Министерство образования и науки
Республики Таджикистан
Таджикский национальный университет

УДК 517.5

На правах рукописи

Кодиров Далер Абдушукурович

ТОЧНЫЕ ОЦЕНКИ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ ПО ПРОИЗВОЛЬНОЙ ОРТОНОРМИРОВАННОЙ СИСТЕМЕ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени доктора философии (PhD)
— доктор по специальности 6D060100 — Математика: 6D060101
— Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Научный руководитель:
академик Национальной академии
наук Таджикистана,
доктор физико-математических наук
профессор Шабозов М.Ш.

ДУШАНБЕ – 2025

Оглавление

Обозначения

$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел

$\mathbb{Z}_+$ — множество целых неотрицательных чисел

$\mathbb{R}$ — множество действительных чисел

$\mathbb{R}_+$ — множество положительных чисел

H — вещественное сепарабольное гильбертово пространство

$\{f_k\} \in H$ — полная ортонормированная система векторов в пространстве H

$\|f\|$ — норма вектора $f \in H$

$E_{n-1}(f)$ — наилучшее приближение вектора $f \in H$

F_h — оператор сдвига

$\triangle_h f$ и $\triangle_h^m f$ — конечные разности первого и m-го порядка

$\Omega_m(f,t)$ — обобщенный модуль непрерывности вектора $f \in H$

$A : H \to H$ — симметричный оператор в пространстве H

$H_n(x)$ — полином Чебышева–Эрмита

$\mathscr{H}$ — дифференциальный оператор второго порядка Чебышева–Эрмита

$L_n^{(\alpha)}(x)$ — полином Чебышева–Лагерра

$\mathcal{L}$ — оператор Чебышева–Лагерра

$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ — полином Якоби

$\mathcal{J}_{\alpha,\beta}$ — дифференциальный оператор Якоби второго порядка

$\mathbb{S} := \{f \in H : \|f\| \leq 1\}$ — единичный шар в пространстве H

Q — выпуклое центрально-симметричное множество из H

$\Lambda_n \subset H$ — n-мерное подпространство

$\Lambda^n \subset H$ — подпространство коразмерности n

$\mathcal{L} : H \to \Lambda_n$ — непрерывный линейный оператор

$\mathcal{L}^\perp : H \to \Lambda_n$ — непрерывный оператор линейного проектирования

$b_n(Q, H)$ — бернштейновский поперечник множества Q в H

$d_n(Q, H)$ — колмогоровский поперечник множества Q в H

$\delta_n(Q, H)$ — линейный поперечник множества Q в H

$d^n(Q, H)$ — гельфандовский поперечник множества Q в H

$\Pi_n(Q, H)$ — проекционный поперечник множества Q в H

$\rho_n(\cdot)$ — любой из вышеперечисленных n-поперечников

$\mathcal{D}$ — дифференциальный оператор второго порядка Штурма–Лиувилля

$\mathscr{K}$-функционал Петре

$\mathcal{P}_{n-1}$ — множество алгебраических многочленов степени не более $n-1$

$\Phi(t)$ — произвольная мажоранта

Введение

Актуальность темы исследования. В экстремальных задачах теории приближения периодических функций тригонометрическими полиномами в различных банаховых пространствах основной характеристикой гладкости функции является модуль непрерывности самой функции или некоторой её производной заданного порядка. Хорошо известно, что при отыскании точных оценок скорости сходимости (наилучших приближений) рядов Фурье по произвольной ортонормированной системе векторов (в частности, по специальным функциям математической физики) в гильбертовом пространстве важную роль играет обобщённый модуль непрерывности. Он связан с так называемыми “теоремами сложения” и “теоремами умножения” для ортогональных систем векторов в гильбертовом пространстве. В общем случае таких теорем нет. Пользуясь некоторыми известными фактами, в этой работе удалось построить обобщённый модуль непрерывности функции, который позволил точно оценить скорость сходимости рядов Фурье по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля, а также по специальным функциям математической физики (функциям Бесселя, ортонормированным многочленам Лежандра, Чебышева–Эрмита, Чебышева–Лагерра, Якоби и другим).

С целью решения экстремальных задач в произвольном гильбертовом пространстве построен оператор усреднения (сдвига), затем обобщённый модуль непрерывности произвольного вектора гильбертова пространства, который позволяет найти верхний грани скорости сходимости (наилучших приближений) рядов Фурье по произвольным ортонормированным системам векторов в гильбертовом пространстве. Установлена связь между скоростью сходимости и гладкостью вектора, что подтверждает целесообразность введения обобщённого модуля непрерывности в гильбертовом пространстве.

Следует отметить, что в случае 2π-периодических функций в качестве оператора сдвига в работах В.А.Абилова и Ф.В.Абиловой [6], С.Б.Вакарчука и В.И.Забутной [18], М.Ш.Шабозова и Г.А.Юсупова [46] использовалась оператор Стеклова. В работах Селимханова Э.В. [33, 34, 54], Селимханова Э.В., Абилова Ф.В. [32, 35, 53] исследуются задачи получения оценки скорости сходимости ряда Фурье в гильбертовом пространстве и доказаны некоторые прямые и обратные теоремы теории приближения.

В данной диссертационной работе, в отличие от перечисленных работ, рассматривается более общая задача отыскания точных оценок наилучших приближений некоторых классов векторов в гильбертовом пространстве и даётся их приложение в задачах отыскания скорости сходимости рядов Фурье по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля и по классическим ортогональным полиномам.

Степень научной разработанности изучаемой проблемы. Общая теория наилучшего приближения в любом линейном нормированном пространстве хорошо разработана, причем в таких пространствах элемент наилучшего приближения всегда существует. При этом если пространство строго нормировано, то элемент наилучшего приближения единствен [23]. В диссертационной работе изучается наилучшие приближения и оценки скорости сходимости ряда Фурье по произвольной ортонормированной системе векторов в гильбертовом пространстве и даётся приложение полученных результатов к оценке скорости сходимости рядов Фурье по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля. Эта задача с точки зрения экстремальных задач теории наилучших приближений и отыскания верхних граней наилучших приближений находится на стадии разработки. Некоторые асимптотические оценки в этом направлении получены в работах В.А.Абилова с учениками [1–11, 14, 49–53]. В случае, когда функция разлагается по ортонормированным полиномам Чебышева первого рода в пространстве $L_2((\sqrt{1-x^2})^{-1},[-1,1])$, сформулированная задача рассмотрена в работе М.Ш.Шабозова и К.Тухлиева [44]. Некоторые точные оценки скорости сходимости рядов Фурье по полиномам Чебышева–Эрмита найдены в работе К.Тухлиева и А.М.Туйчиева [41].

Связь работы с научными программами (проектами), темами. Диссертационное исследование выполнено в рамках реализации перспективного плана научно-исследовательских работ кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений Таджикского национального университета на 2021-2025 гг. по теме “Теория приближения функций”.

Общая характеристика работы

Цель исследования. Основная цель диссертационной работы заключается в решении экстремальных задач, связанных с отысканием точного значения верхней грани наилучшего приближения суммами Фурье по произвольной ортогональной системе векторов в гильбертовом пространстве и их приложение к рядам Фурье по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля.

Задачи исследования. В соответствие с поставленной целью выделяются следующие задачи:

- найти точные значения верхних граней наилучших приближений некоторых классов векторов суммами Фурье по произвольной ортонормированной системе векторов;
- найти точные константы в неравенствах типа Джексона–Стечкина между величиной наилучшего приближения векторов $f \in H^r(A)$ и характеристикой гладкости Ω_m;
- найти точные значения n-поперечников некоторых классов векторов в гильбертовом пространстве H;
- найти точные значения верхних граней наилучших приближений суммами Фурье по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля на некоторых классах функций, характеризующихся обобщённым модулем непрерывности;
- найти точные неравенства типа Джексона–Стечкина, в которых величины наилучших приближений оценивается сверху как через обобщённый

модуль непрерывности, так и через $\mathscr{K}$-функционалы r-ых производных.

Объект исследования. Объектом исследования являются различные экстремальные задачи, связанные с наилучшим приближением классов векторов в гильбертовых пространствах и их приложение в задаче Штурма–Лиувилля.

Предмет исследования. Предметом исследования является отыскании верхних граней наилучших приближений классов векторов в гильбертовом пространстве и их применение в отыскании точных оценок скорости сходимости рядов Фурье по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля.

Научная новизна исследований. В диссертации получены следующие основные результаты:

- найдены точные значения верхних граней наилучших приближений некоторых классов векторов суммами Фурье по произвольной ортонормированной системе векторов;
- найдены точные константы в неравенствах типа Джексона–Стечкина между величиной наилучшего приближения векторов $f \in H^r(A)$ и характеристикой гладкости Ω_m;
- найдены точные значения n-поперечников некоторых классов векторов в гильбертовом пространстве H;
- найдены точные значения верхних граней наилучших приближений суммами Фурье по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля на некоторых классах функций, характеризующихся обобщённым модулем непрерывности;

- найдены точные неравенства типа Джексона–Стечкина, в которых величины наилучших приближений оцениваются сверху как через обобщённый модуль непрерывности, так и через $\mathscr{K}$-функционалы r-ых производных.

Теоретическая и научно-практическая значимость работы. Работа носит теоретический характер. Результаты диссертационной работы и методы их доказательств можно применять в экстремальных задачах теории ортогональных рядов.

Положения, выносимые на защиту:

- теоремы о точных значениях верхних граней наилучших приближений некоторых классов векторов суммами Фурье по произвольной ортонормированной системе векторов;
- теоремы о точных константах в неравенствах типа Джексона–Стечкина между величиной наилучшего приближения векторов $f \in H^r(A)$ и характеристикой гладкости Ω_m;
- теоремы о точных значениях n-поперечников некоторых классов векторов в гильбертовом пространстве H;
- теоремы о точных значениях верхних граней наилучших приближений функций суммами Фурье по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля на некоторых классах функций, характеризующихся обобщённым модулем непрерывности;
- теоремы о точных неравенствах типа Джексона–Стечкина, в которых величины наилучших приближений оцениваются сверху как через

обобщённый модуль непрерывности, так и через $\mathscr{K}$-функционалы r-ых производных.

Степень достоверности результатов. Достоверность научных результатов диссертационной работы обеспечивается строгими математическими доказательствами всех утверждений, приведённых в диссертации, а также подтверждается исследованиями других авторов.

Соответствия диссертации паспорту научной специальности (формуле и области исследования). Диссертационная работа выполнена по специальности 6D060101 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ и является разделом математического анализа, указанного в пункте III параграфа 3 паспорта научной специальности.

Личный вклад соискателя ученой степени. Задача исследования и выбор метода доказательств сформулированы научным руководителем работы, оказывавшего также консультативное содействие. Основные результаты диссертационной работы, перечисленные в разделе “Научная новизна”, получены лично автором.

Апробация результатов диссертации. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на:

- семинарах кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений Таджикского национального университета под руководством академика НАН Таджикистана, профессора М.Ш.Шабозова (Душанбе, 2019-2024 гг.);

- международной конференции “Актуальные проблемы современной математики”, (Душанбе, 25-26 июня 2021 г.);
- материалы республиканской научно-практической конференции “Современные проблемы прикладной математики и их роль в формировании технического мировоззрения общества”, (Хужданд, 29-30 октября 2021 г.);
- материалы международной научной конференции “Современные проблемы математики и её приложения”, (Душанбе, 27 мая 2022 г.);
- материалы республиканской научно-практической конференции “Актуальные проблемы и перспективы развития естественных и точных наук”, (Душанбе, 28-29 октября 2022 г.);
- материалы международной научной конференции “Современные проблемы математического анализа и теории функций”. (Душанбе, 24-25 июня 2022 г.);
- международной конференции “Современные проблемы математики”, (Душанбе, 26-27 мая 2023 г.);
- международной научно-практической конференции “Современные проблемы математики и её преподавания”, (Худжанд, 21-22 июня 2024 г.);
- международной научно-практической конференции “Математика в современном мире”, (Худжанд, 20 апреля 2024 г.).

Публикации по теме диссертации. Результаты исследований автора по теме диссертационной работы опубликованы в 11 научных работах, из них 3 статьи опубликованы в изданиях, входящих в действующий перечень ВАК

Республики Таджикистан, а 8 — в трудах международных и республиканских конференций.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трёх глав, списка цитированной литературы из 68 наименования, занимает 135 страницы машинописного текста и набрана на LaTeX. Для удобства в диссертации применена сквозная нумерация теорем, лемм, следствий и формул. Они имеют тройную нумерацию, в которой первая цифра совпадает с номером главы, вторая указывает на номер параграфа, а третья на порядковый номер теоремы, леммы, следствия или формулы в данном параграфе.

ГЛАВА 1. Анализ литературы и формулировка нерешённых задач теории приближения по теме диссертации

Данная глава диссертационной работы посвящена анализу известных результатов по теме исследования и постановку нерешённых задач по двум направлениям:

а) нахождение верхних граней наилучших приближений классов векторов частными суммами рядов Фурье по произвольной ортонормированной системе векторов в гильбертовом пространстве;

б) пользуясь результатами, полученными в пункте а), дать их приложение при нахождении точных оценок скорости сходимости (наилучших приближений) рядов Фурье по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля и в частности по классическим ортогональным многочленам (Чебышева–Эрмита, Чебышева–Лагерра, Лежандра, Якоби), а также функциям Бесселя первого рода. Для решения экстремальных задач, сформулированных в пунктах а) и б), сначала нужно строить оператор сдвига, затем — обобщённый модуль непрерывности произвольного вектора гильбертова пространства, который позволяет найти точные оценки скорости сходимости рядов Фурье по произвольным ортонормированным системам векторов в гильбертовом пространстве. При этом нужно установить связь между скоростью сходимости и гладкостью векторов пространства, чтобы оправдать введение обобщённого модуля непрерывности.

§ 1.1. Предварительные определения и факты. Известные результаты по теме исследования

Введём следующие обозначения, которыми воспользуемся во второй главе диссертационной работы.

Пусть H — вещественное сепарабольное пространство (см., например, [25, с.155]), (f, g) — скалярное произведение векторов $f, g \in H$, $\|f\| := (f, f)^{1/2}$ — норма вектора $f \in H$. Обозначим через $\{f_n\} \in H$ — полную ортонормированную систему векторов

$$f \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) f_k,\ c_k(f) = (f, f_k),\ k \in \mathbb{Z}_+ \tag{1.1.1}$$

— ряд Фурье вектора $f \in H$,

$$S_{n-1}(f) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(f) f_k,\ n \in \mathbb{N}$$

— частичные суммы n-го порядка ряда Фурье (1.1.1).

Равенством

$$E_{n-1}(f) := \inf\Big\{\big\|f - p_{n-1}\big\| : p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}\Big\},$$

где $\mathcal{P}_{n-1}$ — множество обобщённых “*полиномов*” вида $p_{n-1}(f) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k f_k$, $f_k \in H$, определим наилучшее приближение вектора $f \in H$ элементами $p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}$.

Хорошо известно [25, с.150], что

$$\|f\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^2(f),$$

$$E_{n-1}^2(f) = \big\|f - S_{n-1}(f)\big\|^2 = \sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f). \tag{1.1.2}$$

Далее, в пространстве H определим оператор усреднения (сдвига)

$$F_h f = \sum_{k=0}^{\infty}(1-h)^k c_k(f) f_k, \quad h \in (0,1), \tag{1.1.3}$$

обладающий ряд простых свойств

1) $F_h(\alpha f + \beta g) = \alpha F_h(f) + \beta F_h(g),\ f, h \in H,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$

2) $\|F_h f\| \le \|f\|.$ 3) $F_h(f_n) = (1-h)^n f_n.$

4) $\|f_h f - f\| \to 0,\ h \to 0+.$

Далее определим, как и в классическом случае, разности первого и высших порядков равенствами

$$\Delta_h f := F_h f - f,$$

$$\Delta_h^k := \Delta_h(\Delta_h^{k-1} f) = (F_h - I)^k f = \sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j} F_h^j f,$$

где $f_h^0 f = f$, $F_h^j = F_h(F_h^{j-1} f)$, $j = \overline{1k}$, I — единичный оператор в пространстве H.

Величину

$$\Omega_k(f,t) := \sup\Big\{\|\Delta_h^k f\| : 0 < h \le t\Big\}$$

называют обобщённым модулем непрерывности вектора $f \in H$.

В ряде конкретных случаев, например, когда пространство H совпадает с известными пространствами $L_2(\mathbb{R}, e^{-x^2})$, $L_2(\mathbb{R}_+, e^{-x}x^\alpha)$ $(\alpha > -1)$ или $L_2[(-1,1),(1-x)^\alpha(1+x)^\beta]$ $(\alpha > -1,\ \beta > -1)$ для оператора F_h можно указать и интегральное представление (см., например, монографии Г.Сегё [31] или П.К.Суетин [36] или цитированную в них литературу).

Анализ литературы по наилучшему среднеквадратическому приближению и отысканию точных оценок скорости сходимости (наилучших приближений) ряда Фурье по произвольной ортонормированной системе векторов в гильбертовом пространстве H показывает, что эта тематика находится на стадии начальной разработки.

Здесь известны следующие две теоремы [24, 32].

Теорема 1.1.1. *Для любого вектора $f \in H$ при любом $h \in (0,1)$ справедлива оценка*

$$E_{n-1}(f) \leq \left[1-(1-h)^n\right]^{-k}\Omega_k(f;h),\ n,k \in \mathbb{N}, \tag{1.1.4}$$

причём при каждом фиксированном $n \in \mathbb{N}$ константа в правой части (1.1.4) *не может быть уменьшена.*

Теорема 1.1.2. *Пусть $f \in H$. Тогда для любых $n,k \in \mathbb{N}$ и $h \in (0,1)$ имеет место неравенство*

$$E_{n-1}(f) \leq$$

$$\leq (n+1)^k\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)k}\left(\int\limits_0^{1/(n+1)}\Omega_k^{1/k}(f,h)dh\right)^k, \tag{1.1.5}$$

причём, при каждом фиксированном $n \in \mathbb{N}$ константу в правой части неравенства (1.1.5) *уменьшить нельзя.*

Величина

$$d_n(\mathfrak{M}) = d_n(\mathfrak{M},H) = \inf_{G_n}\left\{\sup_{f\in\mathfrak{M}}\left\{\inf_{g\in G_n}\|f-g\|\right\}\right\}, \tag{1.1.6}$$

где последний раз нижняя грань берётся по всем подпространствам $G_n \subset H$

размерности $n \in \mathbb{N}$ называется n-поперечником по Колмогорову (см., например, [37, с. 182]) центрально-симметричного класса векторов $\mathfrak{M} \subset H$.

Через $W_k(\Phi)$ — обозначим класс векторов $f \in H$, для которых при любом $k \in \mathbb{N}$

$$\Omega_k(f,t) \leq \Phi(t),$$

где $\Phi(t)$ — неотрицательная монотонно возрастающая на $\mathbb{R}_+ := [0,+\infty)$ функция, для которой $\Phi(0)=0$.

Теорема 1.1.3. *Для n-поперечника Колмогорова* (1.1.6) *класса $W_k(\Phi)$ при любых $n,k \in \mathbb{N}$ и $h \in (0,1)$ справедливо равенство*

$$d_n(W_k(\Phi),H) = \big[1-(1-h)^n\big]^{-k}\Phi(h). \tag{1.1.7}$$

§ 1.2. Постановка экстремальных задач, решение которых приводится во второй и третьей главе диссертации

1. В первом параграфе мы привели формулировки основных результатов из [19], известных в настоящее время по теме исследования. Приводим теперь формулировку экстремальных задач, которые существенно обобщают результаты, сформулированные в известных теоремах 1 – 3, и дадим их приложение к задачам, связанным с разложениями функций в ряд Фурье по классическим ортогональным полиномам Чебышева–Эрмита, Чебышева–Лагерра, Якоби и др.

Задача I. Пользуясь неравенством (1.1.4), **результатом** (1.1.7) **для колмогоровского** n**-поперечника** $d_n(W_k(\Phi), H)$, **найти точные значения бернштейновского** n**-поперечника** $b_n(W_k(\Phi), H)$, **гельфандовского** n**-поперечника** $d^n(W_k(\Phi), H)$, **линейного** n**-поперечника** $\delta_n(W_k(\Phi), H)$ **и проекционного** n**-поперечника** $\Pi_n(W_k(\Phi), H)$ **класса** $W_k(\Phi)$ **в пространстве** H**. Привести конкретное приложение полученного результата для гильбертовых пространств** $L_2(\mathbb{R}, e^{-x^2})$, $L_2(\mathbb{R}_+, e^{-x}x^\alpha)$ $(\alpha > -1)$, $L_2[(-1,1),(1-x)^\alpha(1+x)^\beta]$ $(\alpha, \beta > -1)$.

2. Пусть $A : H \to H$ — симметричный оператор в пространстве H, то есть оператор, заданный в некотором линейном многообразии $\mathscr{L}(A) \subset H$, удовлетворяющий условию $(Af, g) = (f, Ag)$, для любых $f, g \in \mathscr{L}(A)$. Мы полагаем, что оператор A обладает полной ортонормированной системой собственных векторов $\{f_n\}$, отвечающих собственным значениям $\{\lambda_n\}$:

$$Af_n = \lambda_n f_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

причём

$$0 \leq \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots .$$

Если для $r \in \mathbb{Z}_+$ положить $A^0 f = If = f$, $A^r f = A(A^{r-1}f)$, то в силу линейности оператора A из равенства

$$f \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) f_k, \;\; c_k(f) = (f, f_k), \; k \in \mathbb{Z}_+,$$

находим

$$Af = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k c_k(f) f_k, \ldots, A^r f = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^r c_k(f) f_k, \;\; r \in \mathbb{N}.$$

Через $H^r(A)$, $r \in \mathbb{Z}_+$ обозначим класс векторов $f \in H$, у которых $A^r f \in H$, а через $W^{(r)}(A) := WH^{(r)}(A)$ — класс векторов $f \in H^{(r)}(A)$, для которых $\|A^r f\| \leq 1$.

Задача II. Требуется определить точные значения следующих экстремальных величин

$$\text{а)} \quad E_{n-1}(W^{(r)}(A)) = \sup\left\{E_{n-1}(f) : f \in W^{(r)}(A)\right\};$$

$$\text{б)} \quad \sup\left\{\frac{\lambda_n^r E_{n-1}(f)}{\Omega_m(A^r f; t)} : f \in H^{(r)}(A)\right\};$$

$$\text{в)} \quad \sup_{f \in H^{(r)}(A)} \frac{\lambda_n^r \, E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(A^r f; t) q(t) dt\right)^{1/p}},$$

где $m, n \in \mathbb{N}$**,** $r \in \mathbb{Z}_+$**,** $1 \leq p \leq \infty$**,** $h \in (0,1)$**,** q **— весовая на** $(0, h]$ **функция.**

Пусть $W_p^{(r)}(\Omega_m; q) := W_p(\Omega_m; A^r, q)$ — класс векторов $f \in H^{(r)}(A)$, для которых

$$\int\limits_0^h \Omega_m^p(A^r f, t) q(t) dt \leq 1.$$

Задача III. Требуется для любых $m, n \in \mathbb{N}$ и любого s $(0 \leq s \leq r)$ найти точное значение величины

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}(W_p^{(r)}(\Omega_m; q)) := \sup\left\{E_{n-1}(A^s f) : f \in W_p^{(r)}(\Omega_m; q)\right\}$$

и дать приложение полученного результата в гильбертовых пространствах $L_2(\mathbb{R}, e^{-x^2})$, $L_2(\mathbb{R}_+, x^\alpha e^{-x})$ $(\alpha > -1)$, $L_2[(-1,1),(1-x)^\alpha(1+x)^\beta]$ $(\alpha, \beta > -1)$ и вычислить значение n-поперечников класса $W_p^{(r)}(\Omega_m, q)$ в этих пространствах.

3. В третьей главе диссертационной работы изучаются экстремальные задачи нахождения точных значений верхних граней наилучших приближений суммами Фурье функций, разложенных по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля и по классическим ортогональным многочленам на некоторых классах функций, характеризующихся обобщённым модулем непрерывности. При определении обобщённого модуля существенную роль играет оператор обобщенного сдвига. Введение такого модуля непрерывности функции оправдывается связью между наилучшими приближениями её ряда Фурье и поведением её обобщённого модуля непрерывности (неравенства типа Джексона–Стечкина).

Так как оператор Штурма–Лиувилля

$$\mathcal{D} := -\frac{1}{p(x)}\left(\frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{d}{dx}\right] - q(x)\right),$$

где $k(x)$, $k^{'}(x)$, $q(x)$, $p(x) \in C[a,b]$, $p(x) > 0$, $q(x) \geq 0$ на отрезке $[a,b]$, является симметрическим оператором, то все доказанные для симметрического оператора теоремы 2.2.1–2.2.5, 2.3.1–2.3.4, а также теоремы 2.4.1–2.4.3, связанные с обобщённым модулем непрерывности Ω_m, автоматически имеют место и для оператора $\mathcal{D}$ и конкретизируются в пространствах $L_2(\mathbb{R}, e^{-x^2})$, $L_2(\mathbb{R}_+, x^\alpha e^{-x})$ $(\alpha > -1)$, $L_2[(-1,1),(1-x)^\alpha(1+x)^\beta]$ для дифференциальных операторов второго порядка:

$$\mathscr{H} := -e^{x^2}\frac{d}{dx}\left(e^{-x^2}\frac{d}{dx}\right) \text{ — Чебышева–Эрмита;}$$
$$\mathcal{L} := x\frac{d^2}{dx^2} + (\alpha + x + 1)\frac{d}{dx} \text{ — Чебышева–Лагерра;}$$
$$\mathcal{J}_{\alpha,\beta} := (1-x^2)\frac{d^2}{dx^2} + \big[\beta - \alpha - (\alpha+\beta+2)x\big]\frac{d}{dx} \text{ — Якоби}$$

и других специальных операторов.

Решение всех перечисленных в пункте 3 задач составляет содержании третьей главы диссертационной работы.

ГЛАВА 2. Верхние грани наилучших приближений некоторых классов векторов суммами Фурье по произвольной ортонормированной системе векторов в гильбертовом пространстве

В этой главе даны точные оценки скорости сходимости (наилучших приближений) ряда Фурье по собственным векторам некоторого симметричного оператора в гильбертовом пространстве. Пользуясь хорошо известными фактами, построен обобщённый модуль непрерывности произвольного вектора гильбертова пространства, что позволило нам найти точные оценки скорости сходимости (наилучших приближений) ряда Фурье по произвольной ортогональной системе векторов. С помощью симметричного оператора в гильбертовом пространстве вводятся аналоги классов дифференцируемых функций, характеризующихся обобщённым модулем непрерывности и на введённых классах функций устанавливаем точные оценки скорости сходимости (величины наилучших приближений) рядов Фурье по собственным векторам этого оператора. Полученные результаты конкретизируются на разложении функций в рядах Фурье по ортонормированным системом полиномов Чебышева–Эрмита, Чебышева–Лагерра, Якоби, функций Бесселя и др. Кроме того, в пятом параграфе данной главы найдены точные значения различных n-поперечников рассматриваемых классов векторов в гильбертовом пространстве.

Результаты, изложенные в данной главе, опубликованы в работах [1-А, 2-А, 4-А, 5-А, 10-А].

§ 2.1. Определение и вспомогательные факты

Пусть H — произвольное вещественное сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением (f, g) векторов $f, g \in H$ и $\|f\| = (f, f)^{1/2}$ — норма вектора $f \in H$. Если $\{f_k\}$ — полная ортонормированная система векторов в пространстве H, то, как известно, ряд Фурье вектора $f \in H$ имеет вид:

$$f \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) f_k, \quad c_k(f) = (f, f_k), \ k \in \mathbb{Z}_+. \tag{2.1.1}$$

Через

$$S_{n-1}(f) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(f) f_k, \quad n \in \mathbb{N} \tag{2.1.2}$$

обозначим частичную сумму n-го порядка ряда (2.1.1).

Пусть $\mathcal{P}_n$ – совокупность обобщённых “полиномов” вида

$$p_n = \sum_{k=0}^{n} a_k f_k, \quad a_k \in \mathbb{R}, \ n \in \mathbb{Z}_+. \tag{2.1.3}$$

Равенством

$$E_{n-1}(f) = \inf\{\|f - p_{n-1}\| : p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}\} \tag{2.1.4}$$

определим наилучшее приближение вектора $f \in H$ элементами подпространства $\mathcal{P}_{n-1}$.

Известно [25, с. 390], что среди всех полиномов $p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}$ наименьшее значение величине (2.1.4) доставляет n-я частичная сумма (2.1.2). При этом

$$E_{n-1}(f) = \|f - S_{n-1}(f)\| = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f) \right\}^{1/2}. \tag{2.1.5}$$

В пространстве H определим оператор сдвига $F_h : H \to H$ следующего вида

$$F_h f = \sum_{k=0}^{\infty} (1-h)^k c_k(f) f_k, \quad h \in (0,1). \tag{2.1.6}$$

Очевидно, что для любых двух векторов $f, g \in H$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ для оператора сдвига (2.1.6) имеет место равенство

1) $F_h(\lambda f + \mu g) = \lambda F_h(f) + \mu F_h(g)$.

И так как для любого $h \in (0,1]$

$$\|F_h f\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} (1-h)^{2k} c_k^2(f) \leq \sum_{k=0}^{\infty} c_k^2(f) = \|f\|^2,$$

то для любого вектора $f \in H$ получаем:

2) $\|F_h f\| \leq \|f\|$.

Полагая в равенстве (2.1.6) $f = f_n$, в силу ортонормированности $\{f_k\}$ получаем

$$F_h f_n = \sum_{k=0}^{\infty} (1-h)^k c_k(f_n) f_k = (1-h)^n c_n(f_n) f_n =$$

$$= (1-h)^n (f_n, f_n) f_n = (1-h)^n f_n.$$

Таким образом, справедливо равенство

3) $F_h f_n = (1-h)^n f_n$.

Для произвольного вектора $f \in H$ имеем:

$$\|F_h f - f\| = \left\| \sum_{k=0}^{\infty} (1-(1-h)^k) c_k(f) f_k \right\| =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (1-(1-h)^k)^2 c_k^2(f) \leq h \sum_{k=0}^{\infty} k c_k^2(f) \to 0, \ h \to 0+.$$

В результате для любой $f \in H$:

4) $\|F_h f - f\| \to 0, \ h \to 0+$.

Определим теперь конечные разности первого и высших порядков, как и в классическом случае, равенствами

$$\triangle_h f = F_h f - f = (F_h - E)f,$$

$$\triangle_h^m f = \triangle_h(\triangle_h^{m-1} f) = (F_h - E)^m f = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} F_h^k f,$$

где $F_h^0 f = f$, $F_h^k f = F_h(F_h^{k-1} f)$, $k = 1, 2, \ldots, m$; $m \in \mathbb{N}$; E — единичный оператор в пространстве H. Величину

$$\Omega_m(f, t) = \sup\{\|\triangle_h^m f\| : 0 < h \le t\}, m \in \mathbb{N} \tag{2.1.7}$$

будем называть обобщённым модулем непрерывности вектора $f \in H$.

Найдем явный вид модуля непрерывности (2.1.7). Пользуясь равенствами (2.1.1) и (2.1.6), запишем

$$\triangle_h f = F_h f - f = -\sum_{k=1}^{\infty} (1 - (1 - h)^k) c_k(f) f_k,$$

и по индукции для любого $m \in \mathbb{N}$ имеем:

$$\triangle_h^m f = (F_h - E)^m f = (-1)^m \sum_{k=1}^{\infty} (1 - (1 - h)^k)^m c_k(f) f_k,$$

откуда, в силу ортонормированности системы векторов $\{f_k\}$, находим (см., работу [32, с. 5-8])

$$\|\triangle_h^m f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (1 - (1 - h)^k)^{2m} c_k^2(f),$$

а потому из (2.1.7) следует, что

$$\Omega_m^2(f, t) = \sup\left\{\sum_{k=1}^{\infty} (1 - (1 - h)^k)^{2m} c_k^2(f) : 0 < h \le t\right\}, \tag{2.1.8}$$

и так как

$$\sup\{(1-(1-h)^k) : 0 < h \le t\} = (1-(1-t)^k),$$

то из (2.1.8) получаем

$$\Omega_m^2(f,t) = \sum_{k=1}^{\infty}(1-(1-t)^k)^m c_k^2(f). \tag{2.1.9}$$

Пусть $A : H \to H$ — симметричный оператор в пространстве H, то есть оператор, заданный в некотором линейном многообразии $\mathscr{L}(A) \subset H$, удовлетворяющий условию $(Af, g) = (f, Ag)$ для любых $f, g \in \mathscr{L}(A)$ [48, с. 233].

Всюду далее под полнотою ортонормированной системы собственных векторов оператора A будем понимать следующее:

1) Собственные векторы оператора A – это такие векторы u_i, для которых выполняется равенство $Au_i = \lambda_i u_i$, где λ_i – собственное значение, соответствующее собственному вектору u_i.

2) Ортонормированность означает, что собственные векторы $\{u_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$ образуют ортонормированную систему: $(u_i, u_j) = \delta_{ij}$ $(i, j \in \mathbb{Z}_+)$, где δ_{ij} – символ Кронекера $\delta_{ij} := \{1, \text{ если } i = j, \ \ 0, \text{если } i \ne j\}$ $i, j = 0, 1, \ldots$.

3) Полнота означает, что ортонормированная система собственных векторов $\{u_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$ образует базис в пространстве, в котором действует оператор A. Это значит, что любой вектор u в таком пространстве можно разложить по этим собственным векторам

$$u = \sum_{i=0}^{\infty} c_i v_i.$$

Мы предполагаем, что оператор A обладает полной ортонормированной системой собственных векторов $\{f_n\}$, отвечающих собственным значениям λ_n :

$$Af_n = \lambda_n f_n,\ n \in \mathbb{Z}_+,$$

причём

$$0 \leq \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots .$$

В этом случае из равенства (2.1.1) вытекает, что

$$Af = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k c_k(f) f_k. \tag{2.1.10}$$

Если для $r \in \mathbb{Z}_+$ положить $A^0 f = If = f,\ A^r f = A(A^{r-1}f),\ r \in \mathbb{N}$, то, пользуясь равенством (2.1.10), в силу линейности оператора A последовательно находим:

$$A^r f := A(A^{r-1}f) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^r c_k(f) f_k,\ r \in \mathbb{N}. \tag{2.1.11}$$

Кроме того, непосредственным вычислением легко доказать, что имеют место следующие равенства

$$E_{n-1}^2(A^r f) = \left\| A^r f - S_{n-1}(A^r f) \right\| =$$

$$= \left\| \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k^r c_k(f) f_k \right\| = \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k^{2r} c_k^2(f), \tag{2.1.12}$$

$$\Omega_m^2(A^r f; t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - (1-t)^k\right)^{2m} c_k^2(A^r f) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - (1-t)^k\right)^{2m} \lambda_k^{2r} c_k^2(f). \tag{2.1.13}$$

§ 2.2. Некоторые предварительные результаты

Всюду далее через $H^r(A)$, $r \in \mathbb{Z}_+$ обозначим класс векторов $f \in H$, у которых $A^r f \in H$. Имеет место следующая

Теорема 2.2.1. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$. *Тогда для произвольной* $r \in \mathbb{Z}_+$ *имеет место равенство*

$$\sup_{f \in H^r(A)} \frac{E_{n-1}(f)}{E_{n-1}(A^r f)} = \frac{1}{\lambda_n^r}. \tag{2.2.1}$$

Доказательство. Для произвольного вектора $f \in H^r(A)$ из формулы (2.1.5), с учетом монотонного возрастания последовательности собственных значений $\{\lambda_k\}$ оператора A, получаем оценку наилучшего приближения $E_{n-1}(f)$ вектора $f \in H^r(A)$ посредством $E_{n-1}(A^r f)$:

$$E_{n-1}^2(f) = \sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f) = \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k^{-2r} \cdot \lambda_k^{2r} \cdot c_k^2(f) \leq$$

$$\leq \lambda_n^{-2r} \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k^{2r} \cdot c_k^2(f) = \lambda_n^{-2r} E_{n-1}^2(A^r f).$$

Отсюда сразу следует оценка сверху величины, расположенной в левой части равенства (2.2.1):

$$\sup_{f \in H^r(A)} \frac{E_{n-1}(f)}{E_{n-1}(A^r f)} \leq \frac{1}{\lambda_n^r}. \tag{2.2.2}$$

Для получения аналогичной оценки снизу указанной величины введём в рассмотрение вектор $f_0 := f_n \in H^r(A)$, для которого

$$\begin{gathered} E_{n-1}(f_0) = E_{n-1}(f_n) = \|f_n\| = 1, \\ E_{n-1}(A^r f_0) = E_{n-1}(\lambda_n^r f_n) = \lambda_n^r E_{n-1}(f_n) = \lambda_n^r. \end{gathered} \tag{2.2.3}$$

Пользуясь равенствами (2.2.3), получаем оценку снизу

$$\sup_{f \in H^r} \frac{E_{n-1}(f)}{E_{n-1}(A^r f)} \geq \frac{E_{n-1}(f_0)}{E_{n-1}(A^r f_0)} = \frac{1}{\lambda_n^r}. \tag{2.2.4}$$

Требуемое равенство (2.2.1) следует из сопоставления оценки сверху (2.2.2) с оценкой снизу (2.2.4). Теорема 2.2.1 доказана.

Пусть $W^{(r)}(A) := WH^{(r)}(A)$ $(r \in \mathbb{Z}_+)$ — класс векторов $f \in H^{(r)}$, для которых $\|A^r f\| \leq 1$. Тогда имеет место следующая

Теорема 2.2.2. *При любых $n \in \mathbb{N}$ и $r \in \mathbb{Z}_+$ справедливо равенство*

$$E_{n-1}(W^{(r)}(A)) := \sup\Big\{E_{n-1}(f) : f \in W^{(r)}(A)\Big\} = \frac{1}{\lambda_n^r}. \tag{2.2.5}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что для любого вектора $f \in W^{(r)}(A)$ выполняется неравенство

$$E_{n-1}(A^r f) \leq \|A^r f\| \leq 1,$$

а потому из (2.2.2) для произвольного вектора $f \in W^{(r)}(A)$ имеем

$$E_{n-1}(f) \leq \frac{1}{\lambda_n^r} E_{n-1}(A^r f) \leq \frac{1}{\lambda_n^r},$$

откуда сразу следует оценка сверху для величины из левой части равенства (2.2.1):

$$E_{n-1}(W^{(r)}(A)) = \sup\Big\{E_{n-1}(f) : f \in W^{(r)}(A)\Big\} \leq \frac{1}{\lambda_n^r}. \tag{2.2.6}$$

Для получении аналогичной оценки снизу воспользуемся вектором $g_0 = \dfrac{1}{\lambda_n^r} f_0$, где $f_0 := f_n \in H^r(A)$, очевидно принадлежащего классу $W^{(r)}(A)$, поскольку в силу второго из равенств (2.2.3) имеем

$$E_{n-1}(A^r g_0) = E_{n-1}\left(A^r\left(\frac{1}{\lambda_n^r}f_n\right)\right) =$$

$$= E_{n-1}\left(\frac{1}{\lambda_n^r}A^r f_n\right) = \frac{1}{\lambda_n^r}E_{n-1}(A^r f_n) = \frac{1}{\lambda_n^r}\cdot\lambda_n^r = 1.$$

В силу первого равенства из (2.2.3) получаем

$$E_{n-1}(g_0) = E_{n-1}\left(\frac{1}{\lambda_n^r}f_n\right) = \frac{1}{\lambda_n^r}\cdot E_{n-1}(f_n) = \frac{1}{\lambda_n^r}\cdot 1 = \frac{1}{\lambda_n^r},$$

пользуясь которым будем иметь

$$E_{n-1}(W^{(r)}(A)) \geq E_{n-1}(g_0) = \frac{1}{\lambda_n^r}. \tag{2.2.7}$$

Равенство (2.2.5) получаем из сопоставления неравенств (2.2.6) и (2.2.7). Теорема 2.2.2 доказана.

Теорема 2.2.3. *Пусть* $n, m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $t \in (0,1]$. *Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f\in H^r(A)} \frac{\lambda_n^r \cdot E_{n-1}(f)}{\Omega_m(A^r f; t)} = \frac{1}{(1-(1-t)^n)^m}. \tag{2.2.8}$$

Доказательство. Для произвольного вектора $f \in H^r(A)$, пользуясь формулой (2.1.13), запишем

$$\Omega_m^2(A^r f; t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(1-(1-t)^k\right)^{2m}\lambda_k^{2r}c_k^2(f) \geq$$

$$\geq \sum_{k=n}^{\infty}(1-(1-t)^k)^{2m}\lambda_k^{2r}c_k^2(f) \geq$$

$$\geq (1-(1-t)^n)^{2m}\lambda_n^{2r}\sum_{k=n}^{\infty}c_k^2(f) =$$

$$= (1-(1-t)^n)^{2m}\lambda_n^{2r}E_{n-1}^2(f),$$

откуда сразу вытекает оценка сверху

$$\sup_{f\in H^r(A)}\frac{\lambda_n^r\cdot E_{n-1}(f)}{\Omega_m(A^rf;t)}\le\frac{1}{(1-(1-t)^n)^m}. \tag{2.2.9}$$

Для вектора $f_0 = f_n \in H^r(A)$, введённого нами в конце теоремы 2.2.1 и для которого, кроме (2.1.13), имеет место также равенство

$$\Omega_m(A^rf_0;t) = \lambda_n^r(1-(1-t)^n)^m, \tag{2.2.10}$$

получаем

$$\sup_{f\in H^r(A)}\frac{\lambda_n^r\cdot E_{n-1}(f)}{\Omega_m(A^rf;t)}\ge\frac{\lambda_n^r\cdot E_{n-1}(f_0)}{\Omega_m(A^rf_0;t)}=$$

$$=\frac{\lambda_n^r\cdot 1}{\lambda_n^r(1-(1-t)^n)^m}=\frac{1}{(1-(1-t)^n)^m}. \tag{2.2.11}$$

Путем сравнения оценки сверху (2.2.9) с аналогичной оценкой снизу (2.2.11) получаем требуемое равенство (2.2.8).

В случае $r = 0$ равенство (2.2.8) получено в работе [32].

Из теоремы 2.2.3 сразу вытекает

Следствие 2.2.1. *В условиях теоремы 2.2.3 справедливо равенство*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sup_{f\in H^{(r)}(A)}\frac{\lambda_n^rE_{n-1}(f)}{\Omega_m(A^rf;1/n)}=$$

$$=\sup_{n\in\mathbb{N}}\left[1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right]^{-m}=\left(1-e^{-1}\right)^{-m}.$$

Из полученного экстремального равенства получаем следующее неравенство типа Джексона–Стечкина между величиной наилучшего приближения

$E_{n-1}(f)$ и модулем непрерывности $\Omega_m(A^r f, t)$ порядка m в точке $t = 1/n$:

$$E_{n-1}(f) \leq \frac{1}{\lambda_n^r}(1 - e^{-1})^{-m}\omega_m\left(A^r f; \frac{1}{n}\right).$$

Всюду далее под весовой функцией на отрезке $(0, h]$ будем понимать неотрицательную функцию q, не эквивалентную нулю на этом же отрезке.

Теорема 2.2.4. *Пусть* $n, m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq p \leq \infty$, $h \in (0, 1]$, q *— весовая на отрезке* $(0, h]$ *функция. Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f \in H^r(A)} \frac{\lambda_n^r \cdot E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(A^r f; t) q(t) dt\right)^{1/p}} =$$

$$= \left(\int\limits_0^h \big(1 - (1-t)^n\big)^{mp} q(t) dt\right)^{-1/p}. \tag{2.2.12}$$

Доказательство. Для произвольного вектора $f \in H^r(A)$ и $t \in (0, 1]$ из равенства (2.2.8) следует, что

$$\Omega_m(A^r f; t) \geq \lambda_n^r \cdot E_{n-1}(f)\big(1 - (1-t)^n\big)^m.$$

Возведя обе части последнего неравенства в степень p $(1 \leq p \leq \infty)$, умножим на весовую функцию q и проинтегрируем по t от 0 до h, где $h \in (0, 1]$. В итоге, после возведения обеих частей полученного соотношения в степень $1/p$ $(1 \leq p \leq \infty)$, приходим к такому неравенству

$$\lambda_n^r E_{n-1}(f)\left(\int\limits_0^h \big(1 - (1-t)^n\big)^{mp} q(t) dt\right)^{1/p} \leq$$

$$\leq \left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(A^r f;t)q(t)dt\right)^{1/p}.$$

Так как полученное неравенство верно для любого вектора $f \in H^r(A)$, то из него получаем оценку сверху для величины, стоящей в левой части равенства (2.2.12):

$$\sup_{f\in H^r(A)} \frac{\lambda_n^r \cdot E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(A^r f;t)q(t)dt\right)^{1/p}} \leq$$

$$\leq \left(\int\limits_0^h \big(1-(1-t)^n\big)^{mp} q(t)dt\right)^{-1/p}. \tag{2.2.13}$$

Для получения аналогичной оценки снизу этой же величины снова рассмотрим вектор $f_0 = f_n \in H^r(A)$, для которого имеют место равенства (2.2.3) и (2.2.10), пользуясь которыми запишем оценку снизу

$$\sup_{f\in H^r(A)} \frac{\lambda_n^r \cdot E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(A^r f;t)q(t)dt\right)^{1/p}} \geq$$

$$\geq \frac{\lambda_n^r \cdot E_{n-1}(f_0)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(A^r f_0;t)q(t)dt\right)^{1/p}} =$$

$$= \frac{\lambda_n^r \cdot 1}{\lambda_n^r \left(\int\limits_0^h \big(1-(1-t)^n\big)^{mp} q(t)dt\right)^{1/p}} =$$

$$= \left(\int\limits_0^h \left(1-(1-t)^n\right)^{mp} q(t)dt \right)^{-1/p}. \qquad (2.2.14)$$

Требуемое равенство (2.2.12) вытекает из сравнения неравенств (2.2.13) и (2.2.14), чем и завершаем доказательство теоремы 2.2.4.

Два приведенных ниже следствия, вытекающие из теоремы 2.2.4, касаются двух частных случаев когда: а) $p = 1/m$, $m \in \mathbb{N}$ и б) $q \equiv 1$, $p = 1/m$, $m \in \mathbb{N}$ соответственно.

Следствие 2.2.2. *Справедливо соотношение*

$$\sup_{f \in H^r} \frac{\lambda_n^r E_{n-1}(f)}{\left\{ \int\limits_0^h \Omega_m^{1/m}(A^r f, t) q(t) dt \right\}^m} = \frac{1}{\left\{ \int\limits_0^h \Big[1-(1-t)^n\Big] \varphi(t) dt \right\}^m},$$

где $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $h \in (0,1)$, *а функция* q *и величина* h *удовлетворяют требованиям теоремы 2.2.4.*

Следствие 2.2.3. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $h \in (0,1)$, $q(t) \equiv 1$. *Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f \in H^r} \frac{\lambda_n^r E_{n-1}(f)}{\left\{ (n+1) \int\limits_0^h \Omega_m^{1/m}(A^r f, t) dt \right\}^m} =$$

$$= \Big\{ (n+1)h - 1 + (1-h)^{n+1} \Big\}^{-m}.$$

В полученном равенстве, полагая $h = 1/(n+1)$ и $r = 0$, получаем один из основных результатов работы М.В.Абилова и Г.А.Айгунова [7] в одномерном случае, а именно следующее равенство

$$\sup_{f\in H^r}\frac{E_{n-1}(f)}{\left\{(n+1)\int\limits_0^{1/(n+1)}\Omega_m^{1/m}(f,t)dt\right\}^m}=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)m}.$$

Из этого равенства следует предельное соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{f\in H}\frac{E_{n-1}(f)}{\left\{(n+1)\int\limits_0^{1/(n+1)}\Omega_m^{1/m}(f,t)dt\right\}^m}=e^m.$$

Отсюда, в свою очередь, сразу следует неравенство типа Джексона–Стечкина с явной константой

$$E_{n-1}(f)\le e^m\,\Omega_m\left(f,\frac{1}{n+1}\right).$$

В качестве приложения теоремы 2.2.4 рассмотрим следующую экстремальную задачу: если $\mathfrak{M}^{(r)}\subset H^r(A)$ есть некоторый подкласс векторов, то требуется найти величину

$$E_{n-1}(\mathfrak{M}^{(r)}):=\sup\Big\{E_{n-1}(f):f\in\mathfrak{M}^{(r)}\Big\}. \tag{2.2.15}$$

Величина (2.2.15) определяет точную верхнюю грань наилучших приближений класса векторов $\mathfrak{M}^{(r)}$ в пространстве H.

В качестве класса векторов $\mathfrak{M}^{(r)}$ будем рассматривать класс векторов $W_p^{(r)}(\Omega_m;q)\in H^{(r)}(A)$ при всех $m\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $1\le p\le\infty$, $h\in(0,1)$, $q(t)$ — весовая функция, удовлетворяющая ограничению

$$\left(\int\limits_0^h\Omega_m^p(A^rf;t)q(t)dt\right)^{1/p}\le 1.$$

Теорема 2.2.5. *Справедливо равенство*

$$\mathcal{E}_{n-1}(W_m^{(r)}(\Omega_q;q)) = \frac{1}{\lambda_n^r}\left(\int\limits_0^h \Big[1-(1-t)^n\Big]^{mp} q(t)dt\right)^{-1/p}. \tag{2.2.16}$$

Доказательство. В силу определения класса из неравенства (2.2.13) для любой функции $f \in W_m^{(r)}(\Omega_q;q)$ получаем

$$E_{n-1}(f) \le \frac{1}{\lambda_n^r}\left(\int\limits_0^h \Big[1-(1-t)^n\Big]^{mp} q(t)dt\right)^{-1/p} \times$$

$$\times \left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(A^r f;t)q(t)dt\right)^{-1/p} \le$$

$$\le \frac{1}{\lambda_n^r}\left(\int\limits_0^h \Big[1-(1-t)^n\Big]^{mp} q(t)dt\right)^{-1/p},$$

откуда сразу следует оценка сверху величины, расположенной в левой части

$$\mathcal{E}_{n-1}(W_m^{(r)}(\Omega_q;q)) \le \frac{1}{\lambda_n^r}\left(\int\limits_0^h \Big[1-(1-t)^n\Big]^{mp} q(t)dt\right)^{-1/p}. \tag{2.2.17}$$

Для получения аналогичной оценки снизу введём в рассмотрение вектор

$$g_1 := \frac{f_n}{\lambda_n^r}\left(\int\limits_0^h \Big[1-(1-t)^n\Big]^{mp} q(t)dt\right)^{-1/p},$$

для которого в силу равенств (2.1.5) и (2.1.13)

$$E_{n-1}(g_1) = \frac{1}{\lambda_n^r}\left(\int\limits_0^h \Big[1-(1-t)^n\Big]^{mp} q(t)dt\right)^{-1/p}, \tag{2.2.18}$$

$$\Omega_m(A^r g_1, t) = \frac{\Big[1-(1-t)^n\Big]^m}{\left(\int\limits_0^h \Big[1-(1-t)^n\Big]^{mp} q(t)dt\right)^{1/p}},$$

$$\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(A^r g_1; t) q(t)dt\right)^{1/p} = 1.$$

Последнее равенство означает, что вектор $g_1 \in W_m^{(r)}(\Omega_q; q)$.

Учитывая соотношение (2.2.18), запишем

$$\mathcal{E}_{n-1}(W_m^{(r)}(\Omega_q; q)) \geq E_{n-1}(g_1) \geq \frac{1}{\lambda_n^r}\left(\int\limits_0^h \Big[1-(1-t)^n\Big]^{mp} q(t)dt\right)^{-1/p}. \quad (2.2.19)$$

Требуемое равенство (2.2.16) получаем из сопоставления оценок (2.2.17) и (2.2.19), чем и завершаем доказательство 2.2.5.

Из доказанной теоремы 2.2.5 вытекает

Следствие 2.2.4. *В условиях теоремы 2.2.5 в случае*

$$g_*(t) = n(1-t)^{n-1} = \frac{d}{dt}\Big[1-(1-t)^n\Big]$$

имеет место равенство

$$\mathcal{E}_{n-1}\big(W_p^{(r)}(\Omega_m; q_*)\big) = \frac{1}{\lambda_n^r} \cdot \left\{\frac{mp+1}{\Big[1-(1-h)^n\Big]^{mp+1}}\right\}^{1/p} \quad (2.2.20)$$

и, в частности, при $p = 1/m$, $h = 1/n$ *из* (2.2.20) *следует, что*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n^r\, \mathcal{E}_{n-1}\big(W_{1/m}^{(r)}(\Omega_m; q_*)\big) =$$

$$= \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\{\frac{2}{\left[1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right]^2}\right\}^m = \frac{2^m}{\left(1-e^{-1}\right)^{2m}}.$$

Таким образом, в этом частном случае

$$\mathcal{E}_{n-1}\big(W_p^{(r)}(\Omega_m; q_*)\big) \sim \frac{1}{\lambda_n^r} \cdot \frac{2^m}{\big(1-e^{-1}\big)^{2m}}.$$

Приводим некоторые следствия из доказанных теорем. Так, например, если полагать:

I. $H := L_2((0,1), x)$, $\mathscr{B} := -\dfrac{d}{dx}\left(x\dfrac{d}{dx}\right) - \dfrac{p^2}{x}$, $\lambda_n = \mu_n^2$, $f_n(x) = J_p(\mu_n x)$ $(p > -1; n \in \mathbb{Z}_+)$ — система функций Бесселя первого рода, а μ_n – положительные корни уравнения $J_p(x) = 0$, расположенные в порядке возрастания. В этом случае в качестве частного случая получаем все результаты, доказанные в работах К.Тухлиева [40], М.Ш.Шабозова и К.Н.Муродова [45].

Хорошо известно, что во многих задачах математической физики, решение которых связанно с применением цилиндрических и сферических координат, метод разделения переменных приводит к дифференциальному уравнению

$$x^2\frac{d^2u}{dx^2} + x\frac{du}{dx} + (x^2 + \nu^2)u = 0,$$

которого называется уравнением Бесселя, а его решения — цилиндрическими или Бесселевыми функциями.

Рассмотрим следующую краевую задачу

$$-\frac{d}{dx}\left(x\frac{du}{dx}\right) + \frac{\nu^2}{x}u = \lambda x u \quad (0 < x < 1),$$

$$|u(0)| < +\infty, \quad u(1) = 0.$$

Известно ([39, с. 355]), что система функций $\Big\{J_\nu(\lambda_n x)\Big\}_{n=1}^{\infty}$, где

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$$

— функция Бесселя первого рода порядка ν, а $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ — занумерованные в порядке возрастания положительные корни уравнения $J_\nu(x) = 0$, является системой собственных функций указанной краевой задачи, отвечающих собственным значениям λ_n^2 $(n = 1, 2, \ldots)$ полной и ортогональной в пространстве $L_2(x, (0,1))$ — суммируемых с квадратом функций с весом x на интервале $(0,1)$.

Всюду далее, ради краткости изложения через

$$\mathscr{B} := -\frac{d}{dx}\left(x\,\frac{d}{dx}\right) + \frac{\nu^2}{x}$$

обозначим дифференциальный оператор Бесселя второго порядка.

Теорема 2.2.6. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$. *Тогда для произвольной* $r \in \mathbb{Z}_+$ *справедливо равенство*

$$\sup_{f \in H^r} \frac{E_{n-1}(f)}{E_{n-1}(\mathscr{B}^r f)} = \frac{1}{\lambda_n^{2r}}, \tag{2.2.21}$$

где

$$E_{n-1}(f) := \left\| f(\cdot) - \sum_{k=0}^{n-1} c_k(f) J_\nu(\cdot) \right\|_{L_2(x,(0,1))}$$

— величина наилучшего приближения частичными суммами Бесселя функции $f \in L_2(x, (0,1))$.

Теорема 2.2.7. *При любых* $n \in \mathbb{N}$ *и* $r \in \mathbb{Z}_+$ *справедливо равенство*

$$E_{n-1}(W^{(r)}(\mathscr{B})) := \sup\left\{E_{n-1}(f) : f \in W^{(r)}(\mathscr{B})\right\} = \frac{1}{\lambda_n^{2r}}. \tag{2.2.22}$$

Теорема 2.2.8. *Пусть* $n, m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $t \in (0,1]$. *Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f \in H^r} \frac{\lambda_n^{2r} \cdot E_{n-1}(f)}{\Omega_m(\mathscr{B}^r f; t)} = \frac{1}{(1 - (1-t)^n)^m}. \tag{2.2.23}$$

Теорема 2.2.9. *Пусть* $n, m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $1 \le p \le \infty$, $h \in (0,1]$, q *— весовая на отрезке* $(0,h]$ *функция. Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f \in H^r} \frac{\lambda_n^{2r} \cdot E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(\mathscr{B}^r f; t) q(t) dt\right)^{1/p}} =$$

$$= \left(\int\limits_0^h (1-(1-t)^n)^{mp} q(t) dt\right)^{-1/p}. \tag{2.2.24}$$

II. $H := L_2((a,b), p(x)), A := A_p = \sigma(x)\frac{d^2}{dx^2} - \nu(x)\frac{d}{dx}$, где $\sigma(x)$ и $\nu(x)$ – соответственно многочлены не выше второй и первой степени на интервале (a,b). Согласно работе [36] рассмотрим весовую функцию $p(x)$, удовлетворяющую на отрезке (a,b) дифференциальному уравнению первого порядка

$$\frac{d}{dx}\Big(\sigma(x)p(x)\Big) = \nu(x)p(x), \tag{2.2.25}$$

где $\sigma(x)$ и $\nu(x)$ — многочлены не выше второй и первой степени соответственно и при любом $l \in \mathbb{Z}_+$ удовлетворяют условиям

$$\lim_{x \to a+0} \sigma(x)p(x)x^l = \lim_{x \to b-0} \sigma(x)p(x)x^l = 0,$$

$$\lambda_n := \lambda_n(p(x)) := -n\nu'(x) - \frac{n(n-1)}{2}\sigma''(x). \tag{2.2.26}$$

Известно [36], что при явном виде $p(x)$ все ортогональные многочлены Чебышева-Эрмита, Чебышева-Лагерра и Якоби, удовлетворяют дифференциальному уравнению второго порядка

$$-A_p f = \lambda_n(p) f. \tag{2.2.27}$$

Явные выражения для указанных классических многочленов задаются формулой Родрига

$$y_n(x) = \frac{B_n}{p(x)} = \Big(\sigma^n(x)p(x)\Big)^{(n)}, \tag{2.2.28}$$

где B_n — нормированная постоянная, а весовая функция $p(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (2.2.25).

В силу формулы (2.2.27) числа $\lambda_n(p)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, которые определяются из (2.2.26), являются собственными значениями оператора $(-A_p)$, а соответствующие им собственные функции — ортогональными на (a, b) многочленами, соответствующими весовой функции $p(x)$.

В зависимости от вида функции $p(x)$ получаем следующие системы ортогональных на (a, b) полиномов (см., например, [11, 36]):

I. В случае, когда $p(x) = e^{-x^2}$, $\sigma(x) = 1$, $\tau(x) := 2x$, (a, b) является вещественной оси $\mathbb{R} := (-\infty, +\infty)$, в силу формулы (2.2.28) полиномы $y_n(x)$ при $B := (-1)^n$ являются полиномами Чебышева–Эрмита

$$H_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n!2^n\sqrt{\pi}}} e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

При этом $\lambda_n(p) = 2n$. Рассмотрим следующую краевую задачу

$$-\frac{d}{dx}\left(e^{-x^2}\frac{du}{dx}\right) = \lambda\, e^{-x^2}u, \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$u(x) = O(x^n) \quad (x \to \pm\infty).$$

Известно, что собственными значениями этой задачи будут числа $\lambda_n = 2n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, а отвечающие им собственные функции — многочлены Эрмита $H_n(x)$ образуют полную ортогональную систему функций в пространстве

$L_2(e^{-x^2},\mathbb{R})$ — суммируемых с квадратом функций с весом e^{-x^2} на всей сои $\mathbb{R}:=(-\infty,+\infty)$. Всюду далее через

$$\mathscr{H}:=-\frac{1}{dx}\left(e^{-x^2}\frac{d}{dx}\right)$$

обозначим дифференциальный оператор второго порядка Чебышева–Эрмита. Для оператора Эрмита $\mathscr{H}$ справедливы следующие утверждения.

Теорема 2.2.10. *Пусть $n\in\mathbb{N}$. Тогда для произвольной $r\in\mathbb{Z}_+$ справедливо равенство*

$$\sup_{f\in H^r}\frac{E_{n-1}(f)}{E_{n-1}(\mathscr{H}^r f)}=\frac{1}{(2n)^r}, \tag{2.2.29}$$

где

$$E_{n-1}(f):=\left\|f(\cdot)-\sum_{k=0}^{n-1}c_k(f)H_k(\cdot)\right\|_{L_2(e^{-x^2},\mathbb{R}_+)}$$

— величина наилучшего приближения частичными суммами Чебышева–Эрмита функции $f\in L_2(e^{-x^2},\mathbb{R})$, $\mathbb{R}:=(-\infty,+\infty)$.

Теорема 2.2.11. *При любых $n\in\mathbb{N}$ и $r\in\mathbb{Z}_+$ справедливы равенства*

$$E_{n-1}(W^{(r)}(\mathscr{H})):=\sup\left\{E_{n-1}(f):f\in W^{(r)}(\mathscr{H})\right\}=\frac{1}{(2n)^r}. \tag{2.2.30}$$

Теорема 2.2.12. *Пусть $n,m\in\mathbb{N},\ r\in\mathbb{Z}_+,\ t\in(0,1]$. Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f\in H^r}\frac{(2n)^r\cdot E_{n-1}(f)}{\Omega_m(\mathscr{H}^r f;t)}=\frac{1}{(1-(1-t)^n)^m}. \tag{2.2.31}$$

Теорема 2.2.13. *Пусть $n,m\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $1\le p\le\infty$, $h\in(0,1]$, q —*

весовая на отрезке $(0,h]$ *функция. Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f\in H^r}\frac{(2n)^r\cdot E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(\mathscr{H}^r f;t)q(t)dt\right)^{1/p}}=$$

$$=\left(\int\limits_0^h (1-(1-t)^n)^{mp}q(t)dt\right)^{-1/p}. \tag{2.2.32}$$

II. Если $p(x)=x^\alpha e^{-x}$, где $\alpha>-1$, $\sigma(x)=x$, $\nu(x)=-x+\alpha+1$, $(a,b):=\mathbb{R}_+=(0,\infty)$. В силу формулы (2.2.28) соответствующие полиномы $y_n(x)$ при $B_n=\dfrac{1}{n!}$ будут полиномами Чебышева–Лагерра

$$L_n^{(\alpha)}(x):=\frac{1}{n!}e^x x^{-\alpha}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n+\alpha}e^{-x}\right).$$

В этом случае $\lambda_n(p)=n$. Хорошо известно, что общее решение дифференциального уравнения

$$xu''+(\alpha-x+1)u'+nu=0$$

даётся полиномами Чебышева–Лагерра $L_n^{(\alpha)}(x)$.

Введя операторное обозначение

$$\mathcal{L}:=x\frac{d^2}{dx^2}+(\alpha-x+1)\frac{d}{dx},$$

сформулируем следующие утверждения.

Теорема 2.2.14. *Пусть* $n\in\mathbb{N}$. *Тогда для произвольной* $r\in\mathbb{Z}_+$ *справедливо равенство*

$$\sup_{f\in H^r}\frac{E_{n-1}(f)}{E_{n-1}(\mathcal{L}^r f)}=\frac{1}{n^r}, \tag{2.2.33}$$

где

$$E_{n-1}(f) := \left\| f(\cdot) - \sum_{k=0}^{n-1} c_k(f) L_n^{\alpha}(\cdot) \right\|_{L_2(x^{\alpha}e^{-x},\mathbb{R}_+)}$$

— величина наилучшего приближения функции $f \in L_2(x^{\alpha}e^{-x},\mathbb{R}_+)$ *частичными суммами Чебышева–Лагерра.*

Теорема 2.2.15. *При любых* $n \in \mathbb{N}$ *и* $r \in \mathbb{Z}_+$ *справедливы равенства*

$$E_{n-1}(W^{(r)}(\mathcal{L})) := \sup \left\{ E_{n-1}(f) : f \in W^{(r)}(\mathcal{L}) \right\} = \frac{1}{n^r}. \tag{2.2.34}$$

Теорема 2.2.16. *Пусть* $n, m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $t \in (0, 1]$. *Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f \in H^r} \frac{n^r \cdot E_{n-1}(f)}{\Omega_m(\mathcal{L}^r f; t)} = \frac{1}{(1-(1-t)^n)^m}. \tag{2.2.35}$$

Теорема 2.2.17. *Пусть* $n, m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq p \leq \infty$, $h \in (0, 1]$, q *— весовая на отрезке* $(0, h]$ *функция. Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f \in H^r} \frac{n^r \cdot E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(\mathcal{L}^r f; t) q(t) dt \right)^{1/p}} =$$

$$= \left(\int\limits_0^h (1-(1-t)^n)^{mp} q(t) dt \right)^{-1/p}. \tag{2.2.36}$$

III. Пусть $p_{\alpha,\beta}(x) := (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$, где $\alpha, \beta > -1$, $\sigma(x) := 1 - x^2$, $\nu(x) := -(\alpha+\beta+2)x + \beta - \alpha$, (a, b) — интервал $(-1, 1)$. Согласно формуле (2.2.28) соответствующие полиномы $y_n(x)$ при $B_n := (-1)^n/(2^n \cdot n!)$ являются полиномами Чебышева–Якоби

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) := \frac{(-1)^n}{2^n n!} \big(1-x\big)^{-\alpha} \big(1+x\big)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} \left(\big(1-x\big)^{n+\alpha} \big(1+x\big)^{n+\beta} \right).$$

При этом из (2.2.26) получаем

$$\lambda_n(p) := n(n+\alpha+\beta+1).$$

Многочлены $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ являются решением дифференциального уравнения

$$(1-x^2)\frac{d^2u}{dx^2}+[\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x]\frac{d}{dx}+n(n+\alpha+\beta)u=0.$$

Исходя из вида дифференциального уравнения введём операторное обозначение дифференциального оператора Якоби второго порядка

$$\mathcal{J}_{\alpha,\beta} := (1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}+[\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x]\frac{d}{dx}$$

и сформулируем подобно предыдующим случаям соответствующие результаты для оператора Якоби.

Теорема 2.2.18. *Пусть $n \in \mathbb{N}$. Тогда для произвольной $r \in \mathbb{Z}_+$ справедливо равенство*

$$\sup_{f\in H^r}\frac{E_{n-1}(f)}{E_{n-1}(\mathcal{J}_{\alpha,\beta}^r f)}=\frac{1}{[n(n+\alpha+\beta+1)]^r}, \tag{2.2.37}$$

где

$$E_{n-1}(f) := \left\|f-S_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(f)\right\|_{L_2(p_{\alpha,\beta};(-1,1))}$$

— величина среднеквадратического отклонения (наилучшее приближение) функции $f \in L_2(p_{\alpha,\beta};(-1,1))$ частичными суммами Якоби порядка $n-1$.

Теорема 2.2.19. *При любых $n \in \mathbb{N}$ и $r \in \mathbb{Z}_+$ справедливы равенства*

$$E_{n-1}(W^{(r)}(\mathcal{J}_{\alpha,\beta})) := \sup\left\{E_{n-1}(f) : f \in W^{(r)}(\mathcal{J}_{\alpha,\beta})\right\} =$$

$$=\frac{1}{[n(n+\alpha+\beta+1)]^r}. \tag{2.2.38}$$

Теорема 2.2.20. *Пусть* $n, m \in \mathbb{N},\ r \in \mathbb{Z}_+,\ t \in (0,1]$. *Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f \in H^r} \frac{[n(n+\alpha+\beta+1)]^r \cdot E_{n-1}(f)}{\Omega_m(\mathcal{J}^r_{\alpha,\beta} f; t)} = \frac{1}{(1-(1-t)^n)^m}. \tag{2.2.39}$$

Теорема 2.2.21. *Пусть* $n, m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $1 \le p \le \infty$, $h \in (0,1]$, q *— весовая на отрезке* $(0,h]$ *функция. Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f \in H^r} \frac{[n(n+\alpha+\beta+1)]^r \cdot E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(\mathcal{J}^r_{\alpha,\beta} f; t) q(t) dt\right)^{1/p}} =$$

$$= \left(\int\limits_0^h (1-(1-t)^n)^{mp} q(t) dt\right)^{-1/p}. \tag{2.2.40}$$

§ 2.3. Обобщение результатов второго параграфа и некоторые результаты приближения

В пространстве H определим оператор сдвига $F_h : H \to H$ равенством

$$F_h f = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(h) c_k(f) f_k, \tag{2.3.1}$$

где $\varphi_k(h)$ $(k \in \mathbb{Z}_+, 0 < h \leq 1)$ — непрерывные неотрицательные монотонно убывающие функции, удовлетворяющие условиям:

$$\varphi_k(h) \not\equiv const, \;\; 0 \leq \varphi_k(h) \leq 1, \; \varphi_k(h) \geq \varphi_{k+1}(h).$$

Очевидно, что $F_h : H \to H$ — линейный ограниченный оператор, обладающий следующими свойствами:

1. $F_h(\lambda f + \mu g) = \lambda F_h(f) + \mu F_h(g), \; \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \; f, g \in H$;

2. $\|F_h f\| \leq \|f\|$; 3. $F_h f_n = \varphi_n(h) f_n$;

4. $\|F_h - f\| \to 0, \; h \to 0+$.

Для произвольного вектора $f \in H$, как и в классическом случае, определим конечные разности первого и высших порядков равенствами

$$\triangle_h f = F_h f - f = (F_h - \mathbb{I}) f,$$

$$\triangle_h^m f := \triangle_h(\triangle_h^{m-1} f) = (F_h - \mathbb{I})^m f = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} F_h^k f,$$

где $F_h^0 f = \mathbb{I} f = f, \; F_h^k f = F_h(F_h^{k-1} f), \; k = \overline{1, m}, \; n \in \mathbb{N}, \mathbb{I}$ — единичный оператор пространства H. Величину

$$\Omega_m(f, t) = \sup \Big\{ \|\triangle_h^m f\| : 0 < h \leq t \Big\}, \; m \in \mathbb{N}, 0 < t \leq 1 \tag{2.3.2}$$

назовем обобщённым модулем непрерывности вектора $f \in H$.

Пользуясь разложением вектора $f \in H$ в ряд Фурье (2.1.1) и общим видом оператора сдвига (2.3.1), найдём явный вид конечных разностей и обобщённого модуля непрерывности (2.3.2). Имеем

$$\triangle_h f = F_h(f - \mathbb{I}) = -\sum_{k=0}^{\infty} \big(1 - \varphi_k(h)\big) c_k(f) f_k$$

и по индукции для любого $m \in \mathbb{N}$ запишем

$$\triangle_h^m f = (F_h - \mathbb{I})^m f = (-1)^m \sum_{k=0}^{\infty} \big(1 - \varphi_k(h)\big)^m c_k(f) f_k. \tag{2.3.3}$$

Применяя равенство Парсеваля, в силу ортонормированности системы векторов $\{f_k\}, k \in \mathbb{Z}_+$, из (2.3.3) получаем

$$\|\triangle_h^m f\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \big(1 - \varphi_k(h)\big)^{2m} c_k^2(f). \tag{2.3.4}$$

Таким образом, с учетом равенства (2.3.4), модуль непрерывности (2.3.2) имеет вид

$$\Omega_m(f, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \big(1 - \varphi_k(t)\big)^{2m} c_k^2(f). \tag{2.3.5}$$

Пусть $A : H \to H$ – симметричный оператор в пространстве H. Тогда, как и в предыдующем параграфе, при любом $s = 0, 1, 2, \ldots, r$, $r \in \mathbb{N}$ непосредственными вычислениями легко доказать, что

$$E_{n-1}^2(A^s f) = \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k^{2s} c_k^2(f), \tag{2.3.6}$$

$$\Omega_m^2(A^r f; t) = \sum_{k=0}^{\infty} \big(1 - \varphi_k(t)\big)^{2m} \cdot \lambda_k^{2r} c_k^2(f). \tag{2.3.7}$$

Пусть $H^{(r)}(A)$, $r \in \mathbb{N}$, по прежнему, класс векторов $f \in H$, для которых $A^r f \in H$. Имеет место следующее утверждение, которое является обобщением теоремы 2.2.1.

Теорема 2.3.1. *Пусть* $n, r \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$. *Тогда имеет место равенство*

$$\sup_{f \in H^{(r)}(A)} \frac{E_{n-1}(A^s f)}{E_{n-1}(A^r f)} = \frac{1}{\lambda_n^{r-s}}. \tag{2.3.8}$$

Доказательство. Для произвольного вектора $f \in H^{(r)}(A)$ при любом s $(0 \leq s \leq r)$, учитывая равенство (2.1.11) и монотонное возрастание последовательности собственных значений $\{\lambda_k\}$, оценим величину наилучшего приближения $E_{n-1}(A^s f)$ посредством величины $E_{n-1}(A^r f)$. Имеем:

$$E^2_{n-1}(A^s f) = \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k^{2s} c_k^2(f) = \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k^{-2(r-s)} \lambda_k^{2r} c_k^2(f) \leq$$

$$\leq \lambda_n^{-2(r-s)} \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k^{2r} c_k^2(f) = \lambda_n^{-2(r-s)} E^2_{n-1}(A^r f).$$

Отсюда следует оценка сверху экстремальной характеристики из левой части равенства (2.3.8):

$$\sup_{f \in H^{(r)}(A)} \frac{E_{n-1}(A^s f)}{E_{n-1}(A^r f)} \leq \frac{1}{\lambda_n^{r-s}}. \tag{2.3.9}$$

Для получения соответствующей оценки снизу указанной величины введём в рассмотрение вектор $f_0 := f_n \in H^{(r)}(A)$, для которого

$$E_{n-1}(A^s f_0) = \lambda_n^s \cdot f_0, \quad s = 0, 1, \ldots, r. \tag{2.3.10}$$

Пользуясь этими равенствами, запишем

$$\sup_{f \in H^{(r)}(A)} \frac{E_{n-1}(A^s f)}{E_{n-1}(A^r f)} \geq \frac{E_{n-1}(A^s f_0)}{E_{n-1}(A^r f_0)} = \frac{1}{\lambda_n^{r-s}}. \tag{2.3.11}$$

Равенство (2.3.8) получаем из сравнения неравенств (2.3.9) и (2.3.11).

Теорема 2.3.1 доказана.

Из теоремы 2.3.1 для класса $W^{(r)}(A)$ по схеме доказательства теоремы 2.2.2 получаем следующее утверждение

Теорема 2.3.2. *При любых $n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $n \geq s$ справедливо равенство*

$$E_{n-1}^{(s)}(W^{(r)}(A)) = \sup\left\{E_{n-1}(A^s f) : f \in W^{(r)}(A)\right\} = \frac{1}{\lambda_n^{r-s}}. \tag{2.3.12}$$

Доказательство. Так как для $f \in W^{(r)}(A)$

$$E_{n-1}(A^s f) \leq \frac{1}{\lambda_n^{r-s}} \cdot E_{n-1}(A^r f) \leq \frac{1}{\lambda_n^{r-s}}, \tag{2.3.13}$$

или

$$E_{n-1}^{(s)}(W^{(r)}(A)) \leq \lambda_n^{r-s}$$

и для ранее рассмотренного нами при доказательстве теоремы 2.2.2 вектора $g_0 = \dfrac{1}{\lambda_n^r} f_0$, где $f_0 = f_n \in H^{(r)}(A)$ имеет место равенство

$$E_{n-1}(A^r g_0) = 1,$$

а также

$$E_{n-1}(A^s g_0) = E_{n-1}\left(A^s\left(\frac{1}{\lambda_n^r} f_n\right)\right) =$$

$$= E_{n-1}\left(\frac{1}{\lambda_n^r} A^s f_n\right) = \frac{1}{\lambda_n^r} E_{n-1}(A^s f_n) =$$

$$= \frac{1}{\lambda_n^r} \cdot \lambda_n^s = \frac{1}{\lambda_n^{r-s}}, \tag{2.3.14}$$

то, используя (2.3.14), имеем

$$E_{n-1}^{(s)}(W^{(r)}(A)) \geq E_{n-1}(A^s g_0) = \frac{1}{\lambda_n^{r-s}}. \tag{2.3.15}$$

Требуемое равенство (2.3.12) получаем из сравнения оценки сверху (2.3.13) и снизу (2.3.15). Теорема 2.3.2 доказана.

Теорема 2.3.3. *Пусть* $r \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$, A *— симметричный оператор, обладающий полной ортонормированной системой векторов* $\{f_n\}, n \in \mathbb{Z}_+$, *отвечающих собственным значениям* $\{\lambda_k\}, k \in \mathbb{Z}_+$. *Тогда для произвольного вектора* $f \in H^{(r)}(A)$ *справедливо неравенство типа Колмогорова*

$$\|A^s f\| \leq \|f\|^{1-s/r} \cdot \|A^r f\|^{s/r}. \tag{2.3.16}$$

Неравенство (2.3.16) *неулучшаемо в том смысле, что существует вектор* $f_0 \in H^{(r)}(A)$, *для которого оно обращается в равенство.*

Доказательство. В силу условий теоремы из разложения любого вектора $f \in H$ в ряд Фурье (2.1.1) для любого $s = \overline{1, r}$ получаем

$$A^s f = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) \lambda_k^s f_k.$$

Отсюда, применяя сначала равенство Парсеваля, а затем неравенство Гельдера для сумм, имеем

$$\|A^s f\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^{2s} c_k^2(f) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(c_k^2(f)\right)^{1-s/r} \left(c_k^2(f) \lambda_k^{2r}\right)^{s/r} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2(f)\right)^{1-s/r} \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2(f) \lambda_k^{2r}\right)^{s/r} = \|f\|^{2(1-s/r)} \cdot \|A^r f\|^{2s/r},$$

откуда и следует неравенство (2.3.16). Докажем неулучшаемость (2.3.16). Для рассмотренного нами в конце теоремы 2.3.1 вектора $f_0 := f_n \in H^{(r)}(A)$, для которого

$$\|A^s f_0\| = \lambda_n^s, \quad \|A^r f_0\| = \lambda_n^r, \quad \|f_0\| = 1,$$

получаем

$$\|A^s f_0\| = \lambda_n^s = (1)^{1-s/r} \cdot (\lambda_n^r)^{s/r} = \|f_0\|^{1-s/r} \cdot \|A^r f\|^{s/r},$$

что и доказывает неулучшаемость неравенства (2.3.16).

Из доказанной теоремы вытекает

Следствие 2.3.1. *В условиях теоремы* 2.3.3 *справедливо неравенство*

$$E_{n-1}(A^s f)_2 \le \big(E_{n-1}(f)\big)^{1-s/r} \cdot \big(E_{n-1}(A^r f)\big)^{s/r}. \qquad (2.3.17)$$

В параграфе 2.2 через $W^r(A)$ обозначили класс векторов $f \in H^{(r)}(A)$, для которых $\|A^r f\| \le 1$. Для этого класса векторов имеет место

Теорема 2.3.4. *При всех* $0 \le s \le r$ *справедливо равенство*

$$\sup_{f \in W^r(A)} \frac{E_{n-1}(A^s f)}{\big(E_{n-1}(f)\big)^{1-s/r}} = 1. \qquad (2.3.18)$$

Доказательство. В самом деле, для произвольной функции $f \in W^r(A)$, имеют место неравенства

$$E_{n-1}(A^r f) \le \|A^r f\| \le 1,$$

а потому из (2.3.17) имеем:

$$E_{n-1}(A^s f) \le \big(E_{n-1}(f)\big)^{1-s/r} \cdot \big(E_{n-1}(A^r f)\big)^{s/r} \le \big(E_{n-1}(f)\big)^{1-s/r},$$

откуда и следует оценка сверху величины из левой части равенства (2.3.18):

$$\sup_{f\in W^r(A)} \frac{E_{n-1}(A^s f)}{\big(E_{n-1}(f)\big)^{1-s/r}} \le 1. \tag{2.3.19}$$

Для вектора $g_0 = f_n \cdot \lambda_n^{-r}$ имеем

$$E_{n-1}(A^s g_0) = \lambda_n^{-r+s}; \quad \big(E_{n-1}(g_0)\big)^{1-s/r} = \lambda_n^{-r+s},$$

и так как $A^r g_0 = \lambda_n^r g_0 = f_n$, $\|A^r g_0\| = \|f_n\| = 1$, то вектор $g_0 \in W^r(A)$, а потому запишем оценку снизу

$$\sup_{f\in W^r(A)} \frac{E_{n-1}(A^s f)}{\big(E_{n-1}(f)\big)^{1-s/r}} \ge \frac{E_{n-1}(A^s g_0)}{\big(E_{n-1}(g_0)\big)^{1-s/r}} = \frac{\lambda_n^{-r+s}}{\lambda_n^{-r+s}} = 1. \tag{2.3.20}$$

Из сравнения неравенств (2.3.19) и (2.3.20) получаем (2.3.18).

Теорема 2.3.4 доказана.

§ 2.4. Теоремы, связанные с модулем непрерывности Ω_m

В этом параграфе мы изучаем экстремальную задачу отыскания точных констант в неравенствах типа Джексона–Стечкина между величиной наилучшего приближения векторов $f \in H^{(r)}(A)$ и характеристикой гладкости Ω_m. Имеет место следующая

Теорема 2.4.1. *Пусть* $n, m \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$, $0 < t < 1$. *Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f \in H^{(r)}(A)} \frac{\lambda_n^{r-s} E_{n-1}(A^s f)}{\Omega_m(A^r f; t)} = \frac{1}{\big(1 - \varphi_n(t)\big)^m}. \tag{2.4.1}$$

Доказательство. Для произвольного вектора $f \in H^{(r)}(A)$, пользуясь определением модуля непрерывности (2.3.7), а также того факта, что последовательность $\{\varphi_k(t)\}$ монотонно убывает для $t \in (0, 1)$, а последовательность $\{\lambda_k\}$ монотонно возрастает, запишем

$$\Omega_m^2(A^r f; t) \geq \sum_{k=n}^{\infty} \big(1 - \varphi_k(t)\big)^{2m} \lambda_k^{2r} c_k^2(f) \geq$$

$$\geq \big(1 - \varphi_n(t)\big)^{2m} \lambda_n^{2(r-s)} \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k^{2s} c_k^2(f) =$$

$$= \big(1 - \varphi_n(t)\big)^{2m} \lambda_n^{2(r-s)} \cdot E_{n-1}^2(A^s f).$$

Таким образом, для любого вектора $f \in H^{(r)}(A)$ при любых $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$ и $t \in (0, 1)$ имеет место неравенство

$$\Omega_m(A^r f; t) \geq \big(1 - \varphi_n(t)\big)^m \lambda_n^{r-s} \cdot E_{n-1}(A^s f), \tag{2.4.2}$$

откуда сразу получаем оценку сверху

$$\sup_{f\in H^{(r)}(A)} \frac{\lambda_n^{r-s}E_{n-1}(A^s f)}{\Omega_m(A^r f;t)} \le \frac{1}{\big(1-\varphi_n(t)\big)^m}. \tag{2.4.3}$$

Для вектора $f_0 = f_n \in H^{(r)}(A)$, введённого нами в конце доказательства теоремы 2.3.1 и для которого, кроме равенств (2.3.10), в силу (2.3.7), также верно равенство

$$\Omega_m(A^r f_0;t) = \big(1-\varphi_n(t)\big)^m \lambda_n^r, \tag{2.4.4}$$

имеем:

$$\sup_{f\in H^{(r)}(A)} \frac{\lambda_n^{r-s}E_{n-1}(A^s f)}{\Omega_m(A^r f;t)} \ge \frac{\lambda_n^{r-s}E_{n-1}(A^s f_0)}{\Omega_m(A^r f_0;t)} =$$

$$= \frac{\lambda_n^{r-s}\cdot\lambda_n^s}{\lambda_n^r\cdot\big(1-\varphi_n(t)\big)^m} = \frac{1}{\big(1-\varphi_n(t)\big)^m}. \tag{2.4.5}$$

Из сопоставления оценки сверху (2.4.3) с оценкой снизу (2.4.5) получаем требуемое равенство (2.4.1), чем и завершаем доказательство теоремы 2.4.1.

Заметим, что теорема 2.4.1 характеризует наилучшее одновременное (совместное) приближение вектора f и всех последовательностей Af, $A^2 f, \dots, A^s f$ в гильбертовом пространстве векторов H, у которых $\|A^r f\| < \infty$.

Доказанная теоремы 2.4.1 позволяет записать неравенство типа Джексона–Стечкина между величиною $E_{n-1}(A^s f)$ и модулем непрерывности $\Omega_m(A^r f;t)$:

$$E_{n-1}(A^s f) \le C(n,m,r,s;\varphi_n)\,\frac{1}{\lambda_n^{r-s}}\cdot\Omega_m(A^r f;1/n).$$

В самом деле, из равенства (2.4.1) при любых $m,n\in\mathbb{N}$, $r,s\in\mathbb{Z}_+$, $r\ge s$, $0<t<1$ для произвольного вектора $f\in H^r(A)$ следует неравенство

$$E_{n-1}(A^s f) \le \big(1-\varphi_n(t)\big)^{-m}\cdot\lambda_n^{-(r-s)}\cdot\Omega_m(A^r f;t). \tag{2.4.6}$$

Полагая в правой части (2.4.6) $t = 1/n$, получаем следующее неравенство типа Джексона–Стечкина

$$E_{n-1}(A^s f) \le \left(1 - \varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{-m} \lambda_n^{-(r-s)} \Omega_m(A^r f; 1/n) \qquad (2.4.7)$$

с явной константой $C(n, m, r, s; \varphi_n) = (1 - \varphi(1/n))^{-m}$.

Если функция $\varphi_n(t)$ изначально задана, то константу $C(n, m, r, s; \varphi_n)$ можно уточнить. Так, например, если $\varphi_n(t) = (1-t)^n$, то

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} C(n, m, r, s; \varphi_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right]^{-m} = \left(1 - e^{-1}\right)^{-m},$$

которую, мы ранее вычислили в параграфе 2.2.

Имеет место следующая общая теорема.

Теорема 2.4.2. *Пусть* $n, m \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \ge s$, $0 < p \le \infty$, $h \in (0, 1]$ *и* $q(t)$ *– весовая на отрезке* $[0, h]$ *функция. Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f\in H^{(r)}(A)} \frac{\lambda_n^{r-s} E_{n-1}(A^s f)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(A^r f; t) q(t) dt\right)^{1/p}} =$$

$$= \left(\int\limits_0^h \left(1 - \varphi_n(h)\right)^{mp} q(t) dt\right)^{-1/p}. \qquad (2.4.8)$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что для параметра p, удовлетворяющего условию $0 < p \le \infty$, функционал $\|\Omega_m q^{1/p}\|_p$ в знаменателе дроби в левой части (2.4.8) определён соотношением

$$\|\Omega_m q^{1/p}\|_p := \begin{cases} \left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(A^r f, t) q(t) dt\right)^{1/p}, & \text{если } 0 < p < \infty, \\ \operatorname{esssup}\Big\{\Omega_m(A^r f, t) : 0 < t \le h\Big\}, & \text{если } p = \infty. \end{cases}$$

Указанный функционал лишь при $1 \le p < \infty$ является нормой.

Переходим к доказательству равенства (2.4.8). Возведём обе части неравенства (2.4.2) в степень p $(0 < p \le \infty)$, умножим на весовую функцию q и проинтегрируем по t от 0 до h, где $h \in (0,1)$. В итоге, после возведения обеих частей полученного неравенства в степень $1/p$, приходим к неравенству

$$\lambda_n^{r-s} E_{n-1}(A^s f) \left(\int\limits_0^h \big(1 - \varphi_n(t)\big)^{mp} q(t) dt\right)^{1/p} \le$$

$$\le \left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(A^r f, t) q(t) dt\right)^{1/p}.$$

Так как последнее неравенство верно для любого вектора $f \in H^{(r)}(A)$, то из него получаем оценку сверху для величины, стоящей в левой части равенства (2.4.8):

$$\sup_{f \in H^{(r)}(A)} \frac{\lambda_n^{r-s} E_{n-1}(A^s f)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(A^r f; t) q(t) dt\right)^{1/p}} \le$$

$$\le \left(\int\limits_0^h \big(1 - \varphi_n(t)\big)^{mp} q(t) dt\right)^{-1/p}. \tag{2.4.9}$$

Оценку снизу рассмотренной экстремальной характеристики получаем для ранее рассмотренного нами вектора $f_0 = f_n \in H^{(r)}(A)$, для которого имеют место равенства (2.3.10) и (2.4.4), пользуясь которыми запишем

$$\sup_{f\in H^{(r)}(A)} \frac{\lambda_n^{r-s}E_{n-1}(A^s f)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(A^r f;t)q(t)dt\right)^{1/p}} \geq$$

$$\geq \frac{\lambda_n^{r-s}E_{n-1}(A^s f_0)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(A^r f_0;t)q(t)dt\right)^{1/p}} =$$

$$= \left(\int\limits_0^h (1-\varphi_n(t))^{mp}q(t)dt\right)^{-1/p}. \tag{2.4.10}$$

Требуемое равенство (2.4.8) следует из сопоставления неравенств (2.4.9) и (2.4.10). Теорема 2.4.2 доказана.

Используя определение характеристики гладкости (2.3.7) в параграфе 2.2, мы ввели класс векторов $W_p^{(r)}(\Omega_m;q)$, где $r\in\mathbb{Z}_+$, $0<p\leq\infty$, q — весовая на $[0,h]$ функция, принадлежащая $H^{(r)}(A)$ и удовлетворяющая ограничению

$$\int\limits_0^h \Omega_m^p(A^r f,t)q(t)dt \leq 1.$$

Здесь требуется для любых $m,n\in\mathbb{N}$ и любого s $(0\leq s\leq r)$ найти значения величины

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(s)}(W_p^{(r)}(\Omega_m;q)) = \sup\left\{E_{n-1}(A^s f) : f\in W_p^{(r)}(\Omega_m;q)\right\}. \tag{2.4.11}$$

Теорема 2.4.3. *Справедливо равенство*

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(s)}(W_p^{(r)}(\Omega_m;q)) = \lambda_n^{-(r-s)}\left(\int\limits_0^h (1-\varphi_n(t))^{mp}q(t)dt\right)^{-1/p}. \tag{2.4.12}$$

Доказательство. Действительно, из (2.4.8) для произвольной функции $f \in H^{(r)}(A)$ следует неравенство

$$E_{n-1}(A^s f) \leq \frac{1}{\lambda_n^{r-s}} \cdot \frac{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(A^r f; t) q(t) dt\right)^{1/p}}{\left(\int\limits_0^h (1-\varphi_n(t))^{mp} q(t) dt\right)^{1/p}}.$$

Отсюда, если предполагать, что вектор $f \in H^{(r)}(A)$ также принадлежит классу векторов $W_p^{(r)}(\Omega_m; q)$, то получим оценку сверху

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(s)}(W_p^{(r)}(\Omega_m; q)) \leq \lambda_n^{-(r-s)} \left(\int\limits_0^h (1-\varphi_n(t))^{mp} q(t) dt\right)^{-1/p}. \qquad (2.4.13)$$

Для получения аналогичной оценки снизу введём в рассмотрение вектор

$$f_1 = \frac{1}{\lambda_n^r} \left(\int\limits_0^h (1-\varphi_n(t))^{mp} q(t) dt\right)^{-1/p} f_n.$$

Для этого вектора при любом $s = 0, 1, \ldots, r;\ r \in \mathbb{N}$

$$A^s f_1 = A^s \left(\frac{1}{\lambda_n^r} \left(\int\limits_0^h (1-\varphi_n(t))^{mp} q(t) dt\right)^{-1/p} f_n\right) =$$

$$= \frac{1}{\lambda_n^r} \left(\int\limits_0^h (1-\varphi_n(t))^{mp} q(t) dt\right)^{-1/p} A^s f_n =$$

$$= \frac{1}{\lambda_n^r} \left(\int\limits_0^h (1-\varphi_n(t))^{mp} q(t) dt\right)^{-1/p} \lambda_n^s f_n =$$

$$= \frac{1}{\lambda_n^{r-s}} \left(\int\limits_0^h (1-\varphi_n(t))^{mp} q(t) dt\right)^{-1/p} f_n$$

и в силу равенств (2.3.6) и (2.3.7) получаем

$$E_{n-1}(A^s f_1) = \frac{1}{\lambda_n^{r-s}} \left(\int\limits_0^h (1-\varphi_n(t))^{mp} q(t)dt \right)^{-1/p} \cdot E_{n-1}(f_n) =$$

$$= \frac{1}{\lambda_n^{r-s}} \left(\int\limits_0^h (1-\varphi_n(t))^{mp} q(t)dt \right)^{-1/p} \cdot \|f_n\| =$$

$$= \frac{1}{\lambda_n^{r-s}} \left(\int\limits_0^h (1-\varphi_n(t))^{mp} q(t)dt \right)^{-1/p}. \qquad (2.4.14)$$

Кроме того,

$$\Omega_m(A^s f_1, t) = \sum_{k=0}^{\infty} (1-\varphi_k(t))^{2m} \lambda_k^{2r} \cdot c_k^2(f_1) =$$

$$= \frac{(1-\varphi_n(t))^{2m}}{\left(\int\limits_0^h (1-\varphi_n(t))^{mp} q(t)dt \right)^{1/p}}. \qquad (2.4.15)$$

Из (2.4.15) следует, что

$$\int\limits_0^h \Omega_m^p(A^r f_1, t) q(t)dt =$$

$$= \int\limits_0^h \left((1-\varphi_m(t))^m \left(\int\limits_0^h (1-\varphi_n(t))^{mp} q(t)dt \right)^{-1/p} \right)^p q(t)dt =$$

$$= \frac{\int\limits_0^h (1-\varphi_m(t))^{mp} q(t)dt}{\int\limits_0^h (1-\varphi_m(t))^{mp} q(t)dt} = 1.$$

Последнее равенство означает, что вектор $f_1 \in W_p^{(r)}(\Omega_m; q)$, а потому, учитывая равенство (2.4.14), запишем оценку снизу

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(s)}(W_p^{(r)}(\Omega_m; q)) \geq E_{n-1}(A^s f_1) =$$
$$= \lambda_n^{-(r-s)} \left(\int_0^h (1-\varphi_n(t))^{mp} q(t) dt \right)^{-1/p}. \qquad (2.4.16)$$

Сравнивая оценку сверху (2.4.13) с оценкой снизу (2.4.16), получаем равенство (2.4.12). Теорема 2.4.3 доказана.

Следствие 2.4.1. *В условиях теоремы* 2.4.3 *при* $q(t) := q_*(t) = -\varphi_n'(t) > 0,\ 0 \leq t \leq h$ *имеет место равенство*

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(s)}(W_p^{(r)}(\Omega_m; q_*)) = \frac{1}{\lambda_n^{r-s}} \cdot \left\{ \frac{(1-\varphi_n(h))^{m+1/p}}{(mp+1)^{1/p}} \right\}^{-1/p}.$$

Легко проверить, что вышеприведенные теоремы 2.3.1–2.3.4 и 2.4.1-2.4.3 остаются справедливыми в любом комплексном сепарабельном пространстве.

Приводим примеры гильбертовых пространств H и симметричных операторов $A : H \to H$, к которым применимы указанные выше теоремы. Например:

I. Для систем функций Бесселя первого рода, для которых

$$H := L_2[(0,1), xdx],\ \mathscr{B} := -\frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx}\right) - \frac{\nu^2}{x},\ \lambda_n = \mu_n^2,$$

$$f_n(x) := J_\nu(\mu_n x),\ \nu > -1,\ n \in \mathbb{Z}_+,\ \varphi_n(h) = (1-h)^n,$$

где μ_n — положительные корни уравнения $J_\nu(x) = 0$, расположенные в порядке возрастания, соотношения (2.4.8) и (2.4.12) соответственно приводят к равенствам

$$\sup_{f\in H^r(\mathscr{B})}\frac{\mu_n^{2(r-s)}E_{n-1}(\mathscr{B}^s f)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(\mathscr{B}^r f;t)q(t)dt\right)^{1/p}}=$$

$$=\left(\int\limits_0^h (1-(1-t)^n)^{mp}q(t)dt\right)^{-1/p},$$

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(s)}(W_p^{(r)}(\Omega_m;q))=\mu_n^{-2(r-s)}\left(\int\limits_0^h (1-(1-t)^n)^{mp}q(t)dt\right)^{-1/p}.$$

Последние равенства при $s = 0$ и $0 < p \leq 2$ получены в работе К.Тухлиева [40].

II. Для полиномов Чебышева–Эрмита, для которых

$$H:=L_{2,\mu}(\mathbb{R}),\ \mu(x)=e^{-x^2},\ \mathbb{R}:=(-\infty,+\infty),$$

$$\mathscr{H}:=-e^{x^2}\frac{d}{dx}\left(e^{-x^2}\cdot\frac{d}{dx}\right),$$

$$\lambda_n(\mu)=2n,\quad \varphi_n(t)=(1-t)^n,$$

$$f_n(x):=H_n(x)=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n!2^n\sqrt{\pi}}}\cdot e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}),\ n\in\mathbb{Z}_+.$$

В случае $s = 0$, для полиномов Чебышева–Эрмита известен результат Вакарчука–Швачко (см., [19, с.1610]), который в наших обозначениях имеет вид

$$\sup_{f\in H^r(\mathscr{H})}\frac{(2n)^r\,E_{n-1}(f)}{\left\{\int\limits_0^h \Omega_m^p(\mathscr{H}^r f,t)q(t)dt\right\}^{1/p}}=$$

$$= \frac{1}{\left\{ \int\limits_0^h \Big[1-(1-t)^n\Big]^{mp} q(t)dt \right\}^{1/p}}. \qquad (2.4.17)$$

Из теоремы 2.4.2, конкретизируя этот случай, сразу получаем следующее равенство для оператора Чебышева–Эрмита $\mathscr{H}$:

При любых $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$, $0 < p \leq \infty$, $h \in (0,1)$ и $q(t)$ — весовая функция имеет место равенство

$$\sup_{f \in H^r(\mathscr{H})} \frac{(2n)^{r-s}\, E_{n-1}(\mathscr{H}^s f)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(\mathscr{H}^r f; t) q(t)dt \right)^{1/p}} =$$

$$= \left(\int\limits_0^h \Big[1-(1-t)^n\Big]^{mp} q(t)dt \right)^{-1/p}.$$

Аналогичным образом из (2.4.12) имеем:

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(s)}(W_p^{(r)}(\Omega_m; q)) =$$

$$= (2n)^{-(r-s)} \left(\int\limits_0^h (1-(1-t)^n)^{mp} q(t)dt \right)^{-1/p}; \qquad (2.4.18)$$

III. Для полиномов Чебышева–Лагерра

$$H := L_{2,\rho}(\mathbb{R}_+), \quad \rho(x) := x^\alpha e^{-x}, \ \alpha > -1,$$

$$\mathcal{L} := x\frac{d^2}{dx^2} + (\alpha - x + 1)\frac{d}{dx}, \quad \lambda_n(\rho) = n, \quad \varphi(t) = (1-t)^n,$$

$$L_n(x) := L_n(x, \alpha) = \frac{1}{n!}\, x^{-\alpha} e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^{\alpha+n} e^{-x}), \ n \in \mathbb{Z}_+.$$

Из теоремы 2.4.2 для полиномов Чебышева–Лагерра получаем следующее утверждение:

При любых $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$, $0 < p \leq s$, $h \in (0,1)$ и $q(t)$ — весовая функция имеют место равенства

$$\sup_{f \in H^r(\mathcal{L})} \frac{n^{r-s} E_{n-1}(\mathcal{L}^s f)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(\mathcal{L}^r f; t) q(t) dt\right)^{1/p}} =$$

$$= \left(\int\limits_0^h \Big[1 - (1-t)^n\Big]^{mp} q(t) dt\right)^{-1/p},$$

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}\big(W_p^{(r)}(\Omega_m; \mathcal{L}, q)\big) =$$

$$= n^{-(r-s)} \left(\int\limits_0^h \Big[1 - (1-t)^n\Big]^{mp} q(t) dt\right)^{-1/p}.$$

IV. Для полиномов Якоби

$$H := L(P_{\alpha,\beta}; (-1,1)),\ P_{\alpha,\beta}(x) := (1-x)^\alpha (1+x)^\beta,\ \alpha, \beta > -1,$$

$$\mathcal{J}_{\alpha,\beta} := (1-x^2)\frac{d^2}{dx^2} + \Big[\beta - \alpha - (\alpha+\beta+2)x\Big]\frac{d}{dx},$$

$$\lambda_n(P_{\alpha,\beta}) = n(n+\alpha+\beta+1),\ \ \varphi(t) = (1-t)^n,$$

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) := \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}\Big[(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}\Big].$$

Справедливы следующее утверждения:

При любых $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$, $0 < p \leq \infty$, $h \in (0,1)$ и $q(t)$ — весовая на $(0, h)$ функция справедливы равенства

$$\sup_{f\in H^r(\mathcal{J}_{\alpha,\beta})} \frac{\Big[n(n+\alpha+\beta+1)\Big]^{r-s} E_{n-1}(\mathcal{J}^s_{\alpha,\beta}f)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(\mathcal{J}^r_{\alpha,\beta}f;t)q(t)dt\right)^{1/p}} =$$

$$= \left(\int\limits_0^h \Big[1-(1-t)^n\Big]^{mp} q(t)dt\right)^{-1/p} ;$$

$$\mathcal{E}^{(s)}_{n-1}\big(W^{(r)}_p(\Omega_m;\mathcal{J}_{\alpha,\beta},q)\big) =$$

$$= \Big[n(n+\alpha+\beta+1)\Big]^{-(r-s)} \left(\int\limits_0^h \Big[1-(1-t)^n\Big]^{mp} q(t)dt\right)^{-1/p} .$$

§ 2.5. Поперечники некоторых классов векторов

Прежде чем сформулировать основные результаты этого параграфа, напомним необходимые понятия и определения. Пусть H — гильбертово пространство векторов, $\mathbb{S}$ — единичный шар в H; Q — выпуклое центрально-симметричное множество из H; $\Lambda_n \subset H$ — n-мерное подпространство; $\Lambda^n \subset H$ — подпространство коразмерности n; $\mathcal{L} : H \to \Lambda_n$ — непрерывный линейный оператор; $\mathcal{L}^{\perp} : H \to \Lambda_n$ — непрерывный оператор линейного проектирования. Величины [37, 56]

$$b_n(Q,H) := \sup\left\{\sup\left\{\varepsilon > 0;\ \varepsilon\,\mathbb{S} \cap \Lambda_{n+1} \subset Q\right\} : \Lambda_{n+1} \subset H\right\},$$

$$d_n(Q,H) := \inf\left\{\sup\left\{\inf\left\{\|f-g\| : g \in \Lambda_n\right\} : f \in Q\right\} : \Lambda_n \subset H\right\},$$

$$\delta_n(Q,H) := \inf\left\{\inf\left\{\sup\left\{\|f-\mathcal{L}f\| : f \in Q\right\} : \mathcal{L}H \subset \Lambda_n\right\} : \Lambda_n \subset H\right\},$$

$$d^n(Q,H) := \inf\left\{\sup\left\{\|f\| : f \in Q \cap \Lambda^n\right\} : \Lambda^n \subset H\right\},$$

$$\Pi_n(Q,H) := \inf\left\{\inf\left\{\sup\left\{\|f-\mathcal{L}^{\perp}f\| : f \in Q\right\} : \mathcal{L}^{\perp}H \subset \Lambda_n\right\} : \Lambda_n \subset H\right\},$$

называют соответственно *бернштейновским, колмогоровским, линейным, гельфандовским, проекционным n-поперечниками* множества Q в пространстве H. Так как H является гильбертовым пространством, то имеют место следующие соотношения между перечисленными величинами [37, 56]:

$$b_n(Q,H) \le d^n(Q,H) \le d_n(Q,H) = \delta_n(Q,H) = \Pi_n(Q,H). \tag{2.5.1}$$

Приводим классы векторов, для которых вычислим точные значения вышеперечисленных n-поперечников в гильбертовом пространстве H:

$W^r(A) := \big\{f \in H^r(A) : \|A^r f\| \le 1\big\}$;

$W^r_m(A, \Phi)$ — класс векторов $f \in H^r(A)$, для которых

$$\Omega_m(A^r f; t) \le \Phi(t), \ \ m \in \mathbb{N}, \ r \in \mathbb{Z}_+,$$

где $\Phi(t)$ — неотрицательная монотонно возрастающая функция на $\mathbb{R}_+ := [0, \infty)$ такая, что $\Phi(0) = 0$;

$W^r(\Omega_m; q)$ — класс векторов $f \in H^r(A)$, удовлетворяющих условию

$$\int\limits_0^h \Omega^p_m(A^r f, t) q(t) dt \le 1.$$

Результат теоремы 2.2.1 позволяет доказать следующую теорему для класса векторов $W^r(A)$, введённого в параграфе 2.2.

Теорема 2.5.1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$. Тогда справедливо равенство*

$$\rho\Big(W^r(A), H\Big) = \frac{1}{\lambda^r_n}, \tag{2.5.2}$$

где $\rho_n(\cdot)$ — любой из n-поперечников: Бернштейна $b_n(\cdot)$, Колмогорова $d_n(\cdot)$, Гельфанда $d^n(\cdot)$, линейного $\delta_n(\cdot)$, проекционного $\Pi_n(\cdot)$.

Доказательство. Из неравенства (2.2.2) для произвольного вектора $f \in H^r(A)$ получаем оценку наилучшего приближения $E_{n-1}(A^r f)$:

$$E_{n-1}(f) = \|f - S_{n-1}(f)\| \le \lambda^{-r}_n E_{n-1}(A^r f). \tag{2.5.3}$$

Отсюда для $f \in W^r(A)$ имеем

$$E_{n-1}(A^r f) \le \|A^r f\| \le 1,$$

пользуясь которой из (2.5.3), получаем

$$E_{n-1}(f) \le \frac{1}{\lambda_n^r},$$

а потому запишем

$$\rho\Big(W^r(A), H\Big) = \sup\Big\{E_{n-1}(f) : f \in W^r(A)\Big\} \le \frac{1}{\lambda_n^r}, \tag{2.5.4}$$

где $\rho_n(\cdot)$ — любой из вышеперечисленных n-поперечников.

С целью получения аналогичной оценки снизу рассмотрим в $n+1$-мерном пространстве $\mathcal{P}_n$ полиномов

$$Q_n = \sum_{k=0}^{n} a_k f_k$$

шар

$$\sigma_{n+1} := \left\{Q_n \in \mathcal{P}_n : \|Q_n\| = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k^2\right)^{1/2} \le \frac{1}{\lambda_n^r}\right\}$$

и покажем, что $\sigma_{n+1} \subset W^r(A)$. Так как

$$A^r Q_n = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k^r a_k f_k,$$

то имеем

$$\|A^r Q_n\|^2 = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k^{2r} a_k^2 \le \lambda_n^{2r} \cdot \sum_{k=0}^{n} a_k^2 =$$
$$= \lambda_n^{2r} \|Q_n\|^2 \le \lambda_n^{2r} \cdot \frac{1}{\lambda_n^{2r}} = 1.$$

Отсюда следует, что шар $\sigma_{n+1} \subset W^r(A)$. В силу определения бернштейновского n-поперечника

$$b_n\Big(W^r(A), H\Big) \ge b_n\big(\sigma_{n+1}, H\big) \ge \frac{1}{\lambda_n^r},$$

а значит согласно соотношению (2.5.1)

$$\rho_n\Big(W^r(A), H\Big) \ge b_n\Big(W^r(A), H\Big) \ge \frac{1}{\lambda_n^r}. \tag{2.5.5}$$

Из неравенств (2.5.4) и (2.5.5) следует требуемое равенство (2.5.2). Теорема 2.5.1 доказана.

Теорема 2.5.2. *Пусть* $n, m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $h \in (0,1)$. *Тогда имеет место равенство*

$$\rho_n\Big(W_m^r(A,\Phi), H\Big) = \lambda_n^{-r}\Big[1-(1-h)^n\Big]^{-k}\Phi(h), \tag{2.5.6}$$

где $\rho_n(\cdot)$ *— любой из вышеперечисленных* n*-поперечников* $b_n(\cdot)$, $d_n(\cdot)$, $d^n(\cdot)$, $\delta_n(\cdot)$ *или* $\Pi_n(\cdot)$.

Доказательство. Так как для любого $f \in H^r(A)$ частная сумма $S_{n-1}(f)$ содержит n линейно независимых векторов, то из неравенства (2.2.9) (теоремы 2.2.3), для произвольного вектора $f \in H^r(A)$ следует, что

$$E_{n-1}(f) \le \lambda_n^{-r}\Big[1-(1-h)^n\Big]^{-m}\Phi(h),$$

откуда сразу получаем оценку сверху всех n-поперечников

$$\rho_n\Big(W_m^r(A,\Phi), H\Big) \le E_{n-1}\big(W_m^r(A,\Phi)\big) \le \lambda_n^{-r}\Big[1-(1-h)^n\Big]^{-m}\Phi(h). \tag{2.5.7}$$

Введя в $(n+1)$-мерном пространстве векторов $Q_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k f_k$ шар

$$\sigma_{n+1}^* := \left\{Q_n \in \mathcal{P}_n : \|Q_n\| \le \lambda_n^{-r}\Big[1-(1-h)^n\Big]^{-m}\Phi(h)\right\}$$

как и в теореме 2.5.1 легко доказать, что

$$\Omega_m^2(A^r f; t) \le \lambda_n^{2r}\Big[1-(1-h)^n\Big]^{2m}\|Q_n\|^2 \le$$

$$\le \lambda_n^{2r}\Big[1-(1-h)^n\Big]^{2m} \cdot \lambda_n^{-r}\Big[1-(1-h)^n\Big]^{-m}\Phi(h) \le \Phi(h).$$

Отсюда следует, что $\sigma^*_{n+1} \subset W^r_m(A, \Phi)$ и повторяя схему доказательства предыдующей теоремы, получаем

$$\rho_n\Big(W^r_m(A, \Phi), H\Big) \geq \lambda_n^{-r}\Big[1 - (1-h)^n\Big]^{-m}\Phi(h). \tag{2.5.8}$$

Требуемое равенство (2.5.6) следует из сопоставления неравенств (2.5.7) и (2.5.8), чем и завершаем доказательство теоремы 2.5.2.

Имеет место также следующее утверждение.

Теорема 2.5.3. *Пусть* $n, m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq p \leq \infty$, $h \in (0,1)$, q *— весовая на* $(0, h)$ *функция. Тогда справедливо равенство*

$$\rho_n(W^r(\Omega_m, q), H) = E_{n-1}(W^r(\Omega_m, q)) =$$
$$= \lambda_n^{-r}\left\{\int\limits_0^h \Big[1-(1-t)^n\Big]^{mp} q(t)dt\right\}^{-1/p}, \tag{2.5.9}$$

где

$$E_{n-1}(W^r(\Omega_m, q)) := \sup\Big\{E_{n-1}(f) : f \in W^r(\Omega_m, q)\Big\},$$

а $\rho_n(\cdot)$ *— любой из поперечников* $b_n(\cdot)$, $d_n(\cdot)$, $\delta_n(\cdot)$, $d^n(\cdot)$ *или* $\Pi_n(\cdot)$.

Доказательство. Используя определение класса $W^r(\Omega_m, q)$ из (2.2.12) для произвольного вектора $f \in W^r(\Omega_m, q)$, запишем

$$E_{n-1}(W^r(\Omega_m, q)) := \sup_{f\in W^r(\Omega_m,q)} E_{n-1}(f) \leq$$
$$\leq \sup_{f\in W^r(\Omega_m,q)}\left\{\lambda_n^{-r}\left(\Big[1-(1-t)^n\Big]^{mp} q(t)dt\right)^{-1/p} \times\right.$$
$$\left.\times\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(A^r f, t)q(t)dt\right)^{1/p}\right\} \leq$$

$$\leq \lambda_n^{-r}\left\{\int\limits_0^h \Big[1-(1-t)^n\Big]^{mp} q(t)dt\right\}^{-1/p}. \tag{2.5.10}$$

Из (2.5.10) и соотношения между n-поперечниками (2.5.1) получаем оценки сверху рассматриваемых n-поперечников

$$\rho_n(W^r(\Omega_m,q);H) \leq d_n(W^r(\Omega_m,q);H) \leq E_{n-1}(W^r(\Omega_m,q)) \leq$$

$$\leq \lambda_n^{-r}\left\{\int\limits_0^h \Big[1-(1-t)^n\Big]^{mp} q(t)dt\right\}^{-1/p}. \tag{2.5.11}$$

С целью получении аналогичной оценки снизу на множестве $\mathcal{P}_n \cap H$ рассмотрим шар

$$S_{n+1} := \left\{ p_n \in \mathcal{P}_n : \|p_n\| \leq \lambda_n^{-r}\left(\int\limits_0^h \Big[1-(1-t)^n\Big]^{mp} q(t)dt\right)^{-1/p} \right\}$$

и покажем его принадлежность классу $W^r(\Omega_m,q)$.

Для произвольного “*обобщённого*” полинома

$$p_n = \sum_{k=0}^n a_k f_k \in \mathcal{P}_n$$

на основании формул (2.1.13) запишем

$$\Omega_m^2(A^r p_n;t) = \sum_{k=1}^n (1-(1-t)^n)^{2m}\lambda_k^{2r}a_k^2,$$

и так как λ_k^r монотонно возрастает, то

$$\Omega_m^2(A^r p_n;t) = \left\{\sum_{k=1}^m (1-(1-t)^n)^{2m}\lambda_k^{2r}a_k^2\right\}^{1/2} \leq$$

$$\leq \lambda_k^r(1-(1-t)^n)^m\left\{\sum_{k=1}^n a_k^2\right\}^{1/2} =$$

$$= \lambda_n^r(1-(1-t)^n)^m \cdot \|p_n\|. \tag{2.5.12}$$

Возведя левую и правую части неравенства (2.5.12) в степень p, умножая их затем на функцию q и интегрируя обе части таким образом полученного неравенства по переменной t в пределах от 0 до h, будем иметь

$$\int\limits_0^h \Omega_m^p(A^r p_n, t)q(t)dt \leq \lambda_n^{rp}\|p_n\| \int\limits_0^h (1-(1-t)^n)^{mp} q(t)dt \leq 1.$$

Следовательно $S_{n+1} \subset W^r(\Omega_m, q)$ и, используя определение бернштейновского n-поперечника, в силу (2.5.1) запишем

$$\rho_n(W^r(\Omega_m, q); H) \geq b_n(W^r(\Omega_m, q); H) \geq b_n(S_{n+1}; H) \geq$$

$$\geq \lambda_n^{-r} \left\{ \int\limits_0^h \Big[1-(1-t)^n\Big]^{mp} q(t)dt \right\}^{-1/p}. \tag{2.5.13}$$

Равенство (2.5.9) следует из сопоставления оценок сверху (2.5.11) и снизу (2.5.13). Теоремы 2.5.3 доказана.

В завершение этого параграфа рассмотрим некоторые примеры гильбертовых пространств H и симметрических операторов $A : H \to H$, к которым, в частности, применимыми теоремы 2.5.1 и 2.5.2:

I. $H := L_2(\mathbb{R}, e^{-x^2}),\ \mathscr{H} = -e^{x^2}\dfrac{d}{dx}\left(e^{-x^2}\dfrac{d}{dx}\right),\ \lambda_n = 2n,$

$$f_n(x) := H_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n! 2^n \sqrt{\pi}}} e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2},\ n \in \mathbb{Z}_+$$

— система полиномов Чебышева–Эрмита;

II. $H := L_2(\mathbb{R}_+, e^{-x}x^{\alpha}),\ \mathcal{L} = -e^x x^{-\alpha}\dfrac{d}{dx}\left(e^{-x}x^{\alpha+n}\right),\ \lambda_n = n,$

$$f_n(x) := L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n!\,\Gamma(\alpha+n+1)}} x^{-\alpha} e^x \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x}x^{\alpha+n}\right),\ n \in \mathbb{Z}_+$$

— система многочленов Чебышева–Лагерра;

$$\text{III. } H := L_2[-1,1],\ L = \frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{d}{dx}\right),\ \lambda_n = n(n+1),$$

$$f_n(x) = P_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \cdot \frac{n!}{(2n)!} \cdot \frac{d^n}{dx^n}\Big(x^2-1\Big)^n,\ n \in \mathbb{Z}_+$$

— система многочленов Лежандра;

$$\text{IV. } H := L_2[(0,1),x],\ \mathscr{B} = -\frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx}\right) - \frac{\nu^2}{x},\ \lambda_n = \mu_n^2,$$

$$f_n(x) = \mathcal{J}_\nu(\mu_n x)\ \ (\nu > -1),\ n \in \mathbb{Z}_+$$

— система функций Бесселя первого рода, а μ_n – положительные корни уравнения $\mathcal{J}_\nu(x) = 0$, расположенные в порядке возрастания.

Отметим, что из полученных здесь результатов следуют ранее полученные результаты С.Б.Вакарчука [17] для пространства $H = L_2(\mathbb{R}, e^{-x^2})$, если полагать $\varphi_n(h) = (1-h^2)^{n/2}$. Аналогичным образом, полагая $\varphi_n(h) = (1-h)^n$, для всех перечисленных в примерах I–III многочленов, получаем результаты С.Б.Вакарчука и А.В.Швачко [19]. Если же полагать $H = L_2[(0,1),x]$, $\varphi_n(h) = (1-h)^n$, то мы получаем результаты К.Тухлиева [40].

Учитывая конкретизацию операторов Чебышева–Эрмита $\mathscr{H}$, Чебышева–Лагерра $\boldsymbol{\mathcal{L}}$, Якоби $\mathcal{J}_{\alpha,\beta}$, в качестве следствия из теоремы 2.5.3 получаем

Теорема 2.5.4. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $1 \le p \le \infty$, $h \in (0,1)$, q — *весовая на* $(0,h)$ *функция. Тогда справедливы равенства:*

$$\text{I. } \rho_n\Big(W^r(\Omega_m, q) : L_2(e^{-x^2}, \mathbb{R})\Big) = (2n)^{-r}\left\{\int\limits_0^h \Big[1-(1-t)^n\Big]^{mp} q(t)dt\right\}^{-1/p}$$

— для полиномов Чебышева–Эрмита;

II. $\rho_n\Big(W^r(\Omega_m,q):L_2(x^\alpha e^{-x},\mathbb{R})\Big)=n^{-r}\left\{\int\limits_0^h\Big[1-(1-t)^n\Big]^{mp}q(t)dt\right\}^{-1/p},\alpha>-1$

— для полиномов Чебышева–Лагерра;

III. $\rho_n\Big(W^r(\Omega_m,q):L_2\big((1-x)^\alpha(1+x)^\beta,(-1,1)\big)\Big)=$

$$=\Big[n(n+\alpha+\beta+1)\Big]^{-r}\cdot\left\{\Big[1-(1-t)^n\Big]^{mp}q(t)dt\right\}^{-1/p},\ \alpha,\beta>-1$$

— для полиномов Якоби, где $\rho_n(\cdot)$ *— любой из* n*-поперечников* $b_n(\cdot)$, $d_n(\cdot)$, $\delta_n(\cdot)$, $d^n(\cdot)$ *или* $\Pi_n(\cdot)$.

§ 2.6. О наилучшей аппроксимации в среднем алгебраическими полиномами с весом

В этом завершающем параграфе, для сравнения с общими теоремами, доказанными в предыдующих параграфах, приводятся некоторые результаты о наилучшей аппроксимации в среднем алгебраическими полиномами с весом.

Пусть на интервале (a,b), который может быть как конечным, так и бесконечным, задана неотрицательная суммируемая функция ρ, отличная от нуля на множестве положительной меры. Эту функцию будем называть весом. Обозначим через $L_{2,\rho}(a,b)$ множество функций $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, для которых функция $\rho^{1/2}\cdot f$ суммируема с квадратом на (a,b). При этом будем отождествлять две функции f_1 и f_2, если $\rho^{1/2}(x)f_1(x)=\rho^{1/2}(x)f_2(x)$ почти для всех $x\in(a,b)$. Множество $L_{2,\rho}(a,b)$ линейно и с введением скалярного произведения

$$\langle f,g\rangle:=\int\limits_a^b \rho(x)f(x)g(x)dx,$$

где $f,g\in L_{2,\rho}(a,b)$, и нормы

$$\|f\|_{2,\rho}:=\sqrt{\langle f,f\rangle}$$

превращается в полное гильбертово пространство.

Согласно работам [11, 27, стр. 33, 37] рассмотрим весовую функцию ρ, удовлетворяющую на интервале (a,b) дифференциальному уравнению первого порядка

$$\frac{d}{dx}\left(\sigma(x)\rho(x)\right)=\tau(x)\rho(x), \tag{2.6.1}$$

где σ и τ — многочлены не выше второй и первой степени соответственно, причем для любого $k \in \mathbb{Z}_+$ справедливы равенства

$$\lim_{x\to a+0} \sigma(x)\rho(x)x^k = \lim_{x\to b-0} \sigma(x)\rho(x)x^k = 0.$$

Напомним (см., например, [27, с. 33]), что только в трех случаях решение ρ данной задачи (в зависимости от многочленов σ и τ) с точностью до линейного преобразования независимой переменной является весовой функцией для определения (с точностью до постоянного множителя) классических ортогональных на (a, b) полиномов, а именно, полиномов Якоби, Лагерра и Эрмита.

Обозначим, как в [11], через D_ρ дифференциальный оператор вида

$$D_\rho := \sigma(x)\frac{d^2}{dx^2} + \tau(x)\frac{d}{dx}, \tag{2.6.2}$$

и пусть

$$\lambda(\rho) := \lambda_n(\rho) = n\tau' - \frac{n(n-1)}{2}\sigma''. \tag{2.6.3}$$

Указанные выше ортогональные многочлены Якоби, Лагерра и Эрмита удовлетворяют дифференциальному уравнению второго порядка

$$-D_\rho y = \lambda(\rho)y. \tag{2.6.4}$$

Явные выражения для этих многочленов задаётся формулой Родрига

$$y_n(x) = \frac{B_n}{\rho(x)}\big(\sigma^n(x)\rho(x)\big)^{(n)}, \tag{2.6.5}$$

где B_n — нормированная постоянная, а функция ρ удовлетворяет дифференциальному уравнению (2.6.1).

Очевидно, что в силу формулы (2.6.4) числа $\lambda_n(\rho)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, являются собственными значениями оператора $(-D_\rho)$, а соответствующие им собственные функции — ортогональными на (a, b) многочленами, соответствующими весовой функции ρ.

В зависимости от вида функции ρ получаем следующие системы ортогональных на (a, b) полиномов (см., например, [27]).

Если $\rho(x) := (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, где $\alpha, \beta > -1$, $\sigma(x) := 1 - x^2$, $\tau(x) := -(\alpha+\beta+2)x + \beta - \alpha$, (a, b) — интервал $(-1, 1)$, то согласно формуле (2.6.5) соответствующие полиномы y_n при $B_n := \dfrac{(-1)^n}{2^n\, n!}$ являются полиномами Якоби

$$P_n^{\alpha,\beta} := \frac{(-1)^n}{2^n\, n!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}\left((1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}\right).$$

При этом $\lambda_n(\rho) = n(n+\alpha+\beta+1)$.

Если $\rho(x) := x^\alpha e^{-x}$, где $\alpha > -1$, $\sigma(x) := x$, $\tau(x) := -x+\alpha+1$, (a, b) является интервалом $(0, \infty)$, то в силу формулы (2.6.5) соответствующие полиномы y_n при $B_n := 1/n!$ будут полиномами Лагерра

$$L_n^\alpha(x) = \frac{1}{n!}e^x x^{-\alpha}\frac{d^n}{dx^n}(x^{n+\alpha}e^{-x}).$$

В данном случае $\lambda_n(\rho) = n$.

В случае, когда $\rho(x) := e^{-x^2}$, $\sigma(x) := 1$, $\tau(x) := 2x$, (a, b) является интервалом $(-\infty, \infty)$, соответствующие, согласно формуле (2.6.5), полиномы y_n при $B_n := (-1)^n$ являются полиномами Эрмита

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right).$$

При этом $\lambda_n(\rho) = 2n$.

Пусть $\{P_j\}_{j\in\mathbb{Z}_+}$ — одна из рассматриваемых выше ортогональных на (a,b) систем полиномов с соответствующей весовой функцией ρ, принадлежащая пространству $L_{2,\rho}(a,b)$. Следуя [36, с.166, 198, 236], запишем для нее ортонормированную систему полиномов $\{\widehat{P}_j\}_{j\in\mathbb{Z}_+}$. Представим функцию $f\in L_{2,\rho}(a,b)$ в виде разложения в ряд Фурье по системе полиномов $\{\widehat{P}_j\}_{j\in\mathbb{Z}_+}$

$$f(x)=\sum_{j=0}^{\infty}c_j(f)\widehat{P}_j(x), \tag{2.6.6}$$

где равенство понимается в смысле сходимости в пространстве $L_{2,\rho}(a,b)$;

$$c_j(f):=\int\limits_a^b\rho(x)f(x)\widehat{P}_j(x)dx,\quad j\in\mathbb{Z}_+$$

— коэффициенты Фурье функции f. Обозначим через $\mathcal{P}_n$ подпространство алгебраических полиномов степени, не превышающей n. Пусть $E_n(f)_{2,\rho}$, $n\in\mathbb{N}$ — величина наилучшего приближения функции $f\in L_{2,\rho}(a,b)$ элементами подпространство $\mathcal{P}_{n-1}$, т.е.

$$E_n(f)_{2,\rho}:=\inf\{\|f-g_{n-1}\|_{2,\rho}:g_{n-1}\in\mathcal{P}_{n-1}\}.$$

Символом $S_{n-1}(f)$, $n\in\mathbb{N}$, обозначим частную сумму ряда Фурье (2.6.6), т.е.

$$S_{n-1}(f,x):=\sum_{j=0}^{n-1}c_j(f)\widehat{P}_j(x).$$

Известно (см., например, [21]), что для произвольной функции $f\in L_{2,\rho}(a,b)$

$$\|f\|_{2,\rho}=\left\{\sum_{j=0}^{\infty}c_j^2(f)\right\}^{1/2},$$

$$E_n(f)_{2,\rho}=\|f-S_{n-1}(f)\|_{2,\rho}=\left\{\sum_{j=n}^{\infty}c_j^2(f)\right\}^{1/2}. \tag{2.6.7}$$

При решении ряда задач теории аппроксимации функций действительной переменной часто используют различные модификации классического определения модуля непрерывности. Во многих случаях это продиктовано спецификой рассматриваемых задач и позволяет получить результаты, раскрывающие содержательную суть исследуемых проблем. Например, при аппроксимации непериодических функций алгебраическими полиномами М.К.Потапов и его ученики предложили различные модификации классического определения модуля непрерывности, использующие вместо оператора сдвига $T_hf(x) := f(x+h)$ различные усредняющие операторы (см., например, [15, 28, 42]). В рассматриваемом нами случае воспользуемся подходом, предложенным в работах [4, 11].

Пусть

$$\mathcal{T}_\rho(x,y;h) := \sum_{j=0}^{\infty} \widehat{P}_j(x)\widehat{P}_j(y)h^j, \tag{2.6.8}$$

где $h \in (0,1)$, $x, y \in (a,b)$, причём равенство в формуле (2.6.8) понимается в смысле сходимости в среднем в пространстве $L_{2,\rho,\rho}((a,b)\times(a,b))$, которое состоит из суммируемых в квадрате функций $f : (a,b)\times(a,b) \to \mathbb{R}$ с весом $\rho(x)\rho(y)$ и нормой

$$\|f\|_{2;\rho,\rho} = \left\{ \int\limits_a^b \int\limits_a^b \rho(x)\rho(y)f^2(x,y)dxdy \right\}^{1/2} < \infty.$$

В ряде случаев для функции $\mathcal{T}_\rho$ можно указать явное выражение. Так, для ортонормированной системы полиномов Эрмита $\{\widehat{H}_j\}_{j\in\mathbb{Z}_+}$, где

$$\widehat{H}_j(x) = \frac{H_j(x)}{\sqrt{j!2^j\sqrt{pi}}},$$

в силу [31, с.383] получаем

$$\mathcal{T}_\rho(x,y;h) := \sum_{j=0}^{\infty} \widehat{H}_j(x)\widehat{H}_j(y)h^j = \frac{1}{\sqrt{\pi(1-h^2)}}\exp\left(\frac{2xyh-(x^2+y^2)h^2}{1-h^2}\right).$$

Здесь $\rho(x)=\exp(-x^2)$. Для ортонормированной системы полиномов Лагерра $\{\widehat{L}_j^\alpha\}_{j\in\mathbb{Z}_+}$, где

$$\widehat{L}_j^\alpha(x) = (-1)^j\sqrt{\frac{j!}{\Gamma(\alpha+j+1)}}\,\widehat{L}_j^\alpha(x),$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция, используя результаты [31, с.111], имеем

$$\mathcal{T}_\rho(x,y;h) := \sum_{j=0}^{\infty} \widehat{L}_j^\alpha(x)\widehat{L}_j^\alpha(y)h^j =$$

$$= \frac{\exp(-(x+y)h/(1-h))}{1-h}(xyh)^{-\alpha/2}J_\alpha\left(\frac{2\sqrt{xyh}}{1-h}\right).$$

Здесь $J_\alpha(\cdot)$ — функция Бесселя I рода порядка α $\rho(x)=x^\alpha e^{-x}$.

Следуя работе [11] и используя формулу (2.6.8), для произвольной функции $f\in L_{2,\rho}(a,b)$ запишем оператор усреднения

$$F_{h,\rho}(f,x) := \int\limits_a^b \rho(t)f(t)\mathcal{T}_\rho(x,t,1-h)dt, \quad 0<h<1, \tag{2.6.9}$$

и перечислим его свойства: для любых $f_1,f_2\in L_{2,\rho}(a,b)$ и $\mu,\eta\in\mathbb{R}$, $F_{h,\rho}(\mu f_1+\eta f_2)=\mu F_{h,\rho}(f_1)+\eta F_{h,\rho}(f_2)$, $\|F_{h,\rho}(f)\|_{2,\rho}\le\|f\|_{2,\rho}$, для произвольного полинома $\widehat{P}_n$, $n\in\mathbb{Z}_+$, из рассматриваемой ортонормированной системы полиномов $F_{h,\rho}(\widehat{P}_n,x)=(1-h)^n\widehat{P}_n(x)$, при $h\to 0+0$ имеем $\|F_{h,\rho}(f)-f\|_{2,\rho}\to 0$. Используя оператор усреднения (2.6.9), записываем для функции $f\in L_{2,\rho}(a,b)$ конечные разности первого и высших порядков. Пусть $\mathbb{I}$ — единичный оператор в пространстве $f\in L_{2,\rho}(a,b)$, $F^0_{h,\rho}(f):=f$, $F^1_{h,\rho}(f):=F_{h,\rho}(f)$, $F^i_{h,\rho}(f):=$

$F^1_{h,\rho}(F^{i-1}_{h,\rho}(f))$, $i \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\Delta^1_{h,\rho}(f,x) := F^1_{h,\rho}(f,x) - f(x) = (F^1_{h,\rho} - \mathbb{I}_\rho)f(x),$$

$$\Delta^k_{h,\rho}(f,x) := \Delta^1_{h,\rho}\left(\Delta^{k-1}_{h,\rho}(f),x\right) = (F^1_{h,\rho} - \mathbb{I}_\rho)^k f(x) =$$
$$= \sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}F^i_{h,\rho}(f,x), \quad k = 2,3,\ldots.$$

С помощью указанных величин для функции $f \in L_{2,\rho}(a,b)$ определяем обобщенный модуль непрерывности k-го порядка [4, 11]

$$\Omega_{k,\rho}(f,t) := \sup\{\|\Delta^k_{h,\rho}(f)\|_{2,\rho} : 0 < h \le t\}, \tag{2.6.10}$$

где $0 < t < 1$, $k \in \mathbb{N}$.

Обозначим через $L_2(D_\rho)$, где оператор D_ρ определяется формулой (2.6.2), множество функций $f \in L_{2,\rho}(a,b)$, имеющих абсолютно непрерывные производные первого порядка f' и таких, что функции $\tau(x)\dfrac{df}{dx}$ и $\sigma(x)\dfrac{d^2f}{dx^2}$ принадлежат пространству $L_{2,\rho}(a,b)$, т.е. $D_\rho f \in L_{2,\rho}(a,b)$. В случае, когда (a,b) — один из интервалов $(-\infty,\infty)$ или $(0,\infty)$, полагаем, что функция f' является локально абсолютно непрерывной. Следует отметить, что ранее для системы ортогональных с весом на $(-\infty,\infty)$ полиномов Эрмита дифференциальные операторы

$$D = -\frac{d^2}{dx^2} + 2x\frac{d}{dx} \tag{2.6.11}$$

и

$$\widetilde{D} = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} - x\frac{d}{dx} \tag{2.6.12}$$

рассматривались в работах [42] и [15] соответственно. Очевидно, что с точностью до постоянных множителей дифференциальные операторы (2.6.11) и (2.6.12) совпадают с дифференциальным оператором (2.6.2), где $\rho(x)e^{-x^2}$, $\sigma(x) = 1$, $\tau(x) = -2x$.

Пусть $D^0_\rho f := f$, $D^1_\rho f := D_\rho f$ и $D^r_\rho f := D^1_\rho(D^{r-1}_\rho f)$, $r \in \mathbb{N}$. Символом $L^r_2(D_\rho)$, $r = 2, 3, \ldots$, обозначим множество функций $f \in L_{2,\rho}(a, b)$, которые имеют абсолютно непрерывные производные $(2r-1)$-го порядка и для которых $D^r_\rho f \in L_{2,\rho}(a, b)$. В случае, когда (a, b) является одним из интервалов $(-\infty, \infty)$ или $(0, \infty)$, полагаем, что производные $(2r-1)$-го порядка локально абсолютно непрерывны.

Приведем ряд результатов из работы [11], которые понадобятся в дальнейшем. Так, если функция f принадлежит множеству $L^r_2(D_\rho)$, $r \in \mathbb{N}$, то для ее коэффициентов Фурье $c_j(f)$, $j \in \mathbb{N}$, справедлива формула

$$c_j(f) = (-1)^r \frac{1}{\lambda^r_j(\rho)} c_j(D^r_\rho f). \tag{2.6.13}$$

Отметим также, что для произвольной функции $f \in L_{2,\rho}(a, b)$, имеющей на (a, b) разложение в ряд Фурье по системе ортонормированных полиномов $\{\widehat{P}_j\}_{j\in\mathbb{Z}_+}$ усреднения $F_{h,\rho}(f)$ представим следующим образом:

$$F_{h,\rho}(f, x) = \sum_{j=0}^{\infty} (1 - h)^j c_j(f) \widehat{P}_j(x), \tag{2.6.14}$$

где равенство (2.6.14) понимается в смысле сходимости в метрике пространства $L_{2,\rho}(a, b)$.

Используя формулы (2.6.6) и (2.6.14), для функции $f \in L_{2,\rho}(a, b)$ записываем равенство

$$\Delta^1_{h,\rho}(f, x) = \sum_{j=1}^{\infty} ((1 - h)^j - 1) c_j(f) \widehat{P}_j(x). \tag{2.6.15}$$

На основании метода математической индукции и формулы (2.6.16) получаем

$$\Delta_{h,\rho}^{k}(f,x)=\sum_{j=1}^{\infty}((1-h)^{j}-1)^{k}c_{j}(f)\widehat{P}_{j}(x). \tag{2.6.16}$$

Из равенств (2.6.16) имеем

$$\|\Delta_{h,\rho}^{k}(f)\|_{2,\rho}^{2}=\sum_{j=1}^{\infty}(1-(1-h)^{j})^{2k}c_{j}^{2}(f), \tag{2.6.17}$$

где $h\in(0,1)$. Используя формулы (2.6.10) и (2.6.17), записываем

$$\Omega_{k,\rho}(f,t)=\left\{\sum_{j=1}^{\infty}(1-(1-t)^{j})^{2k}c_{j}^{2}(f)\right\}^{1/2},\ 0<t<1. \tag{2.6.18}$$

Для характеристики гладкости (2.6.10) в работе [11] было получено неравенство Джексона

$$E_{n}(f)_{2,\rho}\leq(1-(1-t)^{n})^{-k}\lambda_{n}^{-r}(\rho)\Omega_{k,\rho}(D_{\rho}^{r}(f),t), \tag{2.6.19}$$

где $f\in L_{2}^{r}(D_{\rho})$, $r\in\mathbb{Z}_{+}$, $L_{2}^{0}(D_{\rho}):=L_{2}(D_{\rho})$, $t\in(0,1)$, $n,k\in\mathbb{N}$ которое является точным в том смысле, что для каждого $n\in\mathbb{N}$ существует функция из множества $L_{2}^{r}(D_{\rho})$, обращающая неравенство (2.6.19) в равенство.

Отметим, что с помощью соотношения (2.6.19) можно получить следующее равенство:

$$\sup_{\substack{f\in L_{2}^{r}(D_{\rho})\\ f\neq const}}\frac{\lambda_{n}^{r}(\rho)E_{n}(f)_{2,\rho}}{\Omega_{k,\rho}(D_{\rho}^{r}(f),t)}=\frac{1}{(1-(1-t)^{n})^{k}}, \tag{2.6.20}$$

где $t\in(0,1)$. Полагая в формуле (2.6.20) $t=1/n$ и вычисляя верхнюю грань по $n\in\mathbb{N}$ от левой и правой частей указанного равенства, получаем

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sup_{\substack{f\in L_{2}^{r}(D_{\rho})\\ f\neq const}}\frac{\lambda_{n}^{r}(\rho)E_{n}(f)_{2,\rho}}{\Omega_{k,\rho}(D_{\rho}^{r}(f),1/n)}=\frac{1}{(1-e^{-1})^{k}}.$$

Сформулируем и докажем один из основных результатов данного параграфа.

Теорема 2.6.1. *Пусть* $n, k \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < p \leq 2$, $0 < h < 1$, φ *— неотрицательная измеримая суммируемая на интервале* $(0, h)$ *неэквивалентная нулю функция. Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{\substack{f \in L_2^r(D_\rho) \\ f \neq const}} \frac{\lambda_n^r(\rho) E_n(f)_{2,\rho}}{\left\{ \int\limits_0^h \Omega_{k,\rho}^p(D_\rho^r(f), t)\varphi(t)dt \right\}^{1/p}} =$$

$$= \frac{1}{\left\{ \int\limits_0^h (1-(1-t)^n)^{kp}\varphi(t)dt \right\}^{1/p}}. \tag{2.6.21}$$

Доказательство. Для получения оценки сверху экстремальной характеристики, расположенной в левой части соотношения (2.6.21), применим один вариант неравенства Минковского из монографии [56, с. 104]

$$\left\{ \int\limits_0^h \left(\sum_{j=m}^{\infty} |\widetilde{f}_j(t)|^2 \right)^{p/2} dt \right\}^{1/p} \geq \left\{ \sum_{j=m}^{\infty} \left(\int\limits_0^h |\widetilde{f}_j(t)|^p dt \right)^{2/p} \right\}^{1/2}, \tag{2.6.22}$$

где $0 < p \leq 2$. Полагая $\widetilde{f}_j := f_j \varphi^{1/p}$, из формулы (2.6.22) получаем

$$\left\{ \int\limits_0^h \left(\sum_{j=m}^{\infty} |f_j(t)|^2 \right)^{p/2} \varphi(t)dt \right\}^{1/p} \geq \left\{ \sum_{j=m}^{\infty} \left(\int\limits_0^h |f_j(t)|^p \varphi(t)dt \right)^{2/p} \right\}^{1/2}. \tag{2.6.23}$$

Для произвольного элемента $f \in L_2^r(D_\rho)$ в силу формулы (2.6.13) запишем разложение функции $D_\rho^r(f)$ в ряд Фурье по системе полиномов $\{\widehat{P}_j\}_{j \in \mathbb{Z}_+}$, ортонормированной на (a, b) с весом ρ,

$$D_\rho^r(f, x) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j(D_\rho^r(f))\widehat{P}_j(x) = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^r \lambda_j^r(\rho) c_j(f) \widehat{P}_j(x), \tag{2.6.24}$$

где равенство понимается в смысле сходимости в метрике пространства

$L_{2,\rho}(a,b)$. Из формул (2.6.18) и (2.6.24) имеем

$$\Omega_{k,\rho}^{2}(D_{\rho}^{2}(f),t)=\sum_{j=1}^{\infty}(1-(1-t)^{j})^{2k}\lambda_{j}^{2r}(\rho)c_{j}^{2}(f),\quad 0<t<1. \tag{2.6.25}$$

Используя соотношения (2.6.23), (2.6.25), (2.6.7) и учитывая, что последовательность $\{\lambda_j(\rho)\}_{j\in\mathbb{N}}$ положительных чисел является монотонно возрастающей, записываем

$$\left\{\int\limits_0^h \Omega_{k,\rho}^{p}(D_{\rho}^{r}(f),t)\varphi(t)dt\right\}^{1/p}=\left\{\int\limits_0^h (\Omega_{k,\rho}^{p}(D_{\rho}^{r}(f),t))^{p/2}\varphi(t)dt\right\}^{1/p}\geq$$

$$\geq\left\{\int\limits_0^h\left(\sum_{j=n}^{\infty}\lambda_j^{2r}(\rho)(1-(1-t)^{j})^{2k}c_j^{2}(f)\right)^{p/2}\varphi(t)dt\right\}^{1/p}\geq$$

$$\geq\left\{\sum_{j=n}^{\infty}\lambda_j^{2r}(\rho)c_j^{2}(f)\left(\int\limits_0^h(1-(1-t)^{j})^{kp}\varphi(t)dt\right)^{2/p}\right\}^{1/2}\geq$$

$$\geq\lambda_n^{r}(\rho)\left\{\int\limits_0^h(1-(1-t)^{n})^{kp}\varphi(t)dt\right\}^{1/p}E_n(f)_{2,\rho}.$$

Отсюда получаем оценку сверху рассматриваемой экстремальной характеристики

$$\sup_{\substack{f\in L_2^r(D_\rho)\\ f\neq const}}\frac{\lambda_n^{r}(\rho)E_n(f)_{2,\rho}}{\left\{\int\limits_0^h \Omega_{k,\rho}^{p}(D_{\rho}^{r}(f),t)\varphi(t)dt\right\}^{1/p}}\leq$$

$$\leq\frac{1}{\left\{\int\limits_0^h(1-(1-t)^{n})^{kp}\varphi(t)dt\right\}^{1/p}}. \tag{2.6.26}$$

Для получения оценки снизу указанной экстремальной характеристики полагаем $f_0:=\widehat{P}_n$. Очевидно, что функция $f_0\in L_2^r(D_\rho)$. В силу формулы (2.6.7) имеем $E_n(f_0)_{2,\rho} = 1$. Из равенства (2.6.25) получаем

$$\Omega_{k,\rho}(D_\rho^r(f_0), t) = (1-(1-t)^n)^k \lambda_n^r(\rho), \quad 0 < t < 1.$$

Тогда

$$\int\limits_0^h \Omega_{k,\rho}^p(D_\rho^r(f_0), t)\varphi(t)dt = \lambda_n^{rp}(\rho)\int\limits_0^h (1-(1-t)^n)^{kp}\varphi(t)dt.$$

Отсюда следует неравенство

$$\sup_{\substack{f\in L_2^r(D_\rho)\\ f\neq const}} \frac{\lambda_n^r(\rho)E_n(f)_{2,\rho}}{\left\{\int\limits_0^h \Omega_{k,\rho}^p(D_\rho^r(f), t)\varphi(t)dt\right\}^{1/p}} \geq$$

$$\geq \frac{\lambda_n^r(\rho)E_n(f_0)_{2,\rho}}{\left\{\int\limits_0^h \Omega_{k,\rho}^p(D_\rho^r(f_0), t)\varphi(t)dt\right\}^{1/p}} = \frac{1}{\left\{\int\limits_0^h (1-(1-t)^n)^{kp}\varphi(t)dt\right\}^{1/p}}. \qquad (2.6.27)$$

Сопоставляя оценку сверху (2.6.26) и оценку снизу (2.6.27), получаем требуемое равенство (2.6.21).

Теорема 2.6.1 доказана.

Два приведенных далее следствия, вытекающие из теоремы 2.6.1, касаются двух частных случаев: $p = 1/k$ и $\varphi \equiv 1$, $p = 1/k$ соответственно.

Следствие 2.6.1. *Имеет место равенство*

$$\sup_{\substack{f\in L_2^r(D_\rho)\\ f\neq const}} \frac{\lambda_n^r(\rho)E_n(f)_{2,\rho}}{\left\{\int\limits_0^h \Omega_{k,\rho}^{1/k}(D_\rho^r(f), t)\varphi(t)dt\right\}^k} = \frac{1}{\left\{\int\limits_0^h (1-(1-t)^n)\varphi(t)dt\right\}^k},$$

где $k, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $h \in (0,1)$, *а функция* φ *и величина* h *удовлетворяют требованиям теоремы* 2.6.1.

Следствие 2.6.2. *Пусть* $k, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $h \in (0,1)$. *Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f \in L_2^r(D_\rho)} \frac{\lambda_n^r(\rho) E_n(f)_{2,\rho}}{\left\{(n+1) \int\limits_0^h \Omega_{k,\rho}^{1/k}(D_\rho^r(f), t)dt\right\}^k} =$$

$$= \frac{1}{\left\{(n+1)h - 1 + (1-h)^{n+1}\right\}^k}. \tag{2.6.28}$$

Полагая, например, в формуле (2.6.28) $h := 1/(n+1)$ и $r := 0$, получаем один из результатов работы [7] в одномерном случае, а именно,

$$\sup_{\substack{f \in L_{2,\rho}(a,b) \\ f \neq const}} \frac{E_n(f)_{2,\rho}}{\left\{(n+1) \int\limits_0^{1/(n+1)} \Omega_{k,\rho}^{1/k}(f, t)dt\right\}^k} = \frac{1}{\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right)^{(n+1)k}}. \tag{2.6.29}$$

Из формулы (2.6.29) имеем предельное равенство

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{\substack{f \in L_{2,\rho}(a,b) \\ f \neq const}} \frac{E_n(f)_{2,\rho}}{\left\{(n+1) \int\limits_0^{1/(n+1)} \Omega_{k,\rho}^{1/k}(f, t)dt\right\}^k} = e^k.$$

Полученные здесь результаты в следующей главе, при изучение задачи Штурма–Лиувилля, вытекают как следствие из применения общих результатов к специальным функциям математической физики.

ГЛАВА 3. Верхние грани наилучших приближений суммами Фурье по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля и некоторые их применения

В третьей главе найдены точные значения верхних граней наилучших приближений суммами Фурье по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля на некоторых классах функций, характеризующихся обобщённым модулем непрерывности. В этой главе также получены точные неравенства типа Джексона–Стечкина, в которых величины наилучших приближений оцениваются сверху как через обобщённый модуль непрерывности, так и через $\mathscr{K}$-функционалы r-ых производных.

Основной нашей целью в этой главе является применение к оператору Штурма–Лиувилля теорем, доказанных в предыдущей главе и, в частности, дать их применение к наилучшему приближению функций, разложенных в соответствующих областях по классическим ортогональным полиномам (Чебышева–Лагерра, Чебышева–Эрмита, Якоби и др.). Также найдём точные значения различных n-поперечников на классах функций, возникающих при решении экстремальных задач в теоремах 3.1.1, 3.1.2 и 3.2.2 данной главы. Указанные классы определяются тем, что их $\mathscr{K}$-функционал r-й производной функции ограничены сверху заданной мажорантой Φ.

Результаты, изложенные в данной главе, опубликованы в работах [3-А, 7-А, 6-А, 9-А, 11-А].

§ 3.1. Наилучшие приближения функций рядами Фурье по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля в L_2

3.1.1. Введение и предварительные факты и понятия

Пусть

$$\mathcal{D} := -\frac{1}{p(x)}\left(\frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{d}{dx}\right] - q(x)\right) \; - \tag{3.1.1}$$

дифференциальный оператор второго порядка Штурма–Лиувилля, где функции $p, q \in C[a,b]$, $k \in C^1[a,b]$, $p(x) > 0$, $q(x) \geq 0$ для $x \in [a,b]$.

Напомним (см., например, [20, с. 346]), что задача Штурма–Лиувилля состоит в отыскании решений на отрезке $[a,b]$ уравнения

$$\mathcal{D}[u] = \lambda u, \tag{3.1.2}$$

удовлетворяющих однородным краевым условиям

$$\alpha u(a) + \beta u'(a) = 0, \quad \alpha^2 + \beta^2 \neq 0,$$

$$\gamma u(b) + \mu u'(b) = 0, \quad \gamma^2 + \mu^2 \neq 0. \tag{3.1.3}$$

Следует учесть, что область определения оператора $\mathcal{D}$ состоит из функций $u(x)$ класса

$$C^{(2)}(a,b) \cap C^{(1)}(a,b), \quad u^{''}(x) \in L_2(a,b),$$

удовлетворяющих условиям (3.1.3).

Прежде чем применить теоремы, доказанные в параграфах 2.3 и 2.4 второй главы к оператору Штурма–Лиувилля и его различным частным случаям, таким как, разложение по собственным функциям краевой задачи

Штурм–Лиувиллевского типа по классическим ортогональным многочленам (Чебышева–Лагерра, Чебышева–Эрмита, Якоби, ...), нужно доказать, что оператор Штурма–Лиувилля, определённый равенством (3.1.1), является симметричным оператором.

С этой целью оператор (3.1.1) перепишем в следующем удобном для нас виде

$$p(x)\mathcal{D}u(x) = -\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u(x) \tag{3.1.4}$$

и докажем, что для оператора (3.1.1) выполняются условия

$$\Big(p\mathcal{D}u, v\Big) = \Big(u, p\mathcal{D}v\Big). \tag{3.1.5}$$

Имеем

$$(p\mathcal{D}u, v) = \int\limits_a^b \left\{-\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u(x)\right\} v(x)dx =$$

$$= -k(x)v(x)\frac{du}{dx}\bigg|_a^b + \int\limits_a^b \left(k(x)\frac{du}{dx}\cdot\frac{dv}{dx}\right)dx +$$

$$+\int\limits_a^b q(x)u(x)v(x)dx. \tag{3.1.6}$$

Поступая точно также, находим

$$(u, p\mathcal{D}v) = \int\limits_a^b \left\{-\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{dv}{dx}\right) + q(x)v(x)\right\} u(x)dx =$$

$$= -k(x)u(x)\frac{dv}{dx}\bigg|_a^b + \int\limits_a^b \left(k(x)\frac{dv}{dx}\cdot\frac{du}{dx}\right)dx +$$

$$+\int\limits_a^b q(x)u(x)v(x)dx. \tag{3.1.7}$$

Вычитая из первого равенства (3.1.6) второе равенство (3.1.7), получаем

$$(p\mathcal{D}u, v) - (u, p\mathcal{D}v) = k(x)\left(u(x)\frac{dv}{dx} - v(x)\frac{du}{dx}\right)\Bigg|_a^b.$$

Отсюда сразу видно, что условие

$$(p\mathcal{D}u, v) = (u, p\mathcal{D}v)$$

выполняется только тогда, когда выполняется равенство

$$k(x)\left(u(x)\frac{dv}{dx} - v(x)\frac{du}{dx}\right)\Bigg|_a^b = 0,$$

что равносильно выполнению условия (3.1.3).

Очевидно, что сформулированная задача Штурма–Лиувилля (3.1.2) – (3.1.3) всегда имеет нулевое решение, не представляющее интереса, а потому задачу (3.1.2) – (3.1.3) надо рассматривать как задачу на собственные значения оператора $\mathcal{D}$. Искомые нетривиальные решения называются собственными функциями этой задачи, а значения λ, при которых такие решения существуют, её собственными значениями. Хорошо известны следующие свойства собственных значений и собственных функций оператора $\mathcal{D}$:

1) существует счётное множество собственных значений $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$:

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_k < \lambda_{k+1} < \cdots ;$$

2) каждому собственному значению λ_n соответствует единственная с точностью до постоянного множителя собственная функция $u_n(x)$;

3) собственные функции $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ образуют на отрезке $[a, b]$ ортогональ-

ную с весом $p(x)$ систему

$$\int_a^b p(x)u_k(x)u_n(x)dx = 0,\ n \neq k,$$

которую в силу свойства 2 можно считать ортонормированной.

Пусть $L_2(p(x),[a,b])$ – пространство суммируемых с квадратом функций $f:[a,b]\to R$ с весом $p(x)$ и конечной нормой

$$\|f\| = \left(\int_a^b p(x)f^2(x)dx\right)^{1/2};$$

4) система собственных функций оператора $\mathcal{D}$ полна в пространстве $L_2(p(x),[a,b])$;

5) при граничных условиях $u(a)=u(b)=0$ и $q(x)\geq 0$ собственные значения $\lambda_n,\ n\in\mathbb{N}$ — положительны. Всюду далее именно этот случай и будем рассматривать. Пусть функция $f\in L_2(p(x),[a,b])$ и

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f)u_k(x), \quad c_k(f) = \int_a^b p(x)f(x)u_k(x)dx \tag{3.1.8}$$

— её ряд Фурье. Через

$$S_{n-1}(f,x) = \sum_{k=1}^{n-1} c_k(f)u_k(x)$$

обозначим частные суммы $(n-1)$-го порядка ряда Фурье (3.1.8). Положим

$$\mathcal{P}_n := \left\{p_n(x) : p_n(x) := \sum_{k=1}^{n} a_k u_k(x)\right\}.$$

Равенством

$$E_{n-1}(f) = \inf\{\|f-p_{n-1}\| : p_{n-1}\in\mathcal{P}_{n-1}\}$$

определим наилучшее приближение функции $f \in L_2(p(x), [a, b])$ подпространством $\mathcal{P}_{n-1}$ алгебраическими многочленами степени не более $n-1$.

Хорошо известно, что [36, с.25-26]

$$E_{n-1}(f) = \|f - S_{n-1}(f)\| = \left\{\sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f)\right\}^{1/2}. \tag{3.1.9}$$

Введём в рассмотрение функцию

$$T(x, y; h) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\upsilon_k(y)h^k, \tag{3.1.10}$$

где $h \in (0, 1)$, $x, y \in [a, b]$, равенство в (3.1.10) понимается в смысле сходимости в пространстве $L_2(p(x), [a, b])$. В монографии [31, с. 272] доказано, что в ряде частных случаев для функции T можно указать и явное выражение. Например:

I. Если $(a, b) = \mathbb{R} := (-\infty, +\infty)$, то

$$P_n(x) = H_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n!2^n\sqrt{\pi}}}\, e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right), \quad n \in \mathbb{Z}_+$$

— ортонормированная система многочленов Эрмита и для этих многочленов

$$T(x, y; h) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)H_n(y)h^n =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi(1-h^2)}} \cdot \exp\left\{\frac{2xyh - (x^2+y^2)h^2}{1-h^2}\right\}.$$

II. Если $(a, b) = \mathbb{R}_+$, $p(x) = e^{-x}x^{\alpha}$ $(\alpha > -1)$, то

$$P_n(x) = L_n^{\alpha}(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n!\,\Gamma(n+\alpha+1)}} \cdot e^x x^{-\alpha} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x}x^{\alpha+n}\right), \quad n \in \mathbb{Z}_+$$

— ортонормированная система многочленов Лагрра, для которых

$$T(x, y; h) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x)L_n^{(\alpha)}(y)h^n =$$

$$= \frac{1}{1-h} \cdot e^{-\frac{h(x+y)}{1-h}} (xyh)^{-\alpha/2} \cdot \mathcal{J}_\alpha \left(\frac{2\sqrt{xyh}}{1-h} \right),$$

где

$$\mathcal{J}_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+\alpha+1)\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2} \right)^{2k+\alpha}$$

— функция Бесселя первого рода порядка α.

III. Если $(a,b) = (-1,1)$, $p_{\alpha,\beta}(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$, $\alpha, \beta > -1$, то

$$P_n(x) := P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = K_n(\alpha,\beta) \Big[p_{\alpha,\beta}(x) \Big]^{-1} \times$$

$$\times \frac{d^n}{dx^n} \left[\left(1-x^2\right)^n \cdot p_{\alpha,\beta}(x) \right], \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

$$K_n(\alpha,\beta) = (-1)^n \sqrt{2^{-(2n+\alpha+\beta+1)} \cdot \frac{(2n+\alpha+\beta)(n+\alpha+\beta+1)}{n!\,\Gamma(n+\alpha+1) \cdot \Gamma(n+\beta+1)}}$$

— ортонормированная система многочленов Якоби, то

$$T(x,y;h) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\alpha,\beta)}(x) P_n^{\alpha,\beta}(y) h^n =$$

$$= \Big[(1-x)(1-y) \Big]^{-\alpha/2} \cdot \Big[(1+x)(1+y) \Big]^{-\beta/2} h^{1/2-(\alpha+\beta)/2} \times$$

$$\times \frac{d}{dh} \left\{ u^\alpha v^\beta q \int\limits_0^{\pi/2} \left(\frac{2q \sec w}{z_1} \right)^\alpha \left(\frac{2q \sec w}{z_2} \right)^\beta \frac{\cos(\alpha-\beta)w}{\delta \cos^2 w} dw \right\},$$

где

$$u = \frac{1}{2}\sqrt{(1-x)(1-y)}, \quad v = \sqrt{(1+x)(1+y)}, \quad q = \frac{1}{2}\left(\sqrt{h} + \frac{1}{\sqrt{h}} \right),$$

$$\delta = \Big\{ \big[(q \sec w)^2 - u^2 - v^2 \big] - 4u^2 v^2 \Big\}^{1/2},$$

$$z_1 = (q \sec w)^2 + u^2 - v^2 + \delta^2, \quad z_2 = (q \sec w)^2 - u^2 + v^2 + \delta^2.$$

Рассмотрим оператор $\mathcal{F}_h : L_2(p(x),[a,b]) \to L_2(p(x),[a,b])$ вида

$$\mathcal{F}_h f(x) = \int\limits_a^b p(t) f(t) T(x,t;1-h) dt. \tag{3.1.11}$$

Отметим ряд простых свойств оператора (3.1.11):

1) для любых двух функций $f, g \in L_2(p(x), [a,b])$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$\mathcal{F}_h(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathcal{F}_h f + \mu \mathcal{F}_h g$;

2) $\|\mathcal{F}_h f\| \leq \|f\|$;

3) $\mathcal{F}_h(u_k(x)u_l(y)) = (1-h)^{k+l} u_k(x)u_l(y)$;

4) $\|\mathcal{F}_h f - f\| \to 0$ при $h \to 0+$.

Пусть $f \in L_2(p(x), [a,b])$. Определим конечные разности первого и высших порядков функции f, как и в предыдующей главе, равенствами

$$\Delta_h f(x) := \mathcal{F}_h f(x) - f(x) = (\mathcal{F}_h - \mathbb{I}) f(x),$$

$$\Delta_h^m f(x) := \Delta_h(\Delta_h^{m-1} f(x)) = (\mathcal{F}_h - \mathbb{I})^m f(x) =$$
$$= \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} \mathcal{F}_h^k f(x),$$

где $\mathcal{F}_h^0 f(x) = \mathbb{I} f(x) = f(x)$, $\mathcal{F}_h^k f(x) = \mathcal{F}_h(\mathcal{F}_h^{k-1} f(x))$, $k = 1, 2, \ldots, m$, $\mathbb{I}$ – единичный оператор в пространстве $L_2(p(x), [a,b])$. Величину

$$\Omega_m(f; \delta) := \sup\{\|\Delta_h^m f(x)\| : 0 < h \leq \delta\} \tag{3.1.12}$$

будем называть обобщённым модулем непрерывности m-го порядка функции $f \in L_2(p(x), [a,b])$. Пусть $\mathcal{D}^0 f := f$, $\mathcal{D}^1 f := \mathcal{D} f$ и при любом $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$, $\mathcal{D}^r f := \mathcal{D}^1(\mathcal{D}^{r-1} f)$, где $\mathcal{D}$ — оператор Штурма–Лиувилля. Через $L_2^{(r)} := L_2^{(r)}(\mathcal{D})$ обозначим класс функций $f \in L_2(p(x), [a,b])$, у которых $\mathcal{D}^r f \in L_2(p(x), [a,b])$, а функция f удовлетворяет граничным условиям

$$f^{(l)}(a) = f^{(l)}(b), \quad l = 1, 2, \ldots, 2r.$$

Так как оператор Штурма–Лиувилля $\mathcal{D}$ симметричен, то для этого оператора справедливы все утверждения, доказанные нами в параграфе 2.2 второй главы, а потому здесь мы для оператора Штурма–Лиувилля $\mathcal{D}$, определённого в равенстве (3.1.1), приводим только их формулировку, чтобы затем конкретизировать их в частных случаях для задач Штурма–Лиувиллевского типа и для разложения функций по специальным функциям математической физики.

Теорема 3.1.1. *Пусть* $n, r \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$. *Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f \in H^r(A)} \frac{E_{n-1}(\mathcal{D}^s f)}{E_{n-1}(\mathcal{D}^r f)} = \frac{1}{\lambda_n^{r-s}}.$$

Из этой теоремы вытекает

Следствие 3.1.1. *В условиях теоремы 3.1.1 для операторов, рассмотренных в задачах I–III, справедливы равенства:*

I. для многочленов Чебышева–Эрмита

$$\sup_{f \in H^r(\mathscr{H})} \frac{E_{n-1}(\mathscr{H}^s f)}{E_{n-1}(\mathscr{H}^r f)} = \frac{1}{(2n)^{r-s}}, \ r \geq s \ (r, s \in \mathbb{Z}_+);$$

II. для многочленов Чебышева–Лагерра

$$\sup_{f \in H^r(\mathcal{L})} \frac{E_{n-1}(\mathcal{L}^s f)}{E_{n-1}(\mathcal{L}^r f)} = \frac{1}{n^{r-s}}, \ r \geq s \ (r, s \in \mathbb{Z}_+);$$

III. для многочленов Чебышева–Якоби

$$\sup_{f \in H^r(\mathcal{J}_{\alpha,\beta})} \frac{E_{n-1}(\mathcal{J}_{\alpha,\beta}^s f)}{E_{n-1}(\mathcal{J}_{\alpha,\beta}^r f)} = \frac{1}{[n(n+\alpha+\beta+1)]^{r-s}}, \ r \geq s \ (r, s \in \mathbb{Z}_+).$$

Аналогичным образом, применяя теорему 2.4.2 для оператора $\mathcal{D}$ Штурма–Лиувилля, получаем следующее утверждение

Теорема 3.1.2. *Пусть* $n, m \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$, $0 < p \leq \infty$, $h \in (0, 1)$ *и* $q(t)$ *— весовая на* $[0, h]$ *функция. Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f \in H^r(\mathcal{D})} \frac{\lambda_n^{r-s} E_{n-1}(\mathcal{D}^s f)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(\mathcal{D}^r f; t) q(t) dt\right)^{1/p}} =$$

$$= \left(\int\limits_0^h (1 - \varphi_n(h))^{mp} q(t) dt\right)^{-1/p}.$$

Из этой теоремы вытекает следующее

Следствие 3.1.2. *В условиях теоремы 3.1.2 для операторов, определённых в задачах I–III параграфа 2.2, справедливы равенства:*

I. для многочленов Чебышева–Эрмита

$$\sup_{f \in H^r(\mathscr{H})} \frac{(2n)^{r-s} E_{n-1}(\mathscr{H}^s f)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(\mathscr{H}^r f; t) q(t) dt\right)^{1/p}} =$$

$$= \left(\int\limits_0^h (1 - \varphi_n(h))^{mp} q(t) dt\right)^{-1/p};$$

II. для многочленов Чебышева–Лагерра

$$\sup_{f \in H^r(\mathcal{L})} \frac{n^{r-s} E_{n-1}(\mathcal{L}^s f)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(\mathcal{L}^r f; t) q(t) dt\right)^{1/p}} =$$

$$= \left(\int\limits_0^h (1 - \varphi_n(h))^{mp} q(t) dt\right)^{-1/p}.$$

III. для многочленов Якоби

$$\sup_{f\in H^r(\mathcal{J}_{\alpha,\beta})}\frac{[n(n+\alpha+\beta+1)]^{r-s}E_{n-1}(\mathcal{J}^s_{\alpha,\beta}f)}{\left(\int\limits_0^h\Omega^p_m(\mathcal{J}^r_{\alpha,\beta}f;t)q(t)dt\right)^{1/p}}=$$

$$=\left(\int\limits_0^h(1-\varphi_n(h))^{mp}q(t)dt\right)^{-1/p}.$$

§ 3.2. Применение $\mathscr{K}$-функционалов

В теории приближения функций часто используется идея замены аналитически сложной функции f достаточно гладкой функцией g так, чтобы возникающей при этом погрешности было достаточно мало. Наиболее эффективная реализация этой идеи основана на методе $\mathscr{K}$-функционала Петре в теории интерполяционных пространств (см., например [55, 57]). $\mathscr{K}$-функционалы нашли применение также при решении экстремальных задач теории приближения функций [16, 43, 55].

Пользуясь ранее введёнными обозначениями, определим в рассматриваемом нами случае $\mathscr{K}$-функционал

$$\mathscr{K}_m(f, t^m) := \mathscr{K}_m(f, t^m; L_2, L_2^{(m)}) =$$

$$= \inf\left\{\|f - g\| + t^m\|\mathcal{D}^m g\| : g \in L_2^{(m)}\right\}, \tag{3.2.1}$$

где $m \in \mathbb{N},\ t \in (0, 1),\ L_2 := L_2(p(x); [a, b])$. Опеределённый интерес представляет вычисление точных значений экстремальных величин, подобных приведённой в равенстве (2.2.8), где вместо модуля непрерывности (2.1.13) будет использован $\mathscr{K}$-функционал (3.2.1).

Теорема 3.2.1. *При любых $n, m \in \mathbb{N},\ r \in \mathbb{Z}_+$ имеет место равенство*

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{\lambda_n^r E_{n-1}(f)}{\mathscr{K}_m(\mathcal{D}^r f, 1/\lambda_n^m)} = 1. \tag{3.2.2}$$

Доказательство. Воспользовавшись формулами (3.1.9) и (2.1.12) для любой функции $f \in L_2^{(r)}$, будем иметь

$$E_{n-1}(f) = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f) \right\}^{1/2} =$$

$$= \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^{2r}} \, c_k^2(f) \right\}^{1/2} \leq \frac{1}{\lambda_n^r} \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(\mathcal{D}^r f) \right\}^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{\lambda_n^r} \, E_{n-1}(\mathcal{D}^r) \leq \frac{1}{\lambda_n^r} \| \mathcal{D}^r f - S_{n-1}(g) \|, \tag{3.2.3}$$

где

$$S_{n-1}(g, x) = \sum_{k=1}^{n-1} c_k(g) u_k(x)$$

– частная сумма $(n-1)$-го порядка ряда Фурье функции $g \in L_2^{(m)}$ по ортонормированной системе собственных функций $\{u_k(x)\}_{k=1}^{n}$ на отрезке $[a, b]$ с весом $p(x)$. В силу равенств (3.1.9) и (3.2.3) для произвольной функции $g \in L_2^{(m)}$ имеем

$$\| g - S_{n-1}(g) \| = E_{n-1}(g) \leq \frac{1}{\lambda_n^m} \, E_{n-1}(\mathcal{D}^m g). \tag{3.2.4}$$

Учитывая соотношение (3.2.4), из неравенства (3.2.3) получаем

$$E_{n-1}(f) \leq \frac{1}{\lambda_n^r} \big\{ \| \mathcal{D}^r f - g \| + \| g - S_{n-1}(g) \| \big\} \leq$$
$$\leq \frac{1}{\lambda_n^r} \left\{ \| \mathcal{D}^r f - g \| + \frac{1}{\lambda_n^m} \| \mathcal{D}^m g \| \right\}. \tag{3.2.5}$$

Так как левая часть неравенства (3.2.5) не зависит от функции $g \in L_2^{(m)}$, то, переходя в правой части (3.2.5) к нижней грани по всем функциям g, принадлежащим $L_2^{(m)}$, и используя определение $\mathscr{K}$-функционала, будем иметь

$$E_{n-1}(f) \leq \frac{1}{\lambda_n^r} \mathscr{K}_m \left(\mathcal{D}^r f, \frac{1}{\lambda_n^m} \right).$$

Отсюда сразу следует оценка сверху

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{\lambda_n^r E_{n-1}(f)}{\mathscr{K}_m(\mathcal{D}^r f, 1/\lambda_n^m)}\le 1. \tag{3.2.6}$$

Получим оценку снизу рассматриваемой экстремальной величины. С этой целью, используя формулу (3.1.2), для произвольного обобщённого полинома

$$G_n(x)=\sum_{k=1}^n a_k(G_n)u_k(x),\quad a_k(G_n)\in\mathbb{R},$$

имеем

$$\mathcal{D}G_n(x)=\sum_{k=1}^n \lambda_k^r\, a_k(G_n)u_k(x). \tag{3.2.7}$$

Так как

$$\|G_n\|=\left\{\sum_{k=1}^n a_k^2(G_n)\right\}^{1/2},$$

то, учитывая, что последовательность $\{\lambda_k^r\}_{k=1}^n$ является монотонно возрастающей, из (3.2.7) следует, что

$$\|\mathcal{D}^r G_n\|=\left\{\sum_{k=1}^n \lambda_k^{2r}a_k^2(G_n)\right\}^{1/2}\le \lambda_n^r\|G_n\|. \tag{3.2.8}$$

Пусть далее в соотношении (3.2.1) функция $g=0$ или $g=G_n$. Тогда в силу (3.2.8) из (3.2.1) получим

$$\mathscr{K}_m(G_n,t^m)\le \min\left\{\|G_n\|;t^m\|\mathcal{D}^m G_n\|\right\}. \tag{3.2.9}$$

Рассмотрим функцию $f_0(x)=u_n(x)\in L_2^{(r)}$, для которой имеет место равенство $E_{n-1}(f_0)=1$ и на основании (3.2.8) и (3.2.9)

$$\mathscr{K}_m(\mathcal{D}^r f_0, 1/\lambda_n^m)\le\frac{1}{\lambda_n^m}\|\mathcal{D}^{r+m}f_0\|=\frac{1}{\lambda_n^m}\,\lambda_n^{m+r}=\lambda_n^r. \tag{3.2.10}$$

Пользуясь неравенством (3.2.10), получим

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{\lambda_n^r E_{n-1}(f)}{\mathscr{K}_m(\mathcal{D}^r f, 1/\lambda_n^m)} \geq \frac{\lambda_n^r E_{n-1}(f_0)}{\mathscr{K}_m(\mathcal{D}^r f_0, 1/\lambda_n^m)} \geq 1. \qquad (3.2.11)$$

Требуемое равенство (3.2.2) вытекает из сопоставления неравенств (3.2.6) и (3.2.11).

Используя результат доказанной теоремы 3.2.1, вычислим значение n-поперечников некоторых классов функций, задаваемых $\mathscr{K}$-функционалом от $\mathcal{D}^r f$. Функцию $\Phi(t)$, являющуюся неубывающей на $[0,\infty)$, называют k-мажорантой [47, с. 24], если функция $\Phi(t)/t^k$ не возрастает на $[0,\infty)$, $\Phi(0)=0$ и $\lim\limits_{t\to 0}\Phi(t) = 0$. В случае $k = 1$ функцию Φ, удовлетворяющую указанным условиям, называют просто мажорантой.

Пусть Φ — произвольная мажоранта. Символом $W^{(r)}(\mathscr{K}_m,\Phi)$, где $r\in\mathbb{Z}_+$, $m\in\mathbb{N}$, обозначим класс функций $f\in L_2^{(r)}$, у которых производные $\mathcal{D}^r f$ удовлетворяют ограничению

$$\mathscr{K}_m(\mathcal{D}^r f, t^m) \leq \Phi(t^m), \quad t>0.$$

Теорема 3.2.2. *Пусть $m,n\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$. Тогда имеет место равенство*

$$\rho_n(W^{(r)}(\mathscr{K}_m,\Phi);L_2) = E_{n-1}(W^{(r)}(\mathscr{K}_m,\Phi)) = \frac{1}{\lambda_n^r}\,\Phi\left(\frac{1}{\lambda_n^m}\right), \qquad (3.2.12)$$

где

$$E_{n-1}(W^{(r)}(\mathscr{K}_m,\Phi)) := \sup\left\{E_{n-1}(f) : f\in W^{(r)}(\mathscr{K}_m,\Phi)\right\},$$

$\rho_n(\cdot)$ *– любой из вышеперечисленных n-поперечников $b_n(\cdot)$, $d_n(\cdot)$, $d^n(\cdot)$, $\delta_n(\cdot)$, $\Pi_n(\cdot)$.*

Доказательство. Из неравенства (3.2.6) в силу соотношения (2.2.1) и определения класса $W^{(r)}(\mathscr{K}_m, \Phi)$ получаем оценку сверху

$$\rho_n(W^{(r)}(\mathscr{K}_m, \Phi); L_2) \le d_n(W^{(r)}(\mathscr{K}_m, \Phi); L_2) \le$$
$$\le E_{n-1}(W^{(r)}(\mathscr{K}_m, \Phi)) \le \frac{1}{\lambda_n^r}\,\Phi\left(\frac{1}{\lambda_n^m}\right). \tag{3.2.13}$$

Для получения оценки снизу указанных n-поперечников введём в рассмотрение $(n+1)$-мерный шар

$$\sigma_{n+1} := \left\{p_n \in \mathcal{P}_n : \|p_n\| \le \frac{1}{\lambda_n^r}\,\Phi\left(\frac{1}{\lambda_n^m}\right)\right\}. \tag{3.2.14}$$

Поскольку мажоранта Φ удовлетворяет условию $\Phi(t_1)/t_1 \ge \Phi(t_2)/t_2$ для $0 < t_1 < t_2 < \infty$, то отсюда следует неравенство

$$\Phi(t_1^m)/\Phi(t_2^m) \ge (t_1/t_2)^m. \tag{3.2.15}$$

В силу неравенства (3.2.8) для любого полинома $p_n \in \mathcal{P}_n$ имеем

$$\|\mathcal{D}^{(r+m)}p_n\| \le \lambda_n^{r+m}\|p_n\|. \tag{3.2.16}$$

Пусть $0 < t < 1/\lambda_n$. Применяя неравенство (3.2.15), в котором полагаем $t_1 := t$ и $t_2 := 1/\lambda_n$, а также формулы (3.2.9) и (3.2.16), для произвольного полинома $p_n \in \sigma_{n+1}$ имеем

$$\mathscr{K}_m(\mathcal{D}^r f_n, t^m) \le t^m\|\mathcal{D}^{(r+m)}p_n\| \le t^m\,\lambda_n^{r+m}\|p_n\| =$$
$$= (t\lambda_n)^m\lambda_n^r \cdot \|p_n\| \le (t\lambda_n)^m \cdot \Phi\left(\frac{1}{\lambda_n^m}\right) \le \Phi(t^m). \tag{3.2.17}$$

Пусть теперь $1/\lambda_n \le t < \infty$. Тогда на основании неравенств (3.2.8) и (3.2.9) для любого $p_n \in \sigma_{n+1}$ запишем

$$\mathscr{K}_m(\mathcal{D}^r p_n, t^m) \le \|\mathcal{D}^r p_n\| \le \lambda_n^r\|p_n\| \le \Phi\left(\frac{1}{\lambda_n^m}\right) \le \Phi(t^m). \tag{3.2.18}$$

Включение $\sigma_{n+1} \in W^{(r)}(\mathscr{K}_m, \Phi)$ следует из неравенств (3.2.17) и (3.2.18). Следовательно, согласно определению бернштейновского n-поперечника, имеем

$$\rho_n(W^{(r)}(\mathscr{K}_m, \Phi); L_2) \geq b_n(W^{(r)}(\sigma_{n+1}, L_2)) \geq \frac{1}{\lambda_n^r}\, \Phi\left(\frac{1}{\lambda_n^m}\right). \tag{3.2.19}$$

Требуемые равенства (3.2.12) получаем из соотношений (3.2.13) и (3.2.19), чем и завершаем доказательство теоремы 3.2.2.

Следствие 3.2.1. *В условиях теоремы 3.2.2 имеют место равенства*

$$\text{I.}\quad \rho\big(W^{(r)}(\mathscr{K}_m, \Phi); L_2(e^{x^2}, \mathbb{R})\big) = \frac{1}{(2n)^r}\Phi\left(\frac{1}{(2n)^m}\right)$$

— для полиномов Чебышева–Эрмита;

$$\text{II.}\quad \rho\big(W^{(r)}(\mathscr{K}_m, \Phi); L_2(x^\alpha e^{-x}, \mathbb{R}_+)\big) = \frac{1}{n^r}\Phi\left(\frac{1}{n^m}\right)$$

— для полиномов Чебышева–Лагерра;

$$\text{III.}\quad \rho\big(W^{(r)}(\mathscr{K}_m, \Phi); L_2((1-x)^\alpha(1+x)^\beta; (-1,1))\big) =$$

$$= \frac{1}{[n(n+\alpha+\beta+1)]^r}\Phi\left(\frac{1}{[n(n+\alpha+\beta+1)]^m}\right)$$

— для полиномов Якоби, где $\rho_n(\cdot)$ — любой из n-поперечников $b_n(\cdot)$, $d_n(\cdot)$, $\delta_n(\cdot)$, $d^n(\cdot)$ или $\Pi_n(\cdot)$.

§ 3.3. Применение теорем параграфов 2.3 и 2.4 к некоторым специальным функциям математической физики

В этом параграфе найдены точные верхние грани наилучших приближений частичными суммами ряда Фурье по собственными функциям задачи Штурма–Лиувилля на некоторых классах функций, характеризующихся обобщённым модулем непрерывности. Введение такого модуля непрерывности функции оправдывается связью между скоростью сходимости величины наилучших приближений суммами Фурье и поведением её обобщённого модуля непрерывности. Приводится решение ряда экстремальных задач наилучшего приближения функций конкретными специальными функциями математической физики. Точнее приводим применение теорем параграфов 2.3 и 2.4 к вопросу наилучшего совместного приближения некоторых специальных функций.

Приводим применение доказанных теорем параграфов 2.3 и 2.4 к вопросу наилучшего совместного приближения некоторых специальных функций математической физики. Уравнения (3.3.1) для простейших специальных функций могут быть записаны в виде [39, с. 617]

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right)+\big(\lambda p(x)-q(x)\big)u(x)=0. \tag{3.3.1}$$

I. Уравнение Бесселя

$$\frac{1}{x}\cdot\frac{d}{dx}\left(x\frac{du}{dx}\right)+\left(\lambda-\frac{n^2}{x^2}\right)u(x)=0$$

или

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{du}{dx}\right)+\left(\lambda x-\frac{n^2}{x}\right)u(x)=0 \tag{3.3.2}$$

соответствует случаю $k(x)=x$, $p(x)=x$, $q(x)=n^2/x$, $a=0$, $b=1$.

Хорошо известно [39, с. 625], что функция Бесселя

$$J_\nu(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^\nu\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{x}{2}\right)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)}$$

является системой собственных функций краевой задачи

$$-\frac{d}{dx}\left(x\frac{du}{dx}\right)+\frac{\nu^2}{x}u=\lambda xu,\ 0<x<1,\ |u(0)|<+\infty,\ u(1)=0, \tag{3.3.3}$$

отвечающих собственным значениям $\{\lambda_k^2\}_{k=1}^{\infty}$. При этом система $\{J_\nu(\lambda_k x)\}_{k=1}^{\infty}$ является полной и ортогональной в пространстве $L_2:=L_2([0,1];xdx)$ функций, суммируемых с квадратом, с весом x и конечной нормой

$$\|f\|=\left(\int\limits_0^1 xf^2(x)dx\right)^{1/2}.$$

Полагая $\mathscr{B}:=\frac{1}{x}\cdot\frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx}\right)-\frac{\nu^2}{x^2}$, дифференциальное уравнение Бесселя (3.3.3) запишем в виде

$$\mathscr{B}u=-\lambda u. \tag{3.3.4}$$

Введя функцию $T(x,y;t)$ как сумму ряда

$$T(x,y;t)=\sum_{k=1}^{\infty}J_\nu(\lambda_k x)J_\nu(\lambda_k y)t^k,\ 0<t<1$$

в L_2, введём оператор обобщенного сдвига

$$F_hf(x)=\int\limits_0^1 tf(t)T(x,t;1-h)dt. \tag{3.3.5}$$

Используя оператор (3.3.5), в работах [5, 40] введён специальный модуль непрерывности

$$\Omega_m\big(\mathscr{B}^r f; t\big) = \left\{\sum_{k=1}^{\infty}\big[1-(1-t)^k\big]^{2m}\lambda_k^{4r}c_k^2(f)\right\}^{1/2}, \ 0<t<1. \qquad (3.3.6)$$

Заметим, что формула (3.3.6) вытекает из (2.1.13) в случае когда $\mathcal{A} := \mathscr{B}$, $\varphi_k(t) = (1-t)^k$ и λ_k заменяется на λ_k^2.

Очевидно, что все теоремы параграфов 2.3 и 2.4 для оператора Бесселя $\mathscr{B}$ в соответствующих формулировках имеют место:

Теорема 3.3.1. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$. *Тогда*

$$\sup_{f\in L_2^r(\mathscr{B})}\frac{E_{n-1}(\mathscr{B}^s f)}{E_{n-1}(\mathscr{B}^r f)} = \frac{1}{\lambda_n^{2(r-s)}}.$$

Теорема 3.3.2. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$, $t \in (0,1]$. *Тогда*

$$\sup_{f\in L_2^r(\mathscr{B})}\frac{\lambda_n^{2(r-s)}E_{n-1}(\mathscr{B}^s f)}{\Omega_m(\mathscr{B}^r f, t)} = \big[1-(1-t)^n\big]^{-m}.$$

Теорема 3.3.3. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$, $0 < p \leq \infty$, $0 < h \leq 1$, φ *— весовая на отрезке* $[0, h]$ *функция. Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f\in L_2^r(\mathscr{B})}\frac{\lambda_n^{2(r-s)}\cdot E_{n-1}(\mathscr{B}^s f)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(\mathscr{B}^r f; t)q(t)dt\right)^{1/p}} =$$

$$= \left(\int\limits_0^h \big(1-(1-t)^n\big)^{2m}q(t)dt\right)^{-1/p}.$$

Отметим, что теоремы 3.3.1–3.3.3 в случае $s = 0$ и $0 < p \leq 2$ ранее непосредственным вычислением с привлечением теории бесселевских функций были доказаны в работе К.Тухлиева [40];

II. При $k(x) = 1 - x^2$, $p(x) = 1$, $q(x) \equiv 0$, $a = -1$, $b = 1$ из (2.4.8) получаем уравнение Лежандра

$$\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{du}{dx}\right) + \lambda u = 0,\ |u(\pm 1)| < \infty. \tag{3.3.7}$$

Известно [36, с. 116], что полиномы Лежандра

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n}\big[(x^2-1)^n\big]$$

являются решением уравнения (3.3.7) с $\lambda = n(n+1)$, то есть $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ являются собственными функциями, а числа $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty} := \{n(n+1)\}_{n=0}^{\infty}$ являются собственными значениями оператора Лежандра $\mathscr{L} := \dfrac{d}{dx}\left((1-x^2)\dfrac{du}{dx}\right)$ в задаче (3.3.7). Для оператора Лежандра $\mathscr{L}$ приводим формулировку теорем 2.2.1–2.2.5 в следующем виде

Теорема 3.3.4. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$. *Тогда*

$$\sup_{f \in L_2^r(\mathscr{L})} \frac{E_{n-1}(\mathscr{L}^s f)}{E_{n-1}(\mathscr{L}^r f)} = \frac{1}{\big[n(n+1)\big]^{r-s}}.$$

Теорема 3.3.5. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$. *Тогда, при всех* $t \in (0,1)$, *справедливо равенство*

$$\sup_{f \in L_2^r(\mathscr{L})} \frac{\big[n(n+1)\big]^{r-s} E_{n-1}(\mathscr{L}^s f)}{\Omega_m(\mathscr{L}^r f; t)} = \frac{1}{\big[1-(1-t)^n\big]^m}.$$

Теорема 3.3.6. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$, $0 < p \leq \infty$, $h \in (0,1]$ *и* $q(t)$ *– весовая на отрезке* $[0,h]$ *функция. Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f \in L_2^r(\mathscr{L})} \frac{\big[n(n+1)\big]^{r-s} E_{n-1}(\mathscr{L}^s f)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(\mathscr{L}^r f; t) q(t) dt\right)^{1/p}} =$$

$$= \left(\int_0^h \left[1 - (1-t)^n \right]^{mp} q(t) dt \right)^{-1/p}.$$

III. Дифференциальное уравнение Чебышева–Эрмита

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-x^2}\frac{du}{dx}\right) + \lambda e^{-x^2} u = 0 \text{ или } \frac{d^2u}{dx^2} - 2x\frac{du}{dx} + \lambda u = 0 \tag{3.3.8}$$

из дифференциального уравнения (3.3.1) получается при $k(x) = e^{-x^2}$, $q(x) = 0$, $p(x) = e^{-x^2}$, $a = -\infty$, $b = \infty$.

Решением дифференциального уравнения (3.3.8) является многочлен Чебышева–Эрмита [29, 30, 36, с.169–176] вида

$$H_n(x) := \frac{(-1)^n}{\sqrt{n!2^n\sqrt{\pi}}} \cdot e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right)$$

с $\lambda = 2n$. Если ввести дифференциальный оператор Чебышева–Эрмита второго порядка

$$\mathscr{H} := \frac{d^2}{dx^2} - 2x\frac{d}{dx}, \tag{3.3.9}$$

то, как показано в [8, 17], для произвольной функции $f \in L_2^r(\mathscr{H})$ справедливо равенство

$$\Omega_m\big(\mathscr{H}^r f, t\big) := \sum_{k=1}^{\infty} \left[1 - (1-t^2)^{n/2}\right]^{2m} \cdot (2n)^{2r}.$$

Теоремы 2.2.1–2.2.5 для оператора $\mathscr{H}$ приобретают следующие формулировки:

Теорема 3.3.7. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$, *оператор* $\mathscr{H}$ *определён равенством* (3.3.9). *Тогда*

$$\sup_{f \in L_2^r(\mathscr{H})} \frac{E_{n-1}(\mathscr{H}^s f)}{E_{n-1}(\mathscr{H}^r f)} = \frac{1}{(2n)^{r-s}}.$$

Теорема 3.3.8. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$. *Тогда*

$$\sup_{f \in L_2^r(\mathscr{H})} \frac{(2n)^{r-s} E_{n-1}(\mathscr{H}^s f)}{\Omega_m(\mathscr{H}^r f, t)} = \frac{1}{\left[1 - (1-t^2)^{n/2}\right]^m}.$$

Теорема 3.3.9. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$, $0 < p \leq \infty$, $h \in (0, 1]$, $q(t)$ *– весовая на отрезке* $[0, h]$ *функция. Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f \in L_2^r(\mathscr{H})} \frac{(2n)^{r-s} \cdot E_{n-1}(\mathscr{H}^s f)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(\mathscr{H}^r f, t) q(t) dt\right)^{1/p}} =$$

$$= \left(\int\limits_0^h \left[1 - (1-t^2)^{n/2}\right]^{mp} q(t) dt\right)^{-1/p}.$$

Очевидно, что из теорем 3.3.8 и 3.3.9, соответственно при различных значениях $t \in (0, 1)$ и $h \in (0, 1]$, $q(t) = t$, можно вывести конкретные следствия. Так, из теоремы 3.3.8 при $t = \sqrt{2/n}$ получаем следующее асимптотическое равенство

$$\sup_{f \in L_2^r(\mathscr{H})} \frac{(2n)^{r-s} E_{n-1}(\mathscr{H}^s f)}{\Omega_m(\mathscr{H}^r f, \sqrt{2/n})} = \frac{1}{\left[1 - \left(1 - \dfrac{2}{n}\right)^{n/2}\right]^m} \sim$$

$$\sim \frac{1}{\left(1 - e^{-1}\right)^m} = \left(\frac{e}{e-1}\right)^m.$$

Из этого равенства сразу вытекает следующее неравенство типа Джексона–Стечкина для наилучшего совместного полиномиального приближения функции и ее последовательность производных $\mathscr{H}^s f \in L_2$:

$$E_{n-1}(\mathscr{H}^s f) \leq \left(\frac{e}{e-1}\right)^m \cdot \frac{1}{(2n)^{r-s}} \cdot \Omega_m\left(\mathscr{H}^r f, \sqrt{\frac{2}{n}}\right)$$

IV. Уравнение Чебышева–Лагерра

$$\frac{d}{dx}\left(xe^{-x}\frac{du}{dx}\right)+\lambda e^{-x}u=0 \text{ или } u''+(1-x)u'+\lambda u=0 \tag{3.3.10}$$

соответствует $k(x) = xe^{-x}$, $q(x) = 0$, $\rho(x) = e^{-x}$, $a = 0$, $b = \infty$. Общее решение дифференциального уравнения (3.3.10) даётся полиномами Чебышева–Лагерра [36, с.219]:

$$L_n(x)=\frac{1}{n!}e^{x}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^n e^{-x}\right). \tag{3.3.11}$$

Легко проверить, что если полагать

$$\mathcal{L}:=e^{x}\frac{d}{dx}\left(xe^{-x}\frac{d}{dx}\right),$$

то собственными функциями операторного уравнения

$$\mathcal{L}u=-\lambda u$$

являются многочлены (3.3.11), а собственными числами $\lambda_n = n$. Теоремы 2.2.3–2.2.5 в этом случае имеют место в следующих формулировках.

Теорема 3.3.10. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$. *Тогда*

$$\sup_{f\in L_2^r(\mathcal{L})}\frac{E_{n-1}(\mathcal{L}^s f)}{E_{n-1}(\mathcal{L}^r f)}=\frac{1}{n^{r-s}}.$$

Теорема 3.3.11. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$. *Тогда*

$$\sup_{f\in L_2^r(\mathcal{L})}\frac{n^{r-s}E_{n-1}(\mathcal{L}^s f)}{\Omega_m(\mathcal{L}^r f,t)}=\frac{1}{\left[1-(1-t)^n\right]^m},\ t\in(0,1).$$

Теорема 3.3.12. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$, $0 < p \leq \infty$, $h \in (0, 1]$, $q(t)$ *— весовая на отрезке* $[0, h]$ *функция. Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f\in L_2^r(\mathcal{L})}\frac{n^{r-s}\cdot E_{n-1}(\mathcal{L}^s f)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(\mathcal{L}^r f,t)q(t)dt\right)^{1/p}}=$$

$$= \left(\int_0^h \left[1 - (1-t)^n \right]^{mp} q(t)dt \right)^{-1/p}.$$

V. В завершение работы отметим, что аналогичные результаты можно формулировать и для многочленов Якоби, имеющих вид [36, с.268]

$$P_n(x;\alpha,\beta) =$$

$$= \frac{(-1)^n}{n!2^n}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}\right],\ \alpha,\beta > -1$$

и удовлетворяющих дифференциальному уравнению

$$\left(1-x^2\right)\frac{d^2u}{dx^2} + \left[\beta - \alpha - (\alpha+\beta+2)x\right]\frac{du}{dx} + n(n+\alpha+\beta+1)u = 0. \quad (3.3.12)$$

Введя операторное обозначение

$$\mathcal{J}_{\alpha,\beta} := \left(1-x^2\right)\frac{d^2}{dx^2} + \left[\beta - \alpha - (\alpha+\beta+2)x\right]\frac{d}{dx},$$

уравнение (3.3.12) запишем

$$\mathcal{J}_{\alpha,\beta}u + \lambda y = 0,\ \lambda = n(n+\alpha+\beta+1).$$

Теоремы 2.2.3–2.2.5 в этом случае формулируются следующим образом:

Теорема 3.3.13. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $r,s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$, $\alpha,\beta > -1$. *Тогда*

$$\sup_{f \in L_2^r(\mathcal{J}_{\alpha,\beta})} \frac{E_{n-1}(\mathcal{J}^s_{\alpha,\beta}f)}{E_{n-1}(\mathcal{J}^r_{\alpha,\beta}f)} = \frac{1}{\left[n(n+\alpha+\beta+1)\right]^{r-s}}.$$

Теорема 3.3.14. *Пусть* $m,n \in \mathbb{N}$, $r,s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$. *Тогда*

$$\sup_{f \in L_2^r(\mathcal{J}_{\alpha,\beta})} \frac{\left[n(n+\alpha+\beta+1)\right]^{r-s} E_{n-1}(\mathcal{J}^s_{\alpha,\beta}f)}{\Omega_m(\mathcal{J}^r_{\alpha,\beta}f,t)} = \frac{1}{\left[1-(1-t)^n\right]^m}.$$

Теорема 3.3.15. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$, $0 < p \leq \infty$, $h \in (0,1)$, $q(t)$ *– весовая на отрезке* $[0,h]$ *функция. Тогда имеет место равенство*

$$\sup_{f \in L_2^r(\mathcal{J}_{\alpha,\beta})} \frac{\big[n(n+\alpha+\beta)\big]^{r-s} \cdot E_{n-1}(\mathcal{J}_{\alpha,\beta}^s f)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(\mathcal{J}_{\alpha,\beta}^r f, t) q(t) dt\right)^{1/p}} =$$

$$= \left(\int\limits_0^h \big[1-(1-t)^n\big]^{mp} q(t) dt\right)^{1/p}.$$

Обсуждение полученных результатов

В первой главе диссертации даны точные оценки скорости сходимости (наилучших приближений) ряда Фурье по собственным векторам некоторого симметричного оператора в гильбертовом пространстве. Пользуясь хорошо известными фактами, мы построили обобщенный модуль непрерывности произвольного вектора гильбертова пространства, который позволил нам получить точные оценки скорости сходимости (наилучших среднеквадратических приближений) ряда Фурье по произвольной ортогональной системе векторов.

Здесь, с помощью симметричного оператора в гильбертовом пространстве, мы вводим аналоги классов дифференцируемых функций, характеризуемых обобщённым модулем непрерывности, и на этих классах устанавливаем точные оценки скорости сходимости рядов Фурье по собственным векторам этого оператора. Кроме того, в этой главе даны точные оценки некоторых N — поперечников рассматриваемых классов векторов в гильбертовом пространстве.

Результаты второй главы обобщают все результаты первой главы, поэтому приводятся комментарии ко второй главе, указывающие откуда и в связи с анализом каких известных результатов они возникли.

Таким образом, если H – вещественное бесконечномерное сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением (f, g) векторов $f, g \in H$ и нормой $\|f\| = \sqrt{(f, f)}$; $A : H \to H$ – симметричный оператор в пространстве H, то есть линейный оператор, заданный на некотором линейном многообразии $D(A) \subset H$ и удовлетворяющий условию $(Af, g) = (f, Ag)$ для любых $f, g \in D(A)$, то мы предполагаем, что оператор A обладает полной ортонормированной системой собственных векторов $\{g_n\}$, соотвествующих собственным значениям $\{\lambda_n\}$, то есть выполняется равенство

$$Ag_n = \lambda_n g_n \ (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

причём последовательность $\{\lambda_n\}$ является строго монотонно возрастающей последовательностью собственных чисел:

$$0 \leq \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots .$$

Известно [25, с.390], что любой вектор $f \in H$ можно разложить в ряд Фурье

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(f) g_n, \ \ c_n(f) = (f, g_n) \tag{4.0.1}$$

по системе векторов $\{g_n\}$, сходящийся в гильбертовом пространстве H, то есть

$$\|f - S_{n-1}(f)\| \to 0, \ \ n \to \infty,$$

где

$$S_{n-1}(f) = \sum_{k=0}^{n-1} c_n(f) g_k \tag{4.0.2}$$

— частичные суммы порядка $(n-1)$ ряда (4.0.1).

Обозначим через

$$E_{n-1}(f) = \inf\{\|f - p_{n-1}\| : p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}\}$$

наилучшее приближение вектора $f \in H$ обобщёнными полиномами по системе векторов $\{g_k\}_{k=0}^{\infty}$:

$$p_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k g_k.$$

Тогда, как хорошо известно, справедливы следующие равенства:

$$\|f\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^2(f), \tag{4.0.3}$$

$$E_{n-1}^2(f) = \|f - S_{n-1}(f)\|^2 = \sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f). \tag{4.0.4}$$

Напомним, что через

$$b_n(\mathfrak{M}),\ d_n(\mathfrak{M}),\ \delta_n(\mathfrak{M}),\ d^n(\mathfrak{M}),\ \Pi_n(\mathfrak{M})$$

общепринято соответственно обозначать *бернштейновский, колмогоровский, линейный, гельфандовский* и *проекционный* n — поперечники множества $\mathfrak{M}$ в гильбертовом пространстве H (см., например, [38, с.204]).

В пространстве H определим оператор (оператор сдвига)

$$F_h f = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(h) c_n(f) g_n,$$

где $\psi_n(h)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots;\ 0 \le h \le 1)$ — непрерывные функции, удовлетворяющие следующим условиям монотонности и ограниченности:

$$\psi_n(h) \not\equiv const,\ 0 \le \psi_n(h) \le 1,\ \psi_n(h) \ge \psi_{n+1}(h).$$

Тогда очевидно, что $F_h : H \to H$ — линейный ограниченный оператор, для которого при всех $h \in (0, 1)$ и $n \in \mathbb{N}$ выполняется равенство:

$$F_h g_n = \psi_n(h) g_n.$$

Пусть $f \in H$. Определим конечные разности первого и высших порядков вектора f, аналогично классическому случаю:

$$\Delta_h(f) = F_h f - f = (F_h - E)f,$$

$$\Delta_h^k f = \Delta_h(\Delta_h^{k-1} f) = (F_h - E)^k f = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} F_h^i f,$$

где

$$F_h^0 f = Ef = f, \ \ F_h^i f = F_h(F_h^{i-1} f), \ \ (i = 1, 2, \ldots, k, \ \ k = 1, 2, \ldots),$$

а E — единичный оператор в пространстве H.

Величину

$$\Omega_k(f, \delta) = \sup_{0<h\le\delta} \left\{ \|\Delta_h^k f\| : \ 0 < h \le \delta \right\} \ \ (k = 1, 2, \ldots; 0 < \delta < 1)$$

будем называть обобщённым модулем непрерывности k-го порядка вектора $f \in H$.

Рассмотрим теперь следующие классы векторов в гильбертовом пространстве H:

1) $H^{(r)}(A) := \{f \in H : A^r f \in H, \ \|A^r f\| < \infty\}$, $r \in \mathbb{Z}_+$. При этом $A^0 f = Ef = f$, и далее рекуррентно определим равенства $A^r f := A(A^{r-1} f)$, $r \in \mathbb{N}$.

2) $W_k^{(r)}(A, \Phi) := \big\{f \in H^{(r)}(A)$, удовлетворяющих ограничению $\Omega_k(A^r f, \delta) \le \Phi(\delta)\big\}$, где $r \in \mathbb{Z}_+$, $k \in \mathbb{N}$, а $\Phi(\delta)$ — неотрицательная монотонно возрастающая функция на интервале (a, b).

3) $W_k^{(r)}(A, h) := \left\{ f \in H^{(r)}(A) : \dfrac{1}{h} \displaystyle\int_0^h \Omega_k^{1/k}(A^r f, t) dt \le 1 \right\}$,

где $r \in \mathbb{Z}_+$, $k \in \mathbb{N}$, $h \in (0, 1)$.

Для этих классов функций известны следующие результаты Э.В.Селимханова:

Теорема 1. *Пусть* $r \in \mathbb{Z}_+$, $n, k \in \mathbb{N}$, $h \in (0,1)$. *Тогда для любой* $f \in H^r(A)$ *имеет место неравенство:*

$$E_{n-1}(f) \le \lambda_n^{-r}\big(1-\varphi_n(h)\big)^{-k}\Omega_k(A^r f, h),$$

причём при каждом фиксированном n *константу в правой части неравенства уменьшить нельзя.*

Теорема 2. *При любых* $r \in \mathbb{Z}_+$, $n, k \in \mathbb{N}$, $h \in (0,1)$ *и для произвольной* $f \in H^r(A)$ *имеет место неравенство:*

$$E_{n-1}(f) \le \lambda_n^{-r}\left(1-\frac{1}{h}\int\limits_0^h \varphi_n(t)dt\right)^{-k}\left(\frac{1}{h}\int\limits_0^h \Omega_k^{1/k}(f,t)dt\right)^k,$$

где, как и выше, при каждом фиксированном n *константу в правой части неравенства уменьшить нельзя.*

Теорема 3. *Пусть* $n, k \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ *и* $h \in (0,1)$. *Тогда справедливы следующие равенства, точные значения* n*-поперечников вышеприведенных классов векторов* $W^{(r)}(A)$, $W_k^{(r)}(A,\Phi)$, $W_k^{(r)}(A)$:

$$\gamma_n\big(W^{(r)}(A), H\big) = \frac{1}{\lambda_n^r},$$

$$\gamma_n\big(W_k^{(r)}(A,\Phi), H\big) = \frac{\Phi(h)}{\lambda_n^r\big(1-\varphi_n(h)\big)},$$

$$\gamma_n\big(W_k^{(r)}(A), H\big) = \frac{1}{\lambda_n^r}\left(1-\frac{1}{h}\int\limits_0^h \varphi_n(t)dt\right)^{-k},$$

где $\gamma_n(\mathfrak{M})$ — *любой из* n*-поперечников множества Бернштейна* $b_n(\cdot)$, *Колмогорова* $d_n(\cdot)$, *Гельфанда* $d^n(\cdot)$, *линейного* $\delta_n(\cdot)$ *и проекционного* $\Phi_n(\cdot)$.

Теоремы 1–3 являются одними из самых простейших теорем для классов векторов в гильбертовом пространстве H, а потому возникает задача обобщения этих теорем на различные классы функций в более общих пространствах. В связи с этим в третьем параграфе второй главы для класса $H^r(A)$ доказываются теоремы 2.3.1 – 2.3.2, обобщающие, с одной стороны, соответствующие теоремы 2.2.1 – 2.2.2 второго параграфа (случай, когда $\varphi_n(t) = (1-t)^n$, $t \in (0,1)$), а с другой — сформулированную теорему 1 Э.В.Селимханова. Особое внимание следует уделить теореме 2.3.3, в которой доказывается неравенство типа Колмогорова:

$$\|A^s f\| \leq \|f\|^{1-s/r} \|A^r f\|^{s/r},$$

справедливое для произвольного симметричного оператора A, причём полученное неравенство является неулучшаемым и обращается в равенство на функции $f_0 \in H^{(r)}(A)$.

В частности, из неравенства Колмогорова вытекает следующее неравенство для наилучшего приближения величин $A^s f$, f и $A^r f$ $(0 < s < r)$:

$$E_{n-1}\big(A^s f\big) \leq \big(E_{n-1}(f)\big)^{1-s/r} \big(E_{n-1}(A^r f)\big)^{s/r},$$

из которого для класса $W^{(r)}(A)$ непосредственно следует теорема 2.3.4.

Более общие теоремы, обобщающие результаты теорем 2 и 3, получены в четвёртом параграфе второй главы, где доказываются общие теоремы 2.4.1 и 2.4.2, связанные с усреднённым значением L_p-модуля непрерывности $\Omega_m^p(A^r f, t)$ для всех $0 < p < \infty$. Из доказанной теоремы 2.4.1 в качестве следствия устанавливается неравенство типа Джексона–Стечкина

$$E_{n-1}(A^s f) \le C(n,m,r,s;\varphi_n)\frac{1}{\lambda_n^{r-s}}\Omega_m\left(A^r f;\frac{1}{n}\right)$$

для последовательности операторов $A^s f$.

В теореме 2.4.2 для произвольных чисел $m,n\in\mathbb{N}$, $r,s\in\mathbb{Z}_+$, $r\ge s$, $0<p\le\infty$, $h\in(0,1)$ и весовой функции $q(t)$ на отрезке $[0,h]$ доказано экстремальное равенство

$$\sup_{f\in H^{(r)}(A)}\frac{\lambda_n^{r-s}\cdot E_{n-1}(A^s f)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(A^r f;t)q(t)dt\right)^{1/p}}=$$

$$=\left(\int\limits_0^h (1-\varphi_n(t))^{mp}q(t)dt\right)^{-1/p}.$$

Из этого равенства, при различных конкретных значениях параметра p и весовой функции $q(t)$, вытекают все ранее известные результаты, в том числе обобщения теоремы 2.

Рассмотрим некоторые примеры гильбертовых пространств H симметричных операторов $A:H\to H$, к которым в конце третьего параграфа второй главы применяются теоремы 2.3.1 − 2.3.4 и 2.4.–2.4.2, причём приводимые здесь обозначения операторов и гильбертовых пространств являются общепринятыми (смотрите, например, монографию [36, с.117, 170, 221]):

I. $H:=L_2[(0,1),xdx]$, $\mathscr{B}:=-\dfrac{d}{dx}\left(x\dfrac{d}{dx}\right)-\dfrac{\nu^2}{x}$, $\lambda_n=\mu_n^2$; $f_n(x):=J_\nu(\mu_n x)$, $\nu>-1$, $n\in\mathbb{Z}_+$ — система функций Бесселя, $\mathscr{B}$ — оператор Бесселя, μ_n — положительные корни уравнения $J_\nu(x)=0$. В этом случае, в частности, мы получаем результаты В.А.Абилова, Ф.В.Абиловой и М.К.Керимова [12], а также В.С.Селимханова [33, 34].

II. $H := L_2(\mathbb{R}, e^{-x^2})$, $\mathscr{H} := -e^{x^2}\dfrac{d}{dx}\left(e^{-x^2}\dfrac{d}{dx}\right)$, $\lambda_n = 2n$,

$\varphi_n(t) = (1-t^2)^{n/2}$ или $\varphi_n(t) = e^{-nh}$

$$f_n(t) = H_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n!2^n\sqrt{\pi}}} \cdot e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right),\ n \in \mathbb{Z}_+$$

— система полиномов Чебышева–Эрмита.

В этом случае из приведённых во втором параграфе теорем 2.3.1–2.3.4, 2.4.1–2.4.3 мы получаем все результаты С.Б.Вакарчука [17], С.Б.Вакарчука и А.В.Швачко [19], В.А.Абилова и Ф.В.Абиловой [8, 11].

III. $H := L_2(\mathbb{R}_+, e^{-x}x^{\alpha})$, $\boldsymbol{\mathcal{L}} := -e^x x^{-\alpha} \cdot \dfrac{d^n}{dx^n}\left(x^{\alpha+1}e^{-x}\right),\ n \in \mathbb{Z}_+,$

$$f_n(t) := L_n^{(\alpha)}(t) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n!\Gamma(\alpha+n+1)}} \cdot x^{-\alpha}e^x\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{\alpha+1}e^{-x}\right),\ \lambda_n = n$$

— система полиномов Чебышева–Лагерра.

IV. $H := L_2[-1,1]$, $\boldsymbol{\mathcal{L}} := \dfrac{d}{dx}\left((1-x^2)\dfrac{d}{dx}\right)$, $\lambda_n = n(n+1)$,

$$f_n(t) := P_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \cdot \frac{n!}{(2n)!} \cdot \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n,\ n \in \mathbb{N}$$

— система многочленов Лежандра.

V. $H := L_2[0, 2\pi]$, $T := \dfrac{1}{i} \cdot \dfrac{d}{dx}$, $\lambda_n = n$,

$$f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx},\quad n \in \mathbb{N},\ \varphi_n(t) = (1-t)^n,\ t \in (0,1)$$

— тригонометрическая система функций.

VI. $H := L_2(p_{\alpha,\beta}; (-1,1))$, $p_{\alpha,\beta}(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta},\ \alpha, \beta > -1,$

$$\mathcal{J}_{\alpha,\beta} := (1-x^2)\frac{d^2}{dx^2} + \left[\beta - \alpha - (\alpha+\beta+2)x\right]\frac{d}{dx},$$

$$\lambda_n := n(n+\alpha+\beta+1), \quad \varphi_n(t) = (1-t)^n,$$

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) := \frac{(-1)^n}{2^n \cdot n!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}\right]$$

— система многочленов Якоби.

Из полученных в параграфах 2.3 и 2.4 теорем для всех систем специальных функций и конкретных классических полиномов I–VI получаем точные результаты, из которых как частные случаи следуют соответствующие ранее известные факты.

В пятом параграфе второй главы для всех перечисленных ранее классов функций, а также новых классов функций $W^{(r)}(A)$, $W_m^{(r)}(A,\Phi)$, $W_p^{(r)}(\Omega_m, q)$ вычисляются точные значения всех перечисленных в данном параграфе n-поперечников классов функций в гильбертовом пространстве H. Доказываются теоремы 2.5.1 – 2.5.3 в общем случае, а затем приводится их применение к конкретным системам функций I–VI, как следствие содержащих известные результаты С.Б.Вакарчука [19], С.Б.Вакарчука и А.В.Швачко [17] и К.Тухлиева [40].

В третьей главе работы найдены точные верхние грани наилучших приближений суммами Фурье по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля на некоторые их применения, опирающиеся на основные результаты второй главы (теоремы 2.4.1 – 2.4.4 и их следствия).

Второй параграф третьей главы посвящён применению $\mathscr{K}$-функционалов в экстремальных задачах, рассматриваемых в диссертационной работе.

В теореме 3.2.1 доказано, что при любых $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ имеет место равенство

$$\sup\left\{\lambda_n^r E_{n-1}(f)\cdot\big(\mathscr{K}_m(\mathcal{D}^r f,1/\lambda_n^m)\big)^{-1}: f\in L_2^{(r)}\right\}=1.$$

Последнее равенство является наиболее общим результатом, опираясь на который в теореме 3.2.2 для класса

$$W^{(r)}(\mathscr{K}_m,\Phi):=\left\{f\in L_2^{(r)}:\mathscr{K}_m(\mathcal{D}^r f,t^m)\le\Phi(t^m)\right\}$$

найдены точные значения всех ранее перечисленных n-поперечников и далее в следствии 3.2.1 для полиномов Чебышева–Эрмита, Чебышева–Лагерра и полиномов Эрмита конкретизируется результат теоремы 3.2.2.

В завершающем третьем параграфе третьей главы в качестве иллюстрации приведено применение теорем 2.3 и 2.4 к вопросу наилучшего совместного приближения специальных функций математической физики (функции Бесселя – теоремы 3.3.1 – 3.3.3, из которых в случае $s=0$, $0<p\le 2$ вытекают ранее доказанные результаты К.Тухлиева [40]) и классических ортогональных полиномов (Лежандра – теоремы 3.3.4 – 3.3.6, Чебышева–Эрмита – теоремы 3.3.7 – 3.3.9, Чебышева–Лагерра – теоремы 3.3.10 – 3.3.12, Якоби – теоремы 3.3.13 – 3.3.15).

Выводы

Основные научные результаты диссертационной работы заключаются в следующем:

- найдены точные значения верхних граней наилучших приближений некоторых классов векторов суммами Фурье по произвольной ортонормированной системе векторов [1-А, 4-А, 5-А, 7-А, 8-А];
- найдены точные константы в неравенствах типа Джексона–Стечкина между величиной наилучшего приближения векторов $f \in H^r$ и характеристикой гладкости Ω_m [2-А, 3-А, 8-А, 11-А];
- найдены точные значения n-поперечников некоторых классов векторов в гильбертовом пространстве H [2-А, 3-А, 6-А];
- найдены точные значения верхних граней наилучших приближений суммами Фурье по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля на некоторых классах функций, характеризующихся обобщённым модулем непрерывности [3-А, 4-А, 5-А, 10-А, 11-А];
- найдены точные неравенства типа Джексона–Стечкина, в которых величины наилучших приближений оцениваются сверху как через обобщённый модуль непрерывности, так и через $\mathscr{K}$-функционалы r-ых производных [2-А, 6-А, 9-А].

Рекомендации по практическому использованию результатов

Полученные в диссертационной работе результаты имеют теоретическое значение и могут быть применены при нахождении точных верхних граней наилучших приближений классов функций многих переменных. Главы диссертации в отдельности могут быть использованы при чтении специальных курсов для студентов старших курсов высших учебных заведений по специальности “Математика” и “Прикладная математика”.

Список литературы

А) Список использованных источников

[1] Абилов В.А. О наилучшем приближении функций алгебраическими многочленами // Докл. АН. – 1997. – Т.337. – №2. – С.151–152.

[2] Абилова Ф. В. О наилучшем приближении функций алгебраическими многочленами в среднем // Доклады Болгарской АН. 1993. – Т.46. – №12. – С.9–11.

[3] Абилова Ф.В. Некоторые вопросы приближения функций суммами Фурье–Чебышева // В сборнике: Мухтаровские чтения: актуальные проблемы математики, методики ее преподавания и смежные вопросы. Сборник трудов международной научной конференции, посвященной 50-летию ДГТУ. Махачкала. – 2022. – С.5–8.

[4] Абилов В.А., Абилова Ф.В. О наилучшем приближении функций алгебраическими многочленами в среднем // Известия высших учебных заведений. Математика. – 1997. – №3. – С.40–49.

[5] Абилов В.А., Абилова Ф.В. Приближение функций суммами Фурье–Бесселя // Изв. вузов. Математика. – 2001. – №8. – С. 3–9.

[6] Абилов В.А., Абилова Ф.В. Некоторые вопросы приближения 2π-периодических функций суммами Фурье в пространстве $L_2(2\pi)$ // Матем. заметки. – 2004. – Т. 76. – № 6. – С. 803–811.

[7] Абилов М.В., Айгунов Г.А. Некоторые вопросы приближения функций многих переменных суммами Фурье в пространстве $L_2((a,b)^n;p(x))$ // УМН. – 2004. – Т.59. – Вып. 6. – С.201–202.

[8] Абилов В.А., Абилова Ф.В. Некоторые вопросы приближения функций суммами Фурье–Эрмита в пространстве $L_2(\mathbb{R};e^{-x^2})$ // Изв. вузов. Матемаtкиа. – 2006. – №1. – С. 3–12.

[9] Абилов В.А., Абилова Ф.В., Керимов М.К. Некоторые вопросы приближения функций суммами Фурье–Бесселя // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2013. – Т.53. – №7. – С.1051–1057.

[10] Абилов В.А., Абилова Ф.В., Керимов М.К. Точные оценки скорости сходимости рядов Фурье по классическим многочленам // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2015. – Т.55. – №7. – С.1109–1117.

[11] Абилов В.А., Абилова Ф.В., Керимов М.К. Точные оценки скорости сходимости рядов Фурье по ортогональным многочленам в пространстве $L_2((a,b),p(x))$ // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2009. – Т.49. – №6. – С.966–980.

[12] Абилов В.А., Абилова Ф.В., Керимов М.К. Точные оценки скорости сходимости рядов Фурье–Беселля // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2015. – Т.55. – №6. – С.917–927.

[13] Абилова Ф.В., Керимов М.К., Селимханов Э.В. О некоторых оценках наилучших приближений функций двух переменных суммами Фурье–Якоби в среднем // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2017. – Т.57. – № 10. – С.1581–1599.

[14] Абилова Ф.В., Селимханов Э.В. Точные оценки скорости сходимости рядов Фурье двух переменных и их приложения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2018. – Т.58. – №10. – С.1596–1605.

[15] Алексеев Д.В. Приближение полиномами с весом Чебышева–Эрмита на действительной оси // Вестн. Моск. ун-та. Математика. механика. – 1997. – №6. – С.68–71.

[16] Вакарчук С.Б. О K-функционалах и точных значениях n-поперечников некоторых классов в пространствах $C(2\pi)$ и $L_1(2\pi)$ // Матем. заметки. – 2002. – Т. 71. – № 5. – С. 522–531.

[17] Вакарчук С.Б. Приближение функций в среднем на вещественной оси алгебраическими полиномами с весом Чебышева–Эрмита и поперечники функциональных классов // Матем. заметки. – 2014. – Т.95. – №5. – С.666–684.

[18] Вакарчук С.Б., Забутная В.И. Точное неравенство типа Джексона-Стечкина в L_2 и поперечники функциональных классов // Матем. заметки. – 2009. – Т.86. – №3. – С.328–336.

[19] Вакарчук С.Б., Швачко А.В. О наилучшей аппроксимации в среднем алгебраическими полиномами с весом и точных значениях поперечников классов функций // Укр. матем. журнал. – 2013. – Т.65. – №12. – С.1604–1621.

[20] Владимиров В.С. Уравнение математической физики // М.: Наука. – 1976. – 527 с.

[21] Даугавет И.К. Ведение в теорию приближения функций // Л.: Ленингр. гос. ун-т. – 1977. – 184 С.

[22] Корнейчук Н.П. Экстремальные значения функционалов и наилучшее приближение на классах периодических функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1971. – Т.35. №1. – С.93–124.

[23] Корнейчук Н.П. Экстремальные задачи теория приближения // М.: Наука. – 1976.

[24] Керимов М.К., Селимханов В.Э. О точных оценках скорости сходимости рядов Фурье для функций одной переменной в пространстве // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2016. – Т.56. – №5. – С.730–741.

[25] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа // М.: Наука. – 1978. – 543 с.

[26] Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения // М.: Наука. – 1977.

[27] Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Специальные функции математической физики // М.: Наука. – 1978. – 320 С.

[28] Потапов М.К. О применении одного оператора обобщенного сдвига в теории приближений // Вестн. Моск. ун-та. Математика. Механика. – 1998. – №3. – С.38–48.

[29] Рафальсон С.З. Наилучшее приближение функций в метриках $L^2_{p(x)}$ алгебраическими многочленами и коэффициенты Фурье по ортогональным многочленам. // Вестник ЛГУ. Механика и математика. – 1969. – №7. – С.68–79.

[30] Рафальсон С.З. О приближении функций в среднем суммами Фурье–Эрмита. // Известия вузов. Матем. – 1968. – №74. – С.78–84.

[31] Сегё Г. Ортогональные многочлены // М.: Физматлит. – 1962. – 500 с.

[32] Селимханов Э.В., Абилова Ф.В. Точные оценки скорости сходимости ряда Фурье в гильбертовом пространстве // Вестник науки и образования. – 2019. – №9 (63). – С.5–13.

[33] Селимханов Э.В. Точные оценки скорости сходимости ряда Фурье по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля // Вестник науки и образования. – 2018. №3 (39). – С.5–13.

[34] Селимханов Э.В. Точные оценки скорости сходимости двойных рядов Фурье по произвольным ортогональным системам // Проблемы современной науки и образования. – 2018. – Т.124. – №4. – С.17–28.

[35] Селимханов Э.В., Абилова Ф.В. Точные оценки скорости сходимости ряда Фурье по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля // Вестник науки и образования. – 2018. – №9 (39). – С.5–8.

[36] Суетин П.К. Классические ортогональные полиномы // М. Наука. – 1979.

[37] Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений // МГУ. – 1976. – 325 С.

[38] Тихомиров В.М. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики // М.: Наука. – 1987. – Т.14. – 271 с.

[39] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики // М.: Наука. – 1966. – 725 с.

[40] Тухлиев К. Среднеквадратическое приближение функции рядами Фурье-Бесселя и значения поперечников некоторых функциональных классов // Чебышевский сборник. – 2016. – Т.17. – №4. – С.141–156.

[41] Тухлиев К., Туйчиев А.М. Среднеквадратическое приближение функций на всей оси с весом Чебышева–Эрмита алгебраическими полиномами // Тр. ИММ УрО РАН. – 2020. – Т.26. – №2. – С.270–277.

[42] Федоров В.М. Приближение алгебраическими многочленами с весом Чебышева–Эрмита // Изв. вузов. Математика. – 1984. №6. – С.55–63.

[43] Шабозов М.Ш., Тухлиев К. K-функционалы и точные значения n-поперечников некоторых классов функций в пространстве $L_2((1-x^2)^{-1/2};[-1,1])$ // Изв. ТулГу. – 2014. – №1. Ч.1. – С.83–97.

[44] Шабозов М.Ш., Тухлиев К. Неравенства Джексона–Стечкина с обобщёнными модулями непрерывности и поперечники некоторых классов функций // Тр. ИММ УрО РАН. – 2015. – Т.21. – №4. – С.292–308.

[45] Шабозов М.Ш., Муродов К.Н. О точных неравенствах при приближении двойных сумм Фурье-Бесселя // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. – 2019. – Т.62. – №5-6. – С.270–279.

[46] Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 некоторых классов 2π-периодических функций и точные значения их поперечников // Матем. заметки. – 2011. – Т.90. – №5. – С.764–775.

[47] Шевчук И.А. Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций // Киев: Наукова думка. – 1992. – 225 С.

[48] Шилов Г.А. Введение в теорию линейных пространств // М.: Л. – 1952. – 428 С.

[49] Abilov B.A. On the best approximation of functions of many variables by algebraic polynomials // East Journal on approx. – 1996. – Vol.2. – no 4. – PP.477–497.

[50] Abilov V.A., Abilov M.V. Certain problems of the approximation of functions in two variables by Fourier-Hermite sums in the space $L_2(\mathbb{R}^2; e^{-x^2-y^2})$ // Analysis Mathematica. – 2006. (32). – PP.163–171.

[51] Abilov V.A., Abilova F.V., Abilov M.V. Some problems of the approximation of functions by «hyperbolic» Fourier-Hermite sums in the space $L_2(\mathbb{R}^2; e^{-x^2-y^2})$ // Analysis Mathematica. – 2013. (39). – P.247–257.

[52] Abilov M.V., Kerimov M.K., Selimkhanov E.V. On some estimates for best approximations of bivariate functions by Fourier–Jacobi sums in the mean // Comput. Math. Math. Phys. – 2017. – Vol.57. – no 10. – PP.1559–1576.

[53] Abilov V.A., Selimkhanov E.V. Sharp estimates for the convergence rate of Fourier series in two variables and their applications // Comput. Math. Math. Phys. – 2018. – Vol.58, – № 10. – PP.1545–1551.

[54] Kerimov M.K., Selimkhanov E.V. On exact estimates of the convergence rate of Fourier series for functions of one variable in the space $L_2[-\pi, \pi]$ // Comput. Math. Math. Phys. – 2016. — Vol.56. – № 5. – PP.717–729.

[55] Butzer P.L., Dyckhoff H., Görlich E., Stens R.L. Best trigonometric approximation, functional order derivatives and Lipschitz classes // Canad. J. Math. – 1977. – V.29. – №4. – PP.781–793.

[56] Pinkus A. n-Widths by Approximation Theory // Berlin: Springer. 1985.

[57] Peetre J. On the connection between the theory of interpolation space and approximation theory // In: Proc. Intern. Conf. Constructive Function Theory. Varna. – 1970. – PP.351–363. Sofia: Bulg. Acad. Sci.1972.

Б) РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. В журналах, входящих в перечень ВАК при Президенте Республики Таджикистан

[3-А] Кодиров Д.А. Верхние грани наилучших приближений некоторых классов векторов суммами Фурье по ортонормированной системе векторов в гильбертовом пространстве [Текст] / Д.А.Кодиров // Доклады НАН Таджикистана. – 2021. – Т.64. – №9-10. – С.508–515.

[2-А] Кодиров Д.А. Наилучшие приближения функций рядами Фурье по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля в L_2 [Текст] / Д.А.Кодиров // Известия НАН Таджикистана. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н. – 2022. – №4 (189). – С.35–46.

[1-А] Кодиров Д.А. О наилучшем приближении функций рядами Фурье по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля в L_2 и некоторые применения к специальным функциям [Текст] / Д.А.Кодиров // Доклады НАН Таджикистана. – 2023. – Т.66. – №7-8. – С.379–392.

2. В других изданиях:

[4-А] Кодиров Д.А. Верхние грани наилучшего приближения некоторых классов векторов суммами Фурье по ортонормированной системе векторов в гильбертовом пространстве [Текст] / Д.А.Кодиров // Материалы международной конференции „*Актуальные проблемы современной математики*”, посвященной 80-летию со дня рождения доктора физико-математических наук, профессора Т.Собирова (Душанбе, 25-26 июня 2021 г.). – С.121–123.

[5-А] Кодиров Д.А. Верхние грани наилучших приближений некоторых классов векторов суммами Фурье по ортонормированной системе векторов в гильбертовом пространстве [Текст] / Д.А.Кодиров // Материалы республиканской научно-практической конференции „*Современные проблемы прикладной математики и их роль в формировании технического мировоззрения общества*”, посвященной 30-летию Государственной независимости Республики Таджикистан и «Двадцатлетию изучения и развития естественных, точных и математических наук» (Худжанд, 2021 г.). – С.43–45.

[6-А] Кодиров Д.А. Наилучшие приближения функций рядами Фурье по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля в пространстве L_2 [Текст] / Д.А.Кодиров // Материалы международной научной конференции „*Современные проблемы математического анализа и теории функций*”, посвященной 70-летию академика НАН Таджикистана М.Ш.Шабозова. (Душанбе, 24-25 июня 2022 г.). – С.78–81.

[7-А] Кодиров Д.А. О наилучшем совместном приближении функций рядами Фурье по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля в L_2 [Текст] / М.Ш.Шабозов, Д.А.Кодиров // Материалы международной научной конференции „*Современные проблемы математики и её приложения*”, посвященной Двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических наук (Душанбе, 27 мая 2022 г.). – С.4–8.

[8-А] Кодиров Д.А. Наилучшее приближение некоторых классов векторов суммами Фурье по произвольной ортонормированной системе векторов в гильбертовом пространстве [Текст] / Д.А.Кодиров // Материалы республиканский научно-практической конференции „*Актуальные проблемы и перспективы развития естественных и точных наук*”, (Душанбе, 28-29 октября 2022 г.). – С.32–35.

[9-А] Кодиров Д.А. Приближение функций рядами Фурье по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля в L_2 [Текст] / Д.А.Кодиров // Материалы международной конференции „*Современные проблемы математики*”, посвященной 50-летию Института математики им. А.Джураева Национальной академии наук Таджикистана. (Душанбе, 26-27 мая 2023 г.). – С.101–104.

[10-А] Кодиров Д.А. О наилучших приближениях некоторых классов векторов суммами Фурье по произвольной ортонормированной системе векторов в гильбертовом пространстве [Текст] / Д.А.Кодиров // Материалы международной научно-практической конференции „*Современные проблемы математики и её преподавания*”, посвященной 35-летию Государственной независимости Республики Таджикистан, 30-летию Конституции Республики Таджикистан, «Двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических наук в сфере науки и образования» и 70-летию доктора физико-математических наук К.Тухлиева. (Худжанд, 21-22 июня 2024 г.). – С.42–45.

[11-А] Кодиров Д.А. Наилучшее приближение функций рядами Фурье по собственным функциям в L_2 [Текст] / Д.А.Кодиров // Материалы международной научно-практической конференции „*Математика в современном мире*”, посвященной Двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических дисциплин в области науки и образования и 70-летию доктора физико-математических наук С.Байзоева (Худжанд, 20 апреля 2024 г.). – С.156–160.