ҶУМҲУРИИ ТОҶИКИСТОН
ДОНИШГОҲИ МИЛЛИИ ТОҶИКИСТОН

ТДУ 517.956.32: 517.977.56

Бо ҳуқуқи дастнавис

Раҳматуллоҳзода Файзуллоҳ Раҳматулло

ТАҲҚИҚИ МАСЪАЛАҲОИ ИДОРАКУНИИ САРҲАДИИ ТАРКИБӢ БАРОИ РАВАНДҲОЕ, КИ БО МУОДИЛАИ ТЕЛЕГРАФӢ БО КОЭФФИТСИЕНТИ ТАҒЙИРЁБАНДА ТАВСИФ МЕЁБАНД

ДИССЕРТАТСИЯ

барои дарёфти дараҷаи илмии доктори фалсафа (PhD) – доктор
аз рӯйи ихтисоси 6D060100 – Математика (6D060103 – Муодилаҳои дифференсиалӣ, системаҳои динамикӣ ва идоракунии оптималӣ)

Роҳбари илмӣ:
доктори илмҳои физикаю математика,
дотсент, мудири кафедраи математикаи
ҳисоббарорӣ ва механикаи ДМТ
Абдукаримов М.Ф.

Душанбе – 2026

МУНДАРИҶА

МУҚАДДИМА

Мубрамии мавзуи таҳқиқот. Ин рисолаи диссертатсионӣ ба таҳқиқи масъалаҳои идоракунии сарҳадии таркибӣ барои равандҳое бахшида шудааст, ки бо муодилаи якченакаи телеграфӣ бо коэффитсиенти тағйирёбанда тавсиф меёбанд. Таваҷҷуҳи асосӣ ба масъалаҳои мавҷудият ва ягона будани ҳалли масъалаҳои баррасишавандаи идоракунии сарҳадӣ дар фосилаи хурдтарини вақт равона гардидааст.

Чунин муодилаҳо ва гузоришҳои масъалаҳои идоракунӣ ҳангоми тавсифи математикии як қатор равандҳои муҳими физикӣ ба миён меоянд, аз ҷумла ҳангоми омӯзиши паҳншавии мавҷҳои электромагнитӣ дар хатҳои дароз, таҳлили динамикаи ҳаракати нафт ё газ дар қубурҳо, инчунин ҳангоми тадқиқи паҳншавии мавҷҳо дар муҳитҳои геологӣ.

Гузориши математикии масъалаи идоракунии сарҳадӣ ба воситаи масъалаҳои ибтидоӣ – сарҳадӣ барои муодилае, ки раванди баррасишавандаро тавсиф мекунад, ифода меёбад.

Ин самти мубрамӣ ва босуръат рушдёбандаи назарияи идоракунӣ ва назарияи масъалаҳои сарҳадӣ барои муодилаҳои дифференсиалӣ буда, таваҷҷуҳи як қатор мутахассисони маъруфро дар ин соҳаҳо ҷалб намудааст.

Дараҷаи коркардшудаи мавзуи таҳқиқот. Соли 1988 Ж.Л. Лионс масъалаи идоракунии сарҳадии лапишҳоро дар шакли масъалаҳои омехта барои муодилаи мавҷӣ мавриди омӯзиш қарор дод. Дар мақолаи ӯ [4] масъалаи оромсозӣ (яъне овардани системаи лапиш ба ҳолати сифрии додаҳои Коши) бо шартҳои сарҳадии Дирихле таҳқиқ шудааст. Дар ҳамин кор бо истифода аз назарияи фазоҳои гилбертӣ ягона набудани ҳалли масъалаи ҳосилшуда ҳангоми $T > 2l$, ки дар он l - дарозии тор ва T-лаҳзаи вақт мебошад, бо маънои ҳалли умумишуда аз синфи L_2 исбот гардидааст.

Дар корҳои Е. Зуазуа [9–10] ғояи Лионс барои ҳолати муодилаи квазихаттии мавҷӣ бо асимптотикаи хаттии ғайрихаттӣ умумӣ гардонида шудааст.

Дар корҳои А.Г. Бутковский ва А.Я. Лернер [38], [39] усулҳои ҳалли масъалаҳои идоракунии оптималии системаҳои хаттӣ бо параметрҳои тақсимшуда бо истифода аз *L*-проблемаи моментҳо баён шудаанд.

Дар монографияи А.Г. Бутковский [40] масъалаи идоракунии сарҳадӣ бо ёрии методи Фурйе ва методи моментҳо таҳқиқ гардидааст. Бар замми ин, идоракунии сарҳадии ҷустуҷӯшаванда дар шакли қаторҳои Фурйе сохта шудааст.

Дар кори А.Е. Егоров [49] барои ҳалли конструктивии (самараноки) масъалаи идоракунии сарҳадӣ усули мавҷҳои афтанда ва инъикосёбанда истифода шудааст. Дар монографияи ӯ [50] самтҳои асосии назарияи муосири математикии идоракунӣ баррасӣ мешаванд, аз ҷумла: амсиласозии математикии системаҳои идорашаванда; асосҳои назарияи устувории системаҳои ғайрихаттӣ ва идорашаванда; лапишҳои даврии системаҳои ғайрихаттӣ; асосҳои назарияи идорашавандагӣ; мушоҳидашавӣ ва идентификатсия; усулҳои назарияи идоракунии оптималӣ; инчунин унсурҳои назарияи системаҳои стохастикии (эҳтимолии) идорашаванда. Дар ин кор системаҳо ҳам бо параметрҳои мутамарказ ва ҳам бо параметрҳои тақсимшуда баррасӣ мегарданд. Корҳои муштараки ӯ бо Л.Н. Знаменская [51]–[53] низ ба ҳамин мавзуъ бахшида шуда, масъалаҳои гуногуни идоракунӣ, мушоҳидакунӣ ва идоракунии оптималиро дар бар мегиранд.

Дар мақолаи Ф.П. Василев [43] тафсири назарияи дугона дар масъалаҳои хаттии идоракунӣ ва мушоҳидакунӣ пешниҳод шудааст. Ҳалли масъалаҳои идоракунии сарҳадии равандҳои мавҷӣ бо усулҳои функсионалӣ, инчунин дар корҳои муштараки ӯ бо М.М. Потапов, А.В. Разгулин ва М.А. Куржанский мавриди таҳқиқ қарор гирифтааст, ки дар онҳо алгоритмҳои самараноки ададӣ барои ёфтани идоракунии сарҳадии ҷустуҷӯшаванда сохта шудаанд [41], [42], [44]. Ба усулҳои тақрибии ҳалли масъалаҳои идоракунии сарҳадӣ барои муодилаи мавҷӣ, инчунин корҳои М.М. Потапов ва шогирдони ӯ А.А.Дряженков ва Д.А. Иванов [123]–[127], [47], [48], [58], [59] бахшида шудаанд.

Дар кори В.А. Илйин [62] бори аввал барои ҳар як T аз фосилаи $0 < T < l$ шартҳои зарурӣ ва кифоягии мавҷудияти ҳал муқаррар карда шуда, инчунин шакли ошкори идоракуниҳои сарҳадӣ тавассути ҷойивазкунӣ дар ду канор нишон дода шудааст. Барои ҳолати $T > l$ (дақиқтараш, барои ҳолати $l < T \leq 2l$) шакли умумии идоракуниҳои сарҳадӣ оварда шудааст, ки ду доимии ихтиёрӣ ва чор функсияи ихтиёриро аз синфи W_2^2 дар порча аз рӯйи тағйирёбандаи t бо дарозии $T - l$ дар бар мегирад. Ин идоракуниҳо гузариши раванди мавҷиро, ки бо муодилаи мавҷии якҷинса тавсиф меёбад:

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0, \qquad 0 < x < l,\ \ 0 < t < T, \qquad (1)$$

аз ҳолати ибтидоии ихтиёрӣ $\{u(x,0) = \varphi(x), u(x,0) = \varphi(x)\}$ ба ҳолати ниҳоии пешакӣ додашудаи $\{u(x,T) = \varphi_1(x), u_t(x,T) = \psi_1(x)\}$ таъмин менамоянд.

Дар ин кор ҳангоми омӯзиши масъала нақши муҳимро синфи $\widehat{W}_2^2[(0 \leq x \leq l) \times (0 \leq t \leq T)]$ мебозад, ки бори аввал маҳз дар ҳамин кор аз ҷониби В.А. Илйин ворид гардидааст. Муайян карда шудааст, ки ҳолати $T = l$ барои масъалаи идоракунии сарҳадӣ тавассути ҷойивазкунӣ дар ду канор ҳолати критикӣ мебошад, яъне фосилаи вақти $0 \leq t \leq l$ минималӣ буда, идорашавандагии пурраи раванди баррасишавандаро ҳангоми маҳдудиятҳои минималӣ ба шартҳои ибтидоӣ ва ниҳоӣ таъмин менамояд. Натиҷаи монанд аз ҷониби В.А. Илйин ҳамчунин барои ҳолате ба даст оварда шудааст, ки идоракунӣ танҳо дар як сарҳади тор амал карда, сарҳади дуюм мустаҳкам карда шудааст [64]. Нишон дода шудааст, ки дар ин маврид лаҳзаи критикии вақт $T = 2l$ мебошад.

Дар корҳои [65], [66] В.А. Илйин масъалаҳои идоракунии сарҳадиро бо маънои ҳалли умумишудаи муодилаи (1) аз синфе таҳқиқ намудааст, ки мавҷудияти энергияи ниҳоиро ба назар мегирад. Дар ин таҳқиқот ҳамаи масъалаҳое, ки қаблан аз ҷониби ӯ бо маънои ҳалли классикии муодилаи (1) баррасӣ шуда буданд, дар тафсири умумишуда мавриди омӯзиш қарор гирифтаанд.

Азбаски дар ҳолати лаҳзаи вақти T, ки аз қимати критикӣ зиёд аст, масъалаи идоракунии сарҳадӣ дорои шумораи беохири ҳалҳо мебошад, табиӣ аст, ки масъалаи ёфтани идоракунии оптималии сарҳадӣ ба миён меояд. Масалан, масъалаи ёфтани он идоракунӣ аз байни ҳамаи идоракуниҳои имконпазир, ки қимати минималӣ қабул кардани интеграли энергияи сарҳадиро таъмин менамояд. Маҳз ба ин масъала силсилаи корҳои муштараки В.А. Илйин ва Е.И. Моисеев [69]-[83] бахшида шудааст.

Дар мавзуи идоракунии сарҳадии равандҳое, ки бо муодилаи мавҷии (1) тавсиф мешаванд, барои масъалаҳои омехтаи локалӣ ва ҳам ғайрилокалӣ, В.А.Илйин, Е.И. Моисеев ва шогирдони онҳо: А.В. Беликов, Л.Н. Знаменская, А.А. Кулешов, П.В. Луференко, А.А. Никитин, П.А. Рево, А.М. Рогожников, В.В.Тихомиров, А.А. Фролов, А.А. Холомеева, Г.Д. Чабакаури як силсила корҳои назаррас нашр намудаанд [34], [55]-[57], [62], [84]-[87], [104]-[106], [112]-[115], [117]-[121], [130]-[134], [139]-[141], [144]-[147].

Дар кори муштараки В.А. Илйин ва Е.И. Моисеев [67] масъалаи идоракунии сарҳадӣ тавассути ҷойивазкунӣ дар сарҳади якум бо сарҳади дуюми мустаҳкамшуда барои раванде, ки бо муодилаи телеграфӣ тавсиф мешавад, дар лаҳзаи вақти критикӣ: $T = 2l$ баррасӣ шудааст:

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) + c^2 u(x,t) = 0, \quad 0 < x < l, \ 0 < t < T, c = const. \qquad (2)$$

Дар [68] ҳамин масъала барои ҳолате баррасӣ шудааст, ки идоракуниҳо дар ҳар ду сарҳад амал мекунанд.

Дар корҳои И.Н. Смирнов [136]-[138] масъалаи идоракунии сарҳадӣ тавассути ҷойивазкунӣ дар ду сарҳад барои муодилаи (2) таҳқиқ шудааст, дар ҳолате ки порчаи $[0, l]$ аз ду қисми алоҳида иборат буда, раванд дар онҳо дорои параметрҳои физикии гуногун мебошад. Дар ҳамин корҳои ӯ барои муодилаи (2), инчунин баъзе масъалаҳои омехтаи идоракунӣ барраси шудаанд.

Дар корҳои [67], [68] ва [136]-[138] барои идоракунии сарҳадии ҷустуҷӯшаванда шакли анлитикии ошкор, ки аз функсияҳои Бессел истифода мекунад, ёфта шудааст.

Дар кори В.А. Коморник [2] масъалаҳои идорашавандагӣ дар фосилаҳои вақти аз критикӣ калон барои муодилаи (2) ҳангоми бефосила ва ғайриманфӣ будани коэффитсиенти $q(x)$ таҳқиқ шудаанд.

Баъзе проблемаҳои назарияи масъалаҳои омехта, инчунин масъалаҳои идоракунии сарҳадӣ ва оптималӣ дар корҳои В.И. Агошков [25], Л.Д. Акуленко [26], А.А. Андреев [27], [28], А.Х. Аттаев [29], В. Р. Барсегян [30]-[33], А.В.Боровских [36], [37], А.А. Воронов [46], М. Исмати [94]–[97], А.З.Ишмухаметов [98], [99], Е. А. Козлова [100], Е. К. Костоусова [101], С.В.Лексина [108], [109], Ф.Е. Ломовсев [111], А. Манч [6], М.И. Мустафаев [7], А.И. Прилепко [128], [129], А.В. Фурсиков [143], О. Ю. Эмануилов [148], М.К.Юнуси [149], [150] ва дигарон низ баррасӣ шудаанд.

Дар ин диссертатсия масъалаҳои идоракунии сарҳадии таркибӣ барои муодилаи (2) бо коэффитсиенти тағйирёбандаи $q(x,t)$ ва тарафи рости $f(x,t)$ омӯхта мешаванд, яъне:

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) - q(x,t)u(x,t) = f(x,t). \qquad (2')$$

Ҳамаи масъалаҳо дар тафсири умумишуда баррасӣ мегарданд ва функсияҳои $q(x,t)$ ва $f(x,t)$ танҳо ба синфи L_2 тааллуқ доранд. Бояд қайд кард, ки масъалаҳои наздик, аввал барои коэффитсиенти ченшаванда ва маҳдуд, пас барои коэффитсиенти ҷамъшаванда, дар корҳои [11]-[24] ва [103] мавриди омӯзиш қарор гирифтаанд.

Таҳлили адабиёт нишон медиҳад, ки масъалаҳои идоракунии сарҳадӣ барои муодилаи (2') амалан кам омӯзиш ёфтаанд. Таҳлили нисбатан муфассали адабиёт дар боби 1-и ҳамин диссертатсия анҷом дода мешавад.

Робитаи таҳқиқот бо барномаҳо (лоиҳаҳо) ва мавзуъҳои илмӣ. Ин тадқиқоти диссертатсионӣ дар доираи иҷрои барномаи дурнамои кори илмӣ-таҳқиқотии кафедраи математикаи ҳисоббарорӣ ва механикаи факултети механикаю математикии Донишгоҳи Миллии Тоҷикистон барои солҳои 2021–2025 оид ба мавзуи: «Таҳқиқоти аналитикӣ, таҳлили сифатӣ ва ҳалли ададии масъалаҳои математикаи амалӣ ва механика» амалӣ карда шудааст (Роҳбари илмӣ: д.и.ф.-м., дотсент Абдукаримов М.Ф.).

ТАВСИФИ УМУМИИ ТАҲҚИҚОТ

Ҳадафи таҳқиқот. Ҳадафи асосии таҳқиқоти диссертатсионӣ таҳқиқи масъалаҳои идоракунии сарҳадии таркибӣ мебошад, ки тавассути ҷойивазкунӣ дар як канор ва қувваи чандирӣ дар сарҳади дигар, ё баръакс қувваи чандирӣ дар як канор ва ҷойивазкунӣ дар сарҳади дигар, барои муодилаи (2') амалӣ мешаванд.

Вазифаҳои таҳқиқот. Вазифаҳои асосии таҳқиқот иборатанд аз:

- таҳия ва исботи теоремаҳо оид ба ягонагӣ ва мавҷудияти ҳалли масъалаҳои омехтаи таркибӣ барои муодилаи телеграфии якченака бо коэффитсиенти тағйирёбанда;
- таҳия ва исботи теоремаҳо оид ба ягонагии ҳалли масъалаи идоракунии сарҳадии таркибӣ барои муодилаи телеграфии якченака бо коэффитсиенти тағйирёбанда;
- ёфтани шартҳои зарурӣ ва кифоягӣ барои мавҷудияти ҳалли масъалаҳои идоракунии сарҳадии таркибӣ барои муодилаи телеграфии якченака бо коэффитсиенти тағйирёбанда;
- асоснок кардани устувории ҳалли ҳамаи масъалаҳои таҳқиқшаванда;
- ҳалли масъалаи оптималии идоракунии сарҳадии таркибӣ барои муодилаи лапишҳои маҷбурии тор дар фосилаҳои вақти калон.

Объекти таҳқиқот. Муодилаи лапишҳои маҷбурии тор ва муодилаи телеграфии якченака бо коэффитсиенти тағйирёбанда.

Мавзуи таҳқиқот. Масъалаҳои омехта ва масъалаҳои идоракунии сарҳадии таркибӣ барои муодилаҳои баррасишаванда.

Усулҳои таҳқиқот. Дар кори мазкур аз усулҳои физикаи математикӣ, таҳлили функсионалӣ, назарияи муодилаҳои интегралии хаттии ҷинси дуюми намуди Волтера ва назарияи масъалаи идоракунии сарҳадӣ истифода шудаанд.

Навовариҳои илмии таҳқиқот. Ҳамаи натиҷаҳои диссертатсия нав мебошанд. Натиҷаҳои асосиро ба таври мухтасар номбар мекунем.

1. Теоремаҳо оид ба ҳалшавандагии масъалаҳои омехтаи таркибии мувофиқ барои муодилаи телеграфии якченака бо коэффисиенти тағйирёбанда исбот карда шудаанд;
2. Теоремаҳо оид ба ягонагии ҳалли масъалаҳои идоракунии сарҳадии таркибӣ барои муодилаи телеграфии якченака бо коэффитсиенти тағйирёбанда дар вақти хурд ё баробари критикӣ исбот карда шудаанд;
3. Теоремаҳо оид ба мавҷудияти ҳалли масъалаҳои идоракунии сарҳадии таркибӣ барои вақти критикӣ исбот карда шудаанд;
4. Устувории ҳалли ҳамаи масъалаҳои омехта ва идоракунии сарҳадии баррасишаванда нисбат ба ошӯби аддитивии $q(x,t)u(x,t)$ ва инчунин нисбат ба функсияҳои дар гузоришӣ масъала истифодашаванда асоснок карда шудааст;
5. Идоракуниҳои сарҳадии оптималии таркибӣ барои равандҳое, ки бо муодилаи лапишҳои маҷбурии тор тавсиф мешаванд, дар фосилаҳои вақти калон, ки қимати хурдтарин қабул кардани интеграли энергияи сарҳадиро таъмин менамоянд, ба даст оварда шудаанд.

Арзишҳои назариявӣ ва амалии таҳқиқот. Кор характери назариявӣ дорад. Натиҷаҳои он метавонанд ҳангоми омӯзиши курсҳои махсус барои донишҷӯёни курсҳои болоӣ, магистрантҳо ва докторантҳои PhD барои ихтисосҳои математика ва физика истифода шаванд.

Ҳамчунин, натиҷаҳои бадастомада метавонанд барои амсиласозии равандҳои гуногун, ки бо муодилаҳои баррасишаванда тавсиф мешаванд, истифода шаванд.

Нуктаҳое, ки ба ҳимоя пешниҳод мешаванд:

1. Теоремаҳо оид ба яккимата ҳалшавандагии масъалаҳои омехтаи мувофиқ барои муодилаи телеграфии якченака бо коэффитсиенти тағйирёбанда;
2. Теоремаҳо оид ба яккимата ҳалшавандагии масъалаҳои идоракунии сарҳадӣ, ки тавассути ҷойивазкунӣ (қувваи чандирӣ) дар як сарҳад ва қувваи чандирӣ (ҷойивазкунӣ) дар сарҳади дигар амалӣ мешаванд, барои муодилаи телеграфии якченака бо коэффитсиенти тағйирёбанда;
3. Теоремаҳо оид ба идоракуниҳои сарҳадии оптималии таркибӣ барои равандҳое, ки бо муодилаи лапишҳои маҷбурии тор тавсиф мешаванд, дар фосилаҳои вақти калон, ки қимати хурдтарин қабул кардани интеграли энергияи сарҳадиро таъмин менамоянд.

Дараҷаи эътимоднокии натиҷаҳои таҳқиқот. Эътимоднокии натиҷаҳои рисолаи диссертатсионӣ тавассути исботҳои қатъии математикӣ барои ҳамаи тасдиқот таъмин карда шудааст ва бо таҳқиқоти дигар муаллифон дар ҳамин соҳа тасдиқ мешавад.

Мутобиқати диссертатсия бо шиносномаи ихтисоси илмӣ. Диссертатсия аз рӯйи ихтисоси 01.01.02 – Муодилаҳои дифференсиалӣ, системаҳои динамикӣ ва идоракунии оптималӣ иҷро шудааст ва пурра бо формулаи он (муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ) ва бо ду банди соҳаи таҳқиқот: (12. Масъалаҳои ибтидоӣ–сарҳадӣ ва спектралӣ барои муодилаҳо ва системаҳои муодилаҳои дифференсиалӣ; 13. Муодилаҳо ва системаҳои муодилаҳои дифференсиалӣ дар масъалаи идоракунии оптималӣ ва ҳисобкунии вариатсионӣ) мувофиқ аст. Диссертатсияро метавон ҳамчун қисми физикаи математикӣ (ихтисоси ҳамҷавори 01.01.03 – Физикаи математикӣ) баррасӣ кард.

Саҳми шахсии довталаби дараҷаи илмӣ. Мундариҷаи диссертатсия ва нуктаҳои асосӣ барои ҳимоя саҳми шахсии муаллиф мебошанд. Ҳамаи натиҷаҳои пешниҳодшуда шахсан аз ҷониби муаллиф ба таври мустақилона гирифта шудаанд. Дар корҳои муштараки [1-А]-[3-А], [6-А]-[11-А] ҳаммуаллиф дар муҳокимаи натиҷаҳои бадастомада иштирок кардааст.

Тасвиб ва амалисозии натиҷаҳои диссертатсия. Натиҷаҳои диссертатсия дар семинар ва конференсияҳои зерин пешниҳод ва муҳокима шудаанд:

- семинари илмии кафедраи математикаи ҳисоббарорӣ ва механикаи факултети механикаю математикаи Донишгоҳи миллии Тоҷикистон бо роҳбарии профессор Абдукаримов М.Ф. (2023–2025);
- конференсияи байналмилалии илмӣ-амалӣ зери унвони «XIII-умин Хонишҳои Ломоносовӣ» бахшида ба 115-солагии академик Бобоҷон Ғафуров (Душанбе, 28-29-уми апрели соли 2023);
- конференсияи байналмилалии илмӣ бахшида ба 75-солагии Донишгоҳи миллии Тоҷикистон, 20-солагии рушди фанҳои дақиқ, табиӣ ва риёзӣ, 85-солагии академики АМИТ Раҷабов Н. (Душанбе, 5-уми октябри соли 2023);
- IV-умин конференсияи байналмилалии илмӣ-амалӣ зери унвони «Масъалаҳои муосири математика ва татбиқҳои он» (Душанбе, 1-уми июни соли 2024);
- конференсияи байналмилалии илмӣ-амалӣ зери унвони «XIV-умин Хонишҳои Ломоносовӣ: Нақши филиали ДДМ ба номи М.В. Ломоносов дар шаҳри Душанбе дар рушди илм ва маориф» (Душанбе, 22-23-уми ноябри соли 2024);

- конференсияи байналмилалии илмӣ-амалӣ зери унвони «Масъалаҳои муосири математикаи амалӣ, механика ва информатика» бахшида ба «20-солагии омӯзиш ва рушди фанҳои дақиқ, табии ва риёзӣ» ва 80-солагии профессор Боймурод Алиев (Душанбе, 2-юми апрели соли 2025);
- конференсияи байналмилалӣ зери унвони «Математика дар ҷаҳони муосир» бахшида ба 85-солагии математики барҷастаи тоҷик, доктори илмҳои физикаю математика, профессор Собиров Т.С. (Душанбе, 28-29 -уми ноябри соли 2025).

Интишорот аз рӯйи мавзуи диссертатсия. Мундариҷаи асосии диссертатсия дар 11 кори муаллиф нашр шудааст, аз ҷумла 5 кор дар нашрияҳое, ки аз ҷониби КОА-и назди Президенти Ҷумҳурии Тоҷикистон тавсия шудаанд. Феҳристи корҳои нашршуда дар охири диссертатсия ва автореферат оварда шудааст.

Сохтор ва ҳаҷми диссертатсия. Диссертатсия аз муқаддима, тафсифи умумии таҳқиқот, се боб, муҳокимаи натиҷаҳои бадастомада, хулоса ва феҳристи адабиёт иборат аст, ки дар он 150 номгӯй оварда шудааст.

Дар диссертатсия рақамгузории дурақама истифода шудааст, ки рақами аввал бо рақами боб ва рақами дуюм бо рақами таърифҳо, тасдиқот, леммаҳо, теоремаҳо, эзоҳҳо ва формулаҳо мувофиқат мекунад. Матни диссертатсия дар барномаи Microsoft Word навишта шудааст ва аз 193 саҳифа иборат аст.

БОБИ 1. БАРРАСИИ НАТИҶАҲО ОИД БА НАЗАРИЯИ МАСЪАЛАҲОИ ИДОРАКУНИИ САРҲАДӢ

1.1. Маълумоти умумӣ

Назарияи математикӣ оид ба равандҳои идоракунӣ аз эҳтиёҷоти илмҳои татбиқӣ ба вуҷуд омадааст. Ин самт ҳамчун шохаи мустақили математика дар миёнаҳои асри гузашта шакл гирифтааст.

Мавриди зикр аст, ки «рушди назарияи идоракунӣ аз равандҳое сар шудааст, ки амсилаҳои математикии онҳо ба муодилаҳои дифференсиалии одӣ оварда мешаванд. Барои масъалаҳое, ки бо муодилаҳои дифференсиалии одӣ тавсиф мешаванд, истилоҳи «идоракунӣ» аз тарафи Л.С. Понтрягин истифода шудааст» [122].

«Ҳоло доираи масъалаҳои идоракунӣ хеле васеъ шудааст ва дарбаргирандаи масъалаҳои идоракунӣ барои объектҳое мебошанд, ки амсилаҳои математикии онҳо бо муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ тавсиф мешаванд» [40].

Дар поён баъзе таърифҳо ва масъалаҳои асосӣ аз назарияи идоракунӣ оварда мешаванд [53].

«Система гуфта, маҷмуи объектҳои робитадоштаро меноманд. Ин робита асосан тавассути муодилаҳои дифференсиалӣ муайян карда мешавад.

Ҳолати система гуфта, маҷмуи параметрҳои онро меноманд, ки рафтори системаро ҳангоми ошӯби берунаи додашуда яккимата муайян мекунанд.

Система бо параметрҳои мутамарказ системае мебошад, ки ҳолати он бо шумораи параметрҳои охирнок муайян мешавад.

Система бо параметрҳои тақсимшуда системае мебошад, ки ҳолати он бо маҷмуи функсияҳо ё маҷмуи беохири параметрҳои ададӣ муайян карда мешавад» [53] .

Мавзуи асосии назарияи идоракунӣ се гурӯҳи калидии масъалаҳоро дар бар мегирад: мушоҳидакунии система, идоракунии система ва идоракунии оптималии система.

«Масъалаи мушоҳидакунӣ иборат аз муайян кардани ҳолати система дар ҳар лаҳзаи муайяншуда бо истифода аз маълумоте мебошад, ки дар давоми давраи мушоҳида ба даст оварда мешавад.

Масъалаи идоракунӣ иборат аз муайян кардани таъсири берунаест, ки системаро аз ҳолати ибтидоӣ ба ҳолати ниҳоӣ дар вақти муайяншуда меорад.

Масъалаҳои идоракунии оптималӣ гуногун мешаванд. Ҳадафи асосӣ аз он иборат аст, ки чунин рафтори система муайян карда шавад, то аз рӯйи ягон меъёр он беҳтарин бошад.

Яке аз аввалин масъалае, ки дар назарияи идоракунии оптималӣ баррасӣ шудааст, масъалаи оптималии зудамалӣ мебошад. Он аз он иборат аст, ки система аз як ҳолати муайян ба ҳолати дигар дар кутоҳтарин вақт бо захираҳои маҳдуд интиқол дода шавад» [53].

«Дар назарияи идоракунии оптималӣ барои системаҳои ченакашон охирнок усулҳои гуногуни тадқиқот таҳия шудаанд. Машҳуртарини онҳо принсипи максимуми Понтрягин» [122], «принсипи оптималии Беллман» [35] ва «усули моментҳои Красовский» [102] мебошанд.

Ҳангоми ҳалли масъалаҳои идоракунии оптималӣ барои системаҳои ченакашон охирнок ду масъалаи асосӣ баррасӣ мешаванд: «ҷустуҷӯи идоракунии оптималии $u = u(t)$, ки нуқтаро аз як ҳолат ба ҳолати дигар дар кутоҳтарин вақт меорад ва масъалаи мутаҳидсозии идоракунии оптималии $u = u(t, x)$, ки идоракунӣ ҳамчун функсияи ҳолати система муайян мешавад.

Барои системаҳои бо параметрҳои тақсимшуда бар идоракуниҳо маҳдудиятҳо ҷорӣ карда мешаванд, ки барои системаҳои ченакашон охирнок имконнопазиранд. Масалан, дар муодилаи лапишҳои маҷбурии тор» [57]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f$$

функсияи f ҳамчун функсияи идоракунӣ баррасӣ мешавад. Махдудиятҳои эҳтимолӣ чунинанд:

1) f танҳо аз t вобаста аст: $f = f(t)$;
2) f аз t ва x вобаста аст: $f = f(t, x)$;
3) f аз фарқи $x - t$ вобаста аст: $f = f(x - t)$.

Равшан аст, ки чунин маҳдудиятҳои махсус оид ба вобастагии идоракуниҳои имконпазир аз t ва x дар масъалаҳои гуногун метавонанд ба ҳар миқдор вуҷуд дошта бошанд.

«Зикр кардан зарур аст, ки масъалаи идоракунии оптималӣ барои системаҳои бо параметрҳои тақсимшуда дар корҳои» [38]–[40] мавриди таҳқиқ қарор гирифтаанд. Дар онҳо усулҳое таҳия шудаанд, ки ҳалли як қатор масъалаҳои амалӣ ва мушаххасро таъмин мекунанд.

«Таҳия ва такмил додани назария ва техникаи системаҳои оптималӣ бо параметрҳои тақсимшуда нисбат ба системаҳо бо параметрҳои мутамарказ мушкилтар мебошад, зеро ҳаракати чунин системаҳо бо муодилаҳои функсионалии мураккаб тавсиф карда мешавад, масалан, бо муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ бо шартҳои сарҳадӣ ва ибтидоии мураккаб. Илова бар ин, барои чунин системаҳо маҳдудиятҳои иловагӣ, ки ба талаботи амалӣ вобастаанд, хеле мураккаб мешаванд» [24], [40].

Назарияи масъалаҳои идоракунии системаҳо бо параметрҳои тақсимшуда дар шумораи зиёди корҳои илмӣ мавриди таҳқиқ қарор гирифтааст. Масъалаҳои ба миёномада бо усулҳои функсионалӣ, усули ҷудо кардани тағйирёбандаҳо (усули Фурйе), усули паҳншавии мавҷҳо (усули Даламбер), назарияи дугона ва инчунин бо дигар усулҳои аниқ ва тақрибӣ таҳлил карда шудаанд.

Дар банди оянда таҳлили натиҷаҳои баъзе корҳое, ки ба мавзуи диссертатсия мустақиман вобастаанд, пешниҳод карда мешавад.

1.2. Шарҳи натиҷаҳо оид ба масъалаҳои идоракунии равандҳое, ки бо муодилаи якченакаи мавҷӣ тавсиф меёбанд

Муодилаи мавҷӣ, ки дар асри XVIII кашф шудааст, яке аз муодилаҳои муҳим дар физикаи математикӣ мебошад ва бо номи олимони машҳур, мисли Даламбер, Эйлер, Бернулли ва Лагранҷ алоқаманд аст. Бо ёрии он, дар баробари лапишҳои механикӣ, инчунин равандҳои паҳншавии мавҷҳои электромагнитӣ, гравитатсионӣ ва мавҷҳои акустикӣ дар газҳо, моеъҳо ва муҳитҳои сахт тавсиф карда мешаванд.

«Дар таҳқиқи ҳалҳои классикии масъалаҳои омехта барои муодилаи мавҷӣ, ки онҳоро ҳамзамон масъалаҳои ибтидоӣ-сарҳадӣ низ ном мебаранд, олимони зиёде саҳм гузоштаанд. Пас аз нашри корҳои Н. Винер, К.О. Фридрихс, Н.М. Гюнтер ва кори бунёдии С.Л. Соболев» [8] «дар нимаи аввали асри XX таваҷҷуҳ ба сохтани ҳалҳои умумишуда барои масъалаи ибтидоӣ-сарҳадӣ шакл гирифт. Натиҷаҳои бунёдӣ оид ба ҳалҳои умумишудаи масъалаҳои омехта барои муодилаҳои гиперболӣ аз тарафи О.А. Ладиженская» [107] ва В.А. Илйин [60] ба даст оварда шудаанд. Масъалаҳои ибтидоӣ-сарҳадӣ дар таҳқиқи масъалаҳои идоракунии сарҳадӣ нақши калидӣ доранд ва шумораи зиёди корҳои илмӣ ба назарияи ин гуна масъалаҳо бахшида шудаанд. Дар зер таҳлили натиҷаҳои баъзе муаллифон оид ба масъалаи идоракунии сарҳадӣ барои муодилаи мавҷӣ оварда мешавад.

«Бори аввал масъалаи идоракунии лапишҳоро дар шакли возеҳи математикӣ А.Г. Бутковский соли 1963 баррасӣ намуд» [39]. Дар кори ӯ масъалаи мазкур чунин гузошта мешавад.

«Бигзор, раванди идорашаванда бо муодилаи мавҷӣ

$$u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t), \quad 0 < x < l, \;\; t > 0, \tag{1.1}$$

бо шартҳои ибтидоии

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), 0 \le x \le l \tag{1.2}$$

тавсиф карда шавад.

Идоракунӣ бо ёрии функсияҳои $\mu(t)$ ва $\nu(t)$ анҷом дода мешавад:

$$u(0,t)=\mu(t), \qquad u(l,t)=\nu(t), t\geq 0. \tag{1.3}$$

Ба идоракуниҳои имконпазири $\mu(t)$ ва $\nu(t)$ маҳдудият ҷорӣ карда шудааст: $\parallel \mu(t) \parallel \leq A$ ва $\parallel \nu(t) \parallel \leq A,$ ки дар онҳо A доимист. Нормаи элементи идоракунӣ мувофиқи фазои функсияҳои идоракунӣ муайян карда мешавад, ки элементҳои он ҳалли классикӣ ё умумишудаи масъалаи сарҳадиро муайян мекунанд ва он ҳамчун қатори Фурйе бо функсияҳои хоси масъалаи Штурм-Лиувилл ифода меёбад» [39].

Мақсади масъала ин аст, ки дар кӯтоҳтарин вақт лапишҳои система пурра хомӯш шаванд, яъне шартҳои зерин ба иҷро расанд:

$$u(x,T)=0, \;\; u_t(x,T)=0, \quad 0\leq x\leq l. \tag{1.4}$$

«Усули ҳалли пешниҳодкардаи ӯ ба овардани масъала ба проблемаи беохирченакаи моментҳо асос ёфта, баъдан татбиқи умумисозии усули Н.Н. Красовскийро барои ҳалли масъалаҳои монанди системаҳои ченакашон охирнок дар бар мегирад» [102].

«Ба ҳисоб гирифтани табиати мавҷии паҳншавии ошӯбҳо дар ҷисми чандирӣ имкон медиҳад, ки таъсирҳои идоракунӣ дар шакли то андозае ғайримуқаррарӣ истифода шаванд. Дар айни ҳол, ҳалли нисбатан содаи масъалаҳои басо мураккаби синтезии идоракунии оптималии лапишҳои чандирӣ (зудамалии оптималӣ бо идоракуниҳои сарҳадии маҳдуд) муяссар мегардад. Табиати мавҷии раванди лапиш аз ҷониби А.И. Егоров ҳангоми ҳалли масъалаҳои зерини хомӯшсозии лапишҳо ба назар гирифта шудааст» [49].

1. *Масъалаи хомӯш кардани лапишҳо, ки бо муодилаи якченакаи мавҷӣ тавсиф мешаванд*. Раванд бо масъалаи сарҳадӣ (1.1)-(1.3) тавсиф карда мешавад, ки дар он $\mu(t)$ ва $\nu(t)$ идоракуниҳо мебошанд. Масъалаи асосӣ ин аст, ки лапишҳо дар кӯтоҳтарин вақти $T>0$ пурра хомӯш шаванд, яъне шартҳои (1.4) иҷро шаванд. Исбот шудааст, ки вақти камтарини имконпазир барои хомӯш кардани лапишҳо ба $\frac{l}{a}$ баробар аст. Функсияҳои идоракунии ҷустуҷӯшаванда дар шакли аналитикии ошкор муайян шудаанд.

2. *Масъалаи оромкунии лапишҳо, ки бо системаи муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ тавсиф мешаванд ва бо он бисёр масъалаҳои гидромеханика, аэромеханика, электромеханика ва радиотехника алоқаманд мебошанд*. Раванд бо муодилаҳои

$$-u_t = a\vartheta_x, \quad -\vartheta_t = au_x, \quad t > 0, \quad 0 < x < l$$

бо шартҳои ибтидоӣ: $u(x,0) = \varphi(x),\ \vartheta(x,0) = \psi(x),\ 0 \le x \le l$ ва бо шартҳои сарҳадии гуногун тавсиф карда мешавад. Масалан, агар шартҳои сарҳадӣ чунин интихоб шаванд: $u(0,t) = \mu(t),\ \vartheta(0,t) = \nu(t), t \ge 0$, ки дар он $\mu(t)$ ва $\nu(t)$ идоракуниҳо мебошанд, пас масъала ин аст, ки лапишҳо дар вақти кӯтоҳтарини $T > 0$ пурра хомӯш шаванд, яъне шартҳои зерин иҷро шаванд: $u(x,T) \equiv 0$, $\vartheta(x,T) \equiv 0,\ 0 \le x \le l$.

3. *Масъалаи идоракунии лапишҳои газ дар қубури дароз, ки бо дастгоҳи идоракунӣ бе робитаи баръакс таъмин шудааст*. Раванд бо муодилаҳои

$$-T_0 u_t = \vartheta_x, -T_0\gamma\vartheta_t = u_x, \quad t > 0,\ 0 < x < l,$$

$$T_2 y'' + T_1 y' + y = -ku(0,t), \quad T_3\mu' - y = \alpha(t), t > 0,$$

бо шартҳои сарҳадӣ ва ибтидоии

$$u(0,t) + \vartheta(0,t) = \mu(t), \qquad ru(l,t) + \vartheta(l,t) = 0, \qquad t \ge 0,$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad \vartheta(x,0) = \psi(x), \qquad 0 \le x \le l,$$

$$y(0) = y^0, \qquad y'(0) = y^1$$

тавсиф карда мешавад. Дар ин ҷо T_i, $i = \overline{1,3}$, γ, k, r – доимиҳои мусбат, $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ – функсияҳои додашуда ва y^0, y^1 – доимиҳои додашуда мебошанд, дар ҳоле ки $\alpha(t)$ ва $\mu(t)$ ҳамчун идоракуниҳо баромад мекунанд.

Ҳадафи идоракунӣ пурра хомӯш намудани лапишҳои система дар вақти кӯтоҳтарини $T > 0$ мебошад, яъне сохтани чунин идоракуниҳо, ки барояшон шартҳои зерин иҷро мешаванд:

$$u(x,T) \equiv 0, \qquad \vartheta(x,T) \equiv 0, \qquad y(T) = y'(T) = 0, \quad 0 \le x \le l.$$

«Усули монанд дар корҳои Л.И. Васнитский ва И.В. Милосердова ҳангоми сохтани хомӯшкунандаи оптималии лапишҳои тӯлонии стержен истифода шудааст» [45].

Ж.Л. Лионс «бо истифода аз назарияи фазоҳои гилбертӣ (усули ягонагии Гилберт) масъалаи хомӯшсозии лаппишҳоро, ки бо масъалаи сарҳадии якум барои муодилаи мавҷӣ тавсиф мешаванд, дар синфи функсияҳои абстрактии бефосила таҳқиқ намудааст» [4]. Аниқаш, дар кори ӯ масъалаи оромсозии лаппишҳо бо шартҳои сарҳадии Дирихле омӯхта шудааст. Ягона набудани ҳалли масъалаи ҳосилшуда барои $T > 2l$ исбот гардидааст, ки дар ин ҷо l – дарозии тор мебошад.

Масъалаи мушоҳидапазирии системаҳои лапишҳои хаттӣ дар шакли ба таври кофӣ умумӣ аз ҷониби Ж.Л. Лионс баён карда шудааст. Ӯ «усули ҳалли масъалаҳоро барои ҳолате пешниҳод намуд, ки мушоҳида бо ёрии шартҳои сарҳадии навъи дуюм амалӣ мегардад. Раванди баррасишаванда бо муодилаи мавҷӣ (1.1) ва шартҳои сарҳадии якҷинсаи

$$u(0,t) = 0, \;\; u(l,t) = 0$$

тавсиф мешавад.

Аз рӯйи функсияи мушоҳидашавандаи $u_x(0,t) = y(t)$ барқарор намудани ҳолати ибтидоии система, яъне функсияҳои $u(x,0)$ ва $u_t(x,0)$ талаб карда мешавад» [4].

Усули ягонагии Гилберт (HUM), ки аз ҷониби Ж.Л. Лионс таҳия шудааст, «имкон дод масъалаи мавҷудияти идоракунии сарҳадиро на танҳо дар ҳолати якченака, балки дар ҳолати бисёрченака низ таҳқиқ намуд. Дар оянда усули HUM аз ҷониби шогирдон ва пайравони ӯ ба ҳолатҳои муодилаи мавҷии квазихаттӣ, муодилаи якҷинсаи нақлиёт, системаҳои гиперболии ғайриавтономӣ ва дигар синфҳои муодилаҳо умумӣ гардонида шуд» [2], [3], [5], [9], [10].

Дар кори Р.А. Гловинский, С.Н. Ли ва Ж.Л. Лионс «масъалаи татбиқи ададии усули системавӣ барои идорашавандагии аниқи сарҳадии муодилаи мавҷӣ таҳқиқ шудааст, бо таваҷҷуҳи махсус ба ҳолати хусусии идоракунии Дирихле. Усулҳои ададии дар ин ҷо тавсифшуда аз маҷмуи зерин иборатанд: аппроксиматсия бо усули элементҳои охирнок барои дискретизатсияи фазо; схемаҳои ошкори фарқҳои охирнок барои дискретизатсияи вақт; алгоритми пешакӣ шартгузоришудаи градиентҳои ҳамроҳшуда барои ҳалли масъалаҳои дискретӣ; усули пешакӣ, ки ба регуляризатсияи (батартибдарории) бигармоникии Тихонов асос ёфтааст. Самаранокии методикаи ҳисоббарорӣ бо натиҷаҳои таҷрибаҳои ададӣ нишон дода шудааст» [1].

Дар кори Л.Д. Акуленко «формулаи ошкор барои идоракунии сарҳадии мембранаи росткунҷа бо маҳдудиятҳо ба таъсири идоракунанда аз рӯйи қимати мутлақ оварда шудааст. Ҳамзамон, ҳолати ниҳоӣ атрофи хурди ҳолати оромӣ қабул карда мешавад» [26].

Дар кори Аттаев А.Х. «масъалаи идоракунии сарҳадӣ барои муодилаи гиперболии тартиби дуюми таназулёбанда омӯхта шудааст. Шартҳои зарурӣ ва кофии идорашавандагии додаҳои Коши дар фосилаи минималии вақт муқаррар гардидаанд. Идоракуниҳои сарҳадӣ дар шакли аналитикии ошкор пешниҳод шудаанд» [29].

Дар мақолаи Ф.Е. Ломовсев ва С.П. Ходос «масъалаи идоракунии сарҳадии лапишҳои маҷбурии тори якҷинса ва маҳдуд бо истифода аз ҳосилаҳои якуми моили ғайрихарактеристикӣ (яъне ҳосилаҳое, ки самташон ба самти характеристикаҳои муодилаи тор мувофиқ нест) ва ғайристатсионарӣ (бо коэффитсиентҳое, ки аз вақт вобастаанд) бо ду шарти сарҳадӣ дар нӯгҳои тор мавриди омӯзиш қарор гирифтааст. Меъёри мавҷудияти ҳадди ақал як ҷуфт идоракунии сарҳадӣ барои лапишҳои маҷбурии тори маҳдуд тавассути ин ҳосилаҳои якуми моил дар ҳар ду нӯги он дар маҷмуи ҳалҳои классикӣ, яъне функсияҳои ду маротиба ҳосилаи бефосиладошта, муайян карда шудааст» [111].

Дар таҳқиқ формулаҳои рекуррентии ошкор ва шартҳои мавҷудияти ҳалли ягонаи устувори классикӣ барои масъалаи омехтаи мувофиқ истифода шудаанд. Исбот гардидааст, ки шартҳои мавҷудияти чунин идоракуниҳо аз шартҳои зарурӣ ва кифоягии мувофиқ оид ба суфтагӣ ва шартҳои идорашавандагӣ нисбат ба додаҳои масъалаи идоракунӣ (қисми рости муодила, шартҳои ибтидоӣ ва интиҳоӣ) иборат мебошад.

Дар мақолаи Ф.П. Василев [43] «тафсири асосҳои назарияи дугонагӣ дар масъалаҳои хаттии идоракунӣ ва мушоҳидакунӣ пешниҳод шудааст. Корҳои муштараки ӯ бо шогирдонаш [41] ва [42] ба ҳалли конструктивии масъалаҳои идоракунии сарҳадии равандҳои лапиш бахшида шудаанд. Дар ин мақолаҳо алгоритмҳои самараноки ададии муайян намудани идоракунии сарҳадии ҷустуҷӯшаванда сохта шудаанд. Кори [41] ба истифодаи аппроксиматсияи охирченакаи масъалаи идоракунии сарҳадӣ ва кори» [42] ба методи Фурйе асос ёфтааст.

«Баъзе натиҷаҳои Ф.П. Василев ва шогирдони ӯ, ки ба усулҳои тақрибии ҳалли масъалаҳои идоракунӣ ва мушоҳидакунӣ алоқаманданд, дар кори» [44] инъикос ёфтаанд.

Дар кори М.М. Потапов «тартиби ҳисоббарории устувори сохтани ҳалли тақрибии масъалаҳои идоракунӣ ва мушоҳидакунӣ барои синфи васеи системаҳои динамикии хаттӣ пешниҳод гардидааст» [123]. Дар корҳои минбаъдаи ӯ [124]-[127] татбиқи ин усул барои муодилаи мавҷӣ бо коэффитсиентҳои тағйирёбанда ва бо шартҳои сарҳадии навъи сеюм дар ҳолатҳои идоракунии сарҳадии яктарафа ва дутарафа нишон дода шудааст. Методи фарқие, ки дар ин корҳо сохта шудааст, ҳангоми майдакунии тури фарқӣ ба идоракуниҳои сарҳадии дорои нормаи минималии L_2 бо маънои қавӣ дар метрикаи синфи L_2 наздик мешаванд.

«Ба усулҳои тақрибии ҳалли масъалаҳои идоракуниҳои сарҳадӣ дар гузоришҳои гуногун ҳамчунин корҳои М.М. Потапов ва шогирдони ӯ» [47], [48], [58], [59] бахшида шудаанд.

Аз ҷониби А.З. Ишмухаметов дар корҳои [98], [99] масъалаи овардани стержени якҷинса ба ҳолате, ки то ҳадди имкон ба ҳолати додашуда наздик бошад, дар фосилаи вақти T таҳқиқ шудааст. Шартҳое баррасӣ мегарданд, ки нӯги чапи стержен маҳкам карда шудааст, нӯги рост озод мебошад ва идоракунӣ тавассути сарбории берунии кундаланг ва ҳолати ибтидоӣ амалӣ карда мешавад.

«Силсилаи бузурги корҳои илмие, ки аз ҷониби В.А. Илйин ва Е.И.Моисеев иҷро гардида, баъдан аз ҷониби шогирдони онҳо идома дода шудаанд, дар солҳои 1999-2013 ба нашр расидаанд. Ин корҳои илмӣ ба ҳалли масъалаҳои идоракунии сарҳадии равандҳои мавҷӣ дар доираи ҳалли умумишудаи масъалаҳои омехтаи сарҳадӣ-ибтидоӣ бахшида шудаанд. Дар оғоз ин масъалаҳо дар синфи $\widehat{W}_2^2(Q_T)$ ва баъдан дар синфи $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ баррасӣ гардидаанд, ки дар ин ҷо $Q_T = \{\,(x,t)\mid 0 \le x \le l,\ 0 \le t \le T\,\}$. Ин синфҳо бори аввал аз ҷониби В.А. Илйин дар корҳои» [62] ва [65] ҷорӣ карда шудаанд. Синфи $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ ҳамчун маҷмуи функсияҳои $u(x,t)$, ки дар росткунҷаи Q_T бефосила буда, дар он дорои ҳар ду ҳосилаи умумишудаи $u_x(x,t)$ ва $u_t(x,t)$ мебошанд, муайян карда мешавад. Ҳар яке аз ин ҳосилаҳо на танҳо ба синфи $L_2(Q_T)$ тааллуқ дорад, балки ҳамчунин ба синфи $L_2[0,l]$ барои ҳамаи $t \in [0,T]$ ва ба синфи $L_2[0,T]$ барои ҳамаи $x \in [0,l]$ мансуб мебошад (ба ҳамин монанд синфи $\widehat{W}_2^2(Q_T)$ низ таъриф дода мешавад). Тааллуқ доштани ҳалли масъала ба ин синфҳо имкон медиҳад, ки талаботи суфтагӣ, ки ба шартҳои ибтидоӣ, ниҳоӣ ва сарҳадӣ гузошта мешаванд, ба таври дақиқ ва возеҳ ифода гарданд.

Дар поён баъзе аз натиҷаҳои асосие, ки дар корҳои В.А. Илйин ва шогирдони ӯ ба даст оварда шудаанд, оварда мешаванд.

Дар кори В.А. Илйин ва В.В. Тихомиров «масъалаи идоракунии сарҳадии раванде, ки бо муодилаи мавҷии (1.1) тавсиф шудааст, дар доираи синфи $\widehat{W}_2^2(Q_T)$ тавассути ҷойивазкуниҳо дар ду нӯги порча ҳал гардидааст. Дар зери масъалаи идоракунии сарҳадӣ ёфтани чунин функсияҳои сарҳадии $u(0,t) =$

$= \mu(t)$ ва $u(l,t) = \nu(t)$ аз синфи $W_2^2[0,T]$ фаҳмида мешавад, ки равандро дар муддати камтарини вақти T аз ҳолати ибтидоии $\{u(x,0) = \varphi(x) \in W_2^2[0,l]$, $u_t(x,0) = \psi(x) \in W_2^1[0,l]\}$ ба ҳолати ниҳоии $\{u(x,T) = \varphi_1(x) \in W_2^2[0,l]$, $u_t(x,T) = \psi_1(x) \in W_2^1[0,l]\}$ мегузаронанд ва ҳамзамон шартҳои мувофиқатро бо функсияҳои ибтидоӣ $\varphi(x), \psi(x)$ ҳангоми $t = 0$ ва функсияҳои ниҳоӣ $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$ ҳангоми $t = l$ қонеъ менамоянд. Муаллифон исбот кардаанд, ки фосилаи камтарини вақт барои ин ҳолат $T = l$ мебошад. Дар ин кор ду натиҷаи асосии нав ба даст омадаанд» [62]:

1) Шартҳои зарурӣ ва кифоягӣ барои функсияҳои $\varphi(x), \psi(x), \varphi_1(x), \psi_1(x)$, ки мавҷудияти идоракуниҳои сарҳадии ҷустуҷӯшавандаи $\mu(t)$ ва $\nu(t)$ -ро таъмин мекунанд, чунинанд:

$$\psi(0) - \varphi'(0) - \psi_1(l) + {\varphi'}_1(l) = 0,$$

$$\psi(l) + \varphi'(l) - \psi_1(0) - {\varphi'}_1(0) = 0,$$

$$\int_0^l \psi(x)dx + \varphi(l) + \varphi(0) + \int_0^l \psi_1(x)dx - \varphi_1(l) - \varphi_1(0) = 0.$$

2) Намуди аналитикии идоракуниҳои ҷустуҷӯшаванда ҳангоми иҷрои ин шартҳо дар шакли зерин ёфта шудааст:

$$\mu(t) = \frac{1}{2}\left[\int_0^t \psi(x)dx + \varphi(t) + \varphi(0) + \int_{l-t}^l \psi_1(x)dx - \varphi_1(l) + \varphi_1(l-t)\right],$$

$$\nu(t) = \frac{1}{2}\left[\int_0^t \psi_1(x)dx + \varphi_1(t) - \varphi_1(0) + \int_{l-t}^l \psi(x)dx + \varphi(l) + \varphi(l-t)\right].$$

Дар кори В.А. Илйин [63] «бори аввал барои ҳар як $T \in (0,l)$ шартҳои зарурӣ ва кифоягӣ барои мавҷудияти ҳалли ягона муқаррар гардида, инчунин намуди ошкори идоракуниҳои сарҳадӣ дар ду нӯги тор пешниҳод шудааст. Барои ҳолати $T > l$ (дақиқтараш $l < T \leq 2l$) шакли умумии идоракуниҳои сарҳадии имконпазир оварда шудааст, ки ду доимии ихтиёрӣ ва чор функсияи ихтиёриро аз синфи W_2^2 дар порчаи $t \in [0, T-l]$ дар бар мегирад. Ин идоракуниҳо гузариши равандро аз ҳолати ибтидоии ихтиёрӣ ба ҳолати ниҳоии пешакӣ додашуда таъмин мекунанд. Натиҷаҳои шабеҳ барои ҳолате низ ба даст оварда шудаанд, ки идоракунӣ танҳо дар як нӯги тор амалӣ шуда, нӯги дуюм мустаҳкам карда шудааст» [64].

Дар корҳои [65] ва [66] В.А. Илйин масъалаҳои идоракунии сарҳадиро бо маънои ҳалли умумишудаи муодилаи (1.1), ки мавҷудияти энергияи охирнокро таъмин мекунад, мавриди таҳқиқ қарор дод. Дар ин корҳо ҳамаи масъалаҳое, ки қаблан бо маънои ҳалли классикии муодилаи (1.1) баррасӣ шуда буданд, дар шакли умумишуда таҳлил гардиданд.

Яке аз теоремаҳои асосиро аз кори [65] меорем.

Теорема (В.А. Илйин). «*Барои ҳар як* $T \in (0, l]$ *шартҳои зарурӣ ва кифоягии мавҷудияти ҳалли ягона аз синфи* $\widehat{W}_2^1$ *барои масъалаи идоракунии сарҳадии (1.1), (1.2) ва*

$$u(x,T) = \varphi_1(x), \quad u_t(x,T) = \psi_1(x), \quad 0 \le x \le l \tag{1.5}$$

ду талаби зерин мебошад:

1) $\varphi(x),\ \varphi_1(x) \in W_2^1[0,l], \quad \psi(x),\ \psi_1(x) \in L_2[0,l]$;

2) барои ҳамаи $t \in [0, l-T]$ *ду баробарии зерин қонеъ бошанд:*

$$\hat{\psi}_1(t) + \varphi_1(t) - \hat{\psi}(t+T) - \varphi(t+T) \equiv 0,$$
$$\hat{\psi}_1(t+T) - \varphi_1(t+T) - \hat{\psi}(t) + \varphi(t) \equiv 0,$$

ки дар онҳо $\hat{\psi}(x)$ *ва* $\hat{\psi}_1(x)$ *мувофиқан функсияҳои ибтидоии* $\psi(x)$ *ва* $\psi_1(x)$ *мебошанд, ки барои ҳар як* $t_0 \in [0, l-T]$ *шарти зеринро қонеъ мекунанд:*

$$\hat{\psi}_1(t_0) + \varphi_1(t_0) - \hat{\psi}(t_0+T) - \varphi(t_0+T) = 0.$$

Агар ин талабот иҷро шаванд, ҳалли масъала дар шакли зерин дода мешавад:

$$u(x,t) = F(t+x) + G(t-x+l),$$

ки дар он барои $0 \le t \le l$*:*

$$F(t)=\frac{1}{2}\left[\hat{\psi}(t)+\varphi(t)\right],\quad F(t+T)=\frac{1}{2}\left[\hat{\psi}_1(t)+\varphi_1(t)\right],$$

$$G(t)=\frac{1}{2}\left[-\hat{\psi}(l-t)+\varphi(l-t)\right],\quad G(t+T)=\frac{1}{2}\left[-\hat{\psi}_1(l-t)+\varphi_1(l-t)\right].$$

Дар айни ҳол, идоракуниҳои сарҳадии $u(0,t)=\mu(t)\in W_2^1[0,T]$ *ва* $u(l,t)=$ $=\nu(t)\in W_2^1[0,T]$, *ки равандро аз ҳолати ибтидоии (1.2) ба ҳолати ниҳоии (1.5) мегузаронанд, шакли зеринро доранд» [65]:*

$$\mu(t)=\frac{1}{2}\left[\hat{\psi}(t)+\varphi(t)-\hat{\psi}_1(T-t)+\varphi_1(T-t)\right],$$

$$\nu(t)=\frac{1}{2}[\hat{\psi}_1(l-T+t)+\varphi_1(l-T+t)-\hat{\psi}(l-t)+\varphi(l-t).$$

Натиҷаҳои В.А. Илйин «барои ҳолати идоракунии сарҳадӣ тавассути ҷойивазкунӣ дар як сарҳад ҳангоми озод будани сарҳади дигар дар корҳои Рево П.А. ва Чабакаури Г.Д.» [130], [131], инчунин барои ҳолати идоракунии сарҳадӣ тавассути қувваи чандирӣ дар як сарҳад ҳангоми мустаҳкам будани сарҳади дигар дар мақолаи Никитин А.А. [119] кӯчонида шудаанд.

Дар корҳои В.В. Тихомиров [139]-[141] ва кори Рево П.А. ва В.В.Тихомиров [132] масъалаи идоракунии сарҳадӣ барои лапишҳои тор дар ҳолате таҳқиқ шудааст, ки нӯги рост бо қувваи чандирӣ мустаҳкам карда шудааст, яъне дар нӯги рости тор шарти сарҳадии якҷинсаи навъи сеюм дода шудааст:

$$u_x(l,t)+hu(l,t)=0,\quad h>1.$$

«Аз натиҷаҳои ин корҳои таҳқиқотӣ бармеояд, ки дар ҳолати $T>2l$, вақте ки идоракунӣ танҳо дар як нӯги тор амалӣ мешавад ва дар ҳолати $T>l$, вақте ки идоракунӣ дар ҳар ду нӯги тор амалӣ мешавад, масъалаи идоракунии сарҳадӣ ҳалли ягона надорад, яъне ҳалли беохир дорад. Табиист, ки дар чунин ҳолат масъалаи ҷустуҷӯи идоракунии сарҳадии оптималӣ ба миён меояд. Ин масъала ба он равона шудааст, ки аз миёни ҳамаи идоракуниҳо он идоракунӣ интихоб карда шавад, ки ба интеграли энергияи сарҳадии система қимати минималӣ диҳад. Маҳз ба ҳамин масъала як қатор корҳои муштараки В.А. Илйин ва Е.И.Моисеев бахшида шудааст» [69]-[85].

«Гузориши масъалаи идоракунии сарҳадии оптималиро, ки тавассути ҷойивазкунӣ дар як нӯги тор ҳангоми мустаҳкам будани нӯги дуюм амалӣ карда мешавад, инчунин натиҷаҳои мувофиқро, ки ба В.А. Илйин ва Е.И. Моисеев тааллуқ доранд, дар поён меорем» [80].

«Бигзор, зарур аст, ки аз синфи $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ ҳалли умумишудаи масъалаи идоракунии сарҳадӣ тавассути ҷойивазкунии $u(0,t)=\mu(t)\in W_2^1[0,T]$ ҳангоми мустаҳкам будани охири тор $u(l,t)\equiv 0,\ 0\le t\le T$ барои раванде, ки бо муодилаи мавҷии (1.1) тавсиф мешавад, ёфта шавад. Ба ибораи дигар, чунин функсияи сарҳадии $u(0,t)=\mu(t)\in W_2^1[0,T]$ ёфта шавад, ки ҳангоми иҷро шудани шарти мустаҳкамӣ раванди мавҷиро аз ҳолати ибтидоии $\{u(x,0)=\varphi(x)\in W_2^1[0,l],\ u_t(x,0)=\psi(x)\in L_2[0,l]\}$ ба ҳолати ниҳоии $\{u(x,T)=\varphi_1(x)\in W_2^1[0,l],\ u_t(x,T)=\psi_1(x)\in L_2[0,l]\}$ гузаронад» [80].

Дар кори [66] В.А. Илйин исбот кардааст, ки ин масъала «барои $T>2l$ ҳалли беохир дорад. Аз ин рӯ, барои $T>2l$ масъалаи муайян кардани идоракунии сарҳадии оптималӣ ба миён меояд. Ин масъала ба он равона шудааст, ки аз миёни ҳамаи функсияҳои $\mu(t)\in W_p^1[0,T]$, ки идоракуниҳои сарҳадӣ мебошанд, он функсияеро ёфтан лозим аст, ки барои қимати доимии $p\ge 1$ ба интеграли

$$\int_0^T |\mu'(t)|^p dt \tag{1.6}$$

ҳангоми мавҷуд будани шартҳои алоқа, ки аз иҷрои шартҳои додашудаи ибтидоӣ ва ниҳоӣ бармеоянд, қимати минималӣ медиҳад» [66].

Теорема (В.А. Илйин, Е.И. Моисеев). «*Фарз мекунем, ки дар масъалаи таҳияшудаи идоракунии сарҳадӣ* $T=2ln+\Delta, n\in N, \Delta\in(0,2l]$ *пешбинӣ шудааст. Пас барои* $p>1$ *идоракунии сарҳадии ягонаи* $u(0,t)=\mu(t)\in$

$\in W_p^1[0,T]$ *мавҷуд аст, ки раванди лапишро аз ҳолати ибтидоӣ ба ҳолати ниҳоӣ меорад ва ба интеграли энергияи сарҳадии (1.6) қимати минималӣ медиҳад.*

Ин идоракунии оптималӣ бо формулаи зерин дода мешавад:

$$\mu(t) = L(t) + \alpha(t),$$

ки дар он $L(t)$ дар порчаи $[0,2ln + \Delta]$ функсияи хаттии зерин аст:

$$L(t) = \phi(0) - \left[\frac{1}{2l}\int_0^{2l} F\,(\xi)\,d\xi\right]t,$$

$\alpha(t)$ дар порчаи $[0,2ln + \Delta]$ функсияи даврӣ бо даври $2l$ буда, барои ҳамаи $0 \le x \le \Delta$ ва $m = \overline{0,n}$, инчунин барои ҳамаи $\Delta \le x \le 2l$ ва $m = \overline{0,n-1}$ бо ифодаи зерин муайян мешавад:

$$\alpha(2lm + x) = \frac{x}{2l}\int_0^{2l} F(\xi)\,d\xi - \int_0^{x} F(\xi)\,d\xi.$$

Функсияи $F(x)$ шакли зеринро дорад» [66]:

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2(n+1)}[\varphi_1'(x - \Delta + 2l) - \varphi'(x) + \psi_1(x - \Delta + 2l) - \psi(x)], 0 \le x \le \Delta, \\ \dfrac{1}{2n}[\varphi_1'(x - \Delta) - \varphi'(x) + \psi_1(x - \Delta) - \psi(x)],\ \ \Delta \le x \le 2l. \end{cases}$$

Дар кори [80] ҳамчунин исбот шудааст, ки барои ҳар гуна *T*-и ба қадри кофӣ калон идоракунии оптималии сарҳадӣ ҳангоми $p \ge 1$ якхела аст.

Чабакаури Г.Д. «масъалаи оптимизатсияи идоракунии сарҳадии равандҳои лапишро дар як нӯги тор ҳангоми мустаҳкам будани нӯги дуюм дар синфи ҳалҳои умумишудаи $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ барои ҳолате таҳқиқ кардааст, ки шартҳои зарурӣ ва кифоягии бадастовардаи В.А. Илйин барои функсияҳои ибтидоӣ ва ниҳоии равандро муайянкунанда иҷро намешаванд. Муаллиф намуди аналитикии ошкори идоракунии оптималиро ба даст овардааст» [146].

Қайд кардан муҳим аст, ки дар ҳамаи корҳои зикршуда масъалаҳои оптималии идоракунии сарҳадӣ дар асоси масъалаҳои омехта бо шартҳои сарҳадии навъҳои якум ва дуюм ҳал гардидаанд.

«Мушкилот дар таҳлили равандҳои идорашаванда бо шартҳои сарҳадии навъи сеюм нисбат ба шабеҳи онҳо бо шартҳои Дирихле ва Нейман ба набудани тасвирҳои аналитикӣ барои ҳалли умумишудаи масалаҳои омехта дар муддати вақтҳои калон марбут буд. Қадами устувор дар омӯзиши масъалаҳои идоракунӣ бо шартҳои сарҳадии навъи сеюм кори Е.И. Моисеев ва В.В. Тихомиров мебошад» [112]. Дар он масъалаи омехта бо шартҳои сарҳадии якҷинсаи навъи сеюм дар шакли аналитикӣ барои фосилаи вақти дилхоҳи T ҳал карда шудааст:

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0,$$
$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0,$$
$$u(0,t) = \mu(t), \quad u_x(l,t) + hu(l,t) = 0.$$

Маҳз дар ин кор исбот шудааст, ки барои ифодаи ҳалли мазкур дар шакли ошкор зарур аст, ки аз бисёрузваҳои Лагер истифода шавад. Ҳамчунин дар мақола ягонагии ҳалли масъалаи омехта барои муодилаи мавҷӣ бо шартҳои сарҳадии навъҳои якум ва сеюм исбот шудааст.

Дар корҳои Никитин А.А. [120]-[121] масъалаҳои идоракунии сарҳадӣ бо шарти ҷинси сеюм таҳлил шудаанд. «Натиҷаи асосии Никитин А.А. муқаррар намудани меъёри оптималӣ барои ҳалли масъалаи идоракунии сарҳадӣ, ки бар асоси масъалаи омехта бо идоракунии сарҳадии навъи сеюм дар нӯги чапи тор ҳангоми мустаҳкам будани нӯги рост аст, мебошад» [120].

Барои гузоштани масъалаи оптимизатсия Никитин А.А. барои баррасӣ функсияи $H(t,\tau)$-ро ворид кардааст, ки бо баробарии зерин муайян мешавад:

$$H(t,\tau) = \{e^{-h\tau} \cdot [L^1_{2n-m+1}(2h\tau) + L^1_{2n-m}(2h\tau)]\,,$$
$$\text{ҳангоми } 2lm < t \leq 2l(m+1), \qquad m = \overline{0, 2n+1}\}.$$

Масъала аз ёфтани дар байни ҳамаи функсияҳои $\mu(t) \in L_p[0,T]$, ки идоракуниҳои сарҳадӣ мебошанд, он функсияе, ки ба интеграли энергияи сарҳадии зерин қимати минималӣ медиҳад, иборат аст:

$$\int_0^T \left| \mu(t) - h \cdot \int_0^t H(t,t-h)\mu(h)dh \right|^p dt.$$

Дар айни ҳол мавҷуд будани шартҳои алоқа, ки аз иҷрои шартҳои ибтидоӣ ва ниҳоӣ бармеоянд, талаб карда мешавад.

Дар монографияи Знаменская Л.Н. «натиҷаи таҳқиқоти муаллиф оид ба идоракунии лапишҳои чандирии системаҳо, ки бо муодилаи мавҷии якченака ва шартҳои сарҳадии хаттии навъҳои гуногун тавсиф мешаванд, оварда шудааст» [57].

«Дар ин кор равишҳои амалӣ барои сохтани идоракуниҳои сарҳадӣ бо истифода аз усулҳои Даламбер ва Фурйе ба таври муфассал баррасӣ шудаанд. Ҳалли умумишуда аз синфи $\hat{L}_2$ барои намудҳои гуногуни масъалаҳои сарҳадӣ муайян гардидааст. Бо истифода аз баҳоҳои априорӣ теоремаҳо оид ба мавҷудияти ҳал исбот шудаанд ва шакли ошкори ҳал муайян карда шудааст. Ҳалли масъалаҳои идоракунии сарҳадӣ ҳам барои ҳалли классикӣ ва ҳам барои ҳалли умумишуда аз синфи $\hat{L}_2$ ба даст оварда шудааст. Синфи функсияҳои $\hat{L}_2([0 \le x \le l] \times [0 \le t \le T])$ аз ҷониби муаллиф ворид карда шудааст ва он нисбат ба синфи маъмулии L_2 каме маҳдудтар аст, зеро ба функсияҳои синфи $\hat{L}_2$ шартҳои иловагӣ гузошта мешаванд: маҳдудиятҳои онҳо ҳангоми x - и қайдшуда ё ҳангоми t - и қайдшуда низ ба синфи L_2 тааллуқ доранд. Қисме аз натиҷаҳое, ки ба [57] дохил шудаанд, аз ҷониби Знаменская Л.Н. қаблан дар корҳои» [55]-[56] ба нашр расонида шуда буданд.

Дар [56] масъалаи омехтаи зерин баррасӣ шудааст: чунин функсияи $u(x,t) \in \hat{L}_2(Q_T)$ - ро ёбед, ки он муодилаи мавҷии (1.1), шартҳои сарҳадии (1.3) ва шартҳои ниҳоии (1.5) - ро қаноат кунонад, ки дар онҳо $\mu(t), \nu(t) \in L_2[0,T]$, $\varphi_1(x) \in L_2[0,l]$, $\psi_1(x) \in H^{-1}[0,l]$.

Теорема (Знаменская Л.Н.). «*Агар ҳалли* $u(x,t) \in \hat{L}_2(Q_T)$ *барои масъалаи омехтаи муоинашаванда ҳангоми* $0 < T \leq l$ *вуҷуд дошта бошад, пас барои он баҳои априории зерин дуруст аст*» [56]*:*

$$\|u(x,t)\|_{L_2(Q_T)} \leq C(T) \cdot \left[\|\mu(t)\|_{L_2[0,T]} + \|\nu(t)\|_{L_2[0,T]}\right].$$

Дар кори Знаменская Л.Н. «баҳои априорӣ барои ҳалли синфи $\widehat{W}_2^1$ дар ҳолати идоракунӣ дар ду нӯги тор ва $T \leq l$, инчунин барои ҳалли синфҳои $\widehat{W}_2^1$ ва $\hat{L}_2$ дар ҳолати идоракунӣ дар як нӯги тор ва $T \leq 2l$ низ ба даст оварда шудаанд» [56].

В.А. Илйин «масъалаҳои омехта ва масъалаҳои идоракунии сарҳадиро барои муодилаи якченакаи мавҷӣ бо шартҳои сарҳадии ғайрилокалӣ таҳқиқ кардааст. Дар корҳои ӯ масъалаи оптимизатсия барои вақтҳои калон ҳалли худро ёфтааст ва идоракунии сарҳадии оптималӣ дар шакли аналитикӣ пешниҳод шудааст» [86], [87].

Дар корҳои Кулешов А.А. «масъалаҳои омехта барои муодилаи (1.1) бо шартҳои сарҳадии ғайрилокалӣ дар гузориши нисбатан умумӣ баррасӣ гардидаанд» [104]-[106].

Корҳои Е.И. Моисеев ва А.А. Холомеева «низ ба масъалаи идоракунии сарҳадӣ барои муодилаи (1.1) бо шартҳои сарҳадии ғайрилокалӣ дар шаклҳои гуногун бахшида шудаанд, ки дар онҳо ҳалли масъалаҳои баррасишаванда ба таври ошкори аналитикӣ таҳия шудаанд» [113]-[115], [144], [145].

Соли 2009 В.А. Илйин «формулаи намуди Даламберро барои лапишҳои стержени беохир, ки аз ду қисмати зичӣ ва қувваи чандириашон гуногун иборат аст, ҳосил намуд» [88].

Дар кори В.А. Илйин ва П.В. Луференко «масъалаҳои омехта барои муодилаи мавҷии канишдор бо шарти баробарии импедансҳо таҳқиқ карда шудаанд. Онҳо формулаҳои аналитикии ошкор барои масъалаҳои омехтаи муоинашавандаро ба даст овардаанд» [89]. «Натоиҷи монанд аз ҷониби В.А.Илйин ҳангоми якхела будани вақти ҳаракати мавҷ дар ҳар як қисмати стержен ба даст оварда шудааст» [90]. Баъдан, ин мавзуъ дар корҳои Илйин В.А. [90]-[93], Беликов А.В. [34] ва Рогожников А.М. [133]-[134] рушд ёфт. Сазовори қайд аст, ки Рогожников А.М. масъалаҳои омехта ва инчунин масъалаҳои идоракунии сарҳадии оптималиро дар ҳолате таҳқиқ кард, ки стержен аз якчанд қисматҳо иборат аст.

Як қатор корҳои А.И. Егоров ва Л.Н. Знаменская «ба масъалаҳои мушоҳидакунӣ ва идоракунии лапишҳои объектҳои пайвастшуда бо параметрҳои тақсимшуда ва мутамарказ бахшида шудааст» [51]-[53], [57]. Масалан, «онҳо масъалаи хомӯш кардани лапишҳои системаро баррасӣ кардаанд, ки аз якҷояшавии муодилаи мавҷӣ ва муодилаҳои дифференсиалии одии дараҷаи дуюм иборат аст, яъне система аз ду объект ташкил ёфтааст. Лапишҳои як объект бо муодилаи мавҷӣ бо шартҳои сарҳадии ҷинси якум тавсиф карда шудаанд. Лапишҳои объекти дигар бо муодилаҳои дифференсиалии одии дараҷаи дуюм, ки функсияи идоракунӣ дар онҳо ҷойгир аст, тавсиф карда мешаванд» [51].

Дар кори В.Р. Барсегян ва С.В. Солодуша «масъалаи идоракунии сарҳадӣ барои лапишҳои тори якҷинса баррасӣ шудааст, ки дар он, ҳамзамон бо шартҳои классикии сарҳадӣ (ибтидоӣ ва ниҳоӣ), қиматҳои функсияи гардиш дар лаҳзаҳои миёнаи вақт муайян карда мешаванд» [32].

«Масъалаи идоракунӣ бо ҷойивазкунӣ дар як нӯги тор ҳангоми мустаҳкам будани нӯги дигараш ба масъалаи идоракунӣ бо шартҳои сарҳадии сифрӣ оварда шудааст. Тарзи самараноки сохтани идоракунии сарҳадӣ барои равандҳои лапишҳои тор бо қиматҳои додашудаи функсияи гардиш дар лаҳзаҳои фосилавии вақт пешниҳод шудааст. Барои санҷиши таҳқиқот таҷрибаҳои ҳисоббарорӣ гузаронида шуда, графикҳои мувофиқ сохта шудаанд, ки натиҷаҳои бадастомадаи таҳқиқотро тасдиқ мекунанд» [32].

«Қайд кардан ба маврид аст, ки В.Р. Барсегян бо ҳамроҳии шогирдонаш як қатор корҳои илмӣ нашр намудаанд, ки ба назарияи масъалаҳои идоракунии сарҳадӣ бахшида шудаанд» [30], [31]. Соли 2016 монографияи ӯ [33] нашр шуд, ки ба масъалаҳои идоракунии системаҳои динамикии хаттии таркибӣ ва системаҳои бо шартҳои фосилавии бисёрнуқта бо маҳдудиятҳо ба қиматҳои қисмҳои гуногуни координатҳои вектори фазавӣ дар лаҳзаҳои фосилавии вақт бахшида шудааст. Барои системаҳои мушаххаси таркибӣ ва системаҳои бо шартҳои фосилавии бисёрнуқта ҳалли ошкор барои масъалаҳои идоракунӣ, идоракунии оптималӣ ва устуворсозӣ ба даст оварда шудааст.

Дар кори А.А. Андреев ва С.В. Лексина «шартҳои зарурӣ барои функсияҳои ибтидоӣ ва ниҳоӣ ҳосил карда шудаанд, ки онҳо ҳалли масъалаи идоракуниро барои объектҳои бо системаи муодилаҳои мавҷии

$$u_{tt}(x,t) - Au_{xx} = 0$$

тавсифшаванда дар соҳаи $Q_{l,T} = [0,l] \times [0,T]$, ки дар он $u = [u_1(x,t), u_2(x,t)]^T$– вектор-функсия ва A-матритсаи квадратии доимии тартиби дуюм мебошад, таъмин менамоянд. Масъалаи идоракунӣ чунин таҳия шудааст: чунин вектор-функсияҳои $u(0,t) = \mu(t), u(l,t) = \nu(t)$ аз синфи $C^2[0,T]$ ёфта шаванд, ки барои ҳалли масъалаи сарҳадии якум бо шартҳои ибтидоии додашудаи $u(x,0) = \varphi_1(x) \in C^2[0,l], u_t(x,0) = \psi_1(x) \in C^1[0,l]$ дар лаҳзаи вақти T шартҳои ниҳоӣ иҷро шаванд: $u(x,T) = \varphi_2(x) \in C^2[0,l]$ ва $u_t(x,T) = \psi_2(x) \in$ $\in C^1[0,l]$. Барои идоракуниҳои сарҳадии ҷустуҷӯшаванда ифодаҳои аналитикии ошкори навъи Даламбер пешниҳод шудаанд» [27]. Тадқиқоти дигаре, ки ба масъалаҳои гуногуни идоракунӣ барои системаи муодилаҳои мавҷии мазкур бахшида шудааст, дар кори дигари Андреев А.А. ва Лексина С.В. оварда шудааст [28].

Дар кори Лексина С.В. «формулаи умумӣ барои ҳалли муодилаи мавҷии матрисавӣ оварда шудааст. Идоракуниҳои сарҳадӣ бо шартҳои масъалаи дуюми сарҳадӣ навишта шудаанд. Дар ин тадқиқот фарз карда шудааст, ки A – матритсаи квадратии тартиби m-ум бо қиматҳои хоси ҳақиқии мусбат мебошад» [108].

«Дар ду боби аввали диссертатсияи номзадии Лексина С.В. масъалаҳои гуногуни сарҳадӣ ва масъалаҳои идоракунии сарҳадӣ барои системаи муодилаҳои мавҷӣ омӯхта шудаанд. Дар вобастагӣ ба хосиятҳои матрисаи A ҳалли умумӣ барои муодилаи мавҷии матрисавӣ ва шабеҳи формулаи Даламбер ба даст омадааст. Ҳамчунин, функсияҳои идоракунӣ бо шартҳои масъалаҳои якум ва дуюми сарҳадӣ муайян гардидаанд, ки шакли онҳо ба таври муассир ба спектри матрисаи A вобаста мебошад» [109].

Дар диссертатсияи Козлова Е.А. «масъалаҳои идоракунии сарҳадӣ бо шартҳои масъалаи сарҳадии якум барои системаҳои муодилаҳои гиперболии тартиби дуюм таҳқиқ шудаанд. Дар он ҳалли масъалаи идоракунии сарҳадӣ барои системаи муодилаҳои гиперболии тартиби дуюм бо ду тағйирёбандаи новобаста ҳангоми шаклҳои гуногуни коэффитсиентҳои матрисавии коммутативии ба масъала дохилшаванда сохта шудааст. Ҳалли масъалаи идоракунии сарҳадӣ барои муодилаи навъи гиперболии тартиби дуюм бо ду тағйирёбандаи новобаста, ки ҳосилаи омехтаро дар бар мегирад, барои намудҳои гуногуни соҳаҳои характеристикӣ ба даст оварда шудааст» [100]. Инчунин, ҳалли масъалаи идоракунии сарҳадӣ барои системаи муодилаҳои гиперболии тартиби дуюм бо ду тағйирёбандаи новобаста, ки ҳосилаи омехтаро дар бар мегирад, ҳангоми шаклҳои гуногуни коэффитсиентҳои матрисавии коммутативии ба масъала дохилшаванда ёфта шудааст.

Ҳамин тариқ, дар асоси гуфтаҳои боло, мо метавонем хулоса барорем, ки масъалаҳои асосии назарияи идоракунӣ, аз ҷумла идоракуниҳои сарҳадӣ барои муодилаи мавҷии якченакаи якҷинса муфассал омӯхта шудаанд.

1.3. Шарҳи натиҷаҳо оид ба масъалаҳои идоракуни равандҳое, ки бо муодилаи якченакаи телеграфӣ тавсиф меёбанд

Муодилаи якченакаи телеграфӣ амсилаи математикӣ барои шумораи зиёди равандҳои физикӣ мебошад, ки аҳамияти амалӣ доранд. Муодилаи телеграфӣ фишори нафт ё газро дар қубурҳо тасвир мекунад, динамикаи қувваи ҷараёнро ҳангоми паҳншавии мавҷҳои электромагнитӣ дар хатҳои тӯлонӣ тавсиф менамояд, лапишҳои озоди муҳити геологиро (фишорҳои пластикӣ ва ҷойивазкуниҳоро) низ шарҳ медиҳад.

Дар китоби Тихонов А.Н. ва Самарский А.А. «масъалаи Коши барои муодилаи телеграфии

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) + c^2 u(x,t) = 0, c = const \qquad (1.7)$$

бо усули Риман ҳал карда шудааст. Дар айни ҳол ҳалли масъалаи Коши барои муодилаи (1.7) тавассути функсияи Бессели тартиби сифрӣ ифода ёфтааст» [142].

Бояд қайд кард, ки системаи муодилаҳои телеграфӣ барои ҳолате, ки сигнал дар хат бо таҳриф интиқол меёбад, ба муодилаи (1.7) оварда мерасонад.

«Натиҷаҳои ҷолиб, ки ба масъалаи идоракунии сарҳадӣ барои муодилаи телеграфӣ (1.7) дахл доранд, дар кори В.А. Илйин ва Е.И. Моисеев ба даст омадаанд. Аниқаш, дар кори онҳо масъалаи идоракунии сарҳадӣ дар як сарҳад ҳангоми мустаҳкам будани сарҳади дуюм, ки раванд дар давоми вақти T сурат мегирад ва бо ҳалли умумишудаи муодилаи телеграфии (1.7) аз синфе, ки имконияти вуҷуд доштани энергияи сарҳадӣ дорад, тавсиф мешавад, омӯхта шудааст. Идоракунии сарҳадии ҷустуҷӯшаванда бо тарзи аналитикии ошкор бо истифодаи функсияҳои Бесселии ҷинси якум ва сеюм сохта шудааст. Ҳамчунин исбот шудааст, ки лаҳзаи вақти $T = 2l$ критикӣ мебошад» [67].

Дар мақолаи дигар В.А. Илйин ва Е.И. Моисеев «масъалаи идоракунии сарҳадии равандеро, ки бо муодилаи (1.7) тавсиф мешавад, дар ду сарҳад таҳқиқ кардаанд. Шартҳои зарурии вуҷуд доштани идоракуниҳои сарҳадии ҷустуҷӯшаванда ҳосил гардида, ҳамчунин онҳо бо ёрии функсияҳои Бесселии ҷинси якум ва сеюм дар шакли аналитикии ошкор ёфта шудаанд. Муаллифон исбот кардаанд, ки дар ин ҳолат лаҳзаи вақти критикӣ $T = l$ мебошад» [68].

Дар мақолаи Л.Н. Знаменская ва З.И. Потапова [54], ҳамчунин дар боби 6-и монографияи Л.Н. Знаменская «масъалаи идоракунии раванди гузариши ҷараён дар ноқил, ки бо қувваи ҷараёни i ва шиддати ϑ, ки функсияҳои мавқеи нуқтаи x ва вақти t мебошанд, тавсиф мешавад, ҳалли худро ёфтааст. Ин функсияҳо системаи муодилаҳои телеграфии зеринро қонеъ мекунанд:

$$\begin{cases} \vartheta_x + Li_t + Ri = 0, \\ i_x + C\vartheta_t + G\vartheta = 0, \end{cases}$$

ки дар он R ва L – муқовимат ва коэффитсиенти худиндуксия, C ва G – коэффитсиентҳои иқтидор ва ихроҷ, ки барои як воҳиди дарозӣ ҳисоб карда шудаанд. Ҳалли классикии масъалаҳои гуногуни сарҳадӣ ва масъалаҳои идоракунии сарҳадӣ бо ёрии усули Даламбер пешниҳод шудааст» [57].

Дар корҳои И.Н. Смирнов «барои торе, ки аз ду қисмати гуногун иборат аст ва импедансҳои баробар доранд, шакли аналитикии ошкори идоракунии сарҳадӣ бо ҷойивазкунӣ дар ҳар ду канор ёфта шудааст, ки дар вақти кӯтоҳтарини имконпазир равандро аз ҳолати ибтидоии додашуда ба ҳолати ниҳоии ором меоранд» [136]-[138].

«Агар ҷойивазкунии нуқтаи тор x дар лаҳзаи вақти t бо $u(x,t)$ ишора карда шавад, пас раванди лапиши чунин тор, ки дар давоми вақти $0 \leq t \leq T$ амал мекунад, бо муодилаи телеграфии канишдори зерин тавсиф карда мешавад:

$$u_{tt}(x,t) = \begin{cases} a_1^2 u_{xx}(x,t) + c^2 u(x,t) \text{ в } [-l_1 \leq x \leq 0] \times [0 \leq t \leq T], \\ a_2^2 u_{xx}(x,t) + c^2 u(x,t) \text{ в } [0 \leq x \leq l_2] \times [0 \leq t \leq T], \end{cases}$$

ки дар он $a_1 = \sqrt{\frac{k_1}{\rho_1}}$, $a_2 = \sqrt{\frac{k_2}{\rho_2}}$, $k_1 = const -$ коэффитсиенти чандирӣ, $\rho_1 = const -$ зичии хаттии қисмати $-l_1 \leq x \leq 0$, $k_2 = const -$ коэффитсиенти чандирӣ, $\rho_2 = const -$ зичии хаттии қисмати $0 \leq x \leq l_2$, l_1 ва l_2 – ададҳои мусбати ихтиёрӣ мебошанд. Фарз карда мешавад, ки дар нуқтаи пайвастшавии ду қисмат $x = 0$ шартҳои ҳамроҳшуда қонеъ карда мешаванд» [136]:

$$u(0-0,t) = u(0+0,t), k_1 u_x(0-0,t) = k_2 u_x(0+0,t).$$

Дар корҳои И.Н. Смирнов «ҳангоми таҳлили масъалаи пешниҳодшуда, баробарии импедансҳо аҳамияти муҳим дорад, яъне $\rho_1 k_1 = \rho_2 k_2$. Ба монанди корҳои В.А. Илйин ва Е.И. Моисеев, ҳалли масъалаи идоракунии сарҳадӣ, ки И.Н. Смирнов ёфтааст, аз функсияҳои Бессел истифода мебарад ва фосилаи минималии вақт барои ором кардани системаи баррасишаванда лаҳзаи вақти $T = l$ мебошад» [137].

И.Н. Смирнов «инчунин формулаҳои намуди Даламберро барои тори номаҳдуд, ки аз ду қисмати гуногун бо зичӣ ва чандирии ҳархела иборат аст, ҳосил кардааст ва 7 масъалаи омехтаи ибтидоӣ–сарҳадиро барои муодилаи телеграфии (1.7) ҳал кардааст. Барои ҳар гуна фосилаи вақти T шакли ошкори аналитикии ҳалли $u(x,t)$ ҳосил шудааст» [138].

Дар мақолаи муштараки А.А. Кулешов, И.С. Мокроусов ва И.Н. Смирнов «ҳалшавандагии масъалаҳои омехта барои муодилаи телеграфии (1.7) дар синфи L_p, $p \geq 1$ мавриди омӯзиш қарор гирифтааст. Дар ин кор нишон дода шудааст, ки дар росткунҷаи $Q_T = \{0 \leq x \leq l\} \times \{0 \leq t \leq T\}$ ҳалли ягонаи умумишудаи масъалаи омехта барои (1.7) аз $L_p(Q_T)$, $p \geq 1$ дар ҳолати $c \geq 0$ бо шартҳои ибтидоии сифрӣ ва сарҳадии $u(0,t) = \mu(t) \in L_p[0,T], u(l,t) = 0$ мавҷуд аст. Ҳалли масъала дар шакли ошкори аналитикӣ сохта шудааст» [106].

Дар мақолаи Е.И. Моисеев ва Н.И. Юрчук «ҳалли классикӣ ва умумишудаи масъалаҳо барои муодилаи телеграфӣ бо потенсиали Дирак мавриди омӯзиш қарор гирифтааст. Аниқаш, онҳо ҳалли классикӣ ва ҳалли қавӣ-умумишудаи масъалаи Коши ва масъалаи дуюми омехта, ҳамчунин ҳалли қавӣ-умумишудаи (ҳалли классикӣ вуҷуд надорад) масъалаи якуми омехта барои муодилаи телеграфӣ, ки узви озод дар он ба шакли $\gamma\delta(x_0, y_0)u(x,t)$ мебошад, ҳосил кардаанд» [116].

Баррасии масъалаҳои идоракунии сарҳадӣ барои муодилаи телеграфӣ бо коэффитсиенти тағйирёбандаи зерин ҷолиби диққат аст:

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) - q(x,t)u(x,t) = f(x,t). \qquad (1.8)$$

Дар корҳои Абдукаримов М.Ф. ва Критсков Л.В. [11]-[20] барои муодилаи (1.8) баъзе масъалаҳои идоракунии сарҳадӣ дар гузоришҳои гуногун омӯхта шудаанд.

Дар рисолаи номзадии Абдукаримов М.Ф. «аввалин маротиба барои муодилаи (1.8) масъалаҳои идоракунии сарҳадӣ дар ҳолати коэффитсиенти маҳдуд ва ченшаванда омӯзиш ёфтаанд, ки онҳо иборат буданд аз 1) ҷойивазкунӣ дар як сарҳад ҳангоми мустаҳкам будани сарҳади дуюм; 2) ҷойивазкунӣ дар як сарҳад ҳангоми озод будани сарҳади дуюм; 3) ҷойивазкунӣ дар ду сарҳад. Ҳалшавандагии масъалаҳои идоракунии сарҳадӣ дар лаҳзаи критикии вақт исбот карда шудаанд. Ба монанди натиҷаҳои В.А. Илйин ва Е.И. Моисеев, барои ҳолатҳои 1) ва 2) лаҳзаи критикӣ $T = 2l$ ва барои ҳолати 3) $T = l$ мебошад. Ҳамчунин ҳалшавандагии ҳамаи масъалаҳои омехтаи мувофиқ барои муодилаи (1.8) исбот шудааст» [21]. Илова бар ин, «масъалаҳои омехта ва масъалаҳои идоракунии сарҳадӣ барои муодилаи лапишҳои маҷбурии тор ($q(x,t) \equiv 0$) барои лаҳзаи вақти дилхоҳи $T > 0$ таҳқиқ шудаанд. Дар ҳолатҳои бисёрқимата муайян шудани идоракуниҳои сарҳадӣ, масъалаи оптимизатсия ҳал шудааст, ки он дар байни ҳамаи идоракуниҳо аз интихоби он идоракуние, ки ба интеграли энергияи сарҳадӣ қимитаи минималӣ медиҳад, иборат аст» [21]. Баъдан, натиҷаҳои рисолаи номзадии Абдукаримов М.Ф. дар шакли монография нашр гардидааст [23].

Дар кори Л.В. Критсков «раванде, ки дар росткунҷаи $Q_T = \{0 \le x \le l\} \times \times \{0 \le t \le T\}$ бо муодилаи (1.8) тавсиф шудааст, бо шарти $u(l,t) = 0$ мавриди омӯзиш қарор гирифтааст, ки коэффитсиенти $q(x,t)$ танҳо дар Q_T бо квадрат замшаванда мебошад. Ӯ исбот кардааст, ки барои ин раванд масъалаи идоракунии сарҳадӣ бо шарти $u(0,t)=\mu(t)$ ҳангоми $T=2l$ дар синфи $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ бо талаботи камтарин барои суфтагии функсияҳои ибтидоӣ ва ниҳоӣ ва иҷрои шартҳои мувофиқат ҳангоми $x=l$ ҳалли ягона дорад» [103].

Қайд кардан зарур аст, ки масъалаҳои идоракунӣ дар фосилаҳои вақти аз критикӣ калон барои коэффитсиенти бефосила ва ғайриманфии $q(x,t)\equiv q(x)$ дар корҳои В.А. Коморник [2] ва М.М. Потапов [126] низ мавриди омӯзиш қарор гирифтаанд.

Дар рисолаи доктории Абдукаримов М.Ф. «барои муодилаи (1.8) бо коэффитсиенти тағйирёбанда аз синфи функсияҳои бо квадрат замшаванда теоремаҳо оид ба мавҷудият ва ягонагии ҳалли масъалаҳои идоракунии сарҳадӣ исбот карда шудаанд, ки онҳо бо истифодаи ҷойивазкунӣ ё қувваи чандирӣ дар ҳолатҳои зерин амалӣ карда мешаванд: амали идоракунӣ дар як сарҳад ҳангоми мустаҳкам будани сарҳади дуюм; амали идоракунӣ дар як сарҳад ҳангоми озод будани сарҳади дуюм; амали идоракунӣ дар ду сарҳад ҳангоми вақти критикӣ» [22]. Ҳамчунин теоремаҳо оид ба ҳалшавандагии масъалаҳои омехтаи мувофиқ исбот карда шудаанд. Натиҷаҳои рисолаи доктории [22] дар монографияи [24] нашр шудаанд.

Таҳлили гузаронидашуда нишон медиҳад, ки масъалаҳои идоракунии сарҳадӣ барои муодилаи телеграфӣ бо коэффитсиенти доимии (1.7) ва махсусан барои муодилаи телеграфӣ бо коэффитсиенти тағйирёбандаи (1.8) нисбатан кам омӯхта шудаанд. Қайд кардан зарур аст, ки сатҳи мушкилӣ дар омӯзиши масъалаҳои идоракунии сарҳадӣ барои муодилаи (1.8) ба он вобаста аст, ки ҳалли аналитикии ошкори он пешбинӣ намешавад.

Ин кори диссертасионӣ ҳамчун идомаи мантиқии таҳқиқоти Абдукаримов М.Ф. ва Критсков Л.В. мебошад. Дар он масъалаҳои идоракунии сарҳадии таркибӣ ва масъалаҳои омехтаи мувофиқ барои муодилаи (1.8) таҳқиқ карда мешаванд, ҳамчунин масъалаи оптимизатсия дар ҳолати бисёрқимата муайян шудани идоракуниҳои сарҳадӣ баррасӣ мегардад.

БОБИ 2.
ИДОРАКУНИИ САРҲАДИИ РАВАНДҲОЕ, КИ БО МУОДИЛАИ ТЕЛЕГРАФӢ БО КОЭФФИТСИЕНТИ ТАҒЙИРЁБАНДА ТАВСИФ МЕЁБАНД, ТАВАССУТИ ҶОЙИВАЗКУНӢ ДАР САРҲАДИ ЧАП ВА ҚУВВАИ ЧАНДИРӢ ДАР САРҲАДИ РОСТ

Дар ин боб «бо маънои ҳалли умумишудаи муодилаи телеграфии якченака бо коэффитсиенти тағйирёбанда аз синфи L_2-и намуди

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) - q(x,t)u(x,t) = f(x,t), 0 < x < l, 0 < t < T$$

масъалаи идоракунии сарҳадии равандҳое, ки бо ин муодила тавсиф мешаванд» [23], [24], мавриди таҳқиқ қарор мегирад. Идоракунӣ тавассути ҷойивазкунӣ дар сарҳади чапи $x = 0$ ва қувваи чандирӣ дар сарҳади рости $x = l$ амалӣ мегардад.

Боб аз чор банд иборат аст. Дар банди якум гузориши масъала ва таърифҳои зарурӣ оварда мешаванд. Дар банди дуюм масъалаи мавҷудият ва ягонагии ҳалли масъалаҳои омехта барои муодилаи баррасишаванда таҳқиқ шудааст. Ба натиҷаи асосии ин боб – исботи мавҷудияти ҳалли масъалаи идоракунии сарҳадӣ ҳангоми $T = l$ ва ягонагии он ҳангоми $T \leq l$ банди сеюм бахшида шудааст. Дар банди чорум идоракуниҳои сарҳадии оптималӣ, ки тавассути ҷойивазкунӣ дар сарҳади чап ва қувваи чандирӣ дар сарҳади рост амалӣ мегарданд, дар фосилаи ихтиёрии ба қадри кофӣ калони вақт барои равандҳое, ки бо муодилаи лапишҳои маҷбурии тор тавсиф мешаванд, сохта шудаанд. Ин муодила ҳолати хусусии муодилаи баррасишаванда мебошад, яъне он ҳангоми $q(x,t) \equiv 0$ будан ҳосил мешавад. Барои идоракуниҳои сарҳадии оптималии ҷустуҷӯшаванда ифодаҳои аналитикии ошкор ёфта шудаанд. Қайд менамоем, ки масъалаи идоракунии сарҳадии оптималӣ аз ёфтани чунин функсияҳои $\mu(t) \in W_2^1[0,T]$, $\nu(t) \in L_2[0,T]$ иборат аст, ки ба интеграли энергияи сарҳадӣ қимати минималӣ медиҳанд.

2.1. Гузориши масъалаҳо ва таърифҳои асосӣ

Дар росткунҷаи пӯшидаи $Q_T = [0 \le x \le l] \times [0 \le t \le T]$ се масъалаи зеринро баррасӣ менамоем:

– **масъалаи омехтаи I:**

$$Lu \equiv u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) - q(x,t)u(x,t) = f(x,t), \ \ 0 < x < l, \ \ 0 < t < T, \quad (2.1)$$

$$u(0,t) = \mu(t), \ \ u_x(l,t) = \nu(t) \quad \text{ҳангоми} \quad 0 \le t \le T, \quad (2.2)$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \ \ u_t(x,0) = \psi(x) \quad \text{ҳангоми} \quad 0 \le x \le l, \quad (2.3)$$

ки дар он $\mu(t) \in W_2^1[0,T]$, $\nu(t) \in L_2[0,T]$, $\varphi(x) \in W_2^1[0,l]$, $\psi(x) \in L_2[0,l]$, $f(x,t) \in L_2(Q_T)$ ва шарти мувофиқат иҷро мегардад:

$$\mu(0) = \varphi(0); \quad (2.4)$$

– **масъалаи омехтаи II:** муодилаи (2.1) бо шартҳои сарҳадии (2.2) ҳангоми $0 \le t \le T$ ва шартҳои ниҳоии

$$u(x,T) = \varphi_1(x), \ u_t(x,T) = \psi_1(x) \ \ \text{ҳангоми} \quad 0 \le x \le l, \quad (2.5)$$

ки дар он $\mu(t) \in W_2^1[0,T]$, $\nu(t) \in L_2[0,T]$, $\varphi_1(x) \in W_2^1[0,l]$, $\psi_1(x) \in L_2[0,l]$, $f(x,t) \in L_2(Q_T)$ ва шарти мувофиқат иҷро мешавад:

$$\mu(T) = \varphi_1(0); \quad (2.6)$$

– **масъалаи идоракунии сарҳадии III:** муодилаи (2.1) бо шартҳои сарҳадии (2.2), шартҳои ибтидоии (2.3) ва шартҳои ниҳоии (2.5), ки дар он $\mu(t) \in W_2^1[0,T]$, $\nu(t) \in L_2[0,T]$, $\varphi(x), \varphi_1(x) \in W_2^1[0,l]$, $\psi(x), \psi_1(x) \in L_2[0,l]$, $f(x,t) \in L_2(Q_T)$ ва шартҳои мувофиқати (2.4), (2.6) иҷро мешаванд.

Дар масъалаҳои I-III фарз карда мешавад, ки коэффитсиенти тағйирёбандаи $q(x,t)$ танҳо ба синфи $L_2(Q_T)$ тааллуқ дорад.

Ҳалли масъалаҳои гузошташуда бо маънои умумишуда фаҳмида шуда, дар синфи $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ ҷустуҷӯ мегардад, ки бори аввал аз ҷониби В.А. Илйин соли 2000-ум пешниҳод шудааст [65]. Таърифи ин синфро меорем.

Таърифи 2.1. «Мегӯянд, ки функсияи дутағйирёбандаи $u(x,t)$ ба синфи $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ тааллуқ дорад, агар он дар росткунҷаи пӯшидаи Q_T бефосила бошад ва дар он ҳар ду ҳосилаи хусусии умумишудаи тартиби якумро дошта бошад, ки ҳар кадоми онҳо ба синфи $L_2(Q_T)$ мансубанд ва, илова бар ин, ҳангоми ҳар як $t \in [0,T]$ ба синфи $L_2[0 \le x \le l]$ ва ҳангоми ҳар як $x \in [0,l]$ ба синфи $L_2[0 \le t \le T]$ тааллуқ доранд» [65].

Барои таъриф додани ҳалли масъалаҳо инчунин синфи $\widehat{W}_2^2(Q_T)$, ки дар кори зикршуда ворид гардидааст, истифода мешавад.

Таърифи 2.2. «Мегӯянд, ки функсияи дутағйирёбанда $u(x,t)$ ба синфи $\widehat{W}_2^2(Q_T)$ тааллуқ дорад, агар худи функсия ва ҳосилаҳои хусусии тартиби якуми он дар росткунҷаи пӯшидаи Q_T бефосила бошанд ва агар дар ин росткунҷа ҳамаи ҳосилаҳои хусусии умумишудаи тартиби дуюм мавҷуд бошанд, ки ҳар кадоми онҳо ба синфи $L_2(Q_T)$ мансубанд ва, илова бар ин, ҳангоми ҳар як $t \in [0,T]$ ба синфи $L_2[0 \le x \le l]$ ва ҳангоми ҳар як $x \in [0,l]$ ба синфи $L_2[0 \le t \le T]$ тааллуқ дошта бошанд» [65].

Акнун таърифҳои ҳалли масъалаҳои гузошташуда оварда мешаванд.

Таърифи 2.3. Ҳалли умумишудаи масъалаи омехтаи I аз синфи $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ гуфта, чунин функсияи $u(x,t)$-ро меномем, ки айнияти интегралии

$$\int_0^l \int_0^T u(x,t) L\Phi(x,t)\,dx\,dt + \int_0^l \varphi(x)\Phi_t(x,0)\,dx - \int_0^T \psi(x)\Phi(x,0)\,dx -$$
$$- \int_0^T \mu(t)\Phi_x(0,t)\,dt - \int_0^T \nu(t)\Phi(l,t)\,dt = \int_0^l \int_0^T f(x,t)\Phi(x,t)\,dx\,dt \qquad (2.7)$$

-ро барои ҳар гуна функсияи озмоишии $\Phi(x,t) \in \widehat{W}_2^2(Q_T)$, ки ба шартҳои $\Phi(0,t) = \Phi_x(l,t) \equiv 0$ ҳангоми $0 \le t \le T$ ва $\Phi(x,T) = \Phi_t(x,T) \equiv 0$ ҳангоми $0 \le x \le l$ итоат мекунад, қонеъ мегардонад ва инчунин шарти дуюми сарҳадии (2.2) ва шарти дуюми ибтидоии (2.3)-ро қариб дар ҳама ҷойи $[0,l]$ қонеъ месозад, дар ҳоле ки шарти якуми сарҳадии (2.2) ва шарти якуми ибтидоии (2.3) барои ҳамаи $x \in [0, l]$ иҷро мегарданд.

Таърифи 2.4. Ҳалли умумишудаи масъалаи омехтаи II аз синфи $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ гуфта, чунин функсияи $u(x,t)$-ро меномем, ки айнияти (2.7)-ро барои ҳар гуна функсияи озмоишии $\Phi(x,t) \in \widehat{W}_2^2(Q_T)$ бо шартҳои $\Phi(0,t) = \Phi_x(l,t) \equiv 0$ ҳангоми $0 \le t \le T$ ва $\Phi(x,0) = \Phi_t(x,0) \equiv 0$ ҳангоми $0 \le x \le l$ қонеъ мегардонад. Дар назар дошта мешавад, ки ба ҷойи интеграли дуюм интеграли бо аломати «минус» гирифташудаи $\int_0^l [\varphi_1(x)\Phi_t(x,T) - \psi_1(x)\Phi(x,T)]\,dx$ меистад. Ғайр аз ин, функсияи $u(x,t)$ шарти якуми сарҳадии (2.2) ва шарти якуми ниҳоии (2.5)-ро барои ҳамаи $x \in [0, l]$ ва шарти дуюми сарҳадии (2.2) ва шарти дуюми ниҳоии (2.5)-ро қариб дар ҳама ҷойи $[0, l]$ қонеъ месозад.

Таърифи 2.5. Ҳалли умумишуда аз синфи $\widehat{W}_2^1(Q_T)$-и масъалаи идоракунии сарҳадии III гуфта, ҳалли масъалаи омехтаи I - ро аз ҳамин синф бо чунин функсияи $\mu(t) \in W_2^1[0,T]$, ки барои он шартҳои мувофиқат (2.4) ва (2.6) иҷро мегарданд ва функсияи $\nu(t) \in L_2[0,T]$ меномем, ки шарти якуми ниҳоӣ (2.5) барои ҳамаи $x \in [0, l]$ ва шарти дуюми ниҳоӣ (2.5) қариб дар ҳама ҷойи $[0, l]$ иҷро шуда бошанд.

2.2. Яккимата ҳалшавандагии масъалаҳои омехта

Дар ин банд саволи мавҷудият ва ягонагии ҳалли масъалаҳои омехтаи I ва II, ки дар банд 2.1 гузошта шудаанд, мавриди таҳқиқ қарор мегирад.

Тасдиқи 2.1. *Агар $q(x,t)$ унсури сифрии синфи $L_2(Q_T)$ бошад, пас барои ҳар гуна $T > 0$ ҳам масъалаи омехтаи I ва ҳам масъалаи омехтаи II аз синфи $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ аз як ҳал зиёд дошта наметавонад.*

Исбот. Нақшаи исботи тасдиқи 2.1-ро барои масъалаи омехтаи I ба таври мухтасар баён мекунем. Фарз мекунем, ки барои масъалаи омехтаи I ду ҳалли

$u_1(x,t)$ ва $u_2(x,t)$ аз синфи $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ мавҷуданд. Он гоҳ фарқи онҳо $u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ ҳалли масъалаи зерин мегардад:

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0,\ 0 < x < l,\ \ 0 < t < T,$$
$$u(0,t) \equiv 0,\ \ \ u_x(l,t) \equiv 0 \quad \text{\textit{ҳангоми}}\ \ 0 \le t \le T,$$
$$u(x,0) \equiv 0,\ \ \ u_t(x,0) \equiv 0 \ \ \text{ҳангоми}\ \ 0 \le x \le l.$$

Бо дарназардошти ин, айнияти интегралии (2.7) шакли зеринро мегирад:

$$\int_0^T \int_0^l u(x,t)[\Phi_{tt}(x,t) - \Phi_{xx}(x,t)]dxdt = 0.$$

Акнун функсияи $\Phi(x,t)$-ро дар шакли

$$\Phi(x,t) = \vartheta(x) \cdot f(t)$$

менависем, ки дар он $f(t)$ – ҳар гуна функсияи ду маротиба бефосила дифференсиалпазир дар тамоми хатти рости ҳақиқӣ мебошад, ки ҳангоми $t \ge t_0,\ \ t_0 < l$ ба сифр баробар аст ва $\vartheta(x)$ – яке аз функсияҳои хоси масъалаи спектралии

$$\begin{cases} \vartheta''(x) + \lambda\vartheta(x) = 0, \\ \vartheta(0) = \vartheta_x(l) = 0 \end{cases}$$

мебошад, ки дар он λ – қимати хоси мувофиқ аст. Нишон додан душвор нест, ки $\vartheta_n(x) = \sin\frac{\pi(2n+1)}{2l}x,\ n \in Z$. Барои анҷом додани исботи тасдиқи 2.1 лозим меояд, ки ҳамаи мулоҳизаҳои дар кори [60] овардашударо такрор намуда, инчунин аз далели маълуми кори [135] истифода бурда шавад.

Бе маҳдуд кардани умумият, дар идома масъалаи омехтаи I-ро дар ҳолате баррасӣ менамоем, ки дар он $\varphi(x) \equiv 0$ дар порчаи $[0,l]$, $\psi(x)$ унсури сифрии синфи $L_2[0,l]$ мебошад ва қиматҳои сарҳадӣ $\mu(t)$ ва $\nu(t)$ функсияҳои ихтиёрӣ аз синфҳои мутаносибан $W_2^1[0,T]$ ва $L_2[0,T]$ ҳастанд. Дар ин ҳолат, мувофиқи шартҳои мувофиқат (2.4) ва (2.6), бояд шартҳои $\mu(0) = 0$ ва $\mu(T) = 0$ иҷро гарданд.

Бо рамзҳои $\underline{\mu}(t)$ ва $\underline{\nu}(t)$ функсияҳоеро ишора мекунем, ки мутаносибан бо $\mu(t)$ ва $\nu(t)$ ҳангоми $0 \leq t \leq T$ мувофиқат мекунанд ва ҳангоми $t < 0$ ҳамчун сифр идома дода шудаанд. Аён аст, ки дар айни ҳол $\underline{\mu}(t) \in W_2^1[-\varepsilon, T]$ $\forall \varepsilon > 0$ ва $\underline{\nu}(t) \in L_2[-\delta, T]$ $\forall \delta > 0$.

Тасдиқи 2.2. *Бигзор, $T \leq l$ ва $q(x,t)$ унсури сифрии синфи $L_2(Q_T)$ бошад. Он гоҳ ҳалли ягонаи умумишудаи масъалаи омехтаи I аз синфи $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ бо баробарии зерин муайян мегардад:*

$$u(x,t) = \underline{\mu}(t-x) + \int_0^{t+x-l} \underline{\nu}(\tau) d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-t+\tau}^{t+x-\tau} f(\xi,\tau) d\xi d\tau, \qquad (2.8)$$

ки дар он функсияи $f(x,t)$ аз функсияи қисми рости муодилаи (2.1) бо роҳи идомадиҳии тоқ нисбат ба нуқтаи $x = 0$ ва идомадиҳии ҷуфт нисбат ба нуқтаи $x = l$ ба даст оварда шудааст.

Исбот. Бо истифода аз хосиятҳои функсияҳои $f(x,t)$, $\mu(t)$ ва $\nu(t)$ ба осонӣ санҷидан мумкин аст, ки ҳангоми $T \leq l$ функсияи (2.8) барои ҳамаи $x \in [0,l]$ шарти сарҳадии $u(0,t) = \mu(t)$ ва шарти ибтидоии $u(x,0) \equiv 0$-ро қонеъ месозад, ҳамчунин шарти сарҳадии $u_x(l,t) = \nu(t)$ ва шарти ибтидоии $u_t(x,0) = 0$ -ро қариб дар ҳама ҷойи порчаи $[0,l]$ қаноат мекунонад. Пас, боқӣ мемонад нишон диҳем, ки ин функсия айнияти интегралии (2.7)-ро қонеъ месозад, ки дар он $\varphi(x) \equiv 0$ $\forall x \in [0,l]$ ва $\psi(x)$ унсури сифрии синфи $L_2[0,l]$ мебошад, яъне баробарии

$$L_{u,f,\Phi} \equiv \int_0^l \int_0^T u(x,t)[\Phi_{tt}(x,t) - \Phi_{xx}(x,t)] dx dt - \int_0^T \mu(t) \Phi_x(0,t) dt -$$

$$- \int_0^T \nu(t) \Phi(l,t) dt - \int_0^l \int_0^T f(x,t) \Phi(x,t) dx dt = 0 \qquad (2.9)$$

-ро барои ҳар гуна функсияи $\Phi(x,t)$ аз таърифи 2.3.

Бо истифода аз интегралгирӣ аз рӯйи ҳиссаҳо ба қисми чапи баробарии (2.9) шакли зеринро медиҳем:

$$L_{u,f,\Phi} = \int_0^T \int_0^l [u_x(x,t)\Phi_x(x,t) - u_t(x,t)\Phi_t(x,t)]\, dxdt - \int_0^T \nu(t)\Phi(l,t)dt -$$

$$-\int_0^T \int_0^l f(x,t)\Phi(x,t)dxdt. \qquad (2.10)$$

Ҳамин тавр, барои анҷоми исбот кофист нишон диҳем, ки қисми рости (2.10) ба сифр баробар аст.

Бо $\hat{f}(x,t)$ функсияи ибтидоии дилхоҳи функсияи $f(x,t)$-ро аз рӯйи x ишора мекунем. Функсияи зеринро ворид менамоем:

$$U(x,t) = -\underline{\mu}(t-x) + \int_0^{t+x-l} \underline{\nu}\ (\tau)d\tau +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t \hat{f}(x+t-\tau,\tau)d\tau + \frac{1}{2}\int_0^t \hat{f}(x-t+\tau,\tau)d\tau.$$

Ба осонӣ санҷида мешавад, ки функсияи $U(x,t)$ ба синфи $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ тааллуқ дорад ва барои қариб ҳамаи нуқтаҳои росткунҷаи Q_T баробариҳои зерин иҷро мешаванд:

$$U_x(x,t) = u_t(x,t); \qquad U_t(x,t) - \hat{f}(x,t) = u_x(x,t).$$

Бо дарназардошти ин баробариҳо дорем:

$$\int_0^T \int_0^l U_t(x,t)\Phi_x(x,t)\, dx\, dt - \int_0^T \int_0^l \hat{f}(x,t)\Phi_x(x,t)\, dxdt -$$

$$-\int_0^T \int_0^l U_x(x,t)\Phi_t(x,t)\, dxdt - \int_0^T \nu(t)\Phi(l,t)\, dt -$$

$$-\int_0^T\int_0^l f(x,t)\Phi(x,t)dxdt = -\int_0^T\int_0^l U(x,t)\Phi_{xt}(x,t)dxdt +$$

$$+\int_0^T\int_0^l f(x,t)\Phi(x,t)dxdt - \int_0^T \Phi(l,t)\hat{f}(l,t)\,dt - \int_0^T \Phi_t(l,t)U(l,t)\,dt +$$

$$+\int_0^T\int_0^l U(x,t)\Phi_{tx}(x,t)dxdt - \int_0^T \nu(t)\Phi(l,t)dt - \int_0^T\int_0^l f(x,t)\Phi(x,t)dxdt =$$

$$= -\int_0^T \Phi(l,t)\hat{f}(l,t)\,dt - \int_0^T \Phi_t(l,t)U(l,t)\,dt - \int_0^T \Phi(l,t)\nu(t)\,dt =$$

$$= -\int_0^T \Phi(l,t)\hat{f}(l,t)\,dt + \int_0^T \Phi(l,t)U_t(l,t)dt - \int_0^T \Phi(l,t)\,\nu(t)\,dt =$$

$$= -\int_0^T \Phi(l,t)\hat{f}(l,t)dt + \int_0^T \Phi(l,t)U_x(l,t)\,dt + \int_0^T \Phi(l,t)\hat{f}(l,t)\,dt -$$

$$-\int_0^T \Phi(l,t)\nu(t)\,dt = \int_0^T \Phi(l,t)\nu(t)\,dt - \int_0^T \Phi(l,t)\nu(t)\,dt = 0.$$

Тасдиқи 2.2 исбот шуд.

Акнун масъалаи омехтаи I-ро бо шартҳои ибтидоии сифрии (2.3), бо функсияҳои сарҳадии ихтиёрии $\mu(t) \in W_2^1[0,T]$ ва $\nu(t) \in L_2[0,T]$, ки аввалинашон ба шарти мувофиқати $\mu(0) = 0$ тобеъ аст, инчунин бо функсияҳои ихтиёрии $f(x,t)$, $q(x,t) \in L_2(Q_T)$ баррасӣ менамоем. Тасдиқи зерин дуруст аст.

Леммаи 2.1. *Бигзор,* $T \leq l$ ва $q(x,t)$, $f(x,t) \in L_2(Q_T)$ *бошанд. Он гоҳ ҳалли умумишудаи масъалаи омехтаи I аз синфи* $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ *ҳар гуна функсияи дар* Q_T *маҳдуди* $u(x,t)$ *мебошад, ки баробарии зеринро қонеъ менамояд:*

$$u(x,t) = \underline{\mu}(t-x) + \int_0^{t+x-l} \underline{\nu}(\tau)d\tau +$$

$$+\frac{1}{2}\int_{0}^{t} d\tau \int_{|x-t+\tau|}^{l-|x+t-l-\tau|} [q(\xi,\tau)u(\xi,\tau)+f(\xi,\tau)]\,d\xi +$$

$$+\frac{1}{2}\int_{0}^{x+t-l} d\tau \int_{2l-x-t+\tau}^{l} [q(\xi,\tau)u(\xi,\tau)+f(\xi,\tau)]\,d\xi. \qquad (2.11)$$

Барои ба даст овардани баробарии (2.11) кофист, ки дар формулаи (2.8) хосиятҳои функсияи $f(x,t)$-и берун аз ҳудудҳои росткунҷаи Q_T давомдодашударо ба назар гирифта, пас аз он дар муодилаи (2.1) ба ҷойи $f(x,t)$ ифодаи $q(x,t)u(x,t)+f(x,t)$-ро гузорем.

Эзоҳи 2.1. Агар $\underline{\mu}(t) \in W_2^2(-\varepsilon_1, T]\ \ \forall\, \varepsilon_1 > 0$, $\underline{\nu}(t) \in W_2^1(-\varepsilon_2, T]\ \ \forall\, \varepsilon_2 > 0$, коэффитсиенти $q(x,t)$ ҳамроҳ бо ҳосилаи он $q_x(x,t)$ дар Q_T маҳдуд бошанд ва функсияи $f(x,t)$ ба синфи $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ тааллуқ дошта бошад, он гоҳ ҳалли масъалаи омехтаи I, ки дар леммаи 2.1 баррасӣ шудааст, ба синфи $\widehat{W}_2^2(Q_T)$ мансуб хоҳад буд.

Теоремаи 2.1. *Фарз мекунем, ки $T \le l$ ва $q(x,t)$, $f(x,t) \in L_2(Q_T)$ бошанд. Он гоҳ муодилаи интегралии (2.11) ҳалли ягонаи маҳдуд дорад. Ғайр аз ин, агар шарти $f(x,t) \equiv 0$ иҷро гардад, пас дар $\left\{(x,t)\colon 0 \le t \le \frac{l}{2}, t \le x \le l-t\right\} \cap Q_T$, $u(x,t) \equiv 0$ мешавад.*

Исбот. Теоремаи овардашуда барои ҳар як қимати $T \le l$ ба тарзи монанд исбот карда мешавад. Аз ин рӯ, бе маҳдуд кардани умумият, ҳолати $T = l$ -ро баррасӣ менамоем. Мувофиқи нақшае, ки дар кори [15] пешниҳод шудааст, квадрати Q_l -ро бо хатҳои характеристикии $x = t$ ва $x = l - t$ ба чор қисм ҷудо мекунем. Дар соҳаҳои ҳосилшуда: секунҷаи $\Delta_1 = \left\{(x,t)\colon 0 \le t \le \frac{l}{2},\ t \le x \le l-t\right\}$, ки ба асоси поёнии Q_l часпидааст; секунҷаҳои $\Delta_2 = \left\{(x,t)\colon\ 0 \le t \le l,\ \ 0 \le x \le \le \frac{l}{2} - \left|t - \frac{l}{2}\right|\right\}$ ва $\Delta_3 = \left\{(x,t)\colon 0 \le t \le l, \frac{l}{2} + \left|t - \frac{l}{2}\right| \le x \le l\right\}$, ки ба тарафҳои пахлуии Q_l часпидаанд; секунчаи $\Delta_4 = \left\{(x,t): \frac{l}{2} \le t \le l, l-t \le x \le t\right\}$, ки ба асоси болоии Q_l часпидааст, $u_j(x,t) = u(x,t)$ ҳангоми $(x,t) \in \Delta_j$, $j = \overline{1,4}$ мегузорем ва муносибати (2.11)-ро пай дар пай барои нуқтаҳои $(x\,,\,t\,)$, ки ба соҳаҳои Δ_1, Δ_2, Δ_3 ва Δ_4 тааллуқ доранд, ҳамчун муодилаҳои интегралӣ барои ёфтани $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$, $u_3(x,t)$ ва $u_4(x,t)$ баррасӣ менамоем.

Ҳангоми $j = 1$ муносибати (2.11) шакли зеринро мегирад:

$$u_1(x,t) = \frac{1}{2}\iint\limits_{D_1} f(\xi,\tau)d\xi d\tau + \frac{1}{2}\iint\limits_{D_1} q(\xi,\tau)u_1(\xi,\tau)d\xi d\tau, \qquad (2.12)$$

ки дар он $D_1 = \{(\xi,\tau): 0 \le \tau \le t;\ x-t+\tau \le \xi \le x+t-\tau\} \subset \triangle_1$ мебошад.

Муодилаи (2.12)-ро дар шакли операторӣи зерин менависем:

$$u_1(x,t) = \frac{1}{2}\iint\limits_{D_1} f(\xi,\tau)d\xi d\tau + [N_1 u_1](x,t),$$

ки дар он оператори

$$[N_1\chi](x,t) = \frac{1}{2}\iint\limits_{D_1} q(\xi,\tau)\chi(\xi,\tau)d\xi d\tau$$

дар фазои $L_2(\Delta_1)$ маҳдуд амал мекунад ва барои дараҷаҳои он баҳои зерин дуруст аст:

$$\left|\left[N_1^k\chi\right](x,t)\right| \le \operatorname*{Sup}_{(x,t)\in\Delta_1}|\chi(x,t)|\cdot\|q\|^k{}_{L_2(\Delta_1)}\cdot\frac{t^k}{\left(\sqrt{2}\right)^k\sqrt{(2k)!}},\ \ k\in N. \qquad (2.13)$$

Дурустии баҳои (2.13)-ро бо усули индуксияи математикӣ исбот мекунем. Бигзор $k = 1$ бошад. Он гоҳ, мувофиқи нобаробарии Коши–Буняковский, дорем:

$$|[N_1\chi](x,t)| = \frac{1}{2}\left|\iint\limits_{D_1} q(\xi,\tau)\chi(\xi,\tau)d\xi d\tau\right| \le$$

$$\leq \frac{1}{2} \operatorname*{Sup}_{(x,t)\in\Delta_1} |\chi(x,t)| \sqrt{\iint\limits_{D_1} q^2(\xi,\tau) d\xi d\tau} \cdot \sqrt{\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} d\xi} \leq$$

$$\leq \operatorname*{Sup}_{(x,t)\in\Delta_1} |\chi(x,t)| \cdot \|q\|_{L_2(\Delta_1)} \cdot \frac{t}{2}.$$

Фарз мекунем, ки ҳангоми $k = n$ баҳои (2.13) дуруст аст. Ҳолати $k = n + 1$-ро баррасӣ мекунем:

$$\left|\left[N_1{}^{n+1}\chi\right](x,t)\right| \leq \frac{1}{2} \iint\limits_{D_1} |q(\xi,\tau)| \cdot |[N_1^n \chi]|(\xi,\tau) d\xi d\tau \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} \operatorname*{Sup}_{(x,t)\in\Delta_1} |\chi(x,t)| \cdot \|q\|^n{}_{L_2(\Delta_1)} \cdot \frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^n \sqrt{(2n)!}} \cdot \sqrt{\int\limits_0^t \tau^n d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} |q(\xi,\tau)| d\xi}\,.$$

Интеграли охирин аз

$$\|q\|_{2,\Delta_1} \cdot \sqrt{\int\limits_0^t \tau^{2n} d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} d\xi} = \|q\|_{2,\Delta_1} \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot t^{n+1}}{\sqrt{(2n+1)(2n+2)}}$$

калон нест, ки ин баҳои (2.13)-ро исбот мекунад.

Баҳои бадастомада нишон медиҳад, ки муодилаи (2.12) муодилаи интегралии навъи Волтерраи ҷинси дуюм мебошад. Агар $f(x,t) \equiv 0$ бошад, он гоҳ ин муодила ҳамчун муодилаи якҷинса танҳо ҳалли сифрӣ дорад, яъне дар ин ҳолат дар соҳаи Δ_1 $u_1(x,t) \equiv 0$ мешавад. Агар $f(x,t)$ функсияи ихтиёрӣ аз синфи $L_2(Q_T)$ бошад, пас ҳалли муодилаи (2.12)-ро метавон дар шакли қатори мутлақ наздикшавандаи Нейман навишт:

$$u_1(x,t) = \left(I + \sum_{k=1}^{\infty} N_1^k\right) F_1(x,t), \quad F_1(x,t) = \frac{1}{2} \iint\limits_{D_1} f(\xi,\tau) d\xi d\tau.$$

Бигзор $j = 2$ бошад, он гоҳ дорем:

$$u_2(x,t) = \mu(t-x) + \frac{1}{2}\iint\limits_{D^*} f(\xi,\tau)d\xi d\tau +$$

$$+\frac{1}{2}\iint\limits_{D_{21}} q(\xi,\tau)u_1(\xi,\tau)d\xi d\tau + \frac{1}{2}\iint\limits_{D_{22}} q(\xi,\tau)u_2(\xi,\tau)d\xi d\tau\,, \qquad (2.14)$$

ки дар ин ҷо

$$D_{21} = \left\{(\xi,\tau)\colon 0 \le \tau \le \frac{t+x}{2};\ \frac{t-x}{2} + \left|\frac{t-x}{2} - \tau\right| \le \xi \le x+t-\tau\right\} \subset \Delta_1;$$

$$D_{22} = \left\{(\xi,\tau)\colon \frac{t-x}{2} \le \tau \le t;\ |x-t+\tau| \le \xi \le \frac{x+t}{2} - \left|\tau - \frac{x+t}{2}\right|\right\} \subset \Delta_2;$$

$$D^* = D_{21} \cup D_{22}.$$

Азбаски соҳаи D_{21} пурра дар соҳаи Δ_1 ҷойгир аст, пас дар (2.14) интеграли дуюм аллакай функсияи маълуми $u_1(x,t)$ -ро дар бар мегирад. Бо ворид намудани ишораҳои

$$F_2(x,t) = \mu(t-x) + \frac{1}{2}\iint\limits_{D^*} f(\xi,\tau)d\xi d\tau + \frac{1}{2}\iint\limits_{D_{21}} q(\xi,\tau)u_1(\xi,\tau)d\xi d\tau$$

ва

$$[N_2\chi](x,t) = \frac{1}{2}\iint\limits_{D_{22}} q(\xi,\tau)\chi(\xi,\tau)d\xi d\tau$$

(2.14)-ро дар шакли операторӣ бознависӣ мекунем:

$$u_2(x,t) = F_2(x,t) + [N_2u_2](x,t).$$

Бо истифода аз усули индуксияи математикӣ нишон медиҳем, ки оператори дар $L_2(\Delta_2)$ маҳдуд амалкунандаи N_2 баҳои зеринро қонеъ месозад:

$$\left|\left[N_2^k\chi\right](x,t)\right| \le \sup_{(x,t)\in\Delta_2} |\chi(x,t)| \cdot \|q\|^k{}_{2,\,\Delta_2} \cdot \frac{\sqrt{[t(t-x)]^k}}{2^k \cdot k!}\,, \quad k \in N. \qquad (2.15)$$

Ҳангоми $k = 1$ дорем:

$$|[N_2\chi](x,t)| \leq \left|\frac{1}{2}\iint\limits_{D_{22}} q(\eta,\tau)\chi(\eta,\tau)d\eta d\tau\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\underset{(x,t)\epsilon\Delta_2}{\text{Sup}}|\chi(x,t)| \cdot \sqrt{\iint\limits_{\Delta_2} q^2(\eta,\tau)d\eta d\tau} \cdot \sqrt{\int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{\tau} d\eta} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\underset{(x,t)\epsilon\Delta_2}{\text{Sup}}|\chi(x,t)| \cdot \|q\|_{2,\Delta_2} \cdot \sqrt{\int_0^t (t-x)d\tau} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\underset{(x,t)\epsilon\Delta_2}{\text{Sup}}|\chi(x,t)| \cdot \|q\|_{2,\Delta_2} \cdot \sqrt{(t-x)t} \leq \underset{(x,t)\epsilon\Delta_2}{\text{Sup}}|\chi(x,t)| \cdot \|q\|_{2,\Delta_2} \cdot \frac{\sqrt{(t-x)t}}{2}.$$

Фарз мекунем, ки ҳангоми $k = n$ баҳои (2.15) дуруст аст, яъне

$$|[N_2^n\chi](x,t)| \leq \underset{(x,t)\epsilon\Delta_2}{\text{Sup}}|\chi(x,t)| \cdot \|q\|^n{}_{2,\Delta_2} \cdot \frac{\sqrt{[t(t-x)]^n}}{2^n \cdot n!}.$$

Акнун ҳолати $k = n + 1$-ро баррасӣ менамоем:

$$|[N_2^{n+1}\chi](x,t)| \leq \left|\frac{1}{2}\iint\limits_{D_{22}} q(\eta,\tau)[N_2^n\chi](\eta,\tau)d\eta d\tau\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\underset{(x,t)\epsilon\Delta_2}{\text{Sup}}|\chi(x,t)| \cdot \|q\|^n{}_{2,\Delta_2} \cdot \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \iint\limits_{D_{22}} |q(\eta,\tau)|\sqrt{[\tau(\tau-\eta)]^n}d\eta d\tau \leq$$

$$\leq \underset{(x,t)\epsilon\Delta_2}{\text{Sup}}|\chi(x,t)| \cdot \|q\|^{n+1}{}_{2,\Delta_2} \cdot \frac{1}{2^{n+1} \cdot n!} \cdot \sqrt{\int_0^t \tau^n d\tau \int_{x-t+\tau}^{\tau} (\tau-\eta)^n d\eta} \leq$$

$$\leq \underset{(x,t)\epsilon\Delta_2}{\text{Sup}}|\chi(x,t)| \cdot \|q\|^{n+1}{}_{2,\Delta_2} \cdot \frac{1}{2^{n+1} \cdot n!} \cdot \sqrt{\int_0^t \frac{\tau^n(t-x)^{n+1}}{n+1} d\tau} \leq$$

$$\leq \sup_{(x,t)\in\Delta_2} |\chi(x,t)| \cdot \|q\|^{n+1}{}_{2,\Delta_2} \cdot \frac{1}{2^{n+1} \cdot n!} \cdot \sqrt{\frac{t^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{(t-x)^{n+1}}{n+1}} \leq$$

$$\leq \sup_{(x,t)\in\Delta_2} |\chi(x,t)| \cdot \|q\|^{n+1}{}_{2,\Delta_2} \cdot \frac{1}{2^{n+1} \cdot n!} \cdot \frac{\sqrt{t^{n+1} \cdot (t-x)^{n+1}}}{n+1} \leq$$

$$\leq \sup_{(x,t)\in\Delta_2} |\chi(x,t)| \cdot \|q\|^{n+1}{}_{2,\Delta_2} \cdot \frac{\sqrt{[t \cdot (t-x)]^{n+1}}}{2^{n+1}(n+1)!}.$$

Ҳамин тариқ, дурустии баҳои (2.15) исбот гардид. Аз ин рӯ, муодилаи (2.14) дар соҳаи Δ_2 ҳалли маҳдуд дорад, ки онро метавон дар шакли қатори мутлақ наздикшавандаи Нейман ифода намуд:

$$u_2(x,t) = \left(I + \sum_{k=1}^{\infty} N_2^k\right) F_2(x,t).$$

Ҳангоми $j = 3$ дорем:

$$u_3(x,t) = \int_0^{t+x-l} \nu(\tau)d\tau + \frac{1}{2}\iint_{D^{**}} f(\xi,\tau)d\xi d\tau + \frac{1}{2}\iint_{D_{31}} q(\xi,\tau)u_1(\xi,\tau)d\xi d\tau +$$

$$+\frac{1}{2}\iint_{D_{32}} q(\xi,\tau)u_1(\xi,\tau)d\xi d\tau + \frac{1}{2}\left(\iint_{D_{33}} + \iint_{D_{34}}\right) q(\xi,\tau)u_3(\xi,\tau)d\xi d\tau, \quad (2.16)$$

ки дар ин ҷо

$$D_{31} = \left\{(\xi,\tau)\colon 0 \leq \tau \leq \frac{t+x-l}{2};\ 2l-x-t+\tau \leq \xi \leq l-\tau\right\} \subset \Delta_1;$$

$$D_{32} = \left\{(\xi,\tau)\colon 0 \leq \tau \leq \frac{l+t-x}{2};\ x-t+\tau \leq \xi \leq l-\tau\right\} \subset \Delta_1;$$

$$D_{33} = \left\{(\xi,\tau)\colon 0 \leq \tau \leq t+x-l;\ \frac{3l-x-t}{2} + \left|\tau - \frac{x+t-l}{2}\right| \leq \xi \leq l\right\} \subset \Delta_3;$$

$$D_{34}=\left\{(\xi,\tau): 0\le\tau\le t;\ \frac{l+x-t}{2}+\left|\tau-\frac{l-x+t}{2}\right|\le\xi\le\right.$$
$$\left.\le\frac{l+t+x-\tau}{2}-\left|\frac{\tau-t-x+l}{2}\right|\right\}\subset\Delta_3;$$

$D^{**}=D_{31}\cup D_{32}\cup D_{33}\cup D_{34}$.

Дар муодилаи ҳосилшудаи (2.16) чор интеграли аввал аз функсияҳои маълум гирифта мешаванд. Онҳоро бо $F_3(x,t)$ ишора намуда, нисбат ба $u_3(x,t)$ муодилаи интегралии навъи Вольтерраи зеринро ба даст меорем:

$$u_3(x,t)=F_3(x,t)+[N_3u_3](x,t),$$

ки дар он оператори интегралии $[N_3u_3](x,t)=\frac{1}{2}\left(\iint\limits_{D_{33}}+\iint\limits_{D_{34}}\right)q(\xi,\tau)u_3(\xi,\tau)d\xi d\tau$

дар $L_2(\Delta_3)$ маҳдуд амал мекунад ва дараҷаҳои он ба баҳои зерин тобеъ мебошанд:

$$\left|\left[N_3^k\chi\right](x,t)\right|\le\sup_{(x,t)\epsilon\Delta_3}|\chi(x,t)|\cdot\|q\|^k{}_{2,\Delta_3}\cdot\frac{\sqrt{[t(x+t-l)]^k}}{k!},\ \ k\in N. \qquad (2.17)$$

Воқеан, ҳангоми $k=1$ дорем:

$$|[N_3\chi](x,t)|\le\left|\frac{1}{2}\left(\iint\limits_{D_{33}}+\iint\limits_{D_{34}}\right)q(\eta,\tau)\chi(\eta,\tau)d\eta d\tau\right|\le$$

$$\le\left|\int_0^t d\tau\int_{l-\tau}^{x+t-\tau}q(\eta,\tau)\chi(\eta,\tau)d\eta\right|\le$$

$$\le\sup_{(x,t)\epsilon\Delta_3}|\chi(x,t)|\cdot\sqrt{\iint\limits_{\Delta_3}q^2(\eta,\tau)d\eta d\tau}\cdot\sqrt{\int_0^t d\tau\int_{l-\tau}^{x+t-\tau}d\eta}\le$$

$$\le\sup_{(x,t)\epsilon\Delta_3}|\chi(x,t)|\cdot\|q\|_{2,\Delta_3}\cdot\sqrt{\int_0^t(x+t-l)d\tau}\le$$

$$\leq \sup_{(x,t)\epsilon\Delta_3} |\chi(x,t)| \cdot \|q\|_{2,\Delta_3} \cdot \sqrt{(x+t-l)t}.$$

Фарз мекунем, ки ҳангоми $k = n$ баҳои (2.17) дуруст аст, яъне

$$|[N_3^n \chi](x,t)| \leq \sup_{(x,t)\epsilon\Delta_3} |\chi(x,t)| \cdot \|q\|^n{}_{2,\Delta_3} \cdot \frac{\sqrt{[t(x+t-l)]^n}}{n!}.$$

Ҳангоми $k = n + 1$ доро мешавем:

$$|[N_3^{n+1}\chi](x,t)| \leq \left| \frac{1}{2} \left(\iint_{D_{33}} + \iint_{D_{34}} \right) q(\eta,\tau)[N_2^n \chi(\eta,\tau)](\eta,\tau) d\eta d\tau \right| \leq$$

$$\leq \sup_{(x,t)\epsilon\Delta_3} |\chi(x,t)| \cdot \|q\|^n{}_{2,\Delta_3} \cdot \frac{1}{n!} \cdot \int_0^t d\tau \int_{l-\tau}^{x+t-\tau} q(\eta,\tau) \sqrt{[\tau(\eta+\tau-l)]^n} d\eta \leq$$

$$\leq \sup_{(x,t)\epsilon\Delta_3} |\chi(x,t)| \cdot \|q\|^n{}_{2,\Delta_3} \cdot \frac{1}{n!} \cdot \|q\|_{2,\Delta_3} \cdot \sqrt{\int_0^t \tau^n d\tau \int_{l-\tau}^{x+t-\tau} (\eta+\tau-l)^n d\eta} \leq$$

$$\leq \sup_{(x,t)\epsilon\Delta_3} |\chi(x,t)| \cdot \|q\|^{n+1}{}_{2,\Delta_3} \cdot \frac{1}{n!} \cdot \sqrt{\int_0^t \frac{\tau^n (x+t-l)^{n+1}}{n+1} d\tau} \leq$$

$$\leq \sup_{(x,t)\epsilon\Delta_3} |\chi(x,t)| \cdot \|q\|^{n+1}{}_{2,\Delta_3} \cdot \frac{1}{n!} \cdot \sqrt{\frac{t^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{(x+t-l)^{n+1}}{n+1}} \leq$$

$$\leq \sup_{(x,t)\epsilon\Delta_3} |\chi(x,t)| \cdot \|q\|^{n+1}{}_{2,\Delta_3} \cdot \frac{1}{n!} \cdot \frac{\sqrt{t^{n+1} \cdot (x+t-l)^{n+1}}}{n+1} \leq$$

$$\leq \sup_{(x,t)\epsilon\Delta_3} |\chi(x,t)| \cdot \|q\|^{n+1}{}_{2,\Delta_3} \cdot \frac{\sqrt{[t \cdot (x+t-l)]^{n+1}}}{(n+1)!}.$$

Ҳамин тариқ, муодилаи интегралии (2.16) бо дарназардошти баҳои (2.17) дар соҳаи Δ_3 ҳалли маҳдуд дорад, ки онро метавон дар шакли қатори мутлақ наздикшавандаи Нейман ифода намуд:

$$u_3(x,t)=\left(I+\sum_{k=1}^{\infty}N_3^k\right)F_3(x,t).$$

Ниҳоят, ҳангоми $j=4$ муодилаи зеринро дорем:

$$u_4(x,t)=F_4(x,t)+\frac{1}{2}\iint\limits_{D_4} q(\xi,\tau)u_4(\xi,\tau)d\xi d\tau, \tag{2.18}$$

ки дар он

$$F_4(x,t)=\mu(t-x)+\int\limits_0^{t+x-l}\nu(\tau)d\tau+\frac{1}{2}\iint\limits_{D^{***}} f(\xi,\tau)d\xi d\tau+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\iint\limits_{D_{41}}+\iint\limits_{D_{42}}\right)q(\xi,\tau)u_1(\xi,\tau)d\xi d\tau+\frac{1}{2}\iint\limits_{D_{43}} q(\xi,\tau)u_2(\xi,\tau)d\xi d\tau+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\iint\limits_{D_{44}}+\iint\limits_{D_{45}}\right)q(\xi,\tau)u_3(\xi,\tau)d\xi d\tau$$

– функсияи аллакай маълум мебошад ва

$$D_{41}=\left\{(\xi,\tau):0\le\tau\le\frac{t+x-l}{2};\ 2l-x-t+\tau\le\xi\le l-\tau\right\}\subset\Delta_1;$$

$$D_{42}=\left\{(\xi,\tau):0\le\tau\le\frac{l}{2};\ \frac{t-x}{2}+\left|\tau-\frac{t-x}{2}\right|\le\xi\le l-\tau\right\}\subset\Delta_1;$$

$$D_{43}=\left\{(\xi,\tau):\frac{t-x}{2}\le\tau\le\frac{l-x+t}{2};\ |x-t+\tau|\le\xi\le\frac{l}{2}-\left|\tau-\frac{l}{2}\right|\right\}\subset\Delta_2;$$

$$D_{44}=\left\{(\xi,\tau):0\le\tau\le t+x-l;\ \frac{3l-x-t}{2}+\left|\tau-\frac{x+t-l}{2}\right|\le\xi\le l\right\}\subset\Delta_3;$$

$$D_{45}=\left\{(\xi,\tau):0\le\tau\le\frac{t+x}{2};\ \frac{l}{2}+\left|\tau-\frac{l}{2}\right|\le\xi\le\frac{x+t+l-\tau}{2}-\left|\frac{l-x-t+\tau}{2}\right|\right\}\subset\Delta_3;$$

$$D_4=\left\{(\xi,\tau):\frac{l}{2}\le\tau\le t;\frac{l+x-t}{2}+\left|\tau-\frac{t-x+l}{2}\right|\le\xi\le\frac{x+t}{2}-\left|\tau-\frac{x+t}{2}\right|\right\}$$
$$\subset\Delta_4;$$

$$D^{***}=D_{41}\cup D_{42}\cup D_{43}\cup D_{44}\cup D_{45}\cup D_4.$$

Муодилаи (2.18)-ро дар шакли операторӣ менависем:

$$u_4(x,t) = F_4(x,t) + [N_4 u_4](x,t).$$

Ба осонӣ боварӣ ҳосил кардан мумкин аст, ки оператори

$$[N_4 u_4](x,t) = \frac{1}{2}\iint\limits_{D_4} q(\xi,\tau) u_4(\xi,\tau) d\xi d\tau$$

дар $L_2(\Delta_4)$ маҳдуд амал мекунад ва дараҷаҳои он баҳои зеринро қонеъ менамоянд:

$$\left|[N_4^k \chi](x,t)\right| \le \sup_{(x,t)\in\Delta_4} |\chi(x,t)| \cdot \|q\|^k{}_{2,\Delta_4} \cdot \frac{\sqrt{[(2t-l)(x+t-l)]^k}}{\left(2\sqrt{2}\right)^k \cdot k!}, \quad k \in N. \quad (2.19)$$

Воқеан, бигзор $k = 1$ бошад. Он гоҳ дорем:

$$|[N_4\chi](x,t)| \le \left|\frac{1}{2}\iint\limits_{D_4} q(\eta,\tau)\chi(\eta,\tau) d\eta d\tau\right| \le$$

$$\le \frac{1}{2}\sup_{(x,t)\in\Delta_4} |\chi(x,t)| \cdot \sqrt{\iiint\limits_{D_4} q^2(\eta,\tau)\chi(\eta,\tau) d\eta d\tau} \cdot \sqrt{\int\limits_{\frac{l}{2}}^{t} d\tau \int\limits_{l-\tau}^{t+x-\tau} d\eta} \le$$

$$\le \frac{1}{2}\sup_{(x,t)\in\Delta_4} |\chi(x,t)| \cdot \|q\|_{2,\Delta_4} \cdot \sqrt{\int\limits_{\frac{l}{2}}^{t} (t+x-l) d\tau} \le$$

$$\le \frac{1}{2}\sup_{(x,t)\in\Delta_4} |\chi(x,t)| \cdot \|q\|_{2,\Delta_4} \cdot \sqrt{\frac{(t+x-l)(2t-l)}{2}} \le$$

$$\le \sup_{(x,t)\in\Delta_4} |\chi(x,t)| \cdot \|q\|_{2,\Delta_4} \cdot \frac{\sqrt{(t+x-l)(2t-l)}}{2\sqrt{2}}.$$

Фарз мекунем, ки ҳангоми $k = n$ баҳои (2.19) иҷро мешавад, яъне

$$|[N_4^n \chi](x,t)| \le \sup_{(x,t)\in\Delta_4} |\chi(x,t)| \cdot \|q\|^n{}_{2,\Delta_4} \cdot \frac{\sqrt{[(2t-l)(x+t-l)]^n}}{\left(2\sqrt{2}\right)^n \cdot n!}.$$

Акнун ҳолати $k = n + 1$-ро баррасӣ менамоем:

$$|[N_4^{n+1}\chi](x,t)| \le \left|\frac{1}{2}\iint\limits_{D_4} q(\eta,\tau)\,[N_4^{n}\chi](\eta,\tau)d\eta d\tau\right| \le$$

$$\le \frac{1}{2}\operatorname*{Sup}_{(x,t)\epsilon\Delta_4}|\chi(x,t)|\cdot\|q\|^{n}{}_{2,\Delta_4}\cdot\frac{1}{\left(2\sqrt{2}\right)^{n}\cdot n!}\times$$

$$\times\int\limits_{\frac{l}{2}}^{t}\sqrt{(2\tau-l)^{n}}d\tau\int\limits_{l-\tau}^{x+t-\tau}\sqrt{(\eta+\tau-l)^{n}}q(\eta,\tau)d\eta \le$$

$$\le \frac{1}{2}\operatorname*{Sup}_{(x,t)\epsilon\Delta_4}|\chi(x,t)|\cdot\|q\|^{n}{}_{2,\Delta_4}\cdot\frac{1}{\left(2\sqrt{2}\right)^{n}\cdot n!}\cdot\|q\|_{2,\Delta_4}\times$$

$$\times\sqrt{\int\limits_{\frac{l}{2}}^{t}(2\tau-l)^{n}d\tau\int\limits_{l-\tau}^{x+t-\tau}(\eta+\tau-l)^{n}d\eta} \le$$

$$\le \frac{1}{2}\operatorname*{Sup}_{(x,t)\epsilon\Delta_4}|\chi(x,t)|\cdot\|q\|^{n+1}{}_{2,\Delta_4}\cdot\frac{1}{\left(2\sqrt{2}\right)^{n}\cdot n!}\cdot\sqrt{\int\limits_{\frac{l}{2}}^{t}\frac{(2\tau-l)^{n}(x+t-l)^{n+1}}{n+1}d\tau} \le$$

$$\le \frac{1}{2}\operatorname*{Sup}_{(x,t)\epsilon\Delta_4}|\chi(x,t)|\cdot\|q\|^{n+1}{}_{2,\Delta_4}\cdot\frac{1}{\left(2\sqrt{2}\right)^{n}\cdot n!}\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{(2t-l)^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{(x+t-l)^{n+1}}{n+1}} \le$$

$$\le \operatorname*{Sup}_{(x,t)\epsilon\Delta_4}|\chi(x,t)|\cdot\|q\|^{n+1}{}_{2,\Delta_4}\cdot\frac{1}{\left(2\sqrt{2}\right)^{n+1}\cdot n!}\cdot\frac{\sqrt{(2t-l)^{n+1}\cdot(x+t-l)^{n+1}}}{n+1} \le$$

$$\le \operatorname*{Sup}_{(x,t)\epsilon\Delta_4}|\chi(x,t)|\cdot\|q\|^{n+1}{}_{2,\Delta_4}\cdot\frac{\sqrt{[(2t-l)\cdot(x+t-l)]^{n+1}}}{\left(2\sqrt{2}\right)^{n+1}\cdot(n+1)!}.$$

Дурустии баҳои (2.19) исбот гардид. Аз ин ҷо бармеояд, ки муодилаи (2.18) муодилаи интегралии навъи Волтерра мебошад ва дар соҳаи Δ_4 ҳалли маҳдуд дорад, ки онро метавон дар шакли қатори мутлақ наздикшавандаи Нейман пешниҳод намуд:

$$u_4(x,t) = \left(I + \sum_{k=1}^{\infty} N_4^k\right) F_4(x,t).$$

Барои анҷом додани исботи теоремаи 2.1 суфтагии ҳалли ҳосилшударо таҳқиқ мекунем. Аз баробарии (2.11) бармеояд, ки ҳалли $u(x,t)$ дар росткунҷаи Q_T бефосила мебошад. Бигзор, $U(x,t) = f(x,t) + q(x,t)u(x,t)$ бошад. Функсияи $U(x,t)$-ро нисбат ба сарҳади $x = 0$ тоқ ва нисбат ба сарҳади $x = l$ ҷуфт идома медиҳем. Дар натиҷа баробарии (2.11) ба баробарии зерин мегузарад:

$$u(x,t) = \mu(t-x) + \int_0^{t+x-l} \underline{\nu}(\tau) d\tau + \frac{1}{2}\int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} U(\xi,\tau) d\xi.$$

Ин баробариро аз рӯйи t ва x дифференсиронида, барои қариб ҳамаи $(x, t) \in Q_T$ баробариҳои зеринро ҳосил мекунем:

$$u_t(x,t) = \underline{\mu}'(t-x) + \underline{\nu}(t+x-l) +$$

$$+ \int_0^t [U(x+t-\tau,\tau) + U(x-t+\tau,\tau)] d\tau, \quad (2.20)$$

$$u_x(x,t) = -\underline{\mu}'(t-x) + \underline{\nu}(t+x-l) +$$

$$\int_0^t [U(x+t-\tau,\tau) - U(x-t+\tau,\tau)] d\tau. \quad (2.21)$$

Аз муносибатҳои (2.20) ва (2.21) дида мешавад, ки $u_t(x,t)$ ва $u_x(x,t)$ ба $L_2(0 \le x \le l)$ барои ҳамаи $t \in [0,T]$ ва ба $L_2(0 \le t \le T)$ барои ҳамаи $x \in [0,T]$ тааллуқ доранд. Ҳамин тавр, теоремаи 2.1 пурра исбот шуд.

Натиҷаи 2.1. *Бигзор, шартҳои теоремаи 2.1 иҷро шаванд. Он гоҳ ҳалли масъалаи омехтаи I ба баҳои зерин тобеъ аст:*

$$\sup_{(x,t)\in Q_T} |u(x,t)| \le C\left(\sup_{t\in[0,T]} |\mu(t)| + \|\nu\|_{L_2[0,T]} + \|f\|_{L_2(Q_T)}\right), \quad (2.22)$$

ки он нисбат ба q(x,t): $\|q\|_{L_2(Q_T)} \leq \gamma$ мунтазам мебошад (илова бар ин, $C = C(\gamma) > 0$).

Исбот. Аввал фарз мекунем, ки $(x,t)\epsilon\Delta_1$. Дар ин ҳолат, дар асоси баҳои (2.13) ва нобаробарии Коши–Буняковский дорем:

$$|u_1(x,t)| \leq \frac{1}{2} \sup_{(x,t)\epsilon\Delta_1} \iint_{D_1} |f(\eta,\tau)| d\eta d\tau +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2}\cdot \sup_{(x,t)\epsilon\Delta_1} \iint_{D_1} |f(\eta,\tau)| d\eta d\tau \cdot {\|q\|_{2,\Delta_1}}^k \cdot \frac{t^k}{\left(\sqrt{2}\right)^k \cdot \sqrt{(2k)!}}\right] \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} \sup_{(x,t)\epsilon\Delta_1} \iint_{D_1} |f(\eta,\tau)| d\eta d\tau \cdot \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} {\|q\|_{2,\Delta_1}}^k \cdot \frac{t^k}{\left(\sqrt{2}\right)^k \cdot \sqrt{(2k)!}}\right] \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\|f\|_{2,\Delta_1} \cdot \frac{l}{2} \cdot \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \left(\frac{t \cdot \|q\|_{2,\Delta_1}}{\sqrt{2}}\right)^k\right] \leq \frac{l}{4}\|f\|_{2,\Delta_1} \exp\left(\frac{l \cdot \|q\|_{2,\Delta_1}}{\sqrt{2}}\right) =$$

$$= C_1 \cdot \|f\|_{2,\Delta_1}, \ \text{дар ин ҷо} \ \ C_1 = \frac{l}{4}\exp\left(\frac{l \cdot \|q\|_{2,\Delta_1}}{\sqrt{2}}\right).$$

Ҳамин тариқ, дар ҳолати $(x,t)\epsilon\Delta_1$ дурустии баҳои (2.22) асоснок карда шуд.

Акнун фарз мекунем, ки $(x,t)\epsilon\Delta_2$. Дар ин ҳолат доро мешавем:

$$|F_2(x,t)| \leq \sup_{(x,t)\epsilon\Delta_2} |\mu(t)| + \frac{1}{2}\int_0^l d\tau \int_0^{l-\tau} |f(\eta,\tau)| d\eta +$$

$$+C_1 \cdot \|f\|_{2,\Delta_1} \cdot \int_0^{\frac{l}{2}} d\tau \int_{\tau}^{l-\tau} |q(\eta,\tau)| d\eta \leq$$

$$\leq \sup_{(x,t)\epsilon\Delta_2} |\mu(t)| + \frac{1}{2}\sqrt{\int_0^l d\tau \int_0^{l-\tau} f^2(\eta,\tau) d\eta} \cdot \sqrt{\int_0^l d\tau \int_0^{l-\tau} d\eta} +$$

$$+C_1\cdot\|f\|_{2,\Delta_1}\cdot\sqrt{\int\limits_0^{\frac{l}{2}}d\tau\int\limits_0^{l-\tau}q^2(\eta,\tau)d\eta}\cdot\sqrt{\int\limits_0^{\frac{l}{2}}d\tau\int\limits_\tau^{l-\tau}d\eta}\le$$

$$\le\underset{(x,t)\epsilon\Delta_2}{\mathrm{Sup}}|\mu(t)|+\frac{l}{2\sqrt{2}}\|f\|_{2,\Delta_1\cup\Delta_2}+C_1\cdot\|f\|_{2,\Delta_1}\cdot\frac{l}{2}\cdot\|q\|_{2,\Delta_1}\le$$

$$\le\underset{(x,t)\epsilon\Delta_2}{\mathrm{Sup}}|\mu(t)|+\left(\frac{l}{2\sqrt{2}}+\frac{C_1l}{2}\|q\|_{2,\Delta_1}\right)\|f\|_{2,\Delta_1\cup\Delta_2}.$$

Аз ин ҷо дорем:

$$|u_2(x,t)|\le\underset{(x,t)\epsilon\Delta_1\cup\Delta_2}{\mathrm{Sup}}|F_2(x,t)|+$$

$$+\underset{(x,t)\epsilon\Delta_1\cup\Delta_2}{\mathrm{Sup}}|F_2(x,t)|\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\|q\|^k{}_{2,\Delta_1}\cdot\frac{\sqrt{t(t-x)^k}}{2^k\cdot k!}\le$$

$$\le\underset{(x,t)\epsilon\Delta_1\cup\Delta_2}{\mathrm{Sup}}|F_2(x,t)|\cdot\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\cdot\left(\frac{l\cdot\|q\|_{2,\Delta_2}}{2}\right)^k\right]\le$$

$$\le\underset{(x,t)\epsilon\Delta_1\cup\Delta_2}{\mathrm{Sup}}|F_2(x,t)|\exp\left(\frac{l\cdot\|q\|_{2,\Delta_2}}{2}\right)\le\underset{(x,t)\epsilon\Delta_2}{\mathrm{Sup}}|\mu(t)|\cdot\exp\left(\frac{l\cdot\|q\|_{2,\Delta_2}}{2}\right)+$$

$$+\exp\left(\frac{l\cdot\|q\|_{2,\Delta_2}}{2}\right)\cdot\left(\frac{l}{2\sqrt{2}}+\frac{C_1l}{2}\|q\|_{2,\Delta_1}\right)\|f\|_{2,\Delta_1\cup\Delta_2}\le$$

$$\le C_2\left(\underset{(x,t)\epsilon\Delta_2}{\mathrm{Sup}}|\mu(t)|+\|f\|_{2,\Delta_1\cup\Delta_2}\right),$$

дар ин ҷо $C_2=\max\left\{\exp\left(\frac{l\cdot\|q\|_{2,\Delta_2}}{2}\right);\exp\left(\frac{l\cdot\|q\|_{2,\Delta_2}}{2}\right)\cdot\frac{l}{2\sqrt{2}}+\frac{C_1l}{2}\|q\|_{2,\Delta_1}\right\}.$

Акнун фарз мекунем, ки $(x,t)\epsilon\Delta_3$. Дар ин ҳолат дорем:

$$|F_3(x,t)|\le\int\limits_0^{t+x-l}|\nu(\tau)|d\tau+\frac{1}{2}\iint\limits_{D^{**}}|f(\eta,\tau)|d\eta d\tau+$$

$$+\frac{1}{2}\iint\limits_{D_{31}}|q(\eta,\tau)u_1(\eta,\tau)|d\eta d\tau+\frac{1}{2}\iint\limits_{D_{32}}|q(\eta,\tau)u_1(\eta,\tau)|d\eta d\tau\le$$

$$\le\|\nu\|_{2,\Delta_3}\cdot\sqrt{l}+\frac{2l}{\sqrt{2}}\cdot\|f\|_{2,\Delta_{1\cup}\Delta_3}+\frac{l}{2\sqrt{2}}C_1\cdot\|f\|_{2,\Delta_1}\cdot\|q\|_{2,\Delta_{1\cup}\Delta_3}+$$

$$+\tfrac{l}{2\sqrt{2}}C_1\cdot\|f\|_{2,\Delta_1}\cdot\|q\|_{2,\Delta_{1\cup}\Delta_3}.$$

Аз ин ҷо:

$$\operatorname*{Sup}_{(x,t)\epsilon\Delta_3}|F_3(x,t)|\le\sqrt{l}\cdot\|\nu\|_{2,\Delta_3}+\left(\frac{2l}{\sqrt{2}}+\frac{l}{\sqrt{2}}C_1\|q\|_{2,\Delta_{1\cup}\Delta_3}\right)\|f\|_{2,\Delta_{1\cup}\Delta_3};$$

$$|u_3(x,t)|\le\operatorname*{Sup}_{(x,t)\epsilon\Delta_3}|F_3(x,t)|+\operatorname*{Sup}_{(x,t)\epsilon\Delta_3}|F_3(x,t)|\sum_{k=1}^{\infty}\|q\|^k{}_{2,\Delta_3}\frac{\sqrt{[(x+t-l)t]^k}}{k!}\le$$

$$\le\operatorname*{Sup}_{(x,t)\epsilon\Delta_3}|F_3(x,t)|\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}\|q\|^k{}_{2,\Delta_3}\frac{\sqrt{[(x+t-l)t]^k}}{k!}\right]\le$$

$$\le\operatorname*{Sup}_{(x,t)\epsilon\Delta_3}|F_3(x,t)|\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(\|q\|_{2,\Delta_3}\cdot\sqrt{(x+t-l)t}\right)^k}{k!}\right]\le$$

$$\le\operatorname*{Sup}_{(x,t)\epsilon\Delta_3}|F_3(x,t)|\cdot\exp\left(\|q\|_{2,\Delta_3}\cdot l\right)\le$$

$$\le\left[\sqrt{l}\cdot\|\nu\|_{2,\Delta_3}.+\left(\frac{2l}{\sqrt{2}}+\frac{lC_1}{\sqrt{2}}\|q\|_{2,\Delta_{1\cup}\Delta_3}\right)\cdot\|f\|_{2,\Delta_{1\cup}\Delta_3}\right]\times$$

$$\times\exp\left(\|q\|_{2,(\Delta_3)}\cdot l\right)\le C_3\left(\|\nu\|_{2,\Delta_3}+\|f\|_{2,\Delta_{1\cup}\Delta_3}\right),$$

ки дар ин ҷо

$$C_3=\max\left\{\begin{matrix}\sqrt{l}\cdot\exp\left(\|q\|_{2,\Delta_3}\cdot l\right);\\ \exp\left(\|q\|_{2,\Delta_3}\cdot l\right)\left(\frac{2l}{\sqrt{2}}+\frac{lC_1}{\sqrt{2}}\|q\|_{2,\Delta_{1\cup}\Delta_3}\right)\end{matrix}\right\}.$$

Ниҳоят, фарз мекунем, ки $(x,t)\epsilon\Delta_4$. Дар ин ҳолат дорем:

$$|F_4(x,t)|\le|\mu(t-x)|+\int_0^{t+x-l}|\nu(\tau)|\,d\tau+\frac{1}{2}\iint\limits_{D^{***}}|f(\eta,\tau)|d\eta d\tau+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\iint\limits_{D_{41}}+\iint\limits_{D_{42}}\right)|q(\eta,\tau)u_1(\eta,\tau)|d\eta d\tau+\frac{1}{2}\iint\limits_{D_{43}}|q(\eta,\tau)u_2(\eta,\tau)|d\eta d\tau+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\iint\limits_{D_{44}}+\iint\limits_{D_{45}}\right)|q(\eta,\tau)u_3(\eta,\tau)|d\eta d\tau\leq$$

$$\leq\operatorname*{Sup}_{(x,t)\epsilon\Delta_4}|\mu(t)|+\|\nu\|_{2,\Delta_4}\sqrt{l}+\frac{l}{2}\|f\|_{2,Q_l}+\frac{l}{2}C_1\|f\|_{2,\Delta_1}\|q\|_{2,\Delta_1}+$$

$$+\frac{l}{\sqrt{2}}C_2\cdot\left(\operatorname*{Sup}_{(x,t)\epsilon\Delta_2}|\mu(t)|+\|f\|_{2,\Delta_1\cup\Delta_2}\right)\cdot\|q\|_{2,\Delta_1\cup\Delta_2}+$$

$$+\frac{l}{\sqrt{2}}C_3\left(\sqrt{l}\cdot\|\nu\|_{2,\Delta_3}+\|f\|_{2,\Delta_1\cup\Delta_3}\right)\cdot\|q\|_{2,\Delta_1\cup\Delta_3}\leq$$

$$\leq\operatorname*{Sup}_{(x,t)\epsilon Q_l}|\mu(t)|+\sqrt{l}\cdot\|\nu\|_{2,Q_l}+\frac{l}{2}\|f\|_{2,Q_l}+\frac{l}{2}C_1\|f\|_{2,Q_l}\cdot\|q\|_{2,Q_l}+$$

$$+\frac{l}{\sqrt{2}}C_2\cdot\|q\|_{2,Q_l}\cdot\operatorname*{Sup}_{(x,t)\epsilon Q_l}|\mu(t)|+\frac{l}{\sqrt{2}}C_2\cdot\|f\|_{2,Q_l}\cdot\|q\|_{2,Q_l}+$$

$$+\frac{l\sqrt{l}}{2}C_3\cdot\|\nu\|_{2,Q_l}+\frac{l}{\sqrt{2}}C_3\|f\|_{2,Q_l}\cdot\|q\|_{2,Q_l}\leq$$

$$\leq\left(1+\frac{lC_2}{\sqrt{2}}\cdot\|q\|_{2,Q_l}\right)\operatorname*{Sup}_{(x,t)\epsilon Q_l}|\mu(t)|+\left(\sqrt{l}+\frac{l\sqrt{l}}{2}C_3\right)\|\nu\|_{2,Q_l}+$$

$$+\left(\frac{l}{2}+\frac{l}{2}C_1\cdot\|q\|_{2,Q_l}+\frac{l}{\sqrt{2}}C_2\|q\|_{2,Q_l}+\frac{l}{\sqrt{2}}C_3\cdot\|q\|_{2,Q_l}\right)\|f\|_{2,Q_l}.$$

Аз ин ҷо дорем:

$$|u_4(x,t)|\leq\operatorname*{Sup}_{(x,t)\epsilon\Delta_4}|F_4(x,t)|+$$

$$+\operatorname*{Sup}_{(x,t)\epsilon\Delta_4}|F_4(x,t)|\sum_{k=1}^{\infty}\|q\|^k{}_{2,\Delta_4}\frac{\sqrt{[(2t-l)(x+t-l)]^k}}{\left(2\sqrt{2}\right)^k\cdot k!}\leq$$

$$\leq\operatorname*{Sup}_{(x,t)\epsilon\Delta_4}|F_4(x,t)|\cdot\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}\|q\|^k{}_{2,\Delta_4}\frac{\sqrt{[(2t-l)(x+t-l)]^k}}{\left(2\sqrt{2}\right)^k\cdot k!}\right]\leq$$

$$\leq \sup_{(x,t)\in\Delta_4} |F_4(x,t)| \cdot \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\|q\|_{2,\Delta_4} \cdot \frac{\sqrt{(2t-l)(x+t-l)}}{2\sqrt{2}}\right)^k}{k!}\right] \leq$$

$$\leq \sup_{(x,t)\in\Delta_4} |F_4(x,t)| \cdot \exp\left(\|q\|_{2,\Delta_4} \cdot \frac{\sqrt{(2t-l)(x+t-l)}}{2\sqrt{2}}\right) \leq$$

$$\leq \sup_{(x,t)\in\Delta_4} |F_4(x,t)| \cdot \exp\left(\|q\|_{2,\Delta_4} \cdot \frac{\sqrt{(2t-l)(x+t-l)}}{2\sqrt{2}}\right) \leq$$

$$\leq \sup_{(x,t)\in\Delta_4} |F_4(x,t)| \cdot \exp\left(\frac{l \cdot \|q\|_{2,\Delta_4}}{2\sqrt{2}}\right) \leq C_4 \left(\sup_{(x,t)\in Q_l} |\mu(t)| + \|\nu\|_{2,Q_l} + \|f\|_{2,Q_l}\right),$$

ки дар ин ҷо

$$C_4 = \max \left\{ \begin{array}{c} \exp\left(\frac{l \cdot \|q\|_{2,\Delta_4}}{2\sqrt{2}}\right)\left(1 + \frac{lC_2}{\sqrt{2}} \cdot \|q\|_{2,Q_l}\right); \\ \exp\left(\frac{l \cdot \|q\|_{2,\Delta_4}}{2\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt{l} + \frac{l\sqrt{l}}{2} C_3\right); \\ \exp\left(\frac{l \cdot \|q\|_{2,\Delta_4}}{2\sqrt{2}}\right)\left(\frac{l}{2} + \left(\frac{l}{2}C_1 + \frac{l}{\sqrt{2}}C_2 + \frac{l}{\sqrt{2}}C_3\right)\|q\|_{2,Q_l}\right) \end{array} \right\}.$$

Ҳамин тариқ, дурустии баҳои (2.22) нишон дода шуд.

Қайд мекунем, ки аз баҳои (2.22) устувории ҳалли бадастомада нисбат ба шартҳои сарҳадӣ ва қисми рости муодила бармеояд.

Эзоҳи 2.2. Фарз мекунем, ки функсияи $u^*(x,t)$ бо маънои айнияти интегралии (2.7) ҳалли умумишудаи масъалаи омехтаи I бо коэффитсиенти сифрӣ бошад, ки бо формулаи (2.8) ифода мегардад ва $u(x,t)$ – ҳалли масъалаи умумӣ аст. Бо истифода аз қаторҳое, ки ҳалли муодилаҳои (2.12), (2.14), (2.16), (2.18)-ро медиҳанд ва бо назардошти баҳоҳои (2.13), (2.15), (2.17), (2.19) ҳосил мекунем:

$$\max_{(x,t)\in Q_T} |u(x,t) - u^*(x,t)| \leq K\|q\|_{L_2(Q_T)},$$

ки дар он доимии K ба нормаи функсияи $q(x,t)$ вобаста нест. Аз ин ҷо, бо истифода аз муносибатҳои (2.20) ва (2.21) ба баҳои

$$\|u-u^*\|_{W_2^1(Q_T)} \leq C\|q\|_{L_2(Q_T)}$$

меоем, ки он **устувории** ҳалли масъалаи омехтаро нисбат ба ошӯби аддитивии $q(x,t)u(x,t)$ дар муодилаи (2.1) бо коэффитсиенти бо квадрат замшавандаи $q(x,t)$ тасдиқ мекунад.

Эзоҳи 2.3. Қайд менамоем, ки тасдиқҳои ба леммаи 2.1 ва теоремаи 2.1 монандро барои ҳалли масъалаи омехтаи II бо шартҳои ниҳоии сифрии (2.5) ва чунин шартҳои сарҳадии (2.2), ки дар онҳо $\mu(t) \in W_2^1[0,T]$, $\nu(t) \in L_2[0,T]$ ва $\mu(T)=0$ аст, низ ба даст овардан мумкин аст. Таъкид менамоем, ки ба мисли теоремаи 2.1 ҳалли масъалаи омехтаи баррасишаванда барои муодилаи якҷинса дар соҳаи $\{(x,t)|T-\frac{l}{2} \leq t \leq T, T-t \leq x \leq t+l-T\} \cap Q_T$ айниятан ба сифр баробар мешавад.

Акнун теоремаро дар бораи ягонагии ҳал меорем ва исбот менамоем.

Теоремаи 2.2. *Фарз мекунем, ки дар муодилаи (2.1) коэффитсиенти тағйирёбандаи q(x,t) танҳо ба синфи $L_2(Q_T)$ тааллуқ дорад. Он гоҳ барои ҳар гуна $T \in (0;l]$ масъалаи омехтаи I аз синфи $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ аз як ҳал зиёд дошта наметавонад.*

Исбот. «Фарз мекунем, ки барои масъалаи омехтаи I ду ҳалли умумишудаи гуногуни $u^{(1)}(x,t)$ ва $u^{(2)}(x,t)$, ки ба синфи $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ тааллуқ доранд, мавҷуданд. Он гоҳ фарқи онҳо $u(x,t)=u^{(2)}(x,t)-u^{(1)}(x,t)$ ҳалли умумишудаи масъалаи омехтаи якҷинса барои муодилаи якҷинсаи мувофиқи (2.1) аз ҳамон синф мебошад. Яъне, барои ҳар гуна функсияи озмоишии $\Phi(x,t) \in \widehat{W}_2^2(Q_T)$, ки ба шартҳои сарҳадии $\Phi(0,t)=\Phi_x(l,t) \equiv 0 \ \forall\, t \in [0,T]$ ва шартҳои ниҳоии $\Phi(x,T)=\Phi_t(x,T) \equiv 0$ $\forall\, x \in [0,l]$ итоат мекунад, баробарии зерин иҷро мегардад» [103]:

$$\iint_{Q_T} u(x,t)\,[\Phi_{tt}(x,t)-\Phi_{xx}(x,t)-q(x,t)\Phi(x,t)]dxdt=0. \qquad (2.23)$$

Фарз мекунем, ки $\varepsilon \in (0,1)$ ва функсияи $q_\varepsilon(x,t) \in C^\infty(Q_T)$ чунин интихоб шудааст, ки барояш $\|q-q_\varepsilon\|_2<\varepsilon$.

Ба ҷойи функсияи $\Phi(x,t)$ ҳалли масъалаи омехтаи зеринро интихоб менамоем:

$$\begin{cases}\Phi_{tt}(x,t)-\Phi_{xx}(x,t)-q_\varepsilon(x,t)\Phi(x,t)=u(x,t),\ (x,t)\in Q_T,\\ \Phi(0,t)=\Phi_x(l,t)=0 \quad \forall\, t\in[0,l],\\ \Phi(x,T)=\Phi_t(x,T)=0\ \ \forall\, x\in[0,T].\end{cases} \qquad (2.24)$$

Аз теоремаи 2.1 бармеояд, ки масъалаи омехтаи (2.24) аз синфи $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ ҳал дорад ва азбаски функсияҳои $q_\varepsilon(x,t)$ ва $u(x,t)$ ба қадри кофӣ суфтаанд, ин ҳал мувофиқи эзоҳи 2.1 ба синфи $\widehat{W}_2^2(Q_T)$ тааллуқ хоҳад дошт. Аз ин рӯ, аз муносибатҳои (2.23) ва (2.24) муносибати зерин ҳосил мегардад:

$$\iint_{Q_T} u(x,t)[\Phi_{tt}(x,t)-\Phi_{xx}(x,t)-q_\varepsilon(x,t)\Phi(x,t)]dxdt+$$

$$+\iint_{Q_T} u(x,t)[q_\varepsilon(x,t)-q(x,t)]\Phi(x,t)dxdt=\|u\|_2^2+$$

$$+\iint_{Q_T} u(x,t)[q_\varepsilon(x,t)-q(x,t)]\Phi(x,t)dxdt=0.$$

Аз ин ҷо бармеояд, ки

$$\|u\|_2^2 \le \iint_{Q_T} |u(x,t)|\cdot|q_\varepsilon(x,t)-q(x,t)|\cdot|\Phi(x,t)|dxdt.$$

Бо истифода аз нобаробарии Коши–Буняковский дорем:

$$\|u\|_2^2 \le \sup_{(x,t)\in Q_T}|\Phi(x,t)|\sqrt{\iint_{Q_T} u^2(x,t)dxdt}\cdot\sqrt{\iint_{Q_T}\left(q_\varepsilon(x,t)-q(x,t)\right)^2dxdt}=$$

$$= \sup_{(x,t)\in Q_T} |\Phi(x,t)| \cdot \|u\|_2 \cdot \|q_\varepsilon - q\|_2 \leq \sup_{(x,t)\in Q_T} |\Phi(x,t)| \cdot \|u\|_2 \cdot \varepsilon.$$

Пас,

$$\|u\|_2^2 \leq \sup_{(x,t)\in Q_T} |\Phi(x,t)| \cdot \|u\|_2 \cdot \varepsilon. \tag{2.25}$$

Дар тарафи рости нобаробарии (2.25), зарбшавандаи якум мувофиқи баҳои (2.22) аз $C\|u\|_2$ зиёд нест, зеро барои коэффитсиенти $q_\varepsilon(x,t)$, ки дар масъалаи (2.24) баррасӣ мешавад, баҳои

$$\|q_\varepsilon\|_2 < \|q\|_2 + \varepsilon < \|q\|_2 + 1]$$

иҷро мегардад.

Ҳамин тавр, аз нобаробарии (2.25) бармеояд, ки $\|u\|_2^2 \leq C_1\varepsilon\|u\|_2^2$. Аз ин ҷо, бо дарназардошти ихтиёрӣ будани $\varepsilon \in (0,1)$, хулоса мекунем, ки $u(x,t) \equiv 0$ қариб дар ҳама ҷойи росткунҷаи Q_T ва бинобар бефосила будани худ дар тамоми Q_T низ он ба сифр мубаддал мешавад.

«Аз теоремаи 2.2 бармеояд, ки ҳалли дар леммаи 2.1 баррасишаванда ҳалли ягонаи масъалаи омехта аз синфи $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ барои муодилаи (2.1) бо шартҳои ибтидоии сифрӣ ва шартҳои сарҳадии (2.2) мебошад. Аз ин ҷо метавон хулоса кард, ки теоремаи 2.1 маҳз мавҷудияти ҳамин ҳалро муқаррар менамояд. Ба ҳамин тарз, ягонагии ҳалли умумишудаи масъалаи омехтаи II низ исбот карда мешавад» [103].

Эзоҳи 2.4. «Масъалаҳои наздик, ки ба ҳалшавандагии ҳалли сусти умумишуда барои муодилаҳои гиперболӣ марбутанд, инчунин дар китоби Ж. Л. Лионс [110, саҳ. 163–165] таҳқиқ шудаанд. Дар монографияи О. А. Ладиженская [107, саҳ. 232] теоремаи ягонагӣ ҳангоми иҷрои шартҳои иловагӣ, ки ба суфтагии коэффитсиент вобастаанд, исбот мегардад. Агар коэффитсиенти тағйирёбанда танҳо аз тағйирёбандаи x вобаста бошад, барои исботи теоремаи ягонагӣ метавон аз усули спектралӣ, ки аз ҷониби В.А. Илйин дар кори [60] пешниҳод шудааст, истифода бурд» [24].

2.3. Яккимата ҳалшавандагии масъалаи идоракунии сарҳадӣ ҳангоми вақти аз критикӣ хурд ё вақти ба он баробар

Дар ин банд саволи мавҷудият ҳангоми $T = l$ ва ягонагӣ ҳангоми $T \leq l$ - и ҳалли масъалаи идоракунии сарҳадии III таҳқиқ карда мешавад. Аввал тасдиқҳоро дар бораи ягонагӣ ва мавҷудияти ҳалли масъалаи баррасишавандаи идоракунии сарҳадӣ барои ҳолати хусусӣ, ки коэффитсиенти тағйирёбандаи $q(x,t)$ унсури сифрии синфи $L_2(Q_T)$ мебошад, меорем ва исбот менамоем.

Бо такрор намудани мулоҳизаҳое, ки дар кори [65] оварда шудаанд, дурустии тасдиқи зеринро исбот мекунем.

Тасдиқи 2.3. *Фарз мекунем, ки $T \leq l$ ва $q(x,t)$ унсури сифрии синфи $L_2(Q_T)$ мебошад. Он гоҳ, масъалаи идоракунии сарҳадии III аз синфи $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ аз як ҳал зиёд дошта наметавонад.*

Исбот. Фарз мекунем, ки масъалаи идоракунии сарҳадии III ду ҳалли $u_1(x,t)$ ва $u_2(x,t)$ дорад, ки ба синфи $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ тааллуқ доранд. Он гоҳ фарқи онҳо $u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ аз ҳамон синф ҳалли масъалаи якҷинсаи зерин мебошад:

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0 \quad \text{дар} \quad Q_T, \tag{2.1*}$$

$$u(0,t) \equiv 0, \quad u_x(l,t) \equiv 0 \quad \textit{ҳангоми} \quad 0 \leq t \leq T, \tag{2.2*}$$

$$u(x,0) \equiv 0, \quad u_t(x,0) = 0 \quad \textit{ҳангоми} \quad 0 \leq x \leq l, \tag{2.3*}$$

$$u(x,T) \equiv 0, \quad u_t(x,T) = 0 \quad \textit{ҳангоми} \quad 0 \leq x \leq l. \tag{2.5*}$$

Функсияи $u(x,t)$, ки ҳалли масъалаи идоракунии сарҳадии (2.1*) – (2.3*) ва (2.5)* аз синфи $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ мебошад, ҳамзамон аз ҳамон синф ҳалли масъалаи омехтаи навъи I – (2.1*)-(2.3*) низ ҳаст. Мувофиқи тасдиқи 2.2, ин ҳалро метавон бо формулаи (2.8) ифода кард.

Азбаски мувофиқи шартҳои (2.2*) $u(0,t) = \mu(t) \equiv 0$, $u_x(l,t) = \nu(t) \equiv 0$ барои $0 \leq t \leq T$ ва $f(x,t) \equiv 0$ қариб барои ҳамаи $(x,t) \in Q_T$, аз формулаи (2.8) бармеояд, ки $u(x,t) \equiv 0 \ \forall\, (x,t) \in Q_T$ ва бинобар ин $u_1(x,t) = u_2(x,t)$. Тасдиқи 2.3 исбот шуд.

Акнун тасдиқро дар бораи мавҷудияти ҳалли масъалаи идоракунии сарҳадии III барои ҳамин ҳолати хусусӣ меорем ва исбот мекунем.

Тасдиқи 2.4. *Бигзор, q(x,t) унсури сифрии синфи $L_2(Q_T)$ ва $T = l$ бошад. Он гоҳ талаби зерин шарти зарурӣ ва кифоягӣ барои мавҷудияти ҳалли ягонаи масъалаи идоракунии сарҳадии III аз синфи $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ мебошад:*

$$\varphi(0) + \varphi(l) - \varphi_1(0) - \varphi_1(l) + \int_0^l \psi(x)dx + \int_0^l \psi_1(x)dx + \int_0^l d\tau \int_\tau^{l-\tau} f(\eta,\tau)d\eta = 0. \quad (2.26)$$

Ҳангоми иҷрои ин шарт ҳалли масъалаи мазкур бо формулаи зерин дода мешавад:

$$u(x,t) = \begin{cases} u_1(x,t) \ \text{дар } \Delta_1, \\ u_2(x,t) \ \text{дар } \Delta_2, \\ u_3(x,t) \ \text{дар } \Delta_3, \\ u_4(x,t) \ \text{дар } \Delta_4, \end{cases} \quad (2.27)$$

ки дар ин ҷо

$$u_1(x,t) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x+t) + \varphi(x-t) + \int_{x-t}^{x+t} \psi(\xi)d\xi + \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi,\tau)d\xi d\tau\right];$$

$$u_2(x,t) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x+t) + \varphi_1(x-t+l) + \varphi_1(0) - \varphi(l) + \int_l^{x+t} \psi(\xi)d\xi -\right.$$

$$\left. - \int_0^{x-t+l} \psi(\xi)d\xi + \iint_{\Omega_{21}} f(\xi,\tau)d\xi d\tau - \iint_{\Omega_{22}} f(\xi,\tau)d\xi d\tau - \iint_{\Omega_{24}} f(\xi,\tau)d\xi d\tau\right];$$

$$\Omega_{21} \equiv \Omega_{21}(x,t) = \left\{(\xi,\tau)\colon 0 \le \tau \le \frac{x+t}{2},\ \ \tau \le \xi \le x+t-\tau\right\};$$

$$\Omega_{24} \equiv \Omega_{24}(x,t) = \left\{(\xi,\tau)\colon \frac{l}{2} \le \tau \le l,\ \ \frac{x-t+l}{2} + \left|\tau - \frac{t-x+l}{2}\right| \le \xi \le \tau\right\};$$

$$\Omega_{22} \equiv \Omega_{22}(x,t) = \left\{(\xi,\tau): \frac{x+t}{2} \le \tau \le \frac{l-x+t}{2},\;\; x + |\tau - t| \le \xi \le \frac{l}{2} - \left|\tau - \frac{l}{2}\right|\right\};$$

$$u_3(x,t) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x-t) - \varphi(0) + \varphi_1(l) + \varphi_1(x+t-l) - \int\limits_0^{x-t} \psi(\xi)d\xi + \right.$$

$$\left. + \iint\limits_{\Omega_{31}} f(\xi,\tau)d\xi d\tau - \iint\limits_{\Omega_{33}} f(\xi,\tau)d\xi d\tau - \iint\limits_{\Omega_{34}} f(\xi,\tau)d\xi d\tau\right];$$

$$\Omega_{31} \equiv \Omega_{31}(x,t) = \left\{(\xi,\tau): 0 \le \tau \le \frac{l-x+t}{2},\;\; x - t + \tau \le \xi \le l - \tau\right\};$$

$$\Omega_{34} \equiv \Omega_{34}(x,t) = \left\{(\xi,\tau): \frac{l}{2} \le \tau \le l,\;\; l - \tau \le \xi \le \frac{x+t}{2} - \left|\tau - \frac{x+t}{2}\right|\right\};$$

$$\Omega_{33} \equiv \Omega_{33}(x,t) = \left\{(\xi,\tau): \frac{l-x+t}{2} \le \tau \le \frac{x+t}{2},\;\; \frac{l}{2} + \left|\tau - \frac{l}{2}\right| \le \xi \le x - |\tau - t|\right\};$$

$$u_4(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi_1(x+t-l) + \varphi_1(x-t+l) +$$

$$\left. + \int\limits_{x-t+l}^{x+t-l} \psi_1(\xi)d\xi + \int\limits_t^l \int\limits_{x+t-\tau}^{x-t+\tau} f(\xi,\tau)d\xi d\tau\right],$$

Δ_1 *−секунҷаест, ки бо хатҳои* $x - t = 0,\; x + t - l = 0,\; t = 0$ *маҳдуд шудааст;*

Δ_2 *−секунҷаест, ки бо хатҳои* $x - t = 0,\; x + t - l = 0,\; x = 0$ *маҳдуд шудааст;*

Δ_3 *−секунҷаест, ки бо хатҳои* $x - t = 0,\; x + t - l = 0,\; x = l$ *маҳдуд шудааст;*

Δ_4 *−секунҷаест, ки бо хатҳои* $x - t = 0,\; x + t - l = 0,\; t = l$ *маҳдуд шудааст.*

Дар айни ҳол идоракуниҳои сарҳадии ҷустуҷӯшаванда бо ёрии формулаҳои аналитикии зерин ҳисоб карда мешаванд:

$$\mu(t) = \frac{1}{2}\left[\varphi(t) + \varphi(0) + \int\limits_0^t \psi(x)dx + \varphi_1(l-t) - \varphi_1(l) + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{l-t}^{l} \psi_1(x)dx - \int\limits_0^l d\tau \int\limits_{\tau-t}^{\tau} f(\xi,\tau)d\xi\right],$$

$$\nu(t)=\frac{1}{2}\left[\varphi'(l-t)-\psi(l-t)+\varphi_1'(t)+\psi_1(t)-\int_0^l f(l+t-\tau,\tau)d\tau\right].$$

Исботи зарурӣ. «Аввал ҳолати хусусиро баррасӣ менамоем. Аниқаш, фарз мекунем, ки дар масъалаи идоракунии сарҳадии III $\varphi(x)\equiv 0$ дар порчаи $[0,l]$ ва $\psi(x)$ унсури сифрии синфи $L_2[0,l]$ мебошад. Агар ҳалли $u(x,t)$ аз синфи $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ барои масъалаи III вуҷуд дошта бошад, пас он ҳамзамон ҳалли масъалаи омехтаи I аз ҳамон синф мебошад, ки дар он $\varphi(x)\equiv 0$ барои ҳамаи $x\in[0,l]$ ва $\psi(x)\equiv 0$ барои қариб ҳамаи $x\in[0,l]$. Ин ҳал шакли (2.8)-ро дорад, ки аз он муносибати зерин ҳосил мегардад» [24]:

$$\psi_1(x)-\varphi_1'(x)=2\underline{\mu'}(l-x)+\int_0^l f(x-l+\tau,\tau)d\tau. \tag{2.28}$$

Аз баробарии (2.28) нисбат ба x аз 0 то l интеграл гирифта, бо назардошти баробариҳои

$$\int_0^l d\tau\int_{\tau-l}^{\tau} f(\xi,\tau)d\xi=-\int_0^{\frac{l}{2}} d\tau\int_{\tau}^{l-\tau} f(\xi,\tau)d\xi+\int_{\frac{l}{2}}^{l} d\tau\int_{l-\tau}^{\tau} f(\xi,\tau)d\xi=$$

$$=-\int_0^l d\tau\int_{\tau}^{l-\tau} f(\xi,\tau)d\xi\,;\qquad \mu(l)=\varphi_1(0)$$

ҳосил мекунем:

$$\int_0^l \psi_1(x)dx-\varphi_1(l)-\varphi_1(0)+\int_0^l d\tau\int_{\tau}^{l-\tau} f(\xi,\tau)d\xi=0. \tag{2.29}$$

Ҳамин тавр, барои ҳолати хусусии баррасишуда шарти зарурии муносибати (2.26) исбот карда шуд.

Акнун ҳолати умумиро баррасӣ менамоем, ки дар он $\varphi(x)$ функсияи ихтиёрӣ аз синфи $W_2^1[0,l]$ ва $\psi(x)$ унсури ихтиёрӣ аз синфи $L_2[0,l]$ мебошад. Бо ин мақсад, функсияҳои $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$-ро нисбат ба нуқтаи $x = 0$ ба соҳаи $[-l, 0]$ ба таври тоқ ва нисбат ба нуқтаи $x = l$ ба соҳаи $[l, 2l]$ ба таври ҷуфт идома медиҳем. Ҳамчунин функсияи $f(x,t)$-ро аз рӯйи тағйирёбандаи якум нисбат ба нуқтаи $x = 0$ ба соҳаи $[-l, 0]$ ба таври тоқ ва нисбат ба нуқтаи $x = l$ ба соҳаи $[l, 2l]$ ба таври ҷуфт идома медиҳем. Функсияҳои ба ҳамин тарз идомадодашудаи $\varphi(x)$, $\psi(x)$ ва $f(x,t)$ мувофиқан ба синфҳои $W_2^1[-l, 2l]$, $L_2[-l, 2l]$ ва $L_2((-l \le x \le 2l) \times (0 \le t \le T))$ тааллуқ мегиранд.

Бо чунин функсияҳои идомадодашудаи $\varphi(x)$, $\psi(x)$ ва $f(x,t)$ функсияи

$$v(x,t) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x+t) + \varphi(x-t) + \int_{x-t}^{x+t} \psi(\eta)d\eta\right] + \frac{1}{2}\int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi,\tau)d\xi \qquad (2.30)$$

-ро баррасӣ менамоем, ки шартҳои $v(x,0) = \varphi(x)$ $\forall x \in [0,l]$ ва $v_t(x,0) = \psi(x)$ -ро барои қариб ҳамаи $x \in [0,l]$ қонеъ мегардонад.

Нишон медиҳем, ки функсияи (2.30) ҳалли умумишудаи масъалаи омехтаи I аз синфи $\widehat{W}_2^1(Q_l)$ мебошад, ки дар он $u(x,t)$ бо $v(x,t)$, $\mu(t)$ бо $v(0,t)$ ва $\nu(t)$ бо $v(l,t)$ иваз карда шудааст. Барои ин кофист нишон дода шавад, ки он айнияти (2.7)-ро барои ҳар як функсияи $\Phi(x,t)$аз таърифи 2.3 қонеъ месозад, ки дар он $u(x,t)$, $\mu(t)$ ва $\nu(t)$ мутаносибан бо $v(x,t)$, $v(0,t)$ ва $v(l,t)$ иваз шудаанд.

Усули интегралгирӣ бо қисмҳо ба мо имкон медиҳад, ки муносибати (2.7)-ро дар шакли зерин нависем:

$$\int_0^l \int_0^l [v_x(x,t)\Phi_x(x,t) - v_t(x,t)\Phi_t(x,t) - f(x,t)\Phi(x,t)]dxdt =$$

$$= \int_0^l v_t(x,0)\Phi(x,0)dx. \qquad (2.31)$$

Функсияи ибтидоии ихтиёрии функсияи $\psi(x)$-ро бо $\hat{\psi}(x)$ ва функсияи ибтидоии ихтиёрии функсияи $f(x,t)$-ро нисбат ба тағйирёбандаи аввал бо $\hat{f}(x,t)$ ишора мекунем. Дар асоси муносибати (2.30) қисми чапи (2.31) баробар аст ба

$$\frac{1}{2}\int_0^l \{[\varphi(x+l)-\varphi(x-l)+\hat{\psi}(x+l)+\hat{\psi}(x-l)]\,\Phi_x(x,l)-2\hat{\psi}(x)\Phi_x(x,0)\}dx-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^l\int_0^l \left[\varphi(x+t)-\varphi(x-t)+\hat{\psi}(x+t)+\hat{\psi}(x-t)\right]\Phi_{xt}(x,t)dxdt-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^l \{[\varphi(l+t)-\varphi(l-t)+\hat{\psi}(l+t)+\hat{\psi}(l-t)]\,\Phi_t(l,t)\}dt-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^l \{[\varphi(t)-\varphi(-t)+\hat{\psi}(t)+\hat{\psi}(-t)]\,\Phi_t(0,t)\}dt+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^l\int_0^l \left[\varphi(x+t)-\varphi(x-t)+\hat{\psi}(x+t)+\hat{\psi}(x-t)\right]\Phi_{tx}(x,t)dxdt-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^l\int_0^l \left\{\int_0^t \left[\hat{f}(x+t-\tau,\tau)+\hat{f}(x-t+\tau,\tau)\right]d\tau\right\}\Phi_{xt}(x,t)dxdt+$$

$$+\int_0^l\int_0^l \left\{\int_0^t \hat{f}(x,\tau)d\tau\right\}\Phi_{xt}(x,t)dxdt+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^l\int_0^l \left\{\int_0^t \left[\hat{f}(x+t-\tau,\tau)+\hat{f}(x-t+\tau,\tau)\right]d\tau\right\}\Phi_{tx}(x,t)dxdt-$$

$$-\int_0^l\int_0^l f(x,t)\,\Phi(x,t)dxdt=-\int_0^l \hat{\psi}(x)\,\Phi_x(x,0)dx=$$

$$=\int_0^l \psi(x)\,\Phi(x,0)dx=\int_0^l v_t(x,0)\Phi(x,0)dx,$$

ки дурустии айнияти (2.31)-ро исбот мекунад.

Ҳамин тариқ, мо нишон додем, ки функсияи (2.30) ҳалли умумишудаи масъалаи омехтаи навъи I аз синфи $\widehat{W}_2^1(Q_l)$ мебошад. Аз ин бармеояд, ки фарқи

$[u(x,t)-v(x,t)]$ аз ҳамон синф ҳалли масъалаи омехтаи I мешавад, ки дар он $f(x,t)\equiv 0$ барои қариб ҳамаи $(x,t)\in Q_T$ ва шартҳои ибтидоӣ ҳангоми $t=0$ чунинанд: шарти аввал айниятан сифр мебошад ва шарти дуюм унсури сифрии синфи $L_2[0,l]$ аст.

Бо назардошти ҳолати хусусие, ки дар боло баррасӣ гардид, барои ин фарқ муносибати навъи (2.29) дуруст мебошад, яъне

$$\int_0^l \psi_1(x)dx-\varphi_1(l)-\varphi_1(0)+v(0,l)+v(l,l)-\int_0^l v_t(x,l)dx=0. \qquad (2.32)$$

Аз формулаи (2.30) бо назардошти хосиятҳои функсияҳои $\varphi(x)$, $\psi(x)$ ва $f(x,t)$ дорем:

$$v(0,l)=\frac{1}{2}\left[\varphi(l)+\varphi(-l)+\int_{-l}^{l}\psi(\eta)d\eta+\int_0^l d\tau\int_{\tau-l}^{l-\tau}f(\eta,\tau)d\eta\right]=0;$$

$$v(l,l)=\frac{1}{2}\left[\varphi(2l)+\varphi(0)+\int_0^{2l}\psi(\eta)d\eta+\int_0^l d\tau\int_{\tau}^{2l-\tau}f(\eta,\tau)d\eta\right]=$$

$$=\varphi(0)+\int_0^l\psi(\eta)d\eta+\int_0^l d\tau\int_\tau^l f(\eta,\tau)d\eta\,;$$

$$\int_0^l v_t(x,l)dx=\frac{1}{2}\int_0^l[\varphi'(x+l)-\varphi'(x-l)+\psi(x+l)+\psi(x-l)]dx+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^l\int_0^l[f(x+l-\tau,\tau)+f(x-l+\tau,\tau)]d\tau dx=$$

$$=\frac{1}{2}\varphi(2l)-\frac{1}{2}\varphi(l)-\frac{1}{2}\varphi(0)+\frac{1}{2}\varphi(-l)+\frac{1}{2}\int_l^{2l}\psi(\tau)d\tau+\frac{1}{2}\int_{-l}^{0}\psi(\tau)d\tau+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^l\int_0^l f(x+l-\tau,\tau)+f(x-l+\tau,\tau)]d\tau\,dx=$$

$$= -\varphi(l) + \frac{1}{2}\int_0^l \int_{l-\tau}^{2l-\tau} f(\eta,\tau)d\eta d\tau + \frac{1}{2}\int_0^l \int_{\tau-l}^{\tau} f(\eta,\tau)d\eta d\tau =$$

$$= -\varphi(l) + \int_0^l \int_{l-\tau}^{l} f(\eta,\tau)d\eta d\tau.$$

Ифодаҳои ёфташударо ба (2.32) гузошта, ҳосил мекунем:

$$\int_0^l \psi_1(x)dx - \varphi_1(l) - \varphi_1(0) + \varphi(0) + \int_0^l \psi(x)dx + \int_0^l d\tau \int_\tau^l f(\eta,\tau)d\eta +$$

$$+\varphi(l) - \int_0^l \int_{l-\tau}^{l} f(\eta,\tau)d\eta d\tau = 0;$$

$$\int_0^l \psi_1(x)dx + \int_0^l \psi(x)dx + \varphi(0) - \varphi_1(0) + \varphi(l) - \varphi_1(l) +$$

$$+\int_0^l d\tau \int_\tau^l f(\eta,\tau)d\eta - \int_0^l d\tau \int_{l-\tau}^{l} f(\eta,\tau)d\eta = 0;$$

$$\varphi(0) + \varphi(l) - \varphi_1(0) - \varphi_1(l) + \int_0^l \psi(x)dx + \int_0^l \psi_1(x)dx +$$

$$+\int_0^{\frac{l}{2}} d\tau \int_\tau^{l-\tau} f(\eta,\tau)d\eta - \int_{\frac{l}{2}}^{l} d\tau \int_{l-\tau}^{\tau} f(\eta,\tau)d\eta = 0;$$

$$\varphi(0) + \varphi(l) - \varphi_1(0) - \varphi_1(l) + \int_0^l \psi(x)dx + \int_0^l \psi_1(x)dx + \int_0^l d\tau \int_\tau^{l-\tau} f(\eta,\tau)d\eta.$$

Бо ҳамин, зарур будани шарти (2.26) барои мавҷудияти ҳалли ягонаи масъалаи баррасишавандаи идоракунии сарҳадӣ пурра исбот гардид.

Исботи кифоягӣ. Ба осонӣ метавон боварӣ ҳосил кард, ки функсияи (2.27) ба синфи $\widehat{W}_2^1(Q_l)$ тааллуқ дорад. Воқеан, ин аз он бармеояд, ки вай дар ҳар яке аз соҳаҳои $\Delta_i, i=\overline{1,4}$ суммаи алгебравии функсияҳо аз аргументҳои $x+t$ ё $x-t$ -ро ташкил медиҳад, ки ҳосилаи умумишудаи бо квадрат замшаванда доранд ва мувофиқи шарти (2.26) ҳангоми гузаштан аз сарҳади умумии ду соҳаи дилхоҳи соҳаҳои зикршуда бефосилагии худро нигоҳ медоранд.

Санҷидан душвор нест, ки барои ҳамаи $x\in[0,l]$ баробариҳои $u(x,0)=\varphi(x), u(x,l)=\varphi_1(x)$ ва барои қариб ҳамаи $x\in[0,l]$ баробариҳои $u_t(x,0)=\psi(x), u_t(x,l)=\psi_1(x)$ дуруст мебошанд.

Исботи дурустии айнияти (2.7) барои ҳар як функсияи $\Phi(x,t)$ аз таърифи 2.3 боқӣ мемонад. Бо назардошти муносибати (2.31) кофист нишон дода шавад, ки

$$\int_0^l\int_0^l[u_x(x,t)\Phi_x(x,t)-u_t(x,t)\Phi_t(x,t)-f(x,t)\Phi(x,t)]dxdt=$$

$$=\int_0^l\psi(x)\Phi(x,0)dx. \qquad (2.33)$$

Барои баррасӣ функсияи зеринро ворид менамоем:

$$U(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{2}\left[-\varphi(x-t)+\hat{\psi}(x-t)+I(x,t)+I_1(x,t)\right] & \text{дар }\Delta_1,\\ \frac{1}{2}\Big[-\varphi_1(x-t+l)+\hat{\psi}_1(x-t+l)- & \\ \qquad -\int_0^l\hat{f}(x-t+\tau,\tau)d\tau+I(x,t)+I_1(x,t)\Big] & \text{дар }\Delta_2,\\ \frac{1}{2}\Big[\hat{\psi}(x-t)-\varphi(x-t)-\int_0^l\hat{f}(x+t-\tau,\tau)d\tau+ & \\ \qquad +I(x,t)+K_1(x,t)\Big] & \text{дар }\Delta_3,\\ \frac{1}{2}\Big[-\varphi_1(x-t+l)+\hat{\psi}_1(x-t+l)- & \\ \qquad -K(x,t)+K_1(x,t)+I(x,t)\Big] & \text{дар }\Delta_4,\end{cases}$$

ки дар он

$$I(x,t)=\int_0^t \hat{f}(x+t-\tau,\tau)d\tau+\int_0^t \hat{f}(x-t+\tau,\tau)d\tau,$$

$$I_1(x,t)=\varphi(x+t)+\hat{\psi}(x+t),$$

$$K(x,t)=\int_0^l \hat{f}(x+t-\tau,\tau)d\tau+\int_0^l \hat{f}(x-t+\tau,\tau)d\tau,$$

$$K_1(x,t)=\varphi_1(x+t-l)+\hat{\psi}_1(x+t-l),$$

$\hat{\psi}(x)$, $\hat{\psi}_1(x)$ ва $\hat{f}(x,t)$ мутаносибан функсияҳои ибтидоии функсияҳои $\psi(x)$, $\psi_1(x)$ ва $f(x,t)$ нисбат ба тағйирёбандаи x мебошанд.

Бо осонӣ мушоҳида кардан мумкин аст, ки

$$U_x(x,t)=u_t(x,t),\quad U_t(x,t)-\hat{f}(x,t)=u_x(x,t).$$

Бо дарназардошти ин муносибатҳо ва бо истифода аз усули интегралгирӣ бо қисмҳо ҳосил мекунем:

$$\int_0^l\left\{\int_0^T U_t(x,t)\Phi_x(x,t)dt\right\}dx-\int_0^T\left\{\int_0^l \hat{f}(x,t)\Phi_x(x,t)dx\right\}dt-$$

$$-\int_0^T\left\{\int_0^l U_x(x,t)\Phi_t(x,t)dx\right\}dt-\int_0^l\int_0^T f(x,t)\Phi(x,t)dxdt=$$

$$=\int_0^l U(x,T)\Phi_x(x,T)dx-\int_0^l U(x,0)\Phi_x(x,0)dx-\int_0^l\int_0^T U(x,t)\Phi_{xt}(x,t)dxdt-$$

$$-\int_0^T U(l,t)\Phi_t(l,t)dt+\int_0^T U(0,t)\Phi_t(0,t)dt+\int_0^l\int_0^T U(x,t)\Phi_{tx}(x,t)dxdt-$$

$$-\int_0^T \hat{f}(l,t)\Phi(l,t)dt+\int_0^T \hat{f}(0,t)\Phi(0,t)dt+\int_0^l\int_0^T f(x,t)\Phi(x,t)dxdt-$$

$$-\int_0^l\int_0^T f(x,t)\Phi(x,t)dxdt=-\int_0^l U(x,0)\Phi_x(x,0)dx=$$

$$= \int_0^l u_t(x,0)\Phi(x,0)dx = \int_0^l \psi(x)\Phi(x,0)dx.$$

Ҳамин тариқ, тасдиқи 2.4 пурра исбот гардид.

Акнун ҳолати умумии масъалаи баррасишавандаи идоракунии сарҳадии III-ро дида мебароем. Бе маҳдуд кардани умумият, дар оянда барои содагӣ ва осон намудани ҳисоббарориҳо чунин мешуморем, ки функсияи $f(x,t)$ унсури сифрии синфи $L_2(Q_T)$ мебошад.

Аввал ба баён ва исботи теорема дар бораи ягонагии ҳалли умумишудаи масъалаи омӯхташавандаи идоракунии сарҳадии III мегузарем.

Теоремаи 2.3. *Бигзор, коэффитсиенти* $q(x,t)$ *дар муодилаи (2.1) ба синфи* $L_2(Q_T)$ *таалluқ дошта бошад. Он гоҳ барои ҳар як* $T \in (0,l]$ *масъалаи идоракунии сарҳадии III танҳо як ҳал аз синфи* $\widehat{W}_2{}^1(Q_T)$ *дошта метавонад.*

Исбот. Исботи теоремаи 2.3 барои ҳар як қимати $T \le l$ ба тарзи якхела гузаронида мешавад. Аз ин рӯ, мо исботро танҳо барои ҳолати $T = l$ анҷом медиҳем. Ба мисли кори [15] фарз мекунем, ки масъалаи III ду ҳалли $u^{(1)}(x,t)$ ва $u^{(2)}(x,t)$-ро аз синфи $\widehat{W}_2{}^1(Q_l)$ дорад. Дар ин сурат, фарқи онҳо $u(x,t) = u^{(2)}(x,t) - u^{(1)}(x,t)$ ҳалли масъалаи III аз ҳамон синф бо шартҳои ибтидоӣ ва ниҳоии сифрӣ мебошад.

Мегузорем: $\mu(t) = u(0,t), \nu(t) = u_x(l,t)$. Аз таърифи синфи $\widehat{W}_2{}^1(Q_l)$ бармеояд, ки $\mu(t) \in W_2^1[0,l], \nu(t) \in L_2[0,l]$ ва шартҳои $\mu(0) = 0, \mu(l) = 0$ иҷро мешаванд.

Ҳамин тавр, функсияи $u(x,t)$ аз синфи $\widehat{W}_2{}^1(Q_l)$ ҳалли масъалаҳои омехтае мебошад, ки дар банди 2.2 баррасӣ шудаанд. Аз ҷумла, функсияи $u(x,t)$ дар соҳаи

$$\Delta_0 = \left\{(x,t)\colon 0 \le t \le l,\ \ \frac{l}{2} - \left|\frac{l}{2} - t\right| \le x \le \frac{l}{2} + \left|\frac{l}{2} - t\right|\right\}$$

ба сифр баробар аст.

Бигзор, акнун t_1 ва t_2 ду нуқтаи ихтиёрии порчаи $[0, l]$ бошанд. Характеристикаи $t - x = t_1$, ки аз нуқтаи $(0, t_1)$ мегузарад ва характеристикаи $t + x - l = t_2$, ки аз нуқтаи (l, t_2) мегузарад, сарҳади соҳаи Δ_0-ро дар нуқтаҳои $\left(\frac{l-t_1}{2}, \frac{l+t_1}{2}\right)$ ва $\left(\frac{l+t_2}{2}, \frac{l+t_2}{2}\right)$ мебуранд. Дар ин нуқтаҳо $u(x, t) \equiv 0$ мебошад. Аз ин рӯ, аз формулаи (2.8) ҳосил мекунем:

$$\mu(t_1) = -\frac{1}{2} \iint\limits_{D_0'(t_1)} q(\xi, \tau) u_2(\xi, \tau) d\xi d\tau,$$

$$\int\limits_0^{t_2} \nu(\tau) d\tau = -\frac{1}{2} \iint\limits_{D_0''(t_2)} q(\xi, \tau) u_3(\xi, \tau) d\xi d\tau, \qquad (2.34)$$

ки дар онҳо

$$D_0'(t_1) = \left\{(\xi, \tau): \frac{t_1}{2} \leq \tau \leq \frac{l + t_1}{2}, \qquad |\tau - t_1| \leq \xi \leq \frac{l}{2} - \left|\frac{l}{2} - \tau\right|\right\},$$

$$D_0''(t_2) = \left\{(\xi, \tau): \frac{t_2}{2} \leq \tau \leq \frac{l + t_2}{2}, \qquad \frac{l}{2} + \left|\tau - \frac{l}{2}\right| \leq \xi \leq l - |\tau - t_2|\right\}.$$

Акнун нуқтаи ихтиёрии $(x, t) \in \Delta_2$-ро баррасӣ мекунем. Аз формулаи (2.8) дорем:

$$u(x, t) = \mu(t_1) + \frac{1}{2} \iint\limits_{D_0} q(\xi, \tau) u(\xi, \tau) d\xi d\tau,$$

ки дар он

$$D_0(x, t) = \left\{(\xi, \tau) \left| \frac{t - x}{2} \leq \tau \leq t, |\tau + x - t| \leq \xi \leq \frac{x + t}{2} - \left|\tau - \frac{x + t}{2}\right|\right.\right\}.$$

Бо ба эътибор гирифтани баробарии аввали (2.34) барои $t_1 = t - x$, ба муносибати

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \iint\limits_{D_0'(t-x) \setminus D_0(x,t)} q(\xi, \tau) u(\xi, \tau) d\xi d\tau \equiv [N_0 u](x, t) \qquad (2.35)$$

мерасем, ки дар он

$$D_0'(t-x)\backslash D_0(x,t)=\left\{(\xi,\tau)\colon \frac{x+t}{2}\le\tau\le\frac{t-x+l}{2},\quad x+|t-\tau|\le\xi\le\frac{l}{2}-\left|\frac{l}{2}-\tau\right|\right\}.$$

Муносибати (2.35) муодилаи интегралии якҷинсаи навъи Волтерраи ҷинси дуюм мебошад, зеро оператори N_0–и қисми рости он дар фазои $L_2(\Delta_2)$ маҳдуд амал мекунад ва дараҷаҳои он ба чунин баҳо итоат менамоянд:

$$\left|\left[N_0^k\chi\right]\right|(x,t)\le\sup_{(x,t)\in\Delta_2}|\chi(x,t)|\left(\frac{\sqrt{l}\|q\|_{2,\Delta_2}\sqrt{l-t-x}}{2}\right)^k\frac{1}{k!},\ \ k\in N.$$

Аз ин рӯ, ин муодила танҳо ҳалли сифрӣ дорад ва мувофиқи (2.34) барои ҳар як $t_1\in[0,l]$ $\mu(t_1)=0$ мешавад.

Ба ҳамин монанд, барои нуқтаи ихтиёрии $(x,t)\in\Delta_3$ аз формулаи (2.8) дорем:

$$u(x,t)=\int_0^{t_2}\underline{\nu}(\tau)d\tau+\frac{1}{2}\iint_{D_0}q(\xi,\tau)u(\xi,\tau)d\xi d\tau,$$

$$D_0(x,t)=\left\{(\xi,\tau)\colon\ \frac{t+x-l}{2}\le\tau\le t,\ \ |\tau+x-t|\le\xi\le\frac{x+t}{2}-\left|\tau-\frac{x+t}{2}\right|\right\}.$$

Бо ба назар гирифтани баробарии дуюми (2.34) бо $t_2=t+x-l$, чунин муносибат ҳосил мегардад:

$$u(x,t)=-\frac{1}{2}\iint_{D_0''(t_2)}q(\xi,\tau)u(\xi,\tau)d\xi d\tau+\frac{1}{2}\iint_{D_0}q(\xi,\tau)u(\xi,\tau)d\xi d\tau$$

ё

$$u(x,t)=-\frac{1}{2}\iint_{D_0''(t+x-l)\backslash D_0(x,t)}q(\xi,\tau)u(\xi,\tau)d\xi d\tau\equiv[N_1u](x,t),\qquad(2.36)$$

ки дар он

$$D_0''(t+x-l)\backslash D_0(x,t)=$$

$$=\left\{(\xi,\tau)\colon\frac{l+t-x}{2}\le\tau\le\frac{t+x}{2},\ \ \frac{l}{2}+\left|\tau-\frac{l}{2}\right|\le\xi\le x-|\tau-t|\right\}.$$

Муносибати (2.36) муодилаи интегралии якҷинсаи навъи Волтерраи ҷинси дуюм мебошад, зеро оператори N_1–и қисми рости он дар фазои $L_2(\Delta_3)$ маҳдуд амал мекунад ва дараҷаҳои он баҳои зеринро қонеъ месозанд:

$$\left|\left[N_1^k \chi\right]\right|(x,t) \leq \sup_{(x,t)\in\Delta_3} |\chi(x,t)| \left(\frac{\sqrt{l}\|q\|_{2,\Delta_3}\sqrt{t+x-l}}{2}\right)^k \frac{1}{k!}, \qquad k \in N.$$

Бинобар ин, ин муодила танҳо ҳалли сифрӣ дорад ва мувофиқи (2.34) ҳосил мекунем, ки $\nu(t_2) = 0$ барои ҳар як $t_2 \in [0,l]$. Теоремаи 2.3 пурра исбот карда шуд.

Аз кори [65] бармеояд, ки функсияи

$$\hat{u}(x,t) = \frac{1}{2}\begin{cases} \varphi(x+t) + \varphi(x-t) + \int\limits_{x-t}^{x+t} \psi(\xi)d\xi \ \text{ дар } \Delta_1, \\ \varphi(0) + \varphi(x+t) + \int\limits_{0}^{x+t} \psi(\xi)d\xi + \varphi_1(x-t+l) - \varphi_1(l) + \int\limits_{x-t+l}^{l} \psi_1(\xi)d\xi \ \text{ дар } \Delta_2, \\ \varphi(x-t) + \varphi(l) + \int\limits_{x-t}^{l} \psi(\xi)d\xi + \varphi_1(x+t-l) - \varphi_1(0) + \int\limits_{0}^{x+t-l} \psi_1(\xi)d\xi \ \text{ дар } \Delta_3, \\ \varphi_1(x+t-l) + \varphi_1(x-t+l) - \int\limits_{x+t-l}^{x-t+l} \psi_1(\xi)d\xi \ \text{ дар } \Delta_4 \end{cases} \qquad (2.37)$$

ҳалли ягонаи масъалаи идоракунии сарҳадии III барои муодилаи мавҷии якҷинса $(f(x,t) \equiv 0,\ q(x,t) \equiv 0)$ мебошад, агар доимиҳои A_0 ва B_0, ки тавассути шартҳои ибтидоӣ ва ниҳоӣ муайян карда мешаванд, бо ҳам баробар бошанд, яъне

$$A_0 \equiv \varphi(0) + \varphi(l) + \int\limits_0^l \psi(\xi)d\xi = \varphi_1(0) + \varphi_1(l) - \int\limits_0^l \psi_1(\xi)d\xi \equiv B_0. \qquad (2.38)$$

Ба ҳамин моманд, аз тасдиқи 2.4 бармеояд, ки функсияи

$$u(x,t)=\hat{u}(x,t)+$$
$$+\frac{1}{2}\begin{cases}\int\limits_0^t\int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi,\tau)d\xi d\tau \ \text{ дар } \Delta_1,\\ \iint\limits_{\Omega_{21}} f(\xi,\tau)d\xi d\tau-\iint\limits_{\Omega_{22}} f(\xi,\tau)d\xi d\tau-\iint\limits_{\Omega_{24}} f(\xi,\tau)d\xi d\tau \ \text{ дар } \Delta_2,\\ \iint\limits_{\Omega_{31}} f(\xi,\tau)d\xi d\tau-\iint\limits_{\Omega_{33}} f(\xi,\tau)d\xi d\tau-\iint\limits_{\Omega_{34}} f(\xi,\tau)d\xi d\tau \ \text{ дар } \Delta_3,\\ \int\limits_t^l\int\limits_{x+t-\tau}^{x-t+\tau} f(\xi,\tau)d\xi d\tau \ \text{ дар } \Delta_4\end{cases} \tag{2.39}$$

ҳалли ягонаи масъалаи идоракунии сарҳадии III барои муодилаи лапишҳои маҷбурии тор (бо шарти $q(x,t)\equiv 0$) мебошад, агар

$$A_0+\int\limits_0^{\frac{l}{2}} d\tau\int\limits_{\tau}^{l-\tau} f(\xi,\tau)d\xi \ =B_0+\int\limits_{\frac{l}{2}}^{l} d\tau\int\limits_{l-\tau}^{\tau} f(\xi,\tau)d\xi, \tag{2.40}$$

ки дар он A_0 ва B_0 - доимиҳои қисми чап ва рости баробарии (2.38) мебошанд.

Соҳаҳои интегралгирӣ, ки дар формулаи (2.39) иштирок мекунанд, дар тасдиқи 2.4 муайян шудаанд.

Барои мавҷудияти ҳалли масъалаи идоракунии сарҳадии III барои муодилаи телеграфӣ бо коэффитсиенти тағйирёбанда аз синфи $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ шарти зарурӣ ҳосил мекунем. Дар оянда барои содагардонии ҳисобҳо $f(x,t)\equiv 0$ мегузорем.

Теоремаи 2.4. *Бигзор, $T=l$ ва $q(x,t)\in L_2(Q_T)$ бошад. Он гоҳ, барои мавҷудияти ҳалли масъалаи идоракунии сарҳадии III аз синфи $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ зарур аст, ки шарти зерин иҷро шавад:*

$$A_0+\int\limits_0^{\frac{l}{2}} d\tau\int\limits_{\tau}^{l-\tau} q(\xi,\tau)u_1(\xi,\tau)d\xi=B_0+\int\limits_{\frac{l}{2}}^{l} d\tau\int\limits_{l-\tau}^{\tau} q(\xi,\tau)u_4(\xi,\tau)d\xi, \tag{2.41}$$

ки дар он A_0 ва B_0 - доимиҳо аз баробарии (2.38) мебошанд. Бузургиҳои $u_1(x,t)$ ва $u_4(x,t)$ мувофиқи формулаҳои зерин ҳисоб карда мешаванд:

$$u_1(x,t) = \hat{u}_1(x,t) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[G_1^k \hat{u}_1\right](x,t), \tag{2.42}$$

$$\hat{u}_1(x,t) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x+t) + \varphi(x-t) + \int_{x-t}^{x+t} \psi(\xi)d\xi\right],$$

$$[G_1\hat{u}_1](x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} q(\xi,\tau)\hat{u}_1(\xi,\tau)d\xi\,;$$

$$u_4(x,t) = \hat{u}_4(x,t) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[G_4^k \hat{u}_4\right](x,t), \tag{2.43}$$

$$\hat{u}_4(x,t) = \frac{1}{2}\left[\varphi_1(x+t-l) + \varphi_1(x-t+l) - \int_{x+t-l}^{x-t+l} \psi_1(\xi)d\xi\right],$$

$$[G_4\hat{u}_4](x,t) = \frac{1}{2}\int_t^l d\tau \int_{x+t-\tau}^{x-t+\tau} q(\xi,\tau)\hat{u}_4(\xi,\tau)d\xi\,.$$

Исбот. Фарз мекунем, ки функсияи $u(x,t)$ ҳалли масъалаи идоракунии сарҳадии III аз синфи $\widehat{W}_2^1(Q_l)$ мебошад. Дар ин сурат, он ҳамзамон ҳалли масъалаи омехтаи I дар секунҷаи Δ_1 ва ҳалли масъалаи омехтаи II дар секунҷаи Δ_4 хоҳад буд. Муносибатҳои интегралиеро тартиб медиҳем, ки функсияи $u(x,t)$ дар соҳаҳои Δ_1 ва Δ_4 онҳоро қонеъ месозад. Бо $\hat{u}_1(x,t)$ ҳалли масъалаи омехтаи I - ро барои муодилаи мавҷии якҷинса дар Δ_1 ишора намуда, аз формулаи (2.39) муносибати зеринро ба даст меорем:

$$u(x,t) = \hat{u}_1(x,t) + \frac{1}{2}\iint\limits_{\Omega_1} q(\xi,\tau)u(\xi,\tau)d\xi d\tau, (x,t) \in \Delta_1, \tag{2.44}$$

ки дар он

$$\Omega_1 \equiv \Omega_1(x,t) = \{(\xi,\tau): 0 \le \tau \le t, \quad x-t+\tau \le \xi \le x+t-\tau\ \} \in \Delta_1.$$

Ба ҳамин монанд, агар тавассути $\hat{u}_4(x,t)$ ҳалли масъалаи омехтаи II - ро барои муодилаи мавҷии якҷинса дар секунҷаи Δ_4 ишора намоем, он гоҳ дорем:

$$u(x,t) = \hat{u}_4(x,t) + \frac{1}{2}\iint\limits_{\Omega_4} q(\xi,\tau)u(\xi,\tau)d\xi d\tau, (x,t) \in \Delta_4, \tag{2.45}$$

ки дар он

$$\Omega_4 \equiv \Omega_4(x,t) = \{(\xi,\tau)|\ t \le \tau \le l, x+t-\tau \le \xi \le x-t+\tau\ \} \in \Delta_4.$$

Азбаски функсияи $u(x,t)$, ҳамчун ҳал аз синфи $\widehat{W}_2^1(Q_l)$ дар соҳаи Q_l бефосила мебошад, пас қимати $u\left(\frac{l}{2},\frac{l}{2}\right)$, ки бо истифода аз муносибатҳои (2.34) ва (2.35) ҳисоб карда мешавад, бояд якхела бошад. Аз ин рӯ, баробарии зерин ҳосил мегардад:

$$A_0 + \iint\limits_{\Delta_1} q(\xi,\tau)u(\xi,\tau)d\xi d\tau = B_0 + \iint\limits_{\Delta_4} q(\xi,\tau)u(\xi,\tau)d\xi d\tau, \tag{2.46}$$

зеро $A_0 = 2\hat{u}_1\left(\frac{l}{2},\frac{l}{2}\right)$, $B_0 = 2\hat{u}_4\left(\frac{l}{2},\frac{l}{2}\right)$ ва $\Delta_1 = \Omega_1\left(\frac{l}{2},\frac{l}{2}\right), \Delta_4 = \Omega_4\left(\frac{l}{2},\frac{l}{2}\right)$.

Барои ба баробарии (2.46) овардани шакли ниҳоии он, яъне шакли (2.41), функсияи $u(x,t)$-ро тавассути $u_1(x,t)$ аз (2.34) ва тавассути $u_4(x,t)$ аз (2.35) бо истифода аз қаторҳои мувофиқи Нейман ифода мекунем. Мегузорем:

$$[G_j u](x,t) = \frac{1}{2}\iint\limits_{\Omega_j} q(\xi,\tau)u(\xi,\tau)d\xi d\tau,\ j = 1 \text{ ва } j = 4.$$

Он гоҳ, барои $(x,t) \in \Delta_1$

$$u(x,t) = \hat{u}_1(x,t) + \sum_{k=1}^{\infty}\left[G_1^k \hat{u}_1\right](x,t) \tag{2.47}$$

ва барои $(x,t) \in \Delta_4$

$$u(x,t) = \hat{u}_4(x,t) + \sum_{k=1}^{\infty}\left[G_4^k \hat{u}_4\right](x,t) \tag{2.48}$$

ба даст меояд.

Қаторҳо дар қисмҳои рости (2.47) ва (2.48) мутлақ наздикшавандаанд, зеро операторҳои G_1 ва G_4 мутаносибан чунин баҳоҳоро қонеъ мегардонанд:

$$\left|[G_1^k\chi](x,t)\right| \le \underset{(x,t)\in\Delta_1}{\mathrm{Sup}}|\chi(x,t)|\left(\frac{\|q\|_{2,\Delta_1}}{2}\right)^k \frac{t^k}{k!}, \qquad k\in N; \qquad (2.49)$$

$$\left|[G_4^k\chi](x,t)\right| \le \underset{(x,t)\in\Delta_4}{\mathrm{Sup}}|\chi(x,t)|\cdot\left(\frac{\|q\|_{2,\Delta_4}}{2}\right)^k \cdot\frac{\sqrt{[(l-t)(t-x-l)]^k}}{k!},\ \ k\in N. \quad (2.50)$$

Бо истифода аз усули индуксияи математикӣ дурустии баҳои (2.50)-ро исбот менамоем. Ҳангоми $k=1$ дорем:

$$|[G_4\chi](x,t)| = \left|\frac{1}{2}\iint\limits_{\Omega_4} q(\eta,\tau)\chi(\eta,\tau)d\eta d\tau\right| \le$$

$$\le \frac{1}{2}\underset{(x,t)\epsilon\Delta_4}{\mathrm{Sup}}|\chi(x,t)|\cdot\sqrt{\iiint\limits_{\Omega_4} q^2(\eta,\tau)\chi(\eta,\tau)d\eta d\tau}\cdot\sqrt{\int\limits_t^l d\tau\int\limits_{x-t+\tau}^{\tau-l} d\eta} \le$$

$$\le \frac{1}{2}\underset{(x,t)\epsilon\Delta_4}{\mathrm{Sup}}|\chi(x,t)|\cdot\|q\|_{2,\Delta_4}\cdot\sqrt{\int\limits_t^l (t-x-l)\,d\tau} \le$$

$$\le \frac{1}{2}\underset{(x,t)\epsilon\Delta_4}{\mathrm{Sup}}|\chi(x,t)|\cdot\|q\|_{2,\Delta_4}\cdot\sqrt{(t-x-l)\cdot(l-t)}.$$

Фарз мекунем, ки барои $k=n$ баҳои (2.50) дуруст аст, яъне

$$|[G_4^n\chi](x,t)| \le \underset{(x,t)\epsilon\Delta_4}{\mathrm{Sup}}|\chi(x,t)|\cdot\left(\frac{\|q\|_{2,\Delta_4}}{2}\right)^n\cdot\frac{\sqrt{[(l-t)(t-x-l)]^n}}{n!}.$$

Ҳолати $k=n+1$-ро баррасӣ менамоем:

$$|[G_4^{n+1}\chi](x,t)| = \left|\frac{1}{2}\iint\limits_{\Omega_4} q(\eta,\tau)\,[G_4^n\chi](\eta,\tau)d\eta d\tau\right| \le$$

$$\le \frac{1}{2}\underset{(x,t)\epsilon\Delta_4}{\mathrm{Sup}}|\chi(x,t)|\cdot\left(\frac{\|q\|_{2,\Delta_4}}{2}\right)^n\cdot\frac{1}{n!}\cdot\|q\|_{2,\Delta_4}\times$$

$$\times\sqrt{\int\limits_t^l (l-\tau)^n d\tau\int\limits_{x-t+\tau}^{-l+\tau}(\tau-\eta-l)^n d\eta} \le$$

$$\leq \sup_{(x,t)\in\Delta_4} |\chi(x,t)| \cdot \left(\frac{\|q\|_{2,\Delta_4}}{2}\right)^{n+1} \cdot \frac{\sqrt{(l-t)(t-x-l)^{n+1}}}{(n+1)!}.$$

Ҳамин тавр, баҳои (2.50) барои ҳамаи $k \in N$ исбот карда шуд.

Баробариҳои (2.47) ва (2.48) - ро ба баробарии (2.46) гузошта, муносибатҳои (2.41) - (2.43)-ро ҳосил менамоем. Теоремаи 2.4 пурра исбот шуд.

Акнун исбот менамоем, ки шарти зарурии (2.41), ки дар теоремаи 2.4 ба даст омадааст, ҳамзамон шарти кифоягӣ барои мавҷудияти ҳалли масъалаи идоракунии сарҳадии III низ мебошад.

Теоремаи 2.5. *Бигзор,* $T = l$ *ва* $q(x,t) \in L_2(Q_T)$ *бошад. Он гоҳ, муносибати (2.41) шарти кифоягӣ низ барои мавҷудияти ҳалли ягонаи масъалаи идоракунии сарҳадии III аз синфи* $\widehat{W}_2^1(Q_l)$ *мебошад.*

Исбот. Функсияи $u(x,t)$-ро дар секунҷаи Δ_1 ҳамчун ҳалли муодилаи интегралии (2.44) ва дар секунҷаи Δ_4 ҳамчун ҳалли муодилаи интегралии (2.45) муайян менамоем. Ин муодилаҳо дар асоси баҳоҳои (2.49) ва (2.50) ҳалли маҳдуд доранд, ки тавассути қаторҳои (2.47) ва (2.48) дода мешаванд. Далели он ки ин ҳалҳо дар Δ_1 ва Δ_4 бефосила мебошанд, аз бефосилагии қисмҳои рости муодилаҳои (2.44) ва (2.45) бармеояд. Агар шарти (2.41) иҷро гардад, он гоҳ, чуноне ки дар исботи теоремаи 2.4 нишон дода шудааст, баробарии (2.46) дуруст аст. Аз ин рӯ, функсияи $u(x,t)$ дар якҷояшавии секунҷаҳои Δ_1 ва Δ_4 бефосила мебошад. Ҳалҳои бо ин тарз дар Δ_1 ва Δ_4 сохташударо мувофиқан бо $u_1(x,t)$ ва $u_4(x,t)$ ишора мекунем.

Барои $(x,t) \in \Delta_2$ муносибати зеринро баррасӣ менамоем:

$$u(x,t) = \hat{u}_2(x,t) + \frac{1}{2}\left[\iint\limits_{\Omega_2'} - \iint\limits_{\Omega_2''} - \iint\limits_{\Omega_2}\right] q(\xi,\tau)u(\xi,\tau)d\xi d\tau, \qquad (2.51)$$

ки дар он $\hat{u}_2(x,t)$ – ҳалли масъалаи идоракунии сарҳадии III барои муодилаи мавҷии якҷинса мебошад, ки дар секунҷаи Δ_2 бо баробарии (2.37) муайян мегардад. Соҳаҳои интегралгирӣ бо нобаробариҳои зерин дода мешаванд:

$$\Omega_2' \equiv \Omega_2'(x,t) = \left\{(\xi,\tau) \middle|\, 0 \le \tau \le \frac{x+t}{2},\;\; \tau \le \xi \le x+t-\tau \right\},$$

$$\Omega_2'' \equiv \Omega_2''(x,t) = \left\{(\xi,\tau) \middle| \frac{l}{2} \le \tau \le l,\;\; \frac{x-t+l}{2} + \left|\tau - \frac{t-x+l}{2}\right| \le \xi \le \tau \right\},$$

$$\Omega_2 \equiv \Omega_2(x,t) = \left\{(\xi,\tau) \middle| \frac{x+t}{2} \le \tau \le \frac{t+l-x}{2},\;\; x+|\tau-t| \le \xi \le \frac{l}{2} - \left|\tau - \frac{l}{2}\right|\right\}.$$

Азбаски $\Omega_2' \subset \Delta_1$ ва $\Omega_2'' \subset \Delta_4$ мебошанд, пас аъзои якум ва дуюми интегралии қисми рости муносибати (2.51) аллакай маълуманд. Аз ин рӯ, муносибати (2.51) муодилаи интегралӣ барои ёфтани функсияи $u(x,t)$ дар соҳаи Δ_2 буда, чунин навишта мешавад:

$$u(x,t) = F_2(x,t) - [G_2u](x,t), \tag{2.52}$$

ки дар он

$$[G_2u](x,t) = \frac{1}{2}\iint\limits_{\Omega_2} q(\xi,\tau)u(\xi,\tau)d\xi d\tau,$$

$$F_2(x,t) = \hat{u}_2(x,t) + \frac{1}{2}\left[\iint\limits_{\Omega_2'} - \iint\limits_{\Omega_2''}\right] q(\xi,\tau)u(\xi,\tau)d\xi d\tau.$$

Оператори G_2 дар фазои $L_2(\Delta_2)$ маҳдуд амал мекунад ва дараҷаҳои он ба баҳои зерин итоат менамоянд:

$$\left|\left[G_2^k\chi\right](x,t)\right| \le \operatorname*{Sup}_{(x,t)\in\Delta_2} |\chi(x,t)| \left(\frac{\|q\|_{2,\Delta_2}}{2}\right)^k \frac{\sqrt{t(l-x-t)^k}}{k!},\;\; k \in N. \tag{2,53}$$

Дар ҳақиқат, ҳангоми $k = 1$ дорем:

$$|[G_2\chi](x,t)| = \left|\frac{1}{2}\iint\limits_{\Omega_2} q(\xi,\tau)\chi(\xi,\tau)d\xi d\tau\right| \le$$

$$\le \frac{1}{2}\operatorname*{Sup}_{(x,t)\in\Delta_2}|\chi(x,t)| \cdot \sqrt{\iint\limits_{\Omega_2} q^2(\eta,\tau)d\eta d\tau} \cdot \sqrt{\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x+t-\tau}^{l-\tau} d\eta} \le$$

$$\leq \frac{1}{2} \operatorname*{Sup}_{(x,t)\epsilon\Delta_2} |\chi(x,t)| \cdot \|q\|_{2,\Delta_2} \cdot \sqrt{\int_0^t (l-x-t)d\tau} \leq$$

$$\leq \operatorname*{Sup}_{(x,t)\epsilon\Delta_2} |\chi(x,t)| \cdot \frac{\|q\|_{2,\Delta_2}}{2} \cdot \sqrt{t(l-x-t)}.$$

Акнун фарз мекунем, ки барои $k = n$ баҳои (2.53) дуруст аст, яъне

$$|[G_2^n \chi](x,t)| \leq \operatorname*{Sup}_{(x,t)\epsilon\Delta_2} |\chi(x,t)| \cdot \left(\frac{\|q\|_{2,\Delta_2}}{2}\right)^n \cdot \frac{\sqrt{[t(l-x-t)]^n}}{n!}.$$

Барои ҳолати $k = n + 1$ дорем:

$$|[G_2^{n+1}\chi](x,t)| \leq \left| \frac{1}{2} \iint_{\Omega_2} q(\eta,\tau)[G_2^n \chi](\eta,\tau) d\eta d\tau \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} \operatorname*{Sup}_{(x,t)\epsilon\Delta_2} |\chi(x,t)| \cdot \left(\frac{\|q\|_{2,\Delta_2}}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{n!} \cdot \iint_{\Omega_2} |q(\eta,\tau)| \sqrt{[\tau(l-\eta-\tau)]^n} d\eta d\tau \leq$$

$$\leq \operatorname*{Sup}_{(x,t)\epsilon\Delta_2} |\chi(x,t)| \cdot \left(\frac{\|q\|_{2,\Delta_2}}{2}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{n!} \cdot \sqrt{\int_0^t \tau^n d\tau \int_{x+t-\tau}^{l-\tau} (l-\tau-\eta)^n d\eta} \leq$$

$$\leq \operatorname*{Sup}_{(x,t)\epsilon\Delta_2} |\chi(x,t)| \cdot \left(\frac{\|q\|_{2,\Delta_2}}{2}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{n!} \cdot \sqrt{\int_0^t \frac{\tau^n (l-x-t)^{n+1}}{n+1} d\tau} \leq$$

$$\leq \operatorname*{Sup}_{(x,t)\epsilon\Delta_2} |\chi(x,t)| \cdot \left(\frac{\|q\|_{2,\Delta_2}}{2}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{n!} \cdot \sqrt{\frac{t^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{(l-x-t)^{n+1}}{n+1}} \leq$$

$$\leq \operatorname*{Sup}_{(x,t)\epsilon\Delta_2} |\chi(x,t)| \cdot \left(\frac{\|q\|_{2,\Delta_2}}{2}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{n!} \cdot \frac{\sqrt{t^{n+1} \cdot (l-x-t)^{n+1}}}{n+1} \leq$$

$$\leq \operatorname*{Sup}_{(x,t)\epsilon\Delta_2} |\chi(x,t)| \cdot \left(\frac{\|q\|_{2,\Delta_2}}{2}\right)^{n+1} \cdot \frac{\sqrt{[t \cdot (l-x-t)]^{n+1}}}{(n+1)!}.$$

Аз баҳои (2.53) бармеояд, ки муодилаи (2.52) дар соҳаи Δ_2 ҳалли маҳдуд дорад. Ин ҳалро бо $u_2(x,t)$ ишора мекунем. Аз муносибати (2.51) бармеояд, ки функсияи $u_2(x,t)$ дар Δ_2 бефосила мебошад.

Дар сарҳади Δ_1 ва Δ_2, яъне барои ҳолати $x=t,\ 0\le t\le \frac{l}{2}$, муносибати (2.51) ба баробарии зерин табдил меёбад:

$$u_2(t,t)=\hat{u}_2(t,t)+\frac{1}{2}\iint\limits_{\Omega_2'(t,t)} q(\xi,\tau)u_1(\xi,\tau)d\xi d\tau. \qquad (2.54)$$

Азбаски $\hat{u}_2(t,t)=\hat{u}_1(t,t)$ ва $\Omega_2'(t,t)=\Omega_1(t,t)$, аз баробариҳои (2.44) ва (2.54) бармеояд, ки $u_2(t,t)=u_1(t,t)$.

Дар сарҳади Δ_2 ва Δ_4, яъне барои ҳолати $x=l-t,\ \frac{l}{2}\le t\le l$, муносибати (2.51) ба баробарии

$$u_2(l-t,t)=\hat{u}_2(l-t,t)+\frac{1}{2}\iint\limits_{\Delta_1} q(\xi,\tau)u_1(\xi,\tau)d\xi d\tau-$$

$$-\frac{1}{2}\iint\limits_{\Omega_2''(l-t,t)} q(\xi,\tau)u_4(\xi,\tau)d\xi d\tau \qquad (2.55)$$

ва муносибати (2.45) ба баробарии

$$u_4(l-t,t)=\hat{u}_4(l-t,t)+\frac{1}{2}\iint\limits_{\Omega_4(l-t,t)} q(\xi,\tau)u(\xi,\tau)d\xi d\tau$$

табдил меёбад.

Ба осонӣ боварӣ кардан мумкин аст, ки $\hat{u}_2(l-t,t)=\hat{u}_4(l-t,t)+A_0-B_0$ ва $\Omega_2''(l-t,t)\cup\Omega_4(l-t,t)=\Delta_4$. Пас, дар асоси баробарии (2.46), ки бо шарти (2.41) баробарқувва аст, ҳосил мекунем: $u_2(l-t,t)=u_4(l-t,t)$.

Ба таври монанд, барои $(x,t)\in\Delta_3$ муносибати зеринро дида мебароем:

$$u(x,t) = \hat{u}_3(x,t) + \frac{1}{2}\left[\iint\limits_{\Omega_3'} - \iint\limits_{\Omega_3''} - \iint\limits_{\Omega_3}\right] q(\xi,\tau)u(\xi,\tau)d\xi d\tau, \qquad (2.56)$$

ки дар он $\hat{u}_3(x,t)$ ҳалли масъалаи идоракунии сарҳадии III барои муодилаи мавҷии якҷинса дар секунҷаи Δ_3 мебошад (нигаред ба (20)) ва соҳаҳои интегралгирӣ бо нобаробариҳои зерин муайян мешаванд:

$$\Omega_3' \equiv \Omega_3'(x,t) = \left\{(\xi,\tau) \middle| \, 0 \le \tau \le \frac{l-x+t}{2}, x-t+\tau \le \xi \le l-\tau \right\},$$

$$\Omega_3'' \equiv \Omega_3''(x,t) = \left\{(\xi,\tau) \middle| \frac{l}{2} \le \tau \le l, l-\tau \le \xi \le \frac{x+t}{2} - \left|\tau - \frac{x+t}{2}\right| \right\},$$

$$\Omega_3 \equiv \Omega_3(x,t) = \left\{(\xi,\tau) \middle| \frac{l-x+t}{2} \le \tau \le \frac{x+t}{2}, \ \frac{l}{2} + \left|\tau - \frac{l}{2}\right| \le \xi \le x - |t-\tau| \right\}.$$

Азбаски $\Omega_3' \subset \Delta_1$ ва $\Omega_3'' \subset \Delta_4$, пас аввалин ва дуюмин аъзои интегралӣ дар қисми рости (2.56) аллакай маълуманд. Аз ин рӯ, баробарии (2.56) муодилаи интегралии намуди

$$u(x,t) = F_3(x,t) - [G_3 u](x,t) \qquad (2.57)$$

барои ёфтани ҳалли он $u(x,t)$ дар соҳаи Δ_3 мебошад. Дар ин ҷо:

$$[G_3\chi](x,t) = \frac{1}{2}\iint\limits_{\Omega_3} q(\xi,\tau)\chi(\xi,\tau)d\xi d\tau,$$

$$F_3(x,t) = \hat{u}_3(x,t) + \frac{1}{2}\left[\iint\limits_{\Omega_3'} - \iint\limits_{\Omega_3''}\right] q(\xi,\tau)u(\xi,\tau)d\xi d\tau.$$

Оператори G_3 дар фазои $L_2(\Delta_3)$ ба тарви маҳдуд амал мекунад ва барои дараҷаҳои он баҳои зерин дуруст аст:

$$\left|\left[G_3^k\chi\right](x,t)\right| \le \operatorname*{Sup}_{(x,t)\in\Delta_3} |\chi(x,t)| \left(\frac{\|q\|_{2,\Delta_3}}{2}\right)^k \frac{\sqrt{[t(t-x)]^k}}{k!}, \ \ k \in N. \qquad (2.58)$$

Дар воқеъ, барои $k = 1$ дорем:

$$
|[G_3\chi](x,t)| = \left|\frac{1}{2}\iint\limits_{\Omega_3} q(\xi,\tau)\chi(\xi,\tau)d\xi d\tau\right| \leq
$$

$$
\leq \left|\frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{\tau} q(\eta,\tau)\chi(\eta,\tau)d\eta\right| \leq
$$

$$
\leq \frac{1}{2}\operatorname*{Sup}_{(x,t)\epsilon\Delta_3}|\chi(x,t)|\cdot\sqrt{\iint\limits_{\Delta_3} q^2(\eta,\tau)d\eta d\tau}\cdot\sqrt{\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{\tau} d\eta} \leq
$$

$$
\leq \operatorname*{Sup}_{(x,t)\epsilon\Delta_3}|\chi(x,t)|\cdot\frac{\|q\|_{2,\Delta_3}}{2}\cdot\sqrt{\int\limits_0^t (t-x)d\tau} \leq
$$

$$
\leq \operatorname*{Sup}_{(x,t)\epsilon\Delta_3}|\chi(x,t)|\cdot\frac{\|q\|_{2,\Delta_3}}{2}\cdot\sqrt{t(t-x)}.
$$

Бигзор ҳангоми $k = n$ будан баҳои (2.58) дуруст аст, яъне

$$
|[G_3^n\chi](x,t)| \leq \operatorname*{Sup}_{(x,t)\epsilon\Delta_3}|\chi(x,t)|\cdot\left(\frac{\|q\|_{2,\Delta_3}}{2}\right)^n\cdot\frac{\sqrt{[t(t-x)]^n}}{n!}.
$$

Барои $k = n + 1$ дорем:

$$
|[G_3^{n+1}\chi](x,t)| = \left|\frac{1}{2}\iint\limits_{\Omega_3} q(\xi,\tau)\,[G_3^n\chi(\eta,\tau)](\eta,\tau)d\eta d\tau\right| \leq
$$

$$
\leq \frac{1}{2}\operatorname*{Sup}_{(x,t)\epsilon\Delta_3}|\chi(x,t)|\cdot\left(\frac{\|q\|_{2,\Delta_3}}{2}\right)^n\cdot\frac{1}{n!}\cdot\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{x-t+\tau}^{\tau} q(\eta,\tau)\sqrt{[\tau(\tau-\eta)]^n}d\eta \leq
$$

$$
\leq \frac{1}{2}\operatorname*{Sup}_{(x,t)\epsilon\Delta_3}|\chi(x,t)|\cdot\left(\frac{\|q\|_{2,\Delta_3}}{2}\right)^n\cdot\frac{1}{n!}\cdot\|q\|_{2,\Delta_3}\cdot\sqrt{\int\limits_0^t \tau^n d\tau\int\limits_{x-t+\tau}^{\tau}(\tau-\eta)^n d\eta} \leq
$$

$$
\leq \operatorname*{Sup}_{(x,t)\epsilon\Delta_3}|\chi(x,t)|\cdot\left(\frac{\|q\|_{2,\Delta_3}}{2}\right)^{n+1}\cdot\frac{1}{n!}\cdot\sqrt{\int\limits_0^t \frac{\tau^n(t-x)^{n+1}}{n+1}d\tau} \leq
$$

$$\leq \sup_{(x,t)\in\Delta_3} |\chi(x,t)| \cdot \left(\frac{\|q\|_{2,\Delta_3}}{2}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{n!} \cdot \sqrt{\frac{t^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{(t-x)^{n+1}}{n+1}} \leq$$

$$\leq \sup_{(x,t)\in\Delta_3} |\chi(x,t)| \cdot \left(\frac{\|q\|_{2,\Delta_3}}{2}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{n!} \cdot \frac{\sqrt{t^{n+1} \cdot (t-x)^{n+1}}}{n+1} \leq$$

$$\leq \sup_{(x,t)\in\Delta_3} |\chi(x,t)| \cdot \left(\frac{\|q\|_{2,\Delta_3}}{2}\right)^{n+1} \cdot \frac{\sqrt{t^{n+1} \cdot (t-x)^{n+1}}}{(n+1)!}.$$

Аз ин ҷо бармеояд, ки муодилаи интегралии (2.57) дорои ҳалли маҳдуд ва бефосила дар Δ_3 мебошад, ки онро бо $u(x,t) = u_3(x,t)$ ишора мекунем.

Ба монанди (2.54) ва (2.55) хулоса баровардан мумкин аст, ки дар сарҳади секунҷҳои Δ_3 ва Δ_1: $u_3(l-t,t) = u_1(l-t,t)$ ва дар асоси (2.51) дар сарҳади Δ_3 ва Δ_4: $u_3(t,t) = u_4(t,t)$.

Ҳамин тавр, ҳалли муодилаҳои интегралии (2.44), (2.45), (2.52) ва (2.57) функсияи бефосиларо дар Q_l муайян мекунанд, ки барои он $u(x,t) = u_j(x,t)$, $(x,t) \in \Delta_j,\ j = \overline{1,4}$.

Аз ҳар ду тарафи ин муодилаҳои интегралӣ нисбат ба x ва t ҳосила гирифта, ба осонӣ нишон додан мумкин аст, ки функсияи $u(x,t)$ ба синфи $\widehat{W}_2^1(Q_l)$ тааллуқ дорад. Илова бар ин, аз тасдиқи 2.4 бармеояд, ки $u(x,t)$ аз ҳамин синф ҳалли масъалаи идоракуни сарҳадии III барои муодилаи телеграфӣ бо коэффитсиенти тағйирёбанда мебошад. Теоремаи 2.5 пурра исбот шуд.

Эзоҳи 2.5. Аз баҳоҳои (2.49), (2.50), (2.53), (2.58) ва формулаҳое, ки ҳалли $u_j(x,t)$-ро барои муодилаҳои интегралӣ бо шакли қаторҳои Нейман муайян мекунанд (нигаред, масалан, ба баробариҳои (2.47), (2.48) барои $j = 1$ ва $j = 4$), баҳои априорӣ барои ҳалли масъалаи идоракунииии сарҳадии III бармеояд:

$$\|u(x,t)\|_{\widehat{W}_2^1(Q_l)} \leq L\big(\|\varphi\|_{W_2^1[0,l]} + \|\varphi_1\|_{W_2^1[0,l]} + \|\psi\|_{L_2[0,l]} + \|\psi_1\|_{L_2[0,l]}\big),$$

ки дар он «доимии L ба нормаи функсияҳои ба масъала дохилшуда вобаста нест. Ин баҳо нишон медиҳад, ки ҳалли бадастомада нисбат ба шартҳои ибтидоӣ ва ниҳоӣ устувор аст.

Илова бар ин, аз баҳоҳои (2.49), (2.50), (2.53), (2.58) ва тасвирҳои интегралӣ барои ҳосилаҳои хусусии тартиби якуми ҳалли $u(x,t)$ бармеояд, ки агар $\|q\|_2 \to 0$, пас $\| \mu - \hat{\mu} \|_{W_2^1[0,T]} \to 0$, $\| \nu - \hat{\nu} \|_{L_2[0,T]} \to 0$, ки дар онҳо $\hat{\mu}(t) = \hat{u}(0,t)$, $\hat{\nu}(t) = \hat{u}_x(l,t)$.

Ин аз регулярӣ будани ҳалли масъалаи идоракунии сарҳадии III нисбат ба ошӯби аддитивии $q(x,t)u(x,t)$ дар оператори мавҷии (2.1) бо коэффитсиенти бо квадрат замшавандаи $q(x,t)$ шаҳодат медиҳад» [24].

2.4. Сохтани идоракуниҳои сарҳадии оптималӣ дар фосилаи вақти ихтиёрии ба қадри кофӣ калон барои равандҳое, ки бо муодилаи лапишҳои маҷбурии тор ифода мешаванд

Дар кори [65] барои лапишҳои озод ва дар кори [23] барои лапишҳои маҷбурии тор нишон дода шудааст, ки ҳангоми $T > l$ масъалаи идоракунии сарҳадӣ дорои шумораи беохири ҳалҳо мебошад. Аз ин рӯ, дар ин маврид масъалаи оптимизатсияи идоракунии сарҳадӣ ба миён меояд. Он дар ёфтани чунин функсияҳои $\mu(t) \in W_2^1[0,T]$, $\nu(t) \in L_2[0,T]$ ифода меёбад, ки бо назардошти шартҳои алоқа, ки аз иҷрои шартҳои ибтидоӣ ва ниҳоӣ бармеоянд, ба интеграли энергияи сарҳадӣ қимати хурдтарин медиҳанд. Дар ин банд мо ба ҳалли ҳамин масъала машғул мешавем. Аниқтараш, идоракуниҳои сарҳадии оптималӣ дар шакли аналитикии ошкор пешниҳод карда мешаванд, ки бо маънои масъалаи гузошташуда муайян гардидаанд. Ин идоракуниҳо дар нӯги чапи тор $x = 0$ тавассути ҷойивазкунӣ ва дар нӯги рости тор $x = l$ тавассути қувваи чандирӣ амалӣ мегарданд ва барои фосилаи вақти ихтиёрии ба қадри кофӣ калони $[0,T]$ равандҳои лапишҳои маҷбурии торро аз ҳолати ибтидоии ихтиёрӣ ба ҳолати ниҳоии пешакӣ додашуда меоранд.

Натиҷаи асосии ин банд теоремаи 2.6 мебошад.

Теоремаи 2.6. *Бигзор, дар масъалаи идоракунии сарҳадии III* $T = 2ln + \Delta$, *ки дар он* $n \in N$, $\Delta \in [0; 2l]$ *ва* $q(x,t) \equiv 0$ *бошад. Он гоҳ идоракуниҳои сарҳадии ягонаи* $u(0,t) = \mu(t) \in W_2^1[0,T], u_x(l,t) = \nu(t) \in L_2[0,T]$ *вуҷуд доранд, ки системаи лаппишро аз ҳолати ибтидоии (2.3) ба ҳолати ниҳоии (2.5) меоранд ва ҳамзамон ба интеграли энергияи сарҳадии зерин қимати хурдтарин медиҳанд:*

$$\int_0^T \{[\mu'(t)]^2 + [\nu(t)]^2\} dt. \tag{2.59}$$

Ин идоракуниҳои сарҳадӣ барои ҳамаи $0 \le t \le \Delta$ *ва* $m = \overline{0,n}$ *ва барои ҳамаи* $\Delta \le t \le 2l$ ва $m = \overline{0, n-1}$ *бо формулаҳои зерин муайян карда мешаванд:*

ҳангоми $0 \le \Delta \le l$:

$$\mu(2lm + t) = \varphi(0) + m \int_0^{2l} F_1(\eta) d\eta + \int_0^t F_1(\eta) d\eta, \tag{2.60}$$

$$\nu(2lm + t) = F_2(t), \tag{2.61}$$

ки дар ин ҷо:

$$F_1(t) = \begin{cases} (-1)^{m+1} \cdot \dfrac{A_2(t)}{2n+1} + (-1)^{m+1} \cdot \dfrac{\sum_{m=0}^{n} (-1)^m C}{2n+1} + C, \ \ t \in [0; \Delta]; \\ (-1)^{m+1} \cdot \dfrac{A_3(t)}{2n} + (-1)^{m+1} \cdot \dfrac{\sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m C}{2n} + C, t \in [\Delta; l]; \\ (-1)^{m+1} \cdot \dfrac{A_1(t-l)}{2n+1} + (-1)^{m+1} \cdot \dfrac{\sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m C}{2n+1} + C, t \in [l; l+\Delta]; \\ (-1)^{m+1} \cdot \dfrac{A_4(t-l)}{2n} + (-1)^{m+1} \cdot \dfrac{\sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m C}{2n} + C, t \in [l+\Delta; 2l]; \end{cases} \tag{2.62}$$

$$F_2(t) = \begin{cases} (-1)^{m} \cdot \dfrac{A_1(t)}{2n+1} + (-1)^{m} \cdot \dfrac{\sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m C}{2n+1} + C, \quad t \in [0; \Delta]; \\ (-1)^{m} \cdot \dfrac{A_4(t)}{2n} + (-1)^{m} \cdot \dfrac{\sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m C}{2n}, \qquad t \in [\Delta; l]; \\ (-1)^{m} \cdot \dfrac{A_2(t-l)}{2n+1} + (-1)^{m} \cdot \dfrac{\sum_{m=0}^{n} (-1)^m C}{2n+1}, \qquad t \in [l; l+\Delta]; \\ (-1)^{m} \cdot \dfrac{A_3(t-l)}{2n} + (-1)^{m} \cdot \dfrac{\sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m C}{2n}, \qquad t \in [l+\Delta; 2l]; \end{cases} \tag{2.63}$$

$$A_1(t) = \frac{1}{2}\Bigg[\varphi_1'(t-\Delta+l) + \varphi'(l-t) + \psi_1(t-\Delta+l) - \psi(l-t) -$$

$$- \int\limits_l^{2ln+\Delta} f(x+2ln+l-\tau,\tau)d\tau - \int\limits_0^l f(l-t+\tau,\tau)d\tau\Bigg]; \qquad (2.64)$$

$$A_2(t) = \frac{1}{2}\Bigg[\varphi_1'(\Delta-t) - \varphi'(t) - \psi_1(\Delta-t) - \psi(t) +$$

$$+ \int\limits_l^{2ln+\Delta} f(\tau-t-2ln,\tau)d\tau - \int\limits_0^l f(t-\tau,\tau)d\tau\Bigg]; \qquad (2.65)$$

$$A_3(t) = \frac{1}{2}\Bigg[\varphi_1'(t-\Delta) - \varphi'(t) + \psi_1(t-\Delta) - \psi(t) -$$

$$- \int\limits_l^{2ln+\Delta} f(t+2ln-\tau,\tau)d\tau - \int\limits_0^l f(t-\tau,\tau)d\tau\Bigg]; \qquad (2.66)$$

$$A_4(t) = \frac{1}{2}\Bigg[\varphi_1'(\Delta-t+l) + \varphi'(l-t) - \psi_1(\Delta-t+l) - \psi(l-t) +$$

$$+ \int\limits_l^{2ln+\Delta} f(t-2ln-t+\tau,\tau)d\tau - \int\limits_0^l f(l-t+\tau,\tau)d\tau\Bigg]; \qquad (2.67)$$

$$C = \begin{cases} \dfrac{(4s-2)[\varphi_1(0)-\varphi(0)] + \int_\Delta^l A_3(t)dt}{8s^2l - 8sl + 4s\Delta + l - \Delta} & \text{барои } n = 2s-1, \\ \dfrac{(4s+1)[\varphi_1(0)-\varphi(0)] + \int_0^\Delta A_2(t)dt}{4s\Delta + 8s^2l + 2sl} & \text{барои } n = 2s; \end{cases} \qquad (2.68)$$

ҳангоми $l \le \Delta \le 2l$:

$$\mu(2lm+t) = \varphi(0) + m\int\limits_0^{2l} F_3(\eta)d\eta + \int\limits_0^t F_3(\eta)d\eta, \qquad (2.69)$$

$$\nu(2lm+t) = F_4(t), \qquad (2.70)$$

ки дар ин ҷо:

$$F_3(t) = \begin{cases} (-1)^{m+1} \cdot \dfrac{B_1(t)}{2n+2} + (-1)^{m+1} \cdot \dfrac{\sum_{m=0}^{n}(-1)^m C_1}{2n+2} + C_1, t \in [0; \Delta - l]; \\ (-1)^{m+1} \cdot \dfrac{B_4(t)}{2n+1} + (-1)^{m+1} \cdot \dfrac{\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m C_1}{2n+1} + C_1, t \in [\Delta - l; l]; \\ (-1)^{m+1} \cdot \dfrac{B_2(t-l)}{2n+2} + (-1)^{m+1} \cdot \dfrac{\sum_{m=0}^{n}(-1)^m C_1}{2n+2} + C_1, t \in [l; \Delta]; \\ (-1)^{m+1} \cdot \dfrac{B_3(t-l)}{2n+1} + (-1)^{m+1} \cdot \dfrac{\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m C_1}{2n+1} + C_1, t \in [\Delta; 2l]; \end{cases} \quad (2.71)$$

$$F_4(t) = \begin{cases} (-1)^{m} \cdot \dfrac{B_2(t)}{2n+2} + (-1)^{m} \cdot \dfrac{\sum_{m=0}^{n}(-1)^m C_1}{2n+2}, \quad t \in [0; \Delta - l]; \\ (-1)^{m} \cdot \dfrac{B_3(t)}{2n+1} + (-1)^{m} \cdot \dfrac{\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m C_1}{2n+1}, \quad t \in [\Delta - l; l]; \\ (-1)^{m} \cdot \dfrac{B_1(t-l)}{2n+2} + (-1)^{m} \cdot \dfrac{\sum_{m=0}^{n}(-1)^m C_1}{2n+2}, \quad t \in [l; \Delta]; \\ (-1)^{m} \cdot \dfrac{B_4(t-l)}{2n+1} + (-1)^{m} \cdot \dfrac{\sum_{m=0}^{n}(-1)^m C_1}{2n+1}, \quad t \in [\Delta; 2l]; \end{cases} \quad (2.72)$$

$$B_1(t) = \frac{1}{2}\Bigg[\varphi_1'(t - \Delta + 2l) - \varphi'(t) + \psi_1(t - \Delta + 2l) - \psi(t) - \\ - \int_l^{2ln+\Delta} f(t + 2ln + 2l - \tau, \tau)d\tau - \int_0^l f(t - \tau, \tau)d\tau\Bigg]; \quad (2.73)$$

$$B_2(t) = \frac{1}{2}\Bigg[\varphi_1'(\Delta - l - t) + \varphi'(l - t) - \psi_1(\Delta - l - t) - \psi(l - t) + \\ + \int_l^{2ln+\Delta} f(\tau - l - 2ln - t, \tau)d\tau - \int_0^l f(l - t + \tau, \tau)d\tau\Bigg]; \quad (2.74)$$

$$B_3(t) = \frac{1}{2}\Bigg[\varphi_1'(t - \Delta + l) + \varphi'(l - t) + \psi_1(t - \Delta + l) - \psi(l - t) - \\ - \int_l^{2ln+\Delta} f(t + 2ln + l - \tau, \tau)d\tau - \int_0^l f(l - t + \tau, \tau)d\tau\Bigg]; \quad (2.75)$$

$$B_4(t) = \frac{1}{2}\Bigg[\varphi_1'(\Delta - t) - \varphi'(t) - \psi_1(\Delta - t) - \psi(t) + \\ + \int_l^{2ln+\Delta} f(\tau - 2ln - t, \tau)d\tau - \int_0^l f(t - \tau, \tau)d\tau\Bigg]; \quad (2.76)$$

$$C_1 = \begin{cases} \dfrac{4s[\varphi_1(0) - \varphi(0)] + \int_0^{\Delta - l} B_1(t)dt}{8s^2 l + 4s\Delta - 4sl} & \text{барои } n = 2s - 1, \\ \dfrac{(4s+1)[\varphi_1(0) - \varphi(0)] + \int_{\Delta - l}^{l} B_4(t)dt}{8s^2 l + 4s\Delta + 2sl + \Delta} & \text{барои } n = 2s. \end{cases} \quad (2.77)$$

Исбот. Функсияи $f(x,t)$-ро аз рӯйи тағйирёбандаи якум нисбат ба нуқтаи $x = 0$ ба соҳаи $[-l; 0]$ тоқ ва нисбат ба нуқтаи $x = l$ ба соҳаи $[l; 2l]$ ҷуфт идома медиҳем. Дар натиҷаи чунин давомдиҳӣ ҳосил мекунем, ки $f(x,t) \in L_2((-l \le x \le 2l) \times (0 \le t \le T))$.

Акнун барои ҳар гуна $T > l$ функсияи зеринро баррасӣ мекунем:

$$\tilde{u}(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\Bigg[\varphi(x+t) + \varphi(x-t) + \displaystyle\int_{x-t}^{x+t} \psi(\xi)d\xi \; + \\ + \displaystyle\int_0^l \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi,\tau)d\xi d\tau \; + \int_0^t \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi,\tau)d\xi d\tau \Bigg] \text{ дар } \Delta_1, \\ \dfrac{1}{2}\Bigg[\varphi(x+t) + \varphi(0) + \displaystyle\int_0^{x+t} \psi(\xi)d\xi \; + \\ + \displaystyle\int_0^l \int_{\tau}^{x+t-\tau} f(\xi,\tau)d\xi d\tau \; + \int_0^t \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi,\tau)d\xi d\tau \Bigg] \text{ дар } \Delta_2, \\ \dfrac{1}{2}\Bigg[\varphi(l) + \varphi(x-t) + \displaystyle\int_{x-t}^{l} \psi(\xi)d\xi \; + \\ + \displaystyle\int_0^l \int_{x-t+\tau}^{l-\tau} f(\xi,\tau)d\xi d\tau \; + \int_0^t \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi,\tau)d\xi d\tau \Bigg] \text{ дар } \Delta_3, \\ \dfrac{1}{2}\Bigg[\varphi(0) + \varphi(l) + \displaystyle\int_0^{l} \psi(\xi)d\xi \; + \\ + \displaystyle\int_0^l \int_{\tau}^{l-\tau} f(\xi,\tau)d\xi d\tau \; + \int_0^t \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi,\tau)d\xi d\tau \Bigg] \text{ дар } \Delta_4, \end{cases} \quad (2.78)$$

Δ_1 – секунҷае аст, ки бо порчаҳои хатҳои рости $x-t=0, x+t-l=0, t=0$ маҳдуд шудааст; Δ_2– секунҷае мебошад, ки бо порчаҳои хатҳои рости $x-t=0, x+t-l=0, x=0$ маҳдуд шудааст; Δ_3 – секунҷае мебошад, ки бо порчаҳои хатҳои рости $x-t=0, x+t-l=0, x-l=0$ маҳдуд шудааст; Δ_4 – панҷкунҷае мебошад, ки бо порчаҳои хатҳои рости $x-t=0, x+t-l=0$, $x=0, x-l=0, t-T=0$ маҳдуд гардидааст.

Дар идома ба мо тасдиқи зерин лозим мешавад.

Леммаи 2.2. *Барои ҳар гуна $T>l$ функсияи (2.78) ҳалли ягонаи умумишудаи масъалаи омехта аз синфи $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ барои муодилаи мавҷии ғайриякҷинсаи $\tilde{u}_{tt}(x,t)-\tilde{u}_{xx}(x,t)=f(x,t)$ бо шартҳои ибтидоии*

$$\tilde{u}(x,0)=\varphi(x)-\frac{1}{2}\int_0^l\int_{x-\tau}^{x+\tau} f(\xi,\tau)d\xi d\tau\ ,$$

$$\tilde{u}_t(x,0)=\psi(x)+\frac{1}{2}\int_0^l[f(x+\tau,\tau)+f(x-\tau,\tau)]d\tau$$

ва шартҳои сарҳадии $\tilde{u}(0,t)=\tilde{\mu}(t),\ \tilde{u}_x(l,t)=\tilde{\nu}(t)$, ки дар ин ҷо

$$\tilde{\mu}(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left[\varphi(t)+\varphi(0)+\displaystyle\int_0^t\psi(\xi)d\xi\ +\int_0^l\int_\tau^{t-\tau} f(\xi,\tau)d\xi d\tau\right], & 0\le t\le l,\\ \dfrac{1}{2}\left[\varphi(l)+\varphi(0)+\displaystyle\int_0^l\psi(\xi)d\xi\ +\int_0^l\int_\tau^{l-\tau} f(\xi,\tau)d\xi d\tau\right], & l\le t\le T;\end{cases}\tag{2.79}$$

$$\tilde{\nu}(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left[\varphi'(l-t)-\psi(l-t)-\displaystyle\int_0^l f(l-t+\tau,\tau)d\tau\right], & 0\le t\le l,\\ 0, & l\le t\le T\end{cases}\tag{2.80}$$

мебошад.

Исботи леммаи 2.2. Мансуб будани функсияи (2.78) ба синфи $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ аз он бармеояд, ки вай дар ҳар яке аз соҳаҳои $\Delta_i, i=\overline{1,4}$ суммаи алгебравии функсияҳои аз аргументҳои $x+t$ ё $x-t$ вобаста мебошад, ки ҳосилаи умумишудаи бо квадрат замшаванда доранд ва ҳангоми гузариш аз сарҳади ду соҳаи дилхоҳ аз чор соҳаи зикршуда бефосилагии худро нигоҳ медоранд.

Ба осонӣ санҷида мешавад, ки функсияи (2.78) шартҳои ибтидоӣ ва сарҳадиро қонеъ мегардонад.

Исботи он боқӣ мемонад, ки ҳангоми $u(x,t) = \tilde{u}(x,t)$, $\mu(t) = \tilde{\mu}(t)$, $\nu(t) = \tilde{\nu}(t)$ ва барои ҳар гуна функсияи $\Phi(x,t)$ аз таърифи 2.3 айнияти (2.7) иҷро мегардад. Бо истифода аз усули интегралгирӣ бо қисмҳо исботи дурустии баробарии зерин кифоя мебошад:

$$\int_0^T \int_0^l [\tilde{u}_x(x,t)\Phi_x(x,t) - \tilde{u}_t(x,t)\Phi_t(x,t) - f(x,t)\Phi(x,t)]dxdt =$$

$$= \int_0^l \psi(x)\Phi(x,0)dx. \tag{2.81}$$

Бо $\hat{f}(x,t)$ функсияи ибтидоии ихтиёрии $f(x,t)$ - ро нисбат ба тағйирёбандаи x ишора менамоем ва функсияи зеринро барои баррасӣ ворид мекунем:

$$\widetilde{U}(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[-\varphi(x-t) + \int_0^{x-t} \psi(\xi)d\xi \; + \right. \\ \left. + \int_0^l \hat{f}(x-t+\tau,\tau)d\tau \; + J_1(x,t) + J_2(x,t)\right] \text{ дар } \Delta_1, \\ \frac{1}{2}\left[-\varphi(0) + \int_0^l \hat{f}(\tau,\tau)d\tau + J_1(x,t) + J_2(x,t)\right] \text{ дар } \Delta_2, \\ \frac{1}{2}\left[-\varphi(x-t) + \int_0^{x-t} \psi(\xi)d\xi \; + \right. \\ \left. + \int_0^l \hat{f}(x-t+\tau,\tau)d\tau \; + J_2(x,t) + J_3(x,t)\right] \text{ дар } \Delta_3, \\ \frac{1}{2}\left[-\varphi(0) + \int_0^l \hat{f}(\tau,\tau)d\tau \; + J_2(x,t) + J_3(x,t)\right] \text{ дар } \Delta_4, \end{cases}$$

ки дар ин ҷо

$$J_1(x,t) = \varphi(x+t) + \int_0^{x+t} \psi(\xi)d\xi \ + \int_0^l \hat{f}(x+t-\tau,\tau)d\tau\,,$$

$$J_2(x,t) = \int_0^t \hat{f}(x+t-\tau,\tau)d\tau + \int_0^t \hat{f}(x-t+\tau,\tau)d\tau,$$

$$J_3(x,t) = \varphi(l) + \int_0^l \psi(\xi)d\xi \ + \int_0^l \hat{f}(l-\tau,\tau)d\tau$$

ва $\Delta_i, i = \overline{1,4}$ ҳамон соҳаҳое мебошанд, ки ҳангоми таърифи функсияи (2.78) муайян гардида буданд.

Ба монанди функсияи $\tilde{u}(x,t)$ исбот карда мешавад, ки функсияи $\widetilde{U}(x,t)$ низ ба синфи $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ тааллуқ дорад. Қайд менамоем, ки барои қариб ҳамаи нуқтаҳои росткунҷаи Q_T баробарии зерин иҷро мегардад:

$$\widetilde{U}_x(x,t) = \tilde{u}_t(x,t), \qquad \widetilde{U}_t(x,t) - \hat{f}(x,t) = \tilde{u}_x(x,t).$$

Бо ба назар гирифтани ин баробариҳо, ба мисли баробарии (2.33) дурустии баробарии (2.81) исбот карда мешавад. Леммаи 2.1 исбот гардид.

Акнун бигузор $u(x,t)$ ҳалли умумишудаи масъалаи омехтаи асосӣ аз синфи $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ барои муодилаи (2.1) ҳангоми $q(x,t) \equiv 0$ бо шартҳои ибтидоии (2.3) ва шартҳои сарҳадии (2.2) бошад, ки оптимизатсия маҳз барои он гузаронида мешавад ва $\tilde{u}(x,t)$ функсияи (2.78) аст. Он гоҳ функсияи $\hat{u}(x,t) = u(x,t) - \tilde{u}(x,t)$ ҳалли умумишудаи ягонаи масъалаи омехта аз синфи $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ барои муодилаи мавҷии якҷинсаи

$$\hat{u}_{tt}(x,t) - \hat{u}_{xx}(x,t) = 0$$

бо шартҳои ибтидоии

$$\hat{u}(x,0) = \frac{1}{2}\int_0^l \int_{x-\tau}^{x+\tau} f(\xi,\tau)d\xi d\tau\,, \hat{u}_t(x,0) = -\frac{1}{2}\int_0^l [f(x+\tau,\tau) + f(x-\tau,\tau)]d\tau$$

ва бо шартҳои сарҳадии $\hat{\mu}(t)=\mu(t)-\tilde{\mu}(t), \hat{\nu}(t)=\nu(t)-\tilde{\nu}(t)$ мебошад. Қайд менамоем, ки дар айни ҳол $\hat{\mu}(0)=0$.

Барои муайян намудани шартҳои алоқа, ки аз иҷрои шартҳои ибтидоии додашудаи (2.3) ва шартҳои ниҳоии додашудаи (2.5) бармеоянд, ба мо леммаи 2.3 лозим мешавад.

Леммаи 2.3. *Барои ҳар гуна $T \leq 2l(n+1), n \in N$, функсияи $\hat{u}(x,t)$ бо баробарии зерин муайян карда мешавад:*

$$\hat{u}(x,t)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \underline{\hat{\mu}}(t-x-2kl)-\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k \underline{\hat{\mu}}(t+x-2kl)+$$

$$+\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \int_0^{t+x-2kl-l} \underline{\hat{\nu}}(\tau)d\tau+\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k \int_0^{t-x-2kl+l} \underline{\hat{\nu}}(\tau)d\tau-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^l \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi,\tau)d\xi d\tau, \tag{2.82}$$

ки дар он рамзҳои $\underline{\hat{\mu}}$ ва $\underline{\hat{\nu}}$ функсияҳое мебошанд, ки бо $\hat{\mu}$ ва $\hat{\nu}$ ҳангоми $t \geq 0$ мувофиқат мекунанд ва ҳангоми $t<0$ ба сифр баробаранд.

Исботи леммаи 2.3. Функсияи (2.82) ба синфи $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ таалluқ дорад, зеро он суммаи алгебравии шумораи охирноки функсияҳо аз аргументҳои $x+t$ ё $x-t$ мебошад, ки ҳар кадоми онҳо ба синфи $W_2^1(-\varepsilon,T]$ $\forall \varepsilon>0$ мансубанд. Ҳамин тариқ, исботи он боқӣ мемонад, ки ин функсия барои ҳар гуна функсияи $\Phi(x,t)$ аз таърифи 2.3 айнияти (2.7)-ро қонеъ мегардонад, ки дар он $u(x,t)$, $\mu(t)$, $\nu(t)$, $\varphi(x), \psi(x)$ мувофиқан бо $\hat{u}(x,t)$, $\hat{\mu}(t)$, $\hat{\nu}(t)$, $\hat{u}(x,0)$, $\hat{u}_t(x,0)$ иваз карда мешаванд ва $f(x,t) \equiv 0$ аст.

Дар асоси (2.81) исботи дурустии баробарии зерин кифоя мебошад:

$$\int_0^T \int_0^l [\hat{u}_x(x,t)\Phi_x(x,t)-\hat{u}_t(x,t)\Phi_t(x,t)-f(x,t)\Phi(x,t)]dxdt=$$

$$=\int_0^l \hat{u}_t(x,0)\Phi(x,0)dx. \tag{2.81*}$$

Барои сода гардондани ҳисобҳои минбаъда функсияи зеринро ворид менамоем:

$$\widehat{U}(x,t) = -\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \underline{\hat{\mu}}(t-x-2kl) - \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k \underline{\hat{\mu}}(t+x-2kl) +$$

$$+\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \int_0^{t+x-2kl-l} \underline{\hat{\nu}}(\tau)d\tau - \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k \int_0^{t-x-2kl+l} \underline{\hat{\nu}}(\tau)d\tau -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^l \int_0^{x+t-\tau} f(\xi,\tau)d\xi d\tau - \frac{1}{2}\int_0^l \int_0^{x-t+\tau} f(\xi,\tau)d\xi d\tau.$$

Таъаллуқ доштани ин функсия ба синфи $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ ба монанди функсияи $\hat{u}(x,t)$ муқаррар карда мешавад. Қайд менамоем, ки барои қариб ҳамаи нуқтаҳои росткунҷаи Q_T баробариҳои зерин иҷро мегарданд:

$$\widetilde{U}_x(x,t) = \tilde{u}_t(x,t), \quad \tilde{u}_x(x,t) = \widetilde{U}_t(x,t).$$

Дурустии муносибати (2.81^*) ба мисли исботи муносибати (2.10) нишон дода мешавад. Леммаи 2.3 исбот гардид.

Бо такя ба баробарии (2.82) ба муайян намудани шартҳои алоқа, ки аз иҷрои шартҳои ибтидоии додашудаи (2.3) ва шартҳои ниҳоии додашудаи (2.5) бармеоянд, мегузарем.

Азбаски функсияи $\tilde{u}(x,t)$ шартҳои ниҳоии

$$\tilde{u}(x,T) = C_0 + \frac{1}{2}\int_0^T \int_{x-T+\tau}^{x+T-\tau} f(\xi,\tau)d\xi d\tau,$$

$$C_0 = \frac{1}{2}\left[f(0) + f(l) + \int_0^l \psi(\xi)d\xi + \int_0^l \int_\tau^{l-\tau} f(\xi,\tau)d\xi d\tau\right],$$

$$\tilde{u}_t(x,T) = \frac{1}{2}\int_0^T [f(x+T-\tau,\tau) + f(x-T+\tau,\tau)]d\tau$$

ва функсияи $u(x,t)$ шартҳои ниҳоии (2.5)-ро қонеъ мегардонад, пас функсияи $\hat{u}(x,t)$ шартҳои ниҳоии зеринро қонеъ менамояд:

$$\hat{u}(x,T) = \varphi_1(x) - C_0 - \frac{1}{2}\int_0^T \int_{x-T+\tau}^{x+T-\tau} f(\xi,\tau)d\xi d\tau\,,$$

$$\hat{u}_t(x,T) = \psi_1(x) - \frac{1}{2}\int_0^T [f(x+T-\tau,\tau) + f(x-T+\tau,\tau)]d\tau. \qquad (2.83)$$

Аз баробарии (2.82) нисбат ба x ва нисбат ба t ҳосила гирифта, баробариҳои зеринро ҳосил мекунем:

$$\hat{u}_x(x,t) = -\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \underline{\hat{\mu}}'(t-x-2kl) - \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k \underline{\hat{\mu}}'(t+x-2kl) +$$

$$+\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \underline{\hat{\nu}}(t+x-2kl-l) - \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k \underline{\hat{\nu}}(t-x-2kl+l) -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^l [f(x+t-\tau,\tau) - f(x-t+\tau,\tau)]d\tau, \qquad (2.84)$$

$$\hat{u}_t(x,t) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \underline{\hat{\mu}}'(t-x-2kl) - \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k \underline{\hat{\mu}}'(t+x-2kl) +$$

$$+\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \underline{\hat{\nu}}(t+x-2kl-l) + \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k \underline{\hat{\nu}}(t-x-2kl+l) -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^l [f(x+t-\tau,\tau) + f(x-t+\tau,\tau)]d\tau. \qquad (2.85)$$

Нисфи ҳосили ҷамъ ва нисфи ҳосили фарқи муносибатҳои (2.84) ва (2.85)-ро гирифта, ба муносибатҳои ҳосилшуда $t = T = 2ln + \Delta$, ки дар он $n \in N$ ва Δ адади ихтиёрӣ аз порчаи $[0; 2l]$ мебошад, гузошта, ҳамчунин бо истифода аз шартҳои ниҳоии (2.83), мо ба ду шарти алоқаи зерин меоем:

$$-\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k\underline{\hat{\mu}}'[2l(n-k)+\Delta+x]+\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\big[\underline{\hat{v}}(2l(n-k)+\Delta+x-l)\big]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\varphi_1'(x)+\psi_1(x)-\int_l^{2ln+\Delta}f(x+2ln+\Delta-\tau,\tau)d\tau\right], \qquad (2.86)$$

$$-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\underline{\hat{\mu}}'[2l(n-k)+\Delta-x]-\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k\underline{\hat{v}}[2l(n-k)+\Delta-x+l]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\varphi_1'(x)-\psi_1(x)-\int_l^{2ln+\Delta}f(x-2ln-\Delta+\tau,\tau)d\tau\right], \qquad (2.87)$$

ки онҳо баробарии унсурҳои синфи $L_2[0,l]$ мебошанд.

Баъдан ба мо лозим меояд, ки ду ҳолатро алоҳида баррасӣ намоем:

1) $0 \le \Delta \le l$ ва 2) $l \le \Delta \le 2l$.

Аз баррасии ҳолати якум, яъне $0 \le \Delta \le l$, оғоз мекунем. Бо назардошти он ки $\underline{\hat{\mu}}'$ ва $\underline{\hat{v}}$ ҳангоми $t<0$ ба сифр баробар мешаванд ва ҳангоми $t \ge 0$ мутаносибан бо $\hat{\mu}'$ ва $\hat{v}$ мувофиқат мекунанд, мо аз формулаи (2.86) ду шарти зеринро ба даст меорем:

$$-\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\hat{\mu}'[2l(n-k)+\Delta+x]+\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\hat{v}[2l(n-k)+\Delta+x-l]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\varphi_1'(x)+\psi_1(x)-\int_l^{2ln+\Delta}f(x+2ln+\Delta-\tau,\tau)d\tau\right] \text{ барои } x\in[l-\Delta,l]; \quad (2.88)$$

$$-\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\hat{\mu}'[2l(n-k)+\Delta+x]-\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\hat{v}[2l(n-k)+\Delta+x-l]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\varphi_1'(x)+\psi_1(x)-\int_l^{2ln+\Delta}f(x+2ln+\Delta-\tau,\tau)d\tau\right] \text{барои } x\in[0,l-\Delta] \quad (2.89)$$

ва аз (2.87) бошад, ду шарти зерин ҳосил мегардад:

$$-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\hat{\mu}'[2l(n-k)+\Delta-x]+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k[\hat{\nu}(2l(n-k)+\Delta-x+l)]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\varphi_1'(x)-\psi_1(x)+\int_l^{2ln+\Delta}f(x-2ln-\Delta+\tau,\tau)d\tau\right]\ \text{барои}\ x\in[0,\Delta];\quad (2.90)$$

$$-\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\hat{\mu}'[2l(n-k)+\Delta-x]+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\hat{\nu}[2l(n-k)+\Delta-x+l]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\varphi_1'(x)-\psi_1(x)+\int_l^{2ln+\Delta}f(x-2ln-\Delta+\tau,\tau)d\tau\right]\ \text{барои}\ x\in[\Delta,l].\quad (2.91)$$

Бо анҷом додани ивазкунии $t=x+\varDelta-l,\ m=n-k$ дар формулаи (2.88) ва ивазкунии $t=\varDelta-x,\ m=n-k$ дар формулаи (2.90), мо ҳангоми $t\in[\varDelta,l]$ ду шарти зерини алоқаро ба даст меорем:

$$-\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m\hat{\mu}'[l(2m+1)+t]+\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\hat{\nu}(2lm+t)=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\varphi_1'(t-\Delta+l)+\psi_1(t-\Delta+l)-\int_l^{2ln+\Delta}f(t+2ln+l-\tau,\tau)d\tau\right],\quad (2.92)$$

$$-\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\hat{\mu}'(2lm+t)+\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m\hat{\nu}[l(2m+1)+t]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\varphi_1'(\Delta-t)-\psi_1(\Delta-t)+\int_l^{2ln+\Delta}f(\tau-t-2ln,\tau)d\tau\right].\quad (2.93)$$

Ба ҳамин монанд, бо анҷом додани ивазкунии $t=x+\varDelta$ ва $m=n-k$ дар суммаи якум, инчунин $m=n-k-1$ дар суммаи дуюми формулаи (2.89), ҳамчунин бо анҷом додани ивазкунии $t=l+\varDelta-x,\ m=n-k-1$ дар суммаи якум ва $m=n-k$ дар суммаи дуюми формулаи (2.91), мо ҳангоми $t\in[\varDelta,l]$ ду шарти зерини алоқаро ба даст меорем:

$$-\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m\hat{\mu}'(2lm+t)-\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m\hat{\nu}[l(2m+1)+t]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\varphi_1'(t-\Delta)+\psi_1(t-\Delta)-\int_l^{2ln+\Delta}f(t+2ln-\tau,\tau)d\tau\right], \tag{2.94}$$

$$-\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m\hat{\mu}'[l(2m+1)+t]+\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m\hat{\nu}(2lm+t)=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\varphi_1'(l+\Delta-t)-\psi_1(l+\Delta-t)+\int_l^{2ln+\Delta}f(l-2ln-t+\tau,\tau)d\tau\right]. \tag{2.95}$$

Муносибатҳои (2.92) – (2.95) шартҳои алоқаро ба воситаи $\hat{\mu}'(t)$ ва $\hat{\nu}(t)$ ифода мекунанд. Барои он ки шартҳои алоқаро ба воситаи $\mu'(t)$ ва $\nu(t)$ ифода намоем, мо аз муносибатҳои $\hat{\mu}'(t)=\mu'(t)-\tilde{\mu}'(t)$, $\hat{\nu}(t)=\nu(t)-\tilde{\nu}(t)$, инчунин аз шакли ошкори функсияҳои $\tilde{\mu}(t),\tilde{\nu}(t)$, ки бо формулаҳои (2.79), (2.80) дода шудаанд, истифода мебарем. Дар натиҷа, мо ниҳоятан барои ҳолати якум, яъне $0\le\Delta\le l$, шартҳои зерини алоқаро ба даст меорем:

$$-\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m\mu'[l(2m+1)+t]+\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\nu(2lm+t)=A_1(t),$$

$$-\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\mu'(2lm+t)+\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m\nu[l(2m+1)+t]=A_2(t)$$

$$\text{барои }\ t\in[0,\Delta], \tag{2.96}$$

$$-\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m\mu'(2lm+t)+\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m\nu[l(2m+1)+t]=A_3(t),$$

$$-\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m\mu'[l(2m+1)+t]+\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m\nu(2lm+t)=A_4(t)$$

$$\text{барои }\ t\in[\Delta,l], \tag{2.97}$$

ки дар онҳо $A_i(t), i = \overline{1,4}$, тавассути муносибатҳои (2.64) – (2.67) муайян карда мешаванд.

Ба ҳамин тарзи комилан монанд, ҳолати дуюм, яъне $l \leq \Delta \leq 2l$, баррасӣ карда мешавад. Дар ин ҳолат, аз формулаи (2.86) ду шарти зерини алоқаро ба даст меорем:

$$-\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k\hat{\mu}'[2l(n-k)+\Delta+x]+\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\hat{v}[2l(n-k)+\Delta+x-l]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\varphi_1'(x)+\psi_1(x)-\int_l^{2ln+\Delta}f(x+2ln+\Delta-\tau,\tau)d\tau\right] \text{ барои } x\in[2l-\Delta,l], \quad (2.98)$$

$$-\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\hat{\mu}'[2l(n-k)+\Delta+x]+\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\hat{v}[2l(n-k)+\Delta+x-l]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\varphi_1'(x)+\psi_1(x)-\int_l^{2ln+\Delta}f(x+2ln+\Delta-\tau,\tau)d\tau\right] \text{ барои } x\in[0,2l-\Delta] \quad (2.99)$$

ва аз формулаи (2.87) ду шарти зерин ҳосил мегардад:

$$-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\hat{\mu}'[2l(n-k)+\Delta-x]+\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k\hat{v}[2l(n-k)+\Delta-x+l]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\varphi_1'(x)-\psi_1(x)+\int_l^{2ln+\Delta}f(x-2ln-\Delta+\tau,\tau)d\tau\right] \text{ барои } x\in[0,\Delta-l], \quad (2.100)$$

$$-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\hat{\mu}'[2l(n-k)+\Delta-x]+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\hat{v}[2l(n-k)+\Delta-x+l]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\varphi_1'(x)-\psi_1(x)+\int_l^{2ln+\Delta}f(x-2ln-\Delta+\tau,\tau)d\tau\right] \text{ барои } x\in[l-\Delta,l]. \quad (2.101)$$

Бо анҷом додани ивазкунии $t = x+\Delta-2l$, $m = n-k+1$ дар суммаи якум ва $m = n-k$ дар суммаи дуюми формулаи (2.98), инчунин бо анҷом додани ивазкунии $t = \Delta-l-x$, $m = n-k$ дар суммаи якум ва $m = n-k+1$

дар суммаи дуюми формулаи (2.100), мо ҳангоми $t \in [0, \Delta - l]$ ду шарти зерини алоқаро ба даст меорем:

$$-\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\hat{\mu}'(2lm+t)+\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\hat{\nu}[l(2m+1)+t]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\varphi_1'(t-\Delta+2l)+\psi_1(t-\Delta+2l)-\int_{l}^{2ln+\Delta}f(t+2ln+2l-\tau,\tau)d\tau\right], \quad (2.102)$$

$$-\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\hat{\mu}'[l(2m+1)+t]+\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\hat{\nu}(2lm+t)=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\varphi_1'(\Delta-l-t)-\psi_1(\Delta-l-t)+\int_{l}^{2ln+\Delta}f(\tau-l-2ln-t,\tau)d\tau\right]. \quad (2.103)$$

Ба ҳамин монанд, бо анҷом додани ивазкунии $t = x + \Delta - l$, $m = n - k$ дар формулаи (2.99) ва ивазкунии $t = \Delta - x$, $m = n - k$ дар формулаи (2.101), мо ҳангоми $t \in [\Delta - l, l]$ ду шарти зерини алоқаро ба даст меорем:

$$-\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m\hat{\mu}'[l(2m+1)+t]+\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\hat{\nu}(2lm+t)=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\varphi_1'(t-\Delta+l)+\psi_1(t-\Delta+l)-\int_{l}^{2ln+\Delta}f(t+2ln+l-\tau,\tau)d\tau\right], \quad (2.104)$$

$$-\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\hat{\mu}'(2lm+t)+\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m\hat{\nu}[l(2m+1)+t]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\varphi_1'(\Delta-t)-\psi_1(\Delta-t)+\int_{l}^{2ln+\Delta}f(\tau-t-2ln,\tau)d\tau\right]. \quad (2.105)$$

Бо гузариш дар формулаҳои (51) – (54) аз $\hat{\mu}'(t)$ ва $\hat{\nu}(t)$ ба $\mu'(t)$ ва $\nu(t)$, мо ниҳоят барои ҳолати дуюм, яъне $l \le \Delta \le 2l$, шартҳои зерини алоқаро ба даст меорем:

$$-\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\mu'(2lm+t)+\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\nu[l(2m+1)+t]=B_1(t)\,,$$

$$-\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\mu'[l(2m+1)+t]+\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\nu(2lm+t)=B_2(t)$$

барои $t\in[0,\Delta-l]$, (2.106)

$$-\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m\mu'[l(2m+1)+t]+\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\nu(2lm+t)=B_3(t)\,,$$

$$-\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\mu'[2lm+t]+\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m\nu[l(2m+1)+t]=B_4(t)$$

барои $t\in[\Delta-l,l]$, (2.107)

ки дар онҳо $B_i(t), i=\overline{1,4}$ бо формулаҳои (2.73)-(2.76) муайян карда мешаванд.

Акнун ба ёфтани идоракуниҳои сарҳадии оптималии $\mu(t)$ ва $\nu(t)$ мегузарем. Барои ҳолати якум, яъне $0\le\Delta\le l$, масъалаи оптимизатсия ба ёфтани минимуми интеграли энергияи сарҳадии (2.59) оварда мешавад, ки онро метавон дар шакли зерин бознависӣ кард:

$$\int_0^T\{[\mu'(t)]^2+[\nu(t)]^2\}dt=\int_0^\Delta\sum_{m=0}^{2n}\{[\mu'(lm+t)]^2+[\nu(lm+t)]^2\}dt+$$

$$+\int_\Delta^l\sum_{m=0}^{2n-1}\{[\mu'(lm+t)]^2+[\nu(lm+t)]^2\}dt\,,\qquad(2.108)$$

бо шартҳои алоқаи (2.96), (2.97) ва шарти мувофиқати

$$\int_0^T\mu'(t)dt=\int_0^\Delta\sum_{m=0}^{2n}\mu'(lm+t)dt+\int_\Delta^l\sum_{m=0}^{2n-1}\mu'(lm+t)dt=\varphi_1(0)-\varphi(0),\qquad(2.109)$$

ки аз муносибатҳои (2.4) ва (2.6) бармеояд.

Ба ҳамин монанд, барои ҳолати дуюм, яъне $l\le\Delta\le 2l$, масъалаи оптимизатсия ба ёфтани минимуми интеграли энергияи сарҳадии (2.59) оварда мешавад, ки дар ин маврид онро дар шакли зерин бознависӣ мекунем:

$$\int_0^T \{[\mu'(t)]^2 + [\nu(t)]^2\}dt = \int_0^{\Delta-l} \sum_{m=0}^{2n+1} \{[\mu'(lm+t)]^2 + [\nu(lm+t)]^2\}dt +$$

$$+ \int_{\Delta-l}^{l} \sum_{m=0}^{2n} \{[\mu'(lm+t)]^2 + [\nu(lm+t)]^2\}dt, \qquad (2.110)$$

бо шартҳои алоқаи (2.106) ва (2.107), инчунин бо шарти мувофиқати

$$\int_0^T \mu'(t)dt = \int_0^{\Delta-l} \sum_{m=0}^{2n+1} \mu'(lm+t)dt + \int_{\Delta-l}^{l} \sum_{m=0}^{2n} \mu'(lm+t)dt = \varphi_1(0) - \varphi(0). \quad (2.111)$$

Қайд мекунем, ки ҳангоми шартҳои ибтидоии (2.3), шартҳои ниҳоии (2.5) ва доимии ихтиёрии C - и собит, инчунин ҳангоми мавҷудияти шарти мувофиқати (2.109), мувофиқи муносибати

$$\int_0^T \{[\mu'(t) - C]^2 + [\nu(t)]^2\}dt = \int_0^T \{[\mu'(t)]^2 + [\nu(t)]^2\}dt - 2C\int_0^T \mu'(t)dt +$$

$$+C^2T = \int_0^T \{[\mu'(t)]^2 + [\nu(t)]^2\}dt - 2C[\varphi_1(0) - \varphi(0)] + C^2T$$

минимуми ҷустуҷӯшаванда ҳамзамон бо минимуми интеграли зерин ба даст оварда мешавад:

$$\int_0^T \{[\mu'(t) - C]^2 + [\nu(t)]^2\}dt = \int_0^{\Delta} \sum_{m=0}^{2n} \{[\mu'(lm+t) - C]^2 + [\nu(lm+t)]^2\}dt +$$

$$+ \int_{\Delta}^{l} \sum_{m=0}^{2n-1} \{[\mu'(lm+t) - C]^2 + [\nu(lm+t)]^2\}dt \qquad (2.112)$$

бо шартҳои алоқаи тағйирёфта, ки аз муносибатҳои (2.96) ва (2.97) бармеоянд ва шакли зеринро доранд:

а) ҳангоми $t \in [0;\, \Delta]$:

$$-\sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m \{\mu'[l(2m+1)+t] - C\} + \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \nu(2lm+t) =$$

$$= A_1(t) + \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m C,$$

$$-\sum_{m=0}^{n} (-1)^m \{\mu'(2lm + t) - C\} + \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m \nu[l(2m+1) + t] =$$

$$= A_2(t) + \sum_{m=0}^{n} (-1)^m C; \quad (2.113)$$

б) ҳангоми $t \in [\Delta; l]$:

$$-\sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m \{\mu'(2lm + t) - C\} + \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m \nu[l(2m+1) + t] =$$

$$= A_3(t) + \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m C,$$

$$-\sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m \{\mu'[l(2m+1) + t] - C\} + \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m \nu(2lm + t) =$$

$$= A_4(t) + \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m C. \quad (2.114)$$

Масъалаи ёфтани минимуми интеграли (2.112) бо шартҳои алоқаи (2.113) ва (2.114), тибқи леммаи Илйин – Моисеев [80], ба масъалаи ёфтани инфимуми нуқтавии суммаи

$$S(t) = \begin{cases} \sum_{m=0}^{2n} \{[\mu'(lm + t) - C]^2 + [\nu(lm + t)]^2\} dt & \text{ҳангоми } t \in [0; \Delta], \\ \sum_{m=0}^{2n-1} \{[\mu'(lm + t) - C]^2 + [\nu(lm + t)]^2\} dt & \text{ҳангоми } t \in [\Delta; l] \end{cases}$$

бо ҳамон шартҳои алоқаи (2.113) ва (2.114) оварда мешавад.

Масъалаи ҳосилшударо бо усули Лагранҷ ҳал карда, ба хулоса меоем, ки барои ҳолати баррасишавандаи $0 \leq \Delta \leq l$ идоракуниҳои сарҳадии оптималии

$\mu(t)$ ва $\nu(t)$ дар порчаи $[0,T]=[0;\,2ln+\Delta]$ барои ҳамаи $m=\overline{0,n-1}$, $t\in[0;2l]$, инчунин барои $m=n$, $t\in[0;\,\Delta]$ бо баробариҳои (2.60) – (2.63) муайян карда мешаванд, ки дар онҳо функсияҳои $A_1(t),A_2(t),A_3(t),A_4(t)$ ва доимии C мувофиқан бо муносибатҳои (2.64) – (2.68) муайян мегарданд.

Акнун ба баррасии ҳолати $l\le\Delta\le 2l$ бармегардем. Дар ин ҳолат масъалаи оптимизатсия барои доимии дилхоҳи C_1 ба ёфтани минимуми интеграли зерин оварда мешавад:

$$\int_0^T\{[\mu'(t)-C_1\,]^2+[\nu(t)]^2\}dt=$$

$$=\int_0^{\Delta-l}\sum_{m=0}^{2n+1}\{[\mu'(lm+t)-C_1]^2+[\nu(lm+t)]^2\}dt+$$

$$+\int_{\Delta-l}^{l}\sum_{m=0}^{2n}\{[\mu'(lm+t)-C_1]^2+[\nu(lm+t)]^2\}dt,\qquad(2.115)$$

бо шартҳои алоқаи тағйирёфта, ки аз муносибатҳои (2.106) ва (2.107) бармеоянд ва шакли зеринро доранд:

в) барои $t\in[0;\Delta-l]$:

$$-\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\,[\mu'(2lm+t)-C_1]+\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\nu[l(2m+1)+t]=$$

$$=B_1(t)+\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\,C_1,$$

$$-\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\,\{\mu'[l(2m+1)+t]-C_1\}+\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\nu(2lm+t)=$$

$$=B_2(t)+\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\,C_1;\quad(2.116)$$

г) барои $t \in [\Delta - l; l]$:

$$-\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m \{\mu'[l(2m+1)+t]-C_1\}+\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\nu[2lm+t]=$$

$$=B_3(t)+\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m C_1,$$

$$-\sum_{m=0}^{n}(-1)^m \{\mu'(2lm+t)-C_1\}+\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m\nu[l(2m+1)+t]=$$

$$=B_4(t)+\sum_{m=0}^{n}(-1)^m C_1. \quad (2.117)$$

«Ёфтани минимуми интеграли (2.115) бо шартҳои алоқаи (2.116) ва (2.117), мувофиқи леммаи Илйин – Моисеев, ба масъалаи ёфтани инфимуми нуқтавии суммаи

$$S_1(t)=\begin{cases}\sum_{m=0}^{2n-1}\{[\mu'(lm+t)-C_1]^2+[\nu(lm+t)]^2\}dt & \text{при } t\in[0;\Delta-l],\\ \sum_{m=0}^{2n}\{[\mu'(lm+t)-C_1]^2+[\nu(lm+t)]^2\}dt & \text{при } t\in[\Delta-l;l]\end{cases}$$

бо ҳамон шартҳои алоқаи (2.116) ва (2.117) оварда мешавад» [80].

Масъалаи ҳосилшударо бо усули Лагранҷ ҳал карда, ба даст меорем, ки барои ҳолати баррасишавандаи $l \le \Delta \le 2l$ идоракуниҳои сарҳадии оптималии $\mu(t)$ ва $\nu(t)$ дар порчаи $[0,T]=[0;\, 2ln+\Delta]$ барои ҳамаи $m=\overline{0,n-1}$, $t\in[0;2l]$, инчунин барои $m=n, t\in[0;\,\Delta]$, бо баробариҳои (2.69)–(2.72) муайян карда мешаванд. Дар ин баробариҳо функсияҳои $B_1(t), B_2(t), B_3(t), B_4(t)$ ва доимии C_1 бо муносибатҳои (2.73)-(2.77) муайян мегарданд.

Ягонагии идоракуниҳои сарҳадии оптималии ҳосилшуда аз он бармеояд, ки интеграли энергияи сарҳадии (2.59) функсионали барҷаста мебошад. Теоремаи 2.6 исбот гардид.

Аз нуқтаи назари татбиқот, махсусан барои истисно намудани имконияти ворид шудани раванди идоракунии сарҳадӣ ба резонанс муҳим аст, ки қимати хурдтарини интеграли (2.59), ки ба идоракуниҳои сарҳадии оптималӣ мувофиқ аст, ҳангоми калон шудани фосилаи вақти идоракунӣ ба сифр майл намояд.

Аз тасвирҳои (2.60) – (2.77) бармеояд, ки агар $suppf(x,t) \in Q_{T_*}$, $T_* = const$ (яъне таъсири берунаи $f(x,t)$ ҳангоми $T > T_*$ айниятан ба сифр баробар бошад), пас қимати хурдтарини интеграли энергияи сарҳадии (2.59) тартиби $O\left(\frac{1}{T}\right)$ дорад. Доимие, ки дар баҳои ҳосилшуда иштирок мекунад, ба нормаи функсияҳои $\varphi(x), \varphi_1(x) \in W_2^1[0,l]$; $\psi(x), \psi_1(x) \in L_2[0,l]$; $f(x,t) \in L_2(Q_T)$ ва лаҳзаи вақти T вобаста мебошад. Ин ҳолат аз он шаҳодат медиҳад, ки қимати хурдтарини интеграли энергияи сарҳадӣ ҳангоми $T \to \infty$ ба сифр майл мекунад ва имкон медиҳад, ки аз ворид шудани раванди лаппиши тор ба резонанс пешгирӣ карда шавад.

БОБИ 3.

ИДОРАКУНИИ САРҲАДИИ РАВАНДҲОЕ, КИ БО МУОДИЛАИ ТЕЛЕГРАФӢ БО КОЭФФИТСИЕНТИ ТАҒЙИРЁБАНДА ТАВСИФ МЕЁБАНД, ТАВАССУТИ ҚУВВАИ ЧАНДИРӢ ДАР САРҲАДИ ЧАП ВА ҶОЙИВАЗКУНӢ ДАР САРҲАДИ РОСТ

Дар ин боб бо маънои ҳалли умумишудаи муодилаи телеграфии якченака бо коэффитсиенти тағйирёбанда аз синфи L_2-и намуди

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) - q(x,t)u(x,t) = f(x,t), 0 < x < l, 0 < t < T$$

масъалаи идоракунии сарҳадии равандҳое, ки бо ин муодила тавсиф мешаванд, мавриди таҳқиқ қарор мегирад. Идоракунӣ тавассути қувваи чандирӣ дар сарҳади чапи $x = 0$ ва ҷойивазкунӣ дар сарҳади рости $x = l$ амалӣ мегардад.

Боби 3 низ аз чор банд иборат аст. Ба мисли боби 2, дар банди якум гузориши масъалаҳо ва таърифҳои зарурӣ оварда мешаванд. Дар банди дуюм масъалаи мавҷудият ва ягонагии ҳалли масъалаҳои омехта барои муодилаи баррасишаванда таҳқиқ шудаанд. Ба натиҷаи асосии ин боб – исботи мавҷудияти ҳалли масъалаи идоракунии сарҳадӣ ҳангоми $T = l$ ва ягонагии он ҳангоми $T \leq l$ банди сеюм бахшида шудааст. Дар банди чорум идоракуниҳои сарҳадии оптималӣ, ки тавассути қувваи чандирӣ дар сарҳади чап ва ҷойивазкунӣ дар сарҳади рост амалӣ мегарданд, дар фосилаи ихтиёрии ба қадри кофӣ калони вақт барои равандҳое, ки бо муодилаи лаппишҳои маҷбурии тор тавсиф мешаванд, сохта шудаанд. Ин муодила ҳолати хусусии муодилаи баррасишаванда мебошад, яъне аз он ҳангоми $q(x,t) \equiv 0$ будан ҳосил мешавад. Барои идоракуниҳои сарҳадии оптималии ҷустуҷӯшаванда ифодаҳои аналитикии ошкор ёфта шудаанд. Қайд менамоем, ки масъалаи идоракунии сарҳадии оптималӣ аз ёфтани чунин функсияҳои $\mu(t) \in L_2[0,T]$, $\nu(t) \in W_2^1[0,T]$ иборат аст, ки онҳо ба интеграли энергияи сарҳадӣ қимати минималӣ медиҳанд.

3.1. Гузориши масъалаҳо ва таърифҳои асосӣ

Дар росткунҷаи пӯшидаи $Q_T = [0 \leq x \leq l] \times [0 \leq t \leq T]$ се масъалаи зеринро баррасӣ менамоем:

– **масъалаи омехтаи I:**

$$Lu \equiv u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) - q(x,t)u(x,t) = f(x,t), \; 0 < x < l, \; 0 < t < T, \quad (3.1)$$

$$u_x(0,t) = \mu(t), \; u(l,t) = \nu(t) \quad \text{ҳангоми} \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3.2)$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \; u_t(x,0) = \psi(x) \quad \text{ҳангоми} \quad 0 \leq x \leq l, \quad (3.3)$$

ки дар он $\mu(t) \in L_2[0,T], \nu(t) \in W_2^1[0,T], \varphi(x) \in W_2^1[0,l], \psi(x) \in L_2[0,l]$, $f(x,t) \in L_2(Q_T)$ ва шарти мувофиқат иҷро мегардад:

$$\nu(0) = \varphi(l); \quad (3.4)$$

– **масъалаи омехтаи II**: муодилаи (3.1) бо шартҳои сарҳадии (3.2) ҳангоми $0 \leq t \leq T$ ва шартҳои ниҳоии

$$u(x,T) = \varphi_1(x), u_t(x,T) = \psi_1(x) \text{ ҳангоми } 0 \leq x \leq l, \quad (3.5)$$

ки дар он $\mu(t) \in L_2[0,T], \nu(t) \in W_2^1[0,T], \varphi_1(x) \in W_2^1[0,l], \psi_1(x) \in L_2[0,l]$, $f(x,t) \in L_2(Q_T)$ ва шарти мувофиқат иҷро мегардад:

$$\nu(T) = \varphi_1(l); \quad (3.6)$$

– **масъалаи идоракунии сарҳадии III:** муодилаи (3.1) бо шартҳои сарҳадии (3.2), шартҳои ибтидоии (3.3) ва шартҳои ниҳоии (3.5), ки дар он $\varphi(x)$, $\varphi_1(x) \in W_2^1[0,l]$, $\psi(x)$, $\psi_1 \in L_2[0,l]$, $f(x,t) \in L_2(Q_T)$ ва шартҳои мувофиқати (3.4), (3.6) иҷро мегарданд.

Дар масъалаҳои I-III, ба мисли боби 2, фарз карда мешавад, ки коэффитсиенти тағйирёбандаи $q(x,t)$ танҳо ба синфи $L_2(Q_T)$ тааллуқ дорад.

Ҳалли масъалаҳои зикршударо дар синфи $\widehat{W}_2^1(Q_T)$, ки бори аввал аз ҷониби В.А. Илйин соли 2000-ум ворид карда шудааст, ҷустуҷӯ мекунем. Таърифи ин синф дар банди якуми боби 2 оварда шудааст. Барои муайян намудани ҳалли умумишудаи масъалаҳои баррасишаванда бо маънои айнияти интегралӣ, инчунин аз синфи $\widehat{W}_2^2(Q_T)$ истифода мебарем, ки таърифи он низ дар боби 2 дода шудааст.

Таърифи 3.1. Ҳалли умумишудаи масъалаи омехтаи I аз синфи $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ гуфта, чунин функсияи $u(x,t)$-ро аз ҳамин синф меномем, ки айнияти интегралии

$$\int_0^l\int_0^T u(x,t)L\Phi(x,t)dxdt+\int_0^l\varphi(x)\Phi_t(x,0)dx-\int_0^l\psi(x)\Phi(x,0)dx+$$
$$+\int_0^T\mu(t)\Phi(0,t)dt+\int_0^T\nu(t)\Phi_x(l,t)dt=\int_0^l\int_0^T f(x,t)\Phi(x,t)dxdt \qquad (3.7)$$

-ро барои ҳар як функсияи санҷишии $\Phi(x,t)\in\widehat{W}_2^2(Q_T)$, ки ба шартҳои $\Phi_x(0,t)=\Phi(l,t)\equiv 0$ ҳангоми $0\le t\le T$ ва $\Phi(x,T)=\Phi_t(x,T)\equiv 0$ ҳангоми $0\le x\le l$ итоат мекунад, қонеъ гардонад ва инчунин шарти якуми сарҳадии (3.2) ва шарти дуюми ибтидоии (3.3)-ро қариб дар ҳама ҷойи $[0,l]$ қонеъ месозад, дар ҳоле ки шарти дуюми сарҳадии (3.2) ва шарти якуми ибтидоии (3.3) барои ҳамаи $x\in[0,l]$ иҷро мегарданд.

Таърифи 3.2. Ҳалли умумишуда аз синфи $\widehat{W}_2^1(Q_T)$-и масъалаи омехтаи II гуфта, чунин функсияи $u(x,t)$-ро аз ҳамин синф меномем, ки айнияти (3.7)-ро қонеъ менамояд, ки дар он ба ҷойи интеграли дуюм интеграл бо аломати «минус» гирифташудаи $\int_0^l[\varphi_1(x)\,\Phi_t(x,T)-\psi_1(x)\,\Phi(x,T)]\,dx$ меистад ва ин айният барои ҳар як функсияи санҷишии $\Phi(x,t)\in\widehat{W}_2^2(Q_T)$, ки ба шартҳои $\Phi_x(0,t)=\Phi(l,t)\equiv 0$ ҳангоми $0\le t\le T$ ва $\Phi(x,0)=\Phi_t(x,0)\equiv 0$ ҳангоми $0\le x\le l$ итоат мекунад, иҷро гардад. Ғайр аз ин, функсияи $u(x,t)$ шарти дуюми сарҳадии (3.2) ва шарти якуми ниҳоии (3.5)-ро барои ҳамаи $x\in[0,l]$ ва шарти якуми сарҳадии (3.2) ва шарти дуюми ниҳоии (3.5)-ро қариб дар ҳама ҷойи $[0,l]$ қонеъ месозад.

Таърифи 3.3. Ҳалли умумишудаи масъалаи идоракунии сарҳадии III аз синфи $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ гуфта, ҳалли масъалаи омехтаи I - ро аз ҳамин синф бо чунин функсияи $\mu(t) \in L_2[0,T]$ ва функсияи $\nu(t) \in W_2^1[0,T]$, ки барои он шартҳои мувофиқати (3.4) ва (3.6) иҷро мегарданд, меномем, дарҳоле ки шарти якуми ниҳоии (3.5) барои ҳамаи $x \in [0,l]$ ва шарти дуюми ниҳоии (3.5) қариб дар ҳама ҷойи $[0,l]$ иҷро шуда бошанд.

3.2. Яккимата ҳалшавандагии масъалаҳои омехта

Дар ин банд мавҷудият ва ягонагии ҳалли масъалаҳои омехтаи I ва II, ки дар банди 3.1 гузошта шудаанд, мавриди таҳқиқ қарор мегиранд.

Тасдиқи 3.1. *Бигзор, $q(x,t)$ унсури сифрии синфи $L_2(Q_T)$ бошад. Пас барои ҳар гуна $T > 0$ ҳам масъалаи омехтаи I ва ҳам масъалаи омехтаи II аз синфи $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ аз як ҳал зиёд дошта наметавонад.*

Исбот. Нақшаи исботи тасдиқи 3.1-ро барои масъалаи омехтаи I ба таври мухтасар баён мекунем. Фарз мекунем, ки барои масъалаи омехтаи I ду ҳалли $u_1(x,t)$ ва $u_2(x,t)$ аз синфи $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ мавҷуданд. Он гоҳ фарқи онҳо $u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ ҳалли масъалаи зерин мегардад:

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0 \quad \textit{дар} \quad Q_T,$$

$$u_x(0,t) \equiv 0, \;\; u(l,t) \equiv 0 \quad \textit{ҳангоми} \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$u(x,0) \equiv 0, \quad u_t(x,0) \equiv 0 \quad \textit{ҳангоми} \quad 0 \leq x \leq l.$$

Бо назардошти ин, айнияти интегралии (3.7) шакли зеринро мегирад:

$$\int_0^T \int_0^l u(x,t)[\Phi_{tt}(x,t) - \Phi_{xx}(x,t)]dxdt = 0.$$

Акнун функсияи $\Phi(x,t)$-ро дар шакли зерин менависем:

$$\Phi(x,t) = \vartheta(x) \cdot f(t),$$

ки дар он $f(t)$ – ҳар гуна функсияи ду маротиба бефосила дифференсиалпазир дар тамоми хатти рости ҳақиқӣ мебошад, ки ҳангоми $t \geq t_0$, $t_0 < l$ ба сифр баробар аст ва $\vartheta(x)$ – яке аз функсияҳои хоси масъалаи спектралии

$$\begin{cases}\vartheta''(x) + \lambda\,\vartheta(x) = 0,\\ \vartheta_x(0) = 0, \vartheta(l) = 0\end{cases}$$

мебошад, ки дар он λ – қимати хоси мувофиқи масъалаи ҳосилшуда мебошад. Нишон додан душвор нест, ки $\vartheta_n(x) = \cos\frac{\pi(2n+1)}{2l}x,\ n \in Z$. Барои ба анҷом расонидани исботи тасдиқи 3.1 такрор кардани ҳамаи мулоҳизаҳое, ки дар кори [60] оварда шудаанд, лозим меояд.

Бе маҳдуд кардани умумият, дар идома масъалаи омехтаи I-ро дар ҳолате баррасӣ менамоем, ки дар он $\varphi(x) \equiv 0$ дар порчаи $[0, l]$, $\psi(x)$ унсури сифрии синфи $L_2[0, l]$ мебошад ва қиматҳои сарҳадии $\mu(t)$ ва $\nu(t)$ мувофиқан функсияҳои ихтиёрӣ аз синфҳои $L_2[0, T]$ ва $W_2^1[0, T]$ ҳастанд. Дар ин ҳолат, мувофиқи шартҳои мувофиқати (2.4) ва (2.6) шартҳои $\nu(0) = 0$ ва $\nu(T) = 0$ бояд иҷро гарданд.

Бо рамзҳои $\underline{\mu}(t)$ ва $\underline{\nu}(t)$ функсияҳоеро ишора мекунем, ки мутаносибан бо $\mu(t)$ ва $\nu(t)$ ҳангоми $0 \le t \le T$ мувофиқат мекунанд ва ҳангоми $t < 0$ бо сифр идома дода шудаанд. Аён аст, ки дар айни ҳол $\underline{\mu}(t) \in L_2[-\varepsilon, T]\ \forall\varepsilon > 0$ ва $\underline{\nu}(t) \in W_2^1[-\delta, T]\ \ \forall\delta > 0$.

Тасдиқи 3.2. *Бигзор, $T \le l$ ва $q(x,t)$ унсури сифрии синфи $L_2(Q_T)$ бошад. Он гоҳ ҳалли ягонаи умумишудаи масъалаи омехтаи I аз синфи $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ бо баробарии зерин муайян мегардад:*

$$u(x,t) = -\int_0^{t-x} \underline{\mu}(\tau)d\tau + \underline{\nu}(t + x - l) + \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-t+\tau}^{t+x-\tau} f(\xi,\tau)d\xi d\tau, \qquad (3.8)$$

ки дар он функсияи $f(x,t)$ аз функсияи қисми рости муодилаи (2.1) бо роҳи идомадиҳии ҷуфт нисбат ба нуқтаи $x = 0$ ва идомадиҳии тоқ нисбат ба нуқтаи $x = l$ ҳосил шудааст.

Исбот. Бо истифода аз хосиятҳои функсияҳои $f(x,t)$, $\mu(t)$ ва $\nu(t)$ ба осонӣ санҷидан мумкин аст, ки ҳангоми $T \le l$ функсияи (3.8) барои ҳамаи $x \in [0, l]$ шарти сарҳадии $u(l,t) = \nu(t)$ ва шарти ибтидоии $u(x,0) \equiv 0$-ро қонеъ месозад, ҳамчунин шарти сарҳадии $u_x(0,t) = \mu(t)$ ва шарти ибтидоии $u_t(x,0) \equiv 0$ -ро қариб дар ҳама ҷойи порчаи $[0, l]$ қаноат мекунонад. Пас, боқӣ мемонад нишон диҳем, ки ин функсия айнияти интегралии (2.7)-ро қонеъ месозад, ки дар он $\varphi(x) \equiv 0 \ \forall x \in [0, l]$ ва $\psi(x)$ унсури сифрии синфи $L_2[0, l]$ мебошад, яъне баробарии

$$L_{u,f,\Phi} \equiv \int_0^l \int_0^T u(x,t)[\Phi_{tt}(x,t) - \Phi_{xx}(x,t)]dxdt +$$

$$+\int_0^l [\varphi(x)\Phi_t(x,0) - \psi(x)\Phi(x,0)]dx + \int_0^T \mu(t)\Phi(0,t)dt +$$

$$+\int_0^T \nu(t)\Phi_x(l,t)dt - \int_0^l \int_0^T f(x,t)\Phi(x,t)dxdt = 0 \qquad (3.9)$$

-ро барои функсияи дилхоҳи $\Phi(x,t)$ аз таърифи 3.1.

Бо истифода аз интегралгирӣ аз рӯйи қисмҳо ба қисми чапи муносибати (2.9) шакли зеринро медиҳем:

$$L_{u,f,\Phi} = \int_0^T \int_0^l [u_x(x,t)\Phi_x(x,t) - u_t(x,t)\Phi_t(x,t)]\,dxdt + \int_0^T \mu(t)\Phi(0,t)dt -$$

$$-\int_0^T \int_0^l f(x,t)\Phi(x,t)dxdt. \qquad (3.10)$$

Пас, барои мо кофист исбот намоем, ки қисми рости ифодаи (3.10) ба сифр баробар аст. Бо $\hat{f}(x,t)$ функсияи ибтидоии дилхоҳи функсияи $f(x,t)$-ро аз рӯйи x ишора мекунем. Функсияи зеринро барои баррасӣ ворид менамоем:

$$U(x,t) = \int_0^{t-x} \underline{\mu}(\tau)d\tau + \underline{\nu}(t+x-l) +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t \hat{f}(x+t-\tau,\tau)d\tau + \frac{1}{2}\int_0^t \hat{f}(x-t+\tau,\tau)d\tau.$$

Ба осонӣ санҷида мешавад, ки функсияи $U(x,t)$ ба синфи $\widehat{W}_2{}^1(Q_T)$ тааллуқ дорад ва барои қариб ҳамаи нуқтаҳои росткунҷаи Q_T баробариҳои зерин иҷро мешаванд:

$$U_x(x,t) = u_t(x,t), \quad U_t(x,t) - \hat{f}(x,t) = u_x(x,t).$$

Бо назардошти ин баробариҳо дорем:

$$\int_0^T \int_0^l U_t(x,t)\Phi_x(x,t)\,dx\,dt - \int_0^T \int_0^l \hat{f}(x,t)\Phi_x(x,t)\,dxdt -$$

$$- \int_0^T \int_0^l U_x(x,t)\Phi_t(x,t)\,dxdt + \int_0^T \mu(t)\Phi(0,t)\,dt -$$

$$- \int_0^T \int_0^l f(x,t)\Phi(x,t)dxdt = - \int_0^T \int_0^l U(x,t)\Phi_{xt}(x,t)dxdt +$$

$$+ \int_0^T \int_0^l f(x,t)\Phi(x,t)dxdt + \int_0^T \Phi(l,t)\hat{f}(l,t)\,dt - \int_0^T \Phi_t(l,t)U(l,t)\,dt +$$

$$+ \int_0^T \int_0^l U(x,t)\Phi_{tx}(x,t)dxdt + \int_0^T \mu(t)\Phi(0,t)dt - \int_0^T \int_0^l f(x,t)\Phi(x,t)dxdt =$$

$$= - \int_0^T \Phi(l,t)\hat{f}(l,t)\,dt - \int_0^T \Phi_t(l,t)U(l,t)\,dt + \int_0^T \Phi(0,t)\mu(t)\,dt =$$

$$= - \int_0^T \Phi(l,t)\hat{f}(l,t)\,dt + \int_0^T \Phi(l,t)U_t(l,t)dt + \int_0^T \Phi(l,t)\,\mu(t)\,dt =$$

$$= - \int_0^T \Phi(l,t)\hat{f}(l,t)dt + \int_0^T \Phi(l,t)U_x(l,t)\,dt + \int_0^T \Phi(l,t)\hat{f}(l,t)\,dt -$$

$$- \int_0^T \Phi(0,t)\mu(t)\,dt = \int_0^T \Phi(l,t)\nu(t)\,dt - \int_0^T \Phi(l,t)\nu(t)\,dt = 0.$$

Тасдиқи 3.2 исбот карда шуд.

Акнун масъалаи омехтаи I-ро бо шартҳои ибтидоии сифрии (3.3), функсияҳои сарҳадии ихтиёрии $\mu(t) \in L_2[0,T]$, $\nu(t) \in W_2^1[0,T]$, ки дуюми онҳо шарти мувофиқати $\nu(0) = 0$-ро қонеъ мегардонад, инчунин функсияҳои ихтиёрии $f(x,t)$ ва $q(x,t)$, ки ба синфи $L_2(Q_T)$ тааллуқ доранд, баррасӣ мекунем. Дар ин ҳолат натиҷаи зерин дуруст мебошад.

Леммаи 3.1. *Бигзор, $T \leq l$ ва $q(x,t), f(x,t) \in L_2(Q_T)$ бошанд. Он гоҳ ҳалли умумишудаи масъалаи омехтаи I аз синфи $\widehat{W}_2{}^1(Q_T)$ ҳар гуна функсияи $u(x,t)$ мебошад, ки дар Q_T маҳдуд аст ва муносибати зеринро қонеъ мегардонад:*

$$u(x,t) = -\int_0^{t-x} \underline{\mu}(\tau)d\tau + \underline{\nu}(t+x-l) +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{t-x} d\tau \int_0^{t-x-\tau} [q(\xi,\tau)u(\xi,\tau) + f(\xi,\tau)]d\xi +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{t} d\tau \int_{\frac{\tau-t+x}{2}+\left|\frac{\tau-t+x}{2}\right|}^{l-|\tau-t-x-l|} [q(\xi,\tau)u(\xi,\tau) + f(\xi,\tau)]d\xi. \qquad (3.11)$$

Барои исботи ин лемма кофист, ки хосиятҳои функсияи $f(x,t)$, ки дар тасдиқи 3.2 тавсиф шудаанд, ба эътибор гирифта шаванд ва ҷамъшавандаи $q(x,t)\,u(x,t)$ ба тарафи рости муодилаи (3.1) гузаронида шавад.

Эзоҳи 3.1. «Агар $\underline{\mu}(t) \in W_2^1(-\varepsilon_1, T]$ $\forall\, \varepsilon_1 > 0$, $\underline{\nu}(t) \in W_2^2(-\varepsilon_2, T]$ $\forall\, \varepsilon_2 > 0$, коэффитсиенти $q(x,t)$ ҳамроҳ бо ҳосилаи худ $q_x(x,t)$ дар росткунҷаи Q_T маҳдуд бошанд, инчунин функсияи $f(x,t)$ ба синфи $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ тааллуқ дошта бошад, он гоҳ ҳалли омехтаи масъалаи I, ки дар леммаи 3.1 баррасӣ шудааст, ба синфи $\widehat{W}_2^2(Q_T)$ тааллуқ хоҳад дошт» [24].

Теоремаи 3.1. *Бигзор,* $T \leq l$ *бошад ва функсияҳои* $q(x,t)$ *ва* $f(x,t)$ *ба синфи* $L_2(Q_T)$ *тааллуқ дошта бошанд. Он гоҳ муодилаи интегралии (3.11) ҳалли ягонаи маҳдуд дорад. Ғайр аз ин, агар шарти* $f(x,t) \equiv 0$ *иҷро шавад, пас дар соҳаи* $\left\{(x,t): 0 \leq t \leq \frac{l}{2}, t \leq x \leq l-t\right\} \cap Q_T$, $u(x,t) \equiv 0$ *мешавад.*

Исбот. Теоремаи 3.1 барои ҳар як қимати $T \leq l$ ба таври монанд исбот карда мешавад. Аз ин рӯ, бе маҳдуд кардани умумият, ҳолати $T = l$-ро баррасӣ мекунем. Ба мисли банди 2.2-и боби 2, «квадрати Q_l-ро бо хатҳои характеристикии $x = t$ ва $x = l - t$ ба чор қисм ҷудо менамоем. Дар соҳаҳои ҳосилшуда: секунҷаи $\Delta_1 = \left\{(x,t): 0 \leq t \leq \frac{l}{2}, t \leq x \leq l-t\right\}$, ки ба асоси поёнии Q_l пайваст аст; секунҷаҳои $\Delta_2 = \left\{(x,t): 0 \leq t \leq l, 0 \leq x \leq \frac{l}{2} - \left|t - \frac{l}{2}\right|\right\}$ ва $\Delta_3 = \left\{(x,t): 0 \leq t \leq l, \frac{l}{2} + \left|t - \frac{l}{2}\right| \leq x \leq l\right\}$, ки ба паҳлуҳои Q_l часпидаанд; секунҷаи $\Delta_4 = \left\{(x,t): \frac{l}{2} \leq t \leq l, l-t \leq x \leq t\right\}$, ки ба асоси болоии Q_l пайваст аст, функсияро ба таври зерин муайян мекунем: $u_j(x,t) = u(x,t), (x,t) \in \Delta_j$, $j = \overline{1,4}$. Сипас, муносибати (3.11)-ро пайдарпай барои нуқтаҳои (x,t), ки ба соҳаҳои $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ ва Δ_4 тааллуқ доранд, ҳамчун муодилаҳои интегралӣ барои ёфтани функсияҳои $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$, $u_3(x,t)$ ва $u_4(x,t)$ баррасӣ менамоем» [23].

Ҳангоми $j = 1$ муносибати (3.11) чунин шаклро мегирад:

$$u_1(x,t) = \frac{1}{2}\iint\limits_{D_1} f(\xi,\tau)d\xi d\tau + \frac{1}{2}\iint\limits_{D_1} q(\xi,\tau)u_1(\xi,\tau)d\xi d\tau, \tag{3.12}$$

ки дар он $D_1 = \{(\xi,\tau): 0 \leq \tau \leq t; x - t + \tau \leq \xi \leq x + t - \tau\} \subset \Delta_1$.

Муодилаи (3.12)-ро дар шакли зерини операторӣ менависем:

$$u_1(x,t) = \frac{1}{2}\iint\limits_{D_1} f(\xi,\tau)d\xi d\tau + [N_1 u_1](x,t).$$

Оператори

$$[N_1\chi](x,t)=\frac{1}{2}\iint\limits_{D_1} q(\xi,\tau)\chi(\xi,\tau)d\xi d\tau$$

ба таври маҳдуд дар фазои $L_2(\Delta_1)$ амал менамояд ва барои дараҷаҳои он баҳои зерин дуруст аст:

$$\left|\left[N_1^k\chi\right](x,t)\right| \le \operatorname*{Sup}_{(x,t)\in\Delta_1}|\chi(x,t)|\cdot\|q\|^k{}_{L_2(\Delta_1)}\cdot\frac{t^k}{\left(\sqrt{2}\right)^k\sqrt{(2k)!}},\quad k\in N. \quad (3.13)$$

Дурустии баҳои (3.13) банди 2.2-и боби 2 исбот карда шудааст (ниг. исботи (2.13)).

Аз ин бармеояд, ки муодилаи (3.12) муодилаи интегралии навъи Волтерраи ҷинси дуюм мебошад. Агар $f(x,t)\equiv 0$ бошад, пас он ҳамчун муодилаи якҷинса танҳо ҳалли сифрӣ дорад, яъне дар ин ҳолат дар соҳаи Δ_1 $u_1(x,t)\equiv 0$ мешавад. Агар $f(x,t)$ функсияи ихтиёрӣ аз синфи $L_2(Q_T)$ бошад, пас ҳалли муодилаи (3.12)-ро метавон ба шакли қатори Нейман, ки мутлақ наздикшаванда аст, ифода кард:

$$u_1(x,t)=\left(I+\sum_{k=1}^{\infty}N_1^k\right)F_1(x,t), F_1(x,t)=\frac{1}{2}\iint\limits_{D_1} f(\xi,\tau)d\xi d\tau.$$

Бигзор $j=2$ бошад, он гоҳ дорем:

$$u_2(x,t)=-\int\limits_0^{t-x}\mu(\tau)d\tau+\frac{1}{2}\iint\limits_{D^*} f(\xi,\tau)d\xi d\tau+$$

$$+\frac{1}{2}\iint\limits_{D_{11}\cup D_{12}} q(\xi,\tau)u_1(\xi,\tau)d\xi d\tau+\frac{1}{2}\left(\iint\limits_{D_{21}}+\iint\limits_{D_{22}} q(\xi,\tau)u_2(\xi,\tau)d\xi d\tau\right), \quad (3.14)$$

ки дар ин ҷо

$$D_{11}\equiv D_{11}(x,t)=\left\{(\xi,\tau){:}\, 0\le\tau\le\frac{t+x}{2};\tau\le\xi\le x+t-\tau\right\}\subset\Delta_1;$$

$D_{12} \equiv D_{12}(x,t) = \left\{(\xi,\tau): 0 \le \tau \le \dfrac{t-x}{2}; \tau \le \xi \le t-x-\tau\right\} \subset \Delta_1;$

$D_{21} \equiv D_{21}(x,t) = \left\{(\xi,\tau): 0 \le \tau \le t; \frac{x-t+\tau}{2} + \left|\frac{x-t+\tau}{2}\right| \le \xi \le \frac{x+t}{2} - \left|\tau - \frac{x+t}{2}\right|\right\} \subset \Delta_2;$

$D_{22} \equiv D_{22}(x,t) = \left\{(\xi,\tau): 0 \le \tau \le t-x; 0 \le \xi \le \frac{t-x}{2} - \left|\tau - \frac{t-x}{2}\right|\right\} \subset \Delta_2;$

$D^* = D_{11} \cup D_{12} \cup D_{21} \cup D_{22}.$

Азбаски соҳаи $D_{11} \cup D_{12}$ пурра дар дохили соҳаи Δ_1 ҷойгир аст, пас дар муносибати (3.14) ҷамъшавандаи сеюм аллакай функсияи маълуми $u_1(x,t)$-ро дар бар мегирад. Бо ҷорӣ кардани ишораҳои

$$F_2(x,t) = -\int_0^{t-x} \mu(\tau)d\tau + \frac{1}{2}\iint_{D^*} f(\xi,\tau)d\xi d\tau + \frac{1}{2}\iint_{D_{11}\cup D_{12}} q(\xi,\tau)u_1(\xi,\tau)d\xi d\tau$$

ва

$$[N_2\chi](x,t) = \frac{1}{2}\left(\iint_{D_{21}} + \iint_{D_{22}}\right) q(\xi,\tau)\chi(\xi,\tau)d\xi d\tau$$

муодилаи (3.14)-ро дар шакли операторӣ менависем:

$$u_2(x,t) = F_2(x,t) + [N_2u_2](x,t).$$

Бо истифода аз усули индуксияи математикӣ нишон медиҳем, ки оператори N_2, ки ҳамчун оператори маҳдуд дар фазои $L_2(\Delta_2)$ амал мекунад, баҳои зеринро қонеъ месозад:

$$\left|\left[N_2^k\chi\right](x,t)\right| \le \sup_{(x,t)\in\Delta_2} |\chi(x,t)| \cdot \|q\|^k{}_{2,\,\Delta_2} \cdot \frac{\sqrt{[t(t-x)]^k}}{k!}, \quad k \in N. \qquad (3.15)$$

Ҳангоми $k = 1$ дорем:

$$|[N_2\chi](x,t)| \le \left|\iint_{D_{22}} q(\eta,\tau)\chi(\eta,\tau)d\eta d\tau\right| \le$$

$$\le \sup_{(x,t)\in\Delta_2} |\chi(x,t)| \cdot \sqrt{\iint_{\Delta_2} q^2(\eta,\tau)d\eta d\tau} \cdot \sqrt{\int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{\tau} d\eta} \le$$

$$\leq \operatorname*{Sup}_{(x,t)\epsilon\Delta_2} |\chi(x,t)| \cdot \|q\|_{2,\Delta_2} \cdot \sqrt{\int_0^t (t-x)d\tau} \leq$$

$$\leq \operatorname*{Sup}_{(x,t)\epsilon\Delta_2} |\chi(x,t)| \cdot \|q\|_{2,\Delta_2} \cdot \sqrt{(t-x)t} \leq \operatorname*{Sup}_{(x,t)\epsilon\Delta_2} |\chi(x,t)| \cdot \|q\|_{2,\Delta_2} \cdot \sqrt{(t-x)t}.$$

Бигузор ҳангоми $k = n$ баҳои (3.15) дуруст бошад, яъне

$$|[N_2^n\chi](x,t)| \leq \operatorname*{Sup}_{(x,t)\epsilon\Delta_2} |\chi(x,t)| \cdot \|q\|^n{}_{2,\Delta_2} \cdot \frac{\sqrt{[t(t-x)]^n}}{n!}.$$

Ҳолати $k = n + 1$-ро баррасӣ мекунем:

$$|[N_2^{n+1}\chi](x,t)| \leq \left| \iint_{D_{22}} q(\eta,\tau)[N_2^n\chi](\eta,\tau)d\eta d\tau \right| \leq$$

$$\leq \operatorname*{Sup}_{(x,t)\epsilon\Delta_2} |\chi(x,t)| \cdot \|q\|^n{}_{2,\Delta_2} \cdot \frac{1}{n!} \cdot \iint_{D_{22}} |q(\eta,\tau)| \sqrt{[\tau(\tau-\eta)]^n} d\eta d\tau \leq$$

$$\leq \operatorname*{Sup}_{(x,t)\epsilon\Delta_2} |\chi(x,t)| \cdot \|q\|^{n+1}{}_{2,\Delta_2} \cdot \frac{1}{n!} \cdot \sqrt{\int_0^t \tau^n d\tau \int_{x-t+\tau}^{\tau} (\tau-\eta)^n d\eta} \leq$$

$$\leq \operatorname*{Sup}_{(x,t)\epsilon\Delta_2} |\chi(x,t)| \cdot \|q\|^{n+1}{}_{2,\Delta_2} \cdot \frac{1}{n!} \cdot \sqrt{\int_0^t \frac{\tau^n (t-x)^{n+1}}{n+1} d\tau} \leq$$

$$\leq \operatorname*{Sup}_{(x,t)\epsilon\Delta_2} |\chi(x,t)| \cdot \|q\|^{n+1}{}_{2,\Delta_2} \cdot \frac{1}{n!} \cdot \sqrt{\frac{t^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{(t-x)^{n+1}}{n+1}} \leq$$

$$\leq \operatorname*{Sup}_{(x,t)\epsilon\Delta_2} |\chi(x,t)| \cdot \|q\|^{n+1}{}_{2,\Delta_2} \cdot \frac{1}{n!} \cdot \frac{\sqrt{t^{n+1} \cdot (t-x)^{n+1}}}{n+1} \leq$$

$$\leq \operatorname*{Sup}_{(x,t)\epsilon\Delta_2} |\chi(x,t)| \cdot \|q\|^{n+1}{}_{2,\Delta_2} \cdot \frac{\sqrt{[t \cdot (t-x)]^{n+1}}}{(n+1)!}.$$

Ҳамин тариқ, дурустии баҳои (3.15) исбот карда шуд. Аз ин бармеояд, ки муодилаи (3.14) дар соҳаи Δ_2 ҳалли маҳдуд дорад, ки онро метавон дар шакли қатори мутлақ наздикшавандаи Нейман ифода намуд:

$$u_2(x,t) = \left(I + \sum_{k=1}^{\infty} N_2^k\right) F_2(x,t).$$

Ҳангоми $j = 3$ дорем:

$$u_3(x,t) = \nu(t+x-l) + \frac{1}{2}\iint\limits_{D_{31}\cup D_{32}} f(\xi,\tau)d\xi d\tau + \frac{1}{2}\iint\limits_{D_{31}} q(\xi,\tau)u_1(\xi,\tau)d\xi d\tau +$$

$$+\frac{1}{2}\iint\limits_{D_{32}} q(\xi,\tau)u_3(\xi,\tau)d\xi d\tau, \qquad (3.16)$$

ки дар ин ҷо

$$D_{31} \equiv D_{31}(x,t) =$$

$$= \left\{(\xi,\tau): 0 \le \tau \le \frac{t-x+l}{2}; x-t+\tau \le \xi \le \frac{3l-x-t}{2} - \left|\frac{x+t-l}{2} - \tau\right|\right\} \subset \Delta_1,$$

$$D_{32} \equiv D_{32}(x,t) =$$

$$= \left\{(\xi,\tau): \frac{t+x-l}{2} \le \tau \le t; \frac{l+x-t}{2} + \left|\tau - \frac{t-x+l}{2}\right| \le \xi \le l - |l-x-t+\tau|\right\} \subset \Delta_3.$$

Дар муодилаи ҳосилшудаи (3.16) чор интеграли аввал аз функсияҳои маълум гирифта мешаванд. Онҳоро ҳамроҳи ҷамъшавандаи якум бо $F_3(x,t)$ ишора мекунем ва нисбат ба $u_3(x,t)$ муодилаи интегралии навъи Волтерраи зеринро ҳосил менамоем:

$$u_3(x,t) = F_3(x,t) + [N_3 u_3](x,t),$$

ки дар он оператори интегралии

$$[N_3 u_3](x,t) = \frac{1}{2}\iint\limits_{D_{32}} q(\xi,\tau)\chi(\xi,\tau)d\xi d\tau$$

дар фазои $L_2(\Delta_3)$ ба таври маҳдуд амал мекунад ва дараҷаҳои он баҳои зеринро қонеъ мегардонанд:

$$\left|\left[N_3^k\chi\right](x,t)\right| \leq \operatorname*{Sup}_{(x,t)\in\Delta_3}|\chi(x,t)|\cdot\left(\frac{\sqrt{l}\cdot\|q\|_{2,\Delta_3}}{2}\right)^k\cdot\frac{\sqrt{(x+t-l)^k}}{k!},\quad k\in N. \quad (3.17)$$

Воқеан, ҳангоми $k=1$ дорем:

$$|[N_3\chi](x,t)| \leq \left|\frac{1}{2}\iint\limits_{D_{32}} q(\xi,\tau)\chi(\xi,\tau)d\xi d\tau\right| \leq$$

$$\leq \left|\frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{l-\tau}^{x+t-\tau} q(\eta,\tau)\chi(\eta,\tau)d\eta\right| \leq$$

$$\leq \operatorname*{Sup}_{(x,t)\in\Delta_3}|\chi(x,t)|\cdot\sqrt{\iint\limits_{\Delta_3} q^2(\eta,\tau)d\eta d\tau}\cdot\sqrt{\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{l-\tau}^{x+t-\tau} d\eta} \leq$$

$$\leq \operatorname*{Sup}_{(x,t)\in\Delta_3}|\chi(x,t)|\cdot\|q\|_{2,\Delta_3}\cdot\sqrt{\int\limits_0^t (x+t-l)d\tau} \leq$$

$$\leq \operatorname*{Sup}_{(x,t)\in\Delta_3}|\chi(x,t)|\cdot\|q\|_{2,\Delta_3}\cdot\sqrt{(x+t-l)l}.$$

Фарз мекунем, ки ҳангоми $k=n$ баҳои (3.17) дуруст аст, яъне

$$|[N_3^n\chi](x,t)| \leq \operatorname*{Sup}_{(x,t)\in\Delta_3}|\chi(x,t)|\cdot\left(\frac{\sqrt{l}\cdot\|q\|_{2,\Delta_3}}{2}\right)^n\cdot\frac{\sqrt{(x+t-l)^n}}{n!}.$$

Ҳангоми $k=n+1$ доро мешавем:

$$|[N_3^{n+1}\chi](x,t)| \leq \left|\frac{1}{2}\iint\limits_{D_{32}} q(\xi,\tau)\,[N_2^n\chi(\eta,\tau)](\eta,\tau)d\eta d\tau\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\operatorname*{Sup}_{(x,t)\in\Delta_3}|\chi(x,t)|\cdot\left(\frac{\sqrt{l}\cdot\|q\|_{2,\Delta_3}}{2}\right)^n\cdot\frac{1}{n!}\cdot\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{l-\tau}^{x+t-\tau} q(\eta,\tau)\sqrt{[\tau(\eta+\tau-l)]^n}d\eta \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\operatorname*{Sup}_{(x,t)\in\Delta_3}|\chi(x,t)|\cdot\left(\frac{\sqrt{l}\cdot\|q\|_{2,\Delta_3}}{2}\right)^n\cdot\frac{1}{n!}\cdot\|q\|_{2,\Delta_3}\cdot\sqrt{\int\limits_0^t \tau^n d\tau\int\limits_{l-\tau}^{x+t-\tau}(\eta+\tau-l)^n d\eta} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\sup_{(x,t)\in\Delta_3}|\chi(x,t)|\cdot\left(\frac{\sqrt{l}\cdot\|q\|_{2,\Delta_3}}{2}\right)^n\cdot\|q\|_{2,\Delta_3}\cdot\frac{1}{n!}\cdot\sqrt{\int_0^t\frac{\tau^n(x+t-l)^{n+1}}{n+1}d\tau}\leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\sup_{(x,t)\in\Delta_3}|\chi(x,t)|\cdot\left(\frac{\sqrt{l}\cdot\|q\|_{2,\Delta_3}}{2}\right)^n\cdot\|q\|_{2,\Delta_3}\cdot\frac{1}{n!}\cdot\sqrt{\frac{t^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{(x+t-l)^{n+1}}{n+1}}\leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\sup_{(x,t)\in\Delta_3}|\chi(x,t)|\cdot\left(\frac{\sqrt{l}\cdot\|q\|_{2,\Delta_3}}{2}\right)^n\cdot\|q\|_{2,\Delta_3}\cdot\frac{1}{n!}\cdot\frac{\sqrt{t^{n+1}\cdot(x+t-l)^{n+1}}}{n+1}\leq$$

$$\leq \sup_{(x,t)\in\Delta_3}|\chi(x,t)|\cdot\left(\frac{\sqrt{l}\cdot\|q\|_{2,\Delta_3}}{2}\right)^{n+1}\cdot\frac{\sqrt{(x+t-l)^{n+1}}}{(n+1)!}.$$

Пас, муодилаи интегралии (3.16) мувофиқи баҳои (3.17) дар фазои Δ_3 ҳалли маҳдуд дорад, ки онро метавон дар шакли қатори мутлақ наздикшавандаи Нейман ифода намуд:

$$u_3(x,t)=\left(I+\sum_{k=1}^{\infty}N_3^k\right)F_3(x,t).$$

Ниҳоят, ҳангоми $j=4$ муодилаи зеринро дорем:

$$u_4(x,t)=F_4(x,t)+\frac{1}{2}\iint_{D_4}q(\xi,\tau)u_4(\xi,\tau)d\xi d\tau, \tag{3.18}$$

ки дар он

$$F_4(x,t)=-\int_0^{t-x}\mu(\tau)d\tau+\nu(t+x-l)+\frac{1}{2}\iint_{D^{**}}f(\xi,\tau)d\xi d\tau+$$

$$+\frac{1}{2}\iint_{D_{41}\cup D_{42}}q(\xi,\tau)u_1(\xi,\tau)d\xi d\tau+\frac{1}{2}\iint_{D_{43}\cup D_{44}}q(\xi,\tau)u_2(\xi,\tau)d\xi d\tau+$$

$$+\frac{1}{2}\iint_{D_{45}}q(\xi,\tau)u_3(\xi,\tau)d\xi d\tau$$

– функсияи аллакай маълум мебошад ва

$$D_{41} \equiv D_{41}(x,t) = \left\{(\xi,\tau) \colon 0 \le \tau \le \frac{t-x}{2};\ \ \tau \le \xi \le t-x-\tau\right\} \subset \Delta_1;$$

$$D_{42} \equiv D_{42}(x,t) = \left\{\begin{matrix} (\xi,\tau) \colon\ 0 \le \tau \le \dfrac{l}{2}; \\ \tau \le \xi \le \dfrac{3l-t-x}{2} - \left|\tau - \dfrac{t+x-l}{2}\right| \end{matrix}\right\} \subset \Delta_1;$$

$$D_{43} \equiv D_{43}(x,t) = \left\{\begin{matrix} (\xi,\tau) \colon 0 \le \tau \le \dfrac{t-x+l}{2}; \\ \dfrac{x-t+\tau}{2} + \left|\dfrac{x-t+\tau}{2}\right| \le \xi \le \dfrac{l}{2} - \left|\tau - \dfrac{l}{2}\right| \end{matrix}\right\} \subset \Delta_2;$$

$$D_{44} \equiv D_{44}(x,t) = \left\{(\xi,\tau) \colon 0 \le \tau \le t-x; 0 \le \xi \le \frac{t-x}{2} - \left|\tau - \frac{t-x}{2}\right|\right\} \subset \Delta_2;$$

$$D_{45} \equiv D_{45}(x,t) = \left\{\begin{matrix} (\xi,\tau) \colon \dfrac{x+t-l}{2} \le \tau \le \dfrac{t+x}{2}; \\ \dfrac{l}{2} + \left|\dfrac{l}{2} - \tau\right| \le \xi \le l - |x+t-l-\tau| \end{matrix}\right\} \subset \Delta_3;$$

$$D_4 \equiv D_4(x,t) = \left\{\begin{matrix} (\xi,\tau) \colon\ \dfrac{l}{2} \le \tau \le t; \\ \dfrac{x-t+l}{2} + \left|\tau - \dfrac{t-x+l}{2}\right| \le \xi \le \dfrac{x+t}{2} - \left|\tau - \dfrac{t+x}{2}\right| \end{matrix}\right\} \subset \Delta_4;$$

$$D^{**} = D_{41} \cup D_{42} \cup D_{43} \cup D_{44} \cup D_{45} \cup D_4.$$

Муодилаи (3.18)-ро дар шакли операторӣ менависем:

$$u_4(x,t) = F_4(x,t) + [N_4 u_4](x,t).$$

Ба осонӣ метавон боварӣ ҳосил кард, ки оператори

$$[N_4 u_4](x,t) = \frac{1}{2} \iint\limits_{D_4} q(\xi,\tau) u_4(\xi,\tau) d\xi d\tau$$

дар фазои $L_2(\Delta_4)$ ба таври маҳдуд амал мекунад ва дараҷаҳои он ба баҳои зерин тобеъ ҳастанд:

$$\left|[N_4^k \chi](x,t)\right| \le \operatorname*{Sup}_{(x,t)\in\Delta_4} |\chi(x,t)| \cdot \left(\frac{\sqrt{l} \cdot \|q\|_{2,\Delta_4}}{2}\right)^k \cdot \frac{\sqrt{(x+t-l)^k}}{k!}, \qquad k \in N. \qquad (3.19)$$

Дар ҳақиқат, бигузор $k = 1$ бошад. Он гоҳ

$$|[N_4\chi](x,t)| \le \left|\frac{1}{2}\iint\limits_{D_4} q(\eta,\tau)\chi(\eta,\tau)d\eta d\tau\right| \le$$

$$\le \frac{1}{2}\operatorname*{Sup}_{(x,t)\epsilon\Delta_4}|\chi(x,t)|\cdot\sqrt{\iint\limits_{D_4} q^2(\eta,\tau)\chi(\eta,\tau)d\eta d\tau}\cdot\sqrt{\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{l-\tau}^{t+x-\tau} d\eta} \le$$

$$\le \frac{1}{2}\operatorname*{Sup}_{(x,t)\epsilon\Delta_4}|\chi(x,t)|\cdot\|q\|_{2,\Delta_4}\cdot\sqrt{\int\limits_0^t (t+x-l)d\tau} \le$$

$$\le \frac{1}{2}\operatorname*{Sup}_{(x,t)\epsilon\Delta_4}|\chi(x,t)|\cdot\|q\|_{2,\Delta_4}\cdot\sqrt{(t+x-l)t} \le$$

$$\le \operatorname*{Sup}_{(x,t)\epsilon\Delta_4}|\chi(x,t)|\cdot\|q\|_{2,\Delta_4}\cdot\frac{\sqrt{(t+x-l)l}}{2}.$$

Бигузор ҳангоми $k = n$ баҳои (3.19) иҷро гардад, яъне

$$|[N_4^n\chi](x,t)| \le \operatorname*{Sup}_{(x,t)\epsilon\Delta_4}|\chi(x,t)|\cdot\left(\frac{\sqrt{l}\cdot\|q\|_{2,\Delta_4}}{2}\right)^k\cdot\frac{\sqrt{(x+t-l)^k}}{k!}.$$

Акнун ҳолати $k = n+1$-ро баррасӣ менамоем:

$$|[N_4^{n+1}\chi](x,t)| \le \left|\frac{1}{2}\iint\limits_{D_4} q(\eta,\tau)\,[N_4^n\chi](\eta,\tau)d\eta d\tau\right| \le$$

$$\le \frac{1}{2}\operatorname*{Sup}_{(x,t)\epsilon\Delta_4}|\chi(x,t)|\cdot\|q\|^n{}_{2,\Delta_4}\cdot\frac{1}{2^n\cdot n!}\cdot\|q\|_{2,\Delta_4}\times$$

$$\times\sqrt{\int\limits_0^t l^n d\tau\int\limits_{l-\tau}^{x+t-\tau}(\eta+\tau-l)^n d\eta} \le$$

$$\le \frac{1}{2}\operatorname*{Sup}_{(x,t)\epsilon\Delta_4}|\chi(x,t)|\cdot\|q\|^{n+1}{}_{2,\Delta_4}\cdot\frac{1}{2^n\cdot n!}\cdot\sqrt{\int\limits_0^t\frac{l^n(x+t-l)^{n+1}}{n+1}d\tau} \le$$

$$\leq \frac{1}{2} \sup_{(x,t)\epsilon\Delta_4} |\chi(x,t)| \cdot \|q\|^{n+1}{}_{2,\Delta_4} \cdot \frac{1}{2^n \cdot n!} \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{l^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{(x+t-l)^{n+1}}{n+1}} \leq$$

$$\leq \sup_{(x,t)\epsilon\Delta_4} |\chi(x,t)| \cdot \|q\|^{n+1}{}_{2,\Delta_4} \cdot \frac{1}{2^{n+1} \cdot n!} \cdot \frac{\sqrt{2^{n+1} \cdot (x+t-l)^{n+1}}}{n+1} \leq$$

$$\leq \sup_{(x,t)\epsilon\Delta_4} |\chi(x,t)| \cdot \|q\|^{n+1}{}_{2,\Delta_4} \cdot \frac{\sqrt{[l \cdot (x+t-l)]^{n+1}}}{2^{n+1} \cdot (n+1)!}.$$

Дурустии баҳои (3.19) исбот гардид. Аз ин ҷо бармеояд, ки муодилаи (3.18) муодилаи интегралии навъи Волтерра мебошад ва дар Δ_4 ҳалли маҳдуд дорад, ки онро метавон дар шакли қатори мутлақ наздикшавандаи Нейман ифода намуд:

$$u_4(x,t) = \left(I + \sum_{k=1}^{\infty} N_4^k \right) F_4(x,t).$$

Барои анҷом додани исботи теоремаи 3.1 суфтагии ҳалли бадастомадаро таҳқиқ менамоем. Аз (3.11) бармеояд, ки ҳалли $u(x,t)$ дар росткунҷаи Q_T бефосила мебошад. Ишораи $U(x,t) = f(x,t) + q(x,t)u(x,t)$ -ро ворид мекунем. Функсияи $U(x,t)$ -ро нисбат ба сарҳади $x = 0$ ҷуфт ва нисбат ба сарҳади $x = l$ тоқ идома медиҳем. Дар натиҷа баробарии (3.11) ба баробарии зерин мубаддал мегардад:

$$u(x,t) = -\int_0^{t-x} \underline{\mu}(\tau) d\tau + \underline{\nu}(t+x-l) + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} U(\xi,\tau) d\xi d\tau.$$

Аз ин баробарӣ нисбат ба t ва x ҳосила гирифта, барои қариб ҳамаи $(x,t) \in Q_T$ баробариҳои зеринро ҳосил мекунем:

$$u_t(x,t) = -\underline{\mu}(t-x) + \underline{\nu'}(t+x-l) +$$

$$+\frac{1}{2} \int_0^t [U(x+t-\tau,\tau) + U(x-t+\tau,\tau)] d\tau, \tag{3.20}$$

$$u_x(x,t) = \underline{\mu}(t-x) + \underline{\nu'}(t+x-l) +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t [U(x+t-\tau,\tau)-U(x-t+\tau,\tau)]d\tau. \qquad (3.21)$$

Аз муносибатҳои (3.20) ва (3.21) бармеояд, ки ҳосилаҳои $u_t(x,t)$ ва $u_x(x,t)$ ба фазои $L_2(0\le x\le l)$ барои ҳамаи $t\in[0,T]$ тааллуқ доранд ва инчунин ба фазои $L_2(0\le t\le T)$ барои ҳамаи $x\in[0,l]$ тааллуқ доранд. Ҳамин тавр, теоремаи 3.1 пурра исбот гардид.

Натиҷаи 3.1. *Бигзор, шартҳои теоремаи 3.1 иҷро шаванд. Он гоҳ ҳалли масъалаи омехтаи I ба баҳои зерин тобеъ мебошад:*

$$\operatorname*{Sup}_{(x,t)\in Q_T}|u(x,t)|\le C\left(\|\mu(t)\|_{L_2[0,T]}+\operatorname*{Sup}_{t\in[0,T]}|\nu(t)|+\|f\|_{L_2(Q_T)}\right). \qquad (3.22)$$

Ин баҳо нисбат ба $q(x,t)$: $\|q\|_{L_2(Q_T)}\le\gamma$, $C=C(\gamma)>0$ *мунтазам аст.*

Исбот. Дурустии баҳои (3.22) барои ҳолати $(x,t)\in\Delta_1$ дар банди 2.2 -и боби 2 исбот шудааст (ниг. ба натиҷаи 2.1).

Фарз мекунем, ки $(x,t)\in\Delta_2$. Дар ин ҳолат дорем:

$$|F_2(x,t)|\le\left|-\int_0^{t-x}\mu(\tau)d\tau\right|+\frac{1}{2}\int_0^l d\tau\int_0^{l-\tau}|f(\eta,\tau)|d\eta+$$

$$+C_1\cdot\|f\|_{2,\Delta_1}\cdot\int_0^{\frac{l}{2}}d\tau\int_\tau^{l-\tau}|q(\eta,\tau)|d\eta\le$$

$$\le\left|-\int_0^{t-x}\mu(\tau)d\tau\right|+\frac{1}{2}\sqrt{\int_0^l d\tau\int_0^{l-\tau}f^2(\eta,\tau)d\eta}\cdot\sqrt{\int_0^l d\tau\int_0^{l-\tau}d\eta}+$$

$$+C_1\cdot\|f\|_{2,\Delta_1}\cdot\sqrt{\int_0^{\frac{l}{2}}d\tau\int_0^{l-\tau}q^2(\eta,\tau)d\eta}\cdot\sqrt{\int_0^{\frac{l}{2}}d\tau\int_\tau^{l-\tau}d\eta}\le$$

$$\leq \|\mu\|_{2,\Delta_1} + \frac{l}{2\sqrt{2}}\|f\|_{2,\Delta_1 \cup \Delta_2} + Cg_1 \cdot \|f\|_{2,\Delta_1} \cdot \frac{l}{2} \cdot \|q\|_{2,\Delta_1} \leq$$

$$\leq \|\mu\|_{2,\Delta_1} + \left(\frac{l}{2\sqrt{2}} + \frac{C_1 l}{2}\|q\|_{2,\Delta_1}\right)\|f\|_{2,\Delta_1 \cup \Delta_2}.$$

Аз ин ҷо ҳосил мекунем:

$$|u_2(x,t)| \leq \operatorname*{Sup}_{(x,t)\epsilon\Delta_1 \cup \Delta_2} |F_2(x,t)| +$$

$$+ \operatorname*{Sup}_{(x,t)\epsilon\Delta_1 \cup \Delta_2} |F_2(x,t)| \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \|q\|^k{}_{2,\Delta_1} \cdot \frac{\sqrt{t(t-x)^k}}{k!} \leq$$

$$\leq \operatorname*{Sup}_{(x,t)\epsilon\Delta_1 \cup \Delta_2} |F_2(x,t)| \cdot \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \left(l \cdot \|q\|_{2,\Delta_2}\right)^k\right] \leq$$

$$\leq \operatorname*{Sup}_{(x,t)\epsilon\Delta_1 \cup \Delta_2} |F_2(x,t)| \exp\left(l \cdot \|q\|_{2,\Delta_2}\right) \leq \|\mu(t)\| \cdot \exp\left(l \cdot \|q\|_{2,\Delta_2}\right) +$$

$$+ \exp\left(l \cdot \|q\|_{2,\Delta_2}\right) \cdot \left(\frac{l}{2\sqrt{2}} + \frac{C_1 l}{2}\|q\|_{2,\Delta_1}\right)\|f\|_{2,\Delta_1 \cup \Delta_2} \leq$$

$$\leq C_2\left(\|\mu(t)\| + \|f\|_{2,\Delta_1 \cup \Delta_2}\right),$$

ки дар ин ҷо

$$C_2 = \max\left\{\exp\left(l \cdot \|q\|_{2,\Delta_2}\right); \exp\left(l \cdot \|q\|_{2,\Delta_2}\right) \cdot \frac{l}{2\sqrt{2}} + \frac{C_1 l}{2}\|q\|_{2,\Delta_1}\right\}.$$

Акнун фарз мекунем, ки $(x,t) \in \Delta_3$. Дар ин ҳолат дорем:

$$|F_3(x,t)| \leq \nu(x+t-l) + \frac{1}{2}\iint_{D^{**}} |f(\eta,\tau)| d\eta d\tau +$$

$$+ \frac{1}{2}\iint_{D_{31}} |q(\eta,\tau)u_1(\eta,\tau)| d\eta d\tau + \frac{1}{2}\iint_{D_{32}} |q(\eta,\tau)u_1(\eta,\tau)| d\eta d\tau \leq$$

$$\leq \operatorname*{Sup}_{t\in[0,T]} |\nu(t)| \cdot \sqrt{l} + \frac{2l}{\sqrt{2}} \cdot \|f\|_{2,\Delta_1 \cup \Delta_3} + \frac{l}{2\sqrt{2}} C_1 \cdot \|f\|_{2,\Delta_1} \cdot \|q\|_{2,\Delta_1 \cup \Delta_3} +$$

$$+ \tfrac{l}{2\sqrt{2}} C_1 \cdot \|f\|_{2,\Delta_1} \cdot \|q\|_{2,\Delta_1 \cup \Delta_3}.$$

Аз ин ҷо доро мешавем:

$$\operatorname*{Sup}_{(x,t)\epsilon\Delta_3}|F_3(x,t)| \leq \sqrt{l}\cdot\operatorname*{Sup}_{t\in[0,T]}|\nu(t)| + \left(\frac{2l}{\sqrt{2}} + \frac{l}{\sqrt{2}}C_1\|q\|_{2,\Delta_1\cup\Delta_3}\right)\|f\|_{2,\Delta_1\cup\Delta_3};$$

$$|u_3(x,t)| \leq \operatorname*{Sup}_{(x,t)\epsilon\Delta_3}|F_3(x,t)| +$$

$$+\operatorname*{Sup}_{(x,t)\epsilon\Delta_3}|F_3(x,t)|\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{l}\cdot\|q\|_{2,\Delta_3}}{2}\right)^k\cdot\frac{\sqrt{(x+t-l)^k}}{k!} \leq$$

$$\leq \operatorname*{Sup}_{(x,t)\epsilon\Delta_3}|F_3(x,t)|\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{l}\cdot\|q\|_{2,\Delta_3}}{2}\right)^k\cdot\frac{\sqrt{(x+t-l)^k}}{k!}\right] \leq$$

$$\leq \operatorname*{Sup}_{(x,t)\epsilon\Delta_3}|F_3(x,t)|\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{\sqrt{l}\cdot\|q\|_{2,\Delta_3}\cdot\sqrt{x+t-l}}{2}\right)^k}{k!}\right] \leq$$

$$\leq \operatorname*{Sup}_{(x,t)\epsilon\Delta_3}|F_3(x,t)|\cdot\exp\left(\|q\|_{2,\Delta_3}\cdot\frac{l}{2}\right) \leq$$

$$\leq \left[\sqrt{l}\cdot\operatorname*{Sup}_{t\in[0,T]}|\nu(t)| + \left(\frac{2l}{\sqrt{2}}+\frac{lC_1}{\sqrt{2}}\|q\|_{2,\Delta_1\cup\Delta_3}\right)\cdot\|f\|_{2,\Delta_1\cup\Delta_3}\right]\times$$

$$\times\exp\left(\|q\|_{2,(\Delta_3)}\cdot\frac{l}{2}\right) \leq C_3\left(\|\nu\|_{2,\Delta_3}+\|f\|_{2,\Delta_1\cup\Delta_3}\right),$$

ки дар ин ҷо:

$$C_3 = \max\left\{\begin{array}{c}\sqrt{l}\cdot\exp\left(\|q\|_{2,\Delta_3}\cdot\frac{l}{2}\right); \\ \exp\left(\|q\|_{2,\Delta_3}\cdot l\right)\left(\frac{2l}{\sqrt{2}}+\frac{lC_1}{\sqrt{2}}\|q\|_{2,\Delta_1\cup\Delta_3}\right)\end{array}\right\}.$$

Ниҳоят, фарз мекунем, ки $(x,t)\in\Delta_4$. Дар ин ҳолат дорем:

$$|F_4(x,t)| \leq \left|-\int_0^{t-x}\mu(\tau)d\tau\right| + |\nu(t+x-l)| + \frac{1}{2}\iint_{D^{**}}|f(\eta,\tau)|d\eta d\tau +$$

$$+\frac{1}{2}\iint_{D_{41}\cup D_{42}}|q(\eta,\tau)u_1(\eta,\tau)|d\eta d\tau + \frac{1}{2}\iint_{D_{43}\cup D_{44}}|q(\eta,\tau)u_2(\eta,\tau)|d\eta d\tau +$$

$$+\frac{1}{2}\iint\limits_{D_{45}}|q(\eta,\tau)u_3(\eta,\tau)|d\eta d\tau \le$$

$$\le \|\mu\|_{2,\Delta_4}\sqrt{l} + \operatorname*{Sup}_{(x,t)\epsilon\Delta_4}|\nu(t)| + \frac{l}{2}\|f\|_{2,Q_l} + \frac{l}{2}C_1\|f\|_{2,\Delta_1}\|q\|_{2,\Delta_1} +$$

$$+\frac{l}{\sqrt{2}}C_2\cdot\left(\sqrt{l}\cdot\|\mu\|_{2,\Delta_3} + \|f\|_{2,\Delta_1\cup\Delta_2}\right)\cdot\|q\|_{2,\Delta_1\cup\Delta_2} +$$

$$+\frac{l}{\sqrt{2}}C_3\left(\operatorname*{Sup}_{(x,t)\epsilon\Delta_2}|\nu(t)| + \|f\|_{2,\Delta_1\cup\Delta_3}\right)\cdot\|q\|_{2,\Delta_1\cup\Delta_3} \le$$

$$\le \|\mu\|_{2,\Delta_4}\sqrt{l} + \operatorname*{Sup}_{(x,t)\epsilon\Delta_4}|\nu(t)| + \frac{l}{2}\|f\|_{2,Q_l} + \frac{l}{2}C_1\|f\|_{2,Q_l}\cdot\|q\|_{2,Q_l} +$$

$$+\frac{l}{\sqrt{2}}C_2\cdot\|q\|_{2,Q_l}\cdot\sqrt{l}\cdot\|\mu\|_{2,\Delta_3} + \frac{l}{\sqrt{2}}C_2\cdot\|f\|_{2,Q_l}\cdot\|q\|_{2,Q_l} +$$

$$+\frac{l\sqrt{l}}{2}C_3\cdot\operatorname*{Sup}_{(x,t)\epsilon\Delta_2}|\nu(t)| + \frac{l}{\sqrt{2}}C_3\|f\|_{2,Q_l}\cdot\|q\|_{2,Q_l} \le$$

$$\le \left(1+\frac{lC_2}{\sqrt{2}}\cdot\|q\|_{2,Q_l}\right)\operatorname*{Sup}_{(x,t)\epsilon Q_l}|\nu| + \left(\sqrt{l}+\frac{l\sqrt{l}}{2}C_3\right)\|\mu\|_{2,\Delta_4} +$$

$$+\left(\frac{l}{2}+\frac{l}{2}C_1\cdot\|q\|_{2,Q_l}+\frac{l}{\sqrt{2}}C_2\|q\|_{2,Q_l}+\frac{l}{\sqrt{2}}C_3\cdot\|q\|_{2,Q_l}\right)\|f\|_{2,Q_l}.$$

Аз ин чо дорем:

$$|u_4(x,t)| \le \operatorname*{Sup}_{(x,t)\epsilon\Delta_4}|F_4(x,t)| +$$

$$+\operatorname*{Sup}_{(x,t)\epsilon\Delta_4}|F_4(x,t)|\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{l}\cdot\|q\|_{2,\Delta_4}}{2}\right)^k\cdot\frac{\sqrt{(x+t-l)^k}}{k!} \le$$

$$\le \operatorname*{Sup}_{(x,t)\epsilon\Delta_4}|F_4(x,t)|\cdot\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{l}\cdot\|q\|_{2,\Delta_4}}{2}\right)^k\cdot\frac{\sqrt{(x+t-l)^k}}{k!}\right] \le$$

$$\le \operatorname*{Sup}_{(x,t)\epsilon\Delta_4}|F_4(x,t)|\cdot\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{l}\cdot\|q\|_{2,\Delta_4}\cdot\frac{\sqrt{x+t-l}}{2}\right)^k}{k!}\right] \le$$

$$\leq \operatorname*{Sup}_{(x,t)\in\Delta_4} |F_4(x,t)| \cdot \exp\left(\|q\|_{2,\Delta_4} \cdot \frac{\sqrt{l(x+t-l)}}{2} \right) \leq$$

$$\leq \operatorname*{Sup}_{(x,t)\in\Delta_4} |F_4(x,t)| \cdot \exp\left(\frac{l \cdot \|q\|_{2,\Delta_4}}{2} \right) \leq$$

$$\leq C_4 \left(\|\mu\|_{2,Q_l} + \operatorname*{Sup}_{(x,t)\in Q_l} |\nu(t)| + \|f\|_{2,Q_l} \right),$$

ки дар ин ҷо:

$$C_4 = \max \left\{ \begin{array}{c} \exp\left(\dfrac{l \cdot \|q\|_{2,\Delta_4}}{2}\right)\left(1 + \dfrac{lC_2}{\sqrt{2}} \cdot \|q\|_{2,Q_l}\right); \\ \exp\left(\dfrac{l \cdot \|q\|_{2,\Delta_4}}{2}\right)\left(\sqrt{l} + \dfrac{l\sqrt{l}}{2} C_3\right); \\ \exp\left(\dfrac{l \cdot \|q\|_{2,\Delta_4}}{2}\right)\left(\dfrac{l}{2} + \left(\dfrac{l}{2}C_1 + \dfrac{l}{\sqrt{2}}C_2 + \dfrac{l}{\sqrt{2}}C_3\right)\|q\|_{2,Q_l}\right) \end{array} \right\}.$$

Ҳамин тавр, дурустии баҳои (3.22) исбот карда шуд.

Қайд менамоем, ки аз баҳои (3.22) устувории ҳалли масъалаи баррасишаванда нисбат ба шартҳои сарҳадӣ ва қисми рости муодила бармеояд.

Эзоҳи 3.2. «Фарз мекунем, ки функсияи $u^*(x,t)$ ҳалли умумишуда бо маънои айнияти интегралии (3.7)-и масъалаи омехтаи I бо коэффитсиенти сифрӣ мебошад, ки дар шакли (3.8) ифода мегардад ва $u(x,t)$ – ҳалли масъалаи умумӣ аст. Бо истифода аз қаторҳое, ки ҳалли муодилаҳои (3.12), (3.14), (3.16), (3.18)-ро медиҳанд ва бо назардошти баҳоҳои (3.13), (3.15), (3.17), (3.19) ҳосил мекунем, ки

$$\max_{(x,t)\in Q_T} |u(x,t) - u^*(x,t)| \leq K\|q\|_{L_2(Q_T)},$$

ки дар он доимии K ба нормаи функсияи $q(x,t)$ вобаста нест. Аз ин ҷо, мувофиқи муносибатҳои (3.20) ва (3.21) ба баҳои

$$\|u - u^*\|_{W_2^1(Q_T)} \leq C\|q\|_{L_2(Q_T)}$$

меоем, ки он устувории ҳалли масъалаи омехтаро нисбат ба ошӯби аддитивии $q(x,t)u(x,t)$ дар муодилаи (3.1) бо коэффитсиенти бо квадрат замшавандаи $q(x,t)$ нишон медиҳад» [23].

Эзоҳи 3.3. «Қайд мекунем, ки тасдиқоти монанд ба леммаи 3.1 ва теоремаи 3.1-ро инчунин барои ҳалли масъалаи омехтаи II бо шартҳои ниҳоии сифрии (3.5) ва чунин шартҳои сарҳадии (3.2), ки дар онҳо $\mu(t) \in L_2[0,T], \nu(t) \in W_2^1[0,T]$ ва $\nu(T)=0$ аст,мебошад, ба даст овардан мумкин аст. Таъкид менамоем, ки ба мисли теоремаи 3.1 ҳалли масъалаи омехтаи баррасишаванда барои муодилаи якҷинса дар соҳаи $\{(x,t)\colon \max\{T-l,0\} \le t \le T, T-t \le x \le l\} \cap Q_T$ айниятан ба сифр баробар аст» [24].

Комилан ба теоремаи 2.2 аз банди 2.2-и боби 2 монанд, теоремаи зерин исбот карда мешавад.

Теоремаи 3.2. *Фарз мекунем, ки дар муодилаи (3.1) коэффитсиенти тағйирёбандаи $q(x,t)$ танҳо ба синфи $L_2(Q_T)$ тааллуқ дорад. Он гоҳ барои ҳар гуна $T \in (0,l]$ ҳам масъалаи омехтаи I ва ҳам масъалаи омехтаи II аз синфи $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ аз як ҳал зиёд дошта наметавонад.*

Аз теоремаи 3.2 бармеояд, ки ҳалли баррасишуда дар леммаи 3.1 ҳалли ягона аз синфи $\widehat{W}_2^1(Q_T)$-и масъалаи омехта барои муодилаи (3.1) бо шартҳои ибтидоии сифрӣ ва шартҳои сарҳадии (3.2) мебошад. Аз ин рӯ, метавон хулоса кард, ки теоремаи 3.1 мавҷудияти маҳз ҳамин ҳалли масъаларо муқаррар менамояд.

3.3. Яккимата ҳалшавандагии масъалаи идоракунии сарҳадӣ ҳангоми вақти аз критикӣ хурд ё вақти ба он баробар

Дар ин банд саволи мавҷудият ҳангоми $T=l$ ва ягонагӣ ҳангоми $T \le l$ - и ҳалли масъалаи идоракунии сарҳадии III таҳқиқ карда мешавад. Дар аввал тасдиқҳоро дар бораи ягонагӣ ва мавҷудияти ҳалли масъалаи баррасишавандаи идоракунии сарҳадӣ барои ҳолати хусусӣ, ки коэффитсиенти тағйирёбандаи $q(x,t)$ унсури сифрии синфи $L_2(Q_T)$ мебошад, меорем ва исбот менамоем.

Мулоҳизаҳое, ки дар кори [65] оварда шудаанд, такрор намуда, ба осонӣ дурустии тасдиқи зеринро нишон додан мумкин аст (ниг. ба раванди исботи тасдиқи 2.4).

Тасдиқи 3.3. *Фарз мекунем, ки $T \leq l$ ва $q(x,t)$ унсури сифрии синфи $L_2(Q_T)$ мебошад. Он гоҳ барои масъалаи идоракунии сарҳадии III танҳо як ҳал аз синфи $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ вуҷуд дошта метавонад.*

Акнун тасдиқ оид ба мавҷудияти ҳалли масъалаи идоракунии сарҳадии III-ро барои ҳолати хусусии баррасишаванда меорем ва исбот менамоем.

Тасдиқи 3.4. *Фарз мекунем, ки $q(x,t)$ унсури сифрии синфи $L_2(Q_T)$ ва $T = l$ мебошад. Он гоҳ, барои он ки ҳалли ягонаи масъалаи идоракунии сарҳадии III аз синфи $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ мавҷуд бошад, зарур ва кифоя аст, ки муносибатҳои зерин иҷро гарданд:*

$$\hat{\psi}_1(0) + \varphi_1(0) - \hat{\psi}(l) - \varphi(l) - \int_0^l \hat{f}(l-\tau,\tau)d\tau = 0, \tag{3.23}$$

$$\hat{\psi}_1(l) - \varphi_1(l) - \hat{\psi}(0) + \varphi(0) - \int_0^l \hat{f}(\tau,\tau)d\tau = 0, \tag{3.24}$$

ки дар онҳо $\hat{\psi}(x)$, $\hat{\psi}_1(x)$ ва $\hat{f}(x,t)$ мувофиқан функсияҳои ибтидоии функсияҳои $\psi(x)$, $\psi_1(x)$ ва $f(x,t)$ нисбат ба тағйирёбандаи x мебошанд.

Ҳангоми иҷро шудани ин шартҳо ҳалли масъалаи зикршуда бо формулаи зерин дода мешавад:

$$u(x,t) = \begin{cases} u_1(x,t) \ \text{дар } \Delta_1, \\ u_2(x,t) \ \text{дар } \Delta_2, \\ u_3(x,t) \ \text{дар } \Delta_3, \\ u_4(x,t) \ \text{дар } \Delta_4, \end{cases} \tag{3.25}$$

ки дар ин ҷо

$$u_1(x,t) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x+t) + \varphi(x-t) + \int_{x-t}^{x+t} \psi(\xi)d\xi \ + \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi,\tau)d\xi d\tau\right],$$

$$u_2(x,t)=\frac{1}{2}\Bigg[\varphi(x+t)+\varphi_1(x-t+l)+\varphi_1(0)-\varphi(l)+\int\limits_l^{x+t}\psi(\xi)d\xi-$$

$$-\int\limits_0^{x-t+l}\psi(\xi)d\xi-\iint\limits_{\Omega_{21}}f(\xi,\tau)d\xi d\tau-\iint\limits_{\Omega_{22}}f(\xi,\tau)d\xi d\tau-\iint\limits_{\Omega_{24}}f(\xi,\tau)d\xi d\tau\Bigg],$$

$$\Omega_{21}\equiv\Omega_{21}(x,t)=\left\{(\xi,\tau):0\le\tau\le\frac{l}{2},\;\;\frac{x+t}{2}+\left|\tau-\frac{x+t}{2}\right|\le\xi\le l-\tau\right\},$$

$$\Omega_{22}\equiv\Omega_{22}(x,t)=\left\{(\xi,\tau):\frac{x+t}{2}\le\tau\le\frac{t+l-x}{2}\;,\;\;x+|\tau-t|\le\xi\le\frac{l}{2}-\left|\tau-\frac{l}{2}\right|\right\},$$

$$\Omega_{24}\equiv\Omega_{24}(x,t)=\left\{(\xi,\tau):\frac{l+t-x}{2}\le\tau\le l,\;\;l-\tau\le\xi\le x-t+\tau\right\};$$

$$u_3(x,t)=\frac{1}{2}\Bigg[\varphi(x-t)-\varphi(0)+\varphi_1(l)+\varphi_1(x+t-l)-\int\limits_0^{x-t}\psi(\xi)d\xi-$$

$$-\iint\limits_{\Omega_{31}}f(\xi,\tau)d\xi d\tau-\iint\limits_{\Omega_{33}}f(\xi,\tau)d\xi d\tau-\iint\limits_{\Omega_{34}}f(\xi,\tau)d\xi d\tau\Bigg],$$

$$\Omega_{31}\equiv\Omega_{31}(x,t)=\left\{(\xi,\tau):0\le\tau\le\frac{l}{2},\;\;\frac{l+x-t}{2}-\left|\tau-\frac{l-x+t}{2}\right|\le\xi\le\tau\right\},$$

$$\Omega_{33}\equiv\Omega_{33}(x,t)=\left\{(\xi,\tau):\frac{l-x+t}{2}\le\tau\le\frac{x+t}{2},\frac{l}{2}+\left|\tau-\frac{l}{2}\right|\le\xi\le x-|\tau-t|\right\},$$

$$\Omega_{34}\equiv\Omega_{34}(x,t)=\left\{(\xi,\tau):\frac{x+t}{2}\le\tau\le l,\;\;\;x+t-\tau\le\xi\le\tau\right\};$$

$$u_4(x,t)=\frac{1}{2}[\varphi_1(x+t-l)+\varphi_1(x-t+l)+$$

$$+\int\limits_{x-t+l}^{x+t-l}\psi_1(\xi)d\xi-\int\limits_t^l\int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau}f(\xi,\tau)d\xi d\tau\Bigg]$$

Δ_1 – *секунҷаест, ки бо хатҳои* $x-t=0,\; x+t-l=0,\; t=0$ *маҳдуд шудааст;*

Δ_2 –*секунҷаест, ки бо хатҳои* $x-t=0,\; x+t-l=0,\; x=0$ *маҳдуд шудааст;*

Δ_3 −секунҷаест, ки бо хатҳои $x - t = 0,\ x + t - l = 0,\ x = l$ маҳдуд шудааст;

Δ_4 −секунҷаест, ки бо хатҳои $x - t = 0,\ x + t - l = 0,\ t = l$ маҳдуд шудааст.

Дар айни замон, идоракуниҳои сарҳадии ҷустуҷӯшаванда бо истифода аз формулаҳои аналитикии зерин ҳисоб карда мешаванд:

$$\mu(t) = \frac{1}{2}\left[\varphi'(t) - \psi_1(l - t) + \varphi_1'(l - t) + \psi(t) + \int_0^l f(t - \tau, \tau)d\tau\right],$$

$$\nu(t) = \frac{1}{2}\left[\varphi(l - t) - \hat{\psi}(l - t) + \varphi_1(t) + \hat{\psi}_1(t) - \int_0^l \hat{f}(t + l - \tau, \tau)d\tau\right].$$

Исботи зарурӣ. Аввал ҳолати хусусиро баррасӣ менамоем. Аниқаш, фарз мекунем, ки дар масъалаи идоракунии сарҳадии III $\varphi(x) \equiv 0$ дар порчаи $[0, l]$ ва $\psi(x)$ унсури сифрии синфи $L_2[0, l]$ мебошад. Агар ҳалли $u(x, t)$ аз синфи $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ барои масъалаи III вуҷуд дошта бошад, пас он ҳамзамон ҳалли масъалаи омехтаи I аз ҳамон синф мебошад, ки дар он $\varphi(x) \equiv 0$ барои ҳамаи $x \in [0, l]$ ва $\psi(x) \equiv 0$ барои қариб ҳамаи $x \in [0, l]$. Мувофиқи тасдиқи 3.2 ин ҳал дар шакли (3.8) ифода мегардад, ки аз он муносибати зеринро ба даст меорем:

$$\psi_1(x) + {\varphi'}_1(x) = 2\underline{\nu}'(x) + \int_0^l f(x + l - \tau, \tau)d\tau. \qquad (3.26)$$

Аз баробарии (3.26) нисбат ба x аз сифр то l интеграл гирифта, баробариҳои $\nu(0) = \varphi(l)$ ва $\nu(l) = \varphi_1(l)$-ро ба назар гирифта, ҳосил мекунем:

$$\hat{\psi}_1(l) - \varphi_1(l) - \int_0^l \hat{f}(\tau, \tau)d\tau = \hat{\psi}_1(0) + \varphi_1(0) - \int_0^l \hat{f}(l - \tau, \tau)d\tau. \qquad (3.27)$$

Аз муносибати (3.27) бармеояд, ки агар мо бо $\hat{\psi}_1(x)$ ва $\hat{f}(x, t)$ он функсияҳои ибтидоии функсияҳои $\psi_1(x)$ ва $f(x, t)$-ро нисбат ба тағйирёбандаи x ишора намоем, ки ба шарти

$$\hat{\psi}_1(0) + \varphi_1(0) - \int_0^l \hat{f}(l - \tau, \tau)d\tau = 0 \qquad (3.28)$$

тобеанд, он гоҳ баробарии зерин дуруст мебошад:

$$\hat{\psi}_1(l) - \varphi_1(l) - \int_0^l \hat{f}(\tau,\tau)d\tau = 0. \qquad (3.29)$$

Ҳамин тавр, барои ҳолати хусусие, ки дар он $\varphi(x) \equiv 0$ дар порчаи $[0, l]$ ва $\psi(x)$ унсури сифрии фазои $L_2[0, l]$ мебошад, зарур будани муносибатҳои (3.23) ва (3.24) муқаррар карда шуд.

Акнун ҳолати умумиро баррасӣ менамоем, ки дар он $\varphi(x)$ функсияи ихтиёрӣ аз синфи $L_2[0, l]$ буда, $\psi(x)$ функсияи ихтиёрии синфи $W_2^1[0, l]$ мебошад. Бо ин мақсад, функсияҳои $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$-ро нисбат ба нуқтаҳои $x = 0$ ва $x = l$ ба таври ҷуфт ба порчаҳои $[-l, 0]$ ва $[l, 2l]$ идома медиҳем. Инчунин, функсияи $f(x,t)$-ро аз рӯйи тағйирёбандаи аввал ба таври ҷуфт нисбат ба $x = 0$ ба $[-l, 0]$ ва ба таври тоқ нисбат ба $x = l$ ба $[l, 2l]$ идома медиҳем.

Функсияҳои бо ин тарз идомадодашудаи $\varphi(x)$, $\psi(x)$ ва $f(x,t)$, мувофиқан ба синфҳои $L_2[-l, 2l]$, $W_2^1[-l, 2l]$ ва $L_2(-l \le x \le 2l) \times (0 \le t \le T)$ тааллуқ доранд.

Бо чунин функсияҳои идомадодашудаи $\varphi(x)$, $\psi(x)$ ва $f(x,t)$ функсияи зеринро дида мебароем:

$$v(x,t) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x+t) + \varphi(x-t) + \hat{\psi}(x+t) - \hat{\psi}(x-t)\right] +$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^t \left[\hat{f}(x+t-\tau,\tau) - \hat{f}(x-t+\tau,\tau)d\tau\right], \qquad (3.30)$$

ки шарти $v(x,0) = \varphi(x)$ -ро барои ҳамаи $x \in [0, l]$ ва шарти $v_t(x,0) = \psi(x)$ - ро барои қариб ҳамаи $x \in [0, l]$ қаноат мекунонад ва дар он $\hat{\psi}(x)$ функсияи ибтидоии ихтиёрии функсияи $\psi(x)$, $\hat{f}(x,t)$ функсияи ибтидоии ихтиёрии функсияи $f(x,t)$ нисбат ба тағйирёбандаи аввал мебошад.

Ба монанди банди 2.3 - и боби 2, ба осонӣ метавон нишон дод, ки функсияи (3.30) ҳалли умумишуда аз синфи $\widehat{W}_2^1(Q_T)$-и масъалаи омехтаи I мебошад, ки дар он $u(x,t)$ ба $v(x,t)$, $\mu(t)$ ба $v_x(0,t)$ ва $\nu(t)$ ба $v(l,t)$ иваз карда шудаанд. Аз ин рӯ, фарқи $[u(x,t)-v(x,t)]$ ҳалли масъалаи омехтаи I аз ҳамон синф бо шартҳои ибтидоӣ ҳангоми $t=0$ аст, ки шарти аввалаш айниятан ба сифр баробар буда, шарти дуюмаш унсури сифрии синфи $L_2[0,l]$ мебошад.

Мувофиқи ҳолати хусусие, ки дар боло баррасӣ шуд, барои ин фарқ муносибатҳои намуди (3.28) ва (3.29) иҷро мегарданд, яъне

$$\hat{\psi}_1(0)+\varphi_1(0)-\hat{v}_t(0,l)-v(0,l)=0, \tag{3.31}$$

$$\hat{\psi}_1(l)-\varphi_1(l)-\hat{v}_t(l,l)+v(l,l)=0, \tag{3.32}$$

ки дар онҳо рамзи $\hat{v}_t(x,t)$ функсияи ибтидоии функсияи $v_t(x,t)$ -ро нисбат ба тағйирёбандаи x ифода менамояд. Аз баробарии (3.30) бармеояд, ки

$$v(0,l)=\varphi(l)+\psi_1;\ v(l,l)=\varphi(0)-\hat{\psi}(0), \tag{3.33}$$

$$\hat{v}_t(0,l)=\int_0^l f(l-\tau,\tau)d\tau;\ \hat{v}_t(l,l)=\int_0^l f(\tau,\tau)d\tau. \tag{3.34}$$

Ба осонӣ дида мешавад, ки мувофиқи баробариҳои (3.33) ва (3.34) баробариҳои (3.31) ва (3.32) ба баробариҳои (3.23) ва (3.24) мегузаранд. Ҳамин тавр, зарурати шартҳои (3.23) ва (3.24) пурра исбот гардид.

Исботи кифоягӣ. Ба осонӣ метавон боварӣ ҳосил кард, ки функсияи (3.25) ба синфи $\widehat{W}_2^1(Q_l)$ тааллуқ дорад. Воқеан, ин аз он бармеояд, ки он дар ҳар яке аз соҳаҳои $\Delta_i, i=\overline{1,4}$ суммаи алгебравии функсияҳо аз аргументҳои $x+t$ ё $(x-t)$ -ро ташкил медиҳад, ки ҳосилаи умумишудаи бо квадрат замшаванда доранд ва мувофиқи шартҳои (3.23) ва (3.24) ҳангоми гузаштан аз сарҳади умумии ду соҳаи дилхоҳи соҳаҳои зикршуда бефосилагии худро нигоҳ медоранд.

Ба осонӣ санҷида мешавад, ки барои ҳамаи $x\in[0,l]$ баробариҳои $u(x,0)=\varphi(x)$, $u(x,l)=\varphi_1(x)$ ва бо маънои мувофиқати унсурҳои фазои $L_2[0,l]$ баробариҳои $u_t(x,0)=\psi(x)$, $u_t(x,l)=\psi_1(x)$ иҷро мегарданд.

Исботи дурустии айнияти (3.8) барои ҳар гуна функсияи $\Phi(x,t)$ аз таърифи 3.1 боқӣ мемонад. Бо ин мақсад, функсияи зеринро барои баррасӣ ворид менамоем:

$$U(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{2}\left[-\varphi(x-t)+\hat{\psi}(x-t)+M(x,t)\right] \text{ дар } \Delta_1,\\ \frac{1}{2}\left[-\varphi_1(x-t+l)+\hat{\psi}(x-t+l)-\int_0^l \hat{f}(x-t+\tau,\tau)d\tau\ +M(x,t)\right] \text{ дар } \Delta_2,\\ \frac{1}{2}\left[\hat{\psi}(x-t)-\varphi(x-t)-\int_0^l \hat{f}(x+t-\tau,\tau)d\tau\ +N(x,t)\right] \text{ дар } \Delta_3\,,\\ \frac{1}{2}\left[-\varphi_1(x-t+l)+\hat{\psi}(x-t+l)-K(x,t)+N(x,t)\right] \text{ дар } \Delta_4,\end{cases}$$

ки дар ин ҷо:

$$M(x,t)=\int_0^t \hat{f}(x+t-\tau,\tau)d\tau+\int_0^t \hat{f}(x-t+\tau,\tau)d\tau\ +\varphi(x+t)+\hat{\psi}(x+t);$$

$$N(x,t)=\int_0^t \hat{f}(x+t-\tau,\tau)d\tau+\int_0^t \hat{f}(x-t+\tau,\tau)d\tau\ +\varphi_1(x+t-l)+\hat{\psi}(x+t-l);$$

$$K(x,t)=\int_0^t \hat{f}(x+t-\tau,\tau)d\tau+\int_0^t \hat{f}(x-t+\tau,\tau)d\tau\,.$$

Ба монанди функсияи $u(x,t)$ исбот карда мешавад, ки $U(x,t)$ низ ба синфи $\widehat{W}_2^1(Q_l)$ тааллуқ дорад. Инчунин метавон нишон дод, ки барои қариб ҳамаи нуқтаҳои росткунҷаи Q_l баробариҳои зерин дуруст мебошанд:

$$U_x(x,t)=u_t(x,t),\, U_t(x,t)-f(x,t)=u_x(x,t).$$

Барои анҷом додани исботи тасдиқи 3.4 ҳамаи амалҳоеро, ки ҳангоми исботи тасдиқи 2.4 дар банди 2.3-и боби 2 иҷро гардида буданд, такрор кардан лозим аст.

Акнун ҳолати умумии масъалаи идоракунии сарҳадии баррасишавандаро дида мебароем. Бе маҳдуд кардани умумият, дар идома бо мақсади содагардонӣ ва осон намудани ҳисобҳо фарз мекунем, ки $f(x,t)$ унсури сифрии синфи $L_2(Q_l)$ мебошад.

Аввал теоремаро оид ба ягонагии ҳал меорем ва исбот менамоем.

Теоремаи 3.3. *Бигзор,* $q(x,t)$ *дар муодилаи (3.1) ба синфи* $L_2(Q_T)$ *тааллуқ дошта бошад. Он гоҳ барои дилхоҳ* $T \in (0,l]$ *масъалаи идоракунии сарҳадии III аз синфи* $\widehat{W}_2{}^1(Q_T)$ *танҳо як ҳал дошта метавонад.*

Исбот. Исботи теоремаи 3.3 барои ҳар як қимати $T \leq l$ ба таври якхела анҷом дода мешавад. Аз ин рӯ, мо исботро танҳо барои ҳолати $T = l$ меорем.

Фарз мекунем, ки масъалаи идоракунии сарҳадии III ду ҳал дорад: $u^{(1)}(x,t)$ ва $u^{(2)}(x,t)$, ки ба синфи $\widehat{W}_2{}^1(Q_T)$ тааллуқ доранд. Он гоҳ фарқи онҳо $u(x,t) = u^{(2)}(x,t) - u^{(1)}(x,t)$ ҳалли масъалаи III аз ҳамон синф мебошад, ки дорои шартҳои ибтидоӣ ва ниҳоии сифрӣ аст. Мегузорем: $\mu(t) = u_x(0,t)$, $\nu(t) = u(l,t)$. Аз таърифи синфи $\widehat{W}_2{}^1(Q_l)$ бармеояд, ки $\mu(t) \in L_2(0,T)$, $\nu(t) \in W_2{}^1(0,T)$ ва инчунин шартҳои зерин иҷро мешаванд: $\nu(0) = 0, \nu(l) = 0$.

Ҳамин тариқ, функсияи $u(x,t)$ ҳалли масъалаҳои омехта аз синфи $\widehat{W}_2{}^1(Q_l)$ мебошад, ки дар банди 3.2 баррасӣ шудаанд. Дар ҳолати хусусӣ, функсияи $u(x,t)$ дар соҳаи $\Delta_0 = \left\{(x,t)\colon 0 \leq t \leq l,\ \frac{l}{2} - \left|\frac{l}{2} - t\right| \leq x \leq \frac{l}{2} + \left|\frac{l}{2} - t\right|\right\}$ ба сифр баробар аст. Акнун бигузор t_1 ва t_2 ду нуқтаи ихтиёрии порчаи $[0,l]$ бошанд. Хатҳои характеристикии $t - x = t_1$ ва $t + x - l = t_2$, ки мувофиқан аз нуқтаҳои $(0,t_1)$ ва (l,t_2) мегузаранд, сарҳади соҳаи Δ_0-ро дар нуқтаҳои $\left(\frac{l-t_1}{2}, \frac{l+t_1}{2}\right)$ ва $\left(\frac{l+t_2}{2}, \frac{l+t_2}{2}\right)$ мебуранд. Дар ин нуқтаҳо бошад, шарти $u(x,t) \equiv 0$ иҷро мешавад. Аз ин рӯ, аз формулаи (3.8) ҳосил мекунем:

$$\int_0^{t_1} \underline{\mu}(\tau)d\tau = \frac{1}{2}\iint\limits_{D'_0(t_1)} q(\xi,\tau)u_2(\xi,\tau)d\xi d\tau,$$

$$\nu(t_2) = -\frac{1}{2}\iint\limits_{D''_0(t_2)} q(\xi,\tau)u_2(\xi,\tau)d\xi d\tau, \tag{3.35}$$

ки дар ин ҷо

$$D'_0(t_1) = \left\{(\xi,\tau): \frac{t_1}{2} \leq \tau \leq \frac{l+t_1}{2}, \qquad |\tau - t_1| \leq \xi \leq \frac{l}{2} - \left|\frac{l}{2} - \tau\right|\right\},$$

$$D''_0(t_2) = \left\{(\xi,\tau): \frac{t_2}{2} \leq \tau \leq \frac{l+t_2}{2}, \qquad \frac{l}{2} + \left|\tau - \frac{l}{2}\right| \leq \xi \leq l - |\tau - t_2|\right\}.$$

Акнун нуқтаи ихтиёрии $(x,t) \in \Delta_2$ – ро баррасӣ менамоем. Аз формулаи (3.8) дорем:

$$u(x,t) = -\int\limits_0^{t-x} \underline{\mu}(\tau)d\tau + \frac{1}{2}\iint\limits_{D_0} q(\xi,\tau)u(\xi,\tau)d\xi d\tau,$$

$$D_0(x,t) = \left\{(\xi,\tau)\left|\frac{t-x}{2} \leq \tau \leq t, |\tau + x - t| \leq \xi \leq \frac{x+t}{2} - \left|\tau - \frac{x+t}{2}\right|\right.\right\}.$$

Бо дарназардошти баробарии якуми (3.35) ҳангоми $t_1 = t - x$ будан ба муносибати зерин меоем:

$$u(x,t) = -\frac{1}{2}\iint\limits_{D'_0(t-x)\setminus D_0(x,t)} q(\xi,\tau)u(\xi,\tau)d\xi d\tau \equiv [N_0 u](x,t), \tag{3.36}$$

ки дар ин ҷо

$$D'_0(t-x)\setminus D_0(x,t) =$$

$$= \left\{(\xi,\tau): \frac{x+t}{2} \leq \tau \leq \frac{t-x+l}{2}, \qquad x + |t-\tau| \leq \xi \leq \frac{l}{2} - \left|\frac{l}{2} - \tau\right|\right\}.$$

Муносибати (3.36) муодилаи интегралии якҷинсаи навъи Волтерраи ҷинси дуюм мебошад, зеро оператори N_0-и қисми рости он дар фазои $L_2(\Delta_2)$ ба тарви маҳдуд амал мекунад ва дараҷаҳои ин оператор баҳои зеринро қонеъ мегардонанд:

$$\left|\left[N_0{}^k\chi\right]\right|(x,t) \leq \sup_{(x,t)\in\Delta_2}|\chi(x,t)|\left(\frac{\sqrt{l}\|q\|_{2,\Delta_2}\sqrt{t-x}}{2}\right)^k \frac{1}{k!}, k \in N.$$

Аз ин рӯ, ин муодила танҳо ҳалли сифрӣ дорад ва мувофиқи баробарии (3.35) ҳосил мекунем, ки $\mu(t_1) = 0$ барои ҳар як $t_1 \in [0, l]$.

Ба ҳамин монанд, барои нуқтаи ихтиёрии $(x, t) \in \Delta_3$ аз формулаи (3.8) ҳосил мекунем:

$$u(x,t) = \nu(t + x - l) + \frac{1}{2} \iint_{D_0} q(\xi,\tau) u(\xi,\tau) d\xi d\tau,$$

$$D_0(x,t) = \left\{(\xi,\tau): \frac{t + x - l}{2} \le \tau \le t, |\tau + x - t| \le \xi \le \frac{x+t}{2} - \left|\tau - \frac{x+t}{2}\right|\right\}.$$

Бо дарназардошти баробарии дуюми (3.35) ҳангоми $t_2 = t + x - l$ будан ба муносибати зерин меоем:

$$u(x,t) = -\frac{1}{2} \iint_{D''_0(t_2)} q(\xi,\tau) u(\xi,\tau) d\xi d\tau + \frac{1}{2} \iint_{D_0} q(\xi,\tau) u(\xi,\tau) d\xi d\tau,$$

ва ё

$$u(x,t) = -\frac{1}{2} \iint_{D''_0(t+x-l) \setminus D_0(x,t)} q(\xi,\tau) u(\xi,\tau) d\xi d\tau \equiv [N_1 u](x,t), \tag{3.37}$$

ки дар ин ҷо

$$D''_0(t + x - l) \setminus D_0(x,t) =$$
$$= \left\{(\xi,\tau): \frac{l + t - x}{2} \le \tau \le \frac{t+x}{2}, \frac{l}{2} + \left|\tau - \frac{l}{2}\right| \le \xi \le x - |\tau - t|\right\}.$$

Муносибати (3.37) муодилаи интегралии якҷинсаи навъи Волтерраи ҷинси дуюм мебошад, зеро оператори N_1-и қисми рости он дар фазои $L_2(\Delta_3)$ ба таври маҳдуд амал мекунад ва дараҷаҳои ин оператор қонеъкунандаи баҳои зерин мебошанд:

$$\left|[N_1^k \chi]\right|(x,t) \le \sup_{(x,t)\in\Delta_3} |\chi(x,t)| \left(\frac{\sqrt{l}\|q\|_{2,\Delta_3}\sqrt{x + t - l}}{2}\right)^k \frac{1}{k!}, \quad k \in N.$$

Аз ин рӯ, ин муодила танҳо ҳалли сифрӣ дорад ва мувофиқи муносибати (3.35) ҳосил мекунем, ки $\nu(t_2) = 0$ барои дилхоҳ $t_2 \in [0, l]$. Теоремаи 3.3 пурра исбот карда шуд.

Чи тавре ки дар кори [65] муқаррар гардидааст, функсияи

$$\hat{u}(x,t) = \frac{1}{2}\begin{cases} \varphi(x+t)+\varphi(x-t)+\int\limits_{x-t}^{x+t}\psi(\xi)d\xi \ \text{ дар } \Delta_1, \\ \varphi(0)+\varphi(x+t)+\int\limits_{0}^{x+t}\psi(\xi)d\xi \ +\varphi_1(x-t+l)-\varphi_1(l)+\int\limits_{x-t+l}^{l}\psi_1(\xi)d\xi \ \text{ дар } \Delta_2, \\ \varphi(x-t)+\varphi(l)+\int\limits_{x-t}^{l}\psi(\xi)d\xi \ +\varphi_1(x+t-l)-\varphi_1(0)+\int\limits_{0}^{x+t-l}\psi_1(\xi)d\xi \ \text{ дар } \Delta_3, \\ \varphi_1(x+t-l)+\varphi_1(x-t+l)-\int\limits_{x+t-l}^{x-t+l}\psi_1(\xi)d\xi \ \text{ дар } \Delta_4, \end{cases} \tag{3.38}$$

ҳалли ягонаи масъалаи идоракунии сарҳадии III барои муодилаи мавҷии якҷинса $(f(x,t)\equiv 0,\ q(x,t)\equiv 0)$ мебошад, агар доимиҳои A_0 ва B_0, ки тавассути шартҳои ибтидоӣ ва ниҳоӣ муайян карда мешаванд, бо ҳам баробар бошанд, яъне

$$A_0 \equiv \varphi(0)+\varphi(l)+\int\limits_0^l \psi(\xi)d\xi \ = \varphi_1(0)+\varphi_1(l)-\int\limits_0^l \psi_1(\xi)d\xi \ \equiv B_0. \tag{3.39}$$

Айнан ба ҳамин монанд, аз тасдиқи 3.4 бармеояд, ки функсияи

$$u(x,t) = \hat{u}(x,t)+\frac{1}{2}\begin{cases} \int\limits_0^t\int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi,\tau)d\xi d\tau \ \text{ дар } \Delta_1, \\ \int\limits_0^t\int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi,\tau)d\xi d\tau \ -\int\limits_0^t\int\limits_{x-t+\tau}^{\tau} f(\xi,\tau)d\xi d\tau \ \text{ дар } \Delta_2, \\ \int\limits_0^t\int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi,\tau)d\xi d\tau -\int\limits_0^l\int\limits_{l-\tau}^{x+t-\tau} f(\xi,\tau)d\xi d\tau \ \text{ дар } \Delta_3, \\ \int\limits_0^l\int\limits_{x+t-\tau}^{x-t+\tau} f(\xi,\tau)d\xi d\tau \ \text{ дар } \Delta_4 \end{cases} \tag{3.40}$$

ҳалли ягонаи масъалаи идоракунии сарҳадии III барои муодилаи лаппишҳои маҷбурии тор (бо шарти $q(x,t)\equiv 0$) мебошад, агар

$$A_0 - B_0 + \int_0^l \int_\tau^{l-\tau} f(\xi,\tau)d\xi d\tau \ = 0, \qquad (3.41)$$

ки дар он A_0 ва B_0 - доимиҳои қисми чап ва рости баробарии (3.39) мебошанд.

Дар масъалаи идоракунии сарҳадии III барои муодилаи телеграфӣ бо коэффитсиенти тағйирёбанда барои мавҷудияти ҳалли он аз синфи $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ шарти зарурӣ ҳосил мекунем. Дар оянда барои содагардонии ҳисобҳо $f(x,t) \equiv 0$ мегузорем.

Теоремаи 3.4. *Бигзор, $T = l$ ва $q(x,t) \in L_2(Q_T)$ бошад. Он гоҳ, барои мавҷуд будани ҳалли масъалаи идоракунии сарҳадии III аз синфи $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ зарур аст, ки функсияҳои ибтидоӣ ва ниҳоӣ муносибати зеринро қонеъ намоянд:*

$$A_0 + \int_0^{\frac{l}{2}} \int_\tau^{l-\tau} q(\xi,\tau)u_1(\xi,\tau)d\xi d\tau = B_0 + \int_{\frac{l}{2}}^{l} \int_{l-\tau}^{\tau} q(\xi,\tau)u_4(\xi,\tau)d\xi d\tau, \qquad (3.41)$$

ки дар он A_0, B_0 – доимиҳо аз баробарии (3.39) мебошанд. Бузургиҳои $u_1(x,t)$ ва $u_4(x,t)$ аз рӯйи формулаҳои зерин ҳисоб карда мешаванд:

$$u_1(x,t) = \hat{u}_1(x,t) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[T_1^k \hat{u}_1\right](x,t),$$

$$\hat{u}_1(x,t) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x+t) + \varphi(x-t) + \int_{x-t}^{x+t} \psi(\xi)d\xi\right],$$

$$[T_1\hat{u}_1](x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} q(\xi,\tau)\hat{u}_1(\xi,\tau)d\xi\,;$$

$$u_4(x,t) = \hat{u}_4(x,t) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[T_4^k \hat{u}_4\right](x,t),$$

$$\hat{u}_4(x,t) = \frac{1}{2}\left[\varphi_1(x+t-l) + \varphi_1(x-t+l) - \int_{x+t-l}^{x-t+l} \psi_1(\xi)d\xi\right],$$

$$[T_4\hat{u}_4](x,t) = \frac{1}{2}\int_{t}^{l} d\tau \int_{x+t-\tau}^{x-t+\tau} q(\xi,\tau)\hat{u}_4(\xi,\tau)d\xi \,.$$

Теоремаи 3.4 ба монанди теоремаи 2.4-и банди 2.3-и боби 2 исбот карда мешавад.

Теоремаи 3.5. *Бигзор,* $T = l$ *ва* $q(x,t) \in L_2(Q_T)$ *бошад. Он гоҳ муносибати (3.41) шарти кифоягӣ низ барои мавҷудияти ҳалли ягонаи масъалаи идоракунии сарҳадии III аз синфи* $\widehat{W}_2^1(Q_l)$ *мебошад.*

Исботи теоремаи 3.5 пурра исботи теоремаи 2.5-и банди 2.3-и боби 2-ро такрор мекунад. Аз ин рӯ, онро намеорем.

Эзоҳи 3.4. «Аз раванди исботи теоремаи 3.5 бармеояд, ки барои ҳалли масъалаи идоракунии сарҳадии III баҳои априории зерин иҷро мешавад:

$$\|u(x,t)\|_{\widehat{W}_2^1(Q_l)} \le L\big(\|\varphi\|_{W_2^1[0,l]} + \|\varphi_1\|_{W_2^1[0,l]} + \|\psi\|_{L_2[0,l]} + \|\psi_1\|_{L_2[0,l]}\big),$$

ки дар он доимии L ба нормаи функсияҳое, ки ба масъала дохил мешаванд, вобаста нест. Ин баҳо далели устувории ҳалли бадастомада нисбат ба шартҳои ибтидоӣ ва ниҳоӣ мебошад.

Илова бар ин, агар $\|q\|_2 \to 0$, он гоҳ $\|\mu - \hat{\mu}\|_{L_2[0,T]} \to 0$ ва $\|\nu - \hat{\nu}\|_{W_2^1[0,T]} \to 0$, ки дар онҳо $\hat{\mu}(t) = \hat{u}_x(0,t), \hat{\nu}(t) = \hat{u}(l,t)$. Ин аз он шаҳодат медиҳад, ки ҳалли масъалаи идоракунии сарҳадии III нисбат ба ошӯби аддитивии $q(x,t)u(x,t)$-и оператори мавҷӣ дар муодилаи (3.1) бо коэффитсиенти бо квадрат замшавандаи $q(x,t)$ регулярӣ аст» [24].

Эзоҳи 3.5. Таҳлили натиҷаҳои бобҳои 2 ва 3 нишон медиҳад, ки дар ҳолати $T = l$ шакли умумии ҳалли $u(x,t)$-и масъалаи идоракунии сарҳадӣ барои муодилаи телеграфӣ бо коэффитсиенти тағйирёбанда, ки раванди баррасишавандаро аз ҳолати ибтидоии ихтиёрии $\{u(x,0) = \varphi(x)$, $u_t(x,0) = \psi(x)\}$ ба ҳолати ниҳоии ихтиёрии $\{u(x,l) = \varphi_1(x)$, $u_t(x,l) = \psi_1(x)\}$ мегузаронад, инчунин шартҳои зарурӣ ва кифоягии мавҷудияти чунин идоракунӣ, ба намуди идоракунии сарҳадӣ вобаста нестанд. Яъне, муҳим нест, ки идоракунӣ: бо ҷойивазкунӣ дар сарҳади чап ва қувваи чандирӣ дар сарҳади рост дода шавад: $\{u(0,t)=\mu(t),\, u_x(l,t)=\nu(t)\}$, ё бо қувваи чандирӣ дар сарҳади чап ва ҷойивазкунӣ дар сарҳади рост: $\{u_x(0,t)=\mu(t),\, u(l,t)=\nu(t)\}$. Бо вуҷуди ин, қиматҳои худи идоракуниҳои сарҳадӣ аз якдигар фарқ мекунанд. Онҳо тавассути ҳалли муодилаҳои интегралии дученакаи навъи Волтерра ифода карда мешаванд. Ин воқеият яке аз натиҷаҳои асосии кори диссертатсионӣ ба шумор меравад.

3.4. Сохтани идоракуниҳои сарҳадии оптималӣ дар фосилаи вақти ихтиёрии ба қадри кофӣ калон барои равандҳое, ки бо муодилаи лаппишҳои маҷбурии тор ифода мешаванд

Дар банди 2.4-и боби 2 қайд шуда буд, ки ҳангоми $T>l$ масъалаи идоракунии сарҳадӣ дорои шумораи беохири ҳалҳо мебошад. Аз ин рӯ, дар ин маврид масъалаи оптимизатсияи идоракунии сарҳадӣ ба миён меояд. Он дар ёфтани чунин функсияҳои $\mu(t)\in L_2[0,T], \nu(t)\in W_2^1[0,T]$ ифода меёбад, ки бо назардошти шартҳои алоқа, ки аз иҷрои шартҳои ибтидоӣ ва ниҳоӣ бармеоянд, ба интеграли энергияи сарҳадӣ қимати хурдтарин медиҳанд. Дар ин банд мо ба ҳалли ҳамин масъала машғул мешавем. Аниқтараш, идоракуниҳои сарҳадии оптималӣ дар шакли аналитикии ошкор пешниҳод карда мешаванд, ки бо маънои масъалаи гузошташуда муайян гардидаанд. Ин идоракуниҳо дар сарҳади чапи тор $x=0$ тавассути қувваи чандирӣ ва дар сарҳади рости тор $x=l$ тавассути ҷойивазкунӣ амалӣ мегарданд ва барои фосилаи вақти ихтиёрии ба қадри кофӣ калони $[0,T]$ равандҳои лаппишҳои маҷбурии торро аз ҳолати ибтидоии ихтиёрӣ ба ҳолати ниҳоии пешакӣ додашуда меоранд.

Натиҷаи асосии ин банд теоремаи 3.6 мебошад.

Теоремаи 3.6. *Бигзор, дар масъалаи идоракунии сарҳадии III* $T = 2ln + \Delta$, *ки дар он* $n \in N$, $\Delta \in [0; 2l]$ *ва* $q(x,t) \equiv 0$ *бошад. Он гоҳ идоракуниҳои сарҳадии ягонаи* $u_x(0,t) = \mu(t) \in L_2[0,T]$, $u(l,t) = \nu(t) \in W_2^1[0,T]$ *мавҷуданд, ки системаи лаппиширо аз ҳолати ибтидоии (3.3) ба ҳолати ниҳоии (3.5) меоранд ва ҳамзамон ба интеграли энергияи сарҳадии зерин қимати хурдтарин медиҳанд:*

$$\int_0^T \{[\mu(t)]^2 + [\nu'(t)]^2\} dt. \tag{3.41}$$

Ин идоракуниҳои сарҳадӣ барои ҳамаи $0 \leq t \leq \Delta$ *ва* $m = \overline{0,n}$ *ва барои ҳамаи* $\Delta \leq t \leq 2l$ ва $m = \overline{0,n-1}$ *бо формулаҳои зерин муайян карда мешаванд:*

барои $0 \leq \Delta \leq l$:

$$\mu(2lm + t) = F_1(t), \tag{3.42}$$

$$\nu(2lm + t) = \varphi(l) + m\int_0^{2l} F_2(\eta)d\eta + \int_0^t F_2(\eta)d\eta, \tag{3.43}$$

ки дар ин ҷо

$$F_1(t) = \begin{cases} (-1)^{m+1} \cdot \dfrac{A_2(t)}{2n+1} + (-1)^m \cdot \dfrac{\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m C}{2n+1}, \quad t \in [0;\Delta]; \\ (-1)^m \cdot \dfrac{A_3(t)}{2n} + (-1)^{m+1} \cdot \dfrac{\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m C}{2n}, t \in [\Delta; l]; \\ (-1)^{m+1} \cdot \dfrac{A_1(t-l)}{2n+1} + (-1)^m \cdot \dfrac{\sum_{m=0}^{n}(-1)^m C}{2n+1}, t \in [l; l+\Delta]; \\ (-1)^{m+1} \cdot \dfrac{A_4(t-l)}{2n} + (-1)^m \cdot \dfrac{\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m C}{2n}, t \in [l+\Delta; 2l]; \end{cases} \tag{3.44}$$

$$F_2(t) = \begin{cases} (-1)^m \cdot \dfrac{A_1(t)}{2n+1} + (-1)^{m+1} \cdot \dfrac{\sum_{m=0}^{n}(-1)^m C}{2n+1} + C, \quad t \in [0;\Delta]; \\ (-1)^m \cdot \dfrac{A_4(t)}{2n} + (-1)^{m+1} \cdot \dfrac{\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m C}{2n} + C, \quad t \in [\Delta; l]; \\ (-1)^m \cdot \dfrac{A_2(t-l)}{2n+1} + (-1)^m \cdot \dfrac{\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m C}{2n+1} + C, t \in [l; l+\Delta]; \\ (-1)^m \cdot \dfrac{A_3(t-l)}{2n} + (-1)^{m+1} \cdot \dfrac{\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m C}{2n} + C, t \in [l+\Delta; 2l]; \end{cases} \tag{3.45}$$

$$A_1(t) = \frac{1}{2}\Big[\varphi_1'(t-\Delta+l) - \varphi'(l-t) + \psi_1(t-\Delta+l) + \psi(l-t) -$$

$$\left. - \int_l^{2ln+\Delta} f(t+2ln+l-\tau,\tau)d\tau + \int_0^l f(l-t+\tau,\tau)d\tau \right]; \tag{3.46}$$

$$A_2(t) = \frac{1}{2}\Big[\varphi_1'(\Delta-t) + \varphi'(t) - \psi_1(\Delta-t) + \psi(t) +$$

$$\left. + \int_l^{2ln+t} f(\tau-t-2ln,\tau)d\tau + \int_0^l f(l-t+\tau,\tau)d\tau \right]; \tag{3.47}$$

$$A_3(t) = \frac{1}{2}\Big[\varphi_1'(t-\Delta) + \varphi'(t) + \psi_1(t-\Delta) + \psi(t) -$$

$$\left. - \int_l^{2ln+\Delta} f(t+2ln-\tau,\tau)d\tau + \int_0^l f(t-\tau,\tau)d\tau \right]; \tag{3.48}$$

$$A_4(t) = \frac{1}{2}\Big[\varphi_1'(t+\Delta-t) - \varphi'(l-t) - \psi_1(l+\Delta-t) + \psi(l-t) +$$

$$\left. + \int_l^{2ln+\Delta} f(l-2ln-t+\tau,\tau)d\tau + \int_0^l f(l-t+\tau,\tau)d\tau \right]; \tag{3.49}$$

$$C = \begin{cases} \dfrac{(4s-2)[\varphi_1(l)-\varphi(l)] - \int_\Delta^l A_4(t)dt}{8s^2 l - 8sl + 4s\Delta - \Delta + l} & \text{барои } n = 2s-1, \\ \dfrac{(4s+1)[\varphi_1(l)-\varphi(l)] - \int_0^\Delta A_1(t)dt}{8s^2\Delta + 4s\Delta + 2sl} & \text{барои } n = 2s; \end{cases} \tag{3.50}$$

барои $l \le \Delta \le 2l$:

$$\mu(2lm+t) = F_3(t), \tag{3.51}$$

$$\nu(2lm+t) = \varphi(l) + m\int_0^{2l} F_4(\eta)d\eta + \int_0^t F_4(\eta)d\eta, \tag{3.52}$$

ки дар ин ҷо

$$F_3(t)=\begin{cases}(-1)^{m+1}\cdot\dfrac{B_1(t)}{2n+2}+(-1)^m\cdot\dfrac{\sum_{m=0}^{n}(-1)^m C_1}{2n+2}, t\in[0;\Delta-l];\\ (-1)^{m+1}\cdot\dfrac{B_4(t)}{2n+1}+(-1)^m\cdot\dfrac{\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m C_1}{2n+1}, t\in[\Delta-l;l];\\ (-1)^{m+1}\cdot\dfrac{B_2(t-l)}{2n+2}+(-1)^m\cdot\dfrac{\sum_{m=0}^{n}(-1)^m C_1}{2n+2}, t\in[l;\Delta];\\ (-1)^{m}\cdot\dfrac{B_3(t-l)}{2n+1}+(-1)^m\cdot\dfrac{\sum_{m=0}^{n}(-1)^m C_1}{2n+1}, t\in[\Delta;2l];\end{cases}\tag{3.53}$$

$$F_4(t)=\begin{cases}(-1)^{m}\cdot\dfrac{B_2(t)}{2n+2}+(-1)^{m+1}\cdot\dfrac{\sum_{m=0}^{n}(-1)^m C_1}{2n+2}+C_1,\quad t\in[0;\Delta-l];\\ (-1)^{m+1}\cdot\dfrac{B_3(t)}{2n+1}+(-1)^{m+1}\cdot\dfrac{\sum_{m=0}^{n}(-1)^m C_1}{2n+1}+C_1, t\in[\Delta-l;l];\\ (-1)^{m}\cdot\dfrac{B_1(t-l)}{2n+2}+(-1)^{m+1}\cdot\dfrac{\sum_{m=0}^{n}(-1)^m C_1}{2n+2}+C_1, t\in[l;\Delta];\\ (-1)^{m}\cdot\dfrac{B_4(t-l)}{2n+1}+(-1)^{m+1}\cdot\dfrac{\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m C_1}{2n+1}+C_1, t\in[\Delta;2l];\end{cases}\tag{3.54}$$

$$B_1(t)=\frac{1}{2}\Bigg[\varphi_1'(t-\Delta+2l)+\varphi'(t)+\psi_1(t-\Delta+2l)+\psi(t)-$$
$$-\int\limits_{l}^{2ln+\Delta} f(t+2ln+2l-\tau,\tau)d\tau+\int\limits_{0}^{l} f(t-\tau,\tau)d\tau\Bigg];\tag{3.55}$$

$$B_2(t)=\frac{1}{2}\Bigg[\varphi_1'(\Delta-l-t)+\varphi'(l-t)-\psi_1(\Delta-l-t)-\psi(l-t)+$$
$$+\int\limits_{l}^{2ln+\Delta} f(\tau-l-2ln-t,\tau)d\tau-\int\limits_{0}^{l} f(l-t+\tau,\tau)d\tau\Bigg];\tag{3.56}$$

$$B_3(t)=\frac{1}{2}\Bigg[\varphi_1'(t-\Delta+l)+\varphi'(l-t)+\psi_1(t-\Delta+l)-\psi(l-t)-$$
$$-\int\limits_{l}^{2ln+\Delta} f(t+2ln+l-\tau,\tau)d\tau-\int\limits_{0}^{l} f(l-t+\tau,\tau)d\tau\Bigg];\tag{3.57}$$

$$B_4(t)=\frac{1}{2}\Bigg[\varphi_1'(\Delta-t)+\varphi'(t)-\psi_1(\Delta-t)+\psi(t)+$$
$$+\int\limits_{l}^{2ln+\Delta} f(\tau-t-2ln,\tau)d\tau+\int\limits_{0}^{l} f(t-\tau,\tau)d\tau\Bigg];\tag{3.58}$$

$$C_1 = \begin{cases} \dfrac{4s[\varphi_1(l) - \varphi(l)] - \int_0^{\Delta - l} B_2(t)dt}{8s^2 l + 4s\Delta - 4sl} & \text{барои } n = 2s - 1, \\ \dfrac{(4s+1)[\varphi_1(l) - \varphi(l)] - \int_{\Delta - l}^{l} B_3(t)dt}{8s^2 l + 4s\Delta + 2sl + 2\Delta - 2l} & \text{барои } n = 2s. \end{cases} \tag{3.59}$$

Исбот. Функсияи $f(x,t)$-ро нисбат ба тағйирёбандаи якум ба таври ҷуфт нисбат ба нуқтаи $x = 0$ ба порчаи $[-l, 0]$ ва ба таври тоқ нисбат ба нуқтаи $x = l$ ба порчаи $[l; 2l]$ идома медиҳем. Дар натиҷа ҳосил мегардад, ки $f(x,t) \in L_2((-l \le x \le 2l) \times (0 \le t \le T))$.

Акнун барои ҳар гуна $T > l$ функсияи (2.78)-ро аз банди 2.4-и боби 2 баррасӣ менамоем. Дар идома ба мо леммаи зерин лозим мешавад.

Леммаи 3.2. *Барои ҳар гуна $T > l$ функсияи (2.78) ҳалли ягонаи масъалаи омехта барои муодилаи мавҷии ғайриякҷинсаи $\tilde{u}_{tt}(x,t) - \tilde{u}_{xx}(x,t) = f(x,t)$ аз синфи $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ бо шартҳои ибтидоии*

$$\tilde{u}(x,0) = \varphi(x) - \frac{1}{2}\int_0^l \int_{x-\tau}^{x+\tau} f(\xi,\tau)d\xi d\tau,$$

$$\tilde{u}_t(x,0) = \psi(x) + \frac{1}{2}\int_0^l [f(x+\tau,\tau) + f(x-\tau,\tau)]d\tau$$

ва бо шартҳои сарҳадии $\tilde{u}_x(0,t) = \tilde{\mu}(t), \tilde{u}(l,t) = \tilde{\nu}(t)$, ки дар онҳо

$$\tilde{\mu}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left[\varphi'(t) + \psi(t) + \displaystyle\int_0^l f(t-\tau,\tau)d\tau\right], & 0 \le t \le l, \\ 0, & l \le t \le T; \end{cases} \tag{3.60}$$

$$\tilde{\nu}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left[\varphi(l) + \varphi(l-t) + \displaystyle\int_{l-t}^{l} \psi(\xi)d\xi + \int_0^l \int_{l-t+\tau}^{l-\tau} f(\xi,\tau)d\xi d\tau\right], 0 \le t \le l, \\ \dfrac{1}{2}\left[\varphi(l) + \varphi(0) + \displaystyle\int_0^l \psi(\xi)d\xi + \int_0^l \int_{\tau}^{l-\tau} f(\xi,\tau)d\xi d\tau\right], \quad l \le t \le T \end{cases} \tag{3.61}$$

мебошад.

Леммаи 3.2 комилан ба мисли леммаи 2.2-и банди 2.4-и боби 2 исбот карда мешавад.

Бигузор $u(x,t)$ ҳалли умумишудаи масъалаи омехтаи асосӣ аз синфи $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ барои муодилаи (3.1) ҳангоми $q(x,t)\equiv 0$ бо шартҳои ибтидоии (3.3) ва шартҳои сарҳадии (3.2) бошад, ки оптимизатсия маҳз барои он гузаронида мешавад ва $\tilde{u}(x,t)$ функсияи (2.78) аст. Он гоҳ $\hat{u}(x,t)=u(x,t)-\tilde{u}(x,t)$ ҳалли умумишудаи ягонаи масъалаи омехта аз синфи $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ барои муодилаи мавҷии якҷинсаи

$$\hat{u}_{tt}(x,t)-\hat{u}_{xx}(x,t)=0$$

бо шартҳои ибтидоии

$$\hat{u}(x,0)=\frac{1}{2}\int_0^l\int_{x-\tau}^{x+\tau}f(\xi,\tau)d\xi d\tau\,,\hat{u}_t(x,0)=-\frac{1}{2}\int_0^l[f(x+\tau,\tau)+f(x-\tau,\tau)]d\tau$$

ва бо шартҳои сарҳадии $\hat{\mu}(t)=\mu(t)-\tilde{\mu}(t),\ \hat{\nu}(t)=\nu(t)-\tilde{\nu}(t)$ мебошад. Қайд менамоем, ки дар айни ҳол $\hat{\nu}(0)=0$.

Барои муайян намудани шартҳои алоқа, ки аз иҷрои шартҳои ибтидоии додашудаи (3.3) ва шартҳои ниҳоии додашудаи (3.5) бармеоянд, ба мо леммаи 3.3 лозим мешавад.

Леммаи 3.3. *Барои ҳар гуна* $T\leq 2l(n+1),n\in N,$ *функсияи* $\hat{u}(x,t)$ *бо баробарии зерин муайян карда мешавад:*

$$\hat{u}(x,t)=-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_0^{t-x-2kl}\underline{\hat{\mu}}(\tau)d\tau-\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k\int_0^{t+x-2kl}\underline{\hat{\mu}}(\tau)d\tau+$$

$$+\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\underline{\hat{\nu}}(t+x-2kl-l)-\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k\underline{\hat{\nu}}(t-x-2kl+l)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^l\int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau}f(\xi,\tau)d\xi d\tau, \tag{3.62}$$

ки дар он рамзҳои $\underline{\hat{\mu}}$ ва $\underline{\hat{\nu}}$ функсияҳоеро ифода менамоянд, ки бо $\hat{\mu}$ ва $\hat{\nu}$ барои $t \geq 0$ мувофиқат мекунанд ва барои $t < 0$ ба сифр баробаранд.

Барои исботи леммаи 3.3 ҳамаи муҳокимаҳоеро, ки ҳангоми исботи леммаи 2.3 оварда шудаанд, такрор кардан лозим аст.

Бо такя ба баробарии (3.62), акнун ба муайян намудани шартҳои алоқа, ки аз иҷрои шартҳои ибтидоии додашудаи (3.3) ва шартҳои ниҳоии додашудаи (3.5) бармеоянд, мегузарем.

Азбаски функсияи $\tilde{u}(x,t)$ шартҳои ниҳоии

$$\tilde{u}(x,T) = C_0 + \frac{1}{2}\int_0^T \int_{x-T+\tau}^{x+T-\tau} f(\xi,\tau)d\xi d\tau,$$

$$C_0 = \frac{1}{2}\left[f(0) + f(l) + \int_0^l \psi(\xi)d\xi + \int_0^l \int_\tau^{l-\tau} f(\xi,\tau)d\xi d\tau\right],$$

$$\tilde{u}_t(x,T) = \frac{1}{2}\int_0^T [f(x+T-\tau,\tau) + f(x-T+\tau,\tau)]d\tau$$

ва функсияи $u(x,t)$ шартҳои ниҳоии (3.5)-ро қонеъ мегардонад, пас функсияи $\hat{u}(x,t)$ шартҳои ниҳоии зеринро қонеъ менамояд:

$$\hat{u}(x,T) = \varphi_1(x) - C_0 - \frac{1}{2}\int_0^T \int_{x-T+\tau}^{x+T-\tau} f(\xi,\tau)d\xi d\tau,$$

$$\hat{u}_t(x,T) = \psi_1(x) - \frac{1}{2}\int_0^T [f(x+T-\tau,\tau) + f(x-T+\tau,\tau)]d\tau. \tag{3.63}$$

Аз баробарии (3.62) нисбат ба x ва нисбат ба t ҳосила гирифта, баробариҳои зеринро ҳосил мекунем:

$$\hat{u}_x(x,t) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \underline{\hat{\mu}}(t-x-2kl) - \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k \underline{\hat{\mu}}(t+x-2kl) +$$

$$+\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\underline{\hat{\nu}}'(t+x-2kl-l)+\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k\underline{\hat{\nu}}'(t-x-2kl+l)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^l[f(x+t-\tau,\tau)-f(x-t+\tau,\tau)]d\tau, \qquad (3.64)$$

$$\hat{u}_t(x,t)=-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\underline{\hat{\mu}}(t-x-2kl)-\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k\underline{\hat{\mu}}(t+x-2kl)+$$

$$+\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\underline{\hat{\nu}}'(t+x-2kl-l)-\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k\underline{\hat{\nu}}'(t-x-2kl+l)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^l[f(x+t-\tau,\tau)+f(x-t+\tau,\tau)]d\tau. \qquad (3.65)$$

Нисфи ҳосили ҷамъ ва нисфи ҳосили фарқи муносибатҳои (3.64) ва (3.65)-ро гирифта, ба муносибатҳои ҳосилшуда $t=T=2ln+\Delta$, ки дар он $n\in N$ ва Δ адади ихтиёрӣ аз порчаи $[0;2l]$ мебошад, гузошта, ҳамчунин бо истифода аз шартҳои ниҳоии (3.63), мо ба ду шарти алоқаи зерин меоем:

$$-\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k\underline{\hat{\mu}}[2l(n-k)+\Delta+x]+\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\underline{\hat{\nu}}'[2l(n-k)+\Delta+x-l]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\varphi_1'(x)+\psi_1(x)-\int_l^{2ln+\Delta}f(x+2ln+\Delta-\tau,\tau)d\tau\right], \qquad (3.66)$$

$$-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\underline{\hat{\mu}}[2l(n-k)+\Delta-x]+\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k\underline{\hat{\nu}}'[2l(n-k)+\Delta-x+l]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\varphi_1'(x)-\psi_1(x)+\int_l^{2ln+\Delta}f(x-2ln-\Delta+\tau,\tau)d\tau\right], \qquad (3.67)$$

ки онҳо баробарии унсурҳои синфи $L_2[0,l]$ мебошанд.

Баъдан ба мо лозим меояд, ки ду ҳолати зеринро алоҳида баррасӣ намоем: 1) $0\le\Delta\le l$ ва 2) $l\le\Delta\le 2l$.

Аз баррасии ҳолати якум, яъне $0 \leq \Delta \leq l$ шуруъ мекунем. Бо назардошти он ки $\underline{\hat{\mu}}$ ва $\underline{\hat{v}'}$ ҳангоми $t < 0$ ба сифр баробар мешаванд ва ҳангоми $t \geq 0$ мутаносибан бо $\hat{\mu}'$ ва $\hat{v}$ мувофиқат мекунанд, аз формулаи (3.66) ду шарти зеринро ба даст меорем:

$$-\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\hat{\mu}[2l(n-k)+\Delta+x]+\sum_{k=0}^{n}(-1)^k[\hat{v}'(2l(n-k)+\Delta+x-l)]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\varphi_1'(x)+\psi_1(x)-\int_{l}^{2ln+\Delta}f(x+2ln+\Delta-\tau,\tau)d\tau\right],\ \ x\in[l-\Delta,l]; \quad (3.68)$$

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\hat{\mu}[2l(n-k)+\Delta+x]+\sum_{k=0}^{n}(-1)^k[\hat{v}'(2l(n-k)+\Delta+x-l)]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\varphi_1'(x)+\psi_1(x)-\int_{l}^{2ln+\Delta}f(x+2ln+\Delta-\tau,\tau)d\tau\right],\ \ x\in[0,l-\Delta] \quad (3.69)$$

ва аз (3.67) бошад, ду шарти зерин ҳосил мешавад:

$$-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\hat{\mu}[2l(n-k)+\Delta-x]+\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k\hat{v}'[2l(n-k)+\Delta-x+l]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\varphi_1'(x)-\psi_1(x)+\int_{l}^{2ln+\Delta}f(x-2ln-\Delta+\tau,\tau)d\tau\right],\ \ x\in[0,\Delta]; \quad (3.70)$$

$$-\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\hat{\mu}[2l(n-k)+\Delta-x]+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\hat{v}'[2l(n-k)+\Delta-x+l]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\varphi_1'(x)-\psi_1(x)+\int_{l}^{2ln+\Delta}f(x-2ln-\Delta+\tau,\tau)d\tau\right],\ \ x\in[\Delta,l]. \quad (3.71)$$

Агар дар (3.68) гузориши $t=x+\Delta-l$, $m=n-k$ ва дар (3.70) гузориши $t=\Delta-x$, $m=n-k$ - ро иҷро кунем, барои $t\in[\Delta,l]$ ду шарти алоқаи зеринро ба даст меорем:

$$-\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m\hat{\mu}[l(2m+1)+t]+\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\hat{\nu}'(2lm+t)=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\varphi_1'(t-\Delta+l)+\psi_1(t-\Delta+l)-\int_l^{2ln+\Delta}f(t+2ln+l-\tau,\tau)d\tau\right], \quad (3.72)$$

$$-\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\hat{\mu}(2lm+t)+\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m\hat{\nu}'[l(2m+1)+t]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\varphi_1'(\Delta-t)-\psi_1(\Delta-t)+\int_l^{2ln+\Delta}f(\tau-t-2ln,\tau)d\tau\right]. \quad (3.73)$$

Ба таври монанд, агар дар (3.69) гузориши $t=x+\Delta$ ва $m=n-k$ - ро дар суммаи аввал ва $m=n-k-1$ - ро дар суммаи дуюм, инчунин дар (3.71) гузориши $t=l+\Delta-x$, $m=(n-k-1)$ - ро дар суммаи аввал ва $m=n$ - ро дар суммаи дуюм ҷорӣ намоем, барои $t\in[\Delta,l]$ ду шарти зерини алоқаро ҳосил мекунем:

$$\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m\hat{\mu}(2lm+t)+\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m\hat{\nu}'[l(2m+1)+t]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\varphi_1'(t-\Delta)+\psi_1(t-\Delta)-\int_l^{2ln+\Delta}f(t+2ln-\tau,\tau)d\tau\right], \quad (3.74)$$

$$-\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m\hat{\mu}[l(2m+1)+t]+\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m\hat{\nu}'(2lm+t)=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\varphi_1'(l+\Delta-t)-\psi_1(l+\Delta-t)+\int_l^{2ln+\Delta}f(l-2ln-t+\tau,\tau)d\tau\right]. \quad (3.75)$$

Муносибатҳои (3.72) – (3.75) шартҳои алоқаро ба воситаи $\hat{\mu}(t)$ ва $\hat{\nu}'(t)$ ифода мекунанд. Барои он ки шартҳои алоқаро ба воситаи $\mu(t)$ ва $\nu'(t)$ ифода намоем, аз муносибатҳои $\hat{\mu}'(t)=\mu'(t)-\tilde{\mu}'(t)$, $\hat{\nu}(t)=\nu(t)-\tilde{\nu}(t)$, инчунин аз шакли ошкори функсияҳои $\tilde{\mu}(t), \tilde{\nu}(t)$, ки бо формулаҳои (3.60), (3.61) дода шудаанд, истифода мебарем. Дар натиҷа, барои ҳолати якум, яъне $0 \leq \Delta \leq l$, шартҳои зерини алоқаро ҳосил мекунем:

$$-\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m \mu[l(2m+1)+t] + \sum_{m=0}^{n}(-1)^m \nu'(2lm+t) = A_1(t),$$

$$-\sum_{m=0}^{n}(-1)^m \mu(2lm+t) + \sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m \nu'[l(2m+1)+t] = A_2(t)$$

$$\text{барои } t \in [0, \Delta], \quad (3.76)$$

$$\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m \mu(2lm+t) + \sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m \nu'[l(2m+1)+t] = A_3(t),$$

$$-\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m \mu[l(2m+1)+t] + \sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m \nu'(2lm+t) = A_4(t)$$

$$\text{барои } t \in [\Delta, l], \qquad (3.77)$$

ки дар онҳо $A_i(t), i = \overline{1,4}$ ба воситаи муносибатҳои (3.46) – (3.49) муайян карда мешаванд.

Ба ҳамин тарз, ҳолати дуюм $l \leq \Delta \leq 2l$ низ баррасӣ мешавад. Дар ин ҳолат аз (3.66) ду шарти зерин ба даст меоянд:

$$-\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k \hat{\mu}[2l(n-k)+\Delta+x] + \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \hat{\nu}'[2l(n-k)+\Delta+x-l] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\varphi_1'(x) + \psi_1(x) - \int_l^{2ln+\Delta} f(x+2ln+\Delta-\tau, \tau)d\tau\right] \text{ барои } x \in [2l-\Delta, l], (3.78)$$

$$-\sum_{k=1}^{n}(-1)^k \hat{\mu}[2l(n-k)+\Delta+x] + \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \hat{\nu}'[2l(n-k)+\Delta+x-l] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\varphi_1'(x) + \psi_1(x) - \int_l^{2ln+\Delta} f(x+2ln+\Delta-\tau, \tau)d\tau\right] \text{ барои } x \in [0, 2l-\Delta] \ (3.79)$$

ва аз (3.67) бошад, ду шарти зерин ҳосил мешавад:

$$-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\hat{\mu}[2l(n-k)+\Delta-x]+\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k\hat{\nu}'[2l(n-k)+\Delta-x+l]=$$
$$=\frac{1}{2}\left[\varphi_1'(x)-\psi_1(x)+\int_l^{2ln+\Delta}f(x-2ln-\Delta+\tau,\tau)d\tau\right], x\in[0,\Delta-l], \quad (3.80)$$

$$-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\hat{\mu}[2l(n-k)+\Delta-x]+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\hat{\nu}'[2l(n-k)+\Delta-x+l]=$$
$$=\frac{1}{2}\left[\varphi_1'(x)-\psi_1(x)+\int_l^{2ln+\Delta}f(x-2ln-\Delta+\tau,\tau)d\tau\right],\ \ x\in[l-\Delta,l]. \quad (3.81)$$

Бо анҷом додани ивазкунии $t=x+\Delta-2l,\ \ m=n-k+1$ дар суммаи якум ва $m=n-k$ дар суммаи дуюми формулаи (3.78), инчунин бо анҷом додани ивазкунии $t=\Delta-l-x$, $m=n-k$ дар суммаи якум ва $m=n-k+1$ дар суммаи дуюми формулаи (3.80), мо ҳангоми $t\in[0,\Delta-l]$ ду шарти зерини алоқаро ҳосил мекунем:

$$-\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\hat{\mu}(2lm+t)+\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\hat{\nu}'[l(2m+1)+t]=$$
$$=\frac{1}{2}\left[\varphi_1'(t-\Delta+2l)+\psi_1(t-\Delta+2l)-\int_l^{2ln+\Delta}f(t+2ln+2l-\tau,\tau)d\tau\right], \quad (3.82)$$

$$-\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\hat{\mu}[l(2m+1)+t]+\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\hat{\nu}'(2lm+t)=$$
$$=\frac{1}{2}\left[\varphi_1'(\Delta-l-t)-\psi_1(\Delta-l-t)+\int_l^{2ln+\Delta}f(\tau-l-2ln-t,\tau)d\tau\right]. \quad (3.83)$$

Ба ҳамин монанд, бо ивазкунии $t=x+\Delta-l$, $m=n-k$ дар формулаи (3.79) ва ивазкунии $t=\Delta-x$, $m=n-k$ дар формулаи (3.81), мо барои $t\in[\Delta-l,l]$ ду шарти зерини алоқаро ба даст меорем:

$$-\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m\hat{\mu}[l(2m+1)+t]+\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\hat{\nu}'(2lm+t)=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\varphi_1'(t-\Delta+l)+\psi_1(t-\Delta+l)-\int_{l}^{2ln+\Delta}f(t+2ln+l-\tau,\tau)d\tau\right],\quad(3.84)$$

$$-\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\hat{\mu}(2lm+t)+\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m\hat{\nu}'[l(2m+1)+t]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\varphi_1'(\Delta-t)-\psi_1(\Delta-t)+\int_{l}^{2ln+\Delta}f(\tau-t-2ln,\tau)d\tau\right].\qquad(3.85)$$

Дар баробариҳои (3.82)-(3.85) пас аз гузариш аз $\hat{\mu}(t)$ ва $\hat{\nu}'(t)$ ба $\mu(t)$ ва $\nu'(t)$, барои ҳолати дуюм $l\le\Delta\le 2l$ шартҳои зерини алоқаро ҳосил мекунем:

$$-\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\mu(2lm+t)+\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\nu'[l(2m+1)+t]=B_1(t)\,,$$

$$-\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\mu[l(2m+1)+t]+\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\nu'(2lm+t)=B_2(t)$$

ҳангоми $t\in[0,\Delta-l]$, (3.86)

$$-\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m\mu[l(2m+1)+t]+\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\nu'(2lm+t)=B_3(t)\,,$$

$$-\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\mu[2lm+t]+\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m\nu'[l(2m+1)+t]=B_4(t)$$

ҳангоми $t\in[\Delta-l,l]$, (3.87)

ки дар онҳо $B_i(t), i=\overline{1,4}$ бо формулаҳои (3.55)-(3.58) муайян карда мешаванд.

Акнун ба ёфтани идоракуниҳои сарҳадии оптималии $\mu(t)$ ва $\nu(t)$ мегузарем. Барои ҳолати якум, яъне $0\le\Delta\le l$, масъалаи оптимизатсия ба ёфтани минимуми интеграли энергияи сарҳадии (3.41) оварда мешавад, ки онро дар шакли зерин навиштан мумкин аст:

$$\int_0^T \{[\mu(t)]^2 + [\nu'(t)]^2\}dt = \int_0^\Delta \sum_{m=0}^{2n} \{[\mu(lm+t)]^2 + [\nu'(lm+t)]^2\}dt +$$

$$+\int_\Delta^l \sum_{m=0}^{2n-1} \{[\mu(lm+t)]^2 + [\nu'(lm+t)]^2\}dt \tag{3.88}$$

бо шартҳои алоқаи (3.76), (3.77) ва шарти мувофиқати

$$\int_0^T \nu'(t)dt = \int_0^\Delta \sum_{m=0}^{2n} \nu'(lm+t)dt + \int_\Delta^l \sum_{m=0}^{2n-1} \nu'(lm+t)dt = \varphi_1(l) - \varphi(l), \tag{3.89}$$

ки аз (3.4) ва (3.6) бармеояд.

Ба ҳамин монанд, барои ҳолати дуюм, яъне $l \leq \Delta \leq 2l$, масъалаи оптимизатсия ба ёфтани минимуми интеграли энергияи сарҳадии (3.41) оварда мешавад, ки дар ин ҳолат онро дар шакли зерин менависем:

$$\int_0^T \{[\mu(t)]^2 + [\nu'(t)]^2\}dt = \int_0^{\Delta-l} \sum_{m=0}^{2n+1} \{[\mu(lm+t)]^2 + [\nu'(lm+t)]^2\}dt +$$

$$+\int_{\Delta-l}^l \sum_{m=0}^{2n} \{[\mu(lm+t)]^2 + [\nu'(lm+t)]^2\}dt \tag{3.90}$$

бо шартҳои алоқаи (3.86), (3.87) ва бо шарти мувофиқати

$$\int_0^T \nu'(t)dt = \int_0^{\Delta-l} \sum_{m=0}^{2n+1} \nu'(lm+t)dt + \int_{\Delta-l}^l \sum_{m=0}^{2n} \nu'(lm+t)dt = \varphi_1(l) - \varphi(l). \tag{3.91}$$

Қайд мекунем, ки ҳангоми шартҳои ибтидоии (3.3), шартҳои ниҳоии (3.5) ва доимии ихтиёрии C - и қайдшуда, инчунин ҳангоми мавҷудияти шарти мувофиқати (3.89), мувофиқи муносибати

$$\int_0^T \{[\mu(t)]^2 + [\nu'(t) - C]^2\}dt = \int_0^T \{[\mu(t)]^2 + [\nu'(t)]^2\}dt - 2C\int_0^T \nu'(t)dt + C^2T =$$

$$= \int_0^T \{[\mu(t)]^2 + [\nu'(t)]^2\}dt - 2C[\varphi_1(l) - \varphi(l)] + C^2T$$

минимуми ҷустуҷӯшаванда ҳамзамон бо минимуми интеграли зерин мувофиқат мекунад:

$$\int_0^T \{[\mu(t)]^2 + [\nu'(t) - C]^2\}dt = \int_0^\Delta \sum_{m=0}^{2n} \{[\mu(lm+t)]^2 + [\nu'(lm+t) - C]^2\}dt +$$

$$+ \int_\Delta^l \sum_{m=0}^{2n-1} \{[\mu(lm+t)]^2 + [\nu'(lm+t) - C]^2\}dt \qquad (3.92)$$

бо шартҳои алоқаи тағйирёфта, ки аз муносибатҳои (3.76) ва (3.77) бармеоянд ва шакли зеринро доранд:

а) ҳангоми $t \in [0;\ \Delta]$:

$$-\sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m \mu[l(2m+1)+t] + \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \{\nu'(2lm+t) - C\} =$$

$$= A_1(t) - \sum_{m=0}^{n} (-1)^m C,$$

$$-\sum_{m=0}^{n} (-1)^m [\mu(2lm+t)] + \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m \{\nu'[l(2m+1)+t] - C\} =$$

$$= A_2(t) - \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m C; \qquad (3.93)$$

б) ҳангоми $t \in [\Delta; l]$:

$$-\sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m \{\mu(2lm+t)\} + \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m \{\nu'[l(2m+1)+t] - C\} =$$

$$= A_3(t) - \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m C,$$

$$-\sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m \mu[l(2m+1)+t] + \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m [\nu'(2lm+t) - C] =$$

$$= A_4(t) - \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m C. \qquad (3.94)$$

Ёфтани минимуми интеграли (3.92) бо шартҳои алоқаи (3.93) ва (3.94), дар асоси леммаи Илйин – Моисеев ба масъалаи ёфтани инфимуми нуқтавии суммаи

$$S(t)=\begin{cases}\sum_{m=0}^{2n}\{[\mu(lm+t)]^2+[\nu'(lm+t)-C]^2\}dt & \text{ҳангоми } t\in[0;\Delta],\\ \sum_{m=0}^{2n-1}\{[\mu(lm+t)]^2+[\nu'(lm+t)-C]^2\}dt & \text{ҳангоми } t\in[\Delta;l]\end{cases}$$

бо ҳамон шартҳои алоқаи (3.93) ва (3.94) оварда мешавад.

Масъалаи ҳосилшударо бо усули Лагранҷ ҳал карда, ба хулоса меоем, ки барои ҳолати баррасишавандаи $0\le\Delta\le l$ идоракуниҳои сарҳадии оптималии $\mu(t)$ ва $\nu(t)$ дар порчаи $[0,T]=[0;\,2ln+\Delta]$ барои ҳамаи $m=\overline{0,n-1}$, $t\in[0;2l]$, инчунин барои $m=n$, $t\in[0;\,\Delta]$ бо баробариҳои (3.42)–(3.45) муайян карда мешаванд, ки дар онҳо функсияҳои $A_1(t),A_2(t),A_3(t),A_4(t)$ ва доимии C мувофиқан бо муносибатҳои (3.46)–(3.50) муайян мегарданд.

Акнун ба баррасии ҳолати $l\le\Delta\le 2l$ бармегардем. Дар ин ҳолат масъалаи оптимизатсия барои доимии дилхоҳи C_1 ба ёфтани минимуми интеграли зерин оварда мешавад:

$$\int_0^T\{[\mu(t)\,]^2+[\nu'(t)-C_1]^2\}dt=$$

$$=\int_0^{\Delta-l}\sum_{m=0}^{2n+1}\{[\mu(lm+t)]^2+[\nu'(lm+t)-C_1]^2\}dt+$$

$$+\int_{\Delta-l}^{l}\sum_{m=0}^{2n}\{[\mu(lm+t)]^2+[\nu'(lm+t)-C_1]^2\}dt \qquad (3.95)$$

бо шартҳои алоқаи тағйирёфта, ки аз муносибатҳои (3.86) ва (3.87) бармеоянд ва шакли зеринро доранд:

в) ҳангоми $t\in[0;\Delta-l]$:

$$-\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\,[\mu(2lm+t)]+\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\{\nu'[l(2m+1)+t]-C_1\}=$$

$$=B_1(t)-\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\,C_1,$$

$$-\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\,\{\mu[l(2m+1)+t]\}+\sum_{m=0}^{n}(-1)^m[\nu'(2lm+t)-C_1]=$$

$$=B_2(t)-\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\,C_1; \quad (3.96)$$

г) ҳангоми $t\in[\Delta-l;l]$:

$$-\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m\,\{\mu[l(2m+1)+t]\}+\sum_{m=0}^{n}(-1)^m[\nu'(2lm+t)-C_1]=$$

$$=B_3(t)-\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\,C_1,$$

$$-\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\,\{\mu(2lm+t)\}+\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m\{\nu'[l(2m+1)+t]-C_1\}=$$

$$=B_4(t)-\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m\,C_1. \quad (3.97)$$

Ёфтани минимуми интеграли (3.95) бо шартҳои алоқаи (3.96) ва (3.97), мувофиқи леммаи Илйин – Моисеев, ба масъалаи ёфтани инфимуми нуқтавии суммаи

$$S_1(t)=\begin{cases}\sum\limits_{m=0}^{2n+1}\{[\mu(lm+t)]^2+[\nu'(lm+t)-C_1]^2\}dt & \text{ҳангоми } t\in[0;\Delta-l],\\ \sum\limits_{m=0}^{2n}\{[\mu(lm+t)]^2+[\nu'(lm+t)-C_1]^2\}dt & \text{ҳангоми } t\in[\Delta-l;l]\end{cases}$$

бо ҳамон шартҳои алоқаи (3.96) ва (3.97) оварда мерасонад.

Масъалаи ҳосилшударо бо усули Лагранҷ ҳал карда, ҳосил мекунем, ки барои ҳолати баррасишавандаи $l\le\Delta\le2l$ идоракуниҳои сарҳадии оптималии

$\mu(t)$ ва $\nu(t)$ дар порчаи $[0,T]=[0;\ 2ln+\Delta]$ барои ҳамаи $m=\overline{0,n-1}$, $t\in[0;2l]$, инчунин барои $m=n, t\in[0;\ \Delta]$, бо баробариҳои (3.51)–(3.54) муайян карда мешаванд. Дар ин баробариҳо функсияҳои $B_1(t), B_2(t), B_3(t), B_4(t)$ ва доимии C_1 бо муносибатҳои (3.55)-(3.59) муайян мегарданд.

Ягонагии идоракуниҳои сарҳадии оптималии ҳосилшуда аз он бармеояд, ки интеграли энергияи сарҳадии (3.41) функсионали барҷаста мебошад. Теоремаи 3.6 исбот гардид.

Аз тасвирҳои (3.42) - (3.59) бармеояд, ки агар $suppf(x,t)\in Q_{T_*}$, $T_*=const$ (яъне таъсири берунаи $f(x,t)$ ҳангоми $T>T_*$ айниятан ба сифр баробар бошад), пас қимати минималии интеграли энергияи сарҳадии (3.41) тартиби $O\left(\frac{1}{T}\right)$ дорад. Доимие, ки дар баҳои ҳосилшуда иштирок мекунад, ба нормаи функсияҳои $\varphi(x),\varphi_1(x)\in W_2^1[0,l]$; $\psi(x),\psi_1(x)\in L_2[0,l]$; $f(x,t)\in L_2(Q_T)$ ва лаҳзаи вақти T вобаста мебошад. Ин ҳолат аз он шаҳодат медиҳад, ки қимати минималии интеграли энергияи сарҳадӣ ҳангоми $T\to\infty$ ба сифр майл мекунад ва имкон медиҳад, ки аз ворид шудани раванди лаппиши тор ба резонанс пешгирӣ карда шавад.

МУҲОКИМАИ НАТИҶАҲОИ БАДАСТОМАДА

Дар ин бахш ба таври мухтасар таҳлили натиҷаҳое, ки дар кори диссертатсионӣ ба даст оварда шудаанд, анҷом дода мешавад.

Боби якуми кори диссертатсионӣ ба таҳлили муфассали адабиёти илмӣ оид ба назарияи масъалаҳои идоракунии сарҳадӣ бахшида шудааст.

Дар боби дуюми диссертатсия барои муодилаи телеграфии якченака бо коэффитсиенти тағйирёбандаи $q(x,t) \in L_2$ -и намуди

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) - q(x,t)u(x,t) = f(x,t), \quad 0 < x < l, \;\; 0 < t < T \qquad (A_1)$$

масъалаи идоракунии сарҳадӣ ба воситаи ҷойивазкунӣ дар сарҳади чап ва қувваи чандирӣ дар тарафи рост мавриди таҳқиқ қарор дода шудааст.

Зери мафҳуми масъалаи идоракунии сарҳадӣ мавҷудияти чунин функсияҳои сарҳадии

$$u(0,t) = \mu(t) \in W_2^1[0,T], \;\; u_x(l,t) = \nu(t) \in L_2[0,T] \qquad (A_2)$$

фаҳмида мешавад, ки раванди баррасишавандаро аз ҳолати ибтидоии ихтиёрии

$$\{u(x,0) = \varphi(x) \in W_2^1[0,l], \;\; u_t(x,0) = \psi(x) \in L_2[0,l]\} \qquad (A_3)$$

ба ҳолати ниҳоии пешакӣ додашудаи

$$\{u(x,T) = \varphi_1(x) \in W_2^1[0,l], \;\; u_t(x,T) = \psi_1(x) \in L_2[0,l]\} \qquad (A_4)$$

мео‌ранд.

Ҳал бо маънои умумишуда (аниқаш, бо маънои айнияти интегралӣ) фаҳмида мешавад ва дар синфи $\widehat{W}_2^1(Q_T)$, $Q_T = (0 \le x \le l) \times (0 \le t \le T)$ ҷустуҷӯ карда мешавад. Ин синф бори аввал соли 2000 - ум аз ҷониби В. А. Илйин ҷорӣ гардидааст [65].

Натиҷаи асосии ин боб исботи якқимата ҳалшавандагии масъалаи баррасишавандаи идоракунии сарҳадӣ дар лаҳзаи критикии вақти $T = l$ мебошад (Теоремаҳои 2.3–2.5). Дар теоремаи 2.4 шартҳои зарурии мавҷудияти ҳалли масъалаи идоракунии сарҳадӣ бо маҳдудиятҳои камтарин ба функсияҳои ибтидоӣ ва ниҳоӣ баён карда шудаанд. Ин шартҳои зарурӣ аз иҷро шудани муносибати функсионалии

$$B\left(\frac{l}{2};\frac{l}{2}\right)+\int_{0}^{l}\int_{\tau}^{l-\tau} K(\xi,\tau)\,B(\xi,\tau)d\xi d\tau=0 \qquad (A_5)$$

иборат мебошанд, ки дар ин ҷо

$$B(x,t)=\varphi(x-t)+\varphi(x+t)+\int_{x-t}^{x+t}\psi(\xi)d\xi-$$

$$-\varphi_1(x-t+l)-\varphi_1(x+t-l)-\int_{x-t+l}^{x+t-l}\psi_1(\xi)d\xi$$

ва ядрои $K(\xi,\tau)$ тавассути функсияи $q(\xi,\tau)$ ҳисоб карда мешавад. Дар теоремаи 2.5 исбот шудааст, ки шартҳои зарурии дар теоремаи 2.4 баён гардида ҳамзамон шартҳои кифоягӣ барои мавҷудияти ҳалли ягонаи (дар асоси теоремаи 2.3) масъалаи идоракунии сарҳадӣ низ мебошанд.

Инчунин якқимата ҳалшавандагии масъалаҳои омехтаи мувофиқ исбот гардидааст (Теоремаҳои 2.1 ва 2.2). Илова бар ин, устуворӣ ва регулярӣ будани ҳалли ҳар ду масъала нисбат ба функсияҳои ба масъалаҳо воридшаванда, ҳамчунин нисбат ба ошӯби аддитивии $q(x,t)u(x,t)$ дар муодилаи (A_1) бо коэффитсиенти замшаванда бо квадрат асоснок карда шудааст.

Ҳангоми исботи теоремаҳои мавҷудият аз натиҷаҳои корҳои [23], [24] ва барои исботи теоремаҳои ягонагӣ методикаи пешниҳоднамудаи Л.В. Критсков дар мақолаи [103] истифода шудааст.

Дар боби 2 ҳамчунин идоракуниҳои сарҳадии оптималӣ, ки тавассути ҷойивазкунӣ дар сарҳади чап ва қувваи чандирӣ дар сарҳади рост амалӣ мегарданд, барои фосилаи ихтиёрии ба қадри кофӣ калони вақт барои равандҳое, ки бо муодилаи лаппишҳои маҷбурии тор тавсиф мешаванд, сохта шудаанд. Ин муодила ҳолати хусусии муодилаи баррасишавандаи A_1 ҳангоми $q(x,t)\equiv 0$ мебошад (Теоремаи 2.6). Барои идоракуниҳои сарҳадии ҷустуҷӯшаванда ифодаҳои аналитикии ошкор ёфта шудаанд. Қайд мекунем, ки масъалаи идоракунии сарҳадии оптималӣ аз ёфтани чунин функсияҳои $\mu(t) \in W_2^1[0,T]$, $\nu(t) \in L_2[0,T]$ иборат аст, ки ба интеграли энергияи сарҳадӣ қимати минималӣ медиҳанд.

Бояд қайд кард, ки масъалаи шабеҳи оптимизатсия барои муодилаи лаппишҳои озоди тор ($q(x,t) \equiv 0$, $f(x,t) \equiv 0$) қаблан дар кори В. А. Илйин ва Е.И. Моисеев [71] таҳқиқ гардида буд.

Натиҷаҳои боби 2 дар корҳои [1-А], [3-А], [4-А], [6-А], [7-А], [11-А] нашр шудаанд.

Дар боби сеюми диссертатсия барои муодилаи (A_1) масъалаи идоракунии сарҳадӣ, ки тавассути қувваи чандирӣ дар сарҳади чап ва ҷойивазкунӣ дар сарҳади рост амалӣ мегардад, омӯхта шудааст. Зери масъалаи идоракунии сарҳадӣ мавҷудияти чунин функсияҳои сарҳадии $u_x(0,t) = \mu(t) \in L_2[0,T]$, $u(l,t) = \nu(t) \in W_2^1[0,T]$ фаҳмида мешавад, ки гузариши равандро аз ҳолати ибтидоии (A_3) ба ҳолати ниҳоии (A_4) таъмин менамоянд. Ба мисли боби 2, ҳал бо маънои умумишуда фаҳмида шуда, дар синфи $\widehat{W}_2^1(Q_T)$, $Q_T = (0 \leq x \leq l) \times \times (0 \leq t \leq T)$ ҷустуҷӯ карда мешавад.

Натиҷаи марказии боби 3 исботи яккимата ҳалшавандагии масъалаи баррасишавандаи идоракунии сарҳадӣ дар лаҳзаи критикии вақти $T = l$ мебошад (Теоремаҳои 3.3, 3.4 ва 3.5). Дар теоремаи 3.4 шартҳои зарурии навъи A_5 барои мавҷудияти ҳал дар ҳолати маҳдудиятҳои камтарин ба функсияҳои ибтидоӣ ва ниҳоӣ баён карда шудаанд. Дар теоремаи 3.5 исбот шудааст, ки ин шартҳои зарурӣ ҳамзамон шартҳои кифоягӣ низ барои мавҷудияти ҳалли ягонаи масъала мебошанд (мувофиқи теоремаи 3.3).

Яккимата ҳалшавандагии масъалаҳои омехтаи мувофиқ низ исбот гардидааст (Теоремаҳои 3.1 ва 3.2). Ба монанди боби 2, устуворӣ ва регулярӣ будани ҳалли масъалаҳои омехта ва масъалаи идоракунии сарҳадӣ нисбат ба функсияҳои ба масъалаҳо воридшаванда ва нисбат ба ошӯби аддитивии $q(x,t)u(x,t)$ дар муодилаи (A_1) бо коэффитсиенти замшаванда бо квадрат асоснок карда шудааст.

Дар боби 3 инчунин идоракуниҳои сарҳадии оптималӣ, ки тавассути қувваи чандирӣ дар сарҳади чап ва ҷойивазкунӣ дар сарҳади рост амалӣ мегарданд, барои фосилаи ихтиёрии ба қадри кофӣ калони вақт барои равандҳои бо муодилаи лаппишҳои маҷбурии тор тавсифшаванда сохта шудаанд (Теоремаи 3.6). Идоракуниҳои сарҳадии ҷустуҷӯшаванда дар шакли аналитикии ошкор пешниҳод гардидаанд.

Қайд мекунем, ки ин масъалаи оптимизатсия барои муодилаи лапишҳои озоди тор ($q(x,t) \equiv 0$, $f(x,t) \equiv 0$) қаблан дар кори В.А. Илйин ва Е.И. Моисеев [71] таҳқиқ гардида буд.

Натиҷаҳои боби 3 дар корҳои [2-А], [5-А], [8-А], [9-А], [10-А] нашр шудаанд.

Қобили қайд аст, ки баъзе масъалаҳои идоракунии сарҳадӣ барои муодилаи A_1 дар монографияҳои [23] ва [24] баррасӣ шудаанд, аммо дар онҳо масъалаҳои идоракунии сарҳадии таркибӣ таҳқиқ нашудаанд.

Дар асоси теоремаҳои мавҷудият ва ягонагии ҳал, инчунин бо дарназардошти баҳоҳои априорӣ, метавон хулоса кард, ки ҳамаи масъалаҳои баррасишуда ба таври дуруст (коррективӣ) гузошта шудаанд.

Бояд зикр намуд, ки бинобар набудани ҳалли аналитикии ошкор барои муодилаи (A_1), дар бобҳои 2 ва 3 ҳалли масъалаҳо дар шакли қатори мутлақ наздикшавандаи Нейман сохта шудааст. Дар айни ҳол идоракуниҳои сарҳадӣ тавассути ҳалли муодилаи интегралии дученакаи навъи Волтерра ифода карда мешаванд.

Ҳамин тариқ, дар асоси гуфтаҳои боло метавон хулоса намуд, ки ҳамаи натиҷаҳои бадастомада нав буда, натиҷаҳои муаллифони дигарро ҳам барои масъалаҳои омехта ва ҳам барои масъалаҳои идоракунии сарҳадӣ барои муодилаи телеграфӣ бо коэффитсиенти тағйирёбандаи (A_1) умумият мебахшанд. Дар ҳолати $q(x,t) \equiv 0$, $f(x,t) \equiv 0$ натиҷаҳои бадастомада ба натиҷаҳои маълум табдил меёбанд, ки ин эътимоднокии онҳоро тасдиқ мекунад. Бо ибораи дигар, дар ҳолати $q(x,t) \equiv 0$, $f(x,t) \equiv 0$ натиҷаҳои диссертатсия бо натиҷаҳои бадастовардаи В.А. Илйин ва шогирдони ӯ мувофиқат мекунанд.

ХУЛОСАҲО

Натиҷаҳои асосии илмии диссертатсия

Ҳамин тавр, мо ҳамаи масъалаҳои гузошташударо ба таври муфассал таҳқиқ намудем. Дар поён натиҷаҳои бадастомада ба таври мухтасар оварда мешаванд.

Барои муодилаи телеграфии якченака бо коэффитсиенти тағйирёбандаи намуди

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) - q(x,t)u(x,t) = f(x,t),\ \ 0 < x < l,\ \ 0 < t < T$$

бо маънои умумишуда:

1. Масъалаи идоракунии сарҳадӣ, ки тавассути ҷойивазкунӣ дар сарҳади чап ва қувваи чандирӣ дар сарҳади рост амалӣ мегардад, мавриди омӯзиш қарор дода шуд [1-А], [3-А], [4-А], [7-А], [11-А];
2. Масъалаи идоракунии сарҳадӣ, ки тавассути қувваи чандирӣ дар сарҳади чап ва ҷойивазкунӣ дар сарҳади рост амалӣ мегардад, мавриди омӯзиш қарор дода шуд [2-А], [5-А], [8-А], [9-А], [10-А].

Дар ҳар ду ҳолат:

- теорема дар бораи ягонагии ҳалли масъалаи баррасишавандаи идоракунии сарҳадӣ барои вақтҳои хурд ё баробари критикӣ исбот карда шуд;
- шартҳои зарурӣ ва кифоягии мавҷудияти идоракуниҳои сарҳадии ҷустуҷӯшаванда дар вақти критикӣ ба даст оварда шуданд;
- баҳои априорӣ барои ҳалли масъалаи идоракунии сарҳадӣ ҳосил гардид, ки устувории ҳалли бадастомадаро нисбат ба шартҳои ибтидоӣ ва ниҳоӣ тасдиқ менамояд;
- регулярӣ будани ҳалли масъалаи идоракунии сарҳадӣ нисбат ба ошӯби аддитивии оператори мавҷӣ $q(x,t)u(x,t)$ бо коэффитсиенти бо квадрат замшаванда асоснок карда шуд.

Илова бар ин, яккимата ҳалшавандагии масъалаҳои омехтаи мувофиқ барои муодилаи телеграфии баррасишаванда исбот карда шуд. Аниқаш:

- теоремаҳои ягонагии ҳалли масъалаҳои омехтаи мувофиқ исбот гардиданд;

- теоремаҳои мавҷудияти ҳалли масъалаҳои омехтаи мувофиқ исбот шуданд;
- асоснок карда шуд, ки ҳалли масъалаҳои омехта нисбат ба ошӯби аддитивии $q(x,t)u(x,t)$, инчунин нисбат ба функсияҳое, ки ба гузориши масъалаҳо дохил мешаванд, устувор мебошад.

Бояд таъкид намуд, ки ҳалшавандагии ҳамаи масъалаҳои баррасишуда дар марҳилаи аввал барои муодилаи лаппишҳои маҷбурии тор, ки ҳолати хусусии муодилаи таҳқиқшаванда ҳангоми $q(x,t) \equiv 0$ мебошад, нишон дода шудааст. Барои ин ҳолати хусусӣ ҳамаи тасдиқоти мувофиқ таҳия шуда, исбот гардидаанд.

3. Идоракуниҳои сарҳадии оптималӣ, ки тавассути ҷойивазкунӣ дар сарҳади чап ва қувваи чандирӣ дар сарҳади рост амалӣ мегарданд, дар фосилаи ихтиёрии ба қадри кофӣ калони вақт барои равандҳое, ки бо муодилаи лаппишҳои маҷбурии тор тавсиф мешаванд, сохта шудаанд [6-А];
4. Идоракуниҳои сарҳадии оптималӣ, ки тавассути қувваи чандирӣ дар сарҳади чап ва ҷойивазкунӣ дар сарҳади рост амалӣ мегарданд, дар фосилаи ихтиёрии ба қадри кофӣ калони вақт барои равандҳое, ки бо муодилаи лаппишҳои маҷбурии тор тавсиф мешаванд, сохта шудаанд [6-А].

Тавсияҳо оид ба истифодаи амалии натиҷаҳо

Кори диссертатсионӣ ҷанбаи назариявӣ дорад. Усулҳои дар он таҳияшуда имконият медиҳанд, ки ҳалшавандагии масъалаҳои монанди идоракунии сарҳадӣ барои равандҳои гуногун таҳқиқ карда шаванд. Натиҷаҳои бадастомада метавонанд ҳангоми хондани курсҳои махсус барои донишҷӯёни курсҳои болоӣ, магистрантон ва докторантони (PhD) ихтисосҳои математика ва физика дар муассисаҳои таҳсилоти олии касбӣ истифода гарданд.

Илова бар ин, ба назар гирифта мешавад, ки натиҷаҳои ҳосилшуда метавонанд барои амсиласозии равандҳои гуногун, ки бо муодилаҳои баррасишуда тавсиф меёбанд, истифода шаванд.

РӮЙХАТИ АДАБИЁТ

1. Рӯйхати адабиёти истифодашуда

[1] Glowinski R. A numerical approach to the exact boundary controllability of the wave equation (I). Dirichlet controls: Description of the numerical methods [Text] / R.Glowinski, C.H. Li, J.L. Lions // Japan J. Appl. Math. – 1990. – V. 7. – №1. – P. 1-76.

[2] Komornik V. Exact controllability and stabilization. The multiplier method [Text] / V. Komornik. – Paris, Chichester, 1994. – 166 p.

[3] Li Tatsien. A Note On The Exact Controllability For Nonautonomous Hyperbolic Systems [Text] / Li Tatsien and Wang Zhiqiand // Communications an Pure and Applied Analysis. – 2007. – Vol. 6. – No 1. – PP. 229-235.

[4] Lions J.L. Exact Controllability, Stabilization and Perturbations for Distributed Systems [Text] / J.L. Lions // SIAM Review. – 1988. – Vol. 30. –№ 1. – PP. 1-68.

[5] Michaev V. Klibanov. Exact Controllability for the Non Stationary Transport Equation [Text] / Michaev V/ Klibanov and Masahiro Yamamoto // SIAM Journal on Control and Optimiziation. – Vol. 46. – Issue 6. –PP. 2071-2195.

[6] Munch A. A uniformly controllable and implicit scheme for the 1-d wave equation [Text] / A. Munch // Mathematical Modeling and Numerical Analysis. – 2005. – V. 39. – № 2. – P. 377-418.

[7] Mustafayev M.I. On boundary control problem of distributed parameter systems [Text] / M.I. Mustafayev, M. Ekici, M. Mirzazadeh // International Journal of Applied and Computational Mathematics. – 2017. – T. 3. – № 2. – C. 961-969.

[8] Soboleff S. Methode nouvelle a resoudre le probleme de Cauchy pour les equations lineaires hyperboliques normales [Text] / S. Soboleff // Математический сборник. –1936. – 1(43):1. – С. 39–72.

[9] Zuazua E. Exact controllability of distributed systems for arbitrary small time [Text] / E. Zuazua // C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I. – 1987. – V. 804. – № 7. – P. 173-176.

[10] Zuazua E. Exact Controllability for the Semilinear Wave Equation [Text] / E.Zuazua // J. Math. pures et appl. – 1990. – №69. – PP. 1-31.

[11] Абдукаримов М.Ф. Устойчивость решения одной комбинированной смешанной задачи для уравнения Клейна-Гордона-Фока с переменным коэффициентом [Текст] / М.Ф. Абдукаримов // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. – 2021. – №2. – С. 3-10 (Английская версия: Stability of a Solution to One Combined Mixed Problem for the Klein-Gordon-Fock equation with a Variable Coefficient // Moscow University Mathematics Bulletin. – 2021. – Vol. 76. – №2. – PP. 45-52. DOI: 10. 3103/S0027132221020029).

[12] Абдукаримов М.Ф. Задача граничного управления упругой силой на одном конце при закрепленном втором для телеграфного уравнения с переменным коэффициентом [Текст] / М.Ф. Абдукаримов // Дифференциальные уравнения. – 2020. – Т. 56. – №2. – С. 226-242 (Английская версия: Problem of Boundary Control by an Elastic Force on One End with the Other End Fixed for the Telegraph Equation with a Variable Coefficient // Differential Equations. – 2020. – Vol. 56. – №2. – PP. 221–237. DOI:10.1134/S0012266120020081).

[13] Абдукаримов М.Ф. Об оптимальном граничном управлении процесса вынужденных колебаний смещением на одном конце струны при закрепленном втором [Текст] / М.Ф. Абдукаримов // Дифференциалные уравнения. – 2014. – Т. 50. – №5. – С. 680-691 (Английская версия: Optimal Boundary Control of Forced Vibrations by the Displacement at One End of the String with the Other End Fixed // Differential Equations. – 2014. – Vol. 50. – №5. – PP. 640–651. DOI: 10.1134 / S0012266114050103).

[14] Абдукаримов М.Ф. Задача граничного управления для одномерного уравнения Клейна-Гордона Фока с переменным коэффициентом. Случай управления смещением на одном конце при закрепленном втором [Текст] / М.Ф. Абдукаримов, Л.В. Крицков // Дифференциальные уравнения. – 2013. – Т. 49. – №6. – С. 759–771 (Английская версия: Boundary Control Problem for the One-Dimensional Klein–Gordon–Fock Equation with a Variable Coefficient. The Case of Control by Displacement at One Endpoint with the Other Endpoint Being Fixed // Differential Equations. – 2013. – Vol. 49. – №6. – PP. 731–743. DOI: 10.1134/ S0012266113060074).

[15] Абдукаримов М.Ф. Задача граничного управления для одномерного уравнения Клейна-Гордона-Фока с переменным коэффициентом. Случай управления смещением на двух концах [Текст] / М.Ф.Абдукаримов, Л.В.Крицков // Дифференциальные уравнения. – 2013. – Т. 49. – №8. – С. 1036-1046 (Английская версия: Boundary Control Problem for the One-Dimensional Klein–Gordon–Fock Equation with a Variable Coefficient: the Case of Control by Displacements at Two Endpoints // Differential Equations. – 2013. Vol. 49. – №8. – PP. 1006–1017. DOI: 10.1134/ S0012266113080090).

[16] Крицков Л.В. Граничное управление на одном конце при свободном втором для процесса, описываемого телеграфным уравнением с переменным коэффициентом [Текст] / Л.В. Крицков, М.Ф.Абдукаримов // Доклады Академии наук. – 2013. – Т. 450. – № 6. – С. 640-643 (Английская версия: Boundary Control of the Displacement at One End with the Other End Free for a Process Described by the Telegraph Equation with a Variable Coefficient // Doklady Mathematics. – 2013. – Vol. 87. – №3. –PP. 1006–1017. DOI: 10.1134/ S1064562413030319).

[17] Kritskov L.V. Boundary control by the displacement for the telegraph equation with a variable coefficient and the Neumann boundary condition [Text] / L.V. Kritskov, M.F. Abdukarimov // Caspian J. Appl. Math., Economics and Ecology. – 2013. – Vol. 1. – №1. – PP. 51-69.

[18] Абдукаримов М.Ф. О граничном управлении смещением на одном конце при закрепленном втором процесса вынужденных колебаний струны [Текст] / М.Ф. Абдукаримов // Сборник статей молодых учёных факультета ВМК МГУ. – 2013. – №10. – С. 7-33.

[19] Abdukarimov M.F. On a boundary control problem for forced string oscillations [Text] / M. F. Abdukarimov // Azerbaijan Journal of Mathematics. – 2012. – Vol.2. – № 2. – PP. 105-116.

[20] Абдукаримов М.Ф. Граничное управление процессом колебаний, описываемым неоднородным волновым уравнением, за минимальный промежуток времени [Текст] / М.Ф. Абдукаримов // Сборник статей молодых учёных факультета ВМК МГУ. – 2011. – №8. – С. 5-18.

[21] Абдукаримов М.Ф. Граничное управление процессом, описываемым уравнением Клейна-Гордона-Фока с переменным коэффициентом: диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук [Текст] / М.Ф. Абдукаримов.–Москва, 2013.–118 с.
[22] Абдукаримов М.Ф. Исследование некоторых задач граничного управления для телеграфного уравнения с переменным коэффициентом: диссертация на соискание учёной степени доктора физико-математических наук [Текст] / М.Ф. Абдукаримов. – Душанбе, 2022. –308 с.
[23] Абдукаримов М.Ф. Некоторые задачи граничного управления смещением для телеграфного уравнения с переменным коэффициентом [Текст] / М.Ф. Абдукаримов. – Душанбе: «ЭР-граф», 2018. – 240 с.
[24] Абдукаримов М.Ф. Исследование некоторых задач граничного управления процессом, описываемым телеграфным уравнением с переменным коэффициентом [Текст] / М.Ф. Абдукаримов. – Душанбе: «Сарбоз», 2023. – 284 с.
[25] Агошков В.И. Методы оптимального управления и сопряжённых уравнений в задачах математической физики [Текст] / В.И. Агошков. – М., 2003. – 256 с.
[26] Акуленко Л.Д. Приведение упругой системы в заданное состояние посредством силового граничного воздействия [Текст] / Л.Д. Акуленко // Прикл. матем. и механика. – 1981. – Т. 45. – №6. – С. 1095-1103.
[27] Андреев А.А. Система волновых уравнений с граничным управлением на двух концах [Текст] / А.А. Андреев, С.В. Лексина // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. – 2008. – №8/1. – С. 21-34.
[28] Андреев А.А. Задача граничного управления в условиях первой краевой задачи для системы гиперболического типа второго порядка [Текст] / А.А. Андреев, С.В. Лексина // Дифференциальные уравнения. – 2011. – Т. 47. – №6. – С. 843-849.
[29] Аттаев А.Х. Задача граничного управления для одного вырождающегося уравнения гиперболического типа [Текст] / А.Х.Аттаев // Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. – 2019.–Т.29.– № 4. – С. 19-27.

[30] Барсегян В.Р. Оптимальное управление колебаниями струны с заданными состояниями в промежуточные моменты времени [Текст] / В.Р. Барсегян, М.А. Саакян // Известия Национальной Академии наук РА. – 2008. – Т. 61. – №2. – С. 52-60.

[31] Барсегян В.Р. К оптимальному управлению колебанием упругих систем [Текст] / В.Р. Барсегян, Л.А. Мовсисян // Прикладная механика. – 2012. – Т.48. – №2 (58). – С. 137-142.

[32] Барсегян В.Р. Задача граничного управления колебаниями струны смещением левого конца при закреплённом правом конце с заданными значениями функции прогиба в промежуточные моменты времени [Текст] / В.Р. Барсегян, С.В. Солодуша // Вестник Российских университетов. Математика. – 2020. – Т. 25. – № 130. – С. 131-146.

[33] Барсегян В.Р. Управление составных динамических систем и систем с многоточечными промежуточными условиями [Текст] / В.Р. Барсегян. – Москва, 2016. – 230 с.

[34] Беликов А.В. Граничное управление упругими силами на двух концах неоднородного стержня за критический промежуток времени в случае совпадения времени прохождения волны по каждому из участков неоднородности [Текст] / А.В. Беликов // Дифференциальные уравнения. – 2013. – Т. 49. – №6. – С. 772-779.

[35] Беллман Р. Динамическое программирование [Текст] / Р. Беллман. – Москва, 1960. – 400 с.

[36] Боровских А.В. Формулы граничного управления неоднородной струной. I [Текст] / А.В. Боровских // Дифференциальные уравнения. – 2007. – Т.43. – № 1. – С. 64-89.

[37] Боровских А.В. Формулы граничного управления неоднородной струной. II [Текст] / А.В. Боровских // Дифференциальные уравнения. – 2007. – Т. 43. – № 5. – С. 640-649.

[38] Бутковский А.Г. Об оптимальном управлении системами с распределёнными параметрами [Текст] / А.Г. Бутковский, А.Я. Лернер // Доклады АН СССР, Кибернетика и теория регулирования. – 1960. – Т.134. – №4. – С. 778-781.

[39] Бутковский А.Г. Метод моментов в теории оптимального управления системами с распределёнными параметрами [Текст] / А.Г. Бутковский // Автоматика и телемеханика. – 1963. – Т. XXIV. –№9. – С. 1217-1225.
[40] Бутковский А.Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами [Текст] / А.Г. Бутковский. – М.: Наука, 1965. – 480 с.
[41] Васильев Ф.П. Метод прямых в задачах граничного управления и наблюдения для уравнений колебаний струны [Текст] / Ф.П. Васильев, М.А. Куржанский, М.М. Потапов // Вестник МГУ. Серия 15. Вычисл. матем. и киб. – 1993. – №3. – С. 8-15.
[42] Васильев Ф.П. О методе Фурье для решения одной задачи управления колебанием струны [Текст] / Ф.П. Васильев, М.А. Куржанский, А.В. Разгулин // Вестник МГУ. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика. – 1993. – №2. – С. 3-8.
[43] Васильев Ф.П. О двойственности в линейных задачах управления и наблюдения [Текст] / Ф.П. Васильев // Дифференциальные уравнения. – 1995. – Т. 31. – №11. – С.1893-1900.
[44] Васильев Ф.П. Приближенное решение двойственных задач управления и наблюдения [Текст] / Ф.П. Васильев, М.А. Куржанский, М.М. Потапов, А.В. Разгулин. – М.: МАКС Пресс, 2010. – 382 с.
[45] Васницкий Л.И. Оптимальный гаситель продольных колебаний стержня [Текст] / Л.И. Васницкий, И.В. Милосердова // Прикладная математика и механика. – 1997. – Т.61. – №3. – С.537-540.
[46] Воронов А.А. Устойчивость, управляемость, наблюдаемость [Текст] / А.А.Воронов. – М.: Наука, 1979. – 336 с.
[47] Дряженков А.А. Неравенство наблюдаемости для волнового уравнения с условием упругого закрепления в случае критического интервала времени [Текст] / А.А. Дряженков // Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика. – 2014. – Т.38. – № 3. –С. 18-22.
[48] Дряженков А.А. Численный метод успокоения колебаний струны с неизвестным начальным состоянием в классе слабых обобщённых решений

[Текст] / А.А. Дряженков, М.М. Потапов // Дифференциальные уравнения. – 2018. – Т. 54. – №11. – С. 1451-1469.
[49] Егоров А.И. Управление упругими колебаниями [Текст] / А.И. Егоров // ДАН УССР. Серия физ-мат. и техн. наук. – 1986. – №5. – С. 60-63.
[50] Егоров А.И. Основы теории управления [Текст] / А.И. Егоров. – М.: Физматлит, 2004. – 504 с.
[51] Егоров А.И. Управления колебаниями связанных объектов с распределёнными и сосредоточенными параметрами [Текст] / А.И. Егоров, Л.Н. Знаменская // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2005. – Т. 45. – №10. – С. 1766-1784.
[52] Егоров А.И. Наблюдаемость по состоянию упругих колебаний систем с распределёнными и сосредоточенными параметрами [Текст] / А.И. Егоров, Л.Н. Знаменская // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2009. – Т.49. – №10. – С. 1779-1784.
[53] Егоров А.И. Введение в теорию управления системами с распределёнными параметрами [Текст] / А.И. Егоров, Л.Н. Знаменская. – Санкт-Петербург, 2017. – 288 с.
[54] Знаменская Л.Н. Задачи граничной наблюдаемости упругих колебаний, описываемых системой телеграфных уравнений [Текст] / Л.Н. Знаменская, З.Е. Потапова // Автоматика и телемеханика. – 2007.–Т.68.–№2.–С. 103-112.
[55] Знаменская Л.Н. Граничное управление на двух концах волновым уравнением в классе обобщенных решений из L_2 [Текст] / Л.Н.Знаменская // Доклады Академии наук. – 2001. – Т. 380. – №6. – С. 746-748.
[56] Знаменская Л.Н. Априорные оценки обобщённых решений волнового уравнения [Текст] / Л.Н. Знаменская // Дифференциальные уравнения. – 2001. – Т. 37. – №8. – С. 1062-1069.
[57] Знаменская Л.Н. Управление упругими колебаниями [Текст] / Л.Н.Знаменская. – М.: Физматлит, 2004. – 176 с.
[58] Иванов Д.А. Непрерывная обратимость оператора граничного управления для волнового уравнения на докритических промежутках в классах слабых обобщённых решений [Текст] / Д.А. Иванов, М.М.Потапов // Вестник

Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика. – 2014.–Т.38.–№ 4. – С.5-12.

[59] Иванов Д.А. Приближенное решение задачи быстродействия для волнового уравнения с граничными управлениями [Текст] / Д.А. Иванов, М.М. Потапов // Труды Математического института имени В.А.Стеклова. – 2015. – Т. 291. №1. – С. 112-129.

[60] Ильин В.А. О разрешимости смешанных задач для гиперболического и параболического уравнений [Текст] / В.А. Ильин // Успехи матем. наук. – 1960. – Т.15. – №2(92). – С. 97-154.

[61] Ильин В.А. Лекции по теории рядов Фурье [Текст] / В.А. Ильин, Е.И.Моисеев. – М., 2005. – 52 с.

[62] Ильин В.А. Волновое уравнение с краевым управлением [Текст] / В.А. Ильин, В.В. Тихомиров // Дифференциальные уравнения. – 1999. – Т. 35. – №1. – С. 137-146.

[63] Ильин В.А. Волновое уравнение с граничным управлением на двух концах за произвольный промежуток времени [Текст] / В.А. Ильин // Дифференциальные уравнения – 1999. – Т. 35. – №11. – С. 1517-1534.

[64] Ильин В. А. Волновое уравнение с граничным управлением на одном конце при закрепленном втором конце [Текст] / В.А. Ильин // Дифференциальные уравнения. – 1999. – Т. 35. – №12. – С. 1640-1659.

[65] Ильин В. А. Граничное управление процессом колебаний на двух концах в терминах обобщенного решения волнового уравнения с конечной энергией [Текст] / В.А. Ильин // Дифференциальные уравнения. – 2000. – Т. 36. – №11. – С. 1513-1528.

[66] Ильин В.А. Граничное управление процессом колебаний на одном конце при закрепленном втором конце в терминах обобщенного решения волнового уравнения с конечной энергией [Текст] / В.А. Ильин // Дифференциальные уравнения. – 2000. – Т. 36. – №12. – С. 1670-1686.

[67] Ильин В.А. О граничном управлении на одном конце процессом, описываемым телеграфным уравнением [Текст] / В.А. Ильин, Е.И.Моисеев // Доклады Академии наук. – 2002. – Т. 387. – № 5. – С. 600-603.

[68] Ильин В.А. Граничное управление на двух концах процессом, описываемым телеграфным уравнением [Текст] / В.А. Ильин, Е.И.Моисеев // Доклады Академии наук России. – 2004. – Т. 394. – №2. – С. 154-158.

[69] Ильин В.А. Оптимальное граничное управление процессом колебаний струны на одном конце при свободном другом конце [Текст] / В.А.Ильин, Е.И. Моисеев // Нелинейная динамика и управление. –2004.–№4. – С. 25-38.

[70] Ильин В.А. Оптимальное граничное управление упругой силой на одном конце струны при свободном втором её конце [Текст] / В.А. Ильин, Е.И. Моисеев // Дифференциальные уравнения. – 2005. – Т. 41. –№1.–С. 105-115.

[71] Ильин В.А. Оптимизация комбинированного граничного управления колебаниями струны – упругой силой на одном конце и смещением на другом конце [Текст] / В.А. Ильин, Е.И. Моисеев // Доклады Академии наук. – 2005. – Т. 402. – №5. – С. 590-595.

[72] Ильин В.А. Оптимальное граничное управление смещением на одном конце при свободном втором конце и отвечающее ему распределение полной энергии струны [Текст] / В.А. Ильин, Е.И. Моисеев // Доклады Академии наук. – 2005. – Т. 400. – №5. – С. 587-591.

[73] Ильин В.А. Оптимальное граничное управление упругой силой на одном конце при закреплённом втором конце и отвечающее ему распределение полной энергии струны [Текст] / В.А. Ильин // Доклады Академии наук. – 2005. – Т. 400. – №6. – С. 731-735.

[74] Ильин В.А. Оптимизация граничного управления упругой силой на двух концах струны [Текст] / В.А. Ильин, Е.И. Моисеев // Доклады Академии наук. – 2005. –Т. 402. – №2. – С. 163-169.

[75] Ильин В.А. Оптимизация комбинированного граничного управления колебаниями струны - упругой силой на одном конце и смещением на другом конце [Текст] / В.А. Ильин, Е.И. Моисеев // Доклады Академии наук. – 2005. –Т. 402. – №5. – С. 590-595.

[76] Ильин В.А. Оптимизация граничных управлений колебаниями струны [Текст] / В.А. Ильин, Е.И. Моисеев // Успехи математических наук. – 2005. – Т. 60. – №6 (366). – С. 89-114.

[77] Ильин В.А. Оптимизация граничного управления на одном конце струны упругой силой при условии, что второй конец закреплён [Текст] / В.А. Ильин // Труды Математического института имени В.А. Стеклова РАН. – 2005. – Т. 248. – С. 117-123.
[78] Ильин В.А. Минимизация интеграла от модуля производной граничного управления, возведённого в произвольную степень $p > 1$ [Текст] / В.А. Ильин, Е.И. Моисеев // Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика. – 2006. – № 3. – С. 6-18.
[79] Ильин В.А. Оптимизация за произвольный достаточно большой промежуток времени граничного управления колебаниями струны упругой силой [Текст] / В.А. Ильин, Е.И. Моисеев // Дифференциальные уравнения. – 2006. – Т. 42. – №12. – С. 1699-1712.
[80] Ильин В.А. Минимазация за произвольный достаточно большой промежуток времени T интеграла от модуля производной производимого смещением граничного управления, возведенного в произвольную степень $p \geq 1$ [Текст] / В.А. Ильин, Е.И. Моисеев // Дифференциальные уравнения – 2006. – Т. 42. – №11. – С. 1558-1570.
[81] Ильин В.А. Оптимизация за произвольный достаточно большой промежуток времени граничных управлений смещениями на двух концах струны [Текст] / В.А. Ильин, Е.И. Моисеев // Дифференциальные уравнения. – 2007. – Т. 43. – №11. – С. 1528-1544.
[82] Ильин В.А. Граничное управление колебаниями струны, минимизирующее интеграл от степени $p \geq 1$ модуля управления или его производной [Текст] / В.А. Ильин, Е.И. Моисеев // Автоматика и телемеханика. – 2007. – №2. – С. 113-119.
[83] Ильин В.А. Оптимизация за произвольный достаточно большой промежуток времени T управления упругими граничными силами на двух концах струны [Текст] / В.А. Ильин, Е.И. Моисеев // Доклады Академии наук. – 2007. – Т. 417. – №4. – С. 456-463.
[84] Ильин В.А. Аналитический вид оптимального граничного управления смещением на одном конце струны с модельным нелокальным граничным

условием одного из четырёх типов [Текст] / В.А. Ильин // Доклады Академии наук. – 2008. – Т. 420. – №3. – С. 309-313.
[85] Ильин В.А. Оптимизация управления на двух концах струны упругими граничными силами за любой достаточно большой промежуток времени [Текст] / В.А. Ильин, Е.И. Моисеев // Дифференциальные уравнения. – 2008. –Т. 44. – №1. – С. 89-110.
[86] Ильин В.А. Граничное управление смещением на одном конце струны при наличии нелокального граничного условия одного из четырёх типов и его оптимизация [Текст] / В.А. Ильин // Дифференциальные уравнения. – 2008. – Т. 44. – №11. – С. 1487-1498.
[87] Ильин В.А. Оптимизация граничного управления на одном конце струны при наличии модельного нелокального условия [Текст] / В.А. Ильин //Автоматика и телемеханика. – 2009. – Т.70. – № 4. – С. 6-17.
[88] Ильин В.А. Формула типа Даламбера для продольных колебаний бесконечного стержня, состоящего из двух участков разной плотности и разной упругости [Текст] / В.А. Ильин //Доклады Академии наук. – 2009. – Т. 427. – №4. – С. 466-468.
[89] Ильин В.А. Аналитический вид оптимальных граничных управлений продольными колебаниями стержня, состоящего из двух участков, имеющих разные плотности и упругости, но одинаковые импедансы [Текст] / В.А. Ильин, П.В. Луференко //Доклады Академии наук. – 2009. – Т. 429. – № 4. – С. 455-458.
[90] Ильин В.А.О продольных колебаниях стержня, состоящего из двух участков разной плотности и упругости, в случае совпадения времени прохождения волны по каждому из этих участков [Текст] / В.А. Ильин //Доклады Академии наук. – 2009. – Т. 429. – №6. – С. 742-745.
[91] Ильин В.А. Граничное управление упругой силой на одном конце струны при наличии модельного нелокального граничного условия одного из четырёх типов и его оптимизация [Текст] / В.А. Ильин // Дифференциальные уравнения. – 2009. – Т. 45. – №4. – С. 586-596.
[92] Ильин В.А. Оптимизация производимого упругой силой граничного управления колебаниями состоящего из двух разнородных участков

стержня [Текст] / В.А. Ильин // Доклады Академии наук. – 2011. – Т. 440. – № 6. – С. 731-735.

[93] Ильин В.А. О полном успокоении с помощью граничного управления на одном конце колебаний неоднородного стержня [Текст] / В.А. Ильин //Труды института математики и механики УрО РАН. – 2011. –Т. 17. – №2. – С. 88-96.

[94] Исмати М. Об одной многомерной несамосопряжённой задаче теории теплопроводности [Текст] / М. Исмати // Доклады Академии наук. – 2004. – Т. 395. – №5. – С. 586-589.

[95] Исмати М. О разрешимости задачи типа Коши для оператора Даламбера произвольной степени [Текст] / М. Исмати // Известия Академии наук Республики Таджикистан. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. – 2011. – №4. – С. 62-68.

[96] Исмати М. О классическом и обобщённом решении задачи типа коши для оператора Даламбера произвольной степени [Текст] / М. Исмати // Известия Академии наук Республики Таджикистан. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. – 2013. – №4 (153). – С. 57-68.

[97] Исмати М. Об абсолютной и равномерной сходимости обобщённых интегралов Фурье по собственным вектор-функциям оператора теории упругости в неограниченной области [Текст] / М. Исмати, Н.М. Исматов // Дифференциальные уравнения. – 2015. – Т. 51. – №1. – С. 127-131.

[98] Ишмухаметов А.З. Оптимальное управление поперечными колебаниями стержня [Текст] / А.З. Ишмухаметов // Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика. – 1981. – №4. – С. 46-50.

[99] Ишмухаметов А.З. Вопросы устойчивости и аппроксимации задач оптимального управления системами с распределёнными параметрами [Текст] / А.З. Ишмухаметов. – М.: Изд-во ВЦ РАН, 2001. – 118 с.

[100] Козлова Е. А. Задачи граничного управления в условиях первой краевой задачи для систем гиперболических уравнений второго порядка:

диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук [Текст] / Е.А. Козлова. – Самара, 2013. – 120 с.

[101] Костоусова Е.К. О свойстве слабой наблюдаемости для одномерного волнового уравнения при точечном нестационарном операторе наблюдения [Текст] / Е.К. Костоусова // Дифференциальные уравнения. – 1991. – Т. 27. – № 8. – С. 1318-1325.

[102] Красовский Н.Н. Теория управления движением [Текст] / Н.Н.Красовский. – Москва, 1968. – 476 с.

[103] Крицков Л.В. О задачах граничного управления для уравнения Клейна-Гордона-Фока с суммируемым коэффициентом [Текст] / Л.В. Крицков // Дифференциальные уравнения. – 2015.–Т.51.–№5.–С.688-701.

[104] Кулешов А.А. О четырех смешанных задачах для уравнения колебаний струны с граничными и нелокальными условиями первого и второго родов [Текст] / А.А. Кулешов // Доклады Академии наук. – 2009. – Т.426. – №3. – С. 307-309.

[105] Кулешов А.А. Смешанные задачи для уравнения колебаний струны с однородными граничными и неоднородными нелокальными условиями [Текст] / А.А. Кулешов // Дифференциальные уравнения. – 2010. – Т. 46. – №1. – С. 98-104.

[106] Кулешов А.А. О разрешимости смешанных задач для уравнения Клейна-Гордона-Фока в классе L_p при $p \geq 1$ [Текст] / А.А. Кулешов, И.С. Мокроусов, И.Н. Смирнов // Дифференциальные уравнения. – 2018. – Т. 54. – №3. – С. 336-340.

[107] Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики / О. А. Ладыженская. – М.: Наука, 1973. – 407 с.

[108] Лексина С.В. Задача граничного управления в условиях второй краевой задачи для матричного волнового уравнения [Текст] / С.В.Лексина // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. – 2009. – №4 (70). – С. 20-29.

[109] Лексина С.В. Задачи граничного управления для гиперболической системы второго порядка: диссертация на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук [Текст] / С.В. Лексина. – Самара, 2009. – 148с.

[110] Лионс Ж. Л. Управление сингулярными распределёнными системами [Текст] / Ж. Л. Лионс. – М.: Наука, 1987. – 368 с.

[111] Ломовцев Ф.Е. Критерий существования граничных управлений вынужденными колебаниями струны нестационарными первыми косыми производными за произвольное время [Текст] / Ф.Е. Ломовцев, С.П. Ходос // Вестник Гродненского государственного университета имени Янки Купалы. Серия 2. Математика. Физика. Информатика, вычислительная техника и управление. – 2018. – Т. 8. – № 1. – С. 37-50.

[112] Моисеев Е.И. О волновом процессе с конечной энергией при заданном граничном режиме на одном конце и упругом закреплении на другом конце [Текст] / Е.И. Моисеев, В.В. Тихомиров // Нелинейная динамика и управление. – 2007. – № 5. – С. 42-49.

[113] Моисеев Е.И. Оптимальное граничное управление смещением колебаниями струны с нелокальным условием нечетности первого рода [Текст] / Е.И. Моисеев, А.А. Холомеева // Дифференциальные уравнения – 2010. – Т. 46. – №11. – С. 1623-1630.

[114] Моисеев Е.И. Оптимальное граничное управление силой на одном конце струны при заданном режиме смещения на другом конце [Текст] / Е.И. Моисеев, А.А. Холомеева // Дифференциальные уравнения. – 2011. – Т. 47. – №7. – С. 1018-1023.

[115] Моисеев Е.И. Оптимальное граничное управление смещением колебаниями струны с нелокальным условием четности второго рода [Текст] / Е.И. Моисеев, А.А. Холомеева // Дифференциальные уравнения – 2011. – Т. 47. – №1. – С. 127-134.

[116] Моисеев Е.И. Классические и обобщённые решения задач для телеграфных уравнений с потенциалом Дирака [Текст] / Е.И. Моисеев, Н.И. Юрчук // Дифференциальные уравнения. – 2015. – Т. 51.– №10. – С. 1338-1346.

[117] Моисеев Е.И. Граничное управление смещением процессом колебаний при граничном условии типа торможения за время, меньшее критического

[Текст] / Е.И. Моисеев, А.А. Холомеева, А.А. Фролов // Итоги науки и техники. Современная математика и её приложения. Тематические обзоры. – 2019. – Т. 160. – С. 74-84.
[118] Моисеев Е.И. Граничное управление процессом колебаний струны при условии сопротивления среды на правом конце за время, меньшее критического [Текст] / Е.И. Моисеев, А.А. Фролов // Дифференциальные уравнения. – 2019. – Т. 55. – № 4. – С. 555-566.
[119] Никитин А.А. Граничное управление упругой силой на одном конце струны [Текст] / А.А. Никитин // Доклады Академии наук России. – 2006. – Т. 406. – №4. – С. 458-461.
[120] Никитин А.А. Граничное управление третьим краевым условием [Текст] / А.А. Никитин // Автоматика и телемеханика. – 2007. – №2. – С. 120-126.
[121] Никитин А.А. Оптимальное граничное управление колебаниями струны, производимое силой при упругом закреплении [Текст] / А.А.Никитин // Дифференциальные уравнения – 2011. – Т. 46. – №12. – С. 1773-1782.
[122] Понтрягин Л.С. Математическая теория оптимальных процессов [Текст] / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. – Москва, 1961. – 384 с.
[123] Потапов М.М. Устойчивый метод решения линейных уравнений с неравномерно возмущённым оператором [Текст] / М.М. Потапов // Доклады Академии наук. – 1999. – Т. 365. – №5. – С. 596-598.
[124] Потапов М.М. Приближенное решение задач граничного управления и наблюдения для уравнения поперечных колебаний стержня [Текст] / М.М. Потапов // Журнал вычислительной математики и математической физики. –2005. – Т. 45. – №6. – С. 1015-1032.
[125] Потапов М.М. Разностная аппроксимация задач Дирихле-наблюдения слабых решений волнового уравнения с краевыми условиями 3-го рода [Текст] / М.М. Потапов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2007. – Т. 47. – №8. – С. 1323-1339.
[126] Потапов М.М. Неравенства наблюдаемости в пространствах Соболева для волнового уравнения с переменными коэффициентами [Текст] / М.М.

Потапов, Д.А. Иванов // Доклады Академии наук. – 2012. – Т. 447. – №5. – С. 493-497.

[127] Потапов М.М. Задачи двустороннего граничного управления для волнового уравнения на докритических промежутках в классах сильных обобщённых решений [Текст] / М.М. Потапов, Д.А. Иванов // Труды института математики и механики УрО РАН. – 2013. – Т. 19. – №4. – С. 192-202.

[128] Прилепко А.И. Управляемость и оптимальная управляемость для операторных уравнений первого рода в (B)-пространствах. Примеры для ОДУ в R^n [Текст] / А.И. Прилепко // Доклады Академии наук. – 2019. – Т. 485. – №2. – С. 153-157.

[129] Прилепко А.И. Задачи управления и наблюдения в банаховых пространствах. Оптимальное управление и принцип максимума. Применение для УМФ и ОДУ в R^n [Текст] / А.И. Прилепко // Дифференциальные уравнения – Т.55. – №12. – С. 1683-1692.

[130] Рево П.А. Волновое уравнение с граничным управлением на левом конце при свободном правом конце и задача о полном успокоении колебательного процесса [Текст] / П.А. Рево, Г.Д. Чабакаури // Дифференциальные уравнения – 2000. – Т. 36. – № 6. – С. 806-815.

[131] Рево П.А. Граничное управление процессом колебаний на одном конце при свободном втором конце в терминах обобщенного решения волнового уравнения с конечной энергией [Текст] / П.А. Рево, Г.Д.Чабакаури // Дифференциальные уравнения – 2001. – Т. 37. – №8. – С. 1082-1095.

[132] Рево П.А. Граничное управление волновым процессом при упругом закреплении [Текст] / П.А. Рево, В.В. Тихомиров // Нелинейная динамика и управление. – 2002. – Вып. 2. – С. 147-162.

[133] Рогожников А.М. Исследование смешанной задачи, описывающей процесс колебаний стержня, состоящего из нескольких участков, при условии совпадения времени прохождения волны по каждому из этих участков [Текст] / А.М. Рогожников // Доклады Академии наук. – 2011. –Т. 441. – №4. – С. 449-451.

[134] Рогожников А.М. Оптимальное управление продольными колебаниями составных стержней с равным временем прохождения волны по каждому из участков [Текст] / А.М. Рогожников // Дифференциальные уравнения. – 2013. – Т. 49. – №5. – С. 633-642.

[135] Смирнов В.И. Курс высшей математики, т.5 [Текст] / В.И. Смирнов. – М., 1959. – 656 с.

[136] Смирнов И.Н. Смешанные задачи для телеграфного уравнения, в случае системы, состоящей из двух участков, имеющих разные плотности и разные упругости, но одинаковые импедансы. Одностороннее управление [Текст] / И.Н. Смирнов // Доклады Академии наук. – 2010. – Т.435. – №1. – С. 22-25.

[137] Смирнов И.Н. Решение смешанных задач с граничным управлением упругой силой для телеграфного уравнения [Текст] / И.Н. Смирнов // Дифференциальные уравнения. – 2011. – Т.47. – № 3. – С. 433–441.

[138] Смирнов И.Н. Управление процессом, описываемым телеграфным уравнением: диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук [Текст] / Н.Н. Смирнов. – Москва, 2011. – 76 с.

[139] Тихомиров В.В. О граничном управлении волновым уравнением при упругом закреплении [Текст] / В.В. Тихомиров // Нелинейная динамика и управление. – 2001. – Вып. 1. – С. 155-162.

[140] Тихомиров В.В. Волновое уравнение с граничным управлением при упругом закреплении. I [Текст] / В.В. Тихомиров // Дифференциальные уравнения. –2002. – Т. 38. – № 3. – С. 393-403.

[141] Тихомиров В.В. Волновое уравнение с граничным управлением при упругом закреплении. II [Текст] // Дифференциальные уравнения. – 2002. – Т. 38. – № 4. – С. 529-537.

[142] Тихонов А.Н. Уравнения математической физики [Текст] / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – Москва, 1977. – 742 с.

[143] Фурсиков А.В. Оптимальное управление распределёнными системами. Теория и приложения [Текст] / А.В. Фурсиков. – Новосибирск: Научная книга, 1999. –352 с.

[144] Холомеева А.А. Оптимизация нелокального граничного управления колебаниями струны с закрепленным концом за произвольный кратный $2l$ промежуток времени [Текст] / А.А. Холомеева // Дифференциальные уравнения. – 2008. – Т. 44. – №5. – С. 696-700.

[145] Холомеева А.А. Оптимальное граничное управление колебаниями струны с модельными нелокальными условиями одного из двух типов [Текст] / А.А. Холомеева // Доклады Академии наук. – 2011. – Т. 437. – №2. – С. 164-167.

[146] Чабакаури Т.Д. Оптимизация граничного управления процессом колебаний на одном конце при закреплённом втором конце в случае ограниченной энергии [Текст] / Т.Д. Чабакаури // Дифференциальные уравнения. – 2002. – Т. 38. – № 2. – С. 277-284.

[147] Чабакаури Г.Д. О процессе колебаний струны со свободным правым концом и малым по модулю граничным управлением на левом конце [Текст] / Г.Д. Чабакаури // Дифференциальные уравнения. – 2003. – Т. 39. – №6. – С. 820-828.

[148] Эмануилов О.Ю. Граничная управляемость гиперболическими уравнениями [Текст] / О.Ю. Эмануилов // Сибирский матем. журнал. – 2000. – Т. 41. – № 4. – С. 944-959.

[149] Юнусов М.К. О решении одной оптимальной задачи [Текст] / М.К.Юнусов // Известия АН Тадж. ССР. Отд. физ.-мат. наук. – 1982. – №4. – С. 106-108.

[150] Юнуси М.К. Оптимальное управление в задачах защиты планируемого урожая, охраняемыми биологическими популяциями и их приложения [Текст] / М.К. Юнуси. – Душанбе, 2018. – 288 с.

2. Рӯйхати интишороти довталаби дараҷаи илмӣ

Мақолаҳое, ки дар маҷаллаҳои аз ҷониби КОА-и назди Президенти Ҷумҳурии Тоҷикистон ва ё КОА-и назди Вазорати илм ва таҳсилоти олии Федератсияи Русия нашр шудаанд:

[1-А] Абдукаримов М.Ф. О задаче граничного управления смещением на одном конце и упругой силой на другом для одномерного телеграфного уравнения с переменным коэффициентом [Текст] / М.Ф. Абдукаримов, **Ф.Р. Исматов** // Вестник Бохтарского государственного университета имени Носира Хусрава. Серия естественных наук. – 2025. – 2/3 (138). – С. 5-21.

[2-А] Абдукаримов М.Ф. Об однозначной разрешимости двух комбинированных смешанных задач для телеграфного уравнения с переменным коэффициентом [Текст] / М.Ф. Абдукаримов, **Ф.Р. Исматов** // Вестник филиала МГУ имени М.В.Ломоносова в г. Душанбе. Серия естественных наук. – 2024. – Т.1. – №3(41). – С. 5-31.

[3-А] Абдукаримов М.Ф. О разрешимости одной смешанной задачи для телеграфного уравнения с переменным коэффициентом из класса суммируеммых с квадратом функций [Текст] / М.Ф. Абдукаримов, **Ф.Р. Исматов** // Доклады национальной Академии наук Таджикистана. – 2022. – Т.65. – №9-10. – С. 586-592.

[4-А] Исматов Ф.Р. Однозначная разрешимость двух комбинированных смешанных задач для телеграфного уравнения с переменным коэффициентом из класса L_2 [Текст] / **Ф.Р. Исматов** // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. – 2024. – №4. – С. 15-34.

[5-А] Исматов Ф.Р. Об однозначной разрешимости одной комбинированной задачи граничного управления для телеграфного уравнения с переменным коэффициентам [Текст] / **Ф.Р. Исматов** // Вестник филиала МГУ имени М.В.Ломоносова в г. Душанбе. Серия естественных наук. – 2025. – Т.1. – №1(45). – С. 5-28.

Маводди конференсияҳо ва фишурдаи маърӯзаҳо

[6-А] Исматов Ф.Р. Об одной задаче оптимального граничного управления для уравнения вынужденных колебаний струны [Текст] / М.Ф. Абдукаримов, **Ф.Р. Исматов** // Материалы международной конференции, посвященной 85-летию со дня рождения выдающегося таджикского математика доктора физико-математических наук, профессора Собирова Темура Сафаровича. – Душанбе, 28-29 ноября 2025. – С. 29-32.

[7-А] Абдукаримов М.Ф. Однозначная разрешимость одной комбинированной задачи граничного управления за критическое время [Текст] / М.Ф. Абдукаримов, **Ф.Р. Исматов** // Материалы международной научно-практической конференции, посвящённой «Двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических наук в сфере науки и образования» и 80-летию со дня рождения профессора Боймурода Алиева. – Душанбе, 2025. – С. 8-11.

[8-А] Абдукаримов М.Ф. О разрешимости одной комбинированной задачи граничного уравнения для уравнения вынужденных колебаний струны за минимальный промежуток времени [Текст] / М.Ф. Абдукаримов, **Ф.Р. Исматов** // Материалы международной научно-практической конференции XIV Ломоносовские чтения «Роль Филиала Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова в городе Душанбе в развитии науки и образования». – Душанбе, 2024. – С. 3-7.

[9-А] Абдукаримов М.Ф. О задаче граничного управления упругой силой на одном конце и смещением на другом процесса, описываемого телеграфным уравнением [Текст] / М.Ф. Абдукаримов, **Ф.Р. Исматов** // Материалы IV международной научно-практической конференции «Современные проблемы математики и её приложений». – Душанбе, 2024. – С. 16-19.

[10-А] Абдукаримов М.Ф. О задаче граничного управления, производимого упругой силой на одном конце и смещением на другом процесса вынужденных колебаний струны [Текст] / М.Ф. Абдукаримов, **Ф.Р. Исматов** // Материалы международной научной конференции, посвящённой 75- летию ТНУ, 20-летию развития точных, естественных и математических наук, 85-летию академика НАН Таджикистана Раджабова Н. – Душанбе, 2023. – С. 12-14.

[11-А] Абдукаримов М.Ф. О граничном управлении смещением на одном конце и упругой силой на другом процесса вынужденных колебаний струны за критическое время [Текст] / М.Ф. Абдукаримов, **Ф.Р. Исматов** // Материалы международной научно-практической конференции «XIII Ломоносовкие чтения», посвящённой 115-летию академика Бободжона Гафурова. Часть 3. Естественные науки. – Душанбе, 2023. – С. 3-6.