 - 2(-xy)^{3/2}(1-2\tau)\right]d\tau}{\left[\tau(1-\tau)\right]^{\beta}}, \end{aligned} \qquad (1.2.7)$$

$B(\beta,\beta),\ B(1-\beta,1-\beta)$ *- функция Эйлера второго рода, и*
$g_1(x), g_2(x) \in C^2(D^-)\cap C(\overline{D}^-)$.

Для доказательства теоремы 1.2.5 используем результаты теоремы 1.2.2 и равенство (1.2.4).

Задача $K_{1.2.3}$. Требуется найти регулярное решение уравнения (1.2.1) в области D^- при $-1<2\beta<0$, удовлетворяющее начальным условиям вида:

$$\lim_{y\to -0} u(x,y)=\tilde{g}_1(x), \quad \lim_{y\to -0} x^{\frac{3}{2}(2\beta-1)}(-y)^{3\beta-\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial y}=\tilde{g}_2(x), \qquad K_{1.2.3}$$

где $\tilde{g}_1(x)$, $\tilde{g}_2(x)$ - заданные функции, $\tilde{g}_1(x)\in C^3(D^-)\cap C(\overline{D})$, $\tilde{g}_2(x)\in C^2(D^-)\cap C(\overline{D})$, $\beta -$постоянное число.

Применяя теорему 1.2.3 и равенство (1.2.5) доказывается следующая теорема

Теорема 1.2.6. *Пусть* $-1<2\beta<0$. *Тогда решение задачи* $K_{1.2.3}$ *в области* D^- *даётся следующей формулой*

$$\mathrm{u(x,\,y)}=\frac{(1+2\beta)}{B(1+\beta,1+\beta)}\int_0^1\frac{\tilde{g}_1\left[x^3-y^3-2(-xy)^{3/2}(1-2\tau)\right]d\tau}{[\tau(1-\tau)]^{-\beta}}-$$
$$-\frac{2(-xy)^{3/2}}{B(1+\beta,1+\beta)}\int_0^1\frac{\tilde{g}'_1\left[x^3-y^3-2(-xy)^{3/2}(1-2\tau)\right](1-2\tau)d\tau}{[\tau(1-\tau)]^{-\beta}}+$$
$$+\frac{3}{2(1-2\beta)}\cdot\frac{(-xy)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)}}{B(1-\beta,1-\beta)}\int_0^1\frac{\tilde{g}_2\left[x^3-y^3-2(-xy)^{3/2}(1-2\tau)\right]d\tau}{[\tau(1-\tau)]^{\beta}}, \qquad (1.2.8)$$

где $B(1+\beta,1+\beta),\ B(1-\beta,1-\beta)$ *-функции Эйлера второго рода.*

Легко можно убедиться в том, что равенство (1.2.8) удовлетворяет всем начальным условиям задачи $K_{1.2.3}$.

Проверка условий задачи $(K_{1.2.3})$:

1. $\lim_{y\to -0} u(x;y)=\frac{1+2\beta}{\beta(1+\beta:1+\beta)}g_1(x^3)=\frac{1+2\beta}{\beta(1+\beta:1+\beta)}g_1(x^3)\cdot B(1+\beta:1+\beta)=(1+2\beta)g_1(x^3)=g_1(x)$,

2. $\lim_{y\to -0} x^{\frac{3}{2}(2\beta-1)}(-y)^{3\beta-\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{3}{2}(1-2\beta)g_2(x^3)=g_2(x)$.

Пример 1. Рассмотрим функцию $u(x;y)=\int_0^1\frac{\left[x^3-y^3-2(-xy)^{3/2}(1-2\tau)\right]^2 d\tau}{[\tau(1-\tau)]^{1-\beta}}$.

Используя формулы сокращенного умножения, раскроем скобку:

$$
\begin{aligned}
u(x;y) &= \left(x^3-y^3\right)^2\int_0^1\frac{d\tau}{[\tau(1-\tau)]^{1-\beta}} - 4(-xy)^{3/2}\left(x^3-y^3\right)\int_0^1\frac{(1-2\tau)d\tau}{[\tau(1-\tau)]^{1-\beta}} - \\
&- 4x^3y^3\int_0^1\frac{d\tau}{[\tau(1-\tau)]^{1-\beta}} + 16x^3y^3\int_0^1\frac{d\tau}{[\tau(1-\tau)]^{-\beta}}.
\end{aligned}
\tag{1.2.9}
$$

Вычислим вторую слагаемую

$$
4(-xy)^{3/2}\left(x^3-y^3\right)\int_0^1\frac{(1-2\tau)d\tau}{[\tau(1-\tau)]^{1-\beta}} = 4(-xy)^{3/2}\left(x^3-y^3\right)\int_0^1\frac{d[\tau(1-\tau)]}{[\tau(1-\tau)]^{1-\beta}} = \left|[\tau(1-\tau)] = t\right| =
$$

$$
= 4(-xy)^{3/2}\left(x^3-y^3\right)\int_0^1 t^{\beta-1}dt = \frac{4(-xy)^{3/2}\left(x^3-y^3\right)}{\beta}\cdot[\tau(1-\tau)]^{\beta}\Big|_0^1 = 0.
$$

Используя свойства Бета-функции, из равенства (1.2.9) получим:

$$
u(x;y) = B(\beta;\beta)\left(x^6+y^6-6x^3y^3+\frac{8x^3y^3\beta}{2\beta+1}\right).
$$

Из последнего равенства вычислим частные производные до второго порядка по x и y:

$$
\frac{\partial u}{\partial x} = B(\beta;\beta)\left(6x^5-18x^2y^3+\frac{24x^2y^3\beta}{2\beta+1}\right),
$$

$$
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = B(\beta;\beta)\left(30x^4-36xy^3+\frac{48xy^3\beta}{2\beta+1}\right),
$$

$$
\frac{\partial u}{\partial y} = B(\beta;\beta)\left(6y^5-18y^2x^3+\frac{24y^2x^3\beta}{2\beta+1}\right),
$$

$$
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = B(\beta;\beta)\left(30y^4-36yx^3+\frac{48yx^3\beta}{2\beta+1}\right).
$$

Теперь подставляем найденные частные производные в уравнение (1.2.1) и после некоторых упрощений получим

$$
y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{6\beta-1}{2}\left(\frac{x}{y}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{y}{x}\frac{\partial u}{\partial x}\right) =
$$

$$
= B(\beta;\beta)\left(\frac{48yx^4\beta}{2\beta+1}+\frac{48xy^4\beta}{2\beta+1}-36xy^4-36yx^4+\frac{12yx^4\beta(6\beta-1)}{2\beta+1}+\frac{12xy^4\beta(6\beta-1)}{2\beta+1}\right) = 0.
$$

§ 1.3. Интегральные представления и решения задача типа Коши для одного вырождающегося дифференциальных уравнения первого рода с двумя линиями вырождения с сингулярными коэффициентами

В этом параграфе исследуются вырождающиеся дифференциальные уравнения второго порядка первого рода. Для этого уравнения даются интегральные представления решений через произвольные функции, которые в свою очередь применяются для решения задачи типа Коши в характеристической области.

Пусть $D-$конечная область в первом квадранте, ограниченная гладкой кривой Γ с концами в точках $O(0;0)$ и $A(1;0)$, а в четвертом квадранте ограниченна характеристическими уравнения.

Часть области D, в которой $x>0,\ y>0$ обозначим через $D^{+}-$эллиптическую часть и при $x>0,\ y<0$ обозначим через $D^{-}-$гиперболическую часть.

В области D^{-} рассмотрим дифференциальное уравнение вида:

$$L_{\alpha,\beta}u \equiv y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{6\beta-1}{2}\frac{x}{y}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{6\alpha-1}{2}\frac{y}{x}\frac{\partial u}{\partial x}=0, \qquad (1.3.1)$$

где $\alpha,\beta-$ вещественные числа.

Введем следующий интегральный оператор:

$$P_{\alpha,\beta}\varphi_i \equiv A_{\alpha,}B_{\beta}\int_0^1 d\sigma\int_0^1\frac{\psi_i\left[x^{3/2}(1-2\sigma)-(-y)^{3/2}(1-2\tau)\right]d\tau}{[\sigma(1-\sigma)]^{\alpha}[\tau(1-\tau)]^{\beta}}, \quad (i=1,2,3,4.), \qquad (1.3.2)$$

$A_{\alpha}=\dfrac{1}{\mathrm{B}(\alpha,\alpha)}$, $\mathrm{B}(\alpha,\alpha)$-функция Эйлера второго рода.

В дальнейшем при нахождении решений уравнения (1.3.1) используем интегральный оператор (1.3.2).

1.3.1. Интегральные представление решений уравнения (1.3.1)

Теорема 1.3.1. *Пусть* $2\alpha\geq 1,\ 2\beta\geq 1$. *Тогда регулярное решение уравнения (1.3.1) в области* D^{-} *представимо в виде*

$$u(x,y)=A_{\alpha}A_{\beta}P_{1-\alpha,1-\beta}\psi_1, \qquad (1.3.3)$$

где $\mathrm{A}_\alpha A_\beta$ *- постоянные числа,* ψ_1 *– произвольная функция из класса* $C^2(D^-)$ *.*

Теорема 1.3.2. *Регулярное решение уравнения (1.3.1), при* $0<2\alpha<1,\ \ 2\beta\geq 1$ *в области* D^- *представимо в виде*

$$\mathrm{u}(\mathrm{x}\,,\mathrm{y})=\mathrm{A}_\alpha A_\beta P_{1-\alpha,1-\beta}\psi_1+\mathrm{A}_{1-\alpha}A_\beta x^{\frac{3}{2}(1-2\alpha)}P_{\alpha,1-\beta}\psi_2 \tag{1.3.4}$$

где $\mathrm{A}_\alpha,\mathrm{A}_{1-\alpha},A_\beta$*,- постоянные числа,* ψ_1,ψ_2 *-произвольные функции из класса* $C^2\left(D^-\right)$*.*

Теорема 1.3.3. *Регулярное решение уравнения (1.3.1) при* $0<2\beta<1,\ \ 2\alpha\geq 1$ *в области* D^- *представимо в следующем виде*

$$\mathrm{u}(\mathrm{x}\,,\mathrm{y})=\mathrm{A}_\alpha A_\beta P_{1-\alpha,1-\beta}\psi_1+\mathrm{A}_\alpha A_{1-\beta}\left(-y\right)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)}P_{1-\alpha,\,\beta}\psi_2, \tag{1.3.5}$$

где $\mathrm{A}_{1-\alpha}$ *- постоянная число,* ψ_1,ψ_2 *- произвольные функции из класса* $C^2\left(D^-\right)$*.*

Теорема 1.3.4. *Пусть* $0<2\alpha<1,\ \ 0<2\beta<1$*. Тогда регулярное решение уравнения (1.3.1) в области* D^- *представимо в следующем виде*

$$\mathrm{u}(\mathrm{x}\,,\mathrm{y})=\mathrm{A}_\alpha A_\beta P_{1-\alpha,1-\beta}\psi_1+\mathrm{A}_{1-\alpha}A_\beta x^{\frac{3}{2}(1-2\alpha)}P_{\alpha,1-\beta}\psi_2+$$

$$+\mathrm{A}_\alpha A_{1-\beta}\left(-y\right)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)}P_{1-\alpha,\,\beta}\psi_3+\mathrm{A}_{1-\alpha}A_{1-\beta}x^{\frac{3}{2}(1-2\alpha)}\left(-y\right)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)}P_{\alpha,\,\beta}\psi_4, \tag{1.3.6}$$

где $\mathrm{A}_{1-\alpha}A_{1-\beta}$*,- постоянные числа,* $\psi_1,\psi_2,\psi_3,\psi_4$ *- произвольные функции одного аргумента из класса* $C^2(D^-)$*.*

Теорема 1.3.5. *Пусть* $-1<2\alpha<0$ *и* $2\beta\geq 1$*. Тогда регулярное решение уравнения (1.3.1) в области* D^- *представимо в следующем виде*

$$\mathrm{u}(\mathrm{x}\,,\mathrm{y})=\mathrm{A}_{1+\alpha}A_\beta(1+2\alpha)P_{-\alpha,1-\beta}\phi_1+\mathrm{A}_{1+\alpha}A_\beta x^{\frac{3}{2}}P_{-\alpha,1-\beta}\phi'_1\cdot(1-2\sigma)+$$

$$+\mathrm{A}_{1-\alpha}A_\beta x^{\frac{3}{2}(1-2\alpha)}P_{\alpha,1-\beta}\phi_2, \tag{1.3.7}$$

где $\mathrm{A}_{1+\alpha},\mathrm{A}_{1-\alpha}$ *- постоянные числа,* ϕ_1,ϕ_2 *- произвольные функции соответственно из классов* $C^3\left(D^-\right)$ *и* $C^2(D^-)$*.*

Теорема 1.3.6._*Пусть* $2\alpha\geq 1$ *и* $-1<2\beta<0$*. Тогда регулярное решение уравнения (1.3.1) в области* D^- *представимо следующем виде*

$$u(x,y)=A_\alpha A_{1+\beta}(1+2\beta)P_{1-\alpha,-\beta}\phi_1 - A_\alpha A_{1+\beta}(-y)^{\frac{3}{2}}P_{1-\alpha,-\beta}\phi'_1\cdot(1-2\tau)+$$
$$+A_\alpha A_{1-\beta}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\alpha)}P_{1-\alpha,\beta}\phi_2, \qquad (1.3.8)$$

где A_α, $A_{1+\beta}$, $A_{1-\beta}$ *- постоянные числа, ,* ϕ_1,ϕ_2 *- произвольные функции одного аргумента соответственно из классов* $C^3(D^-)$ *и* $C^2(D^-)$ *.*

Теорема 1.3.7. *Пусть* $-1<2\mu<0$ *и* $0<2\nu<1$*. Тогда регулярное решение уравнения (1.3.1) в области* D^- *представимо в следующем виде*

$$u(x,y)=A_{1+\alpha}A_\beta(1+2\alpha)P_{-\alpha,1-\beta}\phi_1 + A_{1+\alpha}A_\beta x^{\frac{3}{2}}P_{-\alpha,1-\beta}\phi'_1\cdot(1-2\sigma)+$$
$$+A_{1+\alpha},A_{1-\beta}(1+2\alpha)(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)}P_{-\alpha,\beta}\phi_2 + A_{1+\alpha}A_{1-\beta}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)}x^{\frac{3}{2}}P_{-\alpha,\beta}\phi'_2\cdot(1-2\sigma)+$$
$$+A_{1-\alpha}A_\beta x^{\frac{3}{2}(1-2\alpha)}P_{\alpha,1-\beta}\phi_3 + A_{1-\alpha}A_{1-\beta}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)}x^{\frac{3}{2}(1-2\alpha)}P_{\alpha,\beta}\phi_4, \qquad (1.3.9)$$

где $\phi_1,\phi_2,\phi_3,\phi_4$ *-произвольные функции соответственно из классы* $\phi_1,\phi_2\in C^3(D^-)$, $\phi_3,\phi_4\in C^2(D^-)$ *.*

Теорема 1.3.8. *Пусть* $0<2\alpha<1$ *и* $-1<2\beta<0$*. Тогда регулярное решение уравнения (1.3.1) в области* D^- *представимо в виде*

$$u(x,y)=A_\alpha A_{1+\beta}(1+2\beta)P_{1-\alpha,-\beta}\phi_1 + A_\alpha A_{1+\beta}(-y)^{\frac{3}{2}}P_{1-\alpha,-\beta}\phi'_1\cdot(1-2\tau)+$$
$$+A_{1-\alpha}A_{1+\beta}(1+2\beta)x^{\frac{3}{2}(1-2\alpha)}P_{\alpha,-\beta}\phi_2 - A_{1-\alpha}A_{1+\beta}(-y)^{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}(1-2\alpha)}P_{\alpha,-\beta}\phi'_2\cdot(1-2\tau)+$$
$$+A_\alpha A_{1-\beta}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)}P_{1-\alpha,\beta}\phi_3 + A_{1-\alpha}A_{1-\beta}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)}x^{\frac{3}{2}(1-2\alpha)}P_{\alpha,\beta}\phi_4, \qquad (1.3.10)$$

где $\phi_1,\phi_2,\phi_3,\phi_4$ *-произвольные функции одного аргумента соответственно из классы:* $\phi_1,\phi_2\in C^3(D^-)$ *и* $\phi_3,\phi_4\in C^2(D^-)$ *.*

Теорема 1.3.9. *Пусть* $-1<2\alpha<0$ *и* $-1<2\beta<0$*. Тогда регулярное решение уравнения (1.3.1) в области* D^- *представимо в следующем виде*

$$u(x,y)=A_{1+\alpha}A_{1-\beta}(1+2\alpha)(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)}P_{-\alpha,\beta}\phi_1 + A_{1+\alpha}A_{1-\beta}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)}x^{\frac{3}{2}}P_{-\alpha,\beta}\phi'_1\cdot(1-2\sigma)+$$
$$+A_{1-\alpha}A_{1+\beta}(1+2\beta)x^{\frac{3}{2}(1-2\alpha)}P_{\alpha,-\beta}\phi_2 - A_{1-\alpha}A_{1+\beta}(-y)^{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}(1-2\alpha)}P_{\alpha,-\beta}\phi'_2\,(1-2\tau)+$$
$$+A_{1-\alpha}A_{1-\beta}x^{\frac{3}{2}(1-2\alpha)}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)}P_{\alpha,\beta}\phi_3, \qquad (1.3.11)$$

где ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 - *произвольные функции соответственно из классы:* $\phi_1, \phi_2 \in C^3\left(D^-\right)$ *и* $\phi_3 \in C^2(D^-)$.

Теперь приведем доказательство одной из перечисленных теорем.

Доказательство теоремы 1.3.9.

В равенстве (1.3.11) применяем оператор $L_{\alpha,\beta}$:

$$L_{\alpha,\beta}u(x;y) = L_{\alpha,\beta}\Big[\mathrm{A}_{1+\alpha}\,\mathrm{A}_{1-\beta}(1+2\alpha)(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)}P_{-\alpha,\beta}\phi_1 +$$

$$+\mathrm{A}_{1+\alpha}\mathrm{A}_{1-\beta}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)}x^{\frac{3}{2}}P_{-\alpha,\beta}\phi'_1\cdot(1-2\sigma)\Big]+$$

$$+L_{\alpha,\beta}\Big[\mathrm{A}_{1-\alpha}\mathrm{A}_{1+\beta}(1+2\beta)x^{\frac{3}{2}(1-2\alpha)}P_{\alpha,-\beta}\phi_2 - \mathrm{A}_{1-\alpha}\mathrm{A}_{1+\beta}(-y)^{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}(1-2\alpha)}P_{\alpha,-\beta}\phi'_2(1-2\tau)\Big]+$$

$$+L_{\alpha,\beta}\Big[\mathrm{A}_{1-\alpha}\mathrm{A}_{1-\beta}x^{\frac{3}{2}(1-2\alpha)}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)}P_{\alpha,\beta}\phi_3\Big] = J_1 + J_2 + J_3;$$

$$L_{\alpha,\beta}J_1 = \mathrm{A}_{1+\alpha}\,\mathrm{A}_{1-\beta}L_{\alpha,\beta}\Big[(1+2\alpha)(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)}P_{-\alpha,\beta}\phi_1 + (-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)}x^{\frac{3}{2}}P_{-\alpha,\beta}\phi'_1\cdot(1-2\sigma)\Big]=$$

$$=\mathrm{A}_{1+\alpha}\,\mathrm{A}_{1-\beta}y\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big[(1+2\alpha)(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)}P_{-\alpha,\beta}\phi_1 + (-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)}x^{\frac{3}{2}}P_{-\alpha,\beta}\phi'_1\cdot(1-2\sigma)\Big]+$$

$$+\mathrm{A}_{1+\alpha}\,\mathrm{A}_{1-\beta}x\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big[(1+2\alpha)(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)}P_{-\alpha,\beta}\phi_1 + (-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)}x^{\frac{3}{2}}P_{-\alpha,\beta}\phi'_1\cdot(1-2\sigma)\Big]+$$

$$+\mathrm{A}_{1+\alpha}\,\mathrm{A}_{1-\beta}\frac{6\beta-1}{2}\frac{x}{y}\frac{\partial}{\partial y}\Big[(1+2\alpha)(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)}P_{-\alpha,\beta}\phi_1 + (-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)}x^{\frac{3}{2}}P_{-\alpha,\beta}\phi'_1\cdot(1-2\sigma)\Big]+$$

$$+\mathrm{A}_{1+\alpha}\,\mathrm{A}_{1-\beta}\frac{6\alpha-1}{2}\frac{y}{x}\frac{\partial}{\partial x}\Big[(1+2\alpha)(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)}P_{-\alpha,\beta}\phi_1 + (-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)}x^{\frac{3}{2}}P_{-\alpha,\beta}\phi'_1\cdot(1-2\sigma)\Big]=$$

$$=\frac{4xy}{3}\mathrm{A}_{1+\alpha}\,\mathrm{A}_{1-\beta}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)}P_{-\alpha,\beta}\phi_1'' + \frac{2y}{3}\mathrm{A}_{1+\alpha}\,\mathrm{A}_{1-\beta}x^{\frac{5}{2}}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)}P_{-\alpha,\beta}\phi_1'''\cdot(1-2\sigma)+$$

$$+\left[\frac{9}{4}(1-2\beta)^2 - \frac{3}{2}(1-2\beta)\right]\mathrm{A}_{1+\alpha}\,\mathrm{A}_{1-\beta}(1+2\alpha)x(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)-2}P_{-\alpha,\beta}\phi_1 -$$

$$-\frac{4xy(1-2\alpha)(1+2\alpha)}{1-\beta}\mathrm{A}_{1+\alpha}\,\mathrm{A}_{1-\beta}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)}P_{-\alpha,\beta-1}\phi_1''-$$

$$-\frac{2xy(1+2\alpha)}{3(1-\beta)}\mathrm{A}_{1+\alpha}\,\mathrm{A}_{1-\beta}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)}P_{-\alpha,\beta-1}\phi_1''-$$

$$- \mathrm{A}_{1+\alpha}\,\mathrm{A}_{1-\beta} xy(1+2\alpha)(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)} P_{-\alpha,\beta}\phi_1'' + 4\mathrm{A}_{1+\alpha}\,\mathrm{A}_{1-\beta} xy(1+2\alpha)(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)} P_{-\alpha,\beta-1}\phi_1'' +$$

$$+\left[\frac{3}{2}(1-2\beta)^2-(1-2\beta)\right]\mathrm{A}_{1+\alpha}\,\mathrm{A}_{1-\beta}(1+2\alpha)x^{\frac{5}{2}}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)-2}P_{-\alpha,\beta}\phi_1' -$$

$$-\frac{8xy(1-2\beta)}{3(1-\beta)}\mathrm{A}_{1+\alpha}\,\mathrm{A}_{1-\beta}x^{\frac{3}{2}}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)}P_{-\alpha,\beta-1}\phi_1'''\cdot(1-2\sigma)-$$

$$-\frac{4xy}{9(1-\beta)}\mathrm{A}_{1+\alpha}\,\mathrm{A}_{1-\beta}x^{\frac{3}{2}}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)}P_{-\alpha,\beta-1}\phi_1'''\cdot(1-2\sigma)-$$

$$-\frac{2xy}{3}\mathrm{A}_{1+\alpha}\,\mathrm{A}_{1-\beta}x^{\frac{3}{2}}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)}P_{-\alpha,\beta}\phi_1'''\cdot(1-2\sigma)-$$

$$-\frac{8xy}{3}\mathrm{A}_{1+\alpha}\,\mathrm{A}_{1-\beta}x^{\frac{3}{2}}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)}P_{-\alpha,\beta-1}\phi_1'''\cdot(1-2\sigma)-$$

$$-\frac{xy(6\alpha-1)}{3}\mathrm{A}_{1+\alpha}\,\mathrm{A}_{1-\beta}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)}P_{-\alpha,\beta}\phi_1''+$$

$$+\frac{3x(6\beta-1)(1-2\beta)}{4}(1+2\alpha)\mathrm{A}_{1+\alpha}\,\mathrm{A}_{1-\beta}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)-2}P_{-\alpha,\beta}\phi_1-$$

$$-\frac{2xy(6\beta-1)}{3(1-\beta)}(1+2\alpha)\mathrm{A}_{1+\alpha}\,\mathrm{A}_{1-\beta}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)}P_{-\alpha,\beta-1}\phi_1''+$$

$$+\frac{(6\beta-1)(1-2\beta)}{2}\mathrm{A}_{1+\alpha}\,\mathrm{A}_{1-\beta}x^{\frac{5}{2}}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)-2}P_{-\alpha,\beta-1}\phi_1'\cdot(1-2\sigma)-$$

$$-\frac{4xy(6\beta-1)}{9(1-\beta)}\mathrm{A}_{1+\alpha}\,\mathrm{A}_{1-\beta}x^{\frac{3}{2}}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)}P_{-\alpha,\beta-1}\phi_1'''\cdot(1-2\sigma)=0.$$

Теперь вычислим $L_{\alpha,\beta}J_2$ и $L_{\alpha,\beta}J_3$:

$$L_{\alpha,\beta}J_2=\mathrm{A}_{1-\alpha}\,\mathrm{A}_{1+\beta}L_{\alpha,\beta}\left[(1+2\beta)x^{\frac{3}{2}(1-2\alpha)}P_{\alpha,-\beta}\phi_2-(-y)^{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}(1-2\alpha)}P_{\alpha,-\beta}\phi'_2\,(1-2\tau)\right]=$$

$$=\mathrm{A}_{1-\alpha}\,\mathrm{A}_{1+\beta}y\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[(1+2\beta)x^{\frac{3}{2}(1-2\alpha)}P_{\alpha,-\beta}\phi_2-(-y)^{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}(1-2\alpha)}P_{\alpha,-\beta}\phi'_2\,(1-2\tau)\right]+$$

$$+\mathrm{A}_{1-\alpha}\,\mathrm{A}_{1+\beta}x\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[(1+2\beta)x^{\frac{3}{2}(1-2\alpha)}P_{\alpha,-\beta}\phi_2-(-y)^{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}(1-2\alpha)}P_{\alpha,-\beta}\phi'_2\,(1-2\tau)\right]+$$

$$+\mathrm{A}_{1-\alpha}\,\mathrm{A}_{1+\beta}\frac{6\beta-1}{2}\frac{x}{y}\frac{\partial}{\partial y}\left[(1+2\beta)x^{\frac{3}{2}(1-2\alpha)}P_{\alpha,-\beta}\phi_2-(-y)^{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}(1-2\alpha)}P_{\alpha,-\beta}\phi'_2\,(1-2\tau)\right]+$$

$$+\mathrm{A}_{1-\alpha}\,\mathrm{A}_{1+\beta}\frac{6\alpha-1}{2}\frac{y}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left[(1+2\beta)x^{\frac{3}{2}(1-2\alpha)}P_{\alpha,-\beta}\phi_2-(-y)^{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}(1-2\alpha)}P_{\alpha,-\beta}\phi'_2\,(1-2\tau)\right]=$$

$$=\left[\frac{9}{4}(1-2\alpha)^2-\frac{3}{2}(1-2\alpha)\right]\mathrm{A}_{1-\alpha}\ \mathrm{A}_{1+\beta}(1+2\beta)yx^{\frac{3}{2}(1-2\alpha)-2}P_{\alpha,-\beta}\phi_2+$$

$$+\frac{4xy(1-2\alpha)(1+2\beta)}{1-\alpha}\mathrm{A}_{1-\alpha}\ \mathrm{A}_{1+\beta}x^{\frac{3}{2}(1-2\alpha)}P_{\alpha-1,-\beta}\phi_2''+$$

$$+\frac{2xy(1+2\beta)}{3(1-\alpha)}\mathrm{A}_{1-\alpha}\ \mathrm{A}_{1+\beta}x^{\frac{3}{2}(1-2\alpha)}P_{\alpha-1,-\beta}\phi_2''+\mathrm{A}_{1-\alpha}\ \mathrm{A}_{1+\beta}xy(1+2\beta)x^{\frac{3}{2}(1-2\alpha)}P_{\alpha,-\beta}\phi_2''-$$

$$-4xy\mathrm{A}_{1-\alpha}\ \mathrm{A}_{1+\beta}(1+2\beta)x^{\frac{3}{2}(1-2\alpha)}P_{\alpha-1,-\beta}\phi_2''-$$

$$-\left[\frac{3}{2}(1-2\alpha)^2-(1-2\beta)\right]\mathrm{A}_{1-\alpha}\ \mathrm{A}_{1+\beta}(-y)^{\frac{3}{2}}yx^{\frac{3}{2}(1-2\alpha)-2}P_{\alpha,-\beta}\phi_2'\cdot(1-2\tau)-$$

$$-\frac{8xy(1-2\alpha)}{3(1-\alpha)}\mathrm{A}_{1-\alpha}\ \mathrm{A}_{1+\beta}(-y)^{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}(1-2\alpha)}P_{\alpha-1,-\beta}\phi_2'''\cdot(1-2\tau)-$$

$$-\frac{4xy}{9(1-\alpha)}\mathrm{A}_{1-\alpha}\ \mathrm{A}_{1+\beta}(-y)^{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}(1-2\alpha)}P_{\alpha-1,-\beta}\phi_2'''\cdot(1-2\tau)-$$

$$-\frac{2xy}{3}\mathrm{A}_{1-\alpha}\ \mathrm{A}_{1+\beta}(-y)^{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}(1-2\alpha)}P_{\alpha,-\beta}\phi_2'''\cdot(1-2\tau)+$$

$$+\frac{8xy}{3}\mathrm{A}_{1-\alpha}\ \mathrm{A}_{1+\beta}(-y)^{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}(1-2\alpha)}P_{\alpha-1,-\beta}\phi_2'''\cdot(1-2\tau)-$$

$$-\frac{4xy}{3}\mathrm{A}_{1-\alpha}\ \mathrm{A}_{1+\beta}x^{\frac{3}{2}(1-2\alpha)}P_{\alpha,-\beta}\phi_2''-\frac{2x}{3}\mathrm{A}_{1-\alpha}\ \mathrm{A}_{1+\beta}(-y)^{\frac{5}{2}}x^{\frac{3}{2}(1-2\alpha)}P_{\alpha,-\beta}\phi_2'''\cdot(1-2\tau)-$$

$$-\frac{xy(6\beta-1)}{3}\mathrm{A}_{1-\alpha}\ \mathrm{A}_{1+\beta}x^{\frac{3}{2}(1-2\alpha)}P_{\alpha,-\beta}\phi_2''+\frac{3y(6\alpha-1)(1-2\alpha)}{4}\mathrm{A}_{1-\alpha}\ \mathrm{A}_{1+\beta}x^{\frac{3}{2}(1-2\alpha)-2}P_{\alpha,-\beta}\phi_2+$$

$$+\frac{2xy(6\alpha-1)(1+2\beta)}{3(1-\alpha)}\mathrm{A}_{1-\alpha}\ \mathrm{A}_{1+\beta}x^{\frac{3}{2}(1-2\alpha)}P_{\alpha-1,-\beta}\phi_2''-$$

$$-\frac{y(6\alpha-1)(1-2\beta)}{2}\mathrm{A}_{1-\alpha}\ \mathrm{A}_{1+\beta}(-y)^{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}(1-2\alpha)-2}P_{\alpha,-\beta}\phi_2'\cdot(1-2\tau)-$$

$$-\frac{4xy(6\alpha-1)}{9(1-\alpha)}\mathrm{A}_{1-\alpha}\ \mathrm{A}_{1+\beta}(-y)^{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}(1-2\alpha)-2}P_{\alpha-1,-\beta}\phi_2'''\cdot(1-2\tau)=0.$$

$$L_{\alpha,\beta} J_3 = L_{\alpha,\beta}\left[\mathrm{A}_{1-\alpha}\mathrm{A}_{1-\beta} x^{\frac{3}{2}(1-2\alpha)}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)} P_{\alpha,\beta}\phi_3\right] = y\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\mathrm{A}_{1-\alpha}\mathrm{A}_{1-\beta} x^{\frac{3}{2}(1-2\alpha)}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)} P_{\alpha,\beta}\phi_3\right]+$$

$$+x\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[\mathrm{A}_{1-\alpha}\mathrm{A}_{1-\beta} x^{\frac{3}{2}(1-2\alpha)}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)} P_{\alpha,\beta}\phi_3\right]+\frac{6\beta-1}{2}\frac{x}{y}\frac{\partial}{\partial y}\left[\mathrm{A}_{1-\alpha}\mathrm{A}_{1-\beta} x^{\frac{3}{2}(1-2\alpha)}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)} P_{\alpha,\nu\beta}\phi_3\right]+$$

$$+\frac{6\alpha-1}{2}\frac{y}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left[\mathrm{A}_{1-\alpha}\mathrm{A}_{1-\beta} x^{\frac{3}{2}(1-2\alpha)}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)} P_{\alpha,\beta}\phi_3\right]=$$

$$=\left[\frac{9}{4}(1-2\alpha)^2-\frac{3}{2}(1-2\alpha)\right]\mathrm{A}_{1-\alpha}\mathrm{A}_{1-\beta} y(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)} x^{\frac{3}{2}(1-2\alpha)-2} P_{\alpha,\beta}\phi_3+$$

$$+\frac{4xy(1-2\alpha)}{1-\alpha}\mathrm{A}_{1-\alpha}\,\mathrm{A}_{1-\beta} x^{\frac{3}{2}(1-2\alpha)}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)} P_{\alpha-1,\beta}\phi_3''+\mathrm{A}_{1-\alpha}\,\mathrm{A}_{1-\beta} xyx^{\frac{3}{2}(1-2\alpha)}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)} P_{\alpha,\beta}\phi_3''-$$

$$-4\mathrm{A}\mathrm{A}_{1-\alpha}\,\mathrm{A}_{1-\beta} xyx^{\frac{3}{2}(1-2\alpha)}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)} P_{\alpha-1,\beta}\phi_3''+\frac{2xy}{3(1-\alpha)}\mathrm{A}_{1-\alpha}\,\mathrm{A}_{1-\beta} x^{\frac{3}{2}(1-2\alpha)}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)} P_{\alpha-1,\beta}\beta_3''-$$

$$+\left[\frac{9}{4}(1-2\beta)^2-\frac{3}{2}(1-2\beta)\right]\mathrm{A}_{1-\alpha}\,\mathrm{A}_{1-\beta} x(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)-2} x^{\frac{3}{2}(1-2\alpha)} P_{\alpha,\beta}\phi_3-$$

$$-\frac{4xy(1-2\beta)}{1-\beta}\mathrm{A}_{1-\alpha}\,\mathrm{A}_{1-\beta} x^{\frac{3}{2}(1-2\alpha)}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)} P_{\alpha,\beta-1}\phi_3''-\mathrm{A}_{1-\alpha}\,\mathrm{A}_{1-\beta} xyx^{\frac{3}{2}(1-2\alpha)}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)} P_{\alpha,\beta}\phi_3''+$$

$$+4\mathrm{A}_{1-\alpha}\,\mathrm{A}_{1-\beta} xyx^{\frac{3}{2}(1-2\alpha)}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)} P_{\alpha,\beta-1}\phi_3''-\frac{2xy}{3(1-\beta)}\mathrm{A}_{1-\alpha}\,\mathrm{A}_{1-\beta} x^{\frac{3}{2}(1-2\alpha)}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)} P_{\alpha,\beta-1}\phi_3''+$$

$$+\frac{3y(1-2\alpha)(6\alpha-1)}{4}\mathrm{A}_{1-\alpha}\,\mathrm{A}_{1-\beta} x^{\frac{3}{2}(1-2\alpha)-2}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)} P_{\alpha,\beta}\phi_3+$$

$$+\frac{3}{4}(1-2\beta)(6\beta-1)\mathrm{x}\mathrm{A}_{1-\alpha}\,\mathrm{A}_{1-\beta} x^{\frac{3}{2}(1-2\alpha)}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)} P_{\alpha,\beta}\phi_3$$

$$+\frac{4xy\alpha}{1-\alpha}\mathrm{A}_{1-\alpha}\,\mathrm{A}_{1-\beta} x^{\frac{3}{2}(1-2\alpha)}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)} P_{\alpha,\beta-1}\phi_3''-$$

$$-\frac{2xy}{3(1-\alpha)}\mathrm{A}_{1-\alpha}\,\mathrm{A}_{1-\beta} x^{\frac{3}{2}(1-2\alpha)}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)} P_{\alpha,\beta-1}\phi_3''+$$

$$-\frac{4xy\beta}{1-\beta}\mathrm{A}_{1-\alpha}\,\mathrm{A}_{1-\beta} x^{\frac{3}{2}(1-2\alpha)}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)} P_{\alpha,\beta-1}\phi_3''+$$

$$+\frac{2xy}{3(1-\beta)}\mathrm{A}_{1-\alpha}\,\mathrm{A}_{1-\beta} x^{\frac{3}{2}(1-2\alpha)}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\beta)} P_{\alpha,\beta-1}\phi_3''=0$$

Теорема 1.3.9 доказана.

Остальные теоремы доказываются аналогичным образом.

Теперь некоторые из этих полученных результатов применяются для решения задачи типа Коши в характеристической области.

1.3.2. Решение задачи типа Коши

Задача $K_{1.3.1}$**.** Требуется найти регулярное решение уравнения (1.3.1) в области D$^-$ при $2\alpha \geq 1$ и $2\beta \geq 1$, удовлетворяющее следующее начальным условиям

$$\lim_{y\to -0} u(x,y) = g_1(x), \qquad \lim_{y\to -0} \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \qquad (K_{1.3.1})$$

где $g_1(x)$ - заданная функция на $0 < x < 1$.

Для решения задачи $K_{1.3.1}$ используем интегральное представление решения (1.3.3). Из (1.3.3) с учетом условий $K_{1.3.1}$ получим:

$$A_\alpha \cdot \int_0^1 \frac{\psi_1\left[x^{3/2}(1-2\sigma)\right]d\tau}{\left[\sigma(1-\sigma)\right]^{1-\alpha}} = g_1(x),$$

здесь $A_\alpha = \dfrac{1}{B(\alpha,\alpha)}$, $B(\alpha,\alpha)-$ функция Эйлера второго рода.

В последнем равенстве выполним следующую подстановку:

$$x^{3/2}(1-2\sigma) = \eta^{3/2}, \quad 1-2\sigma = \frac{\eta^{3/2}}{x^{3/2}}, \quad \sigma = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\eta^{3/2}}{x^{3/2}}\right), \; 1-\sigma = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\eta^{3/2}}{x^{3/2}}\right),$$

$$\sigma = 0, \; \eta_1 = x; \qquad \sigma = 1, \; \eta_2 = -x$$

$$\sigma(1-\sigma) = \frac{1}{4x^3}\left(x^3 - \eta^3\right), \qquad d\sigma = -\frac{3}{4} \cdot \frac{\sqrt{\eta}\, d\eta}{x^{3/2}}.$$

Следовательно, получим

$$3A_\alpha 2^{-2\alpha} x^{\frac{3}{2}(1-2\alpha)} \int_{-x}^{x} \frac{\psi_1(\eta)\sqrt{\eta}\, d\eta}{\left(x^3 - \eta^3\right)^{1-\alpha}} = g_1(x).$$

Отсюда с учётом $\psi_1(-\eta) = \psi_1(\eta)$ получим

$$3A_\alpha \int_0^x \frac{\psi_1(\eta)\sqrt{\eta}\, d\eta}{\left(x^3 - \eta^3\right)^{1-\alpha}} = 2^{2\alpha} x^{\frac{3}{2}(2\alpha-1)} g_1(x).$$

Обозначим через $k = [\alpha]-$ целую часть и $\lambda = \{\alpha\}-$ дробную часть α, тогда имеем

$$\int_0^x \psi_1(\eta)\sqrt{\eta}\left(x^3-\eta^3\right)^{k+\lambda-1}d\eta=\frac{2^{2\alpha-2}x^{\frac{3}{2}(2\alpha-1)}}{3A_\alpha}g_1(x). \qquad (1.3.12)$$

Равенство (1.3.12) дифференцируем по x, k- раз и после некоторых упрощений получим

$$\int_0^x \frac{\psi_1(\eta)\sqrt{\eta}d\eta}{\left(x^3-\eta^3\right)^{1-\lambda}}=\underbrace{\frac{A_\alpha^{-1}2^{2\alpha}}{3^{k+1}(k+\lambda-1)(k+\lambda-2)....(\lambda-1)}\left(\frac{d}{x^2dx}\right)^k x^{\frac{3}{2}(2\alpha-1)}g_1(x)}_{\omega(x)},$$

где $\left(\frac{d}{x^2dx}\right)^k=\underbrace{\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}..........\left(\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\right)}_{k-раз},$

$$\int_0^x \frac{\psi_1(\eta)\sqrt{\eta}d\eta}{\left(x^3-\eta^3\right)^{1-\lambda}}=\omega(x). \qquad (1.3.13)$$

В равенства (1.3.13), заменяя x на s и умножая обе части (1.3.13) на $\frac{s^2ds}{\left(x^3-s^3\right)^\lambda}$, затем интегрируя по s в пределах от 0 до x получим

$$\int_0^1 \psi_1(\eta)\sqrt{\eta}d\eta\int_\eta^x \frac{s^2ds}{\left(s^3-\eta^3\right)^{1-\lambda}\left(x^3-s^3\right)^\lambda}=\int_0^x \frac{\omega(x)s^2ds}{\left(x^3-s^3\right)^\lambda}.$$

Вычислим внутренний интеграл, выполняя подстановку $s^3=\eta^3+t\left(x^3-\eta^3\right)$, $s^2ds=\frac{1}{3}\left(x^3-\eta^3\right)dt.$ 1) $s=x,\ \ t=1,$ 2) $s=\eta,\ \ t=0$:

$$\int_\eta^x \frac{s^2ds}{\left(s^3-\eta^3\right)^{1-\lambda}\left(x^3-s^3\right)^\lambda}=\frac{1}{3}\int_0^1 \frac{\left(x^3-s^3\right)dt}{t^\lambda(1-t)^{1-\lambda}\left(x^3-s^3\right)^\lambda}=\frac{1}{3}\beta(\lambda:1-\lambda),$$

$$\int_0^1 \psi_1(\eta)\sqrt{\eta}d\eta=\frac{3}{B(\lambda:1-\lambda)}\int_0^x \frac{\omega(x)s^2ds}{\left(x^3-s^3\right)^\lambda},$$

$$\psi_1=\frac{3}{B(\lambda:1-\lambda)\sqrt{x}}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{\omega(x)s^2ds}{\left(x^3-s^3\right)^\lambda},$$

$$\psi_1\left(x^{3/2}\right)=F(x), \qquad (1.3.14)$$

где $F_1(x)=\dfrac{A_\alpha^{-1}\cdot 2^{2\alpha-2}\;B^{-1}(\lambda;1-\lambda)A_\alpha}{3^k(k+\lambda-1)(k+\lambda-2)....(\lambda-1)}\dfrac{d}{dx}\int\limits_0^{x^{3/2}}\left(\dfrac{d}{s^2ds}\right)^k\left[S^{\frac{6\alpha-1}{2}}g_1(s)\right]\dfrac{ds}{\left(x^3-s^2\right)^{\lambda}}$.

Теорема 1.3.10. *Если* $f_1\in C^{2+k}$ *и* $2\mu\geq 1,\,2\nu\geq 1$. *Тогда регулярное решение уравнения (1.3.1), удовлетворяющее начальным условиям* $(K_{1.3.1})$ *в области* D⁻ *, даётся равенством (1.3.3), где* ψ_1 *определяется из равенства (1.3.14).*

Задача $K_{1.3.2}$**.** Требуется найти регулярное решение уравнения (1.3.1) при $2\alpha\geq 1$ и $0<2\beta<1$ в области D⁻, удовлетворяющее следующем начальным условиям

$$\lim_{y\to-0}\mathrm{u}(x,y)=g_1(x),\qquad \lim_{y\to-0}(-y)^{3\beta-\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial y}=g_2(x), \qquad (K_{1.3.2})$$

где $g_1(x), g_2(x)$ - заданные функции на $0<x<1$.

Решение задачи $K_{1.3.2}$**.** Из равенство (1.3.5) с учетом начальных условий ($K_{1.3.2}$**)** получим

$$A_\alpha\cdot\int\limits_0^1\frac{\phi_1\left[x^{3/2}(1-2\sigma)\right]d\tau}{[\sigma(1-\sigma)]^{1-\alpha}}=g_1(x),\quad A_\alpha\cdot\int\limits_0^1\frac{\phi_2\left[x^{3/2}(1-2\sigma)\right]d\tau}{[\sigma(1-\sigma)]^{1-\alpha}}=g_2(x), \qquad (1.3.15)$$

здесь $A_{1-\beta}=\dfrac{1}{B(1-\beta;\,1-\beta)}$.

Аналогично решению задачи $K_{1.3.1}$, обращая равенство (1.3.15), получим

$$\phi_1\left(x^{\frac{3}{2}}\right)=F_1(x),\qquad \phi_2\left(x^{\frac{3}{2}}\right)=F_2(x), \qquad (1.3.16)$$

где $F_1(x)=\dfrac{2\cdot 4^{\alpha-2}B^{-1}(\lambda;1-\lambda)}{3^k(k+\lambda-1)(k+\lambda-2)...(\lambda-1)\lambda}\dfrac{d}{dx}\int\limits_0^{x^{3/2}}\left(\dfrac{d}{s^2ds}\right)^k\left[S^{\frac{3(\alpha-1)}{2}}g_1(s)\right]\left(x^3-\eta^2\right)^{\lambda-1}ds,$

$$F_2(x)=\frac{2\cdot 4^{\alpha-2}B^{-1}(\lambda;1-\lambda)}{3^k(k+\lambda-1)(k+\lambda-2)...(\lambda-1)\lambda}\frac{d}{dx}\int\limits_0^{x^{3/2}}\left(\frac{d}{s^2ds}\right)^k\left[S^{\frac{3(\alpha-1)}{2}}g_2(s)\right]\left(x^3-\eta^2\right)^{\lambda-1}ds.$$

Теорема 1.3.11. *Пусть* $g_1\in C^{2+k}$ *и* $g_2\in C^{1+k}$ *. Тогда регулярное решение уравнения (1.3.1) при* $2\alpha\geq 1$ *и* $0<2\beta<1$, *удовлетворяющее начальным* *условиям $K_{1.3.2}$, даётся равенством (1.3.5), где ϕ_1, ϕ_2 определяются из равенства (1.3.16).*

Задача $K_{1.3.3}$. Требуется найти регулярное решение уравнения (1.3.1) при $2\alpha \geq 1$ и $-1 < 2\beta < 0$ в области D^-, удовлетворяющее следующем начальным условиям

$$\lim_{y \to -0} u(x,y) = \tilde{g}_1(x), \quad \lim_{y \to -0} (-y)^{3\beta - \frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial y} = \tilde{g}_2(x), \qquad (K_{1.3.3})$$

где $\tilde{g}_1(x), \tilde{g}_2(x)$ - заданные непрерывные функции на интервале $0 < x < 1$.

Решение задачи $K_{1.3.3}$. В равенстве (1.3.8), применяя начальные условия ($K_{1.3.3}$), имеем

$$(1+2\beta)\int_0^1 \frac{\tilde{\phi}_1\left[x^{3/2}(1-2\sigma)\right]d\tau}{[\sigma(1-\sigma)]^{1-\alpha}} = \tilde{g}_1(x), \quad \int_0^1 \frac{\tilde{\phi}_2\left[x^{3/2}(1-2\sigma)\right]d\tau}{[\sigma(1-\sigma)]^{1-\alpha}} = \tilde{g}_2(x), \qquad (1.3.17)$$

здесь $A_{1+\beta} = \dfrac{1}{B(1+\beta;1+\beta)}$ и $A_{1-\beta} = \dfrac{1}{B(1-\beta;1-\beta)}$.

Аналогично решению задачи $K_{1.3.2}$, обращая равенство (3.1.17), находим:

$$\tilde{\phi}_1\left(x^{\frac{3}{2}}\right) = \tilde{F}_1(x), \quad \tilde{\phi}_2\left(x^{\frac{3}{2}}\right) = \tilde{F}_2(x), \qquad (3.1.18)$$

где $\tilde{F}_1(x) = \dfrac{1}{1+2\beta}F_1(x)$ и $\tilde{F}_2(x) = F_2(x)$, $g_1(x), g_2(x)$ заменяются соответственно на $\tilde{g}_1(x), \tilde{g}_2(x)$.

Теорема 1.3.12. *Пусть $\tilde{g}_1 \in C^{3+k}$ и $\tilde{g}_2 \in C^{2+k}$. Тогда регулярное решение уравнения (1.3.1) при $2\alpha \geq 1$ и $-1 < 2\beta < 0$, удовлетворяющее начальным условиям $(K_{1.3.3})$, даётся равенством (1.3.17), где $\tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_2$ определяются из равенства (1.3.18).*

§ 1.4. Интегральные представления и решение задач типа Коши для некоторых вырождающихся дифференциальных уравнений первого рода на плоскости

В данном параграфе обобщаются некоторые ранее полученных результатов в плоском случае.

Рассмотрим уравнения

$$(-y)^m U_{xx} - U_{yy} + \frac{m}{2(m+1)y} U_y = 0, \tag{1.4.1}$$

$$(-y)^m U_{xx} - U_{yy} - \frac{a}{y} U_y = 0, \ (y<0) \tag{1.4.2}$$

где m и a -постоянные числа.

Пусть $D^- -$область, ограниченная интервалом $(0;1)$ оси x и характеристиками $x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 0,\ x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 1,$ входящими соответственно из точек $O(0;0)$ и $A(1;0)$, пересекающимся в точке $C\left(\frac{1}{2};-\left(\frac{m+2}{4}\right)^{\frac{2}{m+2}}\right)$.

В [64] исследовано уравнения (1.4.2) при $a=0$ т.е. доказано корректность задачи Коши и найдено явное решение.

1.4.1. Интегральные представления уравнений (1.4.1) и (1.4.2)

Целью настоящего пункта является получение решения уравнений (1.4.1) и (1.4.2) в явном виде для различных значений m и a.

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 1.4.1. *Регулярное решение уравнения (1.4.1) в области D^- при $0<\alpha<1$ представимо в виде*

$$\begin{aligned} U(x,y) = A_m \int_0^1 \frac{\varphi_1\left[x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right]dt}{[\tau(1-\tau)]^{1-\alpha}} + \\ + B_m y^{\frac{m+2}{2(m+1)}} \int_0^1 \frac{\varphi_2\left[x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right]dt}{[\tau(1-\tau)]^{\alpha}}, \end{aligned} \tag{1.4.3}$$

где φ_1, φ_2 произвольные функции одного аргумента, $A_m = \frac{1}{B\left(\frac{m}{2(m+1)}, \frac{m}{2(m+1)}\right)}$, $\alpha = \frac{m}{2(m+1)},\ B_m = \frac{1}{B\left(\frac{m+2}{2(m+1)}, \frac{m+2}{2(m+1)}\right)}$ -функция Эйлера.

Доказательство. Найдем частные производные до второго порядка по x и y от равенство (1.4.3) и после некоторых упрощений, подставляя их в уравнение (1.4.1), получим:

$$(-y)^m U_{xx} - U_{yy} - \frac{m}{2(m+1)y}U_y = A_m(-y)^m \int_0^1 \frac{\varphi_1''\left[x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right]dt}{[\tau(1-\tau)]^{1-\alpha}} +$$

$$+B_m(-y)^m y^{\frac{m+2}{2(m+1)}} \int_0^1 \frac{\varphi_2''\left[x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right]dt}{[\tau(1-\tau)]^{\alpha}} -$$

$$-\frac{4(m+1)}{m+2}(-y)^m \int_0^1 \frac{\varphi_1''\left[x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right]dt}{[\tau(1-\tau)]^{\alpha}} -$$

$$-(-y)^m \int_0^1 \frac{\varphi_1''\left[x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right]dt}{[\tau(1-\tau)]^{1-\alpha}} +$$

$$+4(-y)^m \int_0^1 \frac{\varphi''\left[x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right]dt}{[\tau(1-\tau)]^{1-\alpha}} +$$

$$+\frac{m(m+2)}{4(m+1)^2} y^{\frac{m+2}{2(m+1)}-2} \int_0^1 \frac{\varphi_2\left[x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right]dt}{[\tau(1-\tau)]^{\alpha}} +$$

$$+\frac{8}{m+2}(-y)^{m+1} y^{\frac{m+2}{2(m+1)}-1} \int_0^1 \frac{\varphi_2''\left[x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right]dt}{[\tau(1-\tau)]^{\alpha-1}} -$$

$$-\frac{4m(m+1)}{(m+2)^2}(-y)^m y^{\frac{m+2}{2(m+1)}} \int_0^1 \frac{\varphi_2''\left[x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right]dt}{[\tau(1-\tau)]^{\alpha-1}} -$$

$$-(-y)^m y^{\frac{m+2}{2(m+1)}} \int_0^1 \frac{\varphi_2''\left[x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right]dt}{[\tau(1-\tau)]^{\alpha}} +$$

$$+4(-y)^m y^{\frac{m+2}{2(m+1)}} \int_0^1 \frac{\varphi_2''\left[x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right]dt}{[\tau(1-\tau)]^{\alpha-1}} -$$

$$-\frac{4}{m+2}(-y)^m \int_0^1 \frac{\varphi_1''\left[x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right]dt}{[\tau(1-\tau)]^{\alpha}} -$$

$$-\frac{m(m+2)}{4(m+1)^2 y} y^{\frac{m+2}{2(m+1)}-1} \int_0^1 \frac{\varphi_2\left[x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right]dt}{[\tau(1-\tau)]^{\alpha}} -$$

$$-\frac{4m}{(m+2)^2}(-y)^m y^{\frac{m+2}{2(m+1)}} \int_0^1 \frac{\varphi_2''\left[x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right]dt}{[\tau(1-\tau)]^{\alpha-1}} =$$

$$=\left(4-\frac{m(m+2)}{2(m+1)}\cdot\frac{8(m+1)}{m(m+2)}\right)(-y)^m \int_0^1 \frac{\varphi_1''\left[x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau t)\right]dt}{[\tau(1-\tau)]^{\alpha}} +$$

$$+(-y)^m y^{\frac{m+2}{2(m+1)}}\left(-\frac{8}{m+2}-\frac{4m(m+1)}{(m+2)^2}-\frac{4m}{(m+2)^2}+4\right)\int_0^1 \frac{\varphi_2''\left[x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right]dt}{[\tau(1-\tau)]^{\alpha-1}}=$$

$$=(-y)^m y^{\frac{m+2}{2(m+1)}}\left(\frac{4m^2+16m+16-4m^2-16m-16}{(m+2)^2}\right)\int_0^1 \frac{\varphi_2''\left[x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right]dt}{[\tau(1-\tau)]^{\alpha-1}}=0.$$

Теорема 1.4.1 доказана.

Теорема 1.4.2. *Пусть* $\frac{m+2a}{2(m+2)}>1,\ \left(a>\frac{m}{2}+2\right)$. *Тогда регулярное решение уравнения (1.4.2) в области* D^- *представимо в виде*

$$U(x,y)=A_{m,a}\int_0^1 \frac{\varphi\left[x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right]dt}{[\tau(1-\tau)]^{1-\beta}}, \qquad (1.4.4)$$

где φ *-произвольная функция,* $A_{m,a}=\frac{1}{B\left(\frac{m+2a}{2(m+2)};\frac{m+2a}{2(m+2)}\right)}$, $\beta=\frac{m+2a}{2(m+2)}$, B *-функция Эйлера второго рода.*

Теорема 1.4.2 доказывается аналогично теореме 1.4.1.

Теорема 1.4.3. *Пусть* $0<\beta<1,\ a<1$. *Тогда регулярное решение уравнения (1.4.2) в области* D^- *представимо в виде*

$$U(x,y)=A_{m,a}\int_0^1 \frac{\varphi\left[x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right]dt}{[\tau(1-\tau)]^{1-\beta}}+B_{m,a}(-y)^{1-a}\int_0^1 \frac{\psi\left[x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right]dt}{[\tau(1-\tau)]^{\beta}}, \qquad (1.4.5)$$

где φ *и* ψ *-произвольные функции одного аргумента,* $A_{m,a}=\frac{1}{B\left(\frac{m+2a}{2(m+2)};\frac{m+2a}{2(m+2)}\right)}$,

$B_{m,a}=\frac{1}{B\left(\frac{m+4-2a}{2(m+2)};\frac{m+4-2a}{2(m+2)}\right)}$, $\beta=\frac{m+2a}{2(m+2)}$, B *-функция Эйлера второго рода.*

Доказательство. Первое слагаемое правой части равенства (1.4.5) доказывается аналогично теореме 1.4.1. Найдем частные производные первого и второго порядка по x и y от второго слагаемого равенства (1.4.5) и после некоторых упрощений получим:

$$U_x=B_{m,a}(-y)^{1-a}\int_0^1 \frac{\psi'\left[x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right]dt}{[\tau(1-\tau)]^{\beta}},$$

$$U_{xx}=B_{m,a}(-y)^{1-a}\int_0^1 \frac{\psi''\left[x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right]dt}{[\tau(1-\tau)]^{\beta}},$$

$$U_y = -B_{m,a}(1-a)(-y)^{-a}\int_0^1 \frac{\psi\left[x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right]dt}{[\tau(1-\tau)]^{\beta}} +$$

$$+B_{m,a}(-y)^{\frac{m}{2}}(-y)^{1-a}\int_0^1 \frac{\psi'\left[x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right](1-2\tau)dt}{[\tau(1-\tau)]^{\beta}},$$

$$U_{yy} = -B_{m,a}a(1-a)(-y)^{-a-1}\int_0^1 \frac{\psi\left[x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right]dt}{[\tau(1-\tau)]^{\beta}} -$$

$$-2B_{m,a}(1-a)(-y)^{-a}(-y)^{\frac{m}{2}}\int_0^1 \frac{\psi'\left[x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right](1-2\tau)dt}{[\tau(1-\tau)]^{\beta}} -$$

$$-\frac{m}{2}B_{m,a}(-y)^{\frac{m}{2}-1}(-y)^{1-a}\int_0^1 \frac{\psi'\left[x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2t)\tau\right](1-2\tau)dt}{[\tau(1-\tau)]^{\beta}} +$$

$$+B_{m,a}(-y)^{m}(-y)^{1-a}\int_0^1 \frac{\psi''\left[x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right](1-2\tau)^2 dt}{[\tau(1-\tau)]^{\beta}}.$$

Теперь найденные частные производные после некоторых упрощений подставляем в уравнение (1.4.2) и получим:

$$(-y)^m U_{xx} - U_{yy} - \frac{a}{y}U_y = (-y)^m(-y)^{1-a}\int_0^1 \frac{\psi''\left[x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right]dt}{[\tau(1-\tau)]^{\beta}} +$$

$$+a(1-a)(-y)^{-a-1}\int_0^1 \frac{\psi\left[x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right]dt}{[\tau(1-\tau)]^{\beta}} -$$

$$-\frac{8(1-a)}{(m+2)(1-\beta)}(-y)^m(-y)^{1-a}\int_0^1 \frac{\psi''\left[x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2t)\right]dt}{[t(1-t)]^{\beta-1}} -$$

$$-\frac{2m}{(m+2)(1-\beta)}(-y)^m(-y)^{1-a}\int_0^1 \frac{\psi''\left[x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right]dt}{[\tau(1-\tau)]^{\beta-1}} -$$

$$-(-y)^m(-y)^{1-a}\int_0^1 \frac{\psi''\left[x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right]dt}{[\tau(1-\tau)]^{\beta}} +$$

$$+4(-y)^m(-y)^{1-a}\int_0^1 \frac{\psi''\left[x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right]dt}{[\tau(1-\tau)]^{\beta-1}} -$$

$$-a(1-a)(-y)^{-a-1}\int_0^1 \frac{\psi''\left[x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right]dt}{[\tau(1-\tau)]^{\beta}} -$$

$$-\frac{4a}{(m+2)(1-\beta)}(-y)^m(-y)^{1-a}\int_0^1\frac{\psi''\left[x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right]dt}{[\tau(1-\tau)]^{\beta-1}}=$$

$$=\left(\frac{-8(1-a)-2m-4a}{(m+2)(1-\beta)}+4\right)(-y)^m(-y)^{1-a}\int_0^1\frac{\psi''\left[x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right]dt}{[\tau(1-\tau)]^{\beta-1}}=0.$$

Теорема 1.4.3 доказана.

1.4.2. Решение задач типа Коши

Полученные интегральные представление решений (1.4.3) и (1.4.5) применяем для решения задач типа Коши в характеристической области D^-.

Задача $K_{1.4.1}$. Требуется найти регулярное решение уравнения (1.4.1) в области D^-, удовлетворяющее начальным условиям:

$$\lim_{y\to-0}U(x,y)=g_1(x),\quad \lim_{y\to-0}(-y)^\alpha\frac{\partial U}{\partial y}=g_2(x), \qquad (K_{1.4.1})$$

где $g_1(x)$ и $g_2(x)$–заданные функции на $0<x<1$.

Решение задачи $K_{1.4.1}$. С учетом начальные условии $K_{1.4.1}$ из равенства (1.4.3) находим:

$$\varphi_1(x)=g_1(x),\quad \psi_1(x)=g_2(x), \qquad (1.4.6)$$

Подставляя в равенство (1.4.3) в место $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$ из равенств (1.4.6) соответственно функции $g_1(x)$ и $g_2(x)$, получим явное решение задачи $K_{1.4.1}$.

Задача $K_{1.4..2}$. Требуется найти регулярное решение уравнения (1.4.2) в области D^- удовлетворяющее следующем начальным условиям

$$\lim_{y\to-0}U(x,y)=\tilde{g}_1(x),\quad \lim_{y\to-0}(-y)^a\frac{\partial U}{\partial y}=\tilde{g}_2(x), \qquad (K_{1.4.2})$$

где $\tilde{g}_1(x)$ и $\tilde{g}_2(x)$–заданные функции на $0<x<1$.

Решение задачи $K_{1.4..2}$. Аналогично решению задачи $K_{1.4.1}$, в равенство (1.4.5) используя условия $K_{1.4.2}$, получим:

$$\varphi_2(x)=\tilde{g}_1(x),\quad \psi_2(x)=\tilde{g}_2(x), \qquad (1.4.7)$$

Подставляя из равенств (1.4.7) значения $\varphi_2(x),\ \psi_2(x)$ в (1.4.5), получим явное решение задачи $K_{1.4.2}$.

§ 1.5. Интегральные представления и решение задачи типа Коши для некоторых вырождающихся дифференциальных уравнений первого рода в пространстве

В данном параграфе исследуются вырождающиеся дифференциальные уравнения первого рода.

Рассмотрим в трехмерном пространстве следующие вырождающиеся дифференциальные уравнения первого рода:

$$(-y)^m \Delta u - U_{yy} - \frac{m}{2(m+1)y} U_y = 0, \qquad (1.5.1)$$

$$(-y)^m \Delta u - U_{yy} - \frac{a}{y} U_y = 0, \qquad (1.5.2)$$

где m и a -постоянные числа, $y<0$, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ -оператор Лапласа.

Пусть $D^- \in R^3$-конечная область, ограниченная плоскостью $y=0$ и при $y<0$ характеристическим поверхностям конусом S уравнения (1.5.1) или (1.5.2).

Определение. Регулярным решением уравнения (1.5.1) или (1.5.2) в области D^- будем называть функцию $u(x_1, x_2, y)$, непрерывную в области $\overline{D}^-$ имеющую непрерывные частные производные до второго порядка включительно в области D^- и удовлетворяющую уравнения (1.5.1) или (1.5.2).

Теорема 1.5.1. *Пусть $\beta > 1$. Тогда регулярное решение уравнения (1.5.1) в области D^- представимо в следующем виде*

$$u(x_1, x_2, y) = A_m \int_0^1 \frac{\varphi_1\left[\frac{1}{\sqrt{2}} x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} x_2 - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right]}{[\tau(1-\tau)]^{1-\beta}} d\tau, \qquad (1.5.3)$$

где $\beta = \frac{m}{2(m+1)}$, $A_m = \frac{1}{\mathrm{B}(\beta,\beta)}$, B -функция Эйлера второго рода, φ_1 -произвольная функция и m -постоянное число.

Доказательство. Вычислим частные производные до второго порядка по x_1, x_2 от равенства (1.5.3), подставляя в первом частью уравнения (1.5.1) получим

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = A_m \int_0^1 \frac{\varphi_1''\left[\frac{1}{\sqrt{2}} x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} x_2 - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right]}{[\tau(1-\tau)]^{1-\beta}} d\tau, \qquad (1.5.4)$$

Теперь вычислим частные производные до второго порядка по y от равенство (1.5.3) после некоторых упрощений будем иметь

$$-u_{yy}-\frac{a}{y}u_y=-A_m(-y)^m\int_0^1\frac{\varphi_1''\left[\frac{1}{\sqrt{2}}x_1+\frac{1}{\sqrt{2}}x_2-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right]}{[\tau(1-\tau)]^{1-\beta}}d\tau, \qquad (1.5.5)$$

Подставляя (1.5.4) и (1.5.5) в (1.5.1), убедимся в справедливости теоремы 1.5.1.

Теорема 1.5.2. *Пусть* $0<\beta<1$. *Тогда регулярное решение уравнения (1.5.1) в области* D^- *представимо в следующем виде*

$$u(x_1,x_2,y)=\hat{A}_m\int_0^1\frac{\varphi_1\left[\frac{1}{\sqrt{2}}x_1+\frac{1}{\sqrt{2}}x_2-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right]}{[\tau(1-\tau)]^{1-\beta}}d\tau+$$
$$+\tilde{A}_m(-y)^{\frac{m+2}{2(m+1)}}\int_0^1\frac{\varphi_2\left[\frac{1}{\sqrt{2}}x_1+\frac{1}{\sqrt{2}}x_2-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right]}{[\tau(1-\tau)]^{\beta}}d\tau, \qquad (1.5.6)$$

где $\beta=\frac{m}{2(m+1)}$, $\tilde{A}_m=\frac{1}{\mathrm{B}\left(\frac{m+2}{2(m+1)},\frac{m+2}{2(m+1)}\right)}$, B *-функция Эйлера второго рода,* φ_1,φ_2 *- произвольные функции одного аргумента и* m *-постоянное число.*

Теорема 1.5.2 доказывается аналогично теореме 1.5.1.

Теорема 1.5.3. *Пусть* $\beta>1$. *Тогда регулярное решение уравнения (1.5.2) в области* D^- *представимо в виде*

$$u(x_1,x_2,y)=A_{m,a}\int_0^1\frac{\psi_1\left[\frac{1}{\sqrt{2}}x_1+\frac{1}{\sqrt{2}}x_2-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right]}{[\tau(1-\tau)]^{1-\beta}}d\tau, \qquad (1.5.7)$$

где $\beta=\frac{m+2a}{2(m+2)}$, $A_{m,a}=\frac{1}{\mathrm{B}\left(\frac{m+2a}{2(m+2)},\frac{m+2a}{2(m+2)}\right)}$, B *-функция Эйлера второго рода,* ψ_1 *- произвольная функция и* m *-постоянное число.*

Теорема 1.5.4. *Пусть* $0<\beta<1$. *Тогда регулярное решение уравнения (1.5.2) в области* D^- *представимо в виде*

$$u(x_1,x_2,y)=A_{m,a}\int_0^1\frac{\psi_1\left[\frac{1}{\sqrt{2}}x_1+\frac{1}{\sqrt{2}}x_2-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right]}{[\tau(1-\tau)]^{1-\beta}}d\tau+$$
$$+\tilde{A}_{m,a}(-y)^{1-a}\int_0^1\frac{\psi_2\left[\frac{1}{\sqrt{2}}x_1+\frac{1}{\sqrt{2}}x_2-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right]}{[\tau(1-\tau)]^{\beta}}d\tau, \qquad (1.5.8)$$

где $\beta=\frac{m+2a}{2(m+2)}$, $A_{m,a}=\frac{1}{\mathrm{B}\left(\frac{m+2a}{2(m+2)},\frac{m+2a}{2(m+2)}\right)}$, $\tilde{A}_{m,a}=\frac{1}{\mathrm{B}\left(\frac{m+4-2a}{2(m+2)},\frac{m+4-2a}{2(m+2)}\right)}$, B *-функция Эйлера второго рода,* ψ_1,ψ_2 *-произвольные функции одного аргумента и* m *-постоянное число.*

Доказательство теорем 1.5.3 и 1.5.4 единообразно.

Из равенства (1.5.7) вычислим частные производные до второго порядка по x_1,x_2,y и после некоторых упрощений получим

$$u_{x_1x_1}=\frac{1}{2}A_{m,a}\int_0^1\frac{\psi_1''\left[\frac{1}{\sqrt{2}}x_1+\frac{1}{\sqrt{2}}x_2-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right]}{[\tau(1-\tau)]^{1-\beta}}d\tau+$$

$$+\frac{1}{2}\tilde{A}_{m,a}(-y)^{1-a}\int_0^1\frac{\psi_2''\left[\frac{1}{\sqrt{2}}x_1+\frac{1}{\sqrt{2}}x_2-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right]}{[\tau(1-\tau)]^{\beta}}d\tau,$$

$$u_{x_2x_2}=\frac{1}{2}A_{m,a}\int_0^1\frac{\psi_1''\left[\frac{1}{\sqrt{2}}x_1+\frac{1}{\sqrt{2}}x_2-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right]}{[\tau(1-\tau)]^{1-\beta}}d\tau+$$

$$+\frac{1}{2}\tilde{A}_{m,a}(-y)^{1-a}\int_0^1\frac{\psi_2''\left[\frac{1}{\sqrt{2}}x_1+\frac{1}{\sqrt{2}}x_2-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right]}{[\tau(1-\tau)]^{\beta}}d\tau,$$

$$u_y=A_{m,a}(-y)^{\frac{m}{2}}\int_0^1\frac{\psi_1'\left[\frac{1}{\sqrt{2}}x_1+\frac{1}{\sqrt{2}}x_2-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right](1-2\tau)}{[\tau(1-\tau)]^{1-\beta}}d\tau-$$

$$-\tilde{A}_{m,a}(1-a)(-y)^{-a}\int_0^1\frac{\psi_2\left[\frac{1}{\sqrt{2}}x_1+\frac{1}{\sqrt{2}}x_2-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right]}{[\tau(1-\tau)]^{\beta}}d\tau+$$

$$+\tilde{A}_{m,a}(-y)^{\frac{m}{2}+1-a}\int_0^1\frac{\psi_2'\left[\frac{1}{\sqrt{2}}x_1+\frac{1}{\sqrt{2}}x_2-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right](1-2\tau)}{[\tau(1-\tau)]^{\beta}}d\tau,$$

$$u_{yy}=-\frac{m}{2}A_{m,a}(-y)^{\frac{m}{2}-1}\int_0^1\frac{\psi_1'\left[\frac{1}{\sqrt{2}}x_1+\frac{1}{\sqrt{2}}x_2-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right](1-2\tau)}{[\tau(1-\tau)]^{1-\beta}}d\tau+$$

$$+A_{m,a}(-y)^{m}\int_0^1\frac{\psi_1'\left[\frac{1}{\sqrt{2}}x_1+\frac{1}{\sqrt{2}}x_2-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right](1-2\tau)^2}{[\tau(1-\tau)]^{1-\beta}}d\tau-$$

$$-\tilde{A}_{m,a}a(1-a)(-y)^{-a-1}\int_0^1\frac{\psi_2\left[\frac{1}{\sqrt{2}}x_1+\frac{1}{\sqrt{2}}x_2-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right]}{[\tau(1-\tau)]^{\beta}}d\tau-$$

$$-\tilde{A}_{m,a}\left[2(1-a)+\frac{m}{2}\right](-y)^{\frac{m}{2}-a}\int_0^1\frac{\psi_2'\left[\frac{1}{\sqrt{2}}x_1+\frac{1}{\sqrt{2}}x_2-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right](1-2\tau)}{[\tau(1-\tau)]^{\beta}}d\tau+$$

$$+\tilde{A}_{m,a}(-y)^{m+1-a}\int_0^1\frac{\psi_2''\left[\frac{1}{\sqrt{2}}x_1+\frac{1}{\sqrt{2}}x_2-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right](1-2\tau)^2}{[\tau(1-\tau)]^{\beta}}d\tau.$$

Подставляя последние равенства в (1.5.2), убедимся в справедливости теорем 1.5.3 и 1.5.4.

Теперь полученных результатов применяем для решения задачи типа Коши в характеристической области D^-.

Задача $K_{1.5.1}$. Требуется найти регулярное решение уравнения (1.5.1) в области D^- при $0<\beta<1$, удовлетворяющее следующим начальным условиям:

$$\lim_{y\to -0} u(x_1,x_2,y)=g_1(x_1,x_2), \qquad \lim_{y\to -0}(-y)^\beta \frac{\partial u}{\partial y}=g_2(x_1,x_2), \qquad (K_{1.5.1})$$

где $g_1(x_1,x_2), g_2(x_1,x_2)$- заданные непрерывные функции на части плоскости $y=0$.

Решения задачи $K_{1.5.1}$**.** В равенстве (1.5.6) принимаем условия $(K_{1.5.1})$ и получим следующие равенства

$$\lim_{y\to -0} u(x_1,x_2,y)=\varphi_1\left[\frac{1}{\sqrt{2}}x_1+\frac{1}{\sqrt{2}}x_2\right]=g_1(x_1,x_2),$$

$$\lim_{y\to -0}(-y)^\beta \frac{\partial u}{\partial y}=\varphi_2\left[\frac{1}{\sqrt{2}}x_1+\frac{1}{\sqrt{2}}x_2\right]=g_2(x_1,x_2).$$

Теорема 1.5.5. *Пусть* $0<\beta<1$. *Тогда единственное решение задачи* $K_{1.5.1}$ *в области* D^- *даётся формулой*

$$u(x_1,x_2,y)=A_m\int_0^1 \frac{g_1\left[\frac{1}{\sqrt{2}}x_1+\frac{1}{\sqrt{2}}x_2-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right]}{[\tau(1-\tau)]^{1-\beta}}d\tau+$$

$$+\tilde{A}_m(-y)^{\frac{m+2}{2(m+1)}}\int_0^1 \frac{g_2\left[\frac{1}{\sqrt{2}}x_1+\frac{1}{\sqrt{2}}x_2-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right]}{[\tau(1-\tau)]^{\beta}}d\tau,$$

где g_1 *и* g_2 *- заданные непрерывные функции на частью плоскости* $y=0$.

Задача $K_{1.5.2}$. Требуется найти регулярное решение уравнения (1.5.2) в области D^- при $a<1$, $0<\beta<1$, удовлетворяющее начальным условиям

$$\lim_{y\to -0} u(x_1,x_2,y)=g_1(x_1,x_2), \qquad \lim_{y\to -0}(-y)^a \frac{\partial u}{\partial y}=g_2(x_1,x_2), \qquad (K_{1.5.2})$$

где $g_1(x_1,x_2), g_2(x_1,x_2)$- заданные непрерывные функции на части плоскости $y=0$.

Решение задачи $K_{1.5.2}$**.** С учетом условий $(K_{1.5.2})$ из равенства (1.5.8) находим:

$$\lim_{y\to -0} u(x_1,x_2,y)=\psi_1\left[\frac{1}{\sqrt{2}}x_1+\frac{1}{\sqrt{2}}x_2\right]=g_1(x_1,x_2),$$

$$\lim_{y\to -0}(-y)^a\frac{\partial u}{\partial y}=\psi_2\left[\frac{1}{\sqrt{2}}x_1+\frac{1}{\sqrt{2}}x_2\right]=(a-1)g_2(x_1,x_2). \quad (1.5.9)$$

С учетом условий (1.5.9) решение задачи $K_{1.5.2}$ найдено в явном виде

$$u(x_1,x_2,y)=A_{m,a}\int_0^1\frac{g_1\left[\frac{1}{\sqrt{2}}x_1+\frac{1}{\sqrt{2}}x_2-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right]}{[\tau(1-\tau)]^{1-\beta}}d\tau+$$
$$+\widetilde{A}_{m,a}(-y)^{1-a}\int_0^1\frac{g_2\left[\frac{1}{\sqrt{2}}x_1+\frac{1}{\sqrt{2}}x_2-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right]}{[\tau(1-\tau)]^{\beta}}d\tau. \quad (1.5.10)$$

Легко можно проверить, что равенство (1.5.10) удовлетворяет начальную условию $K_{1.5.2}$ и уравнению (1.5.2).

§ 1.6. Интегральные представления и решение задач типа Коши для вырождающихся дифференциальных уравнений первого рода вида Гельмгольца на плоскости и в пространстве

Рассмотрим уравнение

$$(-y)^m u_{xx}-u_{yy}-\frac{2a}{y}u_y-\lambda^2(-y)^m u=0, \quad (y<0), \quad (1.6.1)$$

где $m>0$ и a - постоянное число, $m>0$.

Пусть D^--область, ограниченная интервалом (0;1) оси ox и характеристиками $\sqrt{2}x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}=0$, $\sqrt{2}x+\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}=1$ уравнения (1.6.1), входящими соответственно из точек $O(0;0)$ и $A(1;0)$, пересекающимися в точке $C\left(\frac{1}{2\sqrt{2}};-\left(\frac{m+2}{4}\right)^{\frac{2}{m+2}}\right)$.

1.6.1. Интегральные представления решения уравнения (1.6.1) на плоскости. Целью настоящего пункта является получение интегральные представление решений уравнения (1.6.1) в явном виде.

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1.6.1. *Регулярное решение уравнения (1.6.1) в области* D^- *при* $\beta>1$, $\varphi''-\varphi=0$ *представимо в виде*

$$u(x,y)=A_{m,a}\int_0^1\frac{\psi\left[\lambda\left(\sqrt{2}x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right)\right]dt}{[\tau(1-\tau)]^{1-\beta}}, \quad (1.6.2)$$

где $\varphi -$ *произвольная функция,* $\beta = \dfrac{m+4a}{2(m+2)}$, $A_{m,a} = \dfrac{1}{\mathrm{B}\left(\frac{m+4a}{2(m+2)}, \frac{m+4a}{2(m+2)}\right)} -$ *функция Эйлера.*

Докозательство. Найдем частные производные до второго порядка по x и y от равенства (1.6.2) и после некоторых упрощений подставляем в уравнение (1.6.1) и получим:

$$
\begin{aligned}
&(-y)^m u_{xx} - u_{yy} - \frac{2a}{y} u_y - \lambda^2 (-y)^m u = 2\lambda^2 A_{m,a} (-y)^m \int_0^1 \frac{\psi''\left[\lambda\left(\sqrt{2}x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right)\right]dt}{[\tau(1-\tau)]^{1-\beta}} - \\
&\quad - \frac{2\lambda^2 m}{\beta(m+2)} A_{m,a} (-y)^m \int_0^1 \frac{\psi''\left[\lambda\left(\sqrt{2}x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right)\right]dt}{[\tau(1-\tau)]^{-\beta}} - \\
&\quad - \lambda^2 A_{m,a} (-y)^m \int_0^1 \frac{\psi''\left[\lambda\left(\sqrt{2}x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right)\right]dt}{[\tau(1-\tau)]^{1-\beta}} + \\
&\quad + 4\lambda^2 A_{m,a} (-y)^m \int_0^1 \frac{\psi''\left[\lambda\left(\sqrt{2}x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right)\right]dt}{[\tau(1-\tau)]^{-\beta}} - \\
&\quad - \frac{8a\lambda^2}{\beta(m+2)} A_{m,a} (-y)^m \int_0^1 \frac{\psi''\left[\lambda\left(\sqrt{2}x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right)\right]dt}{[\tau(1-\tau)]^{-\beta}} - \\
&\quad - \lambda^2 A_{m,a} (-y)^m \int_0^1 \frac{\varphi\left[\lambda\left(\sqrt{2}x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2t)\right)\right]dt}{[t(1-t)]^{1-\beta}} =
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \lambda^2 A_{m,a} (-y)^m \int_0^1 \frac{dt}{[\tau(1-\tau)]^{1-\beta}} \left[\psi''\left[\lambda\left(\sqrt{2}x - \tfrac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right)\right] - \psi\left[\lambda\left(\sqrt{2}x - \tfrac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right)\right]\right] + \\
&+ 2\lambda^2 A_{m,a} \left(2 - \frac{m}{\beta(m+2)} - \frac{4a}{\beta(m+2)}\right)(-y)^m \int_0^1 \frac{\psi''\left[\lambda\left(\sqrt{2}x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right)\right]dt}{[\tau(1-\tau)]^{-\beta}} =
\end{aligned}
$$

$$
= 2\lambda^2 A_{m,a} \left(2 - \frac{2m}{m+4a} - \frac{8a}{m+4a}\right)(-y)^m \int_0^1 \frac{\psi''\left[\lambda\left(\sqrt{2}x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right)\right]dt}{[\tau(1-\tau)]^{-\beta}} = 0
$$

Теорема доказана.

Теорема 1.6.2. *Регулярное решение уравнения (1.6.1) в области* D^- *при* $0 < \beta < 1$, $2a < 1$, $\varphi'' - \varphi = 0$, $\psi'' - \psi = 0$ *представимо в виде*

$$
\begin{aligned}
u(x,y) &= A_{m,a} \int_0^1 \frac{\psi\left[\lambda\left(\sqrt{2}x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right)\right]dt}{[\tau(1-\tau)]^{1-\beta}} + \\
&+ B_{m,a} (-y)^{1-2a} \int_0^1 \frac{\psi_1\left[\lambda\left(\sqrt{2}x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right)\right]dt}{[\tau(1-\tau)]^{\beta}},
\end{aligned}
\qquad (1.6.3)
$$

где $\varphi, \psi -$ *произвольные функции одного аргумента,* $\beta = \frac{m+4a}{2(m+2)}$,

$A_{m,a} = \frac{1}{\mathrm{B}\left(\frac{m+4a}{2(m+2)}, \frac{m+4a}{2(m+2)}\right)}$, $B_{m,a} = \frac{1}{\mathrm{B}\left(\frac{m+4-4a}{2(m+2)}, \frac{m+4-4a}{2(m+2)}\right)}$ – *функции Эйлера.*

Теорема 1.6.3. *Регулярное решение уравнения (1.6.1) в области* D^- *при* $-1 < \beta < 0,\ 2a < 1,\ \ \varphi'' - \varphi = 0,\ \psi'' - \psi = 0$ *представимо в виде*

$$u(x,y) = A_{m,a}(-y)^{1-2a} \int_0^1 \frac{\psi\left[\lambda\left(\sqrt{2}x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right)\right]dt}{[\tau(1-\tau)]^{\beta}} +$$
$$+ (1+2\beta)\int_0^1 \frac{\psi_1\left[\lambda\left(\sqrt{2}x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right)\right]dt}{[\tau(1-\tau)]^{-\beta}} -$$
$$- \frac{2\lambda}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} \int_0^1 \frac{\psi'_1\left[\lambda\left(\sqrt{2}x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right)\right](1-2t)dt}{[\tau(1-\tau)]^{-\beta}}, \qquad (1.6.4)$$

где $\varphi, \psi -$ произвольные функции одного аргумента, $\beta = \frac{m+4a}{2(m+2)}$,

$A_{m,a} = \frac{1}{\mathrm{B}\left(\frac{m+4-4a}{2(m+2)}, \frac{m+4-4a}{2(m+2)}\right)}$, $B_{m,a} = \frac{1}{\mathrm{B}\left(\frac{3m+4a+4}{2(m+2)}, \frac{3m+4a+4}{2(m+2)}\right)}$,– функции Эйлера.

Теоремы 1.6.2 и 1.6.3 доказываются аналогично теореме 1.6.1, поэтому приводим доказательство только одной из них.

Доказательство теоремы 1.6.3. Вычислим частные производные до второго порядка по x и y от равенства (1.6.4)

$$U_{xx} = 2\lambda^2(-y)^{1-2a} \int_0^1 \frac{\psi''\left[\lambda\left(\sqrt{2}x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right)\right]dt}{[\tau(1-\tau)]^{\beta}} + 2\lambda^2(1+2\beta)\int_0^1 \frac{\psi_1''\left[\lambda\left(\sqrt{2}x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right)\right]dt}{[\tau(1-\tau)]^{-\beta}} -$$
$$- \frac{4\lambda^3}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} \int_0^1 \frac{\psi_1'''\left[\lambda\left(\sqrt{2}x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right)\right](1-2\tau)dt}{[\tau(1-\tau)]^{-\beta}},$$

$$U_y = -(1-2a)(-y)^{-2a} \int_0^1 \frac{\psi\left[\lambda\left(\sqrt{2}x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right)\right]dt}{[\tau(1-\tau)]^{\beta}} -$$
$$- \frac{4\lambda^2}{(1-\beta)(m+2)}(-y)^{m+2-2a} \int_0^1 \frac{\psi_1''\left[\lambda\left(\sqrt{2}x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right)\right]dt}{[\tau(1-\tau)]^{\beta-1}} -$$
$$- \frac{2\lambda^2}{m+2}(-y)^{m+1} \int_0^1 \frac{\psi_1''\left[\lambda\left(\sqrt{2}x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right)\right]dt}{[\tau(1-\tau)]^{-\beta}},$$

$$U_{yy}=-2a(1-2a)(-y)^{-2a-1}\int_0^1\frac{\psi\left[\lambda\left(\sqrt{2}x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right)\right]dt}{[\tau(1-\tau)]^{\beta}}+$$

$$+\frac{2\lambda^2(m+2-4a)}{(1-\beta)(m+2)}(-y)^{m+1-2a}\int_0^1\frac{\psi''\left[\lambda\left(\sqrt{2}x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right)\right]dt}{[\tau(1-\tau)]^{\beta-1}}+$$

$$+\frac{4\lambda^2(1-2a)}{(1-\beta)(m+2)}(-y)^{m+1-2a}\int_0^1\frac{\psi''\left[\lambda\left(\sqrt{2}x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right)\right]dt}{[\tau(1-\tau)]^{\beta-1}}$$

$$+\lambda^2(-y)^{m+1-2a}\int_0^1\frac{\psi''\left[\lambda\left(\sqrt{2}x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right)\right]dt}{[\tau(1-\tau)]^{\beta}}-$$

$$-4\lambda^2(-y)^{m+1-2a}\int_0^1\frac{\psi_1''\left[\lambda\left(\sqrt{2}x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right)\right]dt}{[\tau(1-\tau)]^{-\beta}}+$$

$$+\frac{2(m+1)\lambda^2}{m+2}(-y)^{m}\int_0^1\frac{\psi_1''\left[\lambda\left(\sqrt{2}x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right)\right]dt}{[t(1-t)]^{-\beta}}-$$

$$-\frac{2\lambda^3}{m+2}(-y)^{m+1+\frac{m}{2}}\int_0^1\frac{\psi_1'''\left[\lambda\left(\sqrt{2}x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right)\right](1-2\tau)dt}{[\tau(1-\tau)]^{-\beta}}.$$

Теперь найденные частные производные подставляем в уравнение (1.6.1) и получим:

$$(-y)^m u_{xx}-u_{yy}-\frac{2a}{y}u_y-\lambda^2(-y)^m u=2\lambda^2(-y)^{m+1-2a}\int_0^1\frac{\psi''\left[\lambda\left(\sqrt{2}x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right)\right]dt}{[\tau(1-\tau)]^{\beta}}+$$

$$+2\lambda^2(1+2\beta)(-y)^m\int_0^1\frac{\psi_1''\left[\lambda\left(\sqrt{2}x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right)\right]dt}{[\tau(1-\tau)]^{-\beta}}-$$

$$-\frac{4\lambda^3}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}\int_0^1\frac{\psi_1'''\left[\lambda\left(\sqrt{2}x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right)\right](1-2\tau)dt}{[\tau(1-\tau)]^{-\beta}}+$$

$$+2a(1-2a)(-y)^{-2a-1}\int_0^1 \frac{\psi\left[\lambda\left(\sqrt{2}x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right)\right]dt}{[\tau(1-\tau)]^{\beta}}-$$

$$-\frac{2\lambda^2(m+2-4a)}{(1-\beta)(m+2)}(-y)^{m+1-2a}\int_0^1 \frac{\psi''\left[\lambda\left(\sqrt{2}x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right)\right]dt}{[\tau(1-\tau)]^{\beta-1}}-$$

$$-\frac{4\lambda^2(1-2a)}{(1-\beta)(m+2)}(-y)^{m+1-2a}\int_0^1 \frac{\psi''\left[\lambda\left(\sqrt{2}x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right)\right]dt}{[\tau(1-\tau)]^{\beta-1}}-$$

$$-\lambda^2(-y)^{m+1-2a}\int_0^1 \frac{\psi''\left[\lambda\left(\sqrt{2}x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right)\right]dt}{[\tau(1-\tau)]^{\beta}}+$$

$$+4\lambda^2(-y)^{m+1-2a}\int_0^1 \frac{\psi''\left[\lambda\left(\sqrt{2}x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right)\right]dt}{[\tau(1-\tau)]^{-\beta}}-$$

$$-\frac{2(m+1)\lambda^2}{m+2}(-y)^{m}\int_0^1 \frac{\varphi''\left[\lambda\left(\sqrt{2}x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2t)\right)\right]dt}{[t(1-t)]^{-\beta}}+$$

$$+\frac{2\lambda^3}{m+2}(-y)^{m+1+\frac{m}{2}}\int_0^1 \frac{\varphi'''\left[\lambda\left(\sqrt{2}x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2t)\right)\right](1-2t)dt}{[t(1-t)]^{-\beta}}-$$

$$-2a(1-2a)(-y)^{-2a-1}\int_0^1 \frac{\psi\left[\lambda\left(\sqrt{2}x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right)\right]dt}{[\tau(1-\tau)]^{\beta}}-$$

$$-\frac{8a\lambda^2}{(1-\beta)(m+2)}(-y)^{m+1-2a}\int_0^1 \frac{\psi''\left[\lambda\left(\sqrt{2}x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right)\right]dt}{[\tau(1-\tau)]^{\beta-1}}-$$

$$-\frac{4a\lambda^2}{m+2}(-y)^{m}\int_0^1 \frac{\psi'\left[\lambda\left(\sqrt{2}x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right)\right]dt}{[\tau(1-\tau)]^{-\beta}}-$$

$$-\lambda^2(-y)^{m+1-2a}\int_0^1 \frac{\psi\left[\lambda\left(\sqrt{2}x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right)\right]dt}{[\tau(1-\tau)]^{\beta}}-$$

$$-\lambda^2(1+2\beta)(-y)^{m}\int_0^1 \frac{\psi_1\left[\lambda\left(\sqrt{2}x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right)\right]dt}{[\tau(1-\tau)]^{-\beta}}+$$

$$+\frac{2\lambda^3}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}\int_0^1 \frac{\psi_1'\left[\lambda\left(\sqrt{2}x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right)\right](1-2\tau)dt}{[\tau(1-\tau)]^{-\beta}}=$$

$$\lambda^2(-y)^{m+1-2a}\int_0^1 \frac{dt}{[\tau(1-\tau)]^{\beta}}[\varphi''[\ ]-\varphi[\ ]]-\frac{2\lambda^3}{m+2}(-y)^{m+\frac{m+2}{2}}\int_0^1 \frac{(1-2\tau)dt}{[\tau(1-\tau)]^{-\beta}}[\psi''-\varphi]+$$

$$+\lambda^2(1+2\beta)(-y)^{m}\int_0^1 \frac{dt}{[\tau(1-\tau)]^{-\beta}}[\psi''-\varphi]=0$$

Теорема доказана.

1.6.2. Решение задач типа Коши. Некоторые из полученных результатов применяем для решения задачи типа Коши в характеристической области D^{-}.

Задача $K_{1.6.1}$. Требуется найти регулярное решение уравнения (1.6.1) в области D^{-} при $0<\beta<1,\ 2a<1,$ удовлетворяющее начальным условиям

$$\lim_{y\to -0} u(x,y)=g_1(\lambda x),\quad \lim_{y\to -0}(-y)^{2a}\frac{\partial u}{\partial y}=g_2(\lambda x), \qquad (K_{1.6.1})$$

где $g_1(\lambda x),\ g_2(\lambda x)$ заданные функции на $0<x<1$.

Решение задачи $K_{1.6.1}$. С учётм начальные условии $(K_{1.6.1})$ из равенство (1.6.3) находим:

$$\varphi(\lambda x)=g_1(\lambda x),\quad \psi(\lambda x)=g_2(\lambda x) \qquad (1.6.5)$$

Подставляя в равенство (1.6.3) в место $\varphi_1(\lambda x), \psi_1(\lambda x)$ из равенства (1.6.5) соответственно функции $g_1(\lambda x)$ и $g_2(\lambda x)$, получим явное решение задачи $K_{1.6.1}$, которое имеет следующий вид:

$$u(x,y)=\frac{1}{\mathrm{B}\left(\frac{m+4a}{2(m+2)},\frac{m+4a}{2(m+2)}\right)}\int_0^1 \frac{g_1\left[\lambda\left(\sqrt{2}x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right)\right]dt}{[\tau(1-\tau)]^{1-\beta}}+$$
$$+\frac{1}{\mathrm{B}\left(\frac{m+4-4a}{2(m+2)},\frac{m+4-4a}{2(m+2)}\right)}(-y)^{1-2a}\int_0^1 \frac{g_2\left[\lambda\left(\sqrt{2}x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2t)\right)\right]dt}{[\tau(1-\tau)]^{\beta}}.$$

1.6.3. Интегральные представления и решение задачи типа Коши в пространстве. В данном пункте исследуется вырождающееся дифференциальное уравнение первого рода вида Гельмгольца в пространстве.

Рассмотрим в трехмерном пространстве следующее вырождающееся дифференциальное уравнение первого рода вида Гельмгольца

$$(-y)^m\Delta u-u_{yy}-\frac{2a}{y}u_y-\lambda^2(-y)^m u=0, \qquad (1.6.6)$$

где m и a - постоянные числа, $y<0,\ \Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}-$ оператор Лапласа.

Пусть $D^{-}\in R^3$ - конечная область, ограниченная частью плоскости $y=0$ и при $y<0$ характеристической поверхностью конуса S уравнения (1.6.6).

Введём следующий интегральный оператор:

$$T_\beta\varphi_i = \int_0^1 \frac{\varphi_i\left[\lambda\left(x_1+x_2-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2t)\right)\right]dt}{[t(1-t)]^\beta},\ (i=1,2).$$

Теорема 1.6.4. *Пусть* $\beta>1$ и $\varphi''-\varphi=0$. Тогда р*егулярное решение уравнения (1.6.6) в области* D^- *представимо в виде*

$$u(x_1,x_2,y)=A_{m,a}\int_0^1 \frac{\varphi_1\left[\lambda\left(x_1+x_2-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2t)\right)\right]dt}{[t(1-t)]^{1-\beta}}, \qquad (1.6.7)$$

где $\beta=\frac{m+4a}{2(m+2)}$, $A_{m,a}=\frac{1}{B\left(\frac{m+4a}{2(m+2)},\frac{m+4a}{2(m+2)}\right)}$, B – функция Эйлера второго рода, φ_1 — произвольная функция и m,a -постоянные числа.

Доказательство. Найдем частные производные до второго порядка по x_1,x_2,y и после некоторых упрощений получим:

$$u_{x_1,x_1}=A_{m,a}\lambda^2\int_0^1 \frac{\varphi_1''\left[\lambda\left(x_1+x_2-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2t)\right)\right]dt}{[t(1-t)]^{1-\beta}},$$

$$u_{x_2,x_2}=A_{m,a}\lambda^2\int_0^1 \frac{\varphi_1''\left[\lambda\left(x_1+x_2-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2t)\right)\right]dt}{[t(1-t)]^{1-\beta}},$$

$$u_y=A_{m,a}\lambda(-y)^{\frac{m}{2}}\int_0^1 \frac{\varphi_1'\left[\lambda\left(x_1+x_2-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2t)\right)\right](1-2t)dt}{[t(1-t)]^{1-\beta}},$$

$$u_{yy}=-\frac{\lambda m}{2}A_{m,a}(-y)^{\frac{m}{2}-1}\int_0^1 \frac{\varphi_1'\left[\lambda\left(x_1+x_2-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2t)\right)\right](1-2t)dt}{[t(1-t)]^{1-\beta}}+$$
$$+A_{m,a}\lambda^2(-y)^m\int_0^1 \frac{\varphi_1''\left[\lambda\left(x_1+x_2-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2t)\right)\right](1-2t)^2dt}{[t(1-t)]^{1-\beta}}.$$

Подставляя найденные производные в уравнение (1.6.6), получим

$$(-y)^m\Delta u-u_{yy}-\frac{2a}{y}u_y-\lambda^2(-y)^m u=2A_{m,a}\lambda^2\int_0^1\frac{\varphi_1''\left[\lambda\left(x_1+x_2-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2t)\right)\right]dt}{[t(1-t)]^{1-\beta}}+$$

$$+\frac{\lambda m}{2}A_{m,a}(-y)^{\frac{m}{2}-1}\int_0^1\frac{\varphi_1'\left[\lambda\left(x_1+x_2-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2t)\right)\right](1-2t)dt}{[t(1-t)]^{1-\beta}}-$$

$$-A_{m,a}\lambda^2(-y)^m\int_0^1\frac{\varphi_1''\left[\lambda\left(x_1+x_2-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2t)\right)\right]dt}{[t(1-t)]^{1-\beta}}+$$

$$+4A_{m,a}\lambda^2(-y)^m\int_0^1\frac{\varphi_1''\left[\lambda\left(x_1+x_2-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2t)\right)\right]dt}{[t(1-t)]^{-\beta}}-$$

$$-\frac{2a}{y}A_{m,a}\lambda(-y)^{\frac{m}{2}}\int_0^1\frac{\varphi_1'\left[\lambda\left(x_1+x_2-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2t)\right)\right](1-2t)dt}{[t(1-t)]^{1-\beta}}-$$

$$-\lambda^2(-y)^m\int_0^1\frac{\varphi_1\left[\lambda\left(x_1+x_2-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2t)\right)\right]dt}{[t(1-t)]^{1-\beta}}=$$

$$=A_{m,a}\lambda^2(-y)^m\int_0^1\frac{dt}{[t(1-t)]^{1-\beta}}[\varphi_1''-\varphi_1]=0$$

Теорема доказана.

Теорема 1.6.5. *Пусть* $0<\beta<1,\ 2a<1,\ \varphi_1''-\varphi_1=0$ и $\varphi_2''-\varphi_2=0$. Тогда *регулярное решение уравнения (1.6.6) в области* D^- *представимо в виде*

$$u(x_1,x_2,y)=A_{m,a}\int_0^1\frac{\varphi_1\left[\lambda\left(x_1+x_2-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2t)\right)\right]dt}{[t(1-t)]^{1-\beta}}+$$

$$+\tilde{A}_{m,a}(-y)^{1-2a}\int_0^1\frac{\varphi_2\left[\lambda\left(x_1+x_2-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2t)\right)\right]dt}{[t(1-t)]^{\beta}},\qquad(1.6.8)$$

где $\beta=\frac{m+4a}{2(m+2)},\ A_{m,a}=\frac{1}{\mathrm{B}\left(\frac{m+4a}{2(m+2)},\frac{m+4a}{2(m+2)}\right)},\ \tilde{A}_{m,a}=\frac{1}{\mathrm{B}\left(\frac{m+4-4a}{2(m+2)},\frac{m+4-4a}{2(m+2)}\right)}$, $\mathrm{B}-$функция Эйлера второго рода, φ_1,φ_2- произвольные функции одного аргумента и m-постоянное число.

Доказательство. Для первого слагаемого равенство (1.6.8) было доказано в теореме 1.6.4, поэтому ее докажем для второго слагаемого.

Вычислим частные производные до второго порядка по x_1,x_2,y из второго слагаемого равенства (1.6.8) и получим

$$u_{x_1,x_1}=+\tilde{A}_{m,a}\lambda^2(-y)^{1-2a}\int_0^1\frac{\varphi''_2\left[\lambda\left(x_1+x_2-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2t)\right)\right]dt}{[t(1-t)]^{\beta}},$$

$$u_{x_2,x_2}=\tilde{A}_{m,a}\lambda^2(-y)^{1-2a}\int_0^1\frac{\varphi''_2\left[\lambda\left(x_1+x_2-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2t)\right)\right]dt}{[t(1-t)]^{\beta}},$$

$$u_y=-\tilde{A}_{m,a}(1-2a)(-y)^{-2a}\int_0^1\frac{\varphi_2\left[\lambda\left(x_1+x_2-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2t)\right)\right]dt}{[t(1-t)]^{\beta}}+$$
$$+\tilde{A}_{m,a}\lambda(-y)^{\frac{m}{2}+1-2a}\int_0^1\frac{\varphi'_2\left[\lambda\left(x_1+x_2-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2t)\right)\right](1-2t)dt}{[t(1-t)]^{\beta}},$$

$$u_{yy}=-\tilde{A}_{m,a}2a(1-2a)(-y)^{-2a-1}\int_0^1\frac{\varphi_2\left[\lambda\left(x_1+x_2-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2t)\right)\right]dt}{[t(1-t)]^{\beta}}-$$
$$-\tilde{A}_{m,a}\lambda\left[2(1-2a)+\frac{m}{2}\right](-y)^{\frac{m}{2}-2a}\int_0^1\frac{\varphi'_2\left[\lambda\left(x_1+x_2-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2t)\right)\right](1-2t)dt}{[t(1-t)]^{\beta}}+$$
$$+\tilde{A}_{m,a}\lambda^2(-y)^{m+1-2a}\int_0^1\frac{\varphi''_2\left[\lambda\left(x_1+x_2-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2t)\right)\right](1-2t)^2dt}{[t(1-t)]^{\beta}}.$$

Подставляя последние равенства в уравнение (1.6.6), убедимся в справедливости теоремы.

Теорема 1.6.6. *Пусть* $-1<\beta<0,\quad \varphi_1''-\varphi_1=0,\ \varphi_2''-\varphi_2=0$. Тогда р*егулярное решение уравнения (1.6.6) в области* D^- *представимо в виде*

$$u(x_1,x_2,y)=A_{m,a}(-y)^{1-2a}\int_0^1\frac{\varphi_1\left[\lambda\left(x_1+x_2-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2t)\right)\right]dt}{[t(1-t)]^{\beta}}+$$
$$+\tilde{A}_{m,a}(1+2\beta)\int_0^1\frac{\varphi_2\left[\lambda\left(x_1+x_2-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2t)\right)\right]dt}{[t(1-t)]^{-\beta}}-$$
$$-\frac{2\lambda}{m+2}\tilde{A}_{m,a}(-y)^{\frac{m+2}{2}}\int_0^1\frac{\varphi'_2\left[\lambda\left(x_1+x_2-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2t)\right)\right](1-2t)dt}{[t(1-t)]^{-\beta}},\qquad(1.6.9)$$

где $\beta=\frac{m+4a}{2(m+2)},\ \tilde{A}_{m,a}=\frac{1}{\mathrm{B}\left(\frac{3m+4+4a}{2(m+2)},\frac{3m+4+4a}{2(m+2)}\right)},\ A_{m,a}=\frac{1}{\mathrm{B}\left(\frac{m+4-4a}{2(m+2)},\frac{m+4-4a}{2(m+2)}\right)}$, $\mathrm{B}-$ *функция Эйлера второго рода,* φ_1,φ_2- *произвольные функции одного аргумента и* m *- постоянное число.*

Доказательство. Первое слагаемое равенства (1.6.9) доказано в предыдущих теорема. Для доказательства теоремы 1.6.6 используем второе и третьего слагаемое равенства (1.6.9).

Из второй и третьей слагаемых равенства (1.6.9) вычислим частные производные до второго порядка по x_1, x_2, y:

$$u_{x_1} = \widetilde{A}_{m,a}\lambda(1+2\beta)\int_0^1 \frac{\varphi'_2\left[\lambda\left(x_1+x_2-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2t)\right)\right]dt}{[t(1-t)]^{-\beta}} -$$

$$-\frac{2\lambda^2}{m+2}\widetilde{A}_{m,a}(-y)^{\frac{m+2}{2}}\int_0^1 \frac{\varphi''_2\left[\lambda\left(x_1+x_2-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2t)\right)\right](1-2t)dt}{[t(1-t)]^{-\beta}},$$

$$u_{x_1x_1} = \widetilde{A}_{m,a}\lambda^2(1+2\beta)\int_0^1 \frac{\varphi''_2\left[\lambda\left(x_1+x_2-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2t)\right)\right]dt}{[t(1-t)]^{-\beta}} -$$

$$-\frac{2\lambda^3}{m+2}\widetilde{A}_{m,a}(-y)^{\frac{m+2}{2}}\int_0^1 \frac{\varphi'''_2\left[\lambda\left(x_1+x_2-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2t)\right)\right](1-2t)dt}{[t(1-t)]^{-\beta}},$$

$$u_{x_2} = \widetilde{A}_{m,a}\lambda(1+2\beta)\int_0^1 \frac{\varphi'_2\left[\lambda\left(x_1+x_2-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2t)\right)\right]dt}{[t(1-t)]^{-\beta}} -$$

$$-\frac{2\lambda^2}{m+2}\widetilde{A}_{m,a}(-y)^{\frac{m+2}{2}}\int_0^1 \frac{\varphi''_2\left[\lambda\left(x_1+x_2-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2t)\right)\right](1-2t)dt}{[t(1-t)]^{-\beta}},$$

$$u_{x_2x_2} = \widetilde{A}_{m,a}\lambda^2(1+2\beta)\int_0^1 \frac{\varphi''_2\left[\lambda\left(x_1+x_2-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2t)\right)\right]dt}{[t(1-t)]^{-\beta}} -$$

$$-\frac{2\lambda^3}{m+2}\widetilde{A}_{m,a}(-y)^{\frac{m+2}{2}}\int_0^1 \frac{\varphi'''_2\left[\lambda\left(x_1+x_2-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2t)\right)\right](1-2t)dt}{[t(1-t)]^{-\beta}},$$

$$u_y = -\frac{2\lambda^2}{m+2}\widetilde{A}_{m,a}(-y)^{m+1}\int_0^1 \frac{\varphi''_2\left[\lambda\left(x_1+x_2-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2t)\right)\right]dt}{[t(1-t)]^{-\beta}},$$

$$u_{yy} = \frac{2\lambda^2(m+1)}{m+2}\widetilde{A}_{m,a}(-y)^{m}\int_0^1 \frac{\varphi''_2\left[\lambda\left(x_1+x_2-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2t)\right)\right]dt}{[t(1-t)]^{-\beta}} -$$

$$-\frac{2\lambda^3}{m+2}\widetilde{A}_{m,a}(-y)^{m+1+\frac{m}{2}}\int_0^1 \frac{\varphi'''_2\left[\lambda\left(x_1+x_2-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2t)\right)\right](1-2t)dt}{[t(1-t)]^{-\beta}}.$$

Подставляя последних равенств в уравнение (1.6.6), получим:

$$(-y)^m\Delta u - u_{yy} - \frac{2a}{y}u_y - \lambda^2(-y)^m u =$$

$$= 2\tilde{A}_{m,a}\lambda^2(1+2\beta)(-y)^m \int_0^1 \frac{\varphi''_2\left[\lambda\left(x_1+x_2-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2t)\right)\right]dt}{[t(1-t)]^{-\beta}} -$$

$$-\frac{4\lambda^3}{m+2}\tilde{A}_{m,a}(-y)^{\frac{m+2}{2}+m}\int_0^1 \frac{\varphi'''_2\left[\lambda\left(x_1+x_2-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2t)\right)\right](1-2t)dt}{[t(1-t)]^{-\beta}} -$$

$$-\frac{2\lambda^2(m+1)}{m+2}\tilde{A}_{m,a}(-y)^m\int_0^1 \frac{\varphi''_2\left[\lambda\left(x_1+x_2-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2t)\right)\right]dt}{[t(1-t)]^{-\beta}} +$$

$$+\frac{2\lambda^3}{m+2}\tilde{A}_{m,a}(-y)^{m+1+\frac{m}{2}}\int_0^1 \frac{\varphi'''_2\left[\lambda\left(x_1+x_2-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2t)\right)\right](1-2t)dt}{[t(1-t)]^{-\beta}} -$$

$$-\frac{4a\lambda^2}{m+2}\tilde{A}_{m,a}(-y)^m\int_0^1 \frac{\varphi''_2\left[\lambda\left(x_1+x_2-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2t)\right)\right]dt}{[t(1-t)]^{-\beta}} -$$

$$-\tilde{A}_{m,a}(1+2\beta)(-y)^m\int_0^1 \frac{\varphi_2\left[\lambda\left(x_1+x_2-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2t)\right)\right]dt}{[t(1-t)]^{-\beta}} +$$

$$+\frac{2\lambda^3}{m+2}\tilde{A}_{m,a}(-y)^{\frac{m+2}{2}+m}\int_0^1 \frac{\varphi'_2\left[\lambda\left(x_1+x_2-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2t)\right)\right](1-2t)dt}{[t(1-t)]^{-\beta}} =$$

$$= 2\tilde{A}_{m,a}\lambda^2(1+2\beta)(-y)^m\int_0^1 \frac{dt}{[t(1-t)]^{-\beta}}[\varphi''_2-\varphi_2] = 0$$

Некоторые полученных результатов применяется для решения задачи типа Коши.

Задача $K_{1.6.2}$**.** Требуется найти регулярное решение уравнения (1.6.6) в области D^- при $2a<1,\ 0<\beta<1,$ удовлетворяющее начальным условиям

$$\lim_{y\to -0} u(x_1,x_2,y) = g_1[\lambda(x_1,x_2)],\quad \lim_{y\to -0}(-y)^{2a}\frac{\partial u}{\partial y} = g_2[\lambda(x_1,x_2)], \qquad (K_{1.6.2})$$

где $g_1[\lambda(x_1,x_2)], g_2[\lambda(x_1,x_2)]$ заданные непрерывные функции на части плоскости $y=0$.

Для решения задачи $K_{1.6.2}$ применяем интегральное представление (1.6.8). С учетом начальных условий $(K_{1.6.2})$ получим

$$\lim_{y\to -0} u(x_1,x_2,y) = \varphi_1[\lambda(x_1+x_2)] = g_1[\lambda(x_1,x_2)],$$

$$\lim_{y\to -0}(-y)^{2a}\frac{\partial u}{\partial y} = \varphi_2[\lambda(x_1+x_2)] = (2a-1)g_2[\lambda(x_1,x_2)]. \qquad (1.6.10)$$

Учитывая равенство (1.6.10), решение задачи $K_{1.6.2}$ найдем в следующем виде:

$$u(x_1,x_2,y)=A_{m,a}\int\limits_0^1\frac{g_1\left[\lambda\left(x_1+x_2-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2t)\right)\right]dt}{[t(1-t)]^{1-\beta}}+$$

$$+\tilde{A}_{m,a}(-y)^{1-2a}\int\limits_0^1\frac{g_2\left[\lambda\left(x_1+x_2-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2t)\right)\right]dt}{[t(1-t)]^{\beta}}. \qquad (1.6.11)$$

Легко можно проверить, что равенства (1.6.11) удовлетворяет начальные условия задачи $(K_{1.6.2})$ и уравнению (1.6.6) в области D^-.

Глава 2. Интегральные представления и решение граничных задач для некоторых вырождающихся дифференциальных уравнений четвёртого порядка первого рода

В этой главе изучаются некоторые вырождающиеся дифференциальные уравнения четвёртого порядка. Для ряда вырождающееся дифференциальных уравнений четвёртого порядка в зависимости от принимаемых значений коэффициентов уравнений получены интегральные представления решения и некоторые из них применяются для решение краевых задач.

§2.1. Интегральные представление и решения задача типов Коши для одного вырождающегося дифференциального уравнения четвёртого порядка с двумя линиями вырождения

Пусть D – конечная область плоскости xoy. Части области D, в которых $y>0$ и $y<0$ соответственно обозначим через D^{+} и D^{-}.

В области D^{-} рассмотрим уравнение вида:

$$\Pi_{a}\left[\frac{(-xy)^{-\frac{4+3\nu-3\alpha}{2}}}{x^{3}+y^{3}}\Pi_{\nu}U\right]=0, \tag{2.1.1}$$

где $\Pi_{\nu}U\equiv y\dfrac{\partial^{2}u}{\partial x^{2}}+x\dfrac{\partial^{2}u}{\partial y^{2}}+\dfrac{6\nu-1}{2}\left(\dfrac{y}{x}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{x}{y}\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)$, a,ν – вещественные числа.

Введём следующий интегральный оператор

$$\mathrm{P}_{\alpha}\varphi_{j}=\int_{0}^{1}\frac{\varphi_{j}\left[x^{3}-y^{3}-2(-xy)^{\frac{3}{2}}(1-2\tau)\right]d\tau}{[\tau(1-\tau)]^{\alpha}},\quad (j=1,2,3,4),,$$

где φ_{j} – произвольные функции.

Теорема 2.1.1. *Если* $\Pi_{\nu}U_{\nu}=0$ *и* $\Pi_{\alpha}U_{\alpha}=0$. *Тогда регулярное решение уравнения (2.1.1) в области* D^{-} *при* $a>\nu$ *представимо в виде*

$$U(x,y)=U_{\nu}(x,y)+(-xy)^{\frac{3}{2}(a-\nu)}U_{a}(x,y), \tag{2.1.2}$$

где U_{ν},U_{a} *– решение уравнения второго порядка.*

Доказательство. В равенстве (2.1.2) применяем оператор Π_{ν}

$$\Pi_{\nu}U(x,y)=\Pi_{\nu}U_{\nu}+\Pi_{\nu}\left[(-xy)^{\frac{3}{2}(\alpha-\nu)}U_{a}\right],$$

По условию теоремы $\Pi_{\nu}U_{\nu}=0$ следовательно, получим

$$\Pi_\nu U(x,y)=\Pi_\nu\left[(-xy)^{\frac{3}{2}(\alpha-\nu)}U_a\right], \qquad (2.1.3)$$

В правой части равенства (2.1.3) вычислим частные производные до второго порядка по x и y

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{3}{2}(\alpha-\nu)y(-xy)^{\frac{3}{2}(\alpha-\nu)-1}U_\alpha+(-xy)^{\frac{3}{2}(\alpha-\nu)}U'_\alpha$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\left[\frac{9}{4}(\alpha-\nu)^2-\frac{3}{2}(\alpha-\nu)\right]y^2(-xy)^{\frac{3}{2}(\alpha-\nu)-2}U_\alpha-3(\alpha-\nu)y(-xy)^{\frac{3}{2}(\alpha-\nu)-1}U'_\alpha+(-xy)^{\frac{3}{2}(\alpha-\nu)}U''_\alpha$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{3}{2}(\alpha-\nu)x(-xy)^{\frac{3}{2}(\alpha-\nu)-1}U_\alpha+(-xy)^{\frac{3}{2}(\alpha-\nu)}U'_\alpha$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\left[\frac{9}{4}(\alpha-\nu)^2-\frac{3}{2}(\alpha-\nu)\right]x^2(-xy)^{\frac{3}{2}(\alpha-\nu)-2}U_\alpha-3(\alpha-\nu)x(-xy)^{\frac{3}{2}(\alpha-\nu)-1}U'_\alpha+(-xy)^{\frac{3}{2}(\alpha-\nu)}U''_\alpha$$

Найденные частные производные подставляем в $\Pi_\nu U$ и после некоторых упрощений получим:

$$\Pi_\nu U=\frac{3}{4}\left[(\alpha-\nu)^2-2(\alpha-\nu)+(6\nu-1)(\alpha-\nu)\right]\left(x^3+y^3\right)(-xy)^{\frac{3}{2}(\alpha-\nu)-2}U_\alpha+$$
$$+(-xy)^{\frac{3}{2}(\alpha-\nu)}\left[yU''_\alpha+xU''_\alpha+\frac{6\alpha-1}{2}\frac{y}{x}U'_\alpha+\frac{6\alpha-1}{2}\frac{x}{y}U'_\alpha\right].$$

По условию теоремы 2.1.1 вторая слагаемая равна нулю.

Теперь $\quad \Pi_\nu U=\frac{9}{4}\left[\alpha(\alpha-1)-\nu(\nu-1)\right]\left(x^3+y^3\right)(-xy)^{\frac{3}{2}(\alpha-\nu)-2}U_\alpha. \qquad (2.1.4)$

Обе части равенства (2.1.4) делим на $\left(x^3+y^3\right)(-xy)^{\frac{3}{2}(\alpha-\nu)-2}$ и имеем

$$\frac{(-xy)^{2-\frac{3}{2}(\alpha-\nu)}}{\left(x^3+y^3\right)}\Pi_\nu U=\frac{9}{4}\left[\alpha(\alpha-1)-\nu(\nu-1)\right]U_\alpha,$$

В последнем равенстве, применяя оператор Π_a, с учётом условий теоремы получим $\quad \Pi_a\left[\frac{(-xy)^{2-\frac{3}{2}(\alpha-\nu)}}{\left(x^3+y^3\right)}\Pi_\nu U\right]=\frac{9}{4}\left[\alpha(\alpha-1)-\nu(\nu-1)\right]\Pi_a U_\alpha=0.$

Теорема доказана.

Теорема 2.1.2. *Пусть* $2\nu\geq 1$, $2a\geq 1$ *и* $a>\nu$ *. Тогда регулярное решение уравнения (2.1.1) в области* D^- *представима в следующем виде*

$$U(x,y)=A_\nu P_{1-\nu}\varphi_1+A_a(-xy)^{\frac{3}{2}(\alpha-\nu)}P_{1-\alpha}\psi_1, \qquad (2.1.5)$$

где φ_1, ψ_1 – *произвольные функции одного аргумента из класса* $C^2(D^-)$ *и* $A_\nu = \dfrac{1}{B(\nu,\nu)}$, $A_a = \dfrac{1}{B(a,a)}$, $B(\nu,\nu)-$ *функция Эйлера второго рода.*

Теорема 2.1.3. *Пусть* $0<2\nu<1,\ \ 2a>1$. *Тогда регулярное решение уравнения (2.1.1) в области* D^- *представима в следующем виде*

$$U(x,y)=A_\nu P_{1-\nu}\varphi_1 + A_{1-\nu}(-xy)^{\frac{3}{2}(1-2\nu)}P_\nu\varphi_2 + A_a(-xy)^{\frac{3}{2}(\alpha-\nu)}P_{1-\alpha}\psi_1, \qquad (2.1.6)$$

где $\varphi_1,\varphi_2,\psi_1$ *-произвольные функции одного аргумента из класса* $C^2(D^-)$.

Теорема 2.1.4. *Пусть* $0<2\nu<1,\ \ 0<2a<1$ *и* $a>\nu$. *Тогда регулярное решение уравнения (2.1.1) в области* D^- *представима в следующем виде*

$$\begin{aligned}U(x,y)&=A_\nu P_{1-\nu}\varphi_1 + A_{1-\nu}(-xy)^{\frac{3}{2}(1-2\nu)}P_\nu\varphi_2 +\\ &+A_a(-xy)^{\frac{3}{2}(\alpha-\nu)}P_{1-\alpha}\psi_1 + A_{1-a}(-xy)^{\frac{3}{2}(1-\alpha-\nu)}P_\alpha\psi_2,\end{aligned} \qquad (2.1.7)$$

где $\varphi_1,\varphi_2,\psi_1,\psi_2$ *-произвольные функции одного аргумента из класса* $C^2(D^-)$.

Теорема 2.1.5. *Пусть* $-1<2\nu<0,\ \ 2a>1$. *Тогда регулярное решение уравнения (2.1.1) в области* D^- *представимо в следующем виде*

$$\begin{aligned}U(x,y)&=(1+2\nu)A_{1+\nu}P_{-\nu}\varphi_1 - 2A_{1+\nu}(-xy)^{\frac{3}{2}}P_{-\nu}\varphi_1'(1-2\tau)+\\ &+A_{1-\nu}(-xy)^{\frac{3}{2}(1-2\nu)}P_\nu\varphi_2 + A_a(-xy)^{\frac{3}{2}(\alpha-\nu)}P_{1-\alpha}\psi_1,\end{aligned} \qquad (2.1.8)$$

где $\varphi_1 \in C^3(D^-)$ *и* $\varphi_2,\psi_1 \in C^2(D^-)$*- произвольные функции одного аргумента.*

Теорема 2.1.6. *Пусть* $-1<2\nu<0,\ \ 0<2a<1$. *Тогда регулярное решение уравнения (2.1.1) в области* D^- *представимо в виде*

$$\begin{aligned}U(x,y)&=(1+2\nu)A_{1+\nu}P_{-\nu}\varphi_1 - 2A_{1+\nu}(-xy)^{\frac{3}{2}}P_{-\nu}\varphi_1'(1-2\tau)+\\ &+A_{1-\nu}(-xy)^{\frac{3}{2}(1-2\nu)}P_\nu\varphi_2 + A_a(-xy)^{\frac{3}{2}(\alpha-\nu)}P_{1-\alpha}\psi_1 + A_{1-a}(-xy)^{\frac{3}{2}(1-\alpha-\nu)}P_\alpha\psi_2,\end{aligned} \qquad (2.1.9)$$

где $\varphi_1 \in C^3(D^-)$ *и* $\varphi_2,\psi_1 \in C^2(D^-)$ *-произвольные функции одного аргумента.*

Теорема 2.1.7. *Пусть* $-1<2\nu<0,\ -1<2a<0$. *Тогда регулярное решение уравнения (2.1.1) в области* D^- *представимо в виде*

$$
\begin{aligned}
U(x,y) &= (1+2\nu)A_{1+\nu}P_{-\nu}\varphi_1 - 2A_{1+\nu}(-xy)^{\frac{3}{2}}P_{-\nu}\varphi_1'(1-2\tau)+ \\
&+ A_{1-\nu}(-xy)^{\frac{3}{2}(1-2\nu)}P_{\nu}\varphi_2 + (1+2\alpha)A_{1+\alpha}(-xy)^{\frac{3}{2}(\alpha-\nu)}P_{-\alpha}\psi_1 - \\
&- 2A_{1+a}(-xy)^{\frac{3}{2}(\alpha-\nu)}P_{-\alpha}\psi_1'(1-2\tau) + A_{1-a}(-xy)^{\frac{3}{2}(1-\alpha-\nu)}P_{\alpha}\psi_2,
\end{aligned}
\qquad (2.1.10)
$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ *-произвольные функции одного аргумента,* $\varphi_1, \psi_1 \in C^3(D^-)$ *и* $\varphi_2, \psi_1 \in C^2(D^-)$*.*

Теоремы 2.1.2 - 2.1.7 с учётом равенств (2.1.5) - (2.1.10) доказываются непосредственно, чтобы убедиться в этом докажем одну из этих теорем.

Доказательство теоремы 2.1.5. В равенстве (2.1.8) применим оператор и L_ν имеем

$$
\begin{aligned}
\Pi_\nu U(x,y) &= \Pi_\nu\left[(1+2\nu)A_{1+\nu}P_{-\nu}\varphi_1 - 2A_{1+\nu}(-xy)^{\frac{3}{2}}P_{-\nu}\varphi_1'(1-2\tau)\right]+ \\
&+ \Pi_\nu\left[A_{1-\nu}(-xy)^{\frac{3}{2}(1-2\nu)}P_\nu\varphi_2\right] + \Pi_\nu\left[A_a(-xy)^{\frac{3}{2}(\alpha-\nu)}P_{1-\alpha}\psi_1\right] = J_1 + J_2 + J_3.
\end{aligned}
$$

Легко можно видеть, что $J_1 = 0,\ J_2 = 0.$

Теперь вычислим J_3 :

$$
J_3 = \Pi_\nu\left[A_a(-xy)^{\frac{3}{2}(\alpha-\nu)}P_{1-\alpha}\psi_1\right], \qquad (2.1.11)
$$

В правой части равенства (2.1.11) вычислим частные производные первого и второго порядка по x и y и после некоторых упрощений получим

$$
J_3 = \frac{9}{4}(-xy)^{\frac{3}{2}(\alpha-\nu)-2}\cdot\left[\alpha(\alpha-1)-\nu(\nu-1)\right](x^3+y^3)\mathrm{P}_{1-\alpha}\psi_1,
$$

Из последнего равенства имеем

$$
\frac{(-xy)^{2-\frac{3}{2}(\alpha-\nu)}}{(x^3+y^3)}J_3 = \frac{9}{4}\left[\alpha(\alpha-1)-\nu(\nu-1)\right]\mathrm{P}_{1-\alpha}\psi_1.
$$

Теперь применяем оператор Π_α и получим

$$
\Pi_\alpha\left[\frac{(-xy)^{2-\frac{3}{2}(\alpha-\nu)}}{(x^3+y^3)}J_3\right] = \frac{9}{4}\left[\alpha(\alpha-1)-\nu(\nu-1)\right]\Pi_\alpha\mathrm{P}_{1-\alpha}\psi_1 = 0,
$$

так как $\Pi_\alpha\mathrm{P}_{1-\alpha}\psi_1 = 0$.

Теорема 2.1.5 доказана.

Теперь некоторые полученные результаты применяем для решения задачи типа Коши.

Задача $K_{2.1.1}$. Требуется найти регулярное решение уравнения (2.1.1) в области D$^-$ при $a-\nu<1, \alpha>\nu$ и $2\nu\ge 1, 2a\ge 1$ удовлетворяющее следующем начальным условиям

$$\lim_{y\to -0} u(x,y)=f_1(x), \qquad \lim_{y\to -0} x^{\frac{3}{2}(\nu-a)}(-y)^{1+\frac{3}{2}(\nu-a)}\frac{\partial u}{\partial y}=g_1(x), \qquad (K_{2.1.1})$$

где $f_1(x)$, $g_1(x)$-заданные непрерывные функции.

Решение задачи $K_{2.1.1}$. Для решения задачи $K_{2.1.1}$ применяем равенство (2.1.5).

Теорема 2.1.8. *Пусть* $2\nu\ge 1$, $2a\ge 1$ $a>\nu$ *и* $a-\nu<1$. *Тогда решение задачи* $K_{2.1.1}$ *в области* D^- *даётся формулой*

$$U(x,y)=\frac{1}{\mathrm{B}(\nu,\nu)}\int_0^1\frac{f_1\left[x^3-y^3-2(-xy)^{\frac{3}{2}}(1-2\tau)\right]d\tau}{\left[\tau(1-\tau)\right]^{1-\nu}}+$$
$$+\frac{2}{3(a-\nu)\mathrm{B}(a,a)}(-xy)^{\frac{3}{2}(a-\nu)}\int_0^1\frac{g_1\left[x^3-y^3-2(-xy)^{\frac{3}{2}}(1-2\tau)\right]d\tau}{\left[\tau(1-\tau)\right]^{1-a}}, \qquad (2.1.12)$$

где f_1, g_1 *-заданные функции из класса* $C^2(D^-)$, ν, a *-постоянные числа.*

Легко можно проверить, что равенство (2.1.5) удовлетворяет начальные условия $(K_{2.1.1})$ и уравнению (2.1.1).

Задача $K_{2.1.2}$. Требуется найти регулярное решение уравнения (2.1.1) в области D$^-$ при $a+\nu>1$ и $0<2\nu<1$, $2a\ge 1$ удовлетворяющее следующим начальным условиям:

$$\lim_{y\to -0} u(x,y)=f_1(x), \qquad \lim_{y\to -0}\left[x^{\frac{3}{2}(2\nu-1)}(-y)^{3\nu-\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial y}\right]=f_2(x),$$
$$\lim_{y\to -0}\left\{x^{\frac{3}{2}(\nu-a)}(-y)^{\frac{5-3a-3\nu}{2}}\frac{\partial}{\partial y}\left[(-y)^{3\nu-\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial y}\right]\right\}=g_1(x), \qquad (K_{2.1.2})$$

где $f_1(x)$, $f_2(x)$, $g_1(x)$-заданные функции на $0<x<1$, ν, a -постоянные числа.

Решение задачи $K_{2.1.2}$. Для решения данной задачи используем интегральное представлением (2.1.6) и условия задачи $K_{2.1.2}$.

Теорема 2.1.9. *Пусть* $0<2\nu<1,\ \ 2a\geq 1$ *и* $a+\nu>1$. *Тогда решение задачи* $K_{2.1.2}$ *в области* D^{-} *даётся формулой*

$$U(x,y)=\frac{1}{B(\nu,\nu)}\int_0^1\frac{f_1\left[x^3-y^3-2(-xy)^{\frac{3}{2}}(1-2\tau)\right]d\tau}{\left[\tau(1-\tau)\right]^{1-\nu}}+$$

$$+\frac{2}{3(1-2\nu)B(1-\nu,1-\nu)}(-xy)^{\frac{3}{2}(1-2\nu)}\int_0^1\frac{f_2\left[x^3-y^3-2(-xy)^{\frac{3}{2}}(1-2\tau)\right]d\tau}{\left[\tau(1-\tau)\right]^{\nu}}+$$

$$+\ \frac{4(-xy)^{\frac{3}{2}(a-\nu)}}{9(a-\nu)(a+\nu-1)B(a,a)}\int_0^1\frac{g_1\left[x^3-y^3-2(-xy)^{\frac{3}{2}}(1-2\tau)\right]d\tau}{\left[\tau(1-\tau)\right]^{1-a}},\tag{2.1.13}$$

где $f_1(x),\ f_2(x),\ g_1(x)$ *-заданные функции из класса* $C^2(D^{-}),\nu,a$ *-постоянные числа.*

Легко можно проверить, что равенство (2.1.13) удовлетворяют начальным условиям $K_{2.1.2}$ и уравнению (2.1.1)**.**

Задача $K_{2.1.3}$**.** Требуется найти регулярное решение уравнения (2.1.1) в области D^{-} при $0<2\nu<1,\ 0<2a<1$ и $a>\nu$, удовлетворяющее начальным условиям

$$\lim_{y\to -0}u(x,y)=f_1(x),\qquad \lim_{y\to -0}\left[x^{\frac{3}{2}(\nu-a)}(-y)^{\frac{2-3a+3\nu}{2}}\frac{\partial u}{\partial y}\right]=g_1(x),$$

$$\lim_{y\to -0}\left\{x^{\frac{3}{2}(a+\nu-1)}(-y)^{\frac{6a-1}{2}}\frac{\partial}{\partial y}\left[(-y)^{\frac{2-3a+3\nu}{2}}\frac{\partial u}{\partial y}\right]\right\}=g_2(x),$$

$$\lim_{y\to -0}\left\{x^{\frac{3}{2}(2\nu-1)}(-y)^{\frac{2-3a+3\nu}{2}}\frac{\partial}{\partial y}\left\{(-y)^{\frac{6a-1}{2}}\frac{\partial}{\partial y}\left[(-y)^{\frac{2-3a+3\nu}{2}}\frac{\partial u}{\partial y}\right]\right\}\right\}=f_2(x),\tag{$K_{2.1.3}$}$$

где $f_1(x),\ \ f_2(x), g_1(x),\ \ g_2(x)$-заданные непрерывные функции на интервале $0<x<1$.

Теорема 2.1.10. *Пусть* $0<2\nu<1,\ 0<2a<1$ *и* $a>\nu$. *Тогда решение задачи* $K_{2.1.3}$ *в области* D^{-} *даётся следующий формулой*

$$U(x,y)=\frac{1}{B(\nu,\nu)}\int_0^1\frac{f_1\left[x^3-y^3-2(-xy)^{\frac{3}{2}}(1-2\tau)\right]d\tau}{\left[\tau(1-\tau)\right]^{1-\nu}}+$$

$$+\frac{8(-xy)^{\frac{3}{2}(1-2\nu)}}{27(1-2\nu)B(1-\nu,1-\nu)(a-\nu)(1-a-\nu)}\int_0^1\frac{f_2\left[x^3-y^3-2(-xy)^{\frac{3}{2}}(1-2\tau)\right]d\tau}{\left[\tau(1-\tau)\right]^{\nu}}+$$

$$+\ \frac{2(-xy)^{\frac{3}{2}(a-\nu)}}{3(\nu-\alpha)(B(a,a)}\int_0^1\frac{g_1\left[x^3-y^3-2(-xy)^{\frac{3}{2}}(1-2\tau)\right]d\tau}{\left[\tau(1-\tau)\right]^{1-a}}+$$

$$+\frac{4(-xy)^{\frac{3}{2}(1-a-\nu)}}{9B(1-\alpha;1-\alpha)(1-a-\nu)(1-2\alpha)}\int_0^1\frac{g_2\left[x^3-y^3-2(-xy)^{\frac{3}{2}}(1-2\tau)\right]d\tau}{[\tau(1-\tau)]^a}, \qquad (2.1.14)$$

где $f_1(x)$, $f_2(x)$, $g_1(x)$, $g_2(x)$ *- заданные функции из класса* $C^2(D^-)$.

Задача $K_{2.1.4}$**.** Требуется найти регулярное решение уравнения (2.1.1) в области D⁻ при $2a\geq 1$, $-1<2\nu<0$ удовлетворяющее начальным условиям

$$\lim_{y\to -0}u(x,y)=f_1(x), \qquad \lim_{y\to -0}\left[(-y)^{3\nu-\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial y}\right]=f_2(x),$$

$$\lim_{y\to -0}\left\{(-y)^{\frac{5-3a+3\nu}{2}}\frac{\partial}{\partial y}\left[(-y)3\nu-\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y}\right]\right\}=g_1(x), \qquad (K_{2.1.4})$$

где $f_1(x)$, $f_2(x)$, $g_1(x)$-заданные функции на $0<x<1$ и ν, a - постоянные числа.

Решение задачи $K_{2.1.4}$**.** Для решения задачи $K_{2.1.4}$ используем равенство (2.1.8). Из (2.1.8) с учётом начальных условий $(K_{2.1.4})$, выразим заданные функции $f_1(x)$, $f_2(x)$, $g_1(x)$ соответственно через $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $g_1(x)$. После этого, подставляя найденные функции в равенство (2.1.8), получим решение задачи $K_{2.1.4}$ в явном виде.

Итак, доказана следующее утверждение.

Теорема 2.1.11. *Пусть* $a+\nu>1$ *и* $-1<2\nu<0$, $2a\geq 1$. *Тогда решение задачи* $K_{2.1.4}$ *в области* D^- *даётся формулой*

$$U(x,y)=\frac{(1+2\nu)}{B(1+\nu;1+\nu)}\int_0^1\frac{f_1\left[x^3-y^3-2(-xy)^{\frac{3}{2}}(1-2\tau)\right]d\tau}{[\tau(1-\tau)]^{-\nu}}+$$

$$+\frac{2(-xy)^{\frac{3}{2}}}{3B(1+\nu;1+\nu)}\int_0^1\frac{f'_1\left[x^3-y^3-2(-xy)^{\frac{3}{2}}(1-2\tau)\right](1-2\tau)d\tau}{[\tau(1-\tau)]^{-\nu}}+$$

$$+\frac{2(-xy)^{\frac{3}{2}(a-\nu)}}{3(1-2\nu)(B(1-\nu;1-\nu)}\int_0^1\frac{f_2\left[x^3-y^3-2(-xy)^{\frac{3}{2}}(1-2\tau)\right]d\tau}{[\tau(1-\tau)]^{\nu}}+$$

$$+\frac{4(-xy)^{\frac{3}{2}(a-\nu)}}{9B(\alpha;\alpha)(a+\nu-1)}\int_0^1\frac{g_1\left[x^3-y^3-2(-xy)^{\frac{3}{2}}(1-2\tau)\right]d\tau}{[\tau(1-\tau)]^{1-a}}, \qquad (2.1.15)$$

где $f_1(x)$, $f_2(x)$, $g_1(x)$*-заданные функции из класса* $f_1(x)\in C^3(D^-)$, $f_2(x), g_1(x)\in C^2(D^-)$.

Задача $K_{2.1.5}$. Требуется найти регулярное решение уравнения (2.1.1) в области D^- при $-1<2\nu<0$, $0<2a<1$, удовлетворяющее следующем начальным условиям:

$$\lim_{y\to-0} u(x,y)=f_1(x),\qquad \lim_{y\to-0}\left[x^{\frac{3}{2}(\nu-a)}(-y)^{\frac{2+3\nu-3a}{2}}\frac{\partial u}{\partial y}\right]=g_1(x),$$

$$\lim_{y\to-0}\left\{x^{\frac{3}{2}(a+\nu-1)}(-y)^{\frac{6a-1}{2}}\frac{\partial}{\partial y}\left[(-y)^{\frac{2+3\nu-3a}{2}}\frac{\partial u}{\partial y}\right]\right\}=g_2(x),$$

$$\lim_{y\to-0}\left\{x^{\frac{3}{2}(2\nu-1)}(-y)^{\frac{2+3\nu-3a}{2}}\frac{\partial}{\partial y}\left\{(-y)^{\frac{6a-1}{2}}\frac{\partial}{\partial y}\left[(-y)^{\frac{2+3\nu-3a}{2}}\frac{\partial u}{\partial y}\right]\right\}\right\}=f_2(x), \qquad (K_{2.1.5})$$

где $f_1(x), f_2(x), g_1(x), g_2(x)$-заданные функции на интервале $0<x<1$ и ν, a - постоянные числа.

О разрешимости задачи $K_{2.1.5}$ получено следующие утверждение.

Теорема 2.1.12. *Пусть* $-1<2\nu<0,\ 0<2a<1$. *Тогда решение задачи* $K_{2.1.5}$ *в области* D^- *даётся формулой*

$$U(x,y)=\frac{1+2\nu}{B(1+\nu,1+\nu)}\int_0^1\frac{f_1\left[x^3-y^3-2(-xy)^{\frac{3}{2}}(1-2\tau)\right]d\tau}{[\tau(1-\tau)]^{-\nu}}+$$

$$+\frac{(-xy)^{\frac{3}{2}}}{B(1+\nu,1+\nu)}\int_0^1\frac{f'_1\left[x^3-y^3-2(-xy)^{\frac{3}{2}}(1-2\tau)\right]\cdot(1-2\tau)d\tau}{[\tau(1-\tau)]^{-\nu}}+$$

$$+\frac{8(-xy)^{\frac{3}{2}(1-2\nu)}}{27B(1-\nu,1-\nu)(1-2\nu)(a-\nu)(1-a-\nu)}\int_0^1\frac{f_2\left[x^3-y^3-2(-xy)^{\frac{3}{2}}(1-2\tau)\right]d\tau}{[\tau(1-\tau)]^{\nu}}+$$

$$+\ \frac{2(-xy)^{\frac{3}{2}(a-\nu)}}{3(\alpha-\nu)}\int_0^1\frac{g_1\left[x^3-y^3-2(-xy)^{\frac{3}{2}}(1-2\tau)\right]d\tau}{[\tau(1-\tau)]^{1-a}}+$$

$$+\ \frac{4(-xy)^{\frac{3}{2}(1-a-\nu)}}{9B(1-a,1-a)(1-2a)(1-\nu-a)}\int_0^1\frac{g_2\left[x^3-y^3-2(-xy)^{\frac{3}{2}}(1-2\tau)\right]d\tau}{[\tau(1-\tau)]^{a}}, \qquad (2.1.16)$$

где $f_1(x), f_2(x), g_1(x), g_2(x)$ *-заданные функции на* $0<x<1$ *и* $f_1(x)\in C^3(D^-),\ f_2(x), g_1(x), g_2(x)\in C^2(D^-)$.

§ 2.2. Интегральные представления и решения задач типа Коши для одного вырождающегося дифференциального уравнения четвертого порядка первого рода с разными коэффициентами

В этом параграфе для одного вырождающегося дифференциального уравнения четвёртого порядка первого рода находятся интегральные представления решения в зависимости от принимаемых значений коэффициентов. Затем полученные интегральные представления применяются для решения задачи типа Коши.

Пусть $D-$конечная область в первом квадранте, ограниченная гладкой кривой Γ с концами в точках $O(0,0)$ и $A(1,0)$, а в четвертом квадранте ограничена характеристическими линиями уравнения. Часть области D, в которой $x>0,\ y>0$, обозначим через D^{+}- эллиптическую часть и при $x>0,\ y<0$ обозначим через D^{-}- гиперболическую часть.

В области D^{-} рассмотрим дифференциального уравнение четвертого порока вида

$$L_{\alpha,\beta}\left[Q(x,y)L_{\mu,\nu}U\right]=0, \tag{2.2.1}$$

где $L_{\mu,\nu}U\equiv y\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+x\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{6\mu-1}{2}\dfrac{y}{x}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{6\nu-1}{2}\dfrac{x}{y}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\alpha,\beta,\mu,\nu-$вещественные числа,

$$Q(x,y)=x^{\frac{4-3\alpha+3\mu}{2}}(-y)^{\frac{4-3\beta+3\nu}{2}}\Big/(\beta-\nu)(\beta+\nu-1)x^3+(\alpha-\mu)(\alpha+\mu-1)y^3.$$

Введём следующий интегральный оператор:

$$T_{\alpha,\beta}\varphi_i=A_\alpha A_\beta\int_0^1 d\sigma\int_0^1\frac{\varphi_i\left[x^{3/2}(1-2\sigma)-(-y)^{3/2}(1-2\tau)\right]d\tau}{[\sigma(1-\sigma)]^\alpha[\tau(1-\tau)]^\beta},$$

где φ_i $(i=1,2,3,4)$ - произвольные функции, $A_\alpha=\dfrac{1}{B(\alpha,\alpha)}$, $A_\beta=\dfrac{1}{B(\beta,\beta)}$ - функция Эйлера второго рода.

Теорема 2.2.1. *Если* $L_{\mu;\nu}U_{\mu;\nu}=0$ *и* $L_{\alpha;\beta}U_{\alpha;\beta}=0$. *Тогда регулярное решение уравнения (2.2.1) в области* D^{-} *при* $a>\nu$ *представляется в виде*

$$U(x,y)=U_{\mu;\nu}(x,y)+x^{\frac{3}{2}(\alpha-\mu)}(-y)^{\frac{3}{2}(\beta-\nu)}U_{a;\beta}(x,y), \tag{2.2.2}$$

где $U_{\mu;\nu},U_{\alpha;\beta}-$ *решение дифференциального уравнения второго порядка.*

Доказательство. В равенстве (2.2.2) применяем оператор $U_{\mu;\nu}$:

$$L_{\mu;\nu}U(x,y)=L_{\mu;\nu}U_{\mu;\nu}+L_{\mu;\nu}\left[x^{\frac{3}{2}(\alpha-\mu)}(-y)^{\frac{3}{2}(\beta-\nu)}U_{a;\beta}(x,y)\right].$$

По условию теоремы $L_{\mu,\nu}U_{\mu,\nu}=0$, следовательно, получим

$$L_{\mu;\nu}U=L_{\mu;\nu}\left[x^{\frac{3}{2}(\alpha-\mu)}(-y)^{\frac{3}{2}(\beta-\nu)}U_{a;\beta}(x,y)\right]. \tag{2.2.3}$$

В правой части равенства (2.2.3) вычислим частные производные до второго порядка по x и y

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{3}{2}(\alpha-\mu)x^{\frac{3}{2}(\alpha-\mu)-1}(-y)^{\frac{3}{2}(\beta-\nu)}U_{\alpha,\beta}+x^{\frac{3}{2}(\alpha-\mu)}(-y)^{\frac{3}{2}(\beta-\nu)}U'_{\alpha,\beta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\left[\frac{9}{4}(\alpha-\mu)^2-\frac{3}{2}(\alpha-\mu)\right]x^{\frac{3}{2}(\alpha-\mu)-2}(-y)^{\frac{3}{2}(\beta-\nu)}U_{\alpha,\beta}+$$
$$+3(\alpha-\mu)x^{\frac{3}{2}(\alpha-\mu)-1}(-y)^{\frac{3}{2}(\beta-\nu)}U'_{\alpha,\beta}U'+x^{\frac{3}{2}(\alpha-\mu)}(-y)^{\frac{3}{2}(\beta-\nu)}U''_{\alpha,\beta},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{3}{2}(\beta-\nu)x^{\frac{3}{2}(\alpha-\mu)}(-y)^{\frac{3}{2}(\beta-\nu)-1}U_{\alpha,\beta}+x^{\frac{3}{2}(\alpha-\mu)}(-y)^{\frac{3}{2}(\beta-\nu)}U'_{\alpha,\beta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\left[\frac{9}{4}(\beta-\nu)^2-\frac{3}{2}(\beta-\nu)\right]x^{\frac{3}{2}(\alpha-\mu)}(-y)^{\frac{3}{2}(\beta-\nu)-2}U_{\alpha,\beta}-$$
$$-3(\beta-\nu)x^{\frac{3}{2}(\alpha-\mu)}(-y)^{\frac{3}{2}(\beta-\nu)-1}U'_{\alpha,\beta}+x^{\frac{3}{2}(\alpha-\mu)}(-y)^{\frac{3}{2}(\beta-\nu)}U''_{\alpha,\beta}.$$

Найденные частные производные подставляем в $L_{\mu,\nu}U$ и после некоторых упрощений получим

$$L_{\mu,\nu}U=\frac{3}{4}\left[(\alpha-\mu)(\alpha\mu+3\alpha-3\mu-3)y^3+\right.$$
$$\left.+(\beta-\nu)(\beta\nu+3\beta-3\nu-3)x^3\right]x^{\frac{3}{2}(\alpha-\mu)-2}(-y)^{\frac{3}{2}(\beta-\nu)-2}U_{\alpha,\beta}+$$
$$+x^{\frac{3}{2}(\alpha-\mu)-2}(-y)^{\frac{3}{2}(\beta-\nu)-2}\left[yU''_{\alpha,\beta}+xU''_{\alpha},\beta+\frac{6\alpha-1}{2}\frac{y}{x}U'_{\alpha,\beta}+\frac{6\beta-1}{2}\frac{x}{y}U'_{\alpha,\beta}\right], \quad (2.2.4)$$

По условию теоремы 2.2.1 второе слагаемое равно нулю

Теперь из (2.2.4) получим

$$L_{\mu,\nu}U=\frac{3}{4}\left[(\alpha-\mu)(\alpha\mu+3\alpha-3\mu-3)y^3+\right.$$
$$\left.+(\beta-\nu)(\beta\nu+3\beta-3\nu-3)x^3\right]x^{\frac{3}{2}(\alpha-\mu)-2}(-y)^{\frac{3}{2}(\beta-\nu)-2}U_{\alpha,\beta}. \quad (2.2.5)$$

Обе части равенства (2.2.5) разделяя на

$$x^{\frac{3}{2}(\alpha-\mu)-2}(-y)^{\frac{3}{2}(\beta-\nu)-2}\left[(\beta-\nu)(\beta\nu+3\beta-3\nu-3)x^3+(\alpha-\mu)(\alpha\mu+3\alpha-3\mu-3)y^3\right]$$

и имеем

$$\frac{x^{2-\frac{3}{2}(\alpha-\mu)}(-y)^{2-\frac{3}{2}(\beta-\nu)}}{\left[(\beta-\nu)(\beta\nu+3\beta-3\nu-3)x^3+(\alpha-\mu)(\alpha\mu+3\alpha-3\mu-3)y^3\right]}L_{\mu,\nu}U=\frac{3}{4}U_{a,\beta}.$$

В последнем равенстве, применяя оператор $L_{a,\beta}$, с учётом условий теоремы 2.2.1 получим

$$L_{a,\beta}\left[\frac{x^{2-\frac{3}{2}(\alpha-\mu)}(-y)^{2-\frac{3}{2}(\beta-\nu)}}{\left[(\beta-\nu)(\beta\nu+3\beta-3\nu-3)x^3+(\alpha-\mu)(\alpha\mu+3\alpha-3\mu-3)y^3\right]}L_{\mu,\nu}U\right]=\frac{3}{4}L_{a,\beta}U_{a,\beta}=0\,.$$

Теорема доказана.

Теорема 2.2.2. *Пусть* $\alpha>\mu,\ \beta>\nu$ *и* $2\mu\ge 1,\ 2\nu\ge 1, 2\alpha\ge 1, 2\beta\ge 1$. *Тогда регулярное решение уравнения (2.2.1) в области* D^- *представляется в виде*

$$U(x,y)=A_\mu A_\nu T_{1-\mu,1-\nu}\,\varphi_1+A_\alpha A_\beta x^{\frac{3}{2}(\alpha-\mu)}(-y)^{\frac{3}{2}(\beta-\nu)}T_{1-\alpha,1-\beta}\psi_1, \qquad (2.2.6)$$

где $A_\mu, A_{\nu,} A_a, A_\beta$ *- постоянные числа,* φ_1 *,* ψ_1 *– произвольные функции из класса* $C^2(D^-)$ *.*

Теорема 2.2.3. *Пусть* $2\alpha\ge 1, 2\beta\ge 1,\ 0<2\mu<1,\ 2\nu\ge 1$ *и* $\beta>\nu$. *Тогда регулярное решение уравнения (2.2.1) в области* D^- *представимо в виде*

$$U(x,y)=A_\mu A_\nu T_{1-\mu,1-\nu}\,\varphi_1+A_{1-\mu}A_\nu x^{\frac{3}{2}(1-2\mu)}T_{\mu,1-\nu}\,\varphi_2+$$
$$+A_\alpha A_\beta x^{\frac{3}{2}(a-\mu)}(-y)^{\frac{3}{2}(\beta-\nu)}T_{1-a,1-\beta}\psi_1, \qquad (2.2.7)$$

где φ_1,φ_2, ψ_1 *- произвольные функции из класса* $C^2(D^-)$.

Теорема 2.2.4. *Пусть* $2a\ge 1, 2\beta\ge 1,\ 0<2\mu<1,\ 0<2\nu<1$. *Тогда регулярнее решение уравнения (2.2.1) в области* D^- *представимо в виде*

$$U(x,y)=A_\mu A_\nu T_{1-\mu,1-\nu}\,\varphi_1+A_{1-\mu}A_\nu x^{\frac{3}{2}(1-2\mu)}T_{\mu,1-\nu}\,\varphi_2+$$
$$+A_\mu A_{1-\nu}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\nu)}T_{1-\mu,\nu}\,\varphi_3+A_{1-\mu}A_{1-\nu}x^{\frac{3}{2}(1-2\mu)}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\nu)}T_{\mu,\nu}\,\varphi_4+$$
$$+A_a A_\beta x^{\frac{3}{2}(a-\mu)}(-y)^{\frac{3}{2}(\beta-\nu)}T_{1-a,1-\beta}\psi_1, \qquad (2.2.8)$$

где $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4$, ψ_1 *– произвольные функции из класса* $C^2(D^-)$ *и* $A_\mu, \mathrm{A}_{1\text{-}\mu}, \mathrm{A}_{1\text{-}\nu}, A_{\nu,} A_a, A_\beta$ *- постоянные числа.*

Теорема 2.2.5. *Пусть* $0<2\mu<1,\quad 2\nu\ge 1,\quad 0<2a<1, 2\beta\ge 1$ *и* $a>\mu,\ \beta>\nu$ *.*
Тогда регулярное решение уравнения (2.2.1) в области D^-
представимо в виде

$$U(x,y)=A_\mu A_\nu T_{1-\mu,1-\nu}\,\varphi_1+A_{1-\mu}A_\nu x^{\frac{3}{2}(1-2\mu)}T_{\mu,1-\nu}\,\varphi_2$$

$$+A_a A_\beta x^{\frac{3}{2}(a-\mu)}(-y)^{\frac{3}{2}(\beta-\nu)}T_{1-a,1-\beta}\psi_1+A_{1-a}A_\beta x^{\frac{3}{2}(1-a-\mu)}(-y)^{\frac{3}{2}(\beta-\nu)}T_{a,1-\beta}\psi_2, \qquad (2.2.9)$$

где $\varphi_1,\varphi_2,\psi_1,\psi_2$ *- произвольные функции из класса* $C^2(D^-)$.

Теорема 2.2.6. *Пусть* $2\mu\ge 1,\ 0<2\nu<1,\ \ 2a\ge 1,\ 2\beta\ge 1$ *и* $\alpha>\mu$. *Тогда регулярное решение уравнения (2.2.1) в области* D^- *представим в виде*

$$U(x,y)=A_\mu A_\nu T_{1-\mu,1-\nu}\,\varphi_1+A_\mu A_{1-\nu}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\nu)}T_{1-\mu,\nu}\,\varphi_2+$$

$$+A_a A_\beta x^{\frac{3}{2}(a-\mu)}(-y)^{\frac{3}{2}(\beta-\nu)}T_{1-a,1-\beta}\psi_1, \qquad (2.2.10)$$

где $\varphi_1,\varphi_2,\ \psi_1$ *– произвольные функции из класса* $C^2(D^-)$ *и* $A_\mu, A_{1-\nu}, A_\nu, A_a, A_\beta$ *- постоянные числа.*

Теорема 2.2.7. *Пусть* $2\mu\ge 1,\ 0<2\nu<1,\ \ 2a\ge 1,\ 0<2\beta<1$ *и* $a>\mu,\ \beta>\nu$. *Тогда регулярное решение уравнения (2.2.1) в области* D^- *представимо в виде*

$$U(x,y)=A_\mu A_\nu T_{1-\mu,1-\nu}\,\varphi_1+A_\mu A_{1-\nu}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\nu)}T_{1-\mu,\nu}\,\varphi_2+$$

$$+A_a A_\beta x^{\frac{3}{2}(a-\mu)}(-y)^{\frac{3}{2}(\beta-\nu)}T_{1-a,1-\beta}\psi_1+A_a A_{1-\beta}x^{\frac{3}{2}(a-\mu)}(-y)^{\frac{3}{2}(1-\beta-\nu)}T_{1-a,\beta}\psi_2, \qquad (2.2.11)$$

где $\varphi_1,\varphi_2,\ \psi_1,\psi_2$ *- произвольные функции из* $C^2(D^-)$.

Теорема 2.2.8. *Пусть* $0<2\mu<1,\ 0<2\nu<1,\ \ 0<2a<1,\ 2\beta\ge 1$ *и* $a>\mu$. *Тогда регулярное решение уравнения (2.2.1) в области* D^- *представимо в виде*

$$U(x,y)=A_\mu A_\nu T_{1-\mu,1-\nu}\,\varphi_1+A_{1-\mu}A_\nu x^{\frac{3}{2}(1-2\mu)}T_{\mu,1-\nu}\,\varphi_2+A_\mu A_{1-\nu}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\nu)}T_{1-\mu,\nu}\,\varphi_3+$$

$$+A_{1-\mu}A_{1-\nu}x^{\frac{3}{2}(1-2\mu)}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\nu)}T_{\mu,\nu}\,\varphi_4+A_a A_\beta x^{\frac{3}{2}(a-\mu)}(-y)^{\frac{3}{2}(\beta-\nu)}T_{1-a,1-\beta}\psi_1+$$

$$+A_{1-a}A_\beta x^{\frac{3}{2}(1-a-\mu)}(-y)^{\frac{3}{2}(\beta-\nu)}T_{a,1-\beta}\psi_2, \qquad (2.2.12)$$

где $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4,\ \psi_1,\psi_2$ *- произвольные функции одного аргумента из* $C^2(D^-)$ *и* $A_\mu, A_{1-\mu}, A_{1-\nu}, A_\nu, A_a, A_\beta, A_{1-\beta}$ *- постоянные числа.*

Теорема 2.2.9. *Пусть* $0<2\mu<1,\ 0<2\nu<1,\ \ 2a\ge 1,\ 0<2\beta<1$ *и* $\beta>\nu$. *Тогда регулярное решение уравнения (2.2.1) в области* D^- *представимо в виде*

$$U(x,y)=A_\mu A_\nu T_{1-\mu,1-\nu}\,\varphi_1+A_{1-\mu}A_\nu x^{\frac{3}{2}(1-2\mu)}T_{\mu,1-\nu}\,\varphi_2+A_\mu A_{1-\nu}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\nu)}T_{1-\mu,\nu}\,\varphi_3+$$

$$+A_{1-\mu}A_{1-\nu}x^{\frac{3}{2}(1-2\mu)}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\nu)}T_{\mu},_{\nu}\,\varphi_4+A_a A_\beta x^{\frac{3}{2}(a-\mu)}(-y)^{\frac{3}{2}(\beta-\nu)}T_{1-a,1-\beta}\psi_1+$$

$$+A_a A_{1-\beta}\,x^{\frac{3}{2}(\alpha-\mu)}(-y)^{\frac{3}{2}(1-\beta-\nu)}T_{1-a,\beta}\,\psi_2, \qquad (2.2.13)$$

где $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4$, ψ_1,ψ_2 *- произвольные функции одного аргумента из класса* $C^2(D^-)$.

Теорема 2.2.10. *Пусть* $0<2\mu<1,\ 0<2\nu<1,\quad 0<2a<1, 0<2\beta<1$ *и* $\alpha>\mu,\beta>\nu$. *Тогда регулярное решение уравнения (2.2.1) в области* D^- *представимо в виде*

$$U(x,y)=A_\mu A_\nu T_{1-\mu},_{1-\nu}\,\varphi_1+A_{1-\mu}A_\nu x^{\frac{3}{2}(1-2\mu)}T_{\mu},_{1-\nu}\,\varphi_2+A_\mu A_{1-\nu}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\nu)}T_{1-\mu},_{\nu}\,\varphi_3+$$

$$+A_{1-\mu}A_{1-\nu}x^{\frac{3}{2}(1-2\mu)}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\nu)}T_{\mu},_{\nu}\,\varphi_4+A_a A_\beta x^{\frac{3}{2}(a-\mu)}(-y)^{\frac{3}{2}(\beta-\nu)}T_{1-a,1-\beta}\psi_1+$$

$$+A_{1-a}A_\beta\,x^{\frac{3}{2}(1-\alpha-\mu)}(-y)^{\frac{3}{2}(\beta-\nu)}T_{a,1-\beta}\,\psi_2+A_a A_{1-\beta}\,x^{\frac{3}{2}(\alpha-\mu)}(-y)^{\frac{3}{2}(1-\beta-\nu)}T_{1-a,\beta}\,\psi_3+$$

$$A_{1-a}A_{1-\beta}\,x^{\frac{3}{2}(1-\alpha-\mu)}(-y)^{\frac{3}{2}(1-\beta-\nu)}T_{a,\beta}\,\psi_4, \qquad (2.2.14)$$

где $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4$, $\psi_1,\psi_2,\psi_3,\psi_4$ *- произвольные функции одного аргумента из класса* $C^2(D^-)$.

Теорема 2.2.11. *Пусть* $-1<2\mu<0,\quad 2\nu\ge 1,\quad 2a\ge 1, 2\beta\ge 1$ *и* $\beta>\nu$. *Тогда регулярное решение уравнения (2.2.1) в области* D^- *представимо в виде*

$$U(x,y)=A_{1+\mu}A_\nu(1+2\mu)T_{-\mu},_{1-\nu}\,\varphi_1+A_{1+\mu}A_\nu x^{\frac{3}{2}}T_{-\mu},_{1-\nu}\,\varphi'_1\cdot(1-2\sigma)+$$

$$+A_{1-\mu}A_\nu x^{\frac{3}{2}(1-2\mu)}T_{\mu},_{1-\nu}\,\varphi_2+A_a A_\beta x^{\frac{3}{2}(a-\mu)}(-y)^{\frac{3}{2}(\beta-\nu)}T_{1-a,1-\beta}\psi_1, \qquad (2.2.15)$$

где $\varphi_1,\varphi_2,\psi_1$ - произвольные функции одного аргумента, φ_1 из класса $C^3(D^-)$ и φ_2,ψ_1 из класса $C^2(D^-)$.

Теорема 2.2.12. *Пусть* $-1<2\mu<0,\quad 0<2\nu<1,\quad 2a\ge 1, 2\beta\ge 1$. *Тогда регулярное решение уравнения (2.2.1) в области* D^- *представимо в виде*

$$
\begin{aligned}
U(x,y) &= A_{1+\mu}A_{\nu}(1+2\mu)T_{-\mu,1-\nu}\,\varphi_1 + A_{1+\mu}A_{\nu}x^{\frac{3}{2}}T_{-\mu,1-\nu}\,\varphi'_1\cdot(1-2\sigma)+\\
&+A_{1+\mu}A_{1-\nu}(1+2\mu)(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\nu)}T_{-\mu,\nu}\,\varphi_2 + A_{1+\mu}A_{1-\nu}x^{\frac{3}{2}}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\nu)}T_{-\mu,\nu}\,\varphi'_2\cdot(1-2\sigma)+\\
&+A_{1-\mu}A_{\nu}x^{\frac{3}{2}(1-2\mu)}T_{\mu,1-\nu}\,\varphi_3 + A_{1-\mu}A_{1-\nu}x^{\frac{3}{2}(1-2\nu)}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\nu)}T_{\mu,\nu}\,\varphi_4+\\
&+A_aA_{\beta}x^{\frac{3}{2}(a-\mu)}(-y)^{\frac{3}{2}(\beta-\nu)}T_{1-a,1-\beta}\psi_1,
\end{aligned}
\tag{2.2.16}
$$

гд

е $\varphi_1,\varphi_2\in C^3(D^-)$, $\varphi_3,\varphi_4,\psi_1$ *- произвольные функции одного аргумента из класса* $C^2(D^-)$.

Теорема 2.2.13. *Пусть* $-1<2\mu<0,\quad 2\nu\geq 1,\quad 0<2a<1,\ 2\beta\geq 1$ *и* $\beta>\nu$. *Тогда регулярное решение уравнения (2.2.1) в области* D^- *представимо в виде*

$$
\begin{aligned}
U(x,y) &= A_{1+\mu}A_{\nu}(1+2\mu)T_{-\mu,1-\nu}\,\varphi_1 + A_{1+\mu}A_{\nu}x^{\frac{3}{2}}T_{-\mu,1-\nu}\,\varphi'_1\cdot(1-2\sigma)+\\
&+A_{1-\mu}A_{\nu}x^{\frac{3}{2}(1-2\mu)}T_{\mu,1-\nu}\,\varphi_2 + A_aA_{\beta}x^{\frac{3}{2}(a-\mu)}(-y)^{\frac{3}{2}(\beta-\nu)}T_{1-a,1-\beta}\psi_1+\\
&+A_{1-a}A_{\beta}x^{\frac{3}{2}(1-a-\mu)}(-y)^{\frac{3}{2}(\beta-\nu)}T_{a,1-\beta}\psi_2,
\end{aligned}
\tag{2.2.17}
$$

где $\varphi_1\in C^3(D^-)$ φ_2,ψ_1,ψ_2 *- произвольные функции одного аргумента из класса* $C^2(D^-)$.

Теорема 2.2.14. *Пусть* $-1<2\mu<0,\quad 0<2\nu<1,\quad 0<2\beta<1,\ 0<2\alpha<1$ *и* $\beta>\nu$. *Тогда регулярное решение уравнения (2.2.1) в области* D^- *представимо в виде*

$$
\begin{aligned}
U(x,y) &= A_{1+\mu}A_{\nu}(1+2\mu)T_{-\mu,1-\nu}\,\varphi_1 + A_{1+\mu}A_{\nu}x^{\frac{3}{2}}T_{-\mu,1-\nu}\,\varphi'_1\cdot(1-2\sigma)+\\
&+A_{1+\mu}A_{1-\nu}(1+2\mu)(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\nu)}T_{-\mu,\nu}\,\varphi_2 + A_{1+\mu}A_{1-\nu}x^{\frac{3}{2}}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\nu)}T_{-\mu,\nu}\,\varphi'_2\cdot(1-2\sigma)+\\
&+A_{1-\mu}A_{\nu}x^{\frac{3}{2}(1-2\mu)}T_{\mu,1-\nu}\,\varphi_3 + A_{1-\mu}A_{1-\nu}x^{\frac{3}{2}(1-2\nu)}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\nu)}T_{\mu,\nu}\,\varphi_4+\\
&+A_aA_{\beta}x^{\frac{3}{2}(a-\mu)}(-y)^{\frac{3}{2}(\beta-\nu)}T_{1-a,1-\beta}\psi_1 + A_{1-a}A_{\beta}\,x^{\frac{3}{2}(1-\alpha-\mu)}(-y)^{\frac{3}{2}(\beta-\nu)}T_{a,1-\beta}\,\psi_2+\\
&+A_aA_{1-\beta}\,x^{\frac{3}{2}(\alpha-\mu)}(-y)^{\frac{3}{2}(1-\beta-\nu)}T_{1-a,\beta}\,\psi_3 + A_{1-a}A_{1-\beta}\,x^{\frac{3}{2}(1-\alpha-\mu)}(-y)^{\frac{3}{2}(1-\beta-\nu)}T_{a,\beta}\,\psi_4,
\end{aligned}
\tag{2.2.18}
$$

Г

де $\varphi_1,\varphi_2\in C^3(D^-)$, $\varphi_3,\varphi_4,\ \psi_1,\psi_2,\psi_3,\psi_4-$произвольные функции одного аргумента из класса $C^2(D^-)$.

Теорема 2.2.15. *Пусть* $2\mu \ge 1,\ \ -1 < 2\nu < 0,\ \ 2a \ge 1,\ 2\beta \ge 1$ *и* $\alpha > \mu$. *Тогда регулярное решение уравнения (2.2.1) в области* D^- *представимо в виде*

$$U(x,y) = A_\mu A_{1+\nu}(1+2\nu)T_{1-\mu,-\nu}\,\varphi_1 + A_\mu A_{1+\nu}(-y)^{\frac{3}{2}}T_{1-\mu,-\nu}\,\varphi'_1\cdot(1-2\tau)+$$
$$+A_\mu A_{1-\nu}x^{\frac{3}{2}(1-2\nu)}T_{1-\mu,\nu}\,\varphi_2 + A_a A_\beta x^{\frac{3}{2}(a-\mu)}(-y)^{\frac{3}{2}(\beta-\nu)}T_{1-a,1-\beta}\psi_1, \qquad (2.2.19)^{ГД}$$

е $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1$ *- произвольные функции одного аргумента* φ_1 *из класса* $C^3(D^-)$ *и* ψ_1, φ_2 *из класса* $C^2(D^-)$.

Теорема 2.2.16. *Пусть* $2\mu \ge 1,\ \ -1 < 2\nu < 0,\ \ 0 < 2\beta < 1,\ 2\alpha \ge 1$ *и* $\alpha > \mu$. *Тогда регулярное решение уравнения (2.2.1) в области* D^- *представимо в виде*

$$U(x,y) = A_\mu A_{1+\nu}(1+2\nu)T_{1-\mu,-\nu}\,\varphi_1 + A_\mu A_{1+\nu}(-y)^{\frac{3}{2}}T_{1-\mu,-\nu}\,\varphi'_1\cdot(1-2\tau)+$$
$$+A_\mu A_{1-\nu}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\nu)}T_{1-\mu,\nu}\,\varphi_2 + A_a A_\beta x^{\frac{3}{2}(a-\mu)}(-y)^{\frac{3}{2}(\beta-\nu)}T_{1-a,1-\beta}\psi_1 +$$
$$+A_a A_{1-\beta}x^{\frac{3}{2}(a-\mu)}(-y)^{\frac{3}{2}(1-\beta-\nu)}T_{1-a,\beta}\psi_2, \qquad (2.2.20)$$

где $\varphi_1 \in C^3(D^-)$, $\varphi_2, \psi_1, \psi_2$ *- произвольные функции одного аргумента из класса* $C^2(D^-)$.

Теорема 2.2.17. *Пусть* $0 < 2\mu < 1,\ \ -1 < 2\nu < 0,\ \ 2a \ge 1,\ 2\beta \ge 1$. *Тогда регулярное решение уравнения (2.2.1) в области* D^- *представимо в виде*

$$U(x,y) = A_\mu A_{1+\nu}(1+2\nu)T_{1-\mu,-\nu}\,\varphi_1 + A_\mu A_{1+\nu}(-y)^{\frac{3}{2}}T_{1-\mu,-\nu}\,\varphi'_1\cdot(1-2\tau)+$$
$$+A_{1-\mu}A_{1+\nu}(1+2\nu)x^{\frac{3}{2}(1-2\mu)}T_{\mu,-\nu}\,\varphi_2 - A_{1-\mu}A_{1+\nu}x^{\frac{3}{2}(1-2\mu)}(-y)^{\frac{3}{2}}T_{\mu,-\nu}\,\varphi'_2\cdot(1-2\tau)+$$
$$+A_\mu A_{1-\nu}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\nu)}T_{1-\mu,\nu}\,\varphi_3 + A_{1-\mu}A_{1-\nu}x^{\frac{3}{2}(1-2\nu)}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\nu)}T_{\mu,\nu}\,\varphi_4 +$$
$$+A_a A_\beta x^{\frac{3}{2}(a-\mu)}(-y)^{\frac{3}{2}(\beta-\nu)}T_{1-a,1-\beta}\psi_1, \qquad (2.2.21)$$

где $\varphi_1, \varphi_2 \in C^3(D^-)$, $\varphi_3, \varphi_4, \psi_1$ *- произвольные функции одного аргумента из класса* $C^2(D^-)$.

Теорема 2.2.18. *Пусть* $0 < 2\mu < 1,\ \ -1 < 2\nu < 0,\ \ 0 < 2\beta < 1,\ 0 < 2\alpha < 1$ *и* $\alpha > \mu$. *Тогда регулярное решение уравнения (2.2.1) в области* D^- *представимо в виде*

$$U(x,y)=A_\mu A_{1+\nu}(1+2\nu)T_{1-\mu},_{-\nu}\,\varphi_1+A_\mu A_{1+\nu}(-y)^{\frac{3}{2}}T_{1-\mu},_{-\nu}\,\varphi'_1\cdot(1-2\tau)+$$
$$+A_{1-\mu}A_{1+\nu}(1+2\nu)x^{\frac{3}{2}(1-2\mu)}T_\mu,_{-\nu}\,\varphi_2-A_{1-\mu}A_{1+\nu}x^{\frac{3}{2}(1-2\mu)}(-y)^{\frac{3}{2}}T_\mu,_{-\nu}\,\varphi'_2\cdot(1-2\tau)+$$
$$+A_\mu A_{1-\nu}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\nu)}T_{1-\mu},_\nu\,\varphi_3+A_{1-\mu}A_{1-\nu}x^{\frac{3}{2}(1-2\nu)}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\nu)}T_\mu,_\nu\,\varphi_4+$$
$$+A_a A_\beta x^{\frac{3}{2}(a-\mu)}(-y)^{\frac{3}{2}(\beta-\nu)}T_{1-a,1-\beta}\psi_1+A_{1-a}A_\beta\, x^{\frac{3}{2}(1-\alpha-\mu)}(-y)^{\frac{3}{2}(\beta-\nu)}T_{a,1-\beta}\,\psi_2+$$
$$+A_a A_{1-\beta}\, x^{\frac{3}{2}(\alpha-\mu)}(-y)^{\frac{3}{2}(1-\beta-\nu)}T_{1-a,\beta}\,\psi_3+A_{1-a}A_{1-\beta}\, x^{\frac{3}{2}(1-\alpha-\mu)}(-y)^{\frac{3}{2}(1-\beta-\nu)}T_{a,\beta}\,\psi_4, \qquad (2.2.22)$$

где $\varphi_1,\varphi_2,\in C^3(D^-)$, $\varphi_3,\varphi_4,\ \psi_1,\psi_2,\psi_3,\psi_4$ *– произвольные функции одного аргумента из класса* $C^2(D^-)$.

Теоремы 2.2.2 - 2.2.18 доказываются непосредственно, чтобы убедиться в этом, ниже приводим доказательство одной из этих теорем.

Доказательство теоремы 2.2.14.

В равенстве (2.2.18) применим оператор $L_{\mu,\nu}$:

$$L_{\mu,\nu}U=L_{\mu,\nu}\left[(1+2\mu)A_{1+\mu,}\,A_\nu\,T_{-\mu,1-\nu}\,\varphi_1+A_{1+\mu,}\,A_\nu\,x^{\frac{3}{2}}\,T_{-\mu,1-\nu}\,\varphi'_1\cdot(1-2\sigma)\right]+$$
$$+L_{\mu,\nu}\left[A_{1-\mu,}A_\nu\,x^{\frac{3}{2}(1-2\mu)}T_{\mu,1-\nu}\,\varphi_2\right]+L_{\mu,\nu}\left[A_{1-\mu,}A_{1-\nu}\,x^{\frac{3}{2}(1-2\mu)}(-y)^{\frac{3}{2}(1-2\nu)}T_{\mu,1-\nu}\,\varphi_2\right]+$$
$$+L_{\mu,\nu}\left[A_{\alpha,}A_\beta\,x^{\frac{3}{2}(\alpha-\mu)}(-y)^{\frac{3}{2}(\beta-\mu)}T_{1-\alpha,1-\beta}\psi_1\right]+L_{\mu,\nu}\left[A_{1-\alpha,}A_\beta\,x^{\frac{3}{2}(1-\mu-\alpha)}(-y)^{\frac{3}{2}(\beta-\nu)}T_{\alpha,1-\beta}\psi_2\right]+$$
$$+L_{\mu,\nu}\left[A_{\alpha,}A_{1-\beta}\,x^{\frac{3}{2}(\alpha-\mu)}(-y)^{\frac{3}{2}(1-\nu-\beta)}T_{1-\alpha,\beta}\psi_3\right]+L_{\mu,\nu}\left[A_{1-\alpha,}A_{1-\beta}\,x^{\frac{3}{2}(1-\mu-\alpha)}(-y)^{\frac{3}{2}(1-\nu-\beta)}T_{\alpha,\beta}\psi_4\right]=$$
$$=J_1+J_2+J_3+J_4+J_5+J_6+J_7.$$

В §1.3. было доказано, что $J_1=0, J_2=0, J_3=0.$

Теперь вычислим $J_{4,}J_{5,}J_{6,}J_7$:

$$J_4=A_\alpha A_\beta L_{\mu,\nu}\left[x^{\frac{3}{2}(\alpha-\mu)}(-y)^{\frac{3}{2}(\beta-\nu)}T_{1-\alpha,1-\beta}\psi_1\right]=$$
$$=A_\alpha A_\beta L_{\mu,\nu}\,y\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[x^{\frac{3}{2}(\alpha-\mu)}(-y)^{\frac{3}{2}(\beta-\nu)}T_{1-\alpha,1-\beta}\psi_1\right]+$$
$$+A_\alpha A_\beta\,x\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[x^{\frac{3}{2}(\alpha-\mu)}(-y)^{\frac{3}{2}(\beta-\nu)}T_{1-\alpha,1-\beta}\psi_1\right]+$$
$$+A_\alpha A_\beta\,\frac{6\mu-1}{2x}\,y\frac{\partial}{\partial x}\,y\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[x^{\frac{3}{2}(\alpha-\mu)}(-y)^{\frac{3}{2}(\beta-\nu)}T_{1-\alpha,1-\beta}\psi_1\right]+$$
$$+A_\alpha A_\beta\,\frac{6\nu-1}{2y}\,x\frac{\partial}{\partial y}\,y\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[x^{\frac{3}{2}(\alpha-\mu)}(-y)^{\frac{3}{2}(\beta-\nu)}T_{1-\alpha,1-\beta}\psi_1\right].$$

Учитывая, что $L_{\alpha,\beta}\left[T_{1-\alpha,1-\beta}\psi_1\right]=0,$ имеем

$$J_4 = x^{\frac{3}{2}(\alpha-\mu)-2}\,(-y)^{\frac{3}{2}(\beta-\nu)-2}\,\frac{3}{4}\Big[(\alpha-\mu)(\alpha\mu+3\alpha-3\mu-3)y^3+$$
$$+(\beta-\nu)(\beta\nu+3\beta-3\nu-3)x^3\Big]T_{1-\alpha,1-\beta}\psi_1.$$

Обе части последнего равенства делим на
$x^{\frac{3}{2}(\alpha-\mu)-2}(-y)^{\frac{3}{2}(\beta-\nu)-2}\left[(\alpha-\mu)(\alpha\mu+3\alpha-3\mu-3)y^3+(\beta-\nu)(\beta\nu+3\beta-3\nu-3)x^3\right]$ находим

$$\frac{x^{\frac{4-3\alpha+3\mu}{2}}(-y)^{\frac{4-3\beta+3\nu}{2}}}{\left[(\beta-\nu)(\beta\nu+3\beta-3\nu-3)x^3+(\alpha-\mu)(\alpha\mu+3\alpha-3\mu-3)y^3\right]}J_4=\frac{3}{4}T_{1-\alpha,1-\beta}\psi_1$$

или

$$Q(x,y)J_4=\frac{3}{4}T_{1-\alpha,1-\beta}\psi_1.$$

В последнем равенстве, применяя оператор $L_{a,\beta}$, с учётом условий теоремы получим

$$L_{\alpha,\beta}\left[Q(x,y)J_4\right]=\frac{3}{4}L_{\alpha,\beta}\left[T_{1-\alpha,1-\beta}\psi_1\right]=0\,;$$

$$J_5=L_{\mu,\nu}\left[A_{1-\alpha,}A_\beta\, x^{\frac{3}{2}(1-\mu-\alpha)}(-y)^{\frac{3}{2}(\beta-\nu)}\,T_{\alpha,1-\beta}\psi_2\right]=$$
$$=A_{1-\alpha}A_\beta L_{\mu,\nu}\,y\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[x^{\frac{3}{2}(1-\mu-\alpha)}(-y)^{\frac{3}{2}(\beta-\nu)}\,T_{\alpha,1-\beta}\psi_2\right]+$$
$$+A_{1-\alpha}A_\beta\, x\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[x^{\frac{3}{2}(1-\mu-\alpha)}(-y)^{\frac{3}{2}(\beta-\nu)}\,T_{\alpha,1-\beta}\psi_2\right]+$$
$$+A_{1-\alpha}A_\beta\frac{6\mu-1}{2x}\,y\frac{\partial}{\partial x}\left[x^{\frac{3}{2}(1-\mu-\alpha)}(-y)^{\frac{3}{2}(\beta-\nu)}\,T_{\alpha,1-\beta}\psi_2\right]+$$
$$+A_{1-\alpha}A_\beta\frac{6\nu-1}{2y}\,x\frac{\partial}{\partial y}\left[x^{\frac{3}{2}(1-\mu-\alpha)}(-y)^{\frac{3}{2}(\beta-\nu)}\,T_{\alpha,1-\beta}\psi_2\right].$$

Следовательно, получим

$$J_5 = x^{\frac{3}{2}(\alpha-\mu)-2}\,(-y)^{\frac{3}{2}(\beta-\nu)-2}\,\frac{3}{4}\Big[(\alpha-\mu)(\alpha\mu+3\alpha-3\mu-3)y^3+$$
$$+(\beta-\nu)(\beta\nu+3\beta-3\nu-3)x^3\Big]T_{1-\alpha,1-\beta}\psi_2.$$

Из последнего равенства находим

$$\frac{x^{\frac{4-3\alpha+3\mu}{2}}(-y)^{\frac{4-3\beta+3\nu}{2}}}{\left[(\beta-\nu)(\beta\nu+3\beta-3\nu-3)x^3+(\alpha-\mu)(\alpha\mu+3\alpha-3\mu-3)y^3\right]}J_5=\frac{3}{4}T_{1-\alpha,1-\beta}\psi_2$$

или

$$Q(x,y)J_4=\frac{3}{4}T_{1-\alpha,1-\beta}\psi_2.$$

В последнем равенстве, применяя оператор $L_{a,\beta}$, с учётом условий теоремы получим

$$L_{\alpha,\beta}\left[Q(x,y)J_5\right]=\frac{3}{4}L_{\alpha,\beta}\left[T_{1-\alpha,1-\beta}\psi_2\right]=0\,.$$

Аналогичным образом доказывается, что J_6 и J_7 также будут решением уравнения (2.2.1). Теорема доказана.

В дальнейшем, используя некоторые из полученных результатов для решение задачи типа Коши в характеристической области D^-.

Задача $K_{2.2.1}$**.** Требуется найти регулярное решение уравнения (2.2.1) при $\alpha>\mu,\ \beta>\nu$ и $2\mu\ge 1, 2\nu\ge 1,\ 2\alpha\ge 1,\ 2\beta\ge 1,$ удовлетворяющее следующем начальным условиям

$$\lim_{y\to -0}U(x,y)=g_1(x)\qquad \lim_{y\to -0}\left[x^{\frac{3}{2}(\mu-\alpha)}(-y)^{\frac{2+3\nu-3\beta}{2}}\frac{\partial u}{\partial y}\right]=g_2(x), \qquad (k_{2.2.1})$$

где $g_1(x)$ и $g_2(x)$ – заданные функции на $0<x<1$.

Для решения задачи $K_{2.2.1}$ используем равенство (2.2.6). Учитывая начальные условия $(K_{2.2.1})$**,** из (2.2.6) получим

$$A_\mu\int_0^1\frac{\varphi_1\left[x^{\frac{3}{2}}(1-2\sigma)\right]d\sigma}{\left[\sigma(1-\sigma)\right]^{1-\mu}}=g_1(x),\quad A_\alpha\int_0^1\frac{\psi_1\left[x^{\frac{3}{2}}(1-2\sigma)\right]d\sigma}{\left[\sigma(1-\sigma)\right]^{1-\alpha}}=\frac{2}{3A_\alpha(\nu-\beta)}g_2(x), \qquad (2.2.23)$$

Обращая равенство (2.2.23), получим:

$$\varphi_1\left(x^{\frac{3}{2}}\right)=\frac{1}{\mathrm{B}(\mu,\mu)}G_1(x),\quad \psi_1\left(x^{\frac{3}{2}}\right)=\frac{2}{3(\nu-\beta)\mathrm{B}(\alpha,\alpha)}G_2(x), \qquad (2.2.24)$$

где $$G_1(x)=\frac{2^{2\mu-2}\mathrm{B}^{-1}(\lambda;1-\lambda)}{3^k(k+\lambda-1)\cdots(\lambda-1)\lambda}\frac{d}{dx}\int_0^{x^{3/2}}\left(\frac{d}{s^2ds}\right)^k\left[s^{\frac{6\mu-1}{2}}g_1(s)\right]\frac{ds}{\left(x^3-s^2\right)^\lambda},$$

$$G_2(x)=\frac{2^{2\mu-2}\mathrm{B}^{-1}(\lambda;1-\lambda)}{3^k(k+\lambda-1)\cdots(\lambda-1)\lambda}\frac{d}{dx}\int_0^{x^{3/2}}\left(\frac{d}{s^2ds}\right)^k\left[s^{\frac{6\mu-1}{2}}g_2(s)\right]\frac{ds}{\left(x^3-s^2\right)^{\lambda}}.$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2.2.19. *Если* $f(x)\in C^{4+k}$ *и* $g(x)\in C^{3+k}$*. Тогда решение задачи* $(K_{2.2.1})$ *даётся равенством (2.2.6), где функции* φ_1 *и* ψ_1 *соответственно находятся из равенства (2.2.24).*

Задача $K_{2.2.2}$**.** Требуется найти регулярное решение уравнения (2.2.1), при $2\mu\ge 1,\ \ 0<2\nu<1,\ 2\alpha\ge 1,\ 2\beta\ge 1, \alpha>\mu$ и $\alpha>\mu,\ \nu+\beta>1,$ удовлетворяющее начальным условиям

$$\lim_{y\to -0}U(x,y)=f_1(x),\qquad \lim_{y\to -0}(-y)^{3\nu-\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial y}=f_2(x),$$

$$\lim_{y\to -0}\left[x^{\frac{3}{2}(\mu-\alpha)}(-y)^{\frac{5+3\nu-3\beta}{2}}\frac{\partial}{\partial y}\left[(-y)^{3\nu-\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial y}\right]\right]=f_3(x), \qquad (k_{2.2.2}),$$

где $f_1(x),\ f_2(x)$ и $f_3(x)$ – заданные функции на $0<x<1$.

Для решения задачи $K_{2.2.2}$ используем равенство (2.2.8). Аналогично решению задачи $(K_{2.2.1})$, учитывая начальные условия $K_{2.2.2}$ из (2.2.8) находим

$$A_\mu\int_0^1\frac{\varphi_1\left[x^{\frac{3}{2}}(1-2\sigma)\right]d\sigma}{[\sigma(1-\sigma)]^{1-\mu}}=f_1(x),\ A_\mu\int_0^1\frac{\varphi_2\left[x^{\frac{3}{2}}(1-2\sigma)\right]d\sigma}{[\sigma(1-\sigma)]^{1-\mu}}=f_2(x),$$

$$A_\alpha\int_0^1\frac{\psi_1\left[x^{\frac{3}{2}}(1-2\sigma)\right]d\sigma}{[\sigma(1-\sigma)]^{1-\alpha}}=f_3(x). \qquad (2.2.25)$$

Обращая равенство (2.2.25), как раньше будем иметь

$$\varphi_1\left(x^{\frac{3}{2}}\right)=\frac{1}{\mathrm{B}(\mu,\mu)}F_1(x),\quad \varphi_2\left(x^{\frac{3}{2}}\right)=\frac{1}{\mathrm{B}(\mu,\mu)}F_2(x),\ \ \psi_1\left(x^{\frac{3}{2}}\right)=\frac{1}{\mathrm{B}(\alpha,\alpha)}F_3(x), \qquad (2.2.26)$$

Теорема 2.2.20. *Пусть* $f_1(x)\in C^{4+k},\ \ f_2(x)\in C^{3+k}$ *и* $g_3(x)\in C^{2+k}$*. Тогда решение задачи* $(K_{2.2.2})$ *в области* (D^-) *даётся равенством (2.2.8), где функции* φ_1,φ_2 *и* ψ_1 *соответственно находятся из равенства (2.2.26).*

Задача $K_{2.2.3}$**.** Требуется найти регулярное решение уравнения (2.2.1) в области D^- при $\beta>\nu,\ \ \alpha>\mu$ и $2\mu\ge 1,\ \ 0<2\nu<1,\ \ 2\alpha\ge 1,\ \ 0<2\beta<1,$ удовлетворяющее следующем начальным условиям

$$\lim_{y\to -0} U(x,y)=f_1(x), \qquad \lim_{y\to -0}\left[x^{\frac{3}{2}(\mu-\alpha)}(-y)^{\frac{2+3\nu-3\beta}{2}}\frac{\partial u}{\partial y}\right]=g_1(x),$$

$$\lim_{y\to -0}\left\{x^{\frac{3}{2}(\mu-\alpha)}(-y)^{\frac{6\beta-1}{2}}\frac{\partial}{\partial y}\left[(-y)^{\frac{2+3\nu-3\beta}{2}}\frac{\partial u}{\partial y}\right]\right\}=g_2(x),$$

$$\lim_{y\to -0}\left\{(-y)^{\frac{2+3\nu-3\beta}{2}}\frac{\partial}{\partial y}\left\{(-y)^{\frac{6\beta-1}{2}}\frac{\partial}{\partial y}\left[(-y)^{\frac{2+3\nu-3\beta}{2}}\frac{\partial u}{\partial y}\right]\right\}\right\}=f_2(x), \qquad (K_{2.2.3})$$

где $f_1(x)$, $f_2(x)$ и $g_1(x), g_2(x)$ – заданные функции на интервале $0<x<1$.

Для решения задачи $K_{2.2.3}$ используем равенство (2.2.11). Аналогично как было сделано выше находим

$$A_\mu\int_0^1\frac{\varphi_1\left[x^{\frac{3}{2}}(1-2\sigma)\right]d\sigma}{[\sigma(1-\sigma)]^{1-\mu}}=f_1(x), \quad A_\mu\int_0^1\frac{\varphi_2\left[x^{\frac{3}{2}}(1-2\sigma)\right]d\sigma}{[\sigma(1-\sigma)]^{1-\mu}}=f_2(x),$$

$$A_\alpha\int_0^1\frac{\psi_1\left[x^{\frac{3}{2}}(1-2\sigma)\right]d\sigma}{[\sigma(1-\sigma)]^{1-\alpha}}=g_1(x), \qquad (2.2.27)$$

Обращая равенства (2.2.27), как выше находим

$$\varphi_1\left(x^{\frac{3}{2}}\right)=F_1(x), \quad \varphi_2\left(x^{\frac{3}{2}}\right)=F_2(x), \quad \psi_1\left(x^{\frac{3}{2}}\right)=G_1(x), \quad \psi_2\left(x^{\frac{3}{2}}\right)=G_2(x), \qquad (2.2.28)$$

где

$$F_1(x)=\frac{2^{2\mu-1}}{3^k \mathrm{B}(\lambda;1-\lambda)(k+\lambda-1)\cdots(\lambda-1)\lambda \mathrm{B}(\mu;\mu)}\frac{d}{dx}\int_0^{x^{3/2}}\left(\frac{d}{s^2ds}\right)^k\left[s^{\frac{3}{2}(2\mu-1)}f_1(s)\right]\frac{sds}{\left(x^3-s^2\right)^\lambda},$$

$$F_2(x)=\frac{2^{k+2\lambda}}{\mathrm{B}(\mu;\mu)(1-2\nu)(\nu-\beta)(1-\beta-\nu)\mathrm{B}(\lambda;1-\lambda)(k+\lambda-1)\cdots(\lambda-1)\lambda}\frac{d}{dx}\int_0^{x^{3/2}}\left(\frac{d}{s^2ds}\right)^k\left[s^{\frac{3}{2}(2\mu-1)}f_2(s)\right]\frac{sds}{\left(x^3-s^2\right)^\lambda},$$

$$G_1(x)=\frac{2^{2\alpha-1}}{\mathrm{B}(\alpha;\alpha)3^{m+1}(\nu-\beta)\mathrm{B}(\ell;1-\ell)(m+\ell-1)\cdots(\ell-1)\ell}\frac{d}{dx}\int_0^{x^{3/2}}\left(\frac{d}{s^2ds}\right)^m\left[s^{\frac{3}{2}(2\alpha-1)}g_1(s)\right]\frac{sds}{\left(x^3-s^2\right)^\ell},$$

$\mu=k+\lambda$, $k=\{\mu\}$-целая часть, $\lambda=\{\mu\}$ -дробная часть μ и $\alpha=m+\ell$, $m=\{\alpha\}$-целая часть, $\ell=\{\alpha\}$ -дробная часть α.

§ 2.3. Интегральное представление и решение задачи типа Рикье для одного дифференциального уравнения четвертого порядка с двумя сингулярными линиями

В работе И.Н. Векуа [3], дано представление многообразия решений уравнения с регулярными коэффициентами высшего порядка. На этой основе им были исследованы внутренние и внешние граничные задачи типа Рикье. В [31] были исследованы некоторые краевые задачи для уравнения осе симметрической теории поля. В данном случае это идея развивается для уравнения четвертого порядка с двумя сингулярными линиями.

В данном параграфе сначала даются интегральные представления решения уравнения второго порядка с двумя сингулярными линиями, затем используя связь решения уравнения четвертого порядка с уравнением второго порядка, находятся интегральные представления решений уравнения четвертого порядка.

Найденные интегральные представления решения применяются для решения задачи типа Рикье на плоскости.

Рассмотрим уравнение

$$\Pi_\beta\left[k(x,y)\Pi_\nu U\right]=0, \tag{2.3.1}$$

где

$$\Pi_\nu U=U_{xx}+U_{yy}+\frac{2\nu}{x}U_x+\frac{2\nu}{y}U_y\,,\; k(x,y)=\frac{|xy|^{2+\nu-\alpha}}{\left(x^2+y^2\right)},$$

ν,β - постоянные числа.

Пусть D- конечная область и симметричная относительно осей координат.

2.3.1. Интегральное представление решения уравнения второго порядка

В этом пункте сначала рассмотрим уравнение второго порядка с двумя сингулярными линиями вида

$$\Pi_\nu U\equiv U_{xx}+U_{yy}+\frac{2\nu}{x}U_x+\frac{2\nu}{y}U_y=0. \tag{2.3.2}$$

Теорема 2.3.1. *Пусть* $2\nu>1$. *Тогда регулярное решение уравнения* $(2.3.2)$ *в области* $D(xy\neq 0)$ *представимо в виде*

$$U(x,y)=B_\nu P_{1-\nu}\psi_1, \tag{2.3.3}$$

где $P_{1-\nu}\psi_1\equiv\int\limits_0^1\frac{\psi_1\left[x^2-y^2+2ixy(1-2\tau)\right]d\tau}{\left[\tau(1-\tau)\right]^{1-\nu}}$, B_ν *- постоянное число.*

Теорема 2.3.2. *Пусть* $0<2\nu<1$. *Тогда регулярное решение уравнения* $(2.3.2)$ *в области* $D(xy\neq 0)$ *представимо в виде*

$$U(x,y)=B_\nu P_{1-\nu}\psi_1+\operatorname{sgn} x \operatorname{sgn} y\,|xy|^{1-2\nu}B_{1-\nu}P_\nu\psi_2\,, \qquad (2.3.4)$$

где ψ_1 *и* ψ_2 *- произвольные функции,* $B_\nu, B_{1-\nu}$ *- постоянные числа.*

Теорема 2.3.3. *Пусть* $-1<2\nu<0$. *Тогда регулярное решение уравнения* $(2.3.2)$ *в области* $D(xy\neq 0)$ *представимо в виде*

$$\begin{aligned}U(x,y)&=B_{1+\nu}(1+2\nu)P_{-\nu}\psi_1+2B_{1+\nu}xyi\operatorname{sgn} x\operatorname{sgn} yP_{-\nu}\psi'_1(1-2\tau)+\\&+B_{1-\nu}\operatorname{sgn} x\operatorname{sgn} y\,|xy|^{1-2\nu}P_\nu\psi_2\,,\end{aligned} \qquad (2.3.5)$$

где $B_\nu, B_{1-\nu}$ *- постоянные числа,* ψ_1 *и* ψ_2 *- произвольные функции одного аргумента,* $\psi_1\in C^3[D(xy\neq 0)]$, $\psi_2\in C^2[D(xy\neq 0)]$.

Теоремы 2.3.1 – 2.3.3 доказываются непосредственно, чтобы убедиться в этом, ниже приводим доказательство одной из этих теорем.

Доказательство теоремы 2.3.3. В равенстве (2.3.5) применим оператор Π_ν:

$$\begin{aligned}
&L_\nu U(x,y)=L_\nu\left[B_{1+\nu}(1+2\nu)P_{-\nu}\psi_1+2B_{1+\nu}xyi\operatorname{sgn} x\operatorname{sgn} yP_{-\nu}\psi'_1(1-2\tau)\right]+\\
&+L_\nu\left[B_{1-\nu}\operatorname{sgn} x\operatorname{sgn} y|xy|^{1-2\nu}P_\nu\psi_2\right]=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[B_{1+\nu}(1+2\nu)P_{-\nu}\psi_1+2B_{1+\nu}xyi\operatorname{sgn} x\operatorname{sgn} yP_{-\nu}\psi'_1(1-2\tau)\right]+\\
&+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[B_{1+\nu}(1+2\nu)P_{-\nu}\psi_1+2B_{1+\nu}xyi\operatorname{sgn} x\operatorname{sgn} yP_{-\nu}\psi'_1(1-2\tau)\right]+\\
&+\frac{2\nu}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left[B_{1+\nu}(1+2\nu)P_{-\nu}\psi_1+2B_{1+\nu}xyi\operatorname{sgn} x\operatorname{sgn} yP_{-\nu}\psi'_1(1-2\tau)\right]+\\
&+\frac{2\nu}{y}\frac{\partial}{\partial y}\left[B_{1+\nu}(1+2\nu)P_{-\nu}\psi_1+2B_{1+\nu}xyi\operatorname{sgn} x\operatorname{sgn} yP_{-\nu}\psi'_1(1-2\tau)\right]+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[B_{1-\nu}\operatorname{sgn} x\operatorname{sgn} y|xy|^{1-2\nu}P_\nu\psi_2\right]+\\
&+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[B_{1-\nu}\operatorname{sgn} x\operatorname{sgn} y|xy|^{1-2\nu}P_\nu\psi_2\right]+\frac{2\nu}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left[B_{1-\nu}\operatorname{sgn} x\operatorname{sgn} y|xy|^{1-2\nu}P_\nu\psi_2\right]+\\
&+\frac{2\nu}{y}\frac{\partial}{\partial y}\left[B_{1-\nu}\operatorname{sgn} x\operatorname{sgn} y|xy|^{1-2\nu}P_\nu\psi_2\right]=\\
&\quad=2B_{1+\nu}(1+2\nu)P_{-\nu}\psi'_1+4x^2B_{1+\nu}(1+2\nu)P_{-\nu}\psi''_1+4B_{1+\nu}xyi(1+2\nu)P_{-\nu}\psi''_1\cdot(1-2\tau)+\\
&\quad+8B_{1+\nu}xyiP_{-\nu}\psi''_1\cdot(1-2\tau)+8B_{1+\nu}x^3yiP_{-\nu}\psi'''_1\cdot(1-2\tau)-8B_{1+\nu}x^2y^2P_{-\nu}\psi'''_1\cdot(1-2\tau)^2-\\
&\quad-4B_{1+\nu}y^2P_{-\nu}\psi''_1-8B_{1+\nu}x^2y^2P_{-\nu}\psi'''_1-8B_{1+\nu}xy^3iP_{-\nu}\psi'''_1\cdot(1-2\tau)-2(1+2\nu)B_{1+\nu}P_{-\nu}\psi'_1+\\
&\quad+4B_{1+\nu}y^2(1+2\nu)P_{-\nu}\psi''_1-4B_{1+\nu}(1+2\nu)xyiP_{-\nu}\psi''_1\cdot(1-2\tau)-8B_{1+\nu}xyiP_{-\nu}\psi''_1\cdot(1-2\tau)+\\
&\quad+8B_{1+\nu}xy^3iP_{-\nu}\psi'''_1\cdot(1-2\tau)+8B_{1+\nu}x^2y^2P_{-\nu}\psi'''_1\cdot(1-2\tau)^2-4B_{1+\nu}x^2P_{-\nu}\psi''_1+\\
&\quad+8B_{1+\nu}x^2y^2P_{-\nu}\psi'''_1-8B_{1+\nu}x^3yiP_{-\nu}\psi'''_1\cdot(1-2\tau)+4B_{1+\nu}(1+2\nu)P_{-\nu}\psi'_1+
\end{aligned}$$

$$+8B_{1+\nu}xyi\,\alpha P_{-\nu}\psi''_1\cdot(1-2\tau)-8B_{1+\nu}y^2\nu P_{-\nu}\psi''_1-4\nu B_{1+\nu}(1+2\nu)P_{-\nu}\psi'_1-$$

$$-8B_{1+\nu}xyiP_{-\nu}\psi''_1\cdot(1-2\tau)-8B_{1+\nu}x^2\nu P_{-\nu}\psi''_1-2B_{1-\nu}\nu y^2(1-2\nu)|xy|^{-1-2\nu}P_\nu\psi_2+$$

$$+4B_{1-\nu}xy(1-2\nu)|xy|^{-2\alpha}\nu P_\nu\psi_2-\frac{16y^2(1-2\nu)}{1-\nu}|xy|^{1-2\nu}P_{\nu-1}\psi''_2+4B_{1-\nu}x^2|xy|^{1-2\nu}P_\nu\psi''_2+$$

$$+8B_{1-\nu}xyi|xy|^{1-2\nu}P_\nu\psi''_2\cdot(1-2\tau)-4B_{1-\nu}y^2|xy|^{1-2\nu}P_\nu\psi''_2\cdot(1-2\tau)^2+2B_{1-\nu}|xy|^{1-2\alpha}\nu P_\nu\psi'_2-$$

$$-2B_{1-\nu}\nu x^2(1-2\nu)|xy|^{-1-2\nu}P_\nu\psi_2-4B_{1-\nu}xy(1-2\nu)|xy|^{-2\nu}P_\nu\psi'_2-\frac{16B_{1-\nu}x^2(1-2\nu)}{1-\nu}|xy|^{1-2\nu}P_{\nu-1}\psi''_2+$$

$$+4B_{1-\nu}y^2(1-2\nu)|xy|^{1-2\nu}P_\nu\psi''_2-8B_{1-\nu}xyi|xy|^{1-2\nu}P_\nu\psi''_2\cdot(1-2\tau)-4B_{1-\nu}x^2|xy|^{1-2\nu}P_\nu\psi''_2\cdot(1-2\tau)^2-$$

$$-2B_{1-\nu}|xy|^{1-2\nu}P_\nu\psi'_2+\frac{2B_{1-\nu}\nu y(1-2\nu)}{x}|xy|^{-2\nu}P_\nu\psi_2+4\nu B_{1-\nu}|xy|^{1-2\nu}P_\nu\psi'_2-\frac{16\nu y^2}{1-\nu}B_{1-\nu}|xy|^{1-2\nu}P_{\nu-1}\psi''_2+$$

$$+\frac{2x\nu(1-2\nu)}{y}B_{1-\nu}|xy|^{-2\nu}P_\nu\psi_2-4\nu B_{1-\nu}|xy|^{1-2\nu}P_\nu\psi'_2-\frac{16\nu x^2}{1-\nu}B_{1-\nu}|xy|^{1-2\nu}P_{\nu-1}\psi''_2=0.$$

Теорема доказана.

2.3.2. Связь решения уравнения четвертого порядка с решением уравнения второго порядка

Теорема 2.3.4. *Пусть* $\Pi_\nu U_\nu=0$ *и* $\Pi_\beta U_\beta=0$. *Тогда регулярное решение уравнения* (2.3.1) *при* $\beta>\nu$ *в области* $D(xy\neq 0)$ *представимо в виде*

$$U(x,y)=U_\alpha(x,y)+\operatorname{sgn}x\operatorname{sgn}y|xy|^{\beta-\nu}U_\beta(x,y). \qquad (2.3.6)$$

Доказательство. Применяя оператор Π_ν в равенстве(2.3.6), имеем

$$\Pi_\nu U=\Pi_\nu U_\nu+\Pi_\nu\left[\operatorname{sgn}x\operatorname{sgn}y|xy|^{\beta-\nu}U_\beta\right]=sngx\operatorname{sgn}y\Pi_\nu\left(|xy|^{\beta-\nu}U_\beta\right),$$

так как по условию теоремы $\Pi_\nu U_\nu=0$.

Теперь вычислим $\Pi_\nu\left(|xy|^{\beta-\nu}U_\beta\right)$, то есть

$$\Pi_\nu\left(|xy|^{\beta-\nu}U_\beta\right)=|xy|^{\beta-\nu}\Pi_\beta U_\beta+(\beta-\nu)(\beta+\nu-1)|xy|^{\beta-\nu-2}\left(x^2+y^2\right)U_\beta(x,y).$$

С учетом Π_β $U_\beta=0$, *и*з последнего равенства находим

$$\frac{|xy|^{2+\nu-\beta}}{x^2+y^2}\Pi_\nu U=(\beta-\nu)(\beta+\nu-1)U_\beta(x,y) \qquad (2.3.7)$$

Применяя оператор Π_β в равенстве (2.3.7), получим

$$\Pi_\beta\left[\frac{|xy|^{2+\nu-\beta}}{x^2+y^2}\Pi_\alpha U\right]=(\beta-\nu)(\beta+\nu-1)\Pi_\beta U_\beta=0.$$

Теорема доказана.

2.3.3. Интегральные представления решения уравнения четвертого порядка

В этом пункте в зависимости от принимаемых значений коэффициентов уравнения даётся интегральное представление решений в явном виде.

Теорема 2.3.5. *Пусть* $2\nu > 1,\ \ 2\beta > 1$ *и* $\beta > \nu$. *Тогда регулярное решение уравнения* $(2.3.1)$ *в области* $D(xy \neq 0)$ *представимо в виде*

$$U(x, y) = B_\nu P_{1-\nu}\psi_1 + \operatorname{sgn} x \operatorname{sgn} y |xy|^{\beta-\nu} B_\beta P_{1-\beta}\phi_1\ , \tag{2.3.8}$$

где B_ν, B_β *- постоянные числа,* $\psi_{1,}\phi_1$ *- произвольные функции одного аргумента из* C^2.

Теорема 2.3.6. *Пусть* $0 < 2\nu < 1,\ 2\beta > 1,$ *и* $\beta > \nu$. *Тогда регулярное решение уравнения* $(2.3.1)$ *в области* $D(xy \neq 0)$ *представимо в виде*

$$U(x, y) = B_\nu P_{1-\nu}\psi_1 + B_{1-\nu} \operatorname{sgn} x \operatorname{sgn} |xy|^{1-2\nu} P_\nu \psi_2 + \operatorname{sgn} x \operatorname{sgn} y |xy|^{\beta-\nu} B_\nu P_{1-\nu}\phi_1\ , \tag{2.3.9}$$

где $B_\nu, B_{1-\nu}, B_\beta$ *- постоянные числа,* ψ_1, ψ_2 *и* ϕ_1 *произвольные функции одного аргумента.*

Теорема 2.3.7. *Пусть* $\beta > \nu$ *и* $0 < 2\nu < 1,\ 0 < 2\beta < 1$. *Тогда регулярное решение уравнения* $(2.3.1)$ *в области* $D(xy \neq 0)$ *представимо в виде*

$$\begin{aligned} U(x, y) &= B_\nu P_{1-\nu}\psi_1 + \operatorname{sgn} x \operatorname{sgn} y B_{1-\nu} |xy|^{1-2\nu} P_\nu \psi_2 + \\ &+ \operatorname{sgn} x \operatorname{sgn} y |xy|^{\beta-\nu} \left(B_\nu P_{1-\beta}\phi_1 + A_{1-\beta} \operatorname{sgn} x \operatorname{sgn} y |xy|^{1-2\beta} P_\beta \phi_2 \right), \end{aligned} \tag{2.3.10}$$

где $B_\nu, B_{1-\nu}, B_\beta, B_{1-\beta}$ *- постоянные числа и* $\psi_1, \psi_2, \phi_1, \phi_2$ *- произвольные функции одного аргумента.*

Теорема 2.3.8. *Пусть* $-1 < 2\nu < 0$ *и* $2\beta > 1$. *Тогда регулярное решение уравнения* $(2.3.1)$ *в области* $D(xy \neq 0)$ *представимо в виде*

$$\begin{aligned} U(x, y) &= B_{1+\nu}(1 + 2\nu) P_{-\nu}\psi_1 + 2B_{1+\nu} xyi \operatorname{sgn} x \operatorname{sgn} y P_{-\nu}\psi'_1 (1 - 2\tau) + \\ &+ B_{1-\nu} \operatorname{sgn} x \operatorname{sgn} y |xy|^{1-2\nu} P_\nu \psi_2 + B_\beta \operatorname{sgn} x \operatorname{sgn} y |xy|^{\beta-\nu} P_{1-\beta}\phi_1, \end{aligned} \tag{2.3.11}$$

где $B_{1+\nu}, B_{1-\nu}, B_{\beta}$ *- постоянные числа,* ψ_1, ψ_2, ϕ_1 *- произвольные функции:* $\psi_1 \in C^3[D(xy \neq 0)]$ *,* $\psi_2, \phi_1 \in C^2[D(xy \neq 0)]$.

Теорема 2.3.9. *Пусть* $0 < 2\beta < 1$ *и* $-1 < 2\nu < 0$ *. Тогда регулярное решение уравнения* $(2.3.1)$ *в области* $D(xy \neq 0)$ *представимо в виде*

$$\begin{aligned} U(x,y) &= B_{1+\nu}(1+2\nu)P_{-\nu}\psi_1 + 2B_{1+\nu}xyi \operatorname{sgn} x \operatorname{sgn} y P_{-\nu}\psi'_1(1-2\tau) + \\ &+ B_{1-\nu} \operatorname{sgn} x \operatorname{sgn} y |xy|^{1-2\nu} P_{\nu}\psi_2 + \\ &+ B_{\beta} \operatorname{sgn} x \operatorname{sgn} y |xy|^{\beta-\nu} \left[B_{\beta}P_{1-\beta}\phi_1 + B_{1-\beta} \operatorname{sgn} x \operatorname{sgn} y |xy|^{1-2\beta} P_{\beta}\phi_2 \right], \end{aligned} \tag{2.3.12}$$

где $\psi_1, \psi_2, \phi_1, \phi_2$ *- произвольные функции из класса* $\psi_1 \in C^3[D(xy \neq 0)]$ *,* $\psi_2, \phi_1, \phi_2 \in C^2[D(xy \neq 0)]$.

Теорема 2.3.10. *Пусть* $-1 < 2\alpha < 0$ *и* $-1 < 2\beta < 0$*. Тогда регулярное решение уравнения* $(2.3.1)$ *в области* $D(xy \neq 0)$ *представимо в виде*

$$\begin{aligned} &U(x,y) = B_{1+\nu}(1+2\nu)P_{-\nu}\psi_1 + 2B_{1+\nu}xyi \operatorname{sgn} x \operatorname{sgn} y P_{-\nu}\psi'_1(1-2\tau) + \\ &+ B_{1-\nu} \operatorname{sgn} x \operatorname{sgn} y |xy|^{1-2\nu} P_{\nu}\psi_2 + B_{\beta} \operatorname{sgn} x \operatorname{sgn} y |xy|^{\beta-\nu} \left[B_{1+\beta}(1+2\beta)P_{-\beta}\phi_1 + \right. \\ &\left. 2B_{1+\beta}xyi \operatorname{sgn} x \operatorname{sgn} y P_{-\beta}\phi'_1(1-2\tau) + B_{1-\beta} \operatorname{sgn} x \operatorname{sgn} y |xy|^{1-2\beta} P_{\beta}\phi_2 \right], \end{aligned} \tag{2.3.13}$$

где $B_{1+\alpha}, B_{1-\alpha}, B_{1+\beta}, B_{1-\beta}$ *- постоянные числа,* $\psi_1, \psi_2, \phi_1, \phi_2$ *- произвольные функции из класса:* $\phi_1, \psi_1 \in C^3[D(xy \neq 0)]$*,* $\phi_2, \psi_2 \in C^2[D(xy \neq 0)]$.

Теоремы 2.3.5 – 2.3.10 доказываются на основании теорем 2.3.1- 2.3.4. Используя результаты теорем 2.3.1 – 2.3.4 и формулы $(2.3.6)$, можно убедиться в справедливости равенств $(2.3.8)$ - $(2.3.13)$ и теорем 2.3.5 – 2.3.10.

2.3.4. Задача типа Рикье и теорема единственности

Задача R. Требуется найти регулярное решение уравнения $(2.3.1)$ в области $D(xy \neq 0)$, при $\beta > \nu$ в виде $(2.3.6)$, по граничным условиям

$$U|_{\Gamma} = f(x,y), \qquad (k(x,y)\Pi_{\nu}U)|_{\Gamma} = g(x,y), \tag{R}$$

где $f(x,y)$ и $g(x,y)$ - заданные непрерывные функции на границе области D.

Теорема 2.3.11. *Задача* (R) *при однородных граничных условиях*

$$U|_{\Gamma} = 0 \qquad и \qquad [k(x,y)\Pi_{\nu}U]_{\Gamma} = 0, \tag{R_o}$$

в области $D(xy \neq 0)$ *имеет только нулевое решение.*

Доказательство. Пусть $U(x,y)$ и $V(x,y)$ регулярные функции оператора Π_ν то справедлива следующая формула Грина:

$$\iint\limits_D |xy|^{2\beta}\left(V\Pi_\beta U - U\Pi_\beta V\right)dxdy = \int\limits_\Gamma |xy|^{2\beta}\left(V\frac{\partial U}{\partial n} - U\frac{\partial U}{\partial n}V\right)d\,\Gamma$$

при $2\nu \geq 1$.

Теперь в этой формуле, предполагая, что $U = U,\ V = k(x,y)\Pi_\nu U,$ имеем

$$-\iint\limits_D |xy|^{2\nu}\left(U\Pi_\nu\left[k(x,y)\Pi_\nu U\right] - k(x,y)\Pi_\nu U\cdot\Pi_\beta U\right] =$$

$$= \int\limits_\Gamma |xy|^{2\nu}\left(k(x,y)\Pi_\nu U\frac{\partial u}{\partial n} - U\frac{\partial\left[k(x,y)\Pi_\nu U\right]}{\partial n}\right)d\Gamma.$$

Предположим, что вышеприведенные интегралы существуют и $U(x,y)$ регулярное решение уравнения $(2.3.1)$, то есть

$$\Pi_\beta\left[k(x,y)\Pi_\nu U\right] = 0.$$

Тогда получим

$$\iint\limits_D |xy|^{2\beta}k(x,y)\Pi_\nu U\cdot\Pi_\beta Udxdy = \iint\limits_\Gamma |xy|^{2\nu}\left(k(x,y)\Pi_\nu U\cdot\frac{\partial u}{\partial n} - U\frac{\partial\left[k(x,y)\Pi_\nu U\right]}{\partial n}\right)d\Gamma.$$

Учитывая условия (R_o) на Γ, имеем

$$\iint\limits_D |xy|^{2\beta}k(x,y)\Pi_\nu U\cdot\Pi_\beta Udxdy = 0.$$

В области $D(xy \neq 0)$, $|xy|^{2\beta} \neq 0,\ k(x,y) \neq 0,\ \Pi_\nu U \neq 0, \Pi_\beta U \neq 0.$ Возможно $\Pi_\nu U = 0,\ \Pi_\beta U = 0$, тогда и только тогда, когда $U = 0$ или $U = const$. Из представления $(2.3.6)$ видно, что функция $U(x,y)$ не может принимать постоянное значение в области $D(xy \neq 0)$, остается только случай $U(x,y) = 0$. Таким образом доказано, что задача R с граничными условиями (R) единственна.

Пусть Γ - окружность единичного радиуса, L^+ - верхняя полуокружность, L^- - нижняя полуокружность.

Используя представления $(2.3.6)$, $(2.3.7)$ и условия (R), получим

$$U\big|_{L}+=U_{\nu}\big|_{L}+\operatorname{sgn}x\operatorname{sgn}y|xy|^{\beta-\nu}U_{\beta}\big|_{L}+=f(x,y),$$
$$k(x,y)\Pi_{\nu}U\big|_{L}+=(\beta-\nu)(\beta+\nu-1)U_{\beta}\big|_{L}+=g(x,y).$$

Следовательно, решение задачи R распадается на решение двух задач типа Дирихле для уравнений $\Pi_{\beta}U_{\beta}=0$ и $\Pi_{\nu}U_{\alpha}=0$ с граничными условиями

$$\Pi_{\nu}\Big|_{L+}=\frac{1}{(\beta-\nu)(\nu+\beta-1)}g(x,y),\qquad U_{\nu}\Big|_{L+}=\tilde{f}(x,y),$$

где

$$\tilde{f}(x,y)=f(x,y)-\frac{\operatorname{sgn}x\operatorname{sgn}y\cdot|xy|^{\beta-\nu}}{(\beta-\nu)(\nu+\beta-1)}g(x,y).$$

Уравнения $\Pi_{\nu}U_{\alpha}=0$ при замене $\xi=x^2-y^2$ и $\eta=2xy$ сводятся к уравнению Э-П-Д, то есть

$$\Delta u+\frac{2\nu}{\eta}u=0.$$

Задача Дирихле для последнего уравнения для положительных значений ν исследована в [4], а для отрицательных значений ν исследована в [7]. Используя результаты [4], находим решение задачи Дирихле для уравнений $\Pi_{\nu}U_{\nu}=0$ и $\Pi_{\beta}U_{\beta}=0$. Найденные решения, подставляя в (2.3.6), находим решение задачи типа Рикье для уравнения (2.3.1).

§ 2.4. Интегральные представления и решение задач типа Коши для одного вырождающегося дифференциального уравнения четвёртого порядка первого рода вида Гельмгольца

В области D^{-} рассмотрим уравнение следующего вида:

$$\Pi_{b}^{\lambda}\left[(-y)^{2+a-b}\Pi_{a}^{\lambda}U(x;y)\right]=0, \tag{2.4.1}$$

где $\Pi_{a}^{\lambda}U\equiv(-y)^{m}u_{xx}-u_{yy}-\frac{2a}{y}u_{y}-\lambda^{2}(-y)^{m}$ и $\Pi_{b}^{\lambda}U\equiv(-y)^{m}u_{xx}-u_{yy}-\frac{2b}{y}u_{y}-\lambda^{2}(-y)^{m}$,

$a,b,-$ вещественные числа.

Введём следующий интегральный оператор:

$$\mathrm{P}_{\beta}^{\lambda}\varphi_{j}=\int_{0}^{1}\frac{\varphi_{j}\left[\lambda\left(\sqrt{2}x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2\tau)\right)\right]d\tau}{[\tau(1-\tau)]^{\beta}},\quad(j=1,2,3,4),$$

где φ_j – произвольные функции.

Теорема 2.4.1. *Если* $\Pi_a^\lambda U_\alpha = 0, \Pi_b^\lambda U_b = 0.$ *Тогда регулярное решение уравнения (2.4.1) в области* D^- *при* $b > a$ *представимо в виде*

$$U(x,y) = U_\alpha(x,y) + (-y)^{b-a} U_b(x,y), \qquad (2.4.2)$$

где U_α, U_b *– решения уравнения второго порядка.*

Доказательство. В равенстве (2.4.2) применяем оператор Π_a^λ:

$$\Pi_\alpha^\lambda U(x,y) = \Pi_a^\lambda U_\alpha + \Pi_a^\lambda \left[(-y)^{b-a} U_b\right].$$

По условию теоремы $\Pi_a^\lambda U_\alpha = 0$ следовательно, получим

$$\Pi_a^\lambda U(x,y) = \Pi_a^\lambda \left[(-y)^{b-a} U_b\right]. \qquad (2.4.3)$$

В правой части равенства (2.4.3) применяем оператор Π_a^λ и получим

$$L_a^\lambda U(x;y) = \left((-y)^m u_{xx} - u_{yy} - \frac{2a}{y} u_y - \lambda^2 (-y)^m u \right)\left[(-y)^{b-a} U_b\right] =$$

$$(-y)^m \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[(-y)^{b-a} U_b\right] - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[(-y)^{b-a} U_b\right] - \frac{2a}{y}\frac{\partial}{\partial y}\left[(-y)^{b-a} U_b\right] - \lambda^2 (-y)^m (-y)^{b-a} U_b =$$

$$= (-y)^m \frac{\partial}{\partial x}\left[(-y)^{b-a} U'_b\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[-(b-a)(-y)^{b-a-1} U_b + (-y)^{b-a} U'_b\right] -$$

$$-\frac{2a}{y}\left[-(b-a)(-y)^{b-a-1} U_b + (-y)^{b-a} U'_b\right] - \lambda^2 (-y)^m (-y)^{b-a} U_b =$$

$$= (-y)^m (-y)^{b-a} U''_b - \left[(b-a)(b-a-1)(-y)^{b-a-2} U_b - 2(b-a)(-y)^{b-a-1} U'_b\right] -$$

$$-(-y)^{b-a} U''_b - \frac{2a}{y}\left[-(b-a)(-y)^{b-a-1} U_b + (-y)^{b-a} U'_b\right] - \lambda^2 (-y)^m (-y)^{b-a} U_b =$$

$$= (-y)^m (-y)^{b-a} U''_b - (b-a)(b-a-1)(-y)^{b-a-2} U_b + 2(b-a)(-y)^{b-a-1} U'_b -$$

$$-(-y)^{b-a} U''_b - 2a(b-a)(-y)^{b-a-2} U_b - \frac{2a}{y}(-y)^{b-a} U'_b - \lambda^2 (-y)^m (-y)^{b-a} U_b$$

$$\Pi_a^\lambda U(x;y) = (-y)^{b-a}\left((-y)^m U''_b - U''_b - \left(\frac{2a}{y} - \frac{2(b-a)}{y}\right) U'_b - \lambda^2 (-y)^m U_b \right) +$$

$$+\left[-(b-a)(b-a-1) - 2a(b-a)\right](-y)^{b-a-2} U_b,$$

$$\Pi_a^\lambda U(x;y) = (-y)^{b-a}\left((-y)^m U''_b - U''_b - \frac{2b}{y} U'_b - \lambda^2 (-y)^m U_b \right) +$$

$$+\left[-(b-a)(b-a-1) - 2a(b-a)\right](-y)^{b-a-2} U_b$$

По условию теоремы 2.4.1 первое слагаемое равно нулю.

Итак, $\Pi_a^\lambda U(x;y)=[-(b-a)(b-a-1)-2a(b-a)](-y)^{b-a-2}U_b$. (2.4.4)

Обе части равенства (2.4.4) делим на $(-y)^{b-a-2}$ и имеем

$$(-y)^{2+a-b}\Pi_a^\lambda U(x;y)=(a-b)(b+a-1)U_b.$$

В последнем равенстве, применяя оператор Π_b^λ, с учётом условий теоремы получим

$$\Pi_b^\lambda\left[(-y)^{2+a-b}\Pi_a^\lambda U(x;y)\right]=(a-b)(b+a-1)\Pi_b^\lambda U_b=0.$$

Теорема доказана.

Теорема 2.4.2. *Пусть* $2\alpha\ge 1,\ 2\beta\ge 1,\ b>a$ *и* $\varphi''-\varphi=0,\ \psi''-\psi=0$. *Тогда регулярное решение уравнения (2.4.1) в области* D^- *представимо в виде*

$$U(x,y)=A_{m,a}\mathrm{P}_{1-\alpha}\varphi_1+A_{m,b}(-y)^{b-a}\mathrm{P}_{1-\beta}\psi_1, \tag{2.4.5}$$

где φ_1,ψ_1- *произвольные функции одного аргумента из класса* $C^2(D^-)$ *и*

$\alpha=\dfrac{m+4a}{2(m+2)},\ \beta=\dfrac{m+4b}{2(m+2)},\ A_{m,a}=\dfrac{1}{B\left(\frac{m+4a}{2(m+2)},\frac{m+4a}{2(m+2)}\right)},\ A_{m,b}=\dfrac{1}{B\left(\frac{m+4b}{2(m+2)},\frac{m+4b}{2(m+2)}\right)},$ $B\left(\frac{m+4a}{2(m+2)},\frac{m+4a}{2(m+2)}\right),$

$B\left(\frac{m+4b}{2(m+2)},\frac{m+4b}{2(m+2)}\right)-$ *функция Эйлера второго рода.*

Теорема 2.4.3. *Пусть* $0<2\alpha<1,\ 2\beta\ge 1,\ b>a$ *и* $\varphi_1''-\varphi_1=0,$ $\varphi_2''-\varphi_2=0,\ \psi''-\psi=0$. *Тогда регулярное решение уравнения (2.4.1) в области* D^- *представимо в виде*

$$U(x,y)=A_{m,a}\mathrm{P}_{1-\alpha}\varphi_1+B_{m,a}(-y)^{1-2a}\mathrm{P}_\alpha\varphi_2+A_{m,b}(-y)^{b-a}\mathrm{P}_{1-\beta}\psi_1, \tag{2.4.6}$$

где $\varphi_1,\varphi_2,\psi_1-$ *произвольные функции одного аргумента из класса* $C^2(D^-)$ *и*

$$B_{m,a}=\frac{1}{B\left(\frac{m+4-4a}{2(m+2)},\frac{m+4-4a}{2(m+2)}\right)}.$$

Теорема 2.4.4. *Пусть* $0<2\alpha<1,\ 0<2\beta<1,\ b>a$ *и* $\varphi_1''-\varphi_1=0,\ \varphi_2''-\varphi_2=0,\ \psi_1''-\psi_1=0,\ \psi_2''-\psi_2=0$. *Тогда регулярное решение уравнения (2.4.1) в области* D^- *представимо в виде*

$$\begin{aligned}U(x,y)&=A_{m,a}\mathrm{P}_{1-\alpha}\varphi_1+B_{m,a}(-y)^{1-2a}\mathrm{P}_\alpha\varphi_2+A_{m,b}(-y)^{b-a}\mathrm{P}_{1-\beta}\psi_1+\\&+C_{m,b}(-y)^{1-b-a}\mathrm{P}_\beta\psi_2,\end{aligned} \tag{2.4.7}$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2 -$ *произвольные функции одного аргумента из класса* $C^2(D^-)$ *и* $B_{m,a} = \dfrac{1}{B(\frac{m+4-4a}{2(m+2)}, \frac{m+4-4a}{2(m+2)})}, \quad C_{m,b} = \dfrac{1}{B(\frac{m+4-4b}{2(m+2)}, \frac{m+4-4b}{2(m+2)})}.$

Теорема 2.4.5. *Пусть* $-1 < 2\alpha < 0,\ 2\beta \geq 1,\ b > a$ *и* $\varphi_1''-\varphi_1 = 0,\ \varphi_2''-\varphi_2 = 0,\quad \psi''-\psi = 0.$ *Тогда регулярное решение уравнения (2.4.1) в области* D^- *представимо в виде*

$$U(x,y) = \tilde{A}_{m,a}(1+2\alpha)\mathrm{P}_{-\alpha}\varphi_1 - \frac{2\lambda}{m+2}\tilde{A}_{m,a}(-y)^{\frac{m+2}{2}}\mathrm{P}_{-\alpha}\varphi'_1\cdot(1-2\tau) + \\ + B_{m,a}(-y)^{1-2a}\mathrm{P}_{\alpha}\varphi_2 + A_{m,b}(-y)^{b-a}\mathrm{P}_{1-\beta}\psi, \tag{2.4.8}$$

где $\varphi_1 \in c^3(D^-),\ \varphi_2, \psi \in c^2(D^-) -$ *произвольные функции одного аргумента и* $\tilde{A}_{m,a} = \dfrac{1}{B(\frac{3m+4+4a}{2(m+2)}, \frac{3m+4+4a}{2(m+2)})}.$

Теорема 2.4.6. *Пуст* $-1 < 2\alpha < 0,\ 0 < 2\beta < 1,\ b > a$ *и* $\varphi_1''-\varphi_1 = 0,\ \varphi_2''-\varphi_2 = 0,\ \psi_1''-\psi_1 = 0,\ \psi_2''-\psi_2 = 0.$ *Тогда регулярное решение уравнения (2.4.1) в области* D^- *представимо в виде*

$$U(x,y) = \tilde{A}_{m,a}(1+2\alpha)\mathrm{P}_{-\alpha}\varphi_1 - \frac{2\lambda}{m+2}\tilde{A}_{m,a}(-y)^{\frac{m+2}{2}}\mathrm{P}_{-\alpha}\varphi'_1\cdot(1-2\tau) + \\ + B_{m,a}(-y)^{1-2a}\mathrm{P}_{\alpha}\varphi_2 + A_{m,b}(-y)^{b-a}\mathrm{P}_{1-\beta}\psi_1 + C_{m,b}(-y)^{1-b-a}\mathrm{P}_{\beta}\psi_2, \tag{2.4.9}$$

где $\varphi_1 \in c^3(D^-),\ \varphi_2, \psi_1, \psi_2 \in c^2(D^-) -$ *произвольные функции одного аргумента и* $\tilde{A}_{m,a} = \dfrac{1}{B(\frac{3m+4+4a}{2(m+2)}, \frac{3m+4+4a}{2(m+2)})}, \quad C_{m,b} = \dfrac{1}{B(\frac{m+4-4b}{2(m+2)}, \frac{m+4-4b}{2(m+2)})}.$

Теорема 2.4.7. *Пусть* $-1 < 2\alpha < 0,\ -1 < 2\beta < 0,\ b > a$ *и* $\varphi_1''-\varphi_1 = 0,\ \varphi_2''-\varphi_2 = 0,\ \psi_1''-\psi_1 = 0,\ \psi_2''-\psi_2 = 0.$ *Тогда регулярное решение уравнения (2.4.1) в области* D^- *представимо в виде*

$$U(x,y) = \tilde{A}_{m,a}(1+2\alpha)\mathrm{P}_{-\alpha}\varphi_1 - \frac{2\lambda}{m+2}\tilde{A}_{m,a}(-y)^{\frac{m+2}{2}}\mathrm{P}_{-\alpha}\varphi'_1\cdot(1-2\tau) + \\ + B_{m,a}(-y)^{1-2a}\mathrm{P}_{\alpha}\varphi_2 + \tilde{A}_{m,b}(1+2\beta)(-y)^{b-a}\mathrm{P}_{-\beta}\psi_1 - \\ - \frac{2\lambda}{m+2}\tilde{A}_{m,b}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(-y)^{b-a}\mathrm{P}_{-\beta}\psi'_1\cdot(1-2\tau) + C_{m,b}(-y)^{1-b-a}\mathrm{P}_{\beta}\psi_2, \tag{2.4.10}$$

где $\varphi_1 \in c^3(D^-),\ \varphi_2, \psi_1, \psi_2 \in c^2(D^-)$ *– произвольные функции одного аргумента и* $\widetilde{A}_{m,b} = \dfrac{1}{B(\frac{3m+4+4b}{2(m+2)}, \frac{3m+4+4b}{2(m+2)})}$, $C_{m,b} = \dfrac{1}{B(\frac{m+4-4b}{2(m+2)}, \frac{m+4-4b}{2(m+2)})}$.

Теоремы 2.4.2 - 2.4.7 с учётом равенств (2.4.5) - (2.4.10) доказываются непосредственно, чтобы убедиться в этом приводим доказательство одну из этих теорем.

Доказательство теоремы 2.4.6. В равенстве (2.4.9) применим оператор L_a^λ и имеем

$$\Pi_a^\lambda U(x,y) = \Pi_a^\lambda\left[\widetilde{A}_{m,a}(1+2\alpha)\mathrm{P}_{-\alpha}\varphi_1 - \frac{2\lambda}{m+2}\widetilde{A}_{m,a}(-y)^{\frac{m+2}{2}}\mathrm{P}_{-\alpha}\varphi'_1\cdot(1-2\tau)\right]+$$
$$+\Pi_a^\lambda\left[B_{m,a}(-y)^{1-2a}\mathrm{P}_\alpha\varphi_2\right]+\Pi_a^\lambda\left[A_{m,b}(-y)^{b-a}\mathrm{P}_{1-\beta}\psi_1\right]+\Pi_a^\lambda\left[C_{m,b}(-y)^{1-b-a}\mathrm{P}_\beta\psi_2\right]=$$
$$= J_1 + J_2 + J_3 + J_4.$$

Легко можно видеть, что $J_1 = 0,\ J_2 = 0.$

Теперь вычислим J_3 и J_4:

$$J_3 = \Pi_a^\lambda\left[A_{m,b}(-y)^{b-a}\mathrm{P}_{1-\beta}\psi_1\right]. \tag{2.4.11}$$

В правой части равенства (2.4.11) вычислим частные производные до второго порядка по x, y и после некоторых упрощений получим

$$J_3 = (a-b)(b-a-1)(-y)^{b-a-2}\cdot\mathrm{P}_{1-\beta}\psi_1.$$

Из последнего равенства имеем

$$(-y)^{2+a-b}J_3 = (a-b)(b-a-1)\mathrm{P}_{1-\beta}\psi_1.$$

Теперь применяем оператор Π_b^λ и получим

$$\Pi_b^\lambda\left[(-y)^{2+a-b}J_3\right] = (a-b)(b-a-1)\Pi_b^\lambda\mathrm{P}_{1-\beta}\psi_1 = 0.$$

Таким образом $\Pi_b^\lambda\mathrm{P}_{1-\beta}\psi_1 = 0$.

Теперь вычислим J_4:

$$J_4 = \Pi_a^\lambda\left[C_{m,b}(-y)^{1-b-a}\mathrm{P}_\beta\psi_2\right].$$

Аналогично вычислим частные производные первого и второго порядка по x, y и после некоторых упрощений получим

$$J_4=(a-b)(a+b-1)(-y)^{b-a-2}(-y)^{1-2b}\mathrm{P}_\beta\psi_2 .$$

Теперь применяем оператор Π_b^λ и придем к равенству

$$\Pi_b^\lambda\left[(-y)^{2+a-b}J_4\right]=(a-b)(a+b-1)\Pi_b^\lambda\left[(-y)^{1-2b}\mathrm{P}_\beta\psi_2\right]=0$$

Теорема доказана.

Теперь некоторые полученные интегральные представления применяем для решения задач типа Коши в характеристической области D^-.

Задача $K_{2.4.1}$**.** Требуется найти регулярное решение уравнения (2.4.1) в области D⁻ при $2\alpha\geq 1$, $2\beta\geq 1$, $\beta>\alpha$ и $b-a<1$, удовлетворяющее начальным условиям

$$\lim_{y\to -0}\mathrm{u}(x,y)=f_1(\lambda x),\qquad \lim_{y\to -0}(-y)^{1+a-b}\frac{\partial u}{\partial y}=g_1(\lambda x), \qquad (K_{2.4.1})$$

где $f_1(\lambda x)$, $g_1(\lambda x)$ -заданные непрерывные функции, a,b -постоянные числа.

Решение задачи $K_{2.4.1}$**.** Для решения задачи $K_{2.4.1}$ применяем интегральное представление решения (2.4.5).

Теорема 2.4.8. *Пусть* $b-a<1$, $a>\nu$ *и* $2\alpha\geq 1$, $2\beta\geq 1$. *Тогда решение задачи* $K_{2.4.1}$ *в области* D^- *даётся формулой*

$$U(x,y)=\frac{1}{\mathrm{B}(\alpha,\alpha)}\int_0^1\frac{f_1\left[\lambda\left(x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{22}}(1-2t)\right)\right]dt}{[t(1-t)]^{1-\alpha}}+$$
$$+\frac{1}{(a-b)\mathrm{B}(\beta,\beta)}(-y)^{b-a}\int_0^1\frac{g_1\left[\lambda\left(x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{22}}(1-2t)\right)\right]dt}{[t(1-t)]^{1-\beta}}, \qquad (2.4.12)$$

где f_1, g_1 *-заданные функции из класса* $C^2(D^-)$, $\alpha=\dfrac{m+4a}{2(m+2)}$, $\beta=\dfrac{m+4b}{2(m+2)}$ *-постоянные числа.*

Легко можно проверить, что равенство (2.4.12) удовлетворяет уравнению (2.4.1) и начальным условиям $(K_{2.4.1})$.

Задача $K_{2.4.2}$**.** Требуется найти регулярное решение уравнения (2.4.1) в области D⁻ при $b<\dfrac{m}{2}+2-a,$ и $0<2\alpha<1, 2\beta\geq 1$ удовлетворяющее начальным условиям

$$\lim_{y\to -0} u(x,y) = f_1(\lambda x), \qquad \lim_{y\to -0} (-y)^{2\alpha} \frac{\partial u}{\partial y} = f_2(\lambda x),$$

$$\lim_{y\to -0} \left\{ (-y)^{2-a-b} \frac{\partial}{\partial y} \left[(-y)^{2a} \frac{\partial u}{\partial y} \right] \right\} = g_1(\lambda x), \qquad (K_{2.4.2})$$

где $f_1(x)$, $f_2(x)$, $g_1(x)$ -заданные функции на $0 < x < 1$, a, b -постоянные числа.

Решение задачи $K_{2.4.2}$**.** Для решения данной задачи воспользуемся интегральным представлением (2.4.6).

Теорема 2.4.9. *Пусть* $0 < 2\alpha < 1,\ 2\beta \ge 1$ *и* $b < \frac{m}{2} + 2 - a$. *Тогда решение задачи* $K_{2.4.2}$ *в области* D^- *даётся формулой*

$$U(x,y) = \frac{1}{\mathrm{B}(\alpha,\alpha)} \int_0^1 \frac{f_1\left[\lambda\left(x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{22}}(1-2t)\right)\right]dt}{[t(1-t)]^{1-\alpha}} +$$
$$+ \frac{1}{(a-b)\mathrm{B}(1-\alpha,1-\alpha)}(-y)^{1-2a} \int_0^1 \frac{f_2\left[\lambda\left(x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{22}}(1-2t)\right)\right]dt}{[t(1-t)]^{\alpha}} +$$
$$+ \frac{1}{(b-a)(b+a-1)\mathrm{B}(\beta,\beta)}(-y)^{b-a} \int_0^1 \frac{g_1\left[\lambda\left(x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{22}}(1-2t)\right)\right]dt}{[t(1-t)]^{1-\beta}}, \qquad (2.4.13)$$

где $f_1(x)$, $f_2(x)$, $g_1(x)$ *-заданные функции из класса* $C^2(D^-)$, $\alpha = \frac{m+4a}{2(m+2)}$, $\beta = \frac{m+4b}{2(m+2)}$, a, b, m *-постоянные числа.*

Легко можно проверить, что равенство (2.4.13) удовлетворяет уравнению (2.4.1) и начальным условиям $K_{2.4.2}$.

§2.5. Интегральные представление и решение задача типа Коши для одного вырождающегося дифференциального уравнения четвёртого порядка первого рода вида Гельмгольца в пространстве

В данном параграфе исследуется вырождающееся дифференциальное уравнение первого рода вида Гельмгольца в пространстве. Сначала получим интегральные представления решения уравнения, затем найденные интегральные представления применяются для решения задач типа Коши.

Рассмотрим в трехмерном пространстве следующее вырождающееся дифференциальное уравнение четвертого порядка первого рода вида Гельмгольца

$$L_b^\lambda\left[(-y)^{2+a-b}L_a^\lambda U(x_1;x_1;y)\right]=0, \tag{2.5.1}$$

где $L_a^\lambda U\equiv(-y)^m\Delta u-u_{yy}-\dfrac{2a}{y}u_y-\lambda^2(-y)^m u$, $L_b^\lambda U\equiv(-y)^m\Delta u-u_{yy}-\dfrac{2b}{y}u_y-\lambda^2(-y)^m$,

$a,b-$вещественные числа, $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}-$оператор Лапласа.

Пусть $D^-\in R^3$ - конечная область, ограниченная частью плоскости $y=0$ и при $y<0$ характеристической поверхностью конуса S уравнения (2.5.1).

Введём следующий интегральный оператор:

$$\mathrm{P}_\beta^\lambda\varphi_i=\int_0^1\frac{\varphi_i\left[\lambda\left(x_1+x_2-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2t)\right)\right]dt}{[t(1-t)]^\beta},\ (i=1,2,3,4),$$

где φ_j $-$произвольные функции.

Теорема 2.5.1. *Если* $\Pi_a^\lambda U_\alpha=0$ *и* $\Pi_b^\lambda U_b=0.$ *Тогда регулярное решение уравнения (2.5.1) в области* D^- *при* $b>a$ *представимо в виде*

$$U(x,y)=U_a(x,y)+(-y)^{b-a}U_b(x,y), \tag{2.5.2}$$

где U_α,U_b *– решение уравнения второго порядка.*

Доказательство. В равенстве (2.5.2) применяем оператор Π_a^λ :

$$\Pi_a^\lambda U(x,y)=\Pi_a^\lambda U_\alpha+\Pi_a^\lambda\left[(-y)^{b-a}U_b\right].$$

По условию теоремы $\Pi_a^\lambda U_\alpha=0$, следовательно, получим

$$\Pi_a^\lambda U(x,y)=\Pi_a^\lambda\left[(-y)^{b-a}U_b\right]. \tag{2.5.3}$$

В правой части равенства (2.5.3) применяем оператор L_a^λ и получим

$$\Pi_a^\lambda U(x;y)=\left((-y)^m\Delta u-u_{yy}-\frac{2a}{y}u_y-\lambda^2(-y)^m u\right)\left[(-y)^{b-a}U_b\right]=$$

$$(-y)^m\Delta\left[(-y)^{b-a}U_b\right]-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[(-y)^{b-a}U_b\right]-\frac{2a}{y}\frac{\partial}{\partial y}\left[(-y)^{b-a}U_b\right]-\lambda^2(-y)^m(-y)^{b-a}U_b=$$

$$=(-y)^m(-y)^{b-a}\Delta U_b-\left[(b-a)(b-a-1)(-y)^{b-a-2}U_b-2(b-a)(-y)^{b-a-1}U'_b\right]-$$
$$-(-y)^{b-a}U''_b-\frac{2a}{y}\left[-(b-a)(-y)^{b-a-1}U_b+(-y)^{b-a}U'_b\right]-\lambda^2(-y)^m(-y)^{b-a}U_b=$$
$$\Pi_a^\lambda U(x;y)=(-y)^{b-a}\left((-y)^m\Delta U_b-U''_b-\frac{2b}{y}U'_b-\lambda^2(-y)^mU_b\right)+$$
$$+\left[-(b-a)(b-a-1)-2a(b-a)\right](-y)^{b-a-2}U_b.$$

По условию теоремы 2.5.1 первое слагаемое равно нулю.

Итак, $\Pi_a^\lambda U(x;y)=\left[-(b-a)(b-a-1)-2a(b-a)\right](-y)^{b-a-2}U_b$. (2.5.4)

Обе части равенства (2.5.4) делим на $(-y)^{b-a-2}$ и имеем

$$(-y)^{2+a-b}\Pi_a^\lambda U(x;y)=(a-b)(b+a-1)U_b.$$

В последнем равенстве, применяя оператор Π_b^λ, с учётом условий теоремы получим

$$\Pi_b^\lambda\left[(-y)^{2+a-b}\Pi_a^\lambda U(x;y)\right]=(a-b)(b+a-1)\Pi_b^\lambda U_b=0.$$

Теорема доказана.

Теорема 2.5.2. *Пусть* $\varphi''-\varphi=0$, $\psi''-\psi=0$ *и* $2\alpha\ge1$, $2\beta\ge1$, $b>a$. *Тогда регулярное решение уравнения (2.5.1) в области* D^- *представимо в виде*

$$U(x,y)=A_{m,a}\mathrm{P}_{1-\alpha}\varphi_1+A_{m,b}(-y)^{b-a}\mathrm{P}_{1-\beta}\psi_1, \tag{2.5.5}$$

где φ_1,ψ_1- *произвольные функции одного аргумента из класса* $C^2(D^-)$ *и*

$\alpha=\dfrac{m+4a}{2(m+2)}$, $\beta=\dfrac{m+4b}{2(m+2)}$, $A_{m,a}=\dfrac{1}{B(\frac{m+4a}{2(m+2)},\frac{m+4a}{2(m+2)})}$, $A_{m,b}=\dfrac{1}{B(\frac{m+4b}{2(m+2)},\frac{m+4b}{2(m+2)})}$,

$B(\frac{m+4a}{2(m+2)},\frac{m+4a}{2(m+2)})$, $B(\frac{m+4b}{2(m+2)},\frac{m+4b}{2(m+2)})-$ *функция Эйлера второго рода.*

Теорема 2.5.3. *Пусть* $0<2\alpha<1$, $2\beta\ge1$, $b>a$ *и* $\varphi_1''-\varphi_1=0$, $\varphi_2''-\varphi_2=0$, $\psi_1''-\psi_1=0$. *Тогда регулярное решение уравнения (2.5.1) в области* D^- *представимо в виде*

$$U(x,y)=A_{m,a}\mathrm{P}_{1-\alpha}\varphi_1+B_{m,a}(-y)^{1-2a}\mathrm{P}_\alpha\varphi_2+A_{m,b}(-y)^{b-a}\mathrm{P}_{1-\beta}\psi_1, \tag{2.5.6}$$

где $\varphi_1,\varphi_2,\psi_1-$ *произвольные функции одного аргумента из класса* $C^2(D^-)$ *и*

$B_{m,a}=\dfrac{1}{B(\frac{m+4-4a}{2(m+2)},\frac{m+4-4a}{2(m+2)})}$.

Теорема 2.5.4. *Пусть* $0<2\alpha<1,\ 0<2\beta<1,\ b>a$ *и* $\varphi_1''-\varphi_1=0$, $\varphi_2''-\varphi_2=0,\ \psi_1''-\psi_1=0,\ \psi_2''-\psi_2=0$. *Тогда регулярное решение уравнения (2.5.1) в области* D^- *представимо в виде*

$$
\begin{aligned}
U(x,y)=&A_{m,a}\mathrm{P}_{1-\alpha}\varphi_1+B_{m,a}(-y)^{1-2a}\mathrm{P}_{\alpha}\varphi_2+A_{m,b}(-y)^{b-a}\mathrm{P}_{1-\beta}\psi_1+\\
&+C_{m,b}(-y)^{1-b-a}\mathrm{P}_{\beta}\psi_2,
\end{aligned}
\tag{2.5.7}
$$

где $\varphi_1,\varphi_2,\ \psi_1,\psi_2$ – *произвольные функции одного аргумента из класса* $C^2(D^-)$ *и* $B_{m,a}=\dfrac{1}{B\left(\frac{m+4-4a}{2(m+2)},\frac{m+4-4a}{2(m+2)}\right)}$, $C_{m,b}=\dfrac{1}{B\left(\frac{m+4-4b}{2(m+2)},\frac{m+4-4b}{2(m+2)}\right)}$.

Теорема 2.5.5. *Пусть* $-1<2\alpha<0,\ 2\beta\ge 1,\ b>a$ *и* $\varphi_1''-\varphi_1=0,\ \varphi_2''-\varphi_2=0,\ \psi''-\psi=0$. *Тогда регулярное решение уравнения (2.5.1) в области* D^- *представимо в виде*

$$
\begin{aligned}
U(x,y)=&\tilde{A}_{m,a}(1+2\alpha)\mathrm{P}_{-\alpha}\varphi_1-\frac{2\lambda}{m+2}\tilde{A}_{m,a}(-y)^{\frac{m+2}{2}}\mathrm{P}_{-\alpha}\varphi'_1\cdot(1-2t)+\\
&+B_{m,a}(-y)^{1-2a}\mathrm{P}_{\alpha}\varphi_2+A_{m,b}(-y)^{b-a}\mathrm{P}_{1-\beta}\psi,
\end{aligned}
\tag{2.5.8}
$$

где $\varphi_1\in c^3(D^-),\ \varphi_2,\psi\in c^2(D^-)$ – *произвольные функции одного аргумента и* $\tilde{A}_{m,a}=\dfrac{1}{B\left(\frac{3m+4+4a}{2(m+2)},\frac{3m+4+4a}{2(m+2)}\right)}$.

Теорема 2.5.6. *Пусть* $-1<2\alpha<0,\ 0<2\beta<1,\ b>a$ *и* $\varphi_1''-\varphi_1=0,\ \varphi_2''-\varphi_2=0,\quad \psi_1''-\psi_1=0,\ \psi_2''-\psi_2=0$. *Тогда регулярное решение уравнения (2.5.1) в области* D^- *представимо в виде*

$$
\begin{aligned}
U(x,y)=&\tilde{A}_{m,a}(1+2\alpha)\mathrm{P}_{-\alpha}\varphi_1-\frac{2\lambda}{m+2}\tilde{A}_{m,a}(-y)^{\frac{m+2}{2}}\mathrm{P}_{-\alpha}\varphi'_1\cdot(1-2t)+\\
&+B_{m,a}(-y)^{1-2a}\mathrm{P}_{\alpha}\varphi_2+A_{m,b}(-y)^{b-a}\mathrm{P}_{1-\beta}\psi_1+C_{m,b}(-y)^{1-b-a}\mathrm{P}_{\beta}\psi_2,
\end{aligned}
\tag{2.5.9}
$$

где $\varphi_1\in c^3(D^-),\ \varphi_2,\psi_1,\psi_2\in c^2(D^-)$ – *произвольные функции одного аргумента и*

$\tilde{A}_{m,a}=\dfrac{1}{B\left(\frac{3m+4+4a}{2(m+2)},\frac{3m+4+4a}{2(m+2)}\right)}$, $C_{m,b}=\dfrac{1}{B\left(\frac{m+4-4b}{2(m+2)},\frac{m+4-4b}{2(m+2)}\right)}$.

Теорема 2.5.7. *Пусть* $-1<2\alpha<0,\ -1<2\beta<0,\ b>a,\ \ a+b<1$ *и* $\varphi_1''-\varphi_1=0,\ \varphi_2''-\varphi_2=0\ \ \psi_1''-\psi_1=0,\ \ \psi_2''-\psi_2=0,$. *Тогда регулярное решение уравнения (2.5.1) в области* D^- *представимо в виде*

$$\begin{aligned}U(x,y)&=\tilde{A}_{m,a}(1+2\alpha)\mathrm{P}_{-\alpha}\varphi_1-\frac{2\lambda}{m+2}\tilde{A}_{m,a}(-y)^{\frac{m+2}{2}}\mathrm{P}_{-\alpha}\varphi'_1\cdot(1-2t)+\\&+B_{m,a}(-y)^{1-2a}\mathrm{P}_{\alpha}\varphi_2+\tilde{A}_{m,b}(1+2\beta)(-y)^{b-a}\mathrm{P}_{-\beta}\psi_1-\\&-\frac{2\lambda}{m+2}\tilde{A}_{m,b}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(-y)^{b-a}\mathrm{P}_{-\beta}\psi'_1\cdot(1-2t)+C_{m,b}(-y)^{1-b-a}\mathrm{P}_{\beta}\psi_2\end{aligned}\qquad(2.5.10)$$

где $\varphi_1\in c^3(D^-),\ \varphi_2,\psi_1,\psi_2\in c^2(D^-)-$ *произвольные функции одного аргумента и* $\tilde{A}_{m,b}=\dfrac{1}{B\left(\frac{3m+4+4b}{2(m+2)},\frac{3m+4+4b}{2(m+2)}\right)},\ \ C_{m,b}=\dfrac{1}{B\left(\frac{m+4-4b}{2(m+2)},\frac{m+4-4b}{2(m+2)}\right)}.$

Теоремы 2.5.2 - 2.5.7 с учётом равенств (2.5.5) - (2.5.10) доказывается непосредственно, чтобы убедиться в этом докажем одну из них.

Доказательство теорема 2.5.6. В равенстве (2.5.9) применим оператор Π_α^λ и имеем

$$\begin{aligned}\Pi_\alpha^\lambda U(x,y)&=\Pi_\alpha^\lambda\left[\tilde{A}_{m,a}(1+2\alpha)\mathrm{P}_{-\alpha}\varphi_1-\frac{2\lambda}{m+2}\tilde{A}_{m,a}(-y)^{\frac{m+2}{2}}\mathrm{P}_{-\alpha}\varphi'_1\cdot(1-2t)\right]+\\&+\Pi_\alpha^\lambda\left[B_{m,a}(-y)^{1-2a}\mathrm{P}_{\alpha}\varphi_2\right]+\Pi_\alpha^\lambda\left[A_{m,b}(-y)^{b-a}\mathrm{P}_{1-\beta}\psi_1\right]+\Pi_\alpha^\lambda\left[C_{m,b}(-y)^{1-b-a}\mathrm{P}_{\beta}\psi_2\right]=\\&=J_1+J_2+J_3+J_4\end{aligned}$$

Легко можно видеть, что $J_1=0,\ J_2=0.$

Теперь вычислим J_3 и J_4

$$J_3=\Pi_\alpha^\lambda\left[A_{m,b}(-y)^{b-a}\mathrm{P}_{1-\beta}\psi_1\right].\qquad(2.5.11)$$

В правой части равенства (2.5.11) вычислим частные производные первого и второго порядка по x, y и после некоторых упрощений получим

$$J_3=(a-b)(b+a-1)(-y)^{b-a-2}\cdot\mathrm{P}_{1-\beta}\psi_1.$$

Из последнего равенства имеем

$$(-y)^{2+a-b}J_3=(a-b)(b+a-1)\mathrm{P}_{1-\beta}\psi_1.$$

Теперь применяем оператор Π_b^λ и получим

$$\Pi_b^{\lambda}\left[(-y)^{2+a-b}J_3\right]=(a-b)(b+a-1)\Pi_b^{\lambda}\mathrm{P}_{1-\beta}\psi_1=0.$$

Итак $\Pi_b^{\lambda}\mathrm{P}_{1-\beta}\psi=0$.

Теперь вычислим J_4

$$J_4=\Pi_{\alpha}^{\lambda}\left[C_{m,b}(-y)^{1-b-a}\mathrm{P}_{\beta}\psi_2\right] \qquad (2.5.12)$$

Аналогично вычислим частные производные до второго порядка по x и y, после некоторых упрощений получим

$$J_4=(a-b)(b+a-1)(-y)^{b-a-2}(-y)^{1-2b}\cdot\mathrm{P}_{\beta}\psi_2.$$

Из последнего равенства имеем

$$(-y)^{b-a-2}J_4=(a-b)(b+a-1)(-y)^{1-2b}\cdot\mathrm{P}_{\beta}\psi_2.$$

Теперь применяем оператор Π_b^{λ} и приедем к равенству

$$\Pi_b^{\lambda}\left[(-y)^{b-a-2}J_4\right]=(a-b)(b+a-1)\Pi_b^{\lambda}\left[(-y)^{1-2b}\cdot\mathrm{P}_{\beta}\psi_2\right]=0.$$

Теорема доказана.

Теперь некоторые полученные интегральные представления применяем для решения задач типа Коши в характеристической области D^{-}.

Задача $K_{2.5.1}$**.** Требуется найти регулярное решение уравнения (2.5.1) в области D$^-$ при $b-a<1$, $\beta>\alpha$ и $2\alpha\geq 1$, $2\beta\geq 1$, удовлетворяющее начальным условиям

$$\lim_{y\to-0}\mathrm{u}(x,y)=f_1(\lambda x),\qquad \lim_{y\to-0}(-y)^{1+a-b}\frac{\partial u}{\partial y}=g_1(\lambda x), \qquad (K_{2.5.1})$$

где $f_1(\lambda x)$, $g_1(\lambda x)$-заданные непрерывные функции, a,b -постоянные числа.

Решение задачи $K_{2.5.1}$**.** Для решения задачи $K_{2.5.1}$ применяем равенство (2.4.5).

Теорема 2.5.8. *Пусть* $2\alpha\geq 1$, $2\beta\geq 1$, $a>\nu$ *и* $b-a<1$*. Тогда решение задача* $K_{2.5.1}$ *в области* D$^-$ *даётся формулой*

$$U(x,y)=\frac{1}{\mathrm{B}(\alpha,\alpha)}\int_0^1\frac{f_1\left[\lambda\left(x_1+x_2-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{22}}(1-2t)\right)\right]dt}{[t(1-t)]^{1-\alpha}}+$$

$$+\frac{1}{(a-b)\mathrm{B}(\beta,\beta)}(-y)^{b-a}\int_0^1\frac{g_1\left[\lambda\left(x_1+x_2-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{22}}(1-2t)\right)\right]dt}{[t(1-t)]^{1-\beta}}, \qquad (2.5.13)$$

где f_1, g_1 *-заданные функции из класса* $C^2(D^-)$, $\alpha=\frac{m+4a}{2(m+2)}$, $\beta=\frac{m+4b}{2(m+2)}$ *-постоянные числа.*

Легко можно проверить, что равенство (2.5.13) удовлетворяет уравнению (2.5.1) и начальным условиям $(K_{2.5.1})$.

Задача $K_{2.5.2}$**.** Требуется найти регулярное решение уравнения (2.5.1) в области D⁻ при $b<\frac{m}{2}+2-a$ и $0<2\alpha<1,\ 2\beta\geq 1$, удовлетворяющее начальным условиям

$$\lim_{y\to-0}\mathrm{u}(x,y)=f_1(\lambda x),\qquad \lim_{y\to-0}(-y)^{2\alpha}\frac{\partial u}{\partial y}=f_2(\lambda x),$$

$$\lim_{y\to-0}\left\{(-y)^{2-a-b}\frac{\partial}{\partial y}\left[(-y)^{2a}\frac{\partial u}{\partial y}\right]\right\}=g_1(\lambda x), \qquad (K_{2.5.2})$$

где $f_1(\lambda x)$, $f_2(\lambda x)$, $g_1(\lambda x)$ -заданные непрерывные функции на интервале $0<x<1$, a,b -постоянные числа.

Решение задачи $K_{2.5.2}$. Для решения данной задачи воспользуемся интегральным представление (2.5.6).

Теорема 2.5.9. *Пусть* $0<2\alpha<1,\ 2\beta\geq 1$ *и* $b<\frac{m}{2}+2-a$. *Тогда решение задачи* $K_{2.5.2}$ *в области* D^- *даётся формулой*

$$U(x,y)=\frac{1}{\mathrm{B}(\alpha,\alpha)}\int_0^1 \frac{f_1\left[\lambda\left(x_1+x_2-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{22}}(1-2t)\right)\right]dt}{[t(1-t)]^{1-\alpha}}+$$

$$+\frac{1}{(a-b)\mathrm{B}(1-\alpha,1-\alpha)}(-y)^{1-2a}\int_0^1 \frac{f_2\left[\lambda\left(x_1+x_2-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{22}}(1-2t)\right)\right]dt}{[t(1-t)]^{\alpha}}+$$

$$+\frac{1}{(b-a)(b+a-1)\mathrm{B}(\beta,\beta)}(-y)^{b-a}\int_0^1 \frac{g_1\left[\lambda\left(x_1+x_1-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{22}}(1-2t)\right)\right]dt}{[t(1-t)]^{1-\beta}}, \qquad (2.5.14)$$

где $f_1(x)$, $f_2(x)$, $g_1(x)$ *-заданные функции из класса* $C^2(D^-)$ *,* $\alpha=\frac{m+4a}{2(m+2)}$, $\beta=\frac{m+4b}{2(m+2)}$, a,b,m *-постоянные числа.*

Легко можно проверить, что равенство (2.5.14) удовлетворяет уравнению (2.5.1) и начальным условиям $K_{2.4.2}$.

Заключение

Основные научные результаты диссертационной работы заключаются в следующем:

- Получено интегральное представление решений дифференциальных уравнений второго порядка с одной линией вырождения в гиперболической части области [2-А];
- Получены интегральные представления решения дифференциальных уравнений второго порядка первого рода с одной линией вырождения и решения задач типов Коши в гиперболической части области [16-А];
- Получены интегральные представления решения дифференциального уравнения второго порядка первого рода с двумя линиями вырождения и решения задач типов Коши в характеристический области [1-А];
- Получено интегральное представление решения дифференциального уравнения четвертого порядка первого рода с двумя линиями вырождения в гиперболический части области [6-А; 7-А];
- Получено интегральное представление решения вырождающихся дифференциального уравнения второго и четвертого порядков первого рода вида Гельмгольца на плоскости и в пространстве [8 – А];
- Получены интегральные представления решения вырождающихся дифференциального уравнения второго и четвертого порядков первого рода вида Гельмгольца и задач типов Коши на плоскости и в пространстве [8 – А];

Рекомендации по практическому использованию результатов

Полученные результаты могут быть использованы для дальнейшего развития теории вырождающихся дифференциального уравнения и уравнения смешанного типа. А также для дальнейшего исследования более общего вырождающегося дифференциальных уравнений на плоскости и в пространстве.

Список литературы

А) Список использованных источников

1. Бабенко К.И. К теории уравнений смешанного типа// –Успехи матем. наук, 1953, т.8, №2, с. 160.
2. Бицадзе А.В. Уравнения смешанного типа// М.: ВИНИТИ АН СССР, 1959, С. 164.
3. Векуа И.Н. О метагармонических функциях// Труды Тбилисского матем. ин-та, 1943, т.12, с. 105-174.
4. Вирченко Н.А. О задаче Трикоми для уравнения $yu_{xx} + xu_{yy} = 0$ в случае одной неограниченной области//Тр. Всесоюз, конф. по уравнениям с част. Производными, М.:, 1978,- с. 282-283.
5. Вирченко Н.А. О некоторые краевые задачи для простейших эллиптических уравнений с двумя линиями вырождения// Докл. АН УССР, сер. А, 1974, №7, с. 582-585.
6. Владимиров В.С. Уравнения математической физики// М.6 наука, 1976, с. 511.
7. Врагов В.Н. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики// изд. НГУ, 1983, с. 84.
8. Джураев Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типа// Ташкент: фан, 1979, с. 238.
9. Жегалов В.И. Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа четвертого порядка// Изв. Вузов, математика 1960, №4, с. 73-78.
10. Жегалов В.И. Краевая задача для уравнения смешанного типа высшего порядка// ДАН СССР, 1961, т.136, №2, с. 274-276.
11. Келдыш М.В. О некоторых случаях вырождения уравнения эллиптического типа на границе области// ДАН СССР, 1951, т. 77, №2, с.181-183.
12. Кривенко Ю.П. Представление решений уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу при отрицательном коэффициентов // ДАН СССР, 1958, т.123, №2, с.239-24
13. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа// Из-во, наука 1964.
14. Лаврентьев М.А., Бицадзе А.В. К проблеме уравнений смешанного типа// ДАН СССР, 1950, т.70, №2, с.373-376.
15. Маричев О.И. Об уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения в несимметричной области// Изв. АН СССР, сер. физ-мат. Наук, 1969, №6, с.74-80.
16. Маричев О.И. Краевые задачи для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения// Изв. АН БССР, сер. Физ-мат, наук, 1970, №5, с.74-80.
17. Мередов М.М. О существовании решения краевой задачи для уравнения смешанного типа четвертого порядка// Изв. АН. Туркм. ССР, сер. физ-мат, хим. и геолог. Наук, 1967, т.4, с.3-11.
18. Михайлов Л.Г. Новый класс особых интегральных уравнений и его применение к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами// Из-во АН Тадж. ССР, Душанбе, 1963.
19. Михлин С.Г. Курс математической физики// М.: 1972.
20. Моисеев Е.И. О теоремах единственности для уравнения смешанного типа// ДАН СССР, 1978, т.242, с.48-51.

21.Моисеев Е.И. Некоторые свойства решения уравнения Лаврентьева-Бицадзе// Мат. Заметки, т.26, №4, (1979) с.535-546.
22.Нахушев А.М. О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа//Диф. Уравнения, 1969, т.5, №1, с.44-59.
23.Нахушев А.М. О некоторых задачах для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения//сиб. Мат. Журнал, 1967, т.8, №1, с.19-48.
24.Олейник О.А. О гладкости решение вырождающихся эллиптических и параболических уравнений// ДАН СССР, 1965, т.463, №3, с.577-580.
25.Пулькин С.П. Задача Трикоми для обобщенного уравнения Лаврентьева-Бицадзе// ДАН СССР, 1958, т.118, №1, с.38-41.
26.Паномаров С.М. К теории краевых задач для уравнений смешанного типа в трехмерных областях// ДАН СССР, 1979, т.246, с.1303-1305.
27.Раджабов Н. Некоторые краевые задачи для уравнения осимметрической теории поля// В сб. «Исследования по краевым задачам теории функций и дифференциальным уравнениям». Изд-во Ан тадж. ССР., Душанбе, 1965, с.79-123.
28.Раджабов Н. Интегральные представления и граничные задачи для некоторых дифференциальных уравнений с сингулярными линиями или сингулярными поверхностями// Душанбе, 1980, ч.I, с.126; 1981, ч.II,-170,1982, ч.III, -170,1985, ч.IV, 1985, с.148.
29.Раджабов Н., Сатторов А.С., Джабиров Д.К. Построение потенциалов для одного уравнения эллиптического типа с двумя сингулярными линиями// Докл. АН Тадж. ССР, 1977, т.20, №11, с.7-10.
30.Раджабов Н., Сатторов А.С.0 Джабиров Д.К. Фундаментальное решение и интегральные представления для одного уравнения эллиптического типа с двумя сингулярными линиями// Докл. АН Тадж. ССР, 1977, т.20, №9, с.13-17.
31.Сабитов К.Б. К теории уравнения смешанного типа// Москва-2014, «физмат лит», С.300.
32.Сатторов А.С. Решение некоторых кравевых задач для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу при $-1<\mu<0$// Изв. АН Тадж. ССР, отд. Физ-мат. И геол. Хим. Наук, 1973, №1(470, с.9-19.
33.Сатторов А.С. Решение задачи типа Рикье для некоторых уравнений высшего порядка с сингулярной линией методом потенциала// Изв. Тадж. ССР, отд. Физ-мат. и геол. хим. наук, 1975, №1(55), с.12-19.
34.Сатторов А.С. Условия излучения для дифференциального уравнения типа Гельмгольца с одной сингулярной гиперплоскостью в многомерном случае// Докл. АН Тадж. ССР, 1983, т.26. №6, с.345-349.
35.Сатторов А.С. Граничные задачи и интегральные представления для одного смешанно-сингулярного уравнения// Ж «Дифференц. уравнения», Минск 1984,-20, с.(рукопись деп. в ВИНИТ, 12,11. 1984, «7236-84 деп).
36.Сатторов А.С. Интегральные представления решения некоторых вырождающихся уравнений с сингулярной линией// Изв. АН Тадж. ССР, отд.физ-мат. и геол-хим.наук, 1990 №2(116), с.3-9.

37. Сатторов А.С. Решения задачи типа Трикоми для одного смешанно-сингулярного уравнения четвертого порядка первого рода// Вестник ЛГУ, 1990, сер.1.
38. Сатторов А.С. Интегральные представления и граничные задачи для некоторых вырождающихся уравнений четвертого порядка с сингулярной линией// Изв. АН Тадж. ССР, отд.физ-мат. и геол-хим. наук, 1990 №3(117), с.9-16.
39. Сатторов А.С. решение задачи типа Коши для вырождающегося уравнения четвертого порядка с одной сингулярной линией// Докл. АнН. Тадж. ССР, 1990, т.33, №3, с.147-152.
40. Сатторов А.С. Интегральные представления и граничные задачи для одного дифференциального уравнения четвертого порядка с одной сингулярной линией// Изв. АН Тадж. ССР, 1990, №4(118), с.9-16.
41. Сатторов А.С. Решение задачи типа Коши для вырождающегося уравнения четвертого порядка с двумя сингулярными линиями// Докл. АН Тадж. ССР, 1990, т.33, №2, с.223-227.
42. Сатторов А.С. Решение задачи типа Трикоми для одного смешанного уравнения четвертого порядка// Вестник ЛГУ. 1990, №7, с.167-173.
43. Сатторов А.С. Решение задачи Трикоми для одного смешанно-сингулярного уравнения// Докл. АН. Тадж. ССР, 1990, т.33.№2, с.194-198.
44. Сатторов А.С. Интегральные представления и задача типа Коши для одного вырождающегося уравнения четвертого порядка первого рода с двумя сингулярными линиями// Вестник ЛГУ, сер.1, 1990, №3(5), с. 41-46.
45. Сатторов А.С. Интегральные представления и граничные задачи для одного уравнения четвертого порядка с двумя сингулярными линиями// Вестник ЛГУ. сер.1, 1990, вып. 4(№22), с.18-22.
46. Сатторов А.С. Джобиов Ё.Р. Тасвирииинтегралииҳалли яке аз муодилаҳоидифференсиалӣбодуҳамвориитаназулёбанда дар фазо// Пайёми ДМТ, Душанбе-2019, с.9-20.
47. Сатторов А.С., Муҳаммад Фоиқ Дж. Интегральные представления и решение задача типа Коши для некоторых вырождающихся дифференциальных уравнений смешанного рода//Вестник ТНУ, 2014, №1/2(130), с. 58-64.
48. Сатторов А.С., Рушанов Б.Н. Интегральные представления и решение задача типа Коши для одного квазилинейного вырождающегося дифференциального уравнения первого рода// Вестник ТНУ, 2015, №1/3(164), с.8-11.
49. Сатторов А.С. Интегральные представления и граничные задачи для сингулярных и смешано-сингулярных уравнений второго и четвертого порядков// Автореферат диссертации на соискание учёной степени доктора физико-математических наук, ЛГУ,1990, (с, дис. 342).
50. Смирнов М.М.,Сатторов А.С. Интегральные представления и граничные задачи для одного смешанно-сингулярного уравнения четвертого порядка// Докл. АН Тадж. ССР, 1990, т.33.
51. Смирнов М.М., Сатторов А.С. Интегральные представления и граничные задачи типа Трикоми для одного смешанно-сингулярного уравнения с двумя линиями вырождения// Вестник ЛГУ

52.Смирнов М.М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболический уравнения// М.: наука, 1966, с.292
53.Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа// М.: Высшая школа, 1985, с.302.
54.Смирнов М.М. Модельные уравнения смешанного типа четвертого порядка// Л.: ЛГУ, 1972, с.125.
55.Смирнов М.М. Вырождающиеся гиперболические уравнения// Минск, высшая школа,1977.
56.Смирнов М.М. Задача Коши для некоторых вырождающихся гиперболических уравнений 4-го порядка// Проблемы математического анализа из-во ЛГУ, 1966, с.80-87.
57.Салохитдинов М.С., Талипов А. О некоторых краевых задачах для уравнений смешанного типа с одной и двумя линиями вырождения// Дифференц. уравнения, 1972, т.8, №1, с.134-142.
58.Терсенов С.А. Введение в теорию уравнений, вырождающихся на границе// Новосибрск: из-во, НГУ, 1973, с.144.
59.Тиханов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики// М.: наука 1977, с.735.
60.Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных// М.: ИЛ, 1957, с.443.
61.Франкль Ф.И. Избранные труды по газовой динамике// М.: наука, 1973, с.600.
62.Чибрикова Л.И., ПоказеевВ.и. Задача Трикоми для одной многосвязной области// В кн.: Краевые задачи теории функций комп.перем. Казань: из-во. ун-та, 1962, с.73-79.
63.Weinstein A. Discontinuous integrals and generalized potential theory, Transactions of the american Mathematical Society// V. 63, №2, marth, 1948.
64.Gellerstcdt S. Sur un problemeauslimites pour Pequation $y^{2s} z_{xx} + z_{yy} = 0$. Arkiv Mat., Ast. OchFysik, 1935, 25A, №10.
65.Gilbert R.P. Poissons equation and generalized axially summetric potential theory// Annali di MathematicaPuraAppl (IV)SLXI, 1963, P.337-348.
66.Henrici R.P. Comm. Math. Helv. 27, №3, 4, X. 1953.
67.Henrici R.P. On the domain of reqularity of generalized axially summetricnotentials// Proc. Amer. Math, Soc. 8, 1957, p.29-31.
68.Tricomi F. Acorasullequazione $yz_{xx} + z_{yy} = 0$ // Rend. Acc. Lincei, 1927, Scr. V. 1, 6.
69.Protter M. H. Equations of mixed type by// Bull. of the Amer. Math. Society. 1979. V.1, №3. P.534-538.

Б) Работы автора по теме диссертации

1. В журналах, зарегистрированных в реестре ВАК при президенте Республики Таджикистан и ВАК Российской Федерации:

[1 – А] Назаров Дж.Ю. Интегральные представления и решение задач типа Коши для одного вырождающегося дифференциального уравнения первого рода с двумя линиями вырождения [Текст] / Сатторов А.С., Дж.Ю. Назаров // Вестник ТНУ. Серия естественных наук. -2014. -№1/2(130). - С. 12-18.
[2 – А] Назаров Дж.Ю. Интегральные представления и решение задачи типа Коши для одного вырождающегося дифференциального уравнения

четвертого порядка первого рода при положительном коэффициенте [Текст] / А.С. Сатторов, Дж.Ю. Назаров // Учёные записки ХГУ им. Б.Гафурова – 2014. -№2 (29) -С. 242-245.
[3 – А] Назаров Дж.Ю. Интегральные представления и решение задачи типа Коши для одного вырождающегося дифференциальных уравнений первого рода [Текст] / Дж.Ю. Назаров // Вестник ТНУ. -2014. -№1/1(126). -С. 28-31.
[4 – А] Назаров Дж.Ю. Интегральные представления и решение задачи типа Коши для одного вырождающегося дифференциального уравнения четвертого порядка первого рода при отрицательном коэффициенте [Текст] / Дж.Ю. Назаров // Учёные записки ХГУ им. Б.Гафурова. -2014. -№2 (29). -С. 199-201.
[5 – А] Назаров Дж.Ю. Интегральные представления и решение задачи типа Коши для одного вырождающегося дифференциального уравнения второго порядка первого рода с двумя сингулярными линиями [Текст] / Дж.Ю. Назаров // Вестник ТНУ. -2015. -№1/6(191). -С.12-18.
[6 – А] Назаров Дж.Ю. Интегральные представления и решения задач типа Коши для одного вырождающегося дифференциального уравнения четвертого порядка первого рода [Текст] / А.С. Сатторов, Дж.Ю. Назаров // Известия АНРТ. -2018. -№1(170). -С.21-28.
[7 – А] Назаров Дж.Ю. Интегральные представления и решение задачи типа Коши для одного вырождающегося дифференциального уравнения четвертого порядка первого рода [Текст] / Дж.Ю. Назаров // Вестник ТНУ. -2019. -№1. -С.37-43.
[8 – А] Назаров Дж.Ю. Интегральные представления и решения задач типа Коши для вырождающегося дифференциального уравнения второго порядка первого рода вида Гельмгольца в плоскости и пространстве [Текст] / А.С. Сатторов, Дж.Ю. Назаров // Вестник ТНУ. -2020. -№1. –С.78-93.
[9 – А] Назаров Дж.Ю. Интегральные представления и решения задач типа Коши для одного вырождающегося дифференциального уравнения четвёртого порядка первого рода вида Гельмгольца на плоскости и в пространстве [Текст] / А.С. Сатторов, Дж.Ю. Назаров // Вестник ТНУ. -2022. -№3. –С.180-194.

2. В других изданиях:

[10 – А] Назаров Дж.Ю. Интегральное представление и решение задачи типа Рикье для одного дифференциального уравнения четвертого порядка с двумя сингулярными линиями [Текст] / А.С.Сатторов, Дж.Ю. Назаров // Вестник института предпринимательства и сервиса.
-2010. -№20. –С.110-115.
[11 – А] Назаров Д.Ю. Интегральные представления для одного вырождающегося уравнения второго порядка в эллиптической части области [Текст] / А.С. Сатторов, Д.Ю. Назаров // Материалы республиканской научно-теоретической конференции профессорско- преподавательского состава и студентов, посвященной «18-ой годовщине Независимости Республики Таджикистан» и «Году памяти Имама Аъзама» (Душанбе-2010). -

С.42-43.
[12 – А] Назаров Дж.Ю. Интегральные представления решения одного вырождающегося дифференциального уравнения при отрицательных коэффициентах [Текст] / А.С.Сатторов, Дж.Ю. Назаров // Материалы республиканской научно-теоретической конференции «Современные проблемы естественных и социально-гуманитарных наук» (Душанбе-2014). -С.121-122.
[13 – А] Назаров Дж.Ю. Интегральные представления решений некоторых вырождающихся дифференциального уравнения четвертого порядка [Текст] / Дж.Ю. Назаров // Материалы республиканской научно-теоретической конференции «Актуальные проблемы современной математики и её преподавания» (Душанбе-2014). -С.84-85.
[14 – А] Сатторов А.С., Назаров Дж.Ю. Интегральные представления решения вырождающегося дифференциального уравнения четвертого порядка с отрицательными коэффициентами [Текст] / А.С. Сатторов, Дж.Ю. Назаров // Материалы международной научно-теоретической конференции «Актуальные проблемы современной науки» (Душанбе-2015). -С.81-82.
[15 – А] Назаров Дж.Ю. Интегральные представления решения одного вырождающегося дифференциального уравнения четвертого порядка первого рода с отрицательными коэффициентами [Текст] / А.С.Сатторов Дж.Ю.Назаров // Материалы республиканской научно-теоретический конференции «Неклассические дифференциальные уравнения и их приложения» (Душанбе-2015). -С.91-93.
[16 – А] Назаров Дж.Ю. Подстановка основных краевых задач и теорема единственности для одного вырождающегося дифференциального уравнения первого рода типа Гельмгольца [Текст] / А.С.Сатторов, Дж.Ю. Назаров // Материалы республиканской научно-теоретической конференции «Неклассические уравнения математической физики и смежные вопросы анализа» (Душанбе-2016). -С.103-105.
[17 – А] Назаров Дж.Ю. Интегральные представления и решения задачи типа Коши для некоторых вырождающихся дифференциальных уравнений первого рода в плоскости [Текст] / А.С. Сатторов, Дж.Ю. Назаров // Материалы международной научно-теоретической конференции (Душанбе, 27-28 декабри 2018г.). -С.273-279.
[18 – А] Назаров Дж.Ю. Тасвири интегралии ҳалли як муодилаи дифференсиалии таназулёбандаи ҷинси як ва тадбиқи он дар ҳалли масъалаи Коши [Текст] / А.С. Сатторов, Дж.Ю. Назаров // Материалы международной научно-теоретической конференции (Душанбе 14-15 марта 2018г.). –С. 143-144.
[19 – А] Сатторов А.С., Назаров Дж.Ю. Интегральные представления и регулярные решения одного дифференциального уравнения первого рода с двумя линиями вырождения. Тезисы МГУ, Душанбе-2019.
[20 – А] Назаров Дж.Ю. Интегральные представление и решение задач типа Коши для одного вырождающегося дифференциального уравнения четвёртого порядка первого рода вида Гельмгольца в пространстве. [Текст] /

Дж.Ю. Назаров // Сборник статей республиканской научно – практической конференции посвященной «20-летию изучения и развития естественных, точных и математических наук в сфере науки и образования (2020-2040глды)» и 50-летию кафедры высшей математики ТНУ (Душанбе, 14 октября 2022 года), с.53-60.