РЕСПУБЛИКА ТАДЖИКИСТАН
ТАДЖИКСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УДК:517911/.958
ББК: 22.193
Р-18

На правах рукописи

РАИМЗОДА ФАРРУХШОХ

К ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С ФУНКЦИОНАЛЬНЫМИ НАЧАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ В ДИНАМИКЕ ПОПУЛЯЦИЙ

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Научные руководители:
Юнуси Махмадюсуф Камарзода
-доктор физико-математических наук, профессор.
Илолов Махмадшо Илолович, академик НАН Таджикистана, доктор физико-математических наук, профессор кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений Таджикского национального университета.

Душанбе-2025

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. В исследовании множества задач в областях физики, механики и других научных дисциплин важнейшее значение имеют дифференциальные уравнения в частных производных. Особое внимание уделяется классу таких уравнений второго порядка, относящихся к параболическому типу, для которых рассматриваются различные варианты начальных и краевых условий. В этой сфере значительные вклады внесли учёные, такие как А. Фридман [113], В. С. Владимиров [41], О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева, В. А. Солонников [68], Б. П. Михайлов [71], А. Н. Тихонов и А. А. Самарский [101], Р. Курэнт [89] и работы А. М. Ильина, А. С. Калашникова, О. А. Олейник [56], А. Ф. Филиппова [112], О. А. Олейник и С. Н. Кружков [88], а также многих других ученых. Эти исследования сосредоточены на проверке корректности начальных и краевых условий как в конечномерных, так и в бесконечномерных пространствах, получении априорных оценок и формул для представления решений, а также на анализе устойчивости стационарных решений. Также исследованы принципы максимума, теоремы сравнения решений и ряд других аспектов. В процессе работы в таких областях, как математическая биология, физика, экология и экономика, возникли новые формулировки задач для уравнений в частных производных с функциональными условиями. Уравнения первого порядка с линейными задачами и функциональными условиями были исследованы в работах таких учёных, как Вольтерра В. [42], Полуэктов Р. А. [90], Моисеев Н. Н. [81], М. Юнус [122-130]. В трудах М.К. Юнуси [122-130] были детально проанализированы различные аспекты функциональных условий.

С развитием информационных технологий теория нелинейных волн как научная дисциплина начала активно развиваться, что позволило приблизиться к численным методам решения уравнений в частных производных, описывающих распространение волн в различных средах. Создание мощного математического инструментария открыло возможности для точного аналитического решения ряда нелинейных уравнений в частных производных. Математическое моделирование стало ключевым инструментом для изучения различных сценариев развития и взаимодействия популяций, оценки временно-пространственной динамики биологических сообществ и предсказания реакции природных систем на внешние воздействия. Изменения в одной или нескольких характеристиках исследуемой биологической системы, с учетом ее временно-возрастной и пространственной структуры, могут быть описаны с помощью математических моделей.

В диссертации рассматривается один из важнейших вопросов математического моделирования и прикладной математики- моделирование процессов биологических популяций и их обоснования, а также разработки алгоритмов с целью обнаружения и формирования нелинейных стоячих популяционных волн с учетом временных-возрастных и пространственных распределений сложных систем (социальные, экономические, экологические, технические и другие).

Степень разработанности темы исследуемой проблемы. В математической популяционной биологии описание структурированных популяций является одной из актуальных и интереснейших задач основанных на аппарате дифференциальных уравнений в частных производных. Изучаемые математические задачи в данной диссертационной работе посвящены биологическим сообществам, популяциям с учетом временно-возрастного состава пространственных распределений популяционных волн описывающихся с помощью класса интегро-дифференциальных задач.

С. С. Четвериковым в 1905 г. впервые было введено в экологический обиход понятие популяционных волн. С того времени активно исследовался многими специалистами вопрос о численности взаимодействующих биологических популяций, которые отражены в многочисленных работах учёных таких как Вольтерр В.[42], Свирежев Ю. М.[104-108], Логофет.Д. О.

[73-75], Базыкин А. Д.[33,34], содержащие широкие библиографические списки.

Связь работы с научными программами (проектами) темами. Диссертационная работа выполнена в рамках реализации перспективного плана научно-исследовательских работ кафедры математического и компьютерного моделирования механико-математического факультета Таджикского национального университета на 2016 - 2020 гг. по теме «Разработка математических моделей, алгоритмов и программ для решения прикладных задач” и на 2020-2025гг. по теме “Разработка математических и компьютерных моделей, алгоритмов, комплекс программ и методики преподавания информатики, математики и естественных наук».

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ИССЛЕДОВАНИЯ

Цель исследования. Основной целью исследования настоящей диссертационной работы заключается в разработке аналитического метода математического моделирования некоторых физических явлений, таких, как популяционные волны и популяционные стоячие волны в нелинейных системах с учётом временно-возрастных и пространственных распределений, которые описываются дифференциальными уравнениями в частных производных второго и третьего порядка с функциональными начальными условиями.

Задачи исследования. Основные задачи исследования данной диссертационной работы заключаются в следующем:

- для интегро-дифференциальной задачи с переменными коэффициентами в линейном случае доказать теорему об абсолютной равномерной сходимости рядов Фурье для 3-крайвой задачи, где коэффициенты ряда Фурье удовлетворяют интегральному уравнению типа восстановления, найти и обосновать решение в виде рядов Фурье для неоднородной задачи с функциональными условиями;

- доказать принцип максимума для линейных интегро-дифференциальных задач с функциональными условиями и найти априорные оценки, так же найти решение пространственно-одномерных линейных задач с функциональными условиями;

- создание математической модели интегро-дифференциальной задачи популяционных волн в нелинейных системах с учётом временно-возрастной структуры и пространственных распределений и доказать её решения;

- доказать и обосновать стационарное решение нелинейной интегро-дифференциальной задачи, предложить определение стационарной численности с учетом возраста и пространственных распределений;

- найти решение интегро-дифференциальной задачи численности изолированной популяции в частных производных с функциальными начальными условиями для образования плоских, S-волн, стоячих и стационарных волн с учётом возрастного состава и пространственных распределений;

- разработать алгоритм численного решения нелинейной интегро-дифференциальной задачи и комплекс компьютерных программ для популяционных волн в биологических системах.

Объект исследования. Объектом исследования является класс нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных с функциальными начальными условиями**.**

Предмет исследования. Математическое моделирование популяционных волн с применением линейных и нелинейных систем интегро-дифференциальных уравнений в частных производных с функциальными начальными условиями**.**

Научная новизна исследования. В диссертационной работе получены следующие основные результаты:

- ✓ для интегро-дифференциальной задачи с переменными коэффициентами в линейном случае доказана теорема об абсолютной равномерной сходимости рядов Фурье для 3-крайвой задачи, где коэффициенты ряда Фурье удовлетворяют интегральному уравнению типа восстановления, найдено и обосновано решение в виде рядов Фурье для неоднородной задачи с функциональными условиями;
- ✓ доказан принцип максимума для линейных интегро-дифференциальных задач с функциональными условиями и найдены априорные оценки, так же найдено решение пространственно-одномерных линейных задач с функциональными условиями;
- ✓ создана математическая модель интегро-дифференциальной задачи популяционных волн в нелинейных системах с учётом временно-возрастной структуры и пространственных распределений и доказано её решение;
- ✓ доказано и обосновано стационарное решение нелинейной интегро-дифференциальной задачи, предложено определение стационарной численности с учетом возраста и пространственных распределений;
- ✓ найдено решение интегро-дифференциальной задачи численности изолированной популяции в частных производных с функциальными начальными условиями для образования плоских, S-волн, стоячих и стационарных волн с учётом возрастного состава и пространственных распределений;
- ✓ разработан алгоритм численного решения нелинейной интегро-дифференциальной задачи, а также создан комплекс компьютерных программ для популяционных волн в биологических системах.

Теоретическая и научно-практическая значимость работы. Работа носит теоретический и практический характер. Теоретическая ценность работы состоит в исследовании линейных и нелинейных задач с функциальными начальными условиями. Теоретические результаты диссертационной работы могут быть использованы для чтения специальных курсов для студентов и магистров специальности «Информатика» по дисциплине «Математическое моделирование биологических систем» и «Математическое моделирование сложных систем» в ВУЗах Республики Таджикистан.

Практическая значимость заключается в использовании результатов, полученных в диссертационной работе при математическом моделировании численности популяции биологических сообществ и для решения прикладных задач в экологии, биологии и управлении.

Положения, выносимые на защиту:

- теоремы об абсолютной равномерной сходимости рядов Фурье для 3-крайвой задачи, где коэффициенты ряда Фурье удовлетворяют интегральному уравнению типа восстановления;
- теоремы о принципе максимума для линейных задач с функциональными условиями и априорных оценок;
- теоремы о существование и единственности классического решения для пространственно-одномерных задач и задач с функциональными условиями на плоскости;
- теоремы о существовании решений математической модели интегро-дифференциальной задачи популяционных волн в нелинейных системах с учётом временно-возрастной структуры и пространственных распределений.
- теоремы о существовании стационарного решения нелинейной интегро-дифференциальной задачи с учетом возраста и пространственных распределений.
- теоремы о существовании решения интегро-дифференциальной задачи численности изолированной популяции в частных производных с функциальными начальными условиями.

- для нелинейной системы интегро-дифференциальных задачи разработан алгоритм численного решения и создан комплекс компьютерных программ для популяционных волн в биологических системах.

Степень достоверности результатов. Все теоремы, утверждения и формулы в диссертационном исследовании обеспечены строгими доказательствами, ряд выводов согласуются с исследованиями других авторов.

Соответствия диссертации паспорту научной специальности. Диссертационная работа выполнена в соответствии со следующими разделами паспорта специальности 05.13.18 – «Математическое моделирование, численные методы и комплекс программ» (пункты 2,5,6,8):

-***пункт* 2**. Развитие качественных и приближённых аналитических методов исследования математических моделей.

-***пункт* 5**. Комплексные исследования научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента.

-***пункт* 6**. Разработка новых математических методов и алгоритмов проверки адекватности математических моделей объектов на основе данных натурного эксперимента.

-***пункт* 8**. Разработка систем компьютерного и имитационного моделирования.

Личный вклад соискателя учёной степени. Все результаты, представленные в диссертационном исследовании, были получены автором лично. Обсуждение и публикация научных результатов проводились с соавторами и научным руководителем, но основное содержание данного исследования и положения, выносимые на защиту, отражают личный вклад автора в выполненную работу.

Апробация и реализация результатов диссертации. Материалы диссертации докладовались и обсуждались на международных и республиканских конференциях: Республиканской научно-теоретической конференции профессорско-преподавательского состава и сотрудников ТНУ посвищенной 25-летию государственной независимости Республики Таджикистан (2016); Республиканской научно-теоретической конференции профессорско-преподавательского состава и сотрудников ТНУ, посвищенной “20-ой годовщине Дня национального единства” и “Году молодёжи” (Душанбе 2017г); Республиканской научно-теоретической конференции профессорско-преподавательского состава и сотрудников ТНУ, посвищенной “Международному десятилетию действия Вода для устойчивого развития, 2018-2018 годы”, “Годы развития туризма и народных ремесел”, “140-ой со дня рождения Героя Таджикистана Садриддина Айни и “70-ой годовщине со дня создания Таджикского Национального Университета” (2018); Международной научно – теоретической конференции, 70 – летию образования ТНУ и посвященной 80 – летию со дня рождения академик АН Республика Таджикистан, д.ф.-м.н, профессор Н.Р. Раджабова «Современные задачи математики и их приложений» (Душанбе, 2018г.); Республиканской научно-практической конференции профессорско-преподавательского состава ТНУ, посвященной «Годам развития села, туризма и народных промыслов (2019-2021)» и «400-летию Миробида Сайдои Насафи» (20-27 апреля, 2019); Республиканской научной конференции, посвящённой 80 – летию видного таджикского математика, профессора Бекназара Имомназара (Душанбе, 10-11 июня, 2019г.); Республиканской научно-практической конференции профессорско-преподавательского состава ТНУ, посвященной “5500-летию древнего Саразма”, “700-летию выдающегося таджикского поэта Камола Худжанди” и «20-летию изучения и развития естественных, точных и математических наук в сфере науки и образовании (2020-2040 годы)»; XI Международной научно-теоретической конференции, посвященной 70-летию Таджикского национального университета и 70-летию доктора физико-математических наук, профессора Юнуси Махмадюсуф Камарзода (Душанбе, 27-28 декабря 2018г.); Международной научной конференции, посвященной 70-летию профессора Джангибекова Гулходжа (Душанбе, 30-31 января 2020 г.); Международной научной конференции, посвященной 70-летию академика

НАН Таджикистана Шабозова Мирганда Шабозовича (Душанбе, 24-25 июня 2022 г.); Международной научной конференции, «Современные проблемы математики и её приложения» посвящённой 20–летию развития естественных, точных и математических наук 2020-2040 годы (Душанбе, 20-21 октября 2022 г.); Международной научно-практической конференции «Компьютерный анализ проблем науки и технологий», посвященная «2020-2040 годы, 20-летию изучения и развития естественных, точных и математических наук в области науки и образования» и «75-летию Таджикского национального университета» г.Душанбе 2023 год; Международной научной конференции посвященной 75-летию ТНУ, 20-летию развития точных, естественных и математических наук 2020-2040 годы, и 85-летию академика НАН Таджикистана Раджабов Нусрат. г.Душанбе 2023 год; XII-международной научно-практической конференции «Современные проблемы математического моделирования и её приложения», посвященной «Объявления 2020-2040 годы,20-летию изучения и развития естественных, точных и математических наук в области науки и образования» и «75-летию Таджикского национального университета» (Таджикистан, Душанбе,18 май 2024).

Публикации по теме диссертации. По материалам диссертационного исследования опубликовано 13 научной статьей, в том числе 6 статьи в изданиях, рецензируемых ВАК при Президенте Республики Таджикистан и ВАК Российской Федерации и 7 статьей в трудах республиканских и международных конференций.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав, заключения и списка использованной литературы. Общий объем диссертации составляет 136 страниц, в том числе 16 рисунков и 134 библиографических списков. Нумерация формул отдельная для каждой главы и общая для рисунков и таблиц.

ГЛАВА 1. Анализ литературы математического моделирования популяционных волн, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных с функциальными начальными условиями

В этой главе приводятся основные сведения об изученной литературы математического моделирования популяционных волн, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных с функциальными начальными условиями. Так же излагаются основные теоретико-методологические исследования, проведён анализ существующих проблем и полученных результатов и изложены нерешённые задачи по теме диссертационной работы.

§1.1 Краткий исторический обзор по математическому моделированию

Математические модели являются одним из важных аппаратов познания человеком явлений окружающего мира. Основные закономерности изучаемого явления входят в определение математической модели. Построение и исследование математических моделей, популяционных волн в нелинейных системах с учётом временно-возрастных и пространственных распределений являются необходимыми условиями, для решения прикладных задач оптимального управления популяциями. Математическое моделирование биологических популяционных волн - считается актуальной и чрезвычайно интересной задачей.

Математическое моделирование является средством анализа объединения наблюдения и эксперимента. Смысл моделирования состоит в том, что записываются на основании эмпирических данных количественные соотношения между разными величинами (математическая модель), которые можно определить в ходе эксперимента или наблюдения. В математической популяционной биологии описание структурированных популяций является одной из актуальных и интереснейших задач основанных на аппарате дифференциальных уравнений в частных производных. Изучаемые математические задачи в данной диссертационной работе посвящены биологическим сообществам, популяциям с учетом временно-возрастного состава пространственных распределений популяционных волн, описывающихся с помощью класса интегро-дифференциальных задач.

Одним из важных факторов математических методов в биологии является развитие между дисциплин - биохимии, биофизики, математической генетики, также появление новых направлений общих для биологии и информационных технологий.

Известно, что первые результаты математической популяционной биологии связаны с тем, что в однородных моделях с непрерывным временем при рассмотрении двух популяций взаимодействующих видов были обнаружены колебания численности этих популяций.

Модель Лотки-Вольтерра служит наглядным примером, который выявляет, что взаимодействия между популяциями хищника и жертвы могут приводить к периодическим колебаниям численности, то есть колебания численности хищника отстают по фазе от колебаний численности жертв. Реальную ситуацию данный тип динамики достаточно неплохо описывает, когда рост численности хищника недопустим без роста численности жертв, но рост численности хищников постепенно приводит к уменьшению плотности жертвы. В конечном результате замечаются колебания роста численности популяции.

Процесс моделирования биосистем достаточно сложен по причине наличия в системе большого количества параметров и коэффициентов, и так же по причине периодического чередования нескольких режимов существования взаимодействующих популяций.

Начиная с XX века в математике, физике, химии, биологии и других точных науках для описания рассматриваемых ими явлений использовалось математическое моделирование. Основные результаты в биологических, химических, физических и других областях науки в настоящее время получены при помощи математического моделирования. Особенность исследований в области математической биофизики и математической биологии заключались в рассмотрении моделей, которые включали в себя либо системы обыкновенных дифференциальных уравнений, или дискретные модели.

Использование компьютеров позволило изменить понятие решения задачи математического моделирования. Так как до использования компьютерных технологий исследователь ограничивался только написанием математической модели или алгоритма для её решения. Вся история математики связана с алгоритмами. Как известно, слово «алгоритм» является производным от имени средневекового таджикского учёного Аль-Хорезми.

Основоположником математического моделирования академиком А. А. Самарским[98] сформулирована методология математического моделирования в сокращённом виде триадой «модель-алгоритм-программа».

Для проведения натурных экспериментов необходимы большие усилия и затраты, и даже в некоторых случаях получение результатов невозможно, поэтому используется технология «вычислительного эксперимента», разработанной школой А. А. Самарского.

В первой половине XX века стали интенсивно разрабатываться первые теоретически обоснованные подходы, которые использовались при разработке математических моделей взаимодействующих популяций. В работах Вольтера задачами Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений представлены модели динамики взаимодействующих популяций.[26, 33, 41, 52, 59, 60]. Предполагается, что плотность популяции и свойства среды в этой модели не зависят от пространственных координат. В работах [34, 48, 47, 56, 57, 58, 91, 105] процесс распространения популяции на территории рассматривается как групповое или случайное индивидуальное перемещение особей. Математические модели в данном случае описываются при помощи дифференциальных уравнений в частных производных. Во многих научных работах математическая модель процесса рождаемости и гибели особей в изолированной популяции представляется начально-краевой задачей для нелинейного дифференциального уравнения в частных производных, которое имеет неединственное решение [47].

Известно, что в моделировании биологических задач используются все методы прикладной математики, а также исследования систем дифференциальных уравнений и численных методов.

Модели в полулинейных уравнениях типа «реакция-диффузия» получили широкое распространение в области математической экологии взаимодействующих популяций. Для моделирования временно-пространственных биосистем необходимо использовать системы уравнений в частных производных Фон Фестера [9]. Уравнение Фон Фестера впервые было получено в работе Макендрика [25] Системы и уравнения типа Фон Фистера и Макендрика использовались разными авторами при математическом моделировании динамики численности популяций рыб и в демографических задачах [124, 123]. В работе [7] с использованием асимптотических методов рассмотрены системы уравнений типа «паразит-хозяин» или «хищник-жертва».

Один из занимательных аспектов моделирования популяции считается математическое моделирование временно-пространственной динамики популяции. Для построения математической модели описания временно-пространственной динамики популяции применяется сочетание о случайных перемещениях или миграции особей, взятых из «точечной» динамики описания демографического процесса. Однако, не взирая на результаты волн численности и диссипативные структуры в популяционных моделях являются важными результатами [16] математические модели описывающие временно-пространственную динамику взаимодействующих популяций не являются достаточно изученными.

Основной целью настоящей диссертационной работы является постановка задач и исследование математического моделирования популяционных волн в нелинейных системах с учётом временно-возрастных и пространственных распределений. Бифуркационный анализа систем типа Лотки — Вольтерра вблизи пространственно - однородного стационарного состояния приводится в работах [123, 8]. Впервые было доказано Колмогоровым А.Н., Петровским И.Г и Пискуновым Н.С [56] существование решения типа «бегущая волна» для случая бесконечной прямой. В этой работе рассматривается математическая модель одиночной популяции, в которой рассчитывается нелинейность «диффузии» особей и нелинейность скорости их перемещения по ареалу. А также получены необходимые условия существования решения «бегущая волна» и предложен алгоритм построения такого решения.

Математическое моделирование популяций в двумерной области простой формы впервые были приведены в работе [8]. А также в работе [19] доказано с использованием методов фазовой плоскости существование решения задачи типа бегущая волна для одного квазилинейного уравнения популяционного типа. В работе [42] исследованы все возможные бифуркации и все решения задач типа бегущая волна в случае одного уравнения.

В условиях возрастающего антропогенного воздействия на окружающею среду математическое моделирование популяционной динамики стало основным инструментом для анализа влияния на экологическую систему. Математическое моделирование даёт возможность изучить всевозможные случаи развития и взаимодействия популяции, дать оценку воздействия окружающей среды на временно-пространственную динамику биологических систем, прогнозировать реакцию природных систем на внешние воздействия. В работах [14.28, 49,54, 90,92, 106,110,111] исследованы дискретные модели развития популяций. Математические модели оптимального управления взаимодействующими биологическими видами посвящены работы [35, 74]. Для точечных математических моделей оптимального управления агроценозов и экосистем посвящены работы [87,105,122,124], а с учётом возрастной структуры приведены в [54]. В данных работах для получения необходимых условий, доказывается аналог принципа максимума Понтрягина.

§1.2.Обзор литературы математического моделирования популяционных волн, описываемых дифференциальными уравнениями

В изучении многих задач физики, механики и других научных дисциплин большую роль играет дифференциальные уравнения в частных производных. Такие классы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка являются уравнения параболического типа для которых изучаются различные постановки краевых условий и начального условия. Исследованиям в этой области посвящены работы А.Фридмана [113], В.С.Владимирова [41], О.А.Ладыженской, Н.Н.Уральцевой и В.А.Солонникова [67], В.П.Михайлова [70], А.Н.Тихонова и А.А.Самарского [109] Р.Куранта [89] и работы А.М.Ильина, А. С.Калашникова и О.А.Олейник [56], А.Ф.Филиппова [112], О.А.Олейник, В.А.Солонникова и С.Н.Кружкова [88] и многих других. В этих работах изучены корректности начальных и краевых условий в конечномерных или бесконечномерных областях, получены априорные оценки и формулы для представления решения, а также исследованы вопросы устойчивости стационарных решений, доказаны принцип максимум и теоремы сравнения решений и других вопросов.

В процессе исследования математической биологии, физики, экологии и экономики, возникли новые постановки задач для уравнения в частных производных с функциональными условиями. Для уравнения первого порядка линейные задачи с функциональными условиями были изучены в работах Вольтерра В. [42], Полуэктова Р.А. [90], Моисеева Н.Н. [80], М. Юнуси [122-130]. В работах М.К. Юнуси [112-130] приведено подробное исследование задач с функциональными условиями. В этих работах рассматриваются вопросы нахождения решения следующей задачи:

$$\begin{cases} \partial_{tax} N = F(N,a,t), \ x \in G \subseteq E^n, \ 0 < a < \infty, \ 0 < t < t_k \\ N(x,a,0) = N_0(x,a), \quad x \in G, \ \ 0 < a < \infty \\ N(x,0,t) = \int\limits_0^\infty B(N(x,\xi,t),\xi,t)d\xi, \\ \alpha \dfrac{\partial N}{\partial n} + \beta N \,|_s = \varphi \end{cases} \qquad (1.2.1)$$

где

$$\partial_{tax} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial a} + \sum [V_i \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i}(D_i \frac{\partial}{\partial x_i})] \ ,$$

$F(.), B(.), N_0(.), \varphi(.), \alpha, \beta, D_i(.)$ - заданные функции, $V_i > 0$ - постоянные числа, $i = 1,2,...,n.$ Доказательство принципа максимума, теоремы сравнения, априорные оценки, условия образования линейных волн для задачи (1.2.1) в случае $\alpha = 0, G \in E^2$, приведены в работах М.К.Юнуси [112-130], а также для линейных задач (1.2.1) получены представления решения в виде рядов Фурье, коэффициенты которых являются решениями интегрального уравнения типа восстановления. Вопросы устойчивости нетривиального стационарного решения так же изучены в этих работах, кроме вопросов в случае третьей краевой задачи с функциональными условиями и $G \in E^n$. Не было получено представления решения для нелинейных задач с функциональными условиями. Поэтому изучение данного класса задач типа (1.2.1) является важным классом задач для уравнений в частных производных второго порядка.

Модель описывает поведение одной или нескольких характеристик рассматриваемой биологической системы в пространстве и во времени.

В общем случае, её можно представить в виде зависимости $u = u(x, t)$, где u — вектор плотность популяции, x — вектор пространственных координат, t — время.

В работе [57] А.Н. Колмогоровым, И.Г. Петровским и Н.С. Пискуновым была исследована модель временно-пространственной эволюции в рамках теории, предложенной Р. Фишером.

Данные работы являются началом исследования целого класса задач математической биологии на основе дифференциальных уравнений с частными производными параболического типа. В случае одномерного ареала изменение плотности популяции $u = u(x, t)$ описывается уравнением:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u).$$

При $t > 0$ в системе начинается распространение концентраций $u(x, t)$ в области $x > 0$, которое является результатом двух процессов: случайного перемещения особей с постоянной диффузией D и естественного прироста, описываемого функцией $f(u) = u(1 - u)$. Следует отметить, что данное уравнение применяется во многих областях приложений, связанных с распространением в пространстве популяционных волн в экосистемах [37,51,65,1,4, 6,23].

При решении краевых задач для нелинейных уравнений с частными производными в задачах временно-пространственной динамики популяций используются вычислительные технологии. В этом случаи приближенное решение нестационарных задач основывается на разностном методе [108, 15, 21].

В работах А.А. Самарского и П.Н. Вабищевича [98,101] приведены исследования свойств разностных операторов, аппроксимирующих диффузионные уравнения.

Исследование численных решений математических моделей взаимодействия популяций, описываемых нелинейными уравнениями с частными производными, посвящены работы [5, 61, 62, 109].

Исследование в направлении по теории нелинейных волн, хотя велась ещё в XIX века в связи с задачами газо- и гидродинамики, она всё еще считается молодой наукой. Предметом исследования таких выдающихся ученых, как Пуассон, Стокс, Эйри, Рэлей, Буссинеск, Риман были нелинейные волновые явления. В конце 1960-х–начале 1970-х годов теория нелинейных волн считалась как единая наука. С появлением вычислительной техники, которая позволила, приблизится к решению уравнения в частных производных, описывающие распространение волн в различных средах, теория нелинейных волн бурно развивалась. Исследования Э. Ферми, Дж. Паста и С. Улама проведённые в 1940-х годах на ЭВМ, внесли значительный вклад для развития теории нелинейных волн и нелинейной физики.

Математическими моделями описываются многие физические и биологические задачи о нелинейных волнах, которые представляются в виде нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, имеющие специальные решения -волны в временно-пространственной среде.

Осуществление точного аналитического решение ряда нелинейных уравнений в частных производных, в принципе способствовало созданию мощного математического аппарата, которая стала следующим этапом развития теории нелинейных волн. Большой интерес у физиков и математиков вызвало появление этих методов, один из первых - метод обратной задачи рассеяния. Благодаря этому методу в данное время теория нелинейных волн превратилась в самостоятельное научное направление в математической физике.

§1.3 Обзор исследования по теории волн

Популяционные волны. Популяционные волны (или волны жизни) – колебания численности организмов в природных популяциях. Популяционные волны могут быть как периодическими, так и непериодическими. В 1905 году русским биологом Сергеем Сергеевичем Четвериковым был впервые введён в обиход термин «популяционная волна». В этом же году С. С. Четвериков опубликовал работу под названием «Волны жизни», в работе показано, что у всех живых организмов все популяции всегда подвержены количественным колебаниям численности входящих в них особей[114]. Волны осуществляются в математических моделях и наблюдаются в биологических системах.

В природных популяционных системах колебание численности особей, является распространённым явлением. Часто причиной колебаний могут быть природные процессы. Как известно, что численность популяции «жертвы» возрастает при уменьшении численности популяции «хищника». Например, в биологической системе типа «вредные насекомые – полезные насекомые» увеличение численности вредных насекомых приведёт к росту численности полезных насекомых. Спустя какое-то время численности полезных насекомых снизится из-за того, что уменьшится численности вредных насекомых за счёт их истребления, и полезные насекомые начнут испытывать недостаток пищи.

Популяция – совокупность особей одного вида, занимающих обособленную территорию, свободно скрещивающихся между собой и в той или иной степени изолированных от других популяций данного вида.

Численность популяции – это общее количество особей на определённой территории или в определённом объёме. Численность популяции зависит от соотношения рождаемости и смертности. Рост популяции происходит в период размножения. К сокращению численности популяции приводит смертность.

Изоляция – отделение, отграничение чего-либо или кого-либо от остальной среды.

Плотность популяции является основной её характеристикой, т.е численность или биомасса на единицу пространства, занимаемого популяцией. Это пространство называется ареалом популяции. Модели популяций, равномерно распределенных по пространству, плотность которых одинакова во всех точках ареала, хорошо изучены.

Известно, что когда однородность пространства резко нарушена, такое описание будет неверным. Распределение первоначально возникшего хаоса популяционной плотности по однородному ареалу, мы будем называть распространением популяционных волн. Например распространение вспышки насекомых-вредителей по хлопковому агроценозу или распространение насекомых-вредителей по полям, других сельскохозяйственных культур. Изолированных популяций в природе не существует - каждая популяция взаимодействует со своей биотической (популяции других видов) и абиотической (температура, влажность и т.п.) средой. Процесс рождения и гибели определяет динамику изменения плотности популяции. Если взаимодействие популяции с окружающей средой описывается обобщенными параметрами рождаемости и смертности, то мы можем рассматривать динамику изолированной популяции. Исследованию математических моделей сложных систем (например, физическим, экологическим и экономическим) посвящены многочисленные работы [4-А, 6-А, 85, 129].

Следует отметить, что математическая модель процесса рождаемости и смертности особей в изолированной популяции во многих научных работах представлена начально-краевой задачей для нелинейного дифференциального уравнения в частных производных.

Популяционные волны в популяциях людей. Численность население на земле составляет около 8 млрд человек и в настоящее время продолжает расти. С развитием земледелия, индустриализации и научно-технической революции в мире наблюдается прирост численности населения.

По причине ряда факторов таких как: опасные эпидемиологические заболевания, стихийные бедствия, войны и уничтожение источников пищи снижается численность людей.

С увеличением плотности населения увеличивается численность людей. Изменение плотности, влиянии на состояние генофонда человеческой популяции и миграции влияют на колебания численности.

Рождаемость, смертность и миграция являются факторами плотности населения. Эти факторы в свою очередь зависят от биотических, абиотических и антропогенных факторов.

Экологическая система - это сложно устроенная уникальная система, состоящая из сообществ популяций и среды их обитания, связанных между собой множествами различных, существенно нелинейных, связей [35,81].

Стоячая волна — колебательный (волновой) процесс в распределённых колебательных системах с характерным устойчивым в пространстве расположением чередующихся максимумов (пучностей) и минимумов (узлов) амплитуды. Такой колебательный процесс возникает при интерференции нескольких когерентных волн.

Стоячая волна может возникнуть в результате взаимодействия двух волн одинаковой частоты, амплитуды и длины волны, направленных навстречу друг друга.

Волновой процесс «бегущая волна» возникает при полном поглощении волны, когда отсутствует отражённая волна и интерференция волн, а амплитуда волнового процесса в пространстве постоянна.

Стоячие волны это решения волновых уравнений. Их можно представить себе как волны, которые распространяются независимо друг от друга, то есть волна не изменяет свойства среды, и другая волна распространяется так, будто первой волны нет волн.

В работе [14] сформулировано понятие качественной устойчивости, что означает сохранение устойчивости равновесия в модели экосистем при любых количественных значениях интенсивностей внутри и межвидовых взаимодействий. В работах Вито Вольтерра, А.Т. Лотки, Р.М. Мэй, Ю.М. Свирежев, Д.О. Логофета, Дж. Марри, П.И. Марчука, Дж. Джефферс, К. Уаата, М.К. Юнуси, Р.Н. Одинаева и ряда других учёных рассмотрены вопросы математического моделирования динамики численности биологических популяций. Математическим задачам устойчивости с учётом временно-возрастных и пространственных распределений посвящены обширные библиографии. Последующее исследование устойчивости математических моделей с учётом временно-возрастных и пространственных распределений для модельных биологических популяций, сообществ экосистем, стали предметами изучения работ Ю.М. Свирежева, Д.О. Логофета [106]. Профессором М.К.Юнуси [122-130] предложены и исследованы задачи управления агроценозами и охраняемыми биологическими популяциями.

Методы построения динамических систем со сложными взаимосвязями приведены в работах Г.И.Марчука[79], Ю.М.Свирежева, Е.Я.Елизарова [104], Д.О.Логофета[72], Р.А.Полуэктова[90] для применения к задачам экологии и рационального природопользования.

Самарским А.А [98] был изучен вопрос о существовании обобщённого решения для изолированной популяции с учётом временной структуры и пространственного распределения. Цыгановым М.А., Бикташевым В.Н., Бриндлином Дж., Холденом А.В., Иваницким Г.Р. [111] исследовано достаточно большое количество процессов создания структур и распространения нелинейных волн в распределённых системах, описывающихся при помощи математических моделей с кросс-диффузией. Предложен механизм создания и распространения бегущих хвостов для бактериальных популяционных волн. Предложенный механизм подтверждается проведением численных экспериментов на математической модели которая описывает распространение бактериальных популяционных волн.

В работе О.К. Кодирова, М. Гадозода, М.К.Юнуси [56] исследовались процессы распространения звука в одномерной среде, процессы малых поперечных и продольных колебаний струны, нелинейные волны гидродинамического происхождения, электромагнитные волны, распространение гравитационных волн в мелкой воде, дисперсия и диссипация энергии и гравитационные волны.

Независимо от огромного количества работ по математическому моделированию волновых популяционных процессов, вопрос о возможных хаотических сценариях, которые приводят к сложной динамике и её влияние на факторы остаётся недостаточно изученным.

Глава 2. Решение дифференциальных задач в частных производных с функциальными начальными и краевыми условиями

В данной главе исследуется линейная интегро-дифференциальная задача с функциальными начальными и краевыми условиями.

В первом параграфе для интегро-дифференциальной задачи в линейном случае доказана теорема об абсолютной равномерной сходимости рядов Фурье для 3-крайвой задачи, где коэффициенты ряда Фурье удовлетворяют интегральному уравнению типа восстановления. Во втором параграфе для неоднородной задачи с функциональными условиями получено и обосновано решение в виде рядов Фурье. В третьем параграфе доказан принципа максимума для линейных интегро-дифференциальных задач, из которого следует не отрицательность и ограниченность решений рассматриваемых задач. В четвертом параграфе приведено исследование пространственно-одномерной линейной системы с функциональными начальными условиями, описывающих состояние биологических систем.

Изложенные в этой главе результаты опубликованы в работах [1-А,2-А,3-А]

§2.1 Решение интегро-дифференциальной задачи с переменными коэффициентами

Интегро-дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами могут описывать различные физические явления, где взаимодействие между переменными может быть не только дифференцируемым, но и интегрируемым. В частности, такие уравнения могут возникать при моделировании процессов, в которых влияние предыдущих состояний системы на ее текущее состояние играет важную роль, как, например, в задачах, связанных с определением отклика системы на внешние воздействия или в моделировании динамики с учетом задержек. Математически такие уравнения могут быть записаны в виде выражений, включающих как производные по времени или пространству, так и интегралы, например, интегралы по прошлым значениям функции.

Рассмотрим в области $Q = G \times [0, t_k] \times [0, \infty], 0 \le t_k < \infty$, где $\ddot{G} = G + S, G = \{x = (x_1, x_2): 0 < x_i < L_i, L_i < \infty, i = 1,2\}, S$ $-$граница области $G,$ следующую задачу$[2 - \text{А}]$: найти решение уравнения

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial N}{\partial a} + \sum\nolimits_{i=1}^{2} \vartheta_i \frac{\partial N}{\partial x_i} = F(a,t)N + \sum\nolimits_{i=1}^{2} D_i \frac{\partial^2 N}{\partial x_i}, x \epsilon G, 0 < t \le t_k,$$

$$0 < a < \infty, \qquad (2.1.1)$$

удовлетворяющее начальным и граничным условиям:

$$N|_{t=0} = N_0(x,a), x \in \ddot{G}, 0 \le a < \infty, \qquad (2.1.2)$$

$$N|_{t=0} = \int_0^\infty B(a,t)N(x,a,t)da, x, \in \ddot{G}, 0 \le t \le t_k, \qquad (2.1.3)$$

$$N(x,a,t)|_S = 0,\ 0\ \le a \le \infty,\ 0 \le t \le t_k,\ \text{x} \in\ \ddot{G}. \qquad (2.1.4)$$

Здесь $\vartheta_i, D_i = 1,2$ – заданные положительные числа, $\mathrm{F(a,t)}, \mathrm{B(a,t)}, N_0(x,a)$ – заданные неотрицательные функции своих аргументов. Функция $N_0 = N_0(x,a),\ x \in \overline{G},\ 0 \le a < \infty,$ имеет обобщённые производные $\frac{\partial N_0}{\partial a}, \frac{\partial N_0}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 N_0}{\partial a \partial x_i}, \frac{\partial^2 N_0}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^3 N_0}{\partial a \partial x_1 \partial x_2}$ и они ограничены по $a,\ 0 \le a < \infty,\ i = 1,2.$

Заметим, что уравнение (2.1.1) описывает распределение численности некоторой популяции в точке $x \in \ddot{G}$ возраста $a \in [0, \infty)$ в момент времени $t \in [0, t_k]$, а (2.1.3) характеризует уравнение рождаемости для численности новорожденных. Задача (2.1.1) - (2.1.4) является естественным обобщением соответствующих задач на из робот [122-130], где рассматривается случай , когда N=$N(a,t)$. В дальнейшем будем предполагать, что выполнены условия согласования :

$N_0(x,a)|_S = 0, N_0(x,a) = \int_0^\infty B(a,0)N_0(x,a)da.$ В противном случае пришлось бы считать функцию $N(x,a,t)$ разрывной, что внесло бы некоторые формальные трудности, ничего не меняя по существу.

Теорема 2.1.1. *Пусть* $F(a,t) \equiv F(a), B(a,t) \equiv B(a)$ для всех $0 \le a \le \infty, 0 \le t \le t_k$, $\left|\left|F(a)\right|\right|_C < \infty, \left|\left|B(a)\right|\right|_C < \infty, \frac{\partial N_0}{\partial a} \in C_{|0,\infty)}$ и δ_{n_1,n_2}^{max}, $\delta|_{n_1,n_2}$ –

являются корнями уравнения

$$\int_0^\infty \tilde{B}_n(a) e^{-\delta a} da = 1,\ \tilde{B}_n(a) = B(a) e^{-\gamma_n a + \int_0^\infty F(\xi) d\xi}, \tag{2.1.5}$$

$n = (n_1, n_2),\ n_k = 1,2,3, \dots\ j = 2,3,4,\ k = 1,2$

Тогда решение задачи (2.1.1)-(2.1.4) *представляется в виде*

$$N_0(x,a,t) = \frac{2}{L_1, L_2} \sum_{n=1}^\infty c_2^1 e^{\delta_n^{max} t - a} + \sum_{j=1}^\infty c_n^i e^{a_n^j (t-a)} \cos\left(\omega_n^j (t - a)\right) \exp\{-\lambda_n a + + \int_0^a F(\xi) d\xi + \frac{\vartheta_1 x_1}{2D_1} + \frac{\vartheta_2 x_2}{2D_2}\} \sin\frac{\pi n_1 x_1}{L_1} \sin\frac{\pi n_2 x_2}{L_2} \tag{2.1.6}$$

$\lambda_n = \sum_{k=1}^2 \left[\frac{\vartheta^2 K}{n D_k} + D_k \left(\frac{\pi n_k}{L_k}\right)^2\right], n = (n_1, n_2), n_k = 1,2,3, \dots, k = 1,2,\ c_n^j,\ j = 1,2,3,4$, *-являются коэффициентами разложения функции*

$$\widetilde{N}_n^0(a) = \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} N_0(x,a) e^{\frac{\vartheta_1 x_1}{2D_1} - \frac{\vartheta_2 x_2}{2D_2} - \int_0^a F(\xi) d\xi + \lambda_n a} \sin\frac{\pi n_1 x_1}{L_1} \sin\frac{\pi n_2 x_2}{L_2}$$

В ряд по экспонентам с показателями

$$\beta_n^j = \delta_n^j + \lambda_n, \delta_n^j = a_n^j + i\omega_n^j, n = (\mathrm{n}_1, \mathrm{n}_2), \mathrm{n}_k = 1,2,3, \dots$$

Доказательство. Используя последовательно замены $t = a + \tau$, $\varphi(x,a,\tau) = N(x,a,a+\tau), \psi(x,a,\tau) = \varphi(x,a,\tau)\exp(-\int_0^a F(\xi) d\xi)$, уравнение (2.1.1) перепишем в следующем виде:

$$\frac{\partial \psi}{\partial a} = \sum_{j=2}^2 D_j \frac{\partial^2 \psi}{\partial \psi^2} - \vartheta_j \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \tag{2.1.7}$$

Решение (2.1.7) с учетом граничных условий (2.1.4) будем искать методом разделения переменных $\psi(x,a,\tau) = T(a,\tau) X(x_1,x_2)$ действительно,

так как

$$\frac{\partial \psi}{\partial a} = T_a^{`}(a,\tau)\ X(x_1,x_2),$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i^2} = T(a,\tau)\ X_{x_i}^{``}(x_1,x_2),$$

то

$$T^{`}(a,\tau)\ X(x_1,x_2)=\sum_{i=1}^{2} D_i T(a,\tau) X_{x_i}^{``}(x_1,x_2)$$

Отсюда

$$\frac{T_a^{`}(a,\tau)}{T(a,\tau)}=\sum_{i=1}^{2} D_i\,\frac{X_{x_i}^{``}(x_1,x_2)}{X(x_1,x_2)} \qquad (2.1.8)$$

Правая часть равенства (2.1.8) является функцией только переменного *X*, а левая только (a,τ).

Равенство (2.1.8) возможно лишь при условии, если правая и левая части равны одной и той же постоянной $-\lambda$.

Следовательно:

$$T_a^{`}(a,\tau)=-\lambda T(a,\tau), \qquad (2.1.9)$$

$$\sum_{i=1}^{2} D_i\,\frac{X_{x_i}^{``}(x_1,x_2)}{X(x_1,x_2)}=-\lambda \qquad (2.1.10)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\,|_s=0$$

Решая уравнение (2.1.9) получим:

$$T(a,\tau)=T(0,\tau)e^{\lambda a}\ .$$

Решение уравнение (2.1.10) будем искать в виде:

$$X(x_1,x_2)=X_1(x_1)X_2(x_2).$$

Легко видеть, что

$$D_1\frac{X_1^{``}}{X_1}+D_2\frac{X_2^{``}}{X_2}=-(\lambda_1^2+\lambda_2^2)$$

Отсюда

$$\frac{X_1^{``}}{X_1}=-\lambda_1^2,\quad k^2=-\lambda_1^2,\quad k_{1,2}=\pm\lambda_1 t\ ,$$

и следовательно

$$X_1(x_1)=C_1^1\cos\lambda_1 x_1+C_2^1\sin\lambda_1 x_1.$$

Так как

то в силу граничных условий (2.1.4) имеем:

$$X_1^{`}(0)=\lambda_1 C_1^1=0, \quad т.е. \quad C_1^1=0$$
$$X_1^{`}(L_1)=\lambda_1 C_2^1\cos\lambda_1 L_1=0.$$

Используя условие $X_1(x_1)\neq 0$ имеем:

$$\cos\lambda_1 L_1=0$$

Отсюда $\lambda_1=\lambda_{n_1}=\dfrac{\pi n_1}{L_1}$, где n_1 – любое целое число.

Этим собственным значениям соответствуют собственные функции $X_1(x_1)=C_2^1\sin\dfrac{\pi n_1 x_1}{L_1}$, где C_2^1 – произвольная постоянная.

Логично для $X_2(x_2)$ имеем:

$$X_2(x_2)=C_2^2\sin\frac{\pi n_2 x_2}{L_2}.$$

Таким образом

$$X_n(x_1,x_2)=C_2\sin\frac{\pi n_1 x_1}{L_1}\sin\frac{\pi n_2 x_2}{L_{21}}, \qquad C_2=C_2^1 C_2^2.$$

Коэффициенты C_2 – определим из условия нормировки:

$$(X_m X_n)=\int_0^{L_1}\int_0^{L_2} C_2^2(\sin\frac{\pi n_1 x_1}{L_1}\sin\frac{\pi n_2 x_2}{L_2})(\sin\frac{\pi n_1 x_1}{L_1}\sin\frac{\pi n_2 x_2}{L_2})dx_1 dx_2$$

При $m=n,\ m_1=n_1,\ m_2=n_2$ получим

$$C_2^2\int_0^{L_1}\int_0^{L_2}\sin^2\frac{\pi n_1 x_1}{L_1}\sin^2\frac{\pi n_2 x_2}{L_2}dx_1 dx_2=1$$

$$C_2^2\frac{L_1 L_2}{4}=1. \quad т.е. \quad C_2=\frac{2}{\sqrt{L_1 L_2}}$$

$c_n, n=\left(n_{1,}n_2\right)$ определяются из условия нормировки

$$\mathrm{c}_n\int_0^{L_1}\int_0^{L_2}\sin^2\frac{\pi n_1 x_1}{L_1}\sin^2\frac{\pi n_2 x_2}{L_2}dx_1 dx_2=1\ .$$

$\psi(x,a,\tau) = \sum_{\tau=1}^{\infty} T_n(0,\tau) c_n e^{\lambda_n a + \frac{\vartheta_1 x_1}{2D_1} + \frac{\vartheta_2 x_2}{2D_2}} \sin\frac{\pi n_1 x_1}{L_1} \sin\frac{\pi n_2 x_2}{L_2}$

(2.1.11)

где $\lambda_n = \sum_{k=1}^{2} \left[\frac{\vartheta_k^2 x_1}{4D_k} + D_k \left(\frac{\pi n_k}{L_k}\right)^2\right]$, а $c_n, n = (n_{1,} n_2)$.

Т.е $c_n = \frac{2}{\sqrt{L_1 L_2}}$. Таким образом, с учётом введенных выше обозначений из (2.1.11) получим

$$N(x,a,t) = \frac{2}{\sqrt{L_1 L_2}} \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0,\tau - a)\, e^{-} \lambda_n \varepsilon + \frac{\vartheta_1 x_1}{2D_1} + \frac{\vartheta_2 x_2}{2D_2} +$$

$$+ \int_0^a F(\xi) d\xi + \int_0^a F(\xi) d\xi) \sin\frac{\pi n_2 x_2}{L_2}, \quad \mathrm{n} = (\mathrm{n}_1, \mathrm{n}_1). \qquad (2.1.12)$$

Где $T_0(0, \mathrm{t} - a$ -пока производные функции , $\mathrm{n}_k = 1,2, \ldots k = 1,2$. Их определим так, чтобы найденные решение удовлетворяло условиям (2.1.2)-(2.1.3). Подставим (2.1.12) в (2.1.3) , введя обозначение $\mu_n(t) = T_n(0,t)$, получим интегральное уравнение типа уравнения востановления:

$$\mu_n(t) = \int_0^{\infty} B_n(a)\, \mu_n(t-a) da, 0 \le t \le t_k \qquad (2.1.13)$$

Легко видеть, что решение (2.1.13) представляется в виде

$$\mu_n(t) = \sum_{j=1}^{\infty} c_n^j\, e^{\delta^j n^t} = c_n^t e^{\stackrel{max}{n} t} + \sum_{j=2}^{\infty} c_n^j e^{a^j} \cos \omega_n^j t \qquad (2.1.14)$$

$n = (\mathrm{n}_1, \mathrm{n}_2)$ где δ_n^j являются корнями уравнения (2.1.5) c_n^j- коэффициентами разложения функции $\widetilde{N}(a)$ в ряд по экспонентам с показателями $\delta_n^j, j = 1,2 \ldots$,

. Как показано в (2.1.14), это уравнение только один вещественный (максимальный) корень δ_n^{max}, а остальные корни являются попарно сопряженными

$\delta_n^j = a_n^j + i\omega_n^j$ причем $\infty_n^j < \delta_n^{max}$

$$\int_0^{\infty} \tilde{B}_n(a) e^{-a^j n^a} \cos \omega_n^j\, ada = 1, \qquad \int_0^{\infty} \tilde{B}_n(a)\, e^{-\gamma_n a} \sin \omega_n^j ada = 0.$$

Таким образом, из (2.1.12)-(2.1.14) следует, что функция

$$N(x,a,t)=\frac{2}{\sqrt{L_1L_2}}\sum\nolimits_{n=1}^{x} c_n^i\ \exp\{\delta_n^j+\mathrm{t}_n\mathrm{a}+\int_0^a F(\xi)d\xi+\frac{\vartheta_1x_1}{2D_1}+$$

$$+\frac{\vartheta_2x_2}{2D_2}\}\sin\frac{\pi n_1x_1}{L_1}\sin\frac{\pi n_2x_2}{L_2}\}. \qquad (2.1.15)$$

Для всех $N(x,a,t)\epsilon\bar{Q}$ является решением задачи (2.1.1)-(2.1.4), так как легко видеть, что ряд (2.1.15), а также ряды для производных $\frac{\partial N}{\partial t},\frac{\partial N}{\partial a},\frac{\partial N}{\partial x_t},\frac{\partial^2 N}{\partial x^2}$ i=1,2 равномерно сходится. В силу того что $\delta_n^j=a_n^j+i\omega_n^j$

J=2,3,4,…, n, $n_{k=}1{,}2,\ldots$, k= 1,2, очевидно, формулы (2.1.6) и (2.1.15) эквивалентны. Теорема доказано.

Замечания 2.1.1. *Пусть* $\int_0^\infty \tilde{B}_n(a)da=1, n_k=1{,}2,\ldots,\ n=(n_1,n_2)$ *тогда существует стационарное решение задачи* (2.1.1)-(2.1.4) *и оно представляется в виде*

$$N^*(x,a)=\frac{2}{\sqrt{L_1L_2}}\sum\nolimits_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n a+\int_0^a F(\xi)d\xi+\frac{\upsilon_1x_1}{2D_1}+\frac{\upsilon_2x_2}{2D_2}}\sin\frac{\pi n_1x_1}{L_1}\sin\frac{\pi n_2x_2}{L_2}$$

Если $\int_0^\infty \tilde{B}_n(a)da=1, n=(n_1,n_2), n_k=1{,}2,\ldots,$ *то в формуле* (2.1.6) $\delta_n^{max}>0$, *и следовательно с ростом t функция* $N(x,a,t)$*неограниченный расчет.*

Если же $\int_0^\infty \tilde{B}_n(a)da<1, n_k=1{,}2{,}3,\ldots, n=(\mathrm{n}_1,\mathrm{n}_2)$, то $\delta_n^{max}<0$ и $N(x,a,t)\to 0$

Замечание 2.1.2. *Если* $B(a)$ *– достаточно гладкая функция (например ,* $B(a)\epsilon\, C_{[0,\infty)}$*) то* $a_n^j<\delta_n^{max}$ *и при больших t в разложении* (2.1.6) *можно пренебречь всеми членами суммы по* $j=2{,}3,\ldots$ *если же функция* $B(a)$ *является дельтаобразной функией типа* $B(a)=c\delta(a-a)$*(т.е. популяция размножается только в возрасте* $\bar{a}$*), то возможно достижение* $a_n^j=\delta_n^{max}$ *и следовательно, колебаний функции N. Периоды этих колебаний* T_j *определяется по формуле:*

$$T_j=\frac{2\pi}{\omega},\omega_j=\frac{2\pi j}{\bar{a}},j=1{,}2,\bar{a}=maxT_j$$

Теорема 2.1.2. *Пусть* $F=F(a,t),B=B(a,t)$ *тогда решение задачи* (2.1.1) *и* (2.1.4) *представляется в виде* (2.1.11), *где* $T_n(0,t-a)=\mu_{n(t-a)}$ *является решением следующего интегрального уравнение:*

$\mu_{m(t)} = \int_0^\infty \tilde{B}_n(a,t) = \mu_{n(t-a)} da, 0 \le t \ll t_k, 0 \le a < \infty$ (2.1.16)

$\tilde{B}_n(a,t) = B(a,t) exp\{-\lambda_n a \int_0^a F(\xi, \xi + t - a) d\xi, n = (n_1, n_2)\}$

Замечание 2.1.3. *Решение интегрального уравнения* (2.1.16) *представляется в виде*

$\mu_{n(t)} = \sum_{m=1}^\infty \mu_n^m(t), n = (n_1, n_2)$

где

$\mu_n^{m+1}(t) = \int_0^a \tilde{B}_n(a,t) \mu_n^m(t-a) da, n = (n_1, n_2). 0 \le t \le t_k$

§2.2. Решение линейной дифференциальной неоднородной задачи

Решение линейной дифференциальной неоднородной задачи является важной частью теории дифференциальных уравнений, используемой в математическом моделировании для описания различных физических и инженерных процессов. Линейные дифференциальные уравнения с неоднородными членами возникают в случаях, когда система описывается линейными зависимостями, но на нее действует внешнее воздействие или сила, представляемая в виде функции, не зависящей от состояния системы.

Рассмотрим следующую модельную задачу: найти решение линейного дифференциального неоднородного уравнения

$$\partial_{tax} N = F_0(a,t) N + f(x,a,t), \qquad x \in G, \quad 0 < a < \infty, \quad 0 < t \le t_{k,} \qquad (2.2.1)$$

удовлетворяющее начальным и граничным условиям:

$$N(x,a) = N_0(x,a), \quad x \in \overline{G}, \quad 0 \le a < \infty, \qquad (2.2.2)$$

$$N(x,0,t) = \int_0^\infty B_0(\xi,t) N(x,\xi,t) d\xi, \quad x \in \overline{G}, \quad 0 \le a \le t_k, \qquad (2.2.3)$$

$$N|_s = 0, \qquad (2.2.4)$$

где $\partial_{tax} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial a} + \sum_{i=1}^{2}\left[V_i \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(D_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)\right]$, $N = N(x,a,t)$ - численность популяции в точке x возраста a в момент времени t, $F_0(.), B_0(.)$ - соответственно коэффициенты смертности и рождаемости некоторой изолированной популяции.

Наряду с граничным условием (2.2.4) рассмотрим также граничное условие третьего рода

$$\left(\frac{\partial N}{\partial x_i} + \alpha_i N\right)|_s = 0, \qquad \alpha_i = -\frac{V_i}{2D_i}, \quad i = 1,2. \tag{2.2.5}$$

В дальнейшем будем предполагать, что выполнены условия согласования граничных и начальных условий.

Определение. Под решением неоднородной задачи (2.2.1) – (2.2.4) ((2.2.5)) мы будем понимать непрерывную функцию $N = N(x,a,t)$, имеющую непрерывные производные $\frac{\partial N}{\partial t}, \frac{\partial N}{\partial a}, \frac{\partial N}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 N}{\partial x_i^2}$, $i = 1,2.$ и удовлетворяющие условия (2.2.1) – (2.2.4) ((2.2.5)).

Теорема 2.2.1. *Пусть выполняются следующие условия:*

а) $F_0(a,t) = F_0(a),\ B_0(a,t) = B_0(a), \qquad D_i = const > 0.$

Функции $F_0(a),\ B_0(a), N_0(x,a)$ *определены и непрерывны по своим переменным.*

б) $|F_0(.)| \le F_0,\ |B_0(.)| \le B_0,\ |N_0(.)| \le N_0$ *где* $F_0,\ B_0,\ N_0$ *- const > 0.*

в) Функция $N_0 = N_0(x,a)$, *имеет обобщённые производные*

$\frac{\partial N_0}{\partial a}, \frac{\partial N_0}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 N_0}{\partial a \partial x_i}, \frac{\partial^2 N_0}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^3 N_0}{\partial a \partial x_1 \partial x_2}$, $i = 1,2.$ *и они ограничены по* a, $0 \le a < \infty$,

г) $\|B_0\|_{L_2[0,\infty)} < \infty$.

Тогда решение неоднородной задачи (2.2.1) – (2.2.4) *представляется в следующем виде:*

$$N(x,a,t)=e^{\int_0^a F_0(\xi)d\xi-\sum_{i=1}^{2}\frac{V_1^2a}{4D_i}+\sum_{i=1}^{2}\frac{V_iX_i}{2D_i}}\cdot\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=2}^{\infty}\mu_{n_1n_2}(t-a)e^{-\lambda_{n_1n_2}a}\sin\frac{\pi n_1x_1}{L_1}\sin\frac{\pi n_2x_2}{L_2}+$$

$$+\int_0^a\int_0^{L_1}\int_0^{L_2}G(x_1,x_2,a,x_1^`,x_2^`,a^`)f(x_1^`,x_2^`,a^`,t)dx_1^`dx_2^`da^` \qquad (2.2.6)$$

где

$$G(x_1,x_2,a,x_1^`,x_2^`,a^`)=\frac{4}{L_1L_2}\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=2}^{\infty}e^{-\lambda_{n_1n_2}(a-a^`)}\cdot\sin\frac{\pi n_1x_1}{L_1}\sin\frac{\pi n_2x_2}{L_2}\cdot\sin\frac{\pi n_1x_1^`}{L_1}\sin\frac{\pi n_2x_2^`}{L_2}$$

$$\lambda_{n_1n_2}=\sum_{i=1}^{2}D_i\left(\frac{\pi n_i}{L_i}\right)^2, \qquad n_1,n_2=1,2,3,....$$

$\mu_{n_1n_2}(t)$ - *является решением интегрального уравнения типа восстановления:*

$$\begin{cases}\mu_{n_1n_2}(t)=\int_0^{\infty}B_{n_1n_2}(\xi,t)\mu_{n_1n_2}(t-\xi)d\xi,\\ B_{n_1n_2}(a)=B_0(a)\exp\left(\int_0^a F_0(\xi)d\xi-\sum_{i=1}^{2}\frac{V_i^2a}{4D_i}-\lambda_{n_1n_2}a\right)\end{cases} \qquad (2.2.7)$$

Доказательство. Введём последовательно замены:

$$\begin{cases}t=a+\tau, \quad \varphi(x,a,\tau)=N(x,a,a+\tau),\\ \varphi(x,a,\tau)=u(x,a,\tau)\exp\left(\int_0^a F_0(\xi)d\xi-\sum_{i=1}^{2}\frac{V_i^2a}{4D_i}+\sum_{i=1}^{2}\frac{V_ix_i}{2D_i}\right)\end{cases} \qquad (2.2.8)$$

задачу (2.2.1) – (2.2.4) перепишем в следующем виде:

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial a}=\sum_{i=1}^{2}D_i\frac{\partial^2u}{\partial x_i^2}+f(x,a,\tau)\cdot\exp\left(\int_0^a F_0(\xi)d\xi-\sum_{i=1}^{2}\frac{V_i^2a}{4D_i}+\sum_{i=1}^{2}\frac{V_ix_i}{2D_i}\right),\\ x\in G,\ 0<a<\infty.\\ u(x,0,\tau)=\int_0^{\infty}B(\xi)u(x,\xi,\tau)d\xi, \quad x\in\overline{G}.\\ u|_s=0\end{cases} \qquad (2.2.9)$$

где $B(a)=B_0(a)\exp\left(\int\limits_0^a F_0(\xi)d\xi-\sum\limits_{i=1}^2\frac{V_i^2a}{4D_i}\right)$. Решение задачи (2.2.9) будем искать в виде ряда Фурье по собственным функциям.

$\left\{\sin\frac{\pi n_1x_1}{L_1}\sin\frac{\pi n_2x_2}{L_2}\right\}$:

$$u(x,a,\tau)=\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=2}^{\infty}u_n(a,\tau)\cdot\sin\frac{\pi n_1x_1}{L_1}\sin\frac{\pi n_2x_2}{L_2}, \qquad (2.2.10)$$

Для нахождения функции $u(x,a,\tau)$ достаточно определить функции $u_n(a,\tau)$. Равномерная сходимость ряда (2.2.10) и его производных доказана в первом параграфе.

Представим функцию $f(x,a,a+\tau)$ в виде ряда

$$f(x,a,a+\tau)=\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=2}^{\infty}f_n(a,a+\tau)\cdot\sin\frac{\pi n_1x_1}{L_1}\sin\frac{\pi n_2x_2}{L_2},$$

где

$$f_n(a,a+\tau)=\frac{4}{L_1L_2}\int\limits_0^{L_1}\int\limits_0^{L_2}f(x_1^`,x_2^`,a,a+\tau)\sin\frac{\pi n_1x_1^`}{L_1}\sin\frac{\pi n_2x_2^`}{L_2}dx_1^`dx_2^`, \qquad (2.2.11)$$

Подставляя предполагаемую форму решения в исходное уравнение (2.2.9), будем иметь.

$$\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=2}^{\infty}\sin\frac{\pi n_1x_1}{L_1}\sin\frac{\pi n_2x_2}{L_2}\left[\sum_{i=1}^{2}D_i\left(\frac{\pi n_i}{L_i}\right)^2\cdot u_n(a,\tau)+\frac{\partial u_n(a,\tau)}{\partial a}-f_n(a,a+\tau)\times\right.$$
$$\left.\times\exp\left[-\int\limits_0^a F_0(\xi)d\xi+\sum_{i=1}^{2}\frac{V_i^2a}{4D_i}-\sum_{i=1}^{2}\frac{V_ix_i}{2D_i}\right]\right]=0,$$

Это уравнение будет удовлетворено, если все коэффициенты разложения равны нулю, т.е.

$$\frac{\partial u_n(a,\tau)}{\partial a} = -\sum_{i=1}^{2} D_i \left(\frac{\pi n_i}{L_i}\right)^2 u_n(a,\tau) + f_n(a,a+\tau)\exp\left[-\int_0^a F_0(\xi)d\xi + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{2} \frac{V_i^2 a}{4D_i} - \sum_{i=1}^{2} \frac{V_i x_i}{2D_i}\right]. \qquad (2.2.12)$$

Решение уравнения (2.2.12) имеет вид

$$u_n(a,\tau) = u_n(0,\tau)e^{-\lambda_{n_1n_2}a} + \int_0^a e^{-\lambda_{n_1n_2}(a-a^`)} f_n(a^`,a+\tau)\cdot\exp\left[-\int_0^a F_0(\xi)d\xi + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{2} \frac{V_i^2 a}{4D_i} - \sum_{i=1}^{2} \frac{V_i x_i}{2D_i}\right] da. \qquad (2.2.13)$$

Подставляя выражение (2.2.13) для $u_n(a,\tau)$ в формул (2.2.10), получим решение исходной задачи в виде

$$u(x,a,\tau) = \sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=2}^{\infty} u_n(0,\tau)e^{-\lambda_{n_1n_2}a}\cdot\sin\frac{\pi n_1 x_1}{L_1}\sin\frac{\pi n_2 x_2}{L_2} + \sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=2}^{\infty}\left[\int_0^a e^{-\lambda_{n_1n_2}(a-a^`)} f_n(a^`,a+\tau)\times\right.$$

$$\left.\times\exp\left[-\int_0^a F_0(\xi)d\xi + \sum_{i=1}^{2}\frac{V_i^2 a}{4D_i} - \sum_{i=1}^{2}\frac{V_i x_i}{2D_i}\right]da\right]\cdot\sin\frac{\pi n_1 x_1}{L_1}\sin\frac{\pi n_2 x_2}{L_2}. \qquad (2.2.14)$$

Воспользуемся выражением (2.2.11) для $f_n(a^`,a+\tau)$ и преобразуем найденное решение (2.2.14):

$$u(x,a,\tau) = \sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=2}^{\infty} u_n(0,\tau)e^{-\lambda_{n_1n_2}a}\cdot\sin\frac{\pi n_1 x_1}{L_1}\sin\frac{\pi n_2 x_2}{L_2} + \int_0^a\int_0^{L_1}\int_0^{L_2}\left\{\frac{4}{L_1L_2}e^{-\int_0^a F_0(\xi)d\xi + \sum_{i=1}^{2}\frac{V_i^2 a}{4D_i} - \sum_{i=1}^{2}\frac{V_i x_i}{2D_i}}\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=2}^{\infty} e^{-\lambda_{n_1n_2}(a-a^`)}\cdot\sin\frac{\pi n_1 x_1}{L_1}\sin\frac{\pi n_2 x_2}{L_2}\cdot\sin\frac{\pi n_1 x_1^`}{L_1}\sin\frac{\pi n_2 x_2^`}{L_2}\right\} f(x_1^`,x_2^`,a^`,a+\tau)dx_1^`dx_2^`da^`$$

Так как $t = a+\tau$, то введя обозначение $\mu_{n_1n_2}(t) = u_{n_1n_2}(0,t)$, с учётом обозначений (2.2.8) получим

$$N(x,a,t)=e^{\int_0^a F_0(\xi)d\xi-\sum_{i=1}^{2}\frac{V_1^2 a}{4D_i}+\sum_{i=1}^{2}\frac{V_i x_i}{2D_i}}\cdot\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=2}^{\infty}\mu_{n_1n_2}(t-a)e^{-\lambda_{n_1n_2}a}\sin\frac{\pi n_1 x_1}{L_1}\sin\frac{\pi n_2 x_2}{L_2}+$$

$$+\int_0^a\int_0^{L_1}\int_0^{L_2}\left[\frac{4}{L_1L_2}\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=2}^{\infty}e^{-\lambda_{n_1n_2}(a-a^`)}\sin\frac{\pi n_1 x_1}{L_1}\sin\frac{\pi n_2 x_2}{L_2}\cdot\sin\frac{\pi n_1 x_1^`}{L_1}\sin\frac{\pi n_2 x_2^`}{L_1}\right]\times$$

$$\times f(x_1^`,x_2^`,a^`,a+\tau)dx_1^`dx_2^`da^`,\qquad x\in\overline{G},\ 0\le a<\infty,\ 0\le t\le t_k.$$

Интегральное уравнение (2.2.7) вытекает из уравнения рождаемости (2.2.3).

Равномерная по (x,a,t) сходимость рядов для производных входящих в уравнение (2.2.1) $\frac{\partial N}{\partial t},\frac{\partial N}{\partial a},\frac{\partial N}{\partial x_i},\frac{\partial^2 N}{\partial x_i^2},\quad i=1,2.$ доказывается по аналогичной методике.

Теорема 2.2.2. *Пусть* $F_0(a,t)=F_0(a),\ B_0(a,t)=B_0(a)$, *тогда решение задачи* (2.2.1) – (2.2.4) *представляется в виде*:

$$N(x,a,t)=e^{\int_0^a F_0(\xi,\xi+t-a)d\xi-\sum_{i=1}^{2}\frac{V_1^2 a}{4D_i}+\sum_{i=1}^{2}\frac{V_i x_i}{2D_i}}\cdot\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=2}^{\infty}\mu_{n_1n_2}(t-a)e^{-\lambda_{n_1n_2}a}\sin\frac{\pi n_1 x_1}{L_1}\sin\frac{\pi n_2 x_2}{L_2}$$

$$+\int_0^a\int_0^{L_1}\int_0^{L_2}\left[\frac{4}{L_1L_2}\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=2}^{\infty}e^{-\lambda_{n_1n_2}(a-a^`)}\sin\frac{\pi n_1 x_1}{L_1}\sin\frac{\pi n_2 x_2}{L_2}\cdot\sin\frac{\pi n_1 x_1^`}{L_1}\sin\frac{\pi n_2 x_2^`}{L_1}\right]\times$$

$$\times f(x_1^`,x_2^`,a^`,a+\tau)dx_1^`dx_2^`da^`,\qquad x\in\overline{G},\ 0\le a<\infty,\ 0\le t\le t_k.$$

где

$$\lambda_{n_1n_2}=\sum_{i=1}^{2}D_i\left(\frac{\pi n_i}{L_i}\right)^2,\qquad n_1,n_2=1,2,3,...$$

$\mu_{n_1n_2}(t)$ - *является решением интегрального уравнения типа восстановления*:

$$\mu_{n_1n_2}(t)=\int_0^\infty B_{n_1n_2}(\xi,t)\mu_{n_1n_2}(t-\xi)d\xi,$$

$$B_{n_1n_2}(a,t)=B_0(a,t)\exp\left(\int_0^a F_0(\xi,\xi+t-a)d\xi-\sum_{i=1}^{2}\frac{V_i^2a}{4D_i}-\lambda_{n_1n_2}a\right),$$

$$0\le a<\infty,\quad 0\le t\le t_k.$$

Рассмотрим теперь третью краевую задачу, т.е. условие (2.2.4) заменим на

$$\frac{\partial N}{\partial x_i}+\alpha_i N\,|_s=0 \;\; при \;\; x_i=0 \;\; и \;\; x_i=L_i \;\; где \;\; \alpha_i=-\frac{V_i}{2D_i},\;\; i=1.2.$$

С помощью замены (2.2.8) задача (2.2.1) – (2.2.3), (2.2.5) принимает следующий вид:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial a}=\sum\limits_{i=1}^{2}D_i\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}+f(x,a,a+\tau)\cdot\exp\left(-\int\limits_0^a F_0(\xi)d\xi+\sum\limits_{i=1}^{2}\dfrac{V_i^2a}{4D_i}-\sum\limits_{i=1}^{2}\dfrac{V_ix_i}{2D_i}\right),\\ x\in G,\;0<a<\infty.\\ u(x,0,\tau)=\int\limits_0^\infty B(\xi)u(x,\xi,\tau)d\xi,\quad x\in\overline{G}.\\ \dfrac{\partial u}{\partial x_i}\,|_s=0,\end{cases} \tag{2.2.15}$$

где $B(a)=B_0(a)\exp\left(\int_0^a F_0(\xi)d\xi-\sum_{i=1}^{2}\frac{V_i^2a}{4D_i}\right)$.

Теорема 2.2.3. *Пусть выполнены все условия теоремы 2.2.2, тогда решение задачи* (2.2.1) – (2.2.3), (2.15) *(т.е.* (2.2.15)*) представляется в виде:*

$$N(x,a,t)=e^{\int_0^a F_0(\xi)d\xi-\sum_{i=1}^{2}\frac{V_1^2a}{4D_i}+\sum_{i=1}^{2}\frac{V_ix_i}{2D_i}}\cdot\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=2}^{\infty}\mu_{n_1n_2}(t-a)e^{-\lambda_{n_1n_2}a}cos\frac{\pi n_1x_1}{L_1}cos\frac{\pi n_2x_2}{L_2}+$$

$$+\int_0^a\int_0^{L_1}\int_0^{L_2}\left[\frac{4}{L_1L_2}\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=2}^{\infty}e^{-\lambda_{n_1n_2}(a-a^`)}\cos\frac{\pi n_1x_1}{L_1}\cos\frac{\pi n_2x_2}{L_2}\cdot\sin\frac{\pi n_1x_1^`}{L_1}\sin\frac{\pi n_2x_2^`}{L_1}\right]\times$$

$$\times f(x_1^`,x_2^`,a^`,a+\tau)dx_1^`dx_2^`da^`,\qquad x\in\overline{G},\;0\le a<\infty,\;0\le t\le t_k.$$

где

$$\lambda_{n_1 n_2} = \sum_{i=1}^{2} D_i \left(\frac{\pi n_i}{L_i} \right)^2 , \qquad n_1, n_2 = 1,2,3,...$$

$\mu_{n_1 n_2}(t)$ - является решением интегрального уравнения типа восстановления:

$$\mu_{n_1 n_2}(t) = \int_0^{\infty} B_{n_1 n_2}(\xi) \mu_{n_1 n_2}(t-\xi) d\xi,$$

$$B_{n_1 n_2}(a) = B_0(a) \exp\left(\int_0^a F_0(\xi) d\xi - \sum_{i=1}^{2} \frac{V_i^2 a}{4D_i} - \lambda_{n_1 n_2} a \right),$$

$0 \le a < \infty, \quad 0 \le t \le t_k.$

§2.3. Доказательство принципа максимума для линейных интегро-дифференциальных задач с функциональными условиями

Доказательство принципа максимума для линейных интегро-дифференциальных задач с функциональными условиями является важной темой в теории дифференциальных уравнений и математическом анализе, особенно в оптимизации и управления динамическими системами. Принцип максимума, в частности, относится к максимизации или минимизации некоторой функциональной величины, и его применимость охватывает широкий спектр задач в различных областях науки и техники, таких как теории управления, теории поля и математической физике.

Рассмотрим следующую интегро-дифференциальную задачу:

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial N}{\partial a} + \sum_{i=1}^{2} V_i \frac{\partial N}{\partial x_i} = F_0(a,t)N + \sum_{i=1}^{2} D_i \frac{\partial^2 N}{\partial x_i^2}, \qquad x \in G,\ 0 < a < \infty,\ 0 < t \le t_k, \tag{2.3.1}$$

$$N(x,a,0) = N_0(x,a), \qquad x \in \overline{G},\ \ 0 \le a < \infty, \tag{2.3.2}$$

$$N(x,0,t) = \int_0^{\infty} B_0(\xi,t) N(x,\xi,t) d\xi, \qquad x \in \overline{G},\ \ 0 \le t \le t_k, \tag{2.3.3}$$

$$\left(\frac{\partial N}{\partial x_i} + \alpha_i N \right)\Big|_s = 0, \qquad \alpha_i = const, \quad i = 1.2 \tag{2.3.4}$$

Здесь функция $N = N(x,a,t),$ означает численность некоторой изолированной популяции в точке x возраста a в момент времени t. $F_0(a,t),\ B_0(a,t)$ – соответственно коэффициенты смертности и рождаемости популяции возраста a в момент времени t. $N_0(x,a)$ – заданная неотрицательная функция.

Определение. Функция $N = N(x,a,t),$ из класса $C^{2,1,1}(Q)$, удовлетворяющая уравнению (2.3.1), начальному условия (2.3.2) и граничным условиям (2.3.3) – (2.3.4) в обычном классическом смысле называется классическим решением смешанной задачи (2.3.1) – (2.3.4).

1. Априорные оценки. Основная наша целью заключается в том, чтобы установить корректность постановки задачи (2.3.1) – (2.3.4). Для этого сперва докажем справедливость следующего принципа максимума для задачи (2.3.1) – (2.3.4).

Теорема 2.3.1. *Пусть выполняются следующие условия:*

а) Функция $F_0(.),\ B_0(.),\ N_0(.)$ *определены и непрерывный по совокупности переменных. Кроме того* $F_0(a,t) \le 0,\ B_0(a,t) \ge 0$.

б) $V_i, D_i = const > 0$

в) $0 \le \max\limits_{(t,a)} \int\limits_0^a B_0(a,t)da < 1, \qquad 0 < \min\limits_{(x,t)} \int\limits_0^a B_0(a,t)da < 1$

г) $N_0(x,a) \ge 0,\ x \in \overline{G},\ 0 \le a < \infty$

Тогда справедливы оценки:

$$N(x,a,t) \ge 0 \ \textit{для всех}\ (x,a,t) \in Q = \overline{G} \times [0,\infty) \times [0,t_k], \tag{2.3.5}$$

$$\|N\|_{C(Q)} \le \|N_0\|_{C(\overline{G}\times[0.\infty))} \tag{2.3.6}$$

Доказательство. Возможны три случая:

1. Функция $N(x,a,t)$ неположительная в Q, т.е. $N(x,a,t) \le 0$ в Q, тогда очевидно, что

$$\max N(x,a,t) \le 0 \qquad (2.3.7)$$

2. Наибольшое в Q, положительное значение функция принимает в какой-либо внутренней точке (x^0, a^0, t^0), тогда в этой точке имеют место:

$\frac{\partial N}{\partial t} \ge 0, \frac{\partial N}{\partial a} \ge 0, \frac{\partial N}{\partial x_i} = 0, \frac{\partial^2 N}{\partial x_i^2} \le 0$ и следовательно:

$F_0(N,a,t) \ge 0.$ *т.е.* $N \le 0.$

3. Функция $N(x,a,t)$ своего наибольшего положительного значения достигает на границе Q, т.е. $0 \le N(x,a,t) \le \max\left\{ \max N_0, \max\limits_{S} N, \max\limits_{a=0} N \right\}$.

Таким образом, во всех случаях 1) и 3) получим

$$N(x,a,t) \le \max\left\{0, \max N_0, \max N|_{a=0}\right\} \qquad (2.3.8)$$

Рассмотрим теперь точки минимального значения функции $N(x,a,t)$ опять возможны три случая:

1. Функция $N(x,a,t)$ неотрицательна в Q, т.е. $N(x,a,t) \ge 0$ в Q, тогда получим

$$N(x,a,t) \ge \min_{Q} N(x,a,t) \ge 0$$

2. Наименшее отрицательное значение функция $N(x,a,t)$ принимает в какой-либо внутренней точке (x^0, a^0, t^0), тогда в этой точке имеют место:

$\frac{\partial N}{\partial t} \le 0, \frac{\partial N}{\partial a} \le 0, \frac{\partial N}{\partial x_i} = 0, \frac{\partial^2 N}{\partial x_i^2} \ge 0, \quad i = 1,2$ и следовательно:

$F_0(N,a,t) \le 0.$ *т.е.* $N \le 0.$

3. Функция $N(x,a,t)$ своего минимального значения достигает на границе Q, т.е. $N(x,a,t) \ge \min\left\{\min N_0, \min\limits_S N, \min N|_{a=0}\right\}$.

Таким образом, из 1) - 3) получим, что

$$N(x,a,t) \ge \min\left\{0, \min N_0, \min N|_{a=0}\right\} \tag{2.3.9}$$

Неравенства (2.3.8) и (2.3.9) перепишем в виде:

$$\min\left\{0, \min_{(x,a)} N, \min_{(x,t)} N|_{a=0}\right\} \le N(x,a,t) \le \max\left\{0, \max_{(x,a)} N_0, \max_{(x,t)} N|_{a=0}\right\} \tag{2.3.10}$$

Теперь преступим доказательству неравенства (2.3.5). Пусть

$$\max_{(x,a)} N_0 \ge \max_{(x,t)} N|_{a=0} \tag{2.3.11}$$

Тогда из (2.3.9) получим

$$N(x,a,t) \ge \min_{(x,t)} N|_{a=0} \tag{2.3.12}$$

Отсюда с учётом условий в) теоремы получим:

$$N(x,a,t) \ge \min_{(x,t)} N|_{a=0} = \min_{(x,t)} \int_0^\infty B_0(a,t)\, N(x,a,t)da \ge \min_{(x,t)} \int_0^\infty B_0(a,t)\, da \min N(x,a,t),$$

$$N(x,a,t) \ge \min_{(x,t)} \int_0^\infty B_0(a,t)\, da \min N, \qquad N(x,a,t) \ge 0$$

Отсюда:

$$\min N \ge \min_{(x,t)} \int_0^\infty B_0(a,t)\, da \min N,$$

$$\min N\left(1 - \min_{(x,t)} \int_0^\infty B_0(a,t)\, da\right) \ge 0 \tag{2.3.13}$$

Так как

$$\left(1-\min_{(x,t)}\int_0^\infty B_0(a,t)\,da\right)>0,$$

то из (2.3.13) получим $\min N(x,a,t)\geq 0$, следовательно $N(x,a,t)\geq 0$. Пусть тепер выполнено неравенство

$$\min_{(x,a)} N_0 \leq \min_{(x,t)} N\,|_{a=0} \qquad (2.3.14)$$

Тогда из (2.3.9) имеем $N(x,a,t)\geq \min N_0(x,a)\geq 0$. Таким образом, в обейх случях мы получим неравенство

$$N(x,a,t)\geq 0\,,\ \nabla\,(x,a,t)\in Q \qquad (2.3.15)$$

Оценка (2.3.5) доказана.

Наконец перейдем к доказательству оценки (2.3.6).

Пусть выполнено неравенство

$$\max_{(x,a)} N_0 \leq \max_{(x,t)} N\,|_{a=0} \qquad (2.3.16)$$

Тогда с учётом условий в) теоремы получим

$$N(x,a,t)\leq \max_{(x,a)} N_0 \leq \max_{(x,t)} N\,|_{a=0} - \max_{(x,t)}\int_0^\infty B_0(a,t)\,Nda \leq \max_{(x,t)}\int_0^\infty B_0(a,t)\,da\max N\,,$$

$$N(x,a,t)\leq \max_{(x,t)}\int_0^\infty B_0(a,t)\,da\max N\,,$$

В свою очеред, отсюда получим

$$\max N\left(1-\max_{(x,t)}\int_0^\infty B_0(a,t)\,da\right)\leq 0 \qquad (2.3.17)$$

Так как

$$\left(1-\max_{(x,t)}\int_0^{\infty} B_0(a,t)\,da\right)\geq 0,$$

То из (2.3.17) получим $\max N \leq 0$ отсюда:

$$N(x,a,t)\leq \max\left\{0,\max N_0\right\},$$
$$\left|N(x,a,t)\right|\leq \max\left|N_0\right|,$$
$$\max\left|N(x,a,t)\right|\leq \max\left|N_0\right|,$$

Следовательно:

$$\|N\|_{C(Q)}\leq \|N_0\|_{C(\overline{G}\times[0,\infty))}$$

Теорема 2.3.1 польностью доказана.

Теорема 2.3.2. *Пусть выполнены все условия* **теоремы 2.3.1**, *и кроме того, пусть* N_i *– решение задачи* (2.3.1) – (2.3.4), *соответстувующее начальным функциям* N_i^0, $i=1,2$. *Тогда справедливо неравенство*

$$\min\left\{0,\min_{(x,a)}\Delta N^0,\min_{(x,t)}\Delta N\,|_{a=0}\right\}\leq \Delta N\leq \max\left\{0,\max_{(x,a)}\Delta N^0,\max_{(x,t)}\Delta N\,|_{a=0}\right\}, \qquad (2.3.18)$$

из которого следует:

1. *если* $\Delta N^0=N_1^0(x,a)-N_2^0(x,a)\geq 0$, *то* $\Delta N=N_1(x,a,t)-N_2(x,a,t)\geq 0$ *в* *Q.*

2. $\|\Delta N\|_{C(Q)}\leq \|\Delta N^0\|_{C(\overline{G}\times[0,\infty))}$

Доказательство. Ясно, что разность решений задачи (2.3.1) – (2.3.4) $\Delta N=N_1-N_2$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Delta N}{\partial t} + \dfrac{\partial \Delta N}{\partial a} + \sum\limits_{i=1}^{2} V_i \dfrac{\partial \Delta N}{\partial x_i} = \Delta F_0 + \sum\limits_{i=1}^{2} D_i \dfrac{\partial^2 \Delta N}{\partial x_i^2}, \\ \Delta N \mid_{t=0} = \Delta N^0(x,a), \\ \Delta N \mid_{a=0} = \int\limits_0^\infty \Delta B_0 d\xi, \\ \dfrac{\partial \Delta N}{\partial x_i} + \alpha_i \Delta N \mid_s = 0 \end{cases} \qquad (2.3.19)$$

Поэтому в полной аналогии с **теоремой 2.3.1** получим, что для ΔN справедливо неравенство (2.3.18). Пусть теперь $\Delta N^0 \geq 0$. Тогда используя условия в) **теоремы 2.3.1**, получим.

$$\Delta N \geq \min \Delta N \mid_{a=0} = \min_{(x,t)} \int\limits_0^\infty B_0(a,t)\, \Delta N_1(x,a,t) da \geq \min_{(x,t)} \int\limits_0^\infty B_0(a,t)\, da \min \Delta N,$$

$$\Delta N \geq \min_{(x,t)} \int\limits_0^\infty B_0(a,t)\, da \min \Delta N,$$

Отсюда

$$\min \Delta N \geq \min_{(x,t)} \int\limits_0^\infty B_0(a,t)\, da \min \Delta N,$$

$$\min \Delta N \left(1 - \min_{(x,t)} \int\limits_0^\infty B_0(a,t)\, da\right) \geq 0$$

Так как

$\left(1 - \min\limits_{(x,t)} \int\limits_0^\infty B_0(a,t)\, da\right) \geq 0$ то получим

$\min \Delta N \geq 0,$ *в* $Q = \overline{G} \times [0,\infty) \times [0,t_k]$.

Неравенство 2) следует из второй части неравенства (2.3.18). Теорема доказана.

О корректности постановок рассматриваемых задач имеет место

Теорема 2.3.3. *Пусть выполнены условия* **теоремы 2.3.3**. *Тогда интегро – дифференциальная задача (2.3.1) – (2.3.4) имеет не более одного классического решения.*

Доказательство **теоремы 2.3.3.** непосредственно следует из **теоремы 2.3.1**, так как при выполнении условий **теоремы 2.3.1** выполняются и условия **теоремы 2.3.2**, поэтому из формулы (2.3.6) и из условия $\Delta N_0(x,a)=0$ получим $0 \le \Delta N(x,a) \le 0$, или $\Delta N(x,a) \equiv 0$ т.е. $N_1(x,a,t)=N_2(x,a,t) \forall (x,a,t) \in Q$. Имеет место

Теорема 2.3.4. *(О существовании решения третьей смешанной задачи). Пусть выполнены все условия* **теоремы 2.3.2***, тогда классическое решение задачи* (2.3.1) – (2.3.4) *существует.*

Доказательство. Рассмотрим оператор $T\overline{U}=U,$ *где* $U \in M$, $M=\left\{\overline{U}:\left\|\overline{U}\right\|_{C(Q)} \le U^{\max},\ \overline{U} \in C^{a}(Q)\right\}$, а элемент этого множества U является решением следующе краевой задачи:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial a}+\sum\limits_{i=1}^{2} V_i \dfrac{\partial u}{\partial x_i}=F_0(a,t)u+\sum\limits_{i=1}^{2} D_i \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, \qquad x \in G,\ 0<a<\infty,\ 0<t \le t_k \\ u(x,0,\tau)=\int\limits_0^{\infty} B_0(\xi,t)u(x,\xi,\tau)d\xi,\quad x \in \overline{G} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_i}+\alpha_i u\,|_S=0 \\ u(x,a,\tau)=N(x,a,a+\tau). \end{cases} \qquad (2.3.20)$$

Докажем, что классического решения задачи (2.3.20) $u(x,a,\tau)$ из класса $C^{2,1}(Q)$ существует. Для этого покажем, что $TM \subseteq M$, T непрерывно на M, и TM компактно в пространстве непрерывных функций.

Условие $TM \subseteq M$ следует из **теоремы 2.3.1**. Непрерывность T на M следует из **теоремы 2.3.2**. Для доказательства компактности TM достаточно показать, что для $U \subseteq TM$ справедлива оценка $\|U\|_{C^{a}(Q)} \le 0$.Справедливость последних оценок вытекает из свойств равномерно ограниченных решений задачи (2.3.20), причём

$S=S\left(u^{\max},\|u_0\|\right),\quad u^0=u^0\left(u^{\max},\|u_0\|\right).$

Таким образом, для оператора T выполнены все условия теоремы Шаудера [134], и , следовательно, существует неподвижная точка оператора T. т.е. $TU = U$. Так как решение задачи (2.3.20) принадлежит классу $C^{2,1}(Q)$, то задача (2.3.1) – (2.3.4) также имеет решение из $C^{2,1,1}(Q)$.

Теорема 2.3.5. *При выполнении условий* **теоремы 2.3.2** *классическое решение задачи* (2.3.1) – (2.3.4) $N(x,a,t)$ *непрерывно зависит от начальной функции* $N_0(x,a)$.

Доказательство. Если N_1, *и* N_2 любые два решения задачи (2.3.1) – (2.3.4) с начальными функциями $N_0(x,a)$ *и* $\tilde{N}_0(x,a)$ сответственно, то для разности решений $N_1(x,a,t) - N_2(x,a,t)$ анологично оценкам 2) получим оценку:

$$\left\| N_1(x,a,t) - N_2(x,a,t) \right\|_{C(Q)} \le \left\| N_0(x,a) - \tilde{N}_0(x,a) \right\|$$

Отсюда, если

$$\left\| N_0(x,a) - \tilde{N}_0(x,a) \right\| < \xi .$$

То получим

$$\left\| N_1(x,a,t) - N_2(x,a,t) \right\|_{C(Q)} \le \xi ,$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, мы показали, что вышерассмотренные задачи поставлены корректно.

§2.4. Решение пространственно-одномерных линейных задач с функциональными условиями

Решение пространственно-одномерных линейных задач с функциональными условиями представляет собой в которой рассматриваются процессы, происходящие в одномерном пространстве, но с учетом функциональных зависимостей и внешних воздействий, обусловленных условиями на границах области. Такие задачи часто встречаются в физике, инженерии и других научных дисциплинах, где требуется анализировать распределение физических величин (температуры, напряжения, плотности) вдоль одномерного пространства при заданных граничных и функциональных условиях.

Рассмотрим следующую интегро-дифференциальную задачу: требуется найти решение функции $N(x,a,t)$, удовлетворяющее уравнению

$$\frac{\partial N}{\partial t}+\frac{\partial N}{\partial a}+V\frac{\partial N}{\partial x}=F_0(a,t)N+D\frac{\partial^2 N}{\partial x^2}, \tag{2.4.1}$$

в области $0<a<\infty,\ 0<t\le t_k,\ -\infty<x<\infty$, с начальными условиями :

$$N(x,a,0)=N_0(x,a), \tag{2.4.2}$$

$$N(x,0,t)=\int_0^\infty B_0(\xi,t)N(x,\xi,t)d\xi, \tag{2.4.3}$$

В дальнейшем будем рассматривать случай, когда $F_0(.)=F_0(a),\ B_0(.)=B_0(a)$.

Введём последовательно замены ([123], [130]):

$$\begin{cases} t=a+\tau, \quad \varphi(x,a,\tau)=N(x,a,a+\tau) \\ \varphi(x,a,\tau)=u(x,a,\tau)e^{\int_0^a F_0(\xi)d\xi-\frac{V^2a}{4D}+\frac{Vx}{2D}}, \end{cases} \tag{2.4.4}$$

уравнение (2.4.1) перепишем в следующем виде:

$$\frac{\partial u}{\partial a}=D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ , \quad 0<a<\infty\ ,\ -\infty<x<\infty \tag{2.4.5}$$

Для решения уравнения (2.4.5), применим преобразования Фурье по переменной x.:

Через $\overline{U}(\lambda,a,\tau)$ обозначим преобразование Фурье функции $U(x,a,\tau)$:

$$\overline{U}(\lambda,a,\tau)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}U(\lambda,a,\tau)e^{-i\lambda x}dx \tag{2.4.6}$$

Умножим обе части уравнения (2.4.5) на $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-i\lambda x}$ и проинтегрируем по x от ∞ до $-\infty$, предполагая, что функция u и её производные достаточно бистро стремятся к нулю при $x\to\pm\infty$.

Применив интегрирование по частям, получим:

1) $$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial u}{\partial a}e^{-i\lambda x}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}U(\lambda,a,\tau)e^{-i\lambda x}dx=\frac{\partial\overline{u}(\lambda,a,\tau)}{\partial a}$$

2) $$D\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}e^{-i\lambda x}dx=D\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\partial u}{\partial x}e^{-i\lambda x}\Big|_{x=-\infty}^{x=\infty}+D\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\partial u}{\partial x}\,i\lambda u\cdot e^{-i\lambda x}\Big|_{x=-\infty}^{x=\infty}-$$
$$-D\lambda^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}U(\lambda,a,\tau)e^{-i\lambda x}dx=D\lambda^2\overline{u}(\lambda,a,\tau),$$

так как вне интегральные члены обращаются в нуль в силу ограниченности $e^{-i\lambda x}$ и стремления к нулю u и $\frac{\partial u}{\partial x}$ при $x\to\pm\infty$.

Следовательно, для преобразования Фурье искомой функции получается уравнение

$$\frac{\partial\overline{u}}{\partial a}+D\lambda^2\overline{u}=0, \qquad (2.4.7)$$

значительно более простое, чем уравнение (2.4.5).

Решим уравнение (2.4.7):

$$\frac{\partial\overline{u}}{\overline{u}}=-D\lambda^2 da,$$

следовательно:

$$\ln\overline{U}=-D\lambda^2 a+\ln C\ ,$$

и

$$\overline{U}(\lambda,a,\tau)=\bar{f}(\lambda,\tau)e^{-D\lambda^2 a} \qquad (2.4.8)$$

где $\bar{f}(\lambda,\tau)$ - произвольная функция.

Чтобы найти $u(x,a,\tau)$, применим к равенству (2.4.6) обратное преобразование Фурье:

$$u(x,a,\tau)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{u}(\lambda,a,\tau)e^{-i\lambda x}d\lambda=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\bar{f}(\lambda,\tau)e^{-D\lambda^2 a+i\lambda x}d\lambda \qquad (2.4.9)$$

С учётом обозначений (2.4.4), получим

$$N(x,a,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\int_0^a F_0(\xi)d\xi-\frac{V^2a}{4D}+\frac{Vx}{2D}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\bar{f}(\lambda,t-a)e^{-D\lambda^2a+i\lambda x}d\lambda \qquad (2.4.10)$$

Так как $\bar{f}(\lambda,\tau)$ - произвольная функция, то её подбираем так, чтобы она удовлетворяла функциональное начальное условие при $a=0$:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{Vx}{2D}}\int_{-\infty}^{+\infty}\bar{f}(\lambda,\tau)e^{i\lambda x}d\lambda=\int_0^{\infty}B_0(\xi)\,N(x,\xi,t)d\xi=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}B_0(\xi)\,e^{\int_0^{\xi}F_0(\eta)d\eta-\frac{V^2\xi}{4D}+\frac{Vx}{2D}}\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{+\infty}\bar{f}(\lambda,t-\xi)e^{-D\lambda^2\xi+i\lambda x}d\lambda d\xi. \qquad (2.4.11)$$

Сокращая обе части (2.4.11) на $e^{\frac{Vx}{2D}}$, получим:

$$f(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}B_0(\xi)\,e^{\int_0^{\xi}F_0(\eta)d\eta--\frac{V^2\xi}{4D}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\bar{f}(\lambda,t-\xi)e^{-D\lambda^2\xi+i\lambda x}d\lambda d\xi. \qquad (2.4.12)$$

Внутренний интеграл (2.4.12) равен

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\bar{f}(\lambda,t-\xi)e^{-D\lambda^2\xi}e^{i\lambda x}d\lambda=F\left[\bar{f}(\lambda,t-\xi)\right]\cdot F\left[e^{-D\lambda^2\xi}\right]=F\left[\bar{f}(\lambda,t-\xi)\right]\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-D\lambda^2\xi+i\lambda x}d\lambda=F\left[\bar{f}(\lambda,t-\xi)\right]\cdot\frac{1}{\sqrt{D\xi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\delta^2+i\frac{x}{\sqrt{D\xi}}\cdot\delta}d\delta=\left(\delta=\lambda\sqrt{D\xi}\,,d\delta=\sqrt{D\xi}\,d\lambda\right)=$$

$$=F\left[\bar{f}(\lambda,t-\xi)\right]\cdot\frac{1}{\sqrt{D\xi}}e^{-\frac{x^2}{4D\xi}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(\delta+i\frac{x}{2\sqrt{D\xi}}\cdot\delta)^2}d\delta=F\left[\bar{f}(\lambda,t-\xi)\right]\frac{1}{\sqrt{D\xi}}e^{-\frac{x^2}{4D\xi}}\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\delta^2}d\delta=F\left[\bar{f}(\lambda,t-\xi)\right]\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{D\xi}}e^{-\frac{x^2}{4D\xi}}=\sqrt{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{D\xi}}\,f(x-\lambda,t-\xi)e^{-\frac{x^2}{4D\xi}}\,d\lambda \qquad (2.4.13)$$

так как в силу [122-130]

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\delta^2}d\delta=\sqrt{\pi}$$

Подставляя (2.4.13) в (2.4.12), находим:

$$f(x,t)=\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2D\xi}}B_0(\xi)\,e^{\int_0^{\xi}F_0(\eta)d\eta--\frac{V^2\xi}{4D}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}f(x-\lambda,t-\xi)e^{-\frac{\lambda^2}{4D\xi}}d\lambda d\xi.$$

Если ввести обозначение:

$$B(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2D\xi}}B_0(\xi)\,e^{\int_0^{\xi}F_0(\eta)d\eta--\frac{V^2\xi}{4D}}$$

тогда

$$f(x,t)=\int_0^{\infty}B(\xi)\int_{-\infty}^{+\infty}f(x-\lambda,t-\xi)e^{-\frac{\lambda^2}{4D\xi}}d\lambda d\xi \qquad (2.4.14)$$

Таким образом, для определения функции $f(x,t)$ получим интегральное уравнение типа восстановления ([123],[130]).

Чтобы найти $\bar{f}(\lambda,t-a)$, применим обратное преобразование Фурье к функции $f(x,t)$:

$$\bar{f}(\lambda,t-a)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,t-a)e^{i\lambda x}dx.$$

Подставляя выражение $\bar{f}(\lambda,t-a)$, в формулу (2.4.10), получим:

$$N(x,a,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\int_0^{a}F_0(\xi)d\xi-\frac{V^2a}{4D}+\frac{Vx}{2D}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,t-a)e^{-D\lambda^2a+i\lambda(x-x`)}dxd\lambda=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\int_0^{a}F_0(\xi)d\xi-\frac{V^2a}{4D}+\frac{V\xi}{2D}}\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{+\infty}f(x`,t-a)dx`\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-D\lambda^2a}e^{i\lambda(x-x`)}d\lambda$$

В силу формулы Эйлера

$$e^{i\lambda(x-x`)}=\cos\lambda(x-x`)+i\sin\lambda(x-x`),$$

имеем

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\int_0^a F_0(\xi)d\xi - \frac{V^2 a}{4D} + \frac{Vx}{2D}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(x`, t-a)dx` \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-D\lambda^2 a} e^{i\lambda(x-x`)} d\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\int_0^a F_0(\xi)d\xi - \frac{V^2 a}{4D} + \frac{Vx}{2D}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(x`, t-a)dx` \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-D\lambda^2 a} \cos(x-x`)d\lambda + \frac{1}{2\pi} e^{\int_0^a F_0(\xi)d\xi} e^{-\frac{V^2 a}{4D} + \frac{Vx}{2D}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x`, t-a)dx` \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-D\lambda^2 a} \sin(x-x`)d\lambda \qquad (2.4.15)$$

так как

$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-D\lambda^2 a} \cos(x-x`)d\lambda$ - является чётной функцией λ,

$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-D\lambda^2 a} \sin(x-x`)d\lambda$ - является нечётной функцией λ.

Поэтому второе слагаемое в правой части (2.4.15) обращается в нуль и получаем

$$N(x,a,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\int_0^a F_0(\xi)d\xi - \frac{V^2 a}{4D} + \frac{Vx}{2D}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(x`, t-a)dx` \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-D\lambda^2 a} \cos(x-x`)d\lambda = \frac{1}{\pi} e^{\int_0^a F_0(\xi)d\xi} e^{-\frac{V^2 a}{4D} + \frac{V\xi}{2D}} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} f(x`, t-a)dx` \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-D\lambda^2 a} \cos(x-x`)d\lambda. \qquad (2.4.16)$$

Вычислим интеграл

$$I(y) = \int_0^{+\infty} e^{-D\lambda^2 a} \cos\lambda y d\lambda, \qquad (2.4.17)$$

Где $D - const > 0, \quad (y = x - x').$

Его сходимость следует, из сходимости интеграла в силу [122-130]:

$$\int_0^{+\infty} e^{-D\lambda^2 a} d\lambda.$$

Дифференцируя формально по y, получим равенство:

$$\frac{dI}{dy} = \int_0^{+\infty} e^{-D\lambda^2 a} (-\lambda) \sin\lambda y d\lambda, \qquad (2.4.18)$$

В самом деле:

$e^{-D\lambda^2 a} \cos\lambda y$ и $e^{-D\lambda^2 a} \lambda \sin\lambda y$ не прерывны при $-\infty < y < +\infty, \quad 0 \le \lambda < +\infty$

2) Интеграл (2.4.17) сходится при $-\infty < y < +\infty,$ а интеграл (2.4.18) сходится равномерно относительно y при $-\infty < y < +\infty$, в силу мажорантного признака с мажорирующей функцией $g(\lambda) = e^{-D\lambda^2 a}$.

Таким образом, равенство (2.4.18) действительно имеет место по теореме о дифференцировании несобственного интеграла по параметру.

Интегрируя в (2.4.18) по частям (по λ), получим:

$$\frac{dI}{dy} = e^{-D\lambda^2 a}\,\frac{\sin\lambda y}{2Da}\Big|_{x=0}^{x=+\infty} - \frac{y}{2Da}\int_0^\infty e^{-D\lambda^2 a}\cos\lambda d\lambda = -\frac{y}{2Da}I(y).$$

Разделяя переменные в полученном дифференциальном уравнение для $I(y)$, найдём:

$$\frac{dI}{I} = -\frac{ydy}{2Da} \qquad (2.4.19)$$

Интегрируя (2.4.19) получим:

$$I(y) = Ce^{\frac{y^2}{4Da}} \qquad (2.4.20)$$

Найдём теперь константу C:

$$I(0) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-D\lambda^2 a}d\lambda = \frac{1}{\sqrt{D\xi}}\int_0^\infty e^{-\zeta^2}d\zeta = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{Da}} \qquad (2.4.21)$$

$(\zeta = \lambda\sqrt{D\xi}\ )$,

так как в силу [122-130]

$$\int_0^\infty e^{-\zeta^2}d\zeta = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Следовательно, из (2.4.20) и (2.4.21)

$$I(0) = C = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{Da}}.$$

Подставляя в (2.4.20), будем иметь:

$$I(y)=\int_0^{+\infty} e^{-D\lambda^2 a}\cos\lambda y d\lambda=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{Da}}e^{-\frac{y^2}{4Da}}. \qquad (2.4.22)$$

Таким образом, подставляя выражение $I(y)$ в формулу (2.4.16), получим решение уравнения (2.4.1) при начальном условии (2.4.3) имеющий вид:

$$N(x,a,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\int_0^a F_0(\xi)d\xi-\frac{V^2a}{4D}+\frac{Vx}{2D}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} f(x`,t-a)e^{-\frac{(x-x')^2}{4Da}}dx` \qquad (2.4.23)$$

где $f(x`,t)$ - является решением интегрального уравнения (2.4.14).

из формулы (2.4.23) для определения функции $f(x`,t)$ при $t\le 0$ получим следующее интегральное уравнение:

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi D\xi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-x')^2}{4Da}} f(x`,t-a)dx`=\tilde{N}_0(x,a)$$

где $\tilde{N}_0(x,a)=N_0(x,a)e^{\int_0^a F_0(\xi)d\xi-\frac{V^2a}{4D}+\frac{Vx}{2D}}$, $-\infty<x<\infty,\quad 0<a<\infty$

Замечание. Если $F_0=F_0(a,t),\quad B_0=B_0(a,t)$ то в представлении (2.4.23) функция F_0 будет зависеть от $(\xi,\xi+t-a)$, а в уравнении (2.4.14) функция B_0 также будет зависеть от t.

ГЛАВА 3. Исследование нелинейных задач с учётом временно-возрастных и пространственных распределений

В данной главе приводится исследование нелинейных интегро-дифференциальных задач. В первом параграфе рассматривается математическая модель популяционных волн в нелинейных системах с учётом временно-возрастных и пространственных распределений. Во втором параграфе приводится решение нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных с функциальными начальными условиями. В третьем параграфе решена интегро-дифференциальная нелинейная система и доказано справедливость решения в случаи для 3-ей краевой задачи. Исследование стационарной численности популяций с учетом возраста и пространственного распределения приведено соответственно в четвёртом и пятом параграфе. В шестом параграфе приведено исследование численности изолированной популяции описываемой интегро-дифференциальной задачей для образования плоских, S-волн, стоячих и стационарных волн с учётом возрастного состава и пространственных распределений.

Изложенные в этой главе результаты опубликованы в работах [8-А, 9-А]

§3.1. Математическое моделирование популяционных волн в нелинейных системах с учётом временно-возрастных и пространственных распределений

Математическое моделирование популяционных волн в нелинейных системах с учётом временно-возрастных и пространственных распределений является важной и актуальной задачей в биологии, экологии, а также в теории динамических систем. Такие задачи включают в себя анализ распространения и изменения популяций с учетом различных факторов, включая не только пространственные и временные изменения, но и возрастную структуру популяций. Эти модели позволяют исследовать поведение экосистем, эволюцию биологических видов и динамику распространения заболеваний среди популяций, а также разрабатывать стратегии их управления и охраны.

Популяционные волны в таких системах обычно описываются нелинейными дифференциальными уравнениями, которые включают несколько переменных: время, пространство и возраст популяции. Важным моментом является то, что такие модели учитывают взаимодействие между различными возрастными группами популяции, а также пространственную диффузию особей в области, что имеет значительное влияние на динамику популяции в целом. Примером такой модели может быть система уравнений, состоящая из уравнений для плотности популяции, которая зависит от возраста, и уравнений для распространения популяции в пространстве.

Математическая модель процесса рождаемости и смертности особей в изолированной популяции во многих научных работах представлена начально-краевой задачей для нелинейного дифференциального уравнения в частных производных.

Рассмотрим следующие системы интегро-дифференциальных уравнений, описывающих состояние биосистемы в виде

$$\frac{\partial N}{\partial t}+\frac{\partial N}{\partial a}+\sum_{i=1}^{2} V_i \frac{\partial N}{\partial x_i}=\mathcal{F}(N,a,t)+\sum_{i=1}^{2}\mathfrak{D}_i \frac{\partial^2 N}{\partial x_{i^2}}, \qquad (3.1.1)$$

$x \epsilon G, 0<a<\infty,\ \ 0<t<t_k$

в области $\bar{Q}=\bar{G}\ [0,t_k]*[0,\infty),\ t_k<\infty,$ где $\bar{G}=G+S, G=\{x=(x_1,x_2): 0<x_i<L_i,\ L_i<\infty, i=1{,}2\}$, S- граница G.

Здесь функция N=N(x,a,t) характеризует численность некоторой изолированной популяции в точке $x\epsilon\bar{G}$ *, возраста* a*, 0<a<∞, в момент времени t,* $0\le t\le t_k$ $,\mathcal{F}=\mathcal{F}(N,a,t)$ - коэффициент смертности особей возраста a в момент времени t, $\mathcal{F}(.)\le 0$, $V_i,\mathfrak{D}_i, i=1{,}2$ - заданные неотрицательные числа.

Для выделения единственного решения уравнения (3.1.1) зададим начальные и граничные условия:

$$N(x,a,0) = N_0(x,a), x\epsilon\bar{G}\ , 0 \le a < \infty\ , \qquad (3.1.2)$$

$$N(x,0,t) = \int_0^\infty B(N(x,\xi,t),\xi,t)d\xi, \ \ x\epsilon\, G \qquad (3.1.3)$$

$$N|_S = 0, \qquad (3.1.4)$$

где B=B(.) – является коэффициентом рождаемости наряду с краевым условием (3.1.4). Задача (3.1.1) - (3.1.4) введена и изучена профессором Юнуси М.К. в [122-130]. Мы будем рассматривать аналогично 3-краевую задачу

$$\frac{\partial N}{\partial x_i} - d_i N|_{x_i=0} = 0, \qquad \frac{\partial N}{\partial x_i} - d_i N|_{x_i=L_i} = 0, d_i = const > 0, \qquad i = 1,2.$$

В дальнейшем будем предполагать, что выполнены условия согласования граничных и начальных условий.

Сформулируем основные предположения на функции, входящие в постановку (3.1.1)-(3.1.4):

a) Функции $\mathcal{F}(.)$, $B(.)$, $N_0(.)$ определены и непрерывны по совокупности переменных $V_i = const > 0,\ D_i = const > 0.$;
b) $B(N,\xi,t) = B_0(N,\xi,t), |B_0(.)| \le \mathscr{b}(\xi,t), \int_0^\infty \mathscr{b}^2\,(\xi,t)d\xi < \infty$,
$\mathcal{F}(N,a,t) = \mathcal{F}_0(N,a,t)N,\ |\,\mathcal{F}_0(.)| \le \mathcal{F}_0,\ \mathcal{F}_0 = const > 0;$
c) Функция $N_0 = N_0(x,a)$ имеет обобщенные производные: $\frac{\partial N_0}{\partial x_i}, \frac{\partial N_0}{\partial a}, \frac{\partial^2 N_0}{\partial a \partial x_i}, \frac{\partial^2 N_0}{\partial x_1 \partial x_2}\ ,\ \frac{\partial^3 N_0}{\partial a \partial x_1 \partial x_2},\ i = 1,2$ и они ограничены $x\epsilon\overline{G},\ 0 \le a < \infty;$
d) $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial N} \le 0, \quad \max\limits_{(x,t)} \int_0^\infty \left|\frac{\partial B}{\partial N}\right| d\,\xi < 1.$

Введем определение. Под решением интегро-дифференциальной задачи (3.1.1)-(3.1.4) мы будем понимать непрерывную функцию N=N(*x*,*a*,t), имеющую непрерывные производные $\frac{\partial N}{\partial t}, \frac{\partial N}{\partial a}, \frac{\partial N}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 N}{\partial x_{i^2}}, i = 1,2$ и удовлетворяющие условиям (3.1.1)-(3.1.4).

Рассмотрим случай, когда $\mathcal{F}_0(N,a,t) = \mathcal{F}_0(a)$, $B_0(N,a,t) = B_0(a)$, Введем последовательно замены введенные Юнуси [122-130].

$$\begin{cases} t = a + \tau\,, \varphi(x,a,\tau) = N(x,a,a+\tau), \\ \varphi(x,a,\tau) = u(x,a,\tau)\exp(\int_0^a \mathcal{F}_0(\xi)d\xi - \sum_{i=1}^2 \frac{{V_i}^2 a}{4\mathfrak{D}_i} + \sum_{i=1}^2 \frac{V_i x_i}{2\mathfrak{D}_i}) \end{cases} \quad (3.1.5)$$

задачу (3.1.1)-(3.1.4) представим в виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial a} = \sum_{i=1}^2 \mathfrak{D}_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_{i^2}},\ x\epsilon\overline{G}\,,\ 0 < a < \infty \\ u(x,0,\tau) = \int_0^\infty \tilde{B}\,(\xi)u(x,\xi,\tau)d\xi,\ x\epsilon\overline{G} \\ u|_{x_i=0} = 0,\ u|_{x_i=L_i} = 0,\ i = 1,2 \end{cases} \quad (3.1.6)$$

Где $\hat{B}(a) = B_0(a)\exp\left(\int_0^a \mathcal{F}_0(\xi)d\xi - \sum_{i=1}^2 \frac{{V_i}^2 a}{4\mathfrak{D}_i}\right)$.

Заметим, что условие (3.1.2) нами пока не использовано.

Теорема 3.1.1 *Пусть имеют место условия а) – с), тогда решение задачи* (3.1.1)-(3.1.4) (*или* (3.1.6)) *представляется в виде*:

$$N(x,a,t) = \frac{2}{\sqrt{L_1 L_2}} e^{\int_0^a \mathcal{F}_0(\xi)d\xi - \sum_{i=1}^2 \frac{{V_i}^2 a}{4\mathfrak{D}_i} + \sum_{i=1}^2 \frac{V_i x_i}{2\mathfrak{D}_i}} *$$

$$* \sum_{n_1 n_2 = 1}^\infty \mu_{n_1 n_2}(t-a)e^{-\lambda_{n_1 n_2} a} Sin\frac{\pi n_1 x_1}{L_1} Sin\frac{\pi n_2 x_2}{L_2} \quad (3.1.7)$$

где $\lambda_{n_1 n_2} = \sum_{i=1}^2 \mathfrak{D}_i (\frac{\pi n_1}{L_1})^2,\ n_1 = 1,2\ldots, n_2 = 1,2\ldots,$

$\mu_{n_1 n_2}(t)$ является решением интегрального уравнения типа восстановления [122-130]:

$$\mu_{n_1 n_2}(t) = \int_0^a B_{n_1 n_2}(\xi)\mu_{n_1 n_2}(t-\xi)d\xi \quad (3.1.8)$$

$$B_{n_1 n_2}(a) = \tilde{B}(a)e^{-\lambda_{n_1 n_2} a}, 0 \le a < \infty\,, 0 \le t \le t_{k,},\ n_i = 1,2\ldots, i = 1,2.$$

Доказательство: Решение задачи (3.1.6) будем искать методом разделения переменных:

$$u(x,a,\tau) = T(a,\tau)X(x_1,x_2).$$

Проводя обычные рассуждения, аналогичные ([122], [130]) имеем*:*

$$u(x,a,\tau) = \sum_{n_1 n_2=1}^{\infty} T_{n_1 n_2}(0,\tau) C_2^{n_1 n_2} e^{-\lambda_{n_1 n_2} a} Sin\frac{\pi n_1 x_1}{L_1} Sin\frac{\pi n_2 x_2}{L_2}$$

где $C_2^{n_1 n_2}$ $, n_1 = 1{,}2\ldots, n_2 = 1{,}2\ldots$ -определяются из условия нормировки*:*

$$(C_2^{n_1 n_2})^2 * \int_0^{L_1}\int_0^{L_2} Sin^2\frac{\pi n_1 x_1}{L_1} Sin^2\frac{\pi n_2 x_2}{L_2} dx_1 dx_2 = 1,$$

т.е. $C_2^{n_1 n_2} = \frac{2}{\sqrt{L_1 L_2}}$.

Так как $t=a+\tau$, то введя обозначение $\mu_{n_1 n_2}(t) = T_{n_1 n_2}(0,t)$ с учетом обозначений (3.1.5) получим (3.1.7), а из уравнения рождаемости (3.1.8) легко видеть, что функция (3.1.7) удовлетворяет линейной задаче (3.1.1)-(3.1.4). Интегральное уравнение (3.1.8) можно переписать в виде:

$$\mu_{n_1 n_2}(t) = \int_0^t B_{n_1 n_2}(\xi)\mu_{n_1 n_2}(t-\xi)d\xi + f_0(t). \qquad (3.1.9)$$

где $f_0(t) = \int_0^\infty B_{n_1 n_2}(\xi)\mu_{n_1 n_2}(t-\xi)d\xi$ – является известной функцией. Действительно, при *t=0* из (3.1.7) имеем:

$$N_0(x,a) = \frac{2}{\sqrt{L_1 L_2}} e^{\int_0^a \mathcal{F}_0(\xi)d\xi - \sum_{i=1}^2 \frac{V_i{}^2 a}{4\mathfrak{D}_i} + \sum_{i=1}^2 \frac{V_i x_i}{2\mathfrak{D}_i}} *$$

$$* \sum_{n_1; n_2=1}^{\infty} \mu_{n_1 n_2}(-a) e^{-\lambda_{n_1 n_2} a} Sin\frac{\pi n_1 x_1}{L_1} Sin\frac{\pi n_2 x_2}{L_2}.$$

Отсюда

$\mu_{n_1 n_2}(-a) = e^{-\int_0^a \mathcal{F}_0(\xi)d\xi + \sum_{i=1}^{2} \frac{V_i{}^2 a}{4\mathfrak{D}_i}} *$

$\int_0^{L_1}\int_0^{L_2} N_0(x,a) e^{-\sum_{i=1}^{2}\frac{V_i x_i}{2\mathfrak{D}_i}} Sin\frac{\pi n_1 x_1}{L_1} Sin\frac{\pi n_2 x_2}{L_2} dx_1 dx_2.$ (3.1.10)

Из (3.1.9) следует, что интегральное уравнение относительно

$\eta(t) = \frac{d\mu(t)}{dt}$, *т.е.*

$\eta_{n_1 n_2}(t) = \int_0^t B_{n_1 n_2}(\xi)\eta_{n_1 n_2}(t-\xi)d\xi + f_1(t),$ (3.1.11)

где

$$f_1(t) = \int_0^\infty B_{n_1 n_2}(\xi)\eta_{n_1 n_2}(t-\xi)d\xi, \qquad 0 \le t \le t_k$$

$\eta_{n_1 n_2}(-a)$ – определяется с помощью (3.1.10).

Известно, что уравнения (3.1.9), (3.1.11) – являются интегральными уравнениями типа Вольтера 2-го рода и гладкость их решений определяется гладкостью правых частей. Для дальнейшего доказательства теоремы нам понадобится следующая лемма:

Лемма. Справедливы оценки

$|\mu_{n_1 n_2}(t)| \le \frac{C_0}{\sqrt{n_1^3 n_2^3}},\ |\eta_{n_1 n_2}(t)| \le \frac{C_1}{\sqrt{n_1^3 n_2^3}},$ (3.1.12)

где C_0, C_1 – положительные константы не зависящие от t и C_0, C_1;

$0 \le t \le t_k,\ n_1 = 1,2 \dots, n_2 = 1,2 \dots$

В самом деле, для решений интегральных уравнений типа (3.1.9) или (3.1.11), т.е.

$$\mu(t) = \int_0^t B(\xi)\mu(t-\xi)d\xi + f(t), \qquad t \ge 0$$

справедливо разложение $\mu(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{\vec{k}}(t)$ где

$$\mu^{\vec{k}}(t) = \int_0^t B(\xi)\mu^{\vec{k}-1}(t-\xi)d\xi, \qquad \mu^0(t) = f(t), \qquad \vec{k} = 0,1 \dots$$

$0 \le t \le t_k$ причем при $|f(t)| \le f^0$, $|B(a)| \le B^0$.

Поэтому имеет место:

$$|\mu(t)| \le f^0 e^{B_0 t_k} \tag{3.1.13}$$

Следовательно, для получения оценок (3.1.12) достаточно в (3.1.13) найти число f^0, для $f(t)$ и $f_1(t)$ входящих в интегральные уравнения (3.1.9), (3.1.11). Сначала получим оценку для $f_0(t)$. Так как

$$f_0(t) = \int_0^{\infty} B_{n_1 n_2}(\xi)\mu_{n_1 n_2}(t-\xi)d\xi, \quad (\xi > t)$$

то в силу (3.1.10) имеем:

$$|\mu_{n_1 n_2}(t-a)| == e^{-\int_0^{a-t}\mathcal{F}_0(\xi)d\xi + \sum_{i=1}^{2}\frac{{V_i}^2(a-t)}{4\mathfrak{D}_i}} *$$

$$* \left| \int_0^{L_1}\int_0^{L_2} N_0(x, a-t) e^{-\sum_{i=1}^{2}\frac{V_i x_i}{2\mathfrak{D}_i}} Sin\frac{\pi n_1 x_1}{L_1} Sin\frac{\pi n_2 x_2}{L_2} \right|$$

$$\le \frac{\overline{N^0}}{n_1 n_2}\exp\left(-\int_0^{a-t}\mathcal{F}_0(\xi)d\xi + \sum_{i=1}^{2}\frac{{V_i}^2(a-t)}{4\mathfrak{D}_i}\right), \qquad a \ge t$$

где

$$\overline{N^0} = \frac{L_1 L_2}{\pi^2}\left[\sum_{x_1=0,L_1}\left|\widetilde{N}_0\right| + \sum_{x_1=0,L_1}\int_0^{L_2}\left|\frac{\partial \widetilde{N}_0}{\partial x_2}\right|dx_2 + \sum_{x_2=0,L_2}\int_0^{L_1}\left|\frac{\partial \widetilde{N}_0}{\partial x_1}\right|dx_1 \right.$$

$$\left. + \int_0^{L_1}\int_0^{L_2}\left|\frac{\partial^2 \widetilde{N}_0}{\partial x_1 \partial x_2}\right|dx_1 dx_2\right], \widetilde{N}_0 = N_0(x, a-t)e^{-\sum_{i=1}^{2}\frac{V_i x_i}{2\mathfrak{D}_i}},$$

$a \ge t$.

Отсюда

$$|f_0(t)| \le \int_t^\infty B(a) e^{\int_0^a \mathcal{F}_0(\xi)d\xi - \sum_{i=1}^2 \frac{V_i{}^2 a}{4\mathfrak{D}_i} - \lambda_{n_1 n_2} a} * \frac{\overline{\overline{N}_0}}{n_1 n_2} *$$

$$* e^{\int_0^{a-t} \mathcal{F}_0(\xi)d\xi + \sum_{i=1}^2 \frac{V_i{}^2 (a-t)}{4\mathfrak{D}_i}} da =$$

$$= \frac{\overline{N}_0}{n_1 n_2} \int_t^\infty B(a) e^{\int_{a-t}^a \mathcal{F}_0(\xi)d\xi - \lambda_{n_1 n_2} a - \sum_{i=1}^2 \frac{V_i{}^2 t}{4\mathfrak{D}_i}} da$$

$$\le \frac{\overline{\overline{N}_0}}{n_1 n_2} \int_t^\infty B(a) e^{-\lambda_{n_1 n_2} a} da$$

$$\le \frac{\overline{N}_0}{n_1 n_2} ||\tilde{B}||_{L_2} * \int_0^\infty e^{-2\lambda_{n_1 n_2} a} da \quad \le \frac{\overline{N}_0 ||\tilde{B}||_{L_2}}{n_1 n_2 \sqrt{2 \sum_{i=1}^2 \mathfrak{D}_i (\frac{\pi n_1}{L_1})^2}}$$

$$\le \frac{\overline{C_0}}{\sqrt{n_1^3 n_2^3}},$$

где

$$\bar{C}_0 = \overline{N}_0 ||\bar{B}||_{L_2} \sqrt{L_1 L_2} / \sqrt{2\pi \sqrt{\mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_2}}\ , \hat{B} = B_0 e^{\int_0^a \mathcal{F}_0 d\xi}.$$

В силу оценки (3.1.13) и последней оценки вводя обозначение $C_0 = \bar{C}_0 e^{B_0 t_k}$ получим первую оценку (3.1.12). Так как

$$\eta_{n_1 n_2}(-a) =$$

$$= \left[\mathcal{F}_0(a) + \sum_{i=1}^2 \frac{V_i{}^2}{4\mathfrak{D}_i} \right] \mu_{n_1 n_2}(-a)$$

$$+ exp(\int_0^a \mathcal{F}_0(\xi) d\xi$$

$$- \sum_{i=1}^2 \frac{V_i{}^2 a}{4\mathfrak{D}_i}) \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} \frac{\partial \widehat{N}_0}{\partial a} Sin \frac{\pi n_1 x_1}{L_1} Sin \frac{\pi n_2 x_2}{L_2} dx_1 dx_2.$$

то проводя аналогичные рассуждения, получим вторую оценку (3.1.12). Теперь покажем равномерную по *(x,a,t)* сходимость рядов для производных входящих в уравнение (3.1.1). Так как

$$\left|\frac{\partial N}{\partial t}\right| \le \varepsilon_0 \sum_{n_1, n_2 = 1}^\infty \left|\mu_{n_1 n_2}\right| e^{-\sum_{i=1}^2 \mathfrak{D}_i \left(\frac{\pi n_i}{L_i}\right)^2 a}, \qquad \varepsilon_0 = \frac{2}{\sqrt{L_1 L_2}} e^{\sum_{i=1}^2 \frac{V_i L_i}{2\mathfrak{D}_i}},$$

$$\left|\frac{\partial N}{\partial a}\right| \le \varepsilon_0 \sum_{n_1,n_2=1}^{\infty} [\left|\mu_{n_1n_2}\right|\left(|\mathcal{F}_0| + \sum_{i=1}^{2}\frac{{V_i}^2 a}{4\mathfrak{D}_i} + \sum_{i=1}^{2}\mathfrak{D}_i\left(\frac{\pi n_i}{L_i}\right)^2\right)$$

$$+ |\mu_{n_1n_2}|e^{-\sum_{i=1}^{2}\mathfrak{D}_i\left(\frac{\pi n_i}{L_i}\right)^2 a}]$$

$$\left|\frac{\partial N}{\partial x_k}\right| \le \varepsilon_0 \sum_{n_1,n_2=1}^{\infty}\left[\left|\mu_{n_1n_2}\right|\left(\frac{V_k}{2\mathfrak{D}_k} + \frac{\pi n_k}{L_k}\right)\right] e^{-\sum_{i=1}^{2}\mathfrak{D}_i\left(\frac{\pi n_i}{L_i}\right)^2 a},$$

$$\left|\frac{\partial^2 N}{\partial {x^2}_k}\right| \le \varepsilon_0 \sum_{n_1,n_2=1}^{\infty}\left|\mu_{n_1n_2}\right|\left(\frac{{V^2}_k}{4{\mathfrak{D}^2}_k} + \frac{\pi V_k n_k}{\mathfrak{D}_k L_k} + \frac{\pi^2 {n^2}_k}{{L^2}_k}\right) e^{-\sum_{i=1}^{2}\mathfrak{D}_i\left(\frac{\pi n_i}{L_i}\right)^2 a},$$

$$k = 1{,}2.$$

то при любом $a \ge \bar{a} > 0, (\bar{a} -$ любое вспомогательное число) ряды производных сходятся равномерно. Действительно, мажорантный ряд $\sum_{n_1=1}^{\infty}\varphi n_i$, *где* $\varphi n_i = c n_i^q\, exp\left[-\mathfrak{D}_i\left(\frac{\pi n_i}{L_i}\right)^2 \bar{a}\right], C = const > 0, q > 0$

сходится, так как

$$\lim_{n_i\to\infty}\left|\frac{\varphi n_{i+1}}{\varphi n_i}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n_i}\right)^q e^{-\mathfrak{D}_i\left(\frac{\pi}{L_i}\right)^2(2n_i+1)\bar{a}} = 0.$$

В силу производительности $\bar{a}$ эта сходимость имеет место при любом $\bar{a} > 0$. Теперь покажем, сходимость ряда (3.1.7) при $t=0$, $a=0$. Так как

$\left|\mu_{n_1n_2}(0)\right| \le \int_0^{\infty}|\hat{B}(a')e^{-\lambda_{n_1n_2}a'}\mu_{n_1n_2}(-a')|da'$ и

$$\left|\mu_{n_1n_2}(-a)\right| =$$

$$= exp(\int_0^a \mathcal{F}_0(\xi)d\xi$$

$$+ \sum_{i=1}^{2}\frac{{V_i}^2 a}{4\mathfrak{D}_i})\left|\int_0^{L_1}\int_0^{L_2}\widehat{N}_0(x,z) Sin\frac{\pi n_1 x_1}{L_1} Sin\frac{\pi n_2 x_2}{L_2} dx_1 dx_2\right|$$

$$\le \frac{\overline{N}_0}{n_1 n_2} exp\left(\int_0^a \mathcal{F}_0(\xi)d\xi + \sum_{i=1}^{2}\frac{{V_i}^2 a}{4\mathfrak{D}_i}\right),$$

то

$$\left|\mu_{n_1 n_2}(0)\right| \le \frac{\bar{N}_0}{n_1 n_2}\left|\int_0^a B_0(\xi) e^{-\lambda_{n_1 n_2}\xi} d\xi\right| \le \frac{\overline{C_0}}{\sqrt{n_1^3 n_2^3}}.$$

Следовательно, ряд (3.1.7) при $t=0,\ a=0$

$$|N(x,0,0)| \le \frac{2}{\sqrt{L_1 L_2}} e^{\sum_{i=1}^{2}\frac{V_i L_i}{2\mathfrak{D}_i}} \sum_{n_1,n_2=1}^{\infty} \left|\mu_{n_1 n_2}(0)\right|.$$

сходится также равномерно $x \in \bar{G}$. Теорема доказана.

Теперь рассмотрим 3-ю краевую задачу, т.е. задачу нахождения решения уравнения (3.1.1), удовлетворяющая начальному условию (3.1.2) и граничным условиям (3.1.3), (3.1.4).

С помощью замены (3.1.6) эта задача перепишется в виде:

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial a} = \sum_{i=1}^{2} \mathfrak{D}_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_{i^2}},\ x \epsilon \overline{G},\ 0 < a < \infty \\ u(x,0,\tau) = \int_0^\infty \tilde{B}\,(\xi) u(x,\xi,\tau) d\xi, \\ \frac{\partial u}{\partial x_i}|_{x_i=0} = 0,\ \frac{\partial u}{\partial x_i}|_{x_i=L_i} = 0.\end{gathered} \tag{3.1.14}$$

Теорема 3.1.2. *Пусть имеют место условия а) – в), тогда решение задачи* (3.1.1)-(3.1.4) *представляется в виде:*

$$|N(x,a,t)| =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{L_1 L_2}} e^{\int_0^a \mathcal{F}_0(\xi) d\xi - \sum_{i=1}^{2} \frac{{V_i}^2 a}{4\mathfrak{D}_i} + \sum_{i=1}^{2} \frac{V_i x_i}{2\mathfrak{D}_i}} e^{-\lambda_{n_1 n_2} a} Cos \frac{\pi n_1 x_1}{L_1} Cos \frac{\pi n_2 x_2}{L_2}.$$

где $\lambda_{n_1 n_2} = \sum_{i=1}^{2} \mathfrak{D}_i \left(\frac{\pi n_i}{L_i}\right)^2$, $\mu_{n_1 n_2}(t)$ является решением интегрального уравнения (3.1.8).

Теорема 3.1.2 доказывается аналогично **теореме 3.1.1.**

Замечание. Если $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_0(a,t)$, $B_0 = B_0(a,t)$, то решение задачи (3.1.1)-(3.1.4) представляется в виде (3.1.7) где функция $\mathcal{F}_0(\xi)$ в экспоненте заменяется на $\mathcal{F}_0(\xi, t-a+\xi)$ и ядро интегрального уравнения (3.1.8) будет зависеть от *t.*

Мы подробно рассмотрели проблемы волн в изолированных популяциях. Решение проблемы популяционной волны осуществляется переходом от задачи для уравнения в частных производных к задаче качественной теории для системы обыкновенных дифференциальных уравнений на плоскости, которая имеет хорошо развитый аналитический аппарат. Этим методом мы пришли к устойчивости волн.

Популяционная волна представляет собой переходный процесс от некоторого изначально неустойчивого пространственного распределения популяционной плотности к устойчивому конечному распределению, равномерному в пространстве. Краевые условия (нуль на одном конце и ненулевая константа на другом) позволяют найти стационарное решение популяционной волны.

§3.2. Решение нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных с функциальными начальными условиями

Нелинейные уравнения в частных производных описывают широкий спектр процессов, где взаимодействие между переменными не является линейным, что делает такие уравнения более сложными для анализа и решения, чем линейные аналоги. Учет функциональных начальных условий, где начальные данные зависят от более сложных функций, а не от простых числовых значений, добавляет дополнительную сложность и требует применения разных методов для нахождения решений.

Рассмотрим нелинейную задачу

$$\frac{\partial N}{\partial t}+\frac{\partial N}{\partial a}+\sum_{i=1}^{2} V_i \frac{\partial N}{\partial x_i}=\mathcal{F}(N,a,t)+\sum_{i=1}^{2} \mathfrak{D}_i \frac{\partial^2 N}{\partial x_{i^2}}, \qquad (3.2.1)$$

$$x\epsilon G, 0<a<\infty, \quad 0<t<t_k$$

$$N(x,a,0)=N_0(x,a), x\epsilon \bar{G}\ , 0\le a<\infty\ , \qquad (3.2.2)$$

$$N(x,0,t)=\int_0^\infty B(N(x,\xi,t),\xi,t)d\xi, \quad x\epsilon\, G \qquad (3.2.3)$$

$$N|_S=0, \qquad (3.2.4)$$

где B=B(.) – является коэффициентом рождаемости наряду с краевым условием (3.2.4). Задача (3.2.1)-(3.2.4) введена и изучена профессором Юнуси М.К. Мы будем рассматривать аналогично 3-краевую задачу

[9-15]:

$$\frac{\partial N}{\partial x_i} - d_i N|_{x_i=0} = 0, \qquad \frac{\partial N}{\partial x_i} - d_i N|_{x_i=L_i} = 0, d_i = const > 0, \qquad i = 1,2$$

(3.2.1)-(3.2.4) из §1. Введем замену:

$$M(x,a,t) = N(x,a,t) - N^*$$

где N=N(x,a,t) – является решением задачи (3.2.1)-(3.2.4)

$N^* = N^*(x,a)$ – Решение стационарной задачи с учетом пространственных координат:

$$\frac{\partial N^*}{\partial a} + \sum_{i=1}^{2} V_i \frac{\partial N^*}{\partial x_i} = \mathcal{F}(N^*,a) + \sum_{i=1}^{2} \mathfrak{D}_i \frac{\partial^2 N^*}{\partial x_{i^2}}, \qquad x \epsilon \overline{G}, \qquad 0 < a < \infty$$

$$\mathrm{N}^*(x,0) = \int_0^\infty \widetilde{\mathrm{B}}\,(\mathrm{N}^*,\xi)\mathrm{d}\xi, \tag{3.2.5}$$

$$\mathrm{N}^*|_{\mathrm{S}} = 0.$$

Или стационарное решение однородное по пространственным координатам задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial N^*}{\partial a} = \mathcal{F}(N^*,a), \ \ 0 < a < \infty \\ N^*(0) = \int_0^\infty B\,(N^*,\xi)d\xi \end{cases} \tag{3.2.6}$$

Тогда легко видеть, что первое приближение задачи (3.2.1)-(3.2.1) имеет вид:

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial a} + \sum_{i=1}^{2} V_i \frac{\partial^2 M}{\partial x_i} = \mathcal{F}_0(a)M + \sum_{i=1}^{2} \mathfrak{D}_i \frac{\partial^2 M}{\partial x_{i^2}}, x \epsilon \overline{G} \quad 0 < a < \infty$$

$$M(x,a,0) = M_0(x,a) = N_0(x,a) - N^*, \tag{3.2.7}$$

$$M(x,0,t) = \int_0^\infty B_0\,(\xi)M(x,\xi,t)d\xi$$

$$N^*|_S = 0.$$

где $\mathcal{F}_0(a) = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial N}|_{N^*(a)}$, $B_0(a) = \frac{\partial B}{\partial N}|_{N^*(a)}$,

$N^*(a)$ – является решением задачи (3.2.7) (или $N^*(a) = \max_x N^*(x,a)$ для задачи (3.2.5). Используя теорему 3.1.1 из §.1 решение задачи (3.2.7) представим в следующем виде:

$$M(x,a,0)=\frac{2}{\sqrt{L_1L_2}}e^{\int_0^a \mathcal{F}_0(\xi)d\xi-\sum_{i=1}^{2}\frac{V_i{}^2 a}{4\mathfrak{D}_i}+\sum_{i=1}^{2}\frac{V_i x_i}{2\mathfrak{D}_i}}\sum_{n_1,n_2=1}^{\infty}\mu_{n_1n_2}(t-a)\,e^{-\lambda_{n_1n_2}a}Cos\frac{\pi n_1x_1}{L_1}Cos\frac{\pi n_2x_2}{L_2} \qquad (3.2.8)$$

где $\lambda_{n_1n_2}=\sum_{i=1}^{2}\mathfrak{D}_i\left(\frac{\pi n_i}{L_i}\right)^2$, $\mu_{n_1n_2}(t)$- удовлетворяет интегральному уравнению т.е.

$$\mu_{n_1n_2}(t)=\int_0^{\infty}B_{n_1n_2}(\xi)\mu_{n_1n_2}(t-\xi)d\xi, \qquad (3.2.9)$$

$$B_{n_1n_2}(a)=B_0(a)e^{\int_0^a \mathcal{F}_0(\xi)d\xi-\sum_{i=1}^{2}\frac{V_i{}^2 a}{4\mathfrak{D}_i}-\lambda_{n_1n_2}a},$$

$0\le t\le t_k,\ \ 0\le a<\infty.$

Решение (3.2.9) будем искать в виде

$\mu_{n_1n_2}(t)=C_{n_1n_2}e^{\delta_{n_1n_2}t}$, *где* $C_{n_1n_2}\neq 0.$

Тогда легко видеть, что числа $\delta_{n_1n_2}$ являются корнями следующего характеристического уравнения:

$$f(\delta)=\int_0^{\infty}B_{n_1n_2}(\xi)e^{-\delta\xi}d\xi=1 \qquad (3.2.10)$$

Известно, что уравнение типа (3.2.10) относительно δ имеет один вещественный максимальный корень, а остальные корни комплексно сопряженные.

Так как f(0)>0, f’(0)<0, f’’(0)>0, то уравнение (3.2.10) при $\int_0^{\infty}B_{n_1n_2}(\xi)d\xi=1$ имеет только комплексно-сопряженные корни с отрицательной вещественной частью. Если $\int_0^{\infty}B_{n_1n_2}(\xi)d\xi>1$, то максимальный вещественный корень уравнения положителен и при $\int_0^{\infty}B_{n_1n_2}(\xi)d\xi<1$, он отрицателен. Следовательно, имеет место:

$$\lim_{t\to\infty}\mu_{n_1n_2}(t)=\begin{cases}0,\text{при }\displaystyle\int_0^{\infty}B_{n_1n_2}(\xi)d\xi\le 1\\ \infty,\text{при }\displaystyle\int_0^{\infty}B_{n_1n_2}(\xi)d\xi>1\end{cases}$$

Таким образом однородное по пространственным переменным стационарное решение задачи (3.2.7) $N^* = N^*(a)$ при $\int_0^\infty B_{n_1 n_2}(\xi)d\xi \leq 1$ асимптотически устойчиво.

Замечание 3.2.1. Так как $f(\delta) = f(0) + \delta f'(\xi)$, то имеет место неравенство полученное профессором Юнуси М.К

$$\frac{f(0)-1}{\int_0^\infty aB(a)da} \leq \delta \leq \frac{f(0)-1}{\int_0^\infty aB(a)e^{-\delta a}da}$$

Отсюда следует, что если *B(a)* – плотность распределения возрастного состава популяций, то f(0)=1 и $\delta^{\max} = 0$

Теорема. 3.2.1. *Пусть имеет место условия а)-в) из* **§**.*1, тогда существует единственное решение нелинейной интегро-дифференциальной задачи* (3.2.1)-(3.2.4)

Доказательство. Существование решения доказывается с помощью теоремы Шаудера аналогично работе [134]. Докажем единственность. Пусть существует два решения задачи (3.2.1)-(3.2.4), *N'* и *N''* Обозначим *M(x,a,t)=N'(x,a,t)-N''(x,a,t)* легко видеть, что функция *M=M(x,a,t)* является решением следующей интегро-дифференциальной задачи:

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial a} + \sum_{i=1}^{2} V_i \frac{\partial M}{\partial x_i}$$
$$= [\mathcal{F}(N', a, t) - \mathcal{F}(N'', a, t)]$$
$$+ \sum_{i=1}^{2} \mathfrak{D}_i \frac{\partial^2 M}{\partial x_{i^2}}, \qquad x\epsilon G\,, \qquad 0 < a < \infty, \qquad 0 < t \leq t_k$$

$$M|_{t=0} = M_0(x,a) = 0$$

$$M(x,0,t) = \int_0^\infty B\,(N'(x,\xi,t),\xi,t) - B(N''(x,\xi,t),\xi,t)d\xi$$

$$M|_S = 0$$

Возможны три случая:

1) Функция M не положительна в $\bar{Q}$, т.е.

$$M(x,a,t) < maxM \leq 0$$

2) Наибольшее положительное значение функции M принимает в какой-либо

внутренней точке *(*x^0,a^0,t^0*)*, тогда в этой точке имеют место:

$$\frac{\partial M}{\partial t} \geq 0, \qquad \frac{\partial M}{\partial a} \geq 0, \qquad \frac{\partial M}{\partial x_i} = 0, \qquad \frac{\partial^2 M}{\partial x_i^2} \leq 0$$

И, следовательно,

$$[\mathcal{F}|_{N'} - \mathcal{F}_{N''}] \geq 0$$

т.е.

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial N}|_{\bar{N}} M \geq 0 \quad \text{и} \quad M \leq 0$$

3) Функция M своего наибольшего положительного значения достигает на границе Q, т.е.

$$0 \leq \max_{Q} M \leq max\{maxM|_{t=0,} \max_{S} M,\ maxM|_{a=0}\}$$

Таким образом во всех случаях справедливо неравенство

$$M(x,a,t) \leq max\{0, maxM|_{a=0}\}$$

Отсюда

$$|M(x,a,t)| \leq \max_{(x,t)} \int_0^\infty |B|_{N'} - B|_{N''}| d\xi = \max_{(x,a,t)} |M| \max_{(x,t)} \int_0^\infty |\frac{\partial B}{\partial N}|_{\bar{N}}| d\xi$$

И следовательно

$$\left(1 - \max_{(x,t)} \int_0^\infty \left|\frac{\partial B}{\partial N}|_{\bar{N}}\right| d\xi\right) ||M||_{C(\bar{Q})} \leq 0$$

Так как $\max_{(x,t)} \int_0^\infty \left|\frac{\partial B}{\partial N}|_{\bar{N}}\right| d\xi < 1$*, то* $||M||_{C(\bar{Q})} = 0$ *т,е. N'=N''*

Теорема доказана.

Замечание 3.2.2. Теорема справедлива в случае, когда

$\mathfrak{D} = \mathfrak{D}(N) > 0,\ \ V = V(N) > 0.$

§3.3. Решение интегро-дифференциальных нелинейных систем

Рассмотрим следующую задачу:

$$\frac{\partial N}{\partial t}+\frac{\partial N}{\partial a}+\sum_{i=1}^{2}V_i\frac{\partial N}{\partial x_i}=F(N,a,t)+\sum_{i=1}^{2}D_i\frac{\partial^2 N}{\partial {x_i}^2} \qquad (3.3.1)$$

$x\in G$, $0<a<\infty$, $0<t<t_k$

$$N(x,a,o)=N_0(x,a),\ x\in G,\ 0\le a<\infty \qquad (3.3.2)$$

$$N(x,o,t)=\int_0^\infty B(N(x,\xi,t),\xi,t)d\xi \qquad (3.3.3)$$

$$N\big|_S=0 \qquad (3.3.4)$$

где $N=(N_1,N_2,...,N_m)$, $N_i=N_i(x,a,t)\ge 0.$ $i=\overline{1,m}$,

$$F(\cdot)=\begin{pmatrix} f_n(\cdot) & ... & f_{1m}(\cdot)\\ - & - & -\\ f_{m1} & ... & f_{mm}(\cdot)\end{pmatrix},\ B(\cdot)=\begin{pmatrix} b_n(\cdot) & ... & b_{1m}(\cdot)\\ - & - & -\\ b_{m1} & ... & b_{mm}(\cdot)\end{pmatrix},$$

$$V_i=\begin{pmatrix} V_{j1} & 0 & ... & 0\\ - & - & - & -\\ 0 & 0 & ... & V_{im}\end{pmatrix},\ D_i=\begin{pmatrix} d_{j1} & 0 & ... & 0\\ - & - & - & -\\ 0 & 0 & ... & d_{im}\end{pmatrix};$$

V_{ij}, d_{ij} - заданные постоянные числа, причем

$\exists\ Z(a)$: ${Z_{(a)}}^{-1}V_iZ(a)=V_i^0$, ${Z_{(a)}}^{-1}D_iZ(a)D_i^0$, $0\le a<\infty$,

f_{ij}, b_{ij}, N_0^i - заданные непрерывные функции

$\lim\limits_{a\to\infty}F(\cdot)=0$, $\lim\limits_{a\to\infty}B(\cdot)=0$

Сначала рассмотрим случай, когда:

$F(N,a,t)=F_0(a)N$,

$B(N,a,t)=B_0(a)N$

В работе [130-138] доказано, что решение задачи (3.3.1) – (3.3.4) представляется в виде:

$$N(x,a,t)=\frac{2}{\sqrt{L_1L_2}}Z(a)\sum_{n_1,n_2=1}^{\infty}E_{\lambda n_1n_2}(a)\mu_{n_1n_2}(t-a)\cdot Sin\frac{\pi n_1x_1}{L_1}\cdot Sin\frac{\pi n_2x_2}{L_2}\cdot E_{DV}(x),$$

$$x\in\overline{G},\ 0\le a<\infty,\ \ 0\le t\le t_n \qquad (3.3.5)$$

$$Z(a)=\sum_{j=0}^{\infty}Z_j(a),\ Z_j(a)=\int_0^a F_0(\xi)Z_{j-1}(\xi)d\xi,\ Z_0=I,$$

$$E_{\lambda n_1n_2}(a)=\begin{pmatrix} e^{-\lambda^n{}_{n_1n_2}a} & 0 & \dots & 0\\ - & - & - & -\\ 0 & 0 & \dots & e^{-\lambda^m{}_{n_1n_2}a}\end{pmatrix},\ E_{DV}(x)=\begin{pmatrix} e^{\sum_{i=1}^{2}\frac{V_{ji}\pi_i}{2\pi_{ji}}} & 0 & \dots & 0\\ - & - & - & -\\ 0 & 0 & \dots & e^{\sum_{i=1}^{2}\frac{V_{ji}\pi_i}{2\pi_{ji}}}\end{pmatrix} \qquad (3.3.6)$$

$\mu_{n_1n_2}(t)$- является решением системы интегральных уравнений типа восстановления

$$\mu_{n_1n_2}(t)=\int_0^{\infty}B_{n1n2}(\xi)\mu_{n_1n_2}(t-\xi)d\xi\,, \qquad (3.3.7)$$

$$B_{n_1n_2}(a)=B_0(a)Z(a)E_{\lambda n1n2}(a),\ 0\le a<\infty$$

Мы докажем справедливость (3.3.5) для случая 3-ой краевой задачи.

Действительно, вводя замены $a=a$, $t=a+\tau$

$\varphi(x,a,\tau)=N(x,a,a+\tau)$ уравнение (3.3.1) перепишем в виде:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a}+\sum_{i=1}^{2}V_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}=F_0(a)\varphi+\sum_{i=1}^{2}D_i\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i^{\ 2}} \qquad (3.3.8)$$

Предположим, что $Z=Z(a)$ является решением следующей задачи:

$$\frac{\partial Z}{\partial a}=F_0(a)Z\,,\ Z(0)=I \qquad (3.3.9)$$

Легко видеть, что для решения последней задачи имеет место представление (3.3.6) и справедлива оценка:

$$|Z(a)|\le e^{hcE}\,,\ h_0=\int_0^\infty \|F_0(\xi)\|d\xi\,,\ h_0<\infty\,,$$

$$E=\begin{pmatrix}1 & 1 & \dots & 1\\ - & - & - & -\\ 1 & 1 & \dots & 1\end{pmatrix}$$

В самом деле, так как $\lim\limits_{a\to 0}F_0(a)=0$, то существует матрица $F_0{}^0$, такая, что

$$|F_0(a)|\le F_0^0\,,$$

Следовательно $\left|Z_j(a)\right|\le\int_0^a F_0^0\left|Z_{j-1}\right|\le\dots\le\dfrac{F_0^{0\,j}a^j}{j!}\,,\ 0\le a<\infty$

$j=0,1,\dots$, т.е. существует мажорирующий ряд для ряда (3.3.6) и $|Z|\le e^{F_0^0 a}$. Таким образом, ряд (3.3.6) сходится равномерно и его можно дифференцировать, а матрица Z, тогда удовлетворяет (3.3.9). Введем замену $\varphi=ZU$ тогда функция $U=(U_1\dots U_m)$ удовлетворяет задаче:

$$\frac{\partial U_k}{\partial a}+\sum_{i=1}^2 V_{ik}\frac{\partial U_k}{\partial x_i}=\sum_{i=1}^2 D_{ik}\frac{\partial^2 U_k}{\partial x_k{}^2}\,,\quad \begin{matrix}x\in G\\ 0<a<\infty\end{matrix}$$

при условии $U_k\big|_S=0$, решения последних уравнений представим в виде:

$$U_k(x,a,\tau)=\frac{2}{\sqrt{L_1L_2}}\sum_{n1n2=1}^\infty \mu_{n1n2}^k(\tau)e^{-\lambda_{n1n2}^k a}\cos\frac{\pi n_1x_1}{L_1}\cdot\cos\frac{\pi n_2x_2}{L_2}e^{\sum_{i=1}^2\frac{V_{ik}x_i}{2D_{ik}}}\,,\quad k=1,m\,,$$

$$\lambda_{n1n2}^k=\sum_{i=1}^2\left[\frac{V_{ik}{}^2}{4D_{ik}}+D_{ik}\left(\frac{\pi n_i}{L_i}\right)^2\right],\quad \begin{matrix}n_1=1,2\dots\\ n_2=1,2\dots\\ k=1,2\dots m\end{matrix}$$

Так как функция $\mu^k{}_{n1n2}(\tau)$, произвольные, то их определим так, чтобы имели место условия (3.3.2), (3.3.3) Для этого вводя обозначение $\mu_{n1n2}(t)=\left(\mu^1{}_{n1n2}(t)...,\mu^m{}_{n1n2}(t)\right)$ и учитывая выше введенные замены и обозначения в силу последних формул получим (3.3.5), (3.3.6). Интегральное уравнение (3.3.7) можно переписать в виде:

$$\mu_{n1n2}(t)=\int_0^t B_{n1n2}(\xi)\mu_{n1n2}(t-\xi)d\xi+f(t)$$

где

$$f(t)=\int_t^\infty B_{n1n2}(\xi)\mu_{n1n2}(t-\xi)d\xi$$

В силу условия (3.3.2) является известной функцией. Действительно, при *t=0* из (3.3.5) имеем:

$$N_0(x,a)=\frac{2}{\sqrt{L_1L_2}}Z(a)\sum_{n_1,n_2=1}^{\infty}E_{\lambda n_1n_2}(a)\mu_{n_1n_2}(t-a)\cdot\cos\frac{\pi n_1x_1}{L_1}\cdot\cos\frac{\pi n_2x_2}{L_2}\cdot E_{DV}(x),$$

$$\mu_{n_1n_2}(-a)=E^{-1}{}_{\lambda n_1n_2}(a)Z^{-1}(a)\int_0^{L_1}\int_0^{L_2}N_0(x,a)E^{-1}{}_{DV}(x_1,x_2)dx_1dx_2$$

Аналогично, для интегрального уравнения:

$$\dot{\mu}_{n1n2}(t)=\int_0^t B_{n1n2}(\xi)\dot{\mu}_{n1n2}(t-\xi)d\xi+f_1(t),$$

функция $f_1(t)=\int_t^\infty B_{n1n2}(\xi)\dot{\mu}_{n1n2}(t-\xi)d\xi$

становится известной функцией.

Решение системы интегральных уравнений (3.3.1) можно представить в виде:

$$\mu_{n_1n_2}(t)=\sum_{k=0}^{\infty}C^k{}_{n_1n_2}(a)e^{\delta^k_{n1n2}t}$$

где $C^k{}_{n_1n_2}$ постоянные вектора, $k=1,2...$, а δ^k_{n1n2} являются решением следующего характеристического уравнения:

$$\det\left(I-\int_0^{\infty}B_{n_1n_2}\xi e^{-\delta\xi}d\xi\right)=0 \qquad (3.3.10)$$

или $\det(\delta I-A(\delta))=0$, $\delta\neq 0$

$$A(\delta)=B_0(0)+\int_0^{\infty}e^{-\delta\xi}dB_{n1n2}$$

Заметим, что $siqnA=siqn\widetilde{F}_0$, где $F_0(a)\equiv F_0^0=(дополнить)$

$B_0(a)\equiv B_0=consc,\widetilde{F}_0=F_0+B_0$

Если матрица $B_{n1n2}(a)\geq 0$, $\|B_{n1n2}(a)\|\leq 1$ и $B^1{}_{n1n2}(a)\leq 0$, тогда вещественные части корней характеристического уравнения (3.3.10) не положительны.

Замечание 3.3.1. Пусть $M(x,a,t)=N(x,a,t)-N^0(a)$, где $N=N(x,a,t)$является решением нелинейной задачи (3.3.1) – (3.3.4), $N^0=N^0(a)$ удовлетворяет стационарной задаче типа (3.2.7):

$$\frac{\partial N}{\partial a}=F(N^0,a),N^0(0)=\int_0^{\infty}B(N^0,\xi)d\xi, \qquad (3.3.11)$$

тогда решение задачи первого приближения задачи (3.3.1) – (3.3.4) представляется в виде (3.3.5), где $F_0(a)=\frac{\partial F}{\partial N}\Big|_{N^0},B_0(a)\frac{\partial B}{\partial N}\Big|_{N^0}$

§3.4.Исследование стационарного решения с учётом возраста

Рассмотрим стационарную численность популяций модельных биосистем, описываемых следующей интегро-дифференциальной системой:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial N}{\partial a} = F(N, a), 0 < a < \infty \\ N(0) = \int\limits_0^\infty B(N(\xi), \xi) d\xi \end{cases} \qquad (3.4.1)$$

где $N(a) = (N_1(a)..., N_m(a))$- стационарная численность возраста *a,* $0 < a < \infty$: $F(\cdot), B(\cdot)$-*m* –мерный вектор функции, характеризующие «смертность» и «рождаемость» в биосистеме и являются непрерывными, ограниченными функциями.

Определение. Под решением задачи (3.4.1) будем понимать непрерывную функцию *N=N(a),* $0 \le a < \infty$, которая непрерывную производную и удовлетворяет условиям (3.4.1)

Линейная задача. Пусть система (3.4.1) задана в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial N}{\partial a} = A_0(a)N + \alpha(a), 0 < a < \infty \\ N(0) = \int\limits_0^\infty B_0(\xi) N(\xi) d\xi + \beta \end{cases} \qquad (3.4.2)$$

где $A_0(a), B_0(a) - m \times m$- матрицы $\alpha(a), \beta, m$- мерные вектора,

$$\begin{cases} \int\limits_0^\infty \|A_0(a)\| da = h_2 < \infty, \int\limits_0^\infty \|\alpha(a)\| da < \infty \\ \int\limits_0^\infty \|B_0(a)\| d\xi < e^{-h_0} \end{cases} \qquad (3.4.3)$$

Рассмотрим однородную задачу (3.4.2), т.е. $\alpha(a) = 0, < a < \infty, \beta = 0$. Легко видеть, что функция

$N(a) = Z(a)N(0)$,

где $\dfrac{dz}{da} = A_0(a)Z, Z(0) = I$, при любом $N(0)$удовлетворяет уравнению (3.4.2). С учетом второго уравнения (3.4.2), имеем:

$$\left(I - \int_0^\infty B_0(\xi) Z(\xi) d\xi \right) N(0) = 0$$

Введя обозначения $A = \int_0^\infty B_0(\xi) Z(\xi) d\xi$ последнее уравнение перепишем в виде:

$$(I - A) N(0) = 0 \qquad (3.4.4)$$

Таким образом, из (3.4.4) следует, что если *1* не является собственным значением матрицы живучести биосистемы – *A*, то $N(0)$ и однородная система (3.4.2) имеет единственное решение. Если же *1* является собственным значением матрица *A*, то однородная система (3.4.2) имеет бесконечное множество решений. Заметим, что если $A_0(a) = A_0 = const$, то

$$A = \int_0^\infty e^{A_0 a} B_0(a) da$$

Теперь исследуем неоднородную систему (3.4.2). Легко видеть, что решение 1 – го уравнения (3.4.2), в данном случае, представляется в виде:

$$N(a) = Z(a) N(0) + \int_0^a Z(a) Z(\xi)^{-1} \alpha(\xi) d\xi$$

С учетом 2-го уравнения (3.4.2) получим:

$$(I - A) N(0) = \beta + \int_0^\infty B_0(\xi) \int_0^\xi Z(\xi) Z^{-1}(\eta) \alpha(\eta) d\eta d\xi$$

Если I не является собственным значением матрицы А, т.е. $\det(I - A) \neq 0$, то

$$N(0) = (I - A)^{-1} \left[\beta + \int_0^\infty B_0(\xi) \int_0^\xi Z(\xi) Z^{-1}(\eta) \alpha(\eta) d\eta d\xi \right]$$

и, следовательно, неоднородная система (3.4.2) имеет единственное решение:

$$N(a) = Z(a)(I - A)^{-1} \left[\beta + \int_0^\infty B_0(\xi) \int_0^\xi Z(\xi) Z^{-1}(\eta) \alpha(\eta) d\eta d\xi \right] + \int_0^\infty Z(a) Z^{-1}(\xi) \alpha(\xi) d\xi, \qquad (3.4.5)$$

$0 \le a < \infty$

Таким образом справедлива следующая теорема типа Юнуси.

Теорема 3.4.1. *Неоднородная система* (3.4.2) *имеет и притом единственное решение тогда и только тогда, когда однородная система не имеет ненулевых решений.*

Нелинейная задача. Исследуем задачу (3.4.1). Пусть имеют место условия:

а) $F(N,a) = \tilde{A}(N,a)N(a) + \alpha(a)$

$B(N,a) = \tilde{B}(N,a)N(a) + \beta_0(a)$, $0 \le a < \infty$

$\tilde{A}(N,a) = A_0(a)$, $\tilde{B}(N,a) = B_0(a)$

A_0, B_0- заданные матрицы порядка m , $\alpha(a) - m$-мерный вектор функция (см.(3.4.3)).

б) $\det(I - A) \ne 0$,

где

$$A = \int_0^\infty \frac{\partial B}{\partial N}\Big|_{N^1_{(\xi)}} Z(\xi) d\xi ,$$

$$\frac{dZ}{da} = \int_0^\infty \frac{\partial F}{\partial N}\Big|_{N^1_{(a)}} Z(a) d\xi, Z(0) = I ,$$

$0 < \overline{N}(a) < \infty$, $0 \le a < \infty$

Теорема 3.4.2. *Пусть имеет место условие, а) тогда существует по крайней мере одно решение задачи* (3.4.1). *Если же выполнено и условие б) , то это решение единственно.*

Доказательство. Рассмотрим итерационный процесс:

$$\frac{dN^{S+1}}{da} = \tilde{A}(N^S, a)N^{S+1} + \alpha(a),\ 0 < a < \infty,$$

$$N^{S+1}(0) = \tilde{A}(N^S, a)N^{S+1} + \alpha(a)$$

$$N^{S+1}(0) = \int_0^\infty \tilde{B}(N^S, \xi)N^{S+1}(\xi)d\xi + \beta,$$

где $\beta = \int_0^\infty \beta_0(a)da$

Покажем, что последовательность $\{N^S\}, S = 0,1...$, удовлетворяющая последней задаче равномерно ограничена и равностепенно непрерывна. Так как $\tilde{B}(N^S, a) \le B_0(a)$, $\tilde{A}(N^S, a) \le A_0(a)$, то

$$\begin{cases} \dfrac{dN^{S+1}}{da} \le A_0(a)N^{S+1} + \alpha(a) \\ N^{S+1}(0) \le \int_0^\infty B(\xi)N^{S+1}(\xi)d\xi + \beta \end{cases} \qquad (3.4.6)$$

отсюда имеем, что

$$N^S(a) = Z(a)(I - A)^{-1}\left[\beta + \int_0^\infty B_0(\xi)\int_0^\xi Z(\xi)Z^{-1}(\eta)\alpha(\eta)d\eta d\xi\right] + \int_0^a Z(a)Z^{-1}(\xi)\alpha(\xi)d\xi,\ S = 0,1...$$

где

$$\frac{dZ}{da} \le A_0(a)Z,\ Z(0) = I$$

Следовательно, имеем:

$$\left\|N^S\right\| \le N^{\max},\ S = 0,1... \qquad (3.4.7)$$

$$N^{\max} = const > 0$$

Из (3.4.6), (3.4.7) получаем

$$\left\| N^{S+1}(a'') - N^{S+1}(a') \right\| = \left\| \int_{a'}^{a''} \frac{dN^{S+1}}{da} da \right\| \le \left(N^{\max} C_0 + C_1 \right) \left\| a'' - a \right\|^{1/2}$$

для любых *a'* и *a''* из $[0,\infty)$

Таким образом, последовательность функции $\{N^S\}$, $S = 0,1...$ равномерно ограничена и равно степенно непрерывна. На основании теоремы Арцела из последовательности можно выбрать равномерно сходящуюся на каждом конечном промежутке последовательность $\{N^{S_K}\}$, т.е. $\lim_{K\to\infty} N^{S_K}(a) = N(a)$. Легко видеть, что предельная функция удовлетворяет задаче (3.4.1). Теперь докажем единственность. Предположим методом от противного, т.е. пусть задача (3.4.1) имеет по крайней мере два решения *N'* и *N''*.

Обозначим Δ*N*=*N'*-*N''*. Тогда в силу (3.4.1) имеем:

$$\begin{cases} \dfrac{d\Delta N}{da} = \dfrac{\partial F}{\partial N}\Big|_{\overline{N}(a)} \Delta N \\ \Delta N(0) = \displaystyle\int_0^\infty B \frac{\partial B}{\partial N}\Big|_{\overline{N}(\xi)} \Delta N(\xi) d\xi \end{cases}$$

для некоторого $0 \le \overline{N} < \infty$. Последняя задача имеет решение:

$$\Delta N(a) = Z(a)\Delta N(0)$$

где $\Delta N(0)$ определяется из уравнения:

$$(I - A)\Delta N(0) = 0$$

так как $\det(I - A) \ne 0$, то $\Delta N(0) = 0$ и, следовательно, $N'(a) \equiv N''(a)$. Теорема доказана.

§3.5. Определение стационарной численности популяции с учетом пространственных распределений

Как следует из (3.2.6) численность популяций в стационарном случае удовлетворяет системе интегро-дифференциальных уравнений типа:

$$\frac{\partial \tilde{N}}{\partial a}+\sum_{i=1}^{2} V_i \frac{\partial \tilde{N}}{\partial x_i}=F\left(\tilde{N}(x,a),a\right)+\sum_{i=1}^{2} D_i \frac{\partial^2 \tilde{N}}{\partial x_i{}^2}\,,\; x\in G\,,\; 0<a<\infty \tag{3.5.1}$$

$$\tilde{N}(x,0)=\int_0^\infty B\left(\tilde{N}(x,\xi),\xi\right)d\xi\,,\; x\in G \tag{3.5.2}$$

$$\tilde{N}\big|_S=0 \tag{3.5.3}$$

где $\tilde{N}(x,a)=\left(\tilde{N}_1(x,a)...\tilde{N}_m(x,a)\right)$ – численность популяций в точке $x\in G$, $x\in(x_1,x_2)$, $0\le x_i\le L_i, i=1,2$; возраст *a,* $0\le a<\infty$; V_i, D_i - постоянные диагональные матрицы порядка m с неотрицательными элементами, $F=F(\cdot)$, $B=B(\cdot)$- m – мерные вектора, характеризующие смертность и рождаемость популяций.

Теорема 3.5.1. *Пусть* $F\left(\tilde{N},a\right)=A_0(a)\tilde{N}$, $B\left(\tilde{N},a\right)=B_0(a)\tilde{N}$, *где* $A_0(a)$, $B_0(a)$ - *заданные матрицы порядка m определяются как в предыдущем пункте, тогда решение задачи* (3.5.1), (3.5.2), (3.5.3) *определяется следующим образом:*

$$\tilde{N}(x,a)=\frac{2}{\sqrt{L_1L_2}}Z(a)\sum_{n_1,n_2=1}^{\infty}\mu_{n_1n_2}(a)\cdot Sin\frac{\pi n_1 x_1}{L_1}\cdot Sin\frac{\pi n_2 x_2}{L_2}\cdot E_{DV}(x),\; x\in G\,,\; 0\le a<\infty \tag{3.5.4}$$

где

$$\mu_{n_1n_2}(a)=E_{\lambda n_1n_2}(a)\overline{\mu}_{\lambda n_1n_2} \tag{3.5.5}$$

$$\overline{\mu}_{\lambda n_1n_2}:(I-A)\overline{\mu}_{\lambda n_1n_2}=0$$

$$A=\int_0^\infty B(\xi)Z(\xi)E_{\lambda n_1n_2}(\xi)d\xi$$

а матрица $Z=Z(a)$ *является решением задачи:*

$$\frac{dZ}{da}=A_0(a)Z\,,\; 0<a<\infty$$

$$Z(0)=I$$

Следуя **теореме 3.5.1.** мы докажем, что справедливо аналогичная теорема для 3-ой краевой задачи. Введем замену $\tilde{N}(x,a) = Z(a)\psi(x,a)$, тогда легче видеть, что функция $\psi(x,a)$

удовлетворяет задаче:

$$\frac{\partial \psi_k}{\partial a} + \sum_{i=1}^{2} V_i k \frac{\partial \psi_k}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{2} D_{ik} \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial x_i^{\ 2}},$$

$\psi_k(x_1, x_2, a) = 0$ при $x_i = 0, x_i = L_i, i = 1,2$

Решение последней задачи представляется в виде:

$$\psi(x,a) = \frac{2}{\sqrt{L_1 L_2}} \sum_{n1n2=1}^{\infty} \overline{\mu}^{k}_{n1n2} e^{-\lambda^{k}_{n1n2} a} Cos\frac{\pi n_1 x_1}{L_1} \cdot Cos\frac{\pi n_2 x_2}{L_2} e^{\sum_{i=1}^{2} \frac{V_{ik} x_i}{2D_{ik}}} \qquad (3.5.6)$$

и с учетом введенного обозначения получим (3.5.5).

Коэффициент $\overline{\mu}_{n1n2}$ определим так, чтобы имело место условие (3.5.2). Подставляя функцию (3.5.5) в (3.5.2) получим уравнение (3.5.6).

Следствие 3.5.1. *Если* $\det(I - A) \neq 0$*, то* $\tilde{N}(x,a) = 0$. *В самом деле, однородная система* (3.5.5) *имеет только нулевое решение* $\overline{\mu}_{n1n2} = 0$ *и в силу* (3.5.4) *получим, что* $\tilde{N}(x,t) = 0$

Следствие 3.5.2. *Пусть* $\det(I - A) = 0$*, тогда система* (3.5.5) *кроме нулевого решения имеет и ненулевые решения. Например,* $\overline{\mu}^{i}_{n1n2} = (-1)^{i-1} M_i$*, где* M_i*-миноры (m-1)-го порядка матрицы* $(I - A)$ *(предполагается, что ранг* $(I - A) = m - 1$*).*

В этом случае $\left\| \overline{\mu}^{i}_{n1n2} \right\| \leq C_1 \exp\left(-C_2 \sum n_i^2\right)$*, где* $C_i = const > 0$.

Теорема 3.5.2. *Предположим, что*

$F(\dot{N},a)=\tilde{A}(\dot{N},a)\tilde{N}$, $B(\dot{N},a)=\tilde{B}(\dot{N},a)\tilde{N}$, $\tilde{A}(\dot{N},a)=A_0(a), \tilde{B}(N,a)\le B_0(a)$, $0\le a<\infty$, *где* $A_0(a)$, $B_0(a)$*определяются как в* **теореме 3.4.1** *, тогда существует по крайней мере одно решение задачи* (3.5.1.)-(3.5.3). *Если же* $\|A\|<1$

$$A=\int_0^\infty \frac{\partial B}{\partial N}\Big|_{\bar{N}(x,\xi)} Z(\xi)d\xi$$

$\frac{\partial Z}{\partial a}=\max\frac{\partial F}{\partial N}\Big|_{\bar{N}(x,a)} Z(a), Z(0)=I$ *то это решение единственно.*

Доказательство. Сначала докажем существование решения задачи (3.5.1)-(3.5.3).

Рассмотрим итерационный процесс:

$$\frac{\partial N^{S+1}}{\partial a}+\sum_{i=1}^{2}V_i\frac{\partial N^{S+1}}{\partial x_i}=\tilde{A}\left(N^S,a\right)N^{S+1}+\sum_{i=1}^{2}D_i\frac{\partial^2 N^{S+1}}{\partial x_i{}^2},$$

$$N^{S+1}(x,0)=\int_0^\infty \tilde{B}(N^S,\xi)N^{S+1}(x,\xi)d\xi,$$

$$N^{S+1}\big|_S=0,\ S=0,1...$$

В силу условий теоремы имеем:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial N^{S+1}}{\partial a}+\sum_{i=1}^{2}V_i\dfrac{\partial N^{S+1}}{\partial x_i}\le A_0(a)N^{S+1}+\sum_{i=1}^{2}D_i\dfrac{\partial^2 N^{S+1}}{\partial x_i{}^2}\\ N^{S+1}(x,0)=\int_0^\infty B_0(\xi)N^{S+1}(x,\xi)d\xi\\ N^{S+1}\big|_S=0, S=0,1...\end{cases}\tag{3.5.7}$$

В последней задаче вместо дифференциального неравенства рассмотрим дифференциальное уравнение и введя замену:

$$N^{S+1}(x,a)=Z(a)\psi(x,a),$$

где

$$\frac{dZ}{da} \le A_0(a)Z \ , \ Z(0) = I$$

получим формулу:

$$N^{S+1}(x,a) = \frac{2}{\sqrt{L_1 L_2}} Z(a) \sum_{n_1,n_2=1}^{\infty} \mu_{n_1 n_2}(a) \cdot Sin\frac{\pi n_1 x_1}{L_1} \cdot Sin\frac{\pi n_2 x_2}{L_2} \cdot E_{DV}(x),$$

где

$$\mu_{n_1 n_2}(a) = E_{\lambda n_1 n_2}(a) \overline{\mu}_{\lambda n_1 n_2} \quad , \quad 0 \le a < \infty$$

$$\overline{\mu}_{\lambda n_1 n_2} : (I - A)\overline{\mu}_{\lambda n_1 n_2} = 0 \ , \quad n_i = 1,2..., i = 1,2$$

Легко видеть, что функция $N^{S+1}(x,a)$ удовлетворяет задаче (3.5.7). Так как $\lim A_0(a) = 0$, то найдется постоянная матрица $\overline{A_0}$, такая что $|A_0| \le \overline{A_0}$.

$h_0 = \int_0^\infty \|A\| d\xi \le C_3 < \infty$. Тогда

$$|Z(a)| \le e^{h_0 E}$$

$\left|\frac{dz}{da}\right| \le C_4$, где $C_i = const > 0$, $i = 1,2$

В силу равномерной ограниченности ψ и $\frac{d\psi}{da}$ получим, что последовательность $\{N^S\}$ равномерно ограничена и равностепенно непрерывна. Тогда по теореме Арцела на каждом конечном промежутке последовательность $\{N^{S_m}\} \subset \{N^S\}$ равномерно сходится к решению нелинейной задачи (3.5.7) – (3.5.7). Теперь докажем единственность. Пусть задача (3.5.7)-(3.5.3) имеет два решения $N'(x,a)$, $N''(x,a)$ легко увидеть, что $\Delta N = N' - N''$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\frac{\partial \Delta N}{\partial a} + \sum_{i=1}^{2} V_i \frac{\partial \Delta N}{\partial x_i} \le \Delta F + \sum_{i=1}^{2} D_i \frac{\partial^2 \Delta N}{\partial x_i^{\ 2}}$$

$$\Delta N(x,0)=\int_0^\infty \Delta B d\xi$$

$$\Delta N\big|_S=0,\ \Delta F=F\big|_{N'}-F\big|_{N''},$$

$$\Delta B=B\big|_{N'}-B\big|_{N''}$$

Обозначим через $M(a)=\max_x \Delta N(x,a)$, тогда имеем:

$$\frac{dM}{da}\le \max_x \frac{\partial F}{\partial N}\Big|_{\overline{N}} M,\ M(0)=\int_0^\infty \max_x \frac{\partial B}{\partial N}\Big|_{\overline{N}} M(\xi)d\xi,\ 0\le a<\infty$$

Функция $M(a)=Z(a)M(0)$, где $Z(0)=I$,

$\frac{dZ}{da}\le \max_x \frac{\partial F}{\partial N}\Big|_{\overline{N}} Z(a)$ удовлетворяет дифференциальному неравенству. Найденное решение подставим в интегральное граничное условие, получим:

$$M(0)=\int_0^\infty \max_x \frac{\partial B}{\partial N}\Big|_{\overline{N}} Z(\xi)d\xi M(0)$$

так как

$\int_0^\infty \left\|\max_x \frac{\partial B}{\partial N}\Big|_{\overline{N}} Z(\xi)\right\| d\xi<1$, то $M(0)=0$ и, следовательно, $M(a)\equiv 0$, т.е. $N(x,a)\equiv 0.$

Теорема доказана.

§3.6. Исследования популяционных волн с учетом возрастного состава и пространственных распределений

Пусть численность изолированной популяции описывается при помощи следующих уравнений:

$$\frac{\partial N}{\partial t}+\frac{\partial N}{\partial a}+\sum_{i=1}^{2} V_i\frac{\partial N}{\partial x_i}=F(N)+\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(D_i(N)\frac{\partial N}{\partial x_i}\right),\quad (3.6.1)$$

$$N(x,0,t)=\int_0^\infty B\big(N(x,\xi,t)\big)d\xi,\qquad (3.6.2)$$

где $N = N(x,a,t)$ - численность популяций в точке $x \in E^2$,

$x = (x_1, x_2)$, возраста a, $0 \leq a$ в момент времени t,

$0 \leq t \leq \infty$, V_i, $F(\cdot)$, $D_i(\cdot)$, $B(\cdot)$ - биологические характеристики популяций.

Мы будем рассматривать для популяционной модели (3.6.1)—(3.6.2) образования плоских и S-волн. Плоские волны без учета возрастного состава изучены в работах [101, 107], а S - волны были введены и изучены для нелинейных задач математической физики академиком А.А.Самарским [98-103], а также работе Ю.М.Свирежева [104-107].

Стоячие волны. Рассмотрим нелинейную задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial N}{\partial t} + \dfrac{\partial N}{\partial a} = K_0 \dfrac{\partial}{\partial x}\left(N^\sigma \dfrac{\partial N}{\partial x}\right) + q_0 N^\beta \\ N(x,0,t) = \displaystyle\int_0^\infty B\big(N(x,a',t)\big) d\,a', x \in E^1, a \geq 0, t \geq 0, \end{cases} \tag{3.6.3}$$

где $\beta > 1$, $\sigma \geq 0$, k_0, q_0 - положительные константы. Введя замены $t = a + \tau$, $U(x,a,\tau) = N(x,a,a+\tau)$ получим систему S-волн:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial a} = K_0 \frac{\partial}{\partial x}\left(U^\sigma \frac{\partial u}{\partial x}\right) + q_0 U^\beta, \\ U|_{a=0} = \int_0^\infty B\big(U(x,a',\tau)\big) da', \end{cases} \tag{3.6.4}$$

Следуя [101], решение (3.6.4) будем искать в виде:

$$U(x,a,\tau) = g(a,\tau) f(\xi), \qquad \xi = \frac{x}{\varphi(a,\tau)}$$

Так как $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial a} f - \frac{\partial u}{\partial a}\frac{g}{\varphi}\ \xi f_\xi, \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{g}{\varphi} f_\xi,$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(u^\sigma \frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{g^{\sigma+1}}{\varphi^2}\left(f^\sigma f_\xi\right)_\xi,$$

то из первого уравнения (3.6.4) получим:

$$\dot{g} f - g\frac{\dot{\varphi}}{\varphi}\ \xi f_\xi = K_0 \frac{g^{\sigma+1}}{\varphi^2}\left(f^\sigma f_\xi\right)_\xi + q_0 q^\beta f^\beta, \tag{3.6.5}$$

где обозначены: $\dot{g} = \frac{\partial g}{\partial a}, \dot{\varphi} = \frac{\partial u}{\partial a}$.

Потребуем, что

$$\dot{g} = -g\frac{\dot{\varphi}}{\varphi} = K_0\frac{g^{\sigma+1}}{\varphi^2} = q_0 q^\beta$$

или

$$\dot{g} = q_0 q^\beta, \varphi^2 = \frac{K_0}{q_0} g^{\sigma+1-\beta}$$

Следовательно,

$$g(a,\tau) = g(0,\tau)\left[1 - q_0(\beta-1)g^{\beta-1}(0,\tau)a\right]^{-\frac{1}{\beta-1}}$$

$$\varphi(a,\tau) = \sqrt{\frac{K_0}{q_0}}\, g^{\frac{\sigma+1-\beta}{2}}(0,\tau)\left[1 - q_0(\beta-1)g^{\beta-1}(0,\tau)a\right]^{-\frac{\sigma+1-\beta}{2(\beta-1)}}$$

И тогда уравнение (3.6.5) принимает следующий вид:

$$\left(f^\sigma f_\xi\right)_\xi + \frac{\sigma+1-\beta}{2}\,\xi f_\xi - f\left(1 - f^{\beta-1}\right) = 0 \qquad (3.6.6)$$

Таким образом, решение исходной части задачи имеет вид:

$$N(x,a,t) = \mu(t-a)\left[1 - q_0(\beta-1)\mu^{\beta-1}(t-a)a\right]^{-\frac{1}{\beta-1}} f(\xi) \quad (3.7.7)$$

$$M(t) = \int_0^\infty B_0(a)\left[1 - q_0\mu(t-a)a\right]^{-1}\mu(t-a)da \qquad (3.6.8)$$

Заметим, что если $\sigma + 1 \neq \beta$, то достаточно для определения функции $M(t)$ выполнения условия (3.6.8) в одной точке x (например, $x = 0$).

Стационарные волны. Рассмотрим задачу (3.6.1) в случае,

когда $F(N) = 0, \frac{\partial N}{\partial t} = 0$.

$$\begin{cases} \frac{\partial N}{\partial a} = K_0 \frac{\partial}{\partial x}\left(N^\delta \frac{\partial N}{\partial x}\right), -\infty < x < \infty, a > 0 \\ N(x,0) = \int_0^\infty B\left(N(x,\xi)\right) d\xi \end{cases} \quad (3.6.9)$$

Решение уравнения (3.6.9) будем искать в виде:

$$N(x,a) = g(a)f(\xi), \xi = \frac{x}{\varphi(a)}$$

Так как

$$\frac{\partial N}{\partial a} = \dot{g}f - \frac{g\dot{\varphi}}{\varphi}\xi f_\xi, \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{g}{\varphi} f_\xi$$

$$\frac{\partial}{\partial x} N^0 \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{g^{\delta+1}}{\varphi^2}(f^\delta f_\xi)_\xi,$$

то уравнение (3.6.9) принимает вид:

$$\dot{g}f - \frac{g\dot{\varphi}}{\varphi}\xi f_\xi = \frac{g^{\delta+1}}{\varphi^2} K_0 (f^\delta f_\xi)_\xi$$

Потребуем, что

$$\dot{g} = -g\frac{\dot{\varphi}}{\varphi} = K_0 \frac{g^{\delta+1}}{\varphi^2}$$

Отсюда

$$\varphi(a) = \frac{\varphi(0)g(0)}{g(a)}, 0 \le a < \infty$$

где $\mu(t) = g(0,t), f(\xi) -$ является решением уравнения (3.6.5),

$$\xi = {}^{x}/_{\varphi(a,t-a)},$$

$$\varphi(a,t-a) = \sqrt{\frac{K_0}{q_0}}[\mu(t-a)]^{\frac{\delta+1-\beta}{2}}\left[1 - q_0(\beta-1)\mu^{\beta-1}(t-a)a\right]^{\frac{\delta+1-\beta}{2(\beta-1)}}$$

Функцию $\mu = \mu(t)$ – определим так, чтобы имело место второе уравнение (3.6.3). Пусть, например, $B(N) = B_0(a)N$, тогда для определения $\mu = \mu(t)$ получим интегральное уравнение типа:

$$\mu(t) = B_0(a)\frac{f(\xi)}{f(\xi_0)}\frac{\mu(t-a)}{[1-q_0(\beta-1)\mu^{\beta-1}(t-a)a]^{\frac{1}{\beta-1}}}da, \qquad (3.6.10)$$

где $\mu(t) = g(0,t), \quad \xi_0 = \xi|_{a=0}$

Заметим, что если $\delta + 1 = \beta$, то $\varphi(a, t-a) = \sqrt{\frac{K_0}{q_0}}, \ \xi = \sqrt{\frac{K_0}{q_0}}x, f(\xi) = f(\xi_0)$ и уравнение(3.6.8)принимает следующий вид:

$$\mu(t) = \int_0^\infty \frac{B_0(a)\mu(t-a)}{[1-q_0\delta\mu^\delta(t-a)a]^{\frac{1}{\delta}}}da, \qquad (3.6.8')$$

В этом случае, волны, порождаемые формулой (3.6.6) по аналогии назовем S-волнами. Если же $\beta > \delta + 1$, то соответствующие волны (3.6.6) назовем HS и при $\beta < \delta + 1$ LS волнами.

Пример 1 . Пусть $\delta = 1, \beta = 2$, тогда S-волны определяются формулой:

$$N(x,a,t) = \mu(t-a)[1 - q_0\mu(t-a)a]^{-1}f(\sqrt{\frac{K_0}{q_0}}x),$$

$$\begin{cases} \varphi(a) = \varphi(0)\left[1 - \frac{K_0(\delta+2)g^\delta(0)}{\varphi^2(0)}a\right]^{\frac{1}{\delta+2}}, \\ g(a) = g(0)\left[1 - \frac{K_0(\delta+2)g^\delta(0)}{\varphi^2(0)}a\right]^{-\frac{1}{\delta+2}} \end{cases} \qquad (3.6.10)$$

Так как $-g\frac{\dot{\varphi}}{\varphi} = K_0\frac{g^{\delta+1}}{\varphi^2}$, то получим $\varphi_0^2 = 1$

Таким образом, функция

$$N(x,a) = g(a)f\left(\frac{x}{\varphi(a)}\right),$$

где $g(a)$ и $\varphi(a)$ определяются по формулам (3.6.10), а $f(\xi)$ является решением уравнения

$$(f^{\delta} f_{\xi})_{\xi} + \xi f_{\xi} = f \qquad (3.6.11)$$

удовлетворяет первому уравнения (3.6.9) Константы определяются так, чтобы эта функция удовлетворяла и второму уравнению (3.6.9):

$$g(0)\, f\left(\frac{x}{\varphi(0)}\right) = \int_0^{\infty} B(g(a) f\left(\frac{x}{\varphi(a)}\right)) da \qquad (3.6.12)$$

Заметим, что если $F(N) \neq 0$, то задача (3.6.9)исследуется аналогично задаче (3.6.1) при $\frac{\partial N}{\partial t} = 0.$

Пример 2. Пусть $\delta = 1, B(N) = B_0(a)N$, тогда

$$g(a) = g_0 \left[1 - \frac{3K_0 g_0}{\varphi_0^2} a\right]^{-\frac{1}{3}},$$

$$\varphi(a) = \varphi_0 \left[1 - \frac{3K_0 g_0}{\varphi_0^2} a\right]^{\frac{1}{3}}, 0 \leq a < \infty$$

Решение (3.6.11) будем искать в виде:

$$f(\xi) = \alpha_0 + \alpha_1 \xi, \qquad f_0 = \alpha_0, \quad f(\infty) = 0$$

Тогда легко видеть, что $\alpha_1 = \pm t\sqrt{f_0}$ и, следовательно

$$N(x, a) = \begin{cases} \dfrac{g_0}{(1 - 3K_0 g_0 a)^{\frac{1}{3}}} \left[f_0 + \sqrt{f_0} \dfrac{|x|}{(1 - 3K_0 g_0 a)^{\frac{1}{3}}}\right], a \leq \dfrac{1}{3K_0 g_0}, |x| \leq \sqrt{f_0}(1 - 3K_0 g_0 a)^{\frac{1}{3}}, \\ 0, \qquad a \geq \dfrac{1}{3K_0 g_0}, |x| > \sqrt{f_0}(1 - 3K_0 g_0 a)^{\frac{1}{3}} \end{cases}$$

Для нахождения константы g_0 потребуем выполнения (3.6.12)

в точке $x = 0$,т.е.

$$\int_0^{\frac{1}{3K_0g_0}} B_0(a)\frac{f_0g_0}{(1-3K_0g_0a)^{\frac{1}{3}}}da = f_0g_0$$

Отсюда

$$g_0 = \frac{1}{3K_0}\int_0^1 (1-\tau)^{\frac{1}{3}}\ \tilde{B}(\tau)d\tau, \tilde{B}(\tau) = B_0(\frac{\tau}{3K_0g_0})$$

Пусть $\tilde{B}(\tau) = b_0\tau^{\delta}(1-\tau)^{\gamma}$, тогда $g_0 = \frac{b_0}{bK_0}\frac{\delta!(\gamma-{}^{1}/_{3})!}{(\delta+\gamma+{}^{1}/_{3})!}$, $\delta_0(\gamma-{}^{1}/_{3})$ - целые положительные числа, причем точка $\tau = \frac{\delta}{\delta+\gamma}$ соответствует точке максимальной плодовитости.

ГЛАВА 4. Алгоритм численного решения нелинейной интегро-дифференциальной задачи и разработки комплексов компьютерных программ

Настоящая глава диссертационной работы посвящена алгоритму численного решения нелинейной интегро-дифференциальной задачи и разработки комплекса компьютерных программ для образования популяционных волн.

В первом параграфе для нелинейной системы интегро-дифференциальных задачи приведён алгоритм численного решения.

Во втором параграфе приведены описания и результаты комплекса компьютерных программ. Для решения нелинейной интегро-дифференциальной задачи популяционных волн в биосистемах с учетом возраста и пространственного распределения разработан комплекс компьютерных программ на языке программирования высокого уровня C++.

§4.1. Алгоритм численного решения нелинейной интегро-дифференциальной задачи

Алгоритм численного решения интегро-дифференциальных задач включает приближённое решение системы, которая сочетает элементы дифференциальных и интегральных уравнений. Обычно задача сводится к дискретной форме, где интегралы аппроксимируются методами численного интегрирования, а дифференциальная часть решается с использованием методов конечных разностей или Эйлера. На каждом шаге времени обновляются как интегральные, так и дифференциальные компоненты задачи, что требует применения итерационных методов для повышения точности.

Рассмотрим задачу в виде [3-А]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial N}{\partial t} + \dfrac{\partial N}{\partial a} = K_0 \dfrac{\partial}{\partial x}\left(N^{\delta} \dfrac{\partial N}{\partial x}\right) + q_0 N^{\beta} & (4.1.1) \\ N(x,0,t) = \displaystyle\int_0^{\infty} B\big(N(x,a,t)\big)da, x \in E^1, a \geq 0, t \geq 0, & (4.1.2) \end{cases}$$

где $\beta > 1, , \delta \geq 0, K_0, q_{0.} -$ положительные константы

Введя замену переменного в задачу (4.1.1), (4.1.2) $t = \alpha + \tau$, $u(x, \alpha, \tau) = N(x, \alpha, a + \tau)$ перепишем в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial a} = K_0 \frac{\partial}{\partial x}\left(U^\delta \frac{\partial u}{\partial x}\right) + q_0 U^\beta, \\ U|_{a=0} = \int_0^\infty B\big(U(x,a,\tau)\big)\,da \end{cases} \quad (4.1.3)$$

или $$\begin{cases} \frac{\partial N}{\partial t}+\frac{\partial N}{\partial a}+\sum_{i=1}^{2} v_i \frac{\partial N}{\partial x_i}=F(N)+\sum_{i=1}^{2} D_1 \frac{\partial^2 N}{\partial x_i^2}, x\in G\ ,0<a<\infty\ ,0<t\leq t_k\ , \\ N(x,a,0)=N_0(x,a),\ x\in\bar{G},\ 0\leq a<\infty, \\ N(x,0,t)=\int_0^\infty BN(x,\xi,t)\,d\xi \quad x\in\bar{G},\ 0\leq t<t_k, \\ N|_S=0,\ \left(\frac{\partial N}{\partial n}-aN|_S=0\right), \end{cases}$$

Соответствующую аппроксимирующую разностную задачу (4.1.1) - (4.1.3) перепишем в виде [101]:

$$\begin{cases} \bar{a}_{ij}\,\bar{Y}_{i+1} - \bar{C}_{ij}\,\bar{Y}_{ij} + \bar{b}_{ij}\,\bar{Y}_{i-1j} = -\bar{f}_{ij},\ \ t' = t + {}^{\tau}/_{2} \\ a_{ij}\,Y_{ij+1} - C_{ij}\,Y_{ij} + b_{ij}\,Y_{i+1} = -f_{ij},\ \ t' = t + \tau \end{cases}$$

(4.1.4)

где

$$\bar{a}_{ij} = \frac{\tau}{2h_1^2} K\left(\bar{Y}_{i+{}^{1}/_{2}\mathrm{j}}\right), \bar{b}_{ij} = \frac{\tau}{2h_1^2} K\left(\bar{Y}_{i+{}^{1}/_{2}\mathrm{j}}\right), \bar{C}_{ij} = \bar{a}_{ij} + \bar{b}_{ij} + 1,$$

$$\bar{f}_{ij} = Y_{ij}, a_{ij} = \frac{\tau}{2h_2^2} \frac{r_{\mathrm{j}+{}^{1}/_{2}}}{r_{\mathrm{j}}} K\left(\bar{Y}_{ij+{}^{1}/_{2}}\right), f_{ij} = \bar{Y}_{ij},$$

$$b_{ij} = \frac{\tau}{2h_2^2} \frac{r_{\mathrm{j}+{}^{1}/_{2}}}{r_{\mathrm{j}}} K\left(\bar{Y}_{ij-{}^{1}/_{2}}\right), C_{ij} = a_{ij} + b_{ij} + 1,$$

при всех $i=\overline{1, N_1}$, $j = \overline{J_0 + 1, N_2}$, $\bar{a}_{0j} = 1$, $\bar{b}_{0j} = 1$, $\bar{a}_{N_1+1j} = 0$, $\bar{b}_{N_1+1j} = 1$,

$$\bar{C}_{0j} = 1 + \frac{h_1^2}{2\tau K(\bar{Y}_{0j})},\ \bar{C}_{N_1+1j} = 1 + h_1^2/2\tau K\left(\bar{Y}_{N_1+1_j}\right),$$

$$\bar{f}_{0j} = \frac{h_1^2}{2\tau K(\bar{Y}_{0j})} \bar{Y}_{0j}, \bar{f}_{N_1+1_j} = \frac{h_1^2}{2\tau K\left(\bar{Y}_{N_1+1_j}\right)} \bar{Y}_{N_1+1j},$$

при всех $j = \overline{J_0, N_2 + 1}$, $a_{ij_0} \equiv 1$, $b_{ij_0} \equiv 1$, $C_{ij_0} \equiv 1 + \frac{h^2}{2\tau K(\bar{Y}_{ij_0})} + \frac{a^{h_1} h_2}{K(\bar{Y}_{ij_0})}$

$$a_{iN_2+1} \equiv 0,\ C_{iN_2+1} = 1 + \frac{h_2^2}{2\tau K(\bar{Y}_{iN_2+1})},\ b_{iN_2+1} = 1,$$

$$f_{iN_2+1} = \frac{h_2^2}{2\tau K\left(\bar{Y}_{iN_2+1}\right)} \bar{Y}_{iN_2+1}, \qquad f_{ij_0} = \frac{h_2^2}{2\tau K\left(\bar{Y}_{ij_0}\right)} \bar{Y}_{ij_0} + \frac{a_i^{h_1} h_2}{K\left(\bar{Y}_{ij_0}\right)} \bar{T}_i^{h_1},$$

при всех $i = \overline{0, N_1 + 1}.$

Решение задачи (4.1.1) будем искать с помощью метода прогонки в виде

$$\begin{cases} \bar{Y}_{ij} = \bar{\mu}_{i+1j} \bar{Y}_{i+1j} + \bar{\partial}_{i+1j}, \; t' = t + {}^{\tau}/_{2}, \\ Y_{ij} = \mu_{i+1j} Y_{i+1j} + \partial_{i+1j}, \; t' = t + \tau, \\ \bar{Y}_{ij}\big|_{t=0} = Y_{0ij}, \end{cases} \qquad (4.1.5)$$

где

$$\begin{cases} \bar{\mu}_{i+1j} = \dfrac{\bar{b}_{ij}}{\bar{C}_{ij} - \bar{\mu}_{ij} \bar{a}_{ij}}, & \bar{\partial}_{i+1j} = \dfrac{\bar{b}_{ij} \bar{\partial}_{ij} + \bar{f}_{ij}}{\bar{C}_{ij} - \bar{\mu}_{ij} \bar{a}_{ij}}, \\ \mu_{ij+1j} = \dfrac{b_{ij}}{C_{ij} - \mu_{ij} a_{ij}}, & \partial_{ij+1} = \dfrac{b_{ij} \partial_{ij} + f_{ij}}{C_{ij} - \mu_{ij} a_{ij}}, \end{cases}$$

при всех $i = \overline{0, N_1 + 1}, \quad j = \overline{J_0, N_2 + 1}$**.**

Лемма . Расчет по формулам (4.1.5) устойчив.

Доказательство. Для этого достаточно показать, что

1) $0 < \mu_{ij} < 1$, 2) $0 < \mu_{ij} < 1$, при всех $\substack{i = \overline{1, N_1 + 1,} \\ i = \overline{J_0 + 1, N_2 + 1}}$

Докажем, например, что $0 < \bar{\mu}_{ij} < 1$. (Второе доказывается аналогично). Действуем по индукции. При $i = 0$ из граничных условий находим $\bar{\mu}_{0j} = 1$. Следовательно,

$$0 < \bar{\mu}_{1j} = \frac{\tau}{2h_1^2} K_{1/_{2j}} \,/\, \left(\left(K_{3/_{2j}} + K_{1/_{2j}}\right) \frac{\tau}{2h_1^2} + 1 - \frac{\tau}{2h_1^2} K_{3/_{2j}} \bar{\mu}_{0j}\right) =$$

$$= \frac{\tau}{2h_1^2} K_{1/_{2j}} \,/\, \left[\left(1 - \bar{\mu}_{0j}\right) \frac{\tau}{2h_1^2} K_{3/_{2j}} + 1 + \frac{\tau}{2h_1^2} K(Y_{1/_{2j}})\right] > 1.$$

Предположим, что $0 < \mu_{ij} < 1$ при всех $i = \overline{1, N_1}, \;\; i = \overline{J_0, N_2 + 1},$ тогда

$$0 < \bar{\mu}_{N_1+1_j} = \frac{\frac{\tau}{2h_1^2} K\left(\bar{Y}_{N_1 + 1/_{2}\mathrm{j}}\right)}{\frac{\tau}{2h_1^2}\left(1 - \bar{\mu}_{N_1\mathrm{j}}\right) K\left(Y_{N_1 + 3/_{2}\mathrm{j}}\right) + 1 + \frac{\tau}{2h_1^2} K\left(Y_{N_1 + 1/_{2}\mathrm{j}}\right)} < 1.$$

Следовательно, расчет по формулам (4.1.5) будет устойчивым (см. [124]).

Заметим, что так как коэффициенты задачи (4.1.1) – (4.1.3) зависят от решений, то в формулах (4.1.5) при каждом моменте времени t следует делать итерации. Следовательно, итерационный процесс сходится. Итерационный процесс продолжается до тех пор, покане выполняется одно из следующих условий

$$\|Y^{S+1} - Y^S\|_{C(Q^h)} \leq \varepsilon_0, \qquad \|Y^{S+1} - Y^S\|_{W_2^{\prime}(Q^h)} \leq \varepsilon_1,$$

где $\varepsilon_0, \varepsilon_1$ − некоторые заданные положительные числа.
Следует отметить, что полученные результаты являются обобщением некоторых результатов работы Юнуси [122-130].

§4.2. Результаты комплекса компьютерных программ

Для решения нелинейной интегро-дифференциальной задачи разработан комплекс компьютерных программ на языке программирования высокого уровня C++, которые широко используются в инженерных, математических и компьютерных областях.

Описание программ.

Программа «Стоячие волны»

Данная программа разработана для численного моделирования нелинейных процессов распространения популяционных волн в динамических системах с учетом временных и пространственных изменений. Она предназначена для анализа сложных волновых явлений, возникающих при взаимодействии факторов рождаемости, смертности и пространственной диффузии особей.

Программа реализована на языке C++ с использованием современных вычислительных методов, что обеспечивает высокую производительность при работе с большими массивами данных. В основе алгоритма лежит численное решение нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих эволюцию популяционной плотности во времени. Для аппроксимации производных применяются методы конечных разностей, а для решения возникающих систем уравнений — итерационные алгоритмы, оптимизированные под специфику задачи. На вход программа принимает начальные параметры системы, включая распределение популяции в пространстве, коэффициенты, характеризующие скорость размножения и гибели особей, а также параметры, определяющие интенсивность их пространственного перемещения. В процессе работы программа вычисляет изменение плотности популяции на каждом временном шаге, учитывая нелинейные эффекты, такие как конкуренция за ресурсы или ограниченность ареала обитания.

Результаты моделирования представляются в виде графиков и анимаций, наглядно демонстрирующих динамику волновых процессов. Пользователь может анализировать различные сценарии развития системы, варьируя входные параметры и наблюдая за изменением поведения популяции. Программа также позволяет выявлять критические точки, в которых система переходит от одного режима к другому, например, от равномерного распределения к образованию устойчивых волновых структур.

Программа «Стационарные волны»

Эта программа предназначена для исследования устойчивых (стационарных) состояний популяционных волн, при которых плотность распределения особей не изменяется со временем. Она является важным инструментом для изучения долгосрочных сценариев развития популяций, когда система достигает равновесия между процессами рождаемости, смертности и пространственного перемещения. Программа написана на языке C++ и использует эффективные численные методы для поиска стационарных решений нелинейных уравнений. В основе алгоритма лежит комбинация методов и итерационных подходов, позволяющая находить устойчивые состояния даже в сложных нелинейных системах. На вход программа принимает параметры среды, такие как коэффициенты скорости размножения и гибели, а также граничные условия, определяющие поведение системы на краях ареала. В процессе работы программа решает уравнения, описывающие стационарное распределение популяции, и определяет условия, при которых возникают различные типы волн, включая периодические и локализованные структуры.

Результаты работы программы включают графики стационарных распределений, карты пространственных структур и анализ их устойчивости. Пользователь может исследовать, как изменение параметров системы влияет на формирование и стабильность волновых паттернов. Программа также позволяет сравнивать различные сценарии и выявлять ключевые факторы, определяющие долгосрочное поведение популяции.

Программа «Динамика популяции с учётом временно-возрастной структуры»

Программа представляет собой специализированный вычислительный инструмент, разработанный для комплексного моделирования популяционных систем с учетом их возрастной структуры и временной динамики. Написанная на языке С++ с использованием современных численных методов, программа обеспечивает высокоточное моделирование сложных биологических процессов. В основе программы лежит математическая модель, описывающая изменение численности популяции в зависимости от возраста особей и временного фактора, учитывающая возрастные зависимые показатели рождаемости и смертности, а также миграционные процессы.

Для численного решения используются методы конечных разностей, позволяющие проводить дискретизацию по временной и возрастной осям, итерационные алгоритмы для решения сложных систем уравнений, а также оптимизированные вычислительные процедуры, обеспечивающие эффективную работу с большими массивами данных. Программа принимает на вход начальное распределение популяции по возрастам, возрастные зависимые функции рождаемости и смертности, параметры миграции и пространственного распределения, а также временные границы моделирования.

Ключевой особенностью программы является ее способность анализировать динамику возрастной пирамиды популяции, оценивать влияние различных факторов смертности на отдельные возрастные группы, исследовать эффекты миграции на возрастную структуру и прогнозировать долгосрочные демографические тенденции. Результаты моделирования включают графики изменения численности по возрастным группам, визуализацию эволюции возрастной структуры, точные прогнозы демографического развития и детальный анализ устойчивости популяционной системы.

Связь между программами.

Программы являются взаимодополняющими инструментами для изучения популяционной динамики.

Использование языка C++ обеспечивает высокую производительность и точность вычислений, что особенно важно при работе с большими и сложными моделями. Программы могут применяться как для теоретических исследований, так и для решения прикладных задач, таких как прогнозирование распространения вредителей или управление природными ресурсами. Их совместное использование позволяет получить полную картину динамики популяций, начиная от краткосрочных изменений и заканчивая долгосрочными прогнозами.

Скриншоты программ “Стоячие волны”, “Стационарные волны” и “Динамика популяции с учётом временно-возрастной структуры”

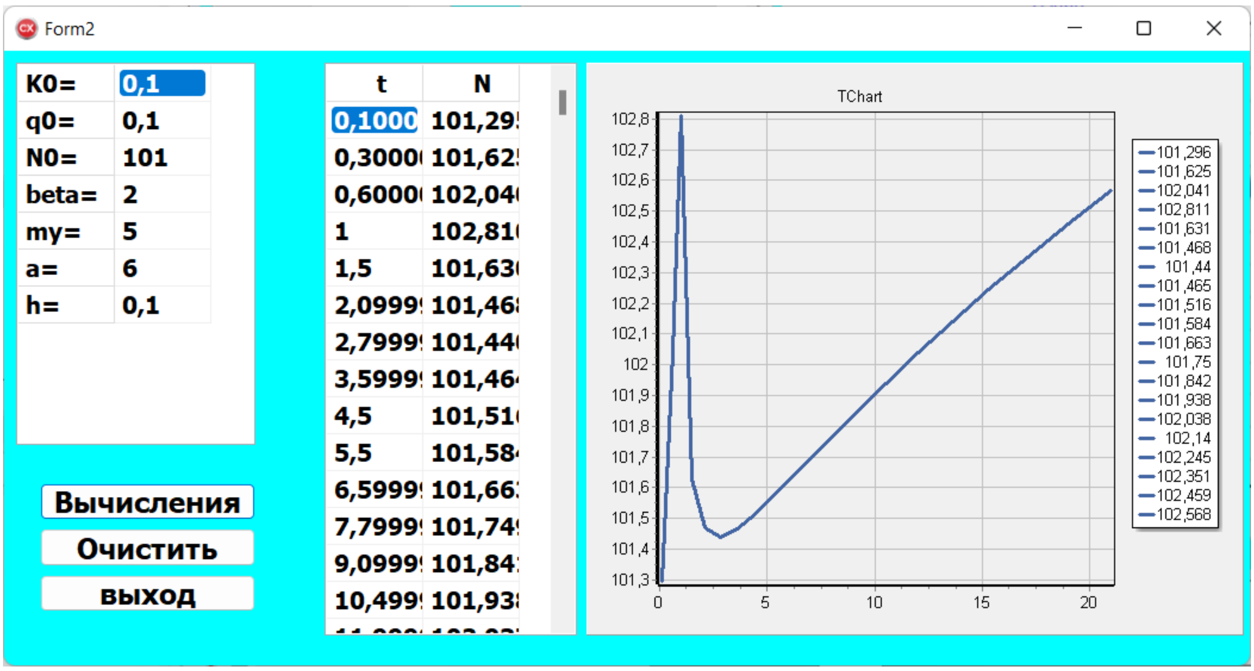

Рис. 1. Скриншот программы “Стоячие волны”

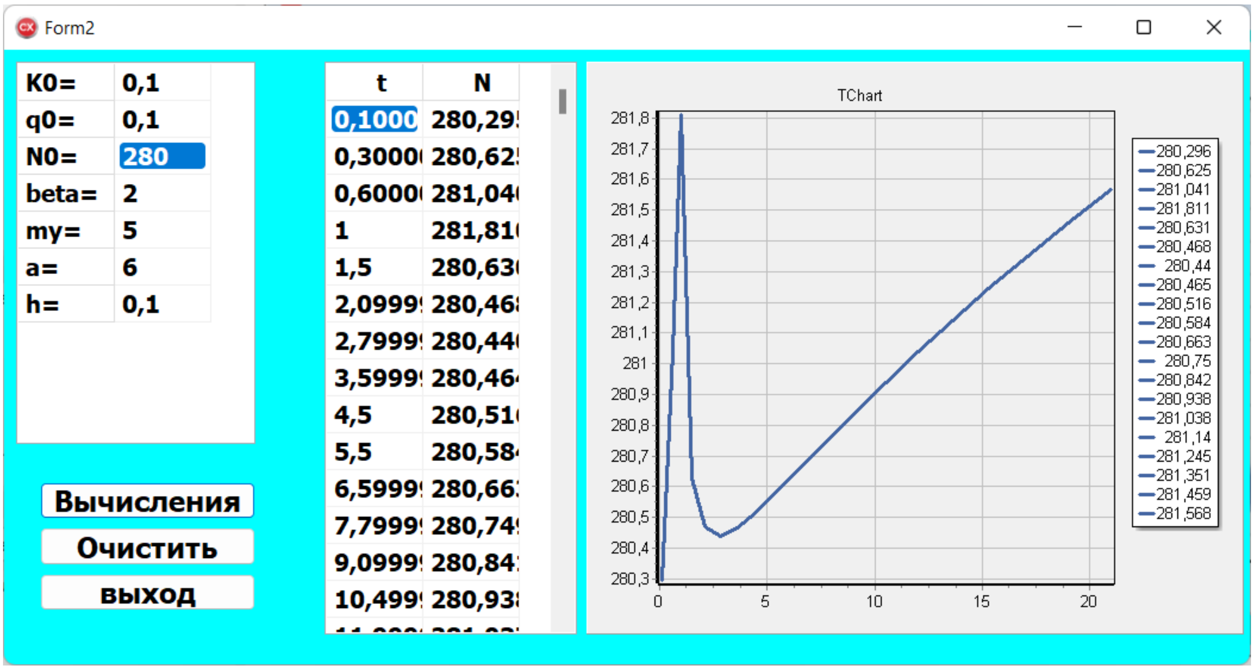

Рис. 2. Скриншот программы “Стоячие волны”

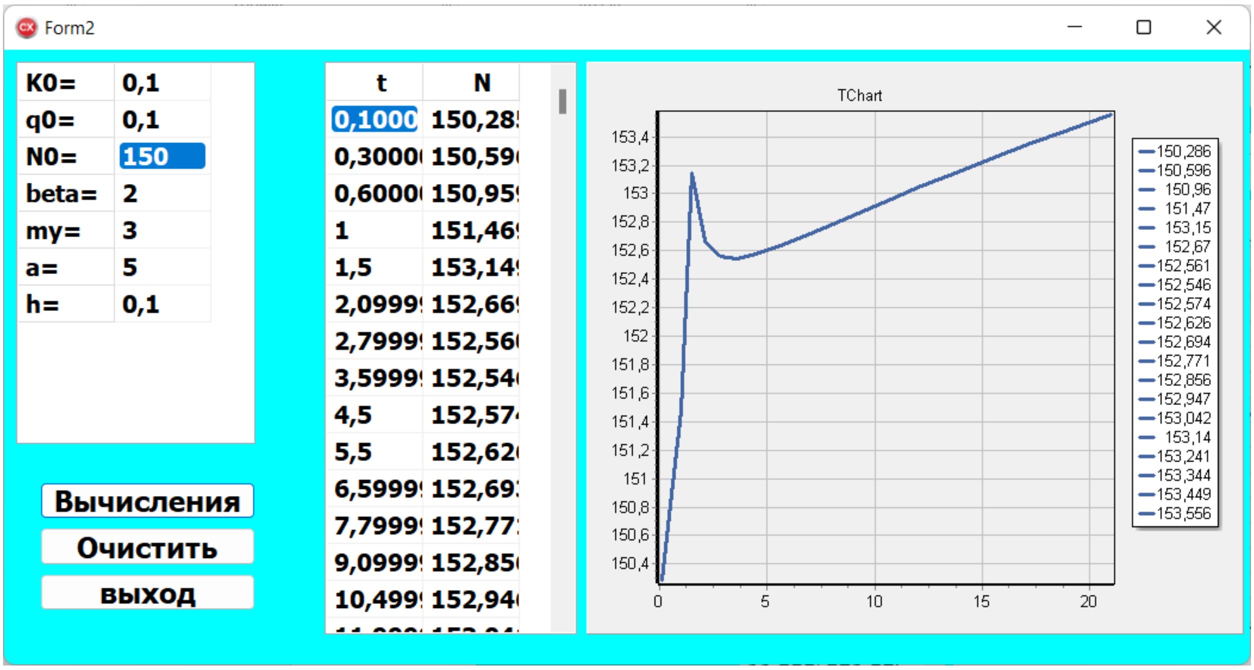

Рис. 3. Скриншот программы “Стоячие волны”

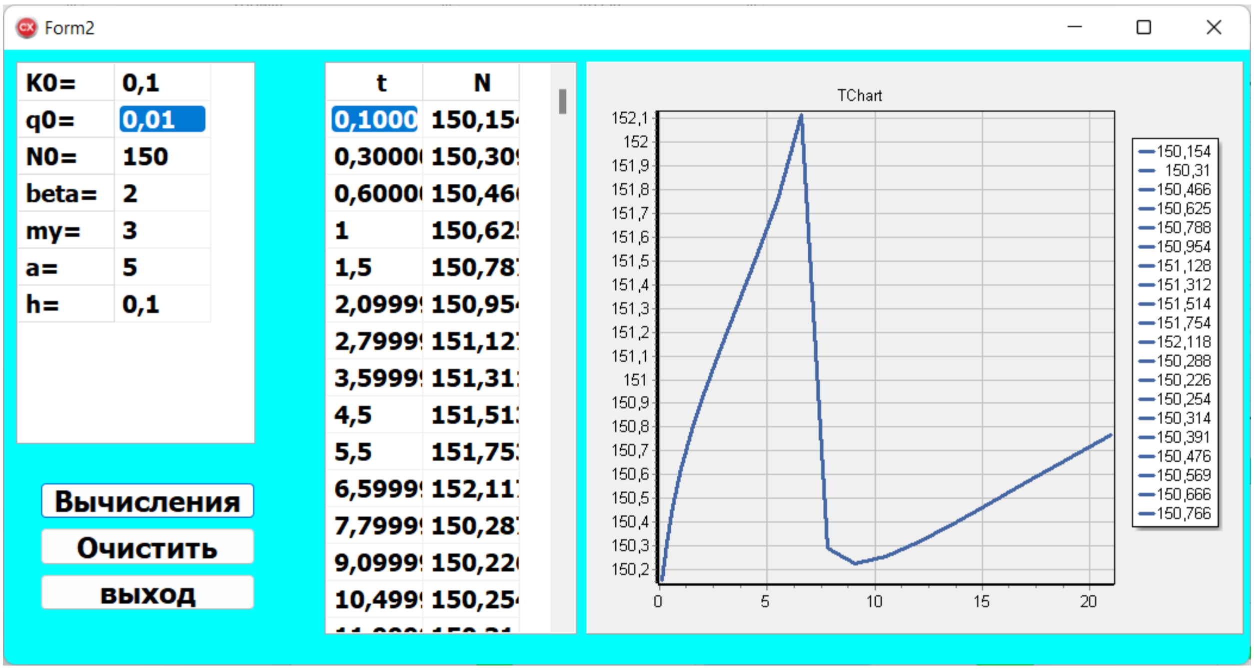

Рис. 4. Скриншот программы “Стационарные волны”

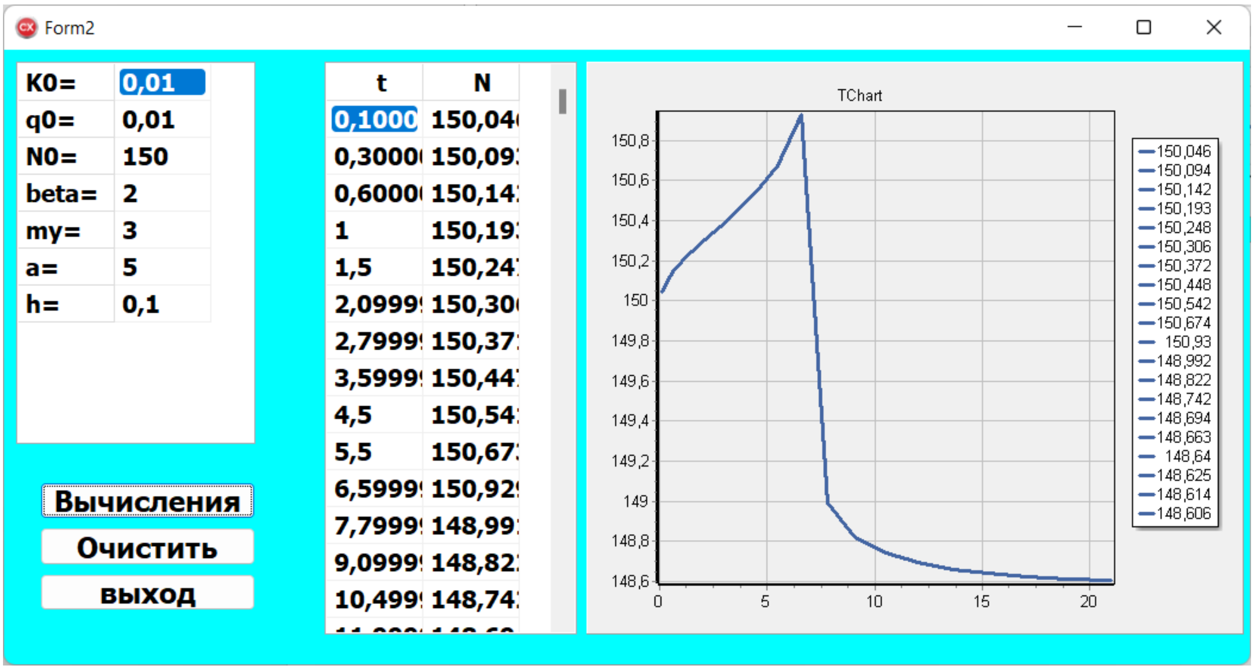

Рис. 5. Скриншот программы “Стационарные волны”

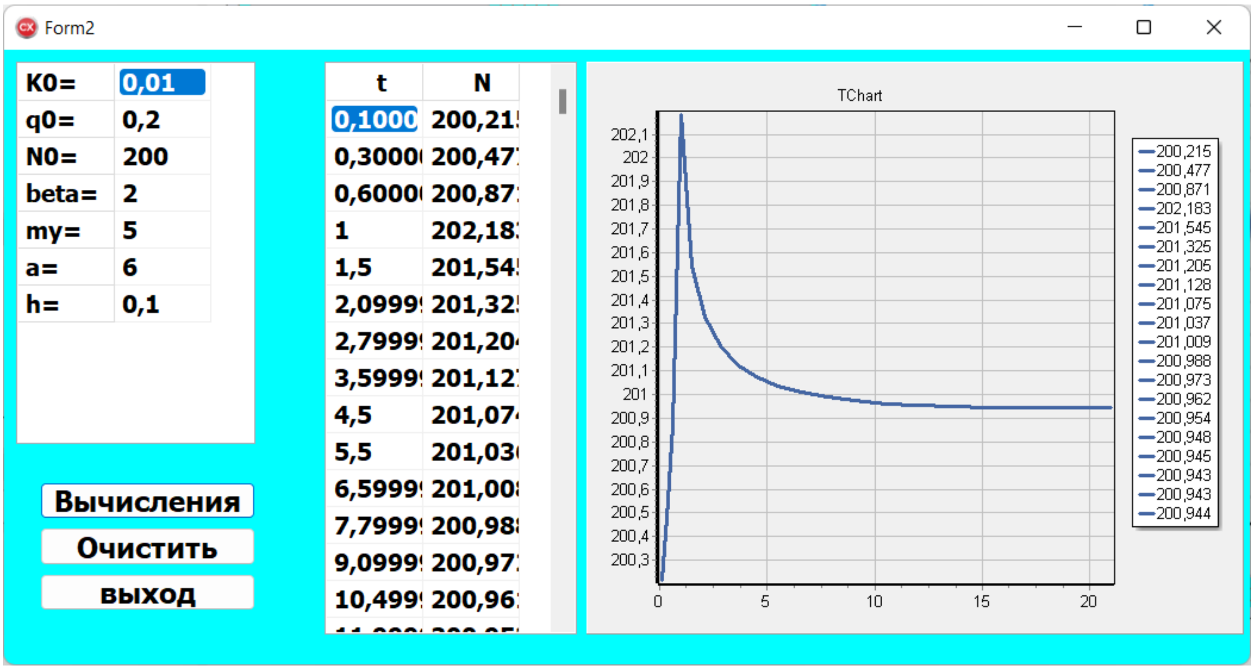

Рис. 6. Скриншот программы “Стационарные волны”

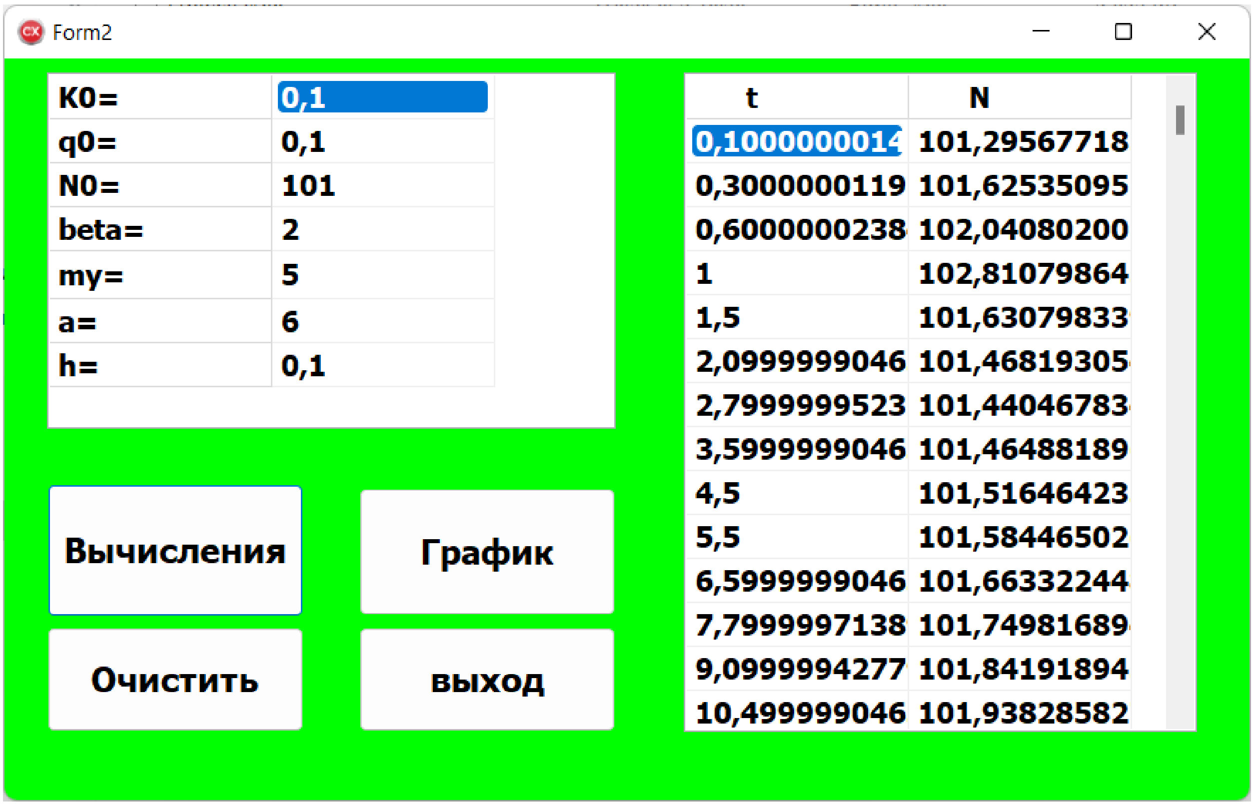

Рис. 7. Скриншот программы “Стационарные волны”

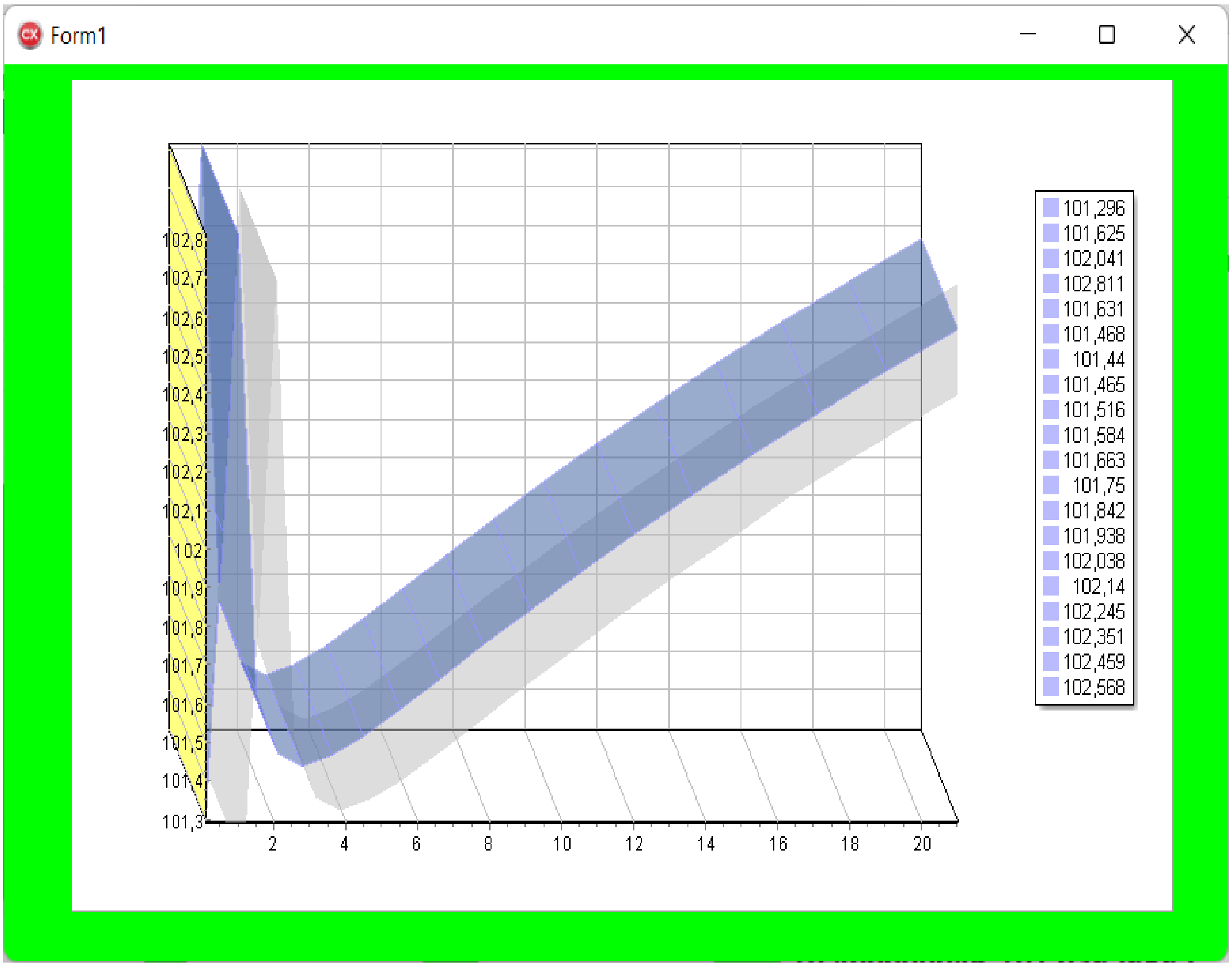

Рис. 8. Скриншот программы “Стационарные волны”

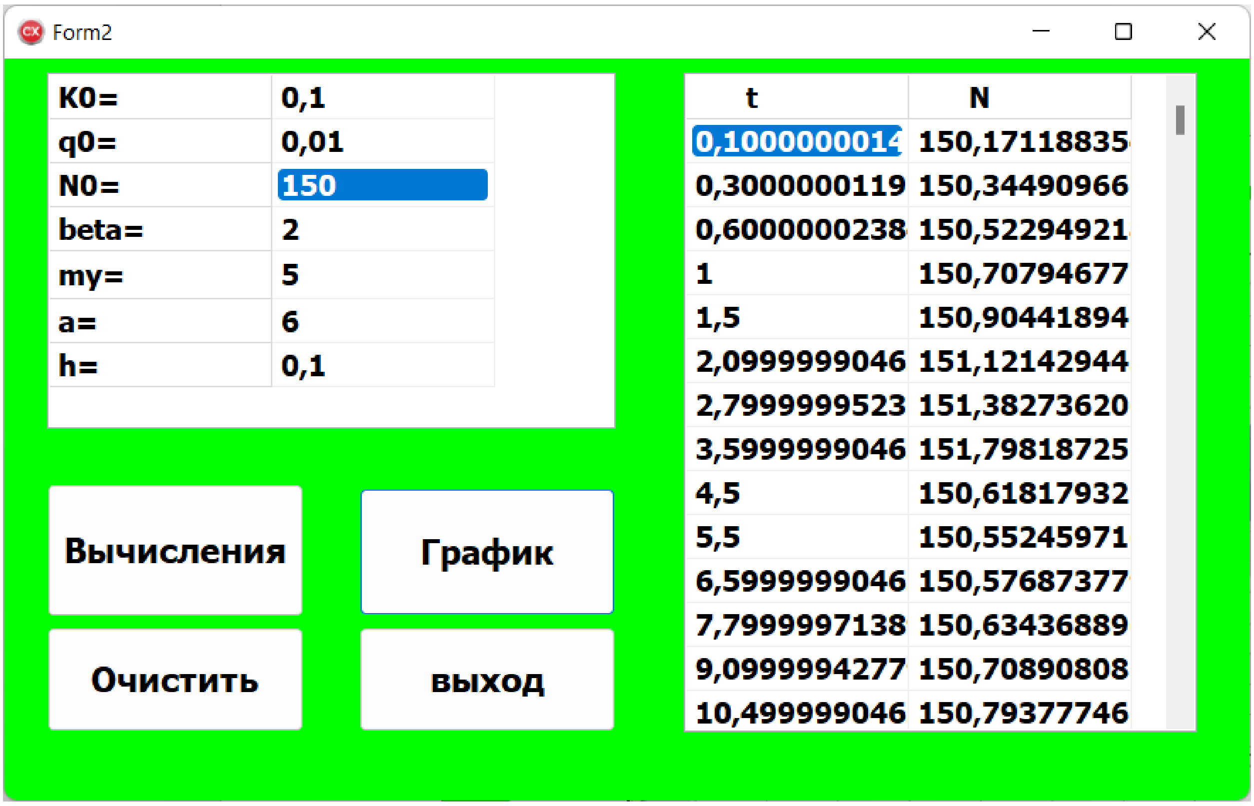

Рис. 9. Скриншот программы “Стационарные волны”

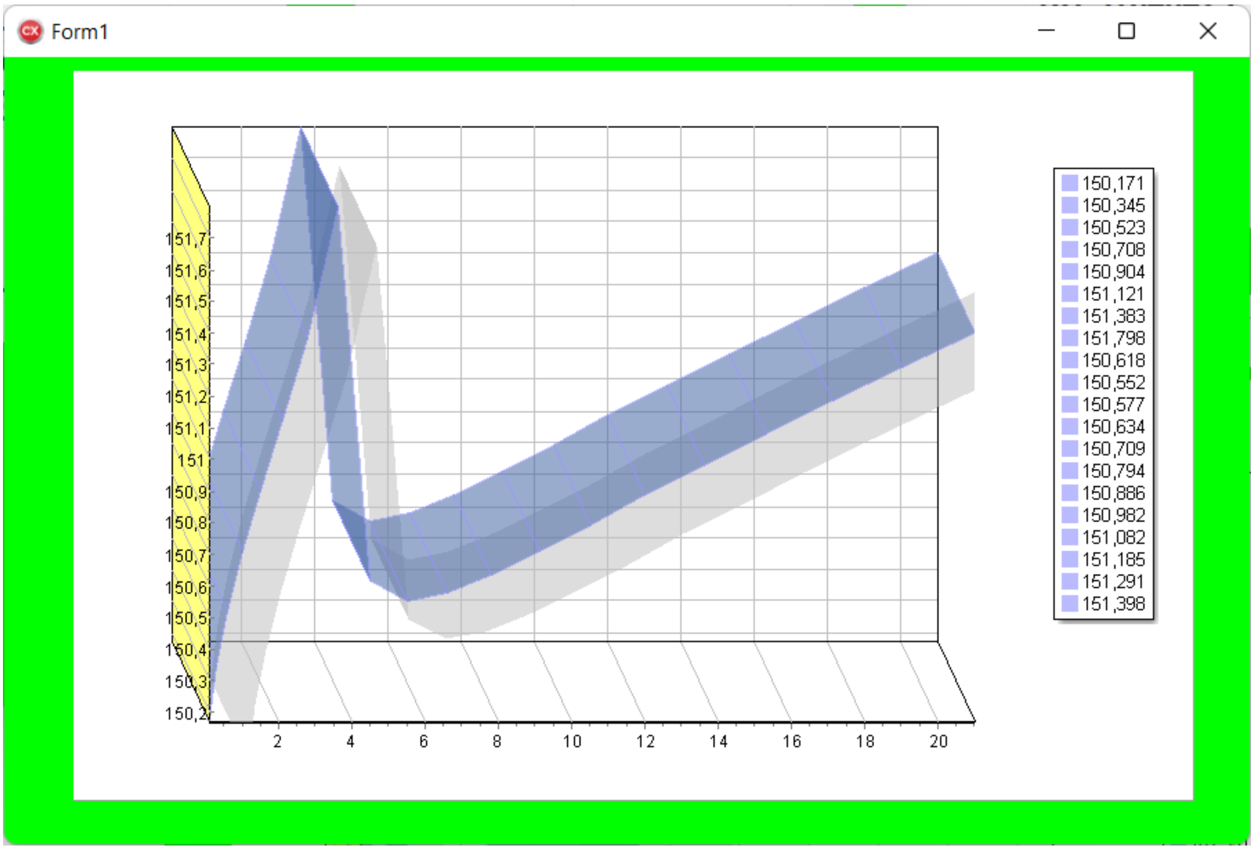

Рис. 10. Скриншот программы “Стационарные волны”

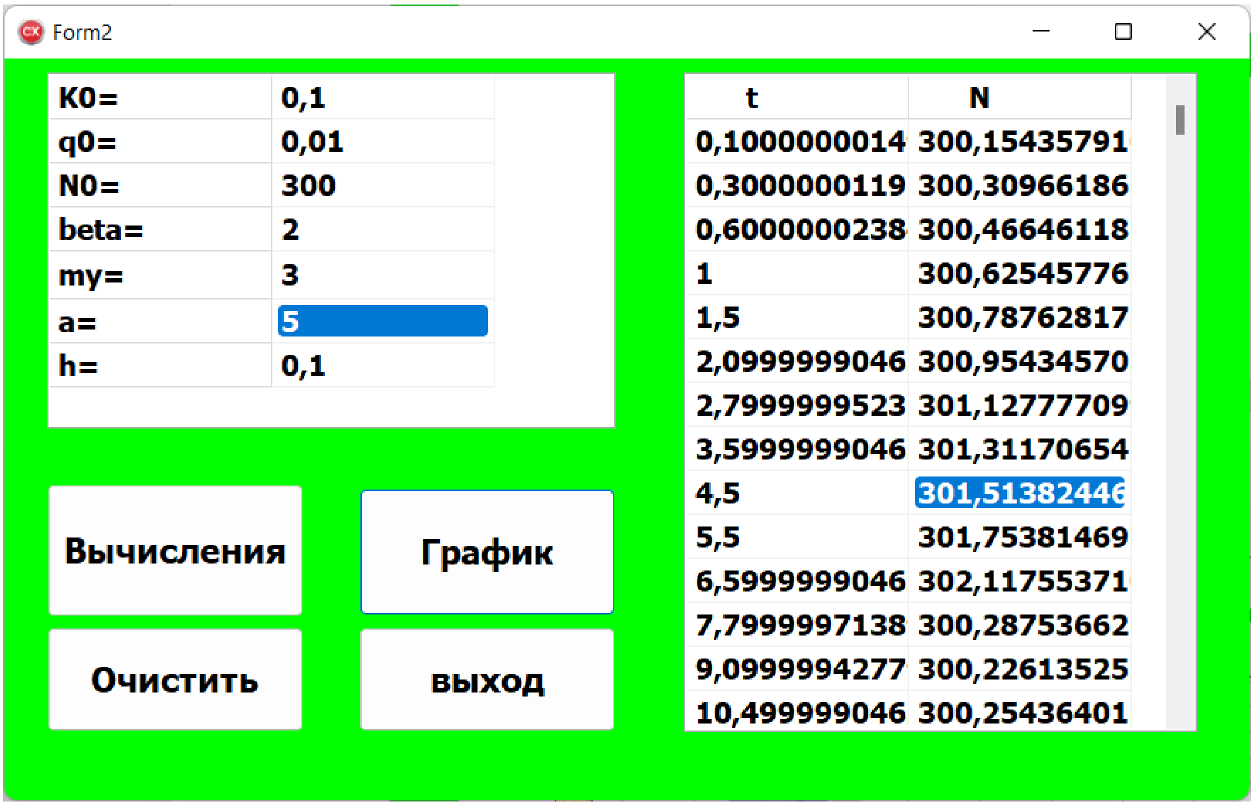

Рис. 11. Скриншот программы “Стационарные волны”

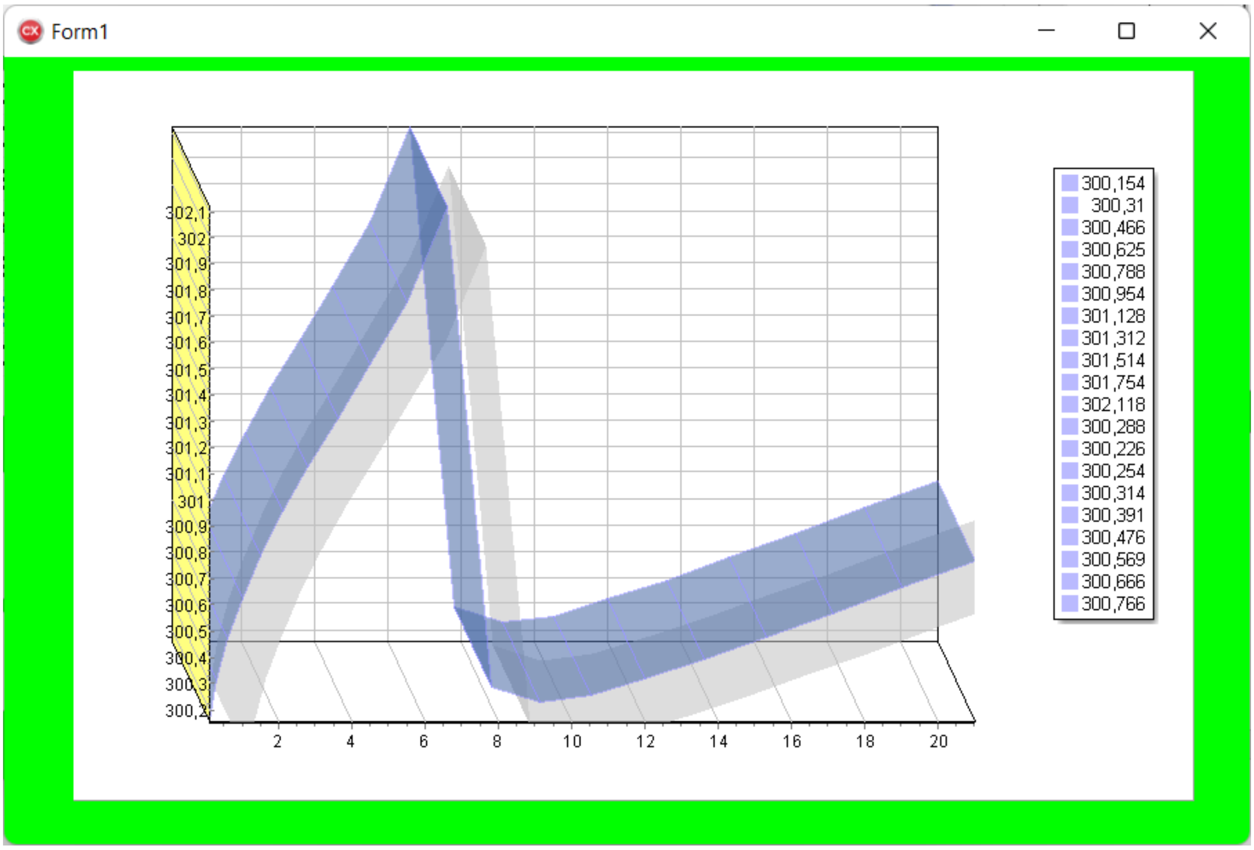

Рис. 12. Скриншот программы “Стационарные волны”

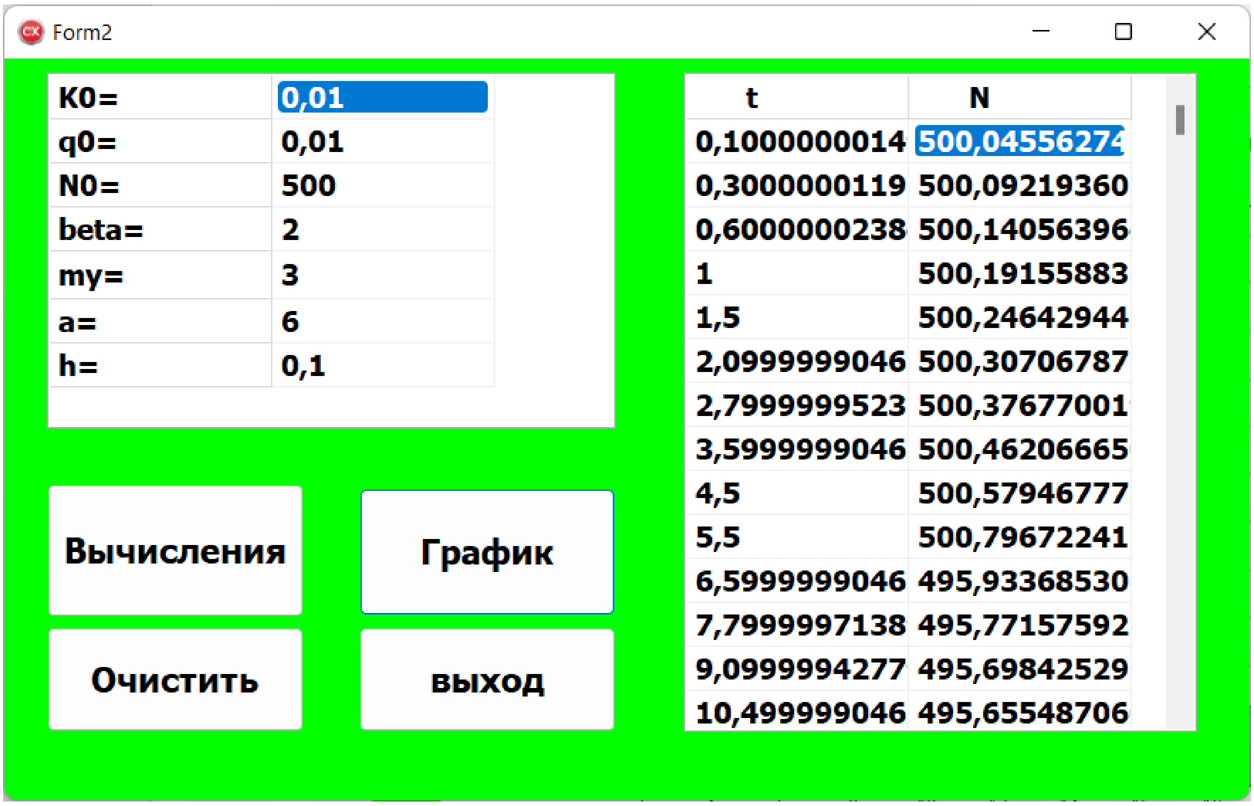

Рис. 13. Скриншот программы “Стационарные волны”

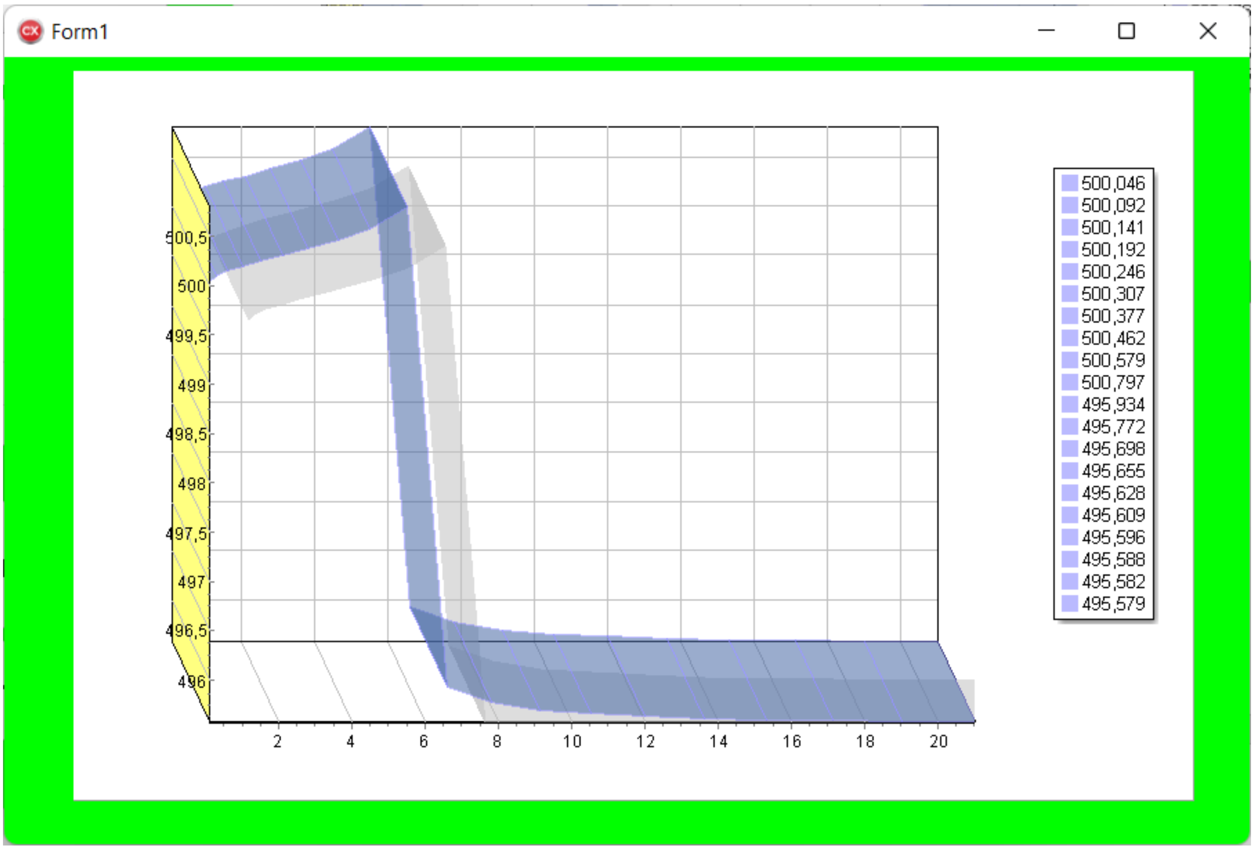

Рис. 14. Скриншот программы “Стационарные волны”

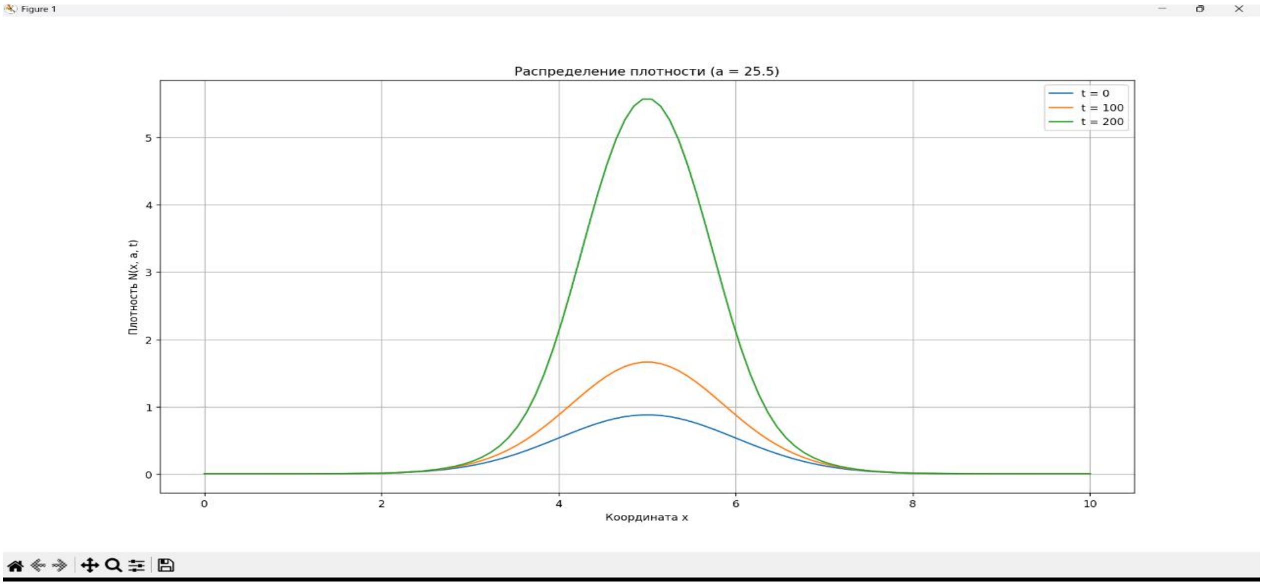

Рис. 15. Скриншот программы «Динамика популяции с учётом временно-возрастной структуры»

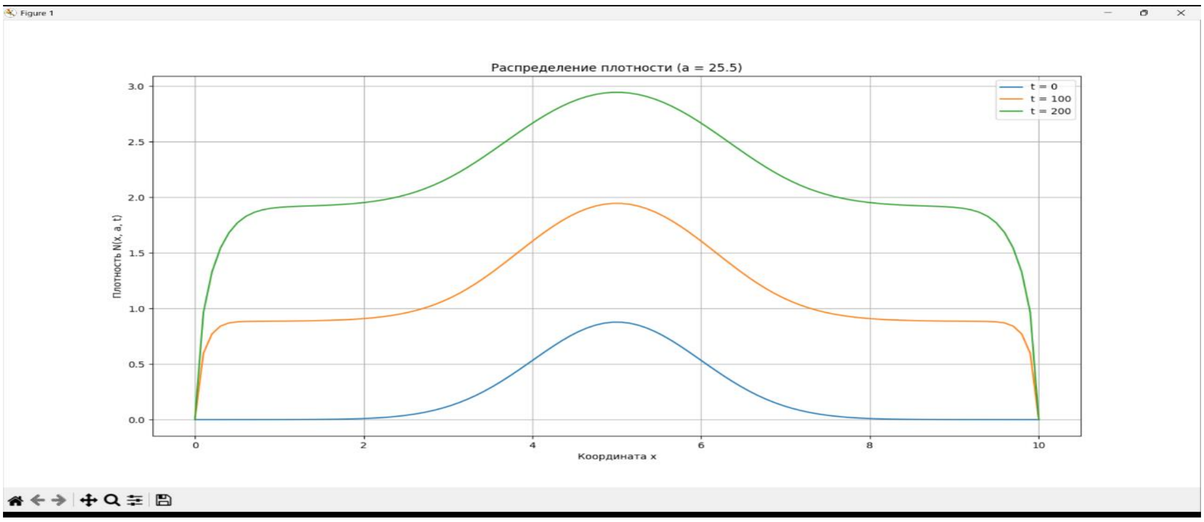

Рис. 16. Скриншот программы «Динамика популяции с учётом временно-возрастной структуры»

ГЛАВА 5. Обсуждение результатов исследования

§5.1. Обзор полученных результатов о теоретических и методологических основах математического моделирования популяционных волн и решения дифференциальных задач в частных производных с функциальными начальными и краевыми условиями

В первой главе диссертационной работы проведён подробный анализ существующих исследований, посвящённых математическому моделированию популяционных волн. Основное внимание уделено дифференциальным уравнениям в частных производных, которые широко применяются для описания динамики популяций в различных областях биологии, экологии и медицины.

Особое внимание было уделено функциональным начальными и краевым условиям, которые играют ключевую роль в корректности и универсальности моделей. В отличие от стандартных задач в математической биологии, где условия часто принимаются постоянными или зависят только от времени, в данной работе акцент сделан на условии, которое может изменяться не только во времени, но и в пространстве. Это даёт более точные и комплексные описания эволюции популяций в условиях различных внешних воздействий, таких как миграция, экосистемные колебания и т.д.

Проведённый обзор позволил выявить несколько ключевых направлений в научных исследованиях:

1. Моделирование волновых процессов в экосистемах: Многие исследователи сосредоточены на изучении пространственно-временной динамики популяций с учётом миграций и пространственного распространения, что позволяет создать более точные предсказания для устойчивости экосистем.

2. Использование функциональных условий в задачах моделирования: Основные работы, анализируемые в главе, подчёркивают важность введения функциональных зависимостей на границах и в начальных условиях, которые позволяют более гибко моделировать влияние внешних факторов и адаптивные реакции популяций на эти воздействия.

3. Дифференциальные уравнения с функциональными начальными и краевыми условиями: Одним из важных выводов является необходимость интеграции теоретических подходов в области функционального анализа и математической физики для решения задач с функциональными граничными условиями. Это открывает новые горизонты для точных решений сложных биологических моделей.

Во второй главе работы было приведено решение дифференциальных задач в частных производных, в которых начальные и краевые условия могут быть заданы функционально. В отличие от традиционных задач, где значения на границах или во времени фиксированы, в рассматриваемых задачах эти значения могут быть произвольными функциями, зависящими от пространственных и временных переменных. Такой подход значительно усложняет методы решения и требует более сложных математических инструментов.

В первом параграфе для интегро-дифференциальной задачи в линейном случае доказана теорема об абсолютной равномерной сходимости рядов Фурье для 3-крайвой задачи, где коэффициенты ряда Фурье удовлетворяют интегральному уравнению типа восстановления. Во втором параграфе для неоднородной задачи с функциональными условиями получено и обосновано решение в виде рядов Фурье. В третьем параграфе доказан принципа максимума для линейных интегро-дифференциальных задач, из которого следует не отрицательность и ограниченность решений рассматриваемых задач. В четвертом параграфе приведено исследование пространственно-одномерной линейной системы с функциональными начальными условиями, описывающих состояние биологических систем.

Теоретическая часть.

Для теоретического анализа использованы методы теории дифференциальных уравнений в частных производных, функционального анализа и теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Были рассмотрены как линейные, так и нелинейные задачи, что позволило установить определённые условия существования и единственности решений для задач с функциональными начальными и краевыми условиями. В ходе решения были получены условия для различных типов популяционных волн, которые могут описывать не только процессы распространения, но и взаимодействия между отдельными частями популяции.

Результаты показали высокую точность и эффективность предложенных методов, что подтверждается рядом примеров, где удалось моделировать сложные динамики популяционных волн с учётом изменения внешних условий. Особенно интересным является применение этих методов в задачах с временно-зависимыми краевыми условиями, где решение задачи требует учёта различных параметров, изменяющихся в процессе времени.

Важность функциональных условий

Решения, полученные для дифференциальных задач с функциональными начальными и краевыми условиями, показали, что эти условия играют ключевую роль в определении долгосрочной динамики популяций. Например, если начальные условия зависят от времени или внешней среды, это может приводить к совершенно различным результатам, таким как изменение скорости распространения волны или появление новых стационарных состояний, что критически важно для моделей устойчивости экосистем.

Обсуждение полученных результатов

Основные результаты исследования позволяют сделать несколько важных выводов:

1. Роль функциональных условий: Введение функциональных начальных и краевых условий значительно расширяет возможности математического моделирования популяционных процессов. Эти условия позволяют учесть более широкий спектр факторов, влияющих на динамику популяций, таких как изменение окружающей среды, миграция или взаимодействие между различными видами.

2. Новые подходы к решению задач: Разработанные методы решения дифференциальных задач с функциональными начальными и краевыми условиями дают возможность не только моделировать более сложные популяционные процессы, но и применять эти методы к реальным экологическим и биологическим данным. Применение численных методов позволяет с высокой точностью моделировать такие процессы, что имеет важное значение для предсказания устойчивости экосистем и управления природными ресурсами.

3. Перспективы дальнейших исследований: В дальнейших исследованиях предстоит развивать предложенные методы для более сложных и многогранных моделей, в которых функциональные условия могут быть не только временно-зависимыми, но и нелинейными, что требует разработки новых теоретических и численных подходов. Также важно исследовать влияние взаимодействующих факторов на устойчивость популяций и экосистем.

§5.2. Результаты исследований нелинейных моделей и разработка численных методов для их решения

В третьей главе работы было проведено исследование нелинейных задач, включающих временно-возрастные и пространственные распределения популяций, что является важным шагом в расширении теории математического моделирования популяционных волн. В отличие от линейных моделей, где популяция рассматривается как однородная, нелинейные модели позволяют учитывать сложные взаимодействия, такие как конкуренция между особями, воздействие внешней среды, миграцию и динамику возрастных структур. Эти факторы могут существенно изменять картину эволюции популяции и привести к появлению различных устойчивых состояний, включая бифуркации и хаотические колебания.

В первом параграфе рассматривается математическая модель популяционных волн в нелинейных системах с учётом временно-возрастных и пространственных распределений. Во втором параграфе приводится решение нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных с функциальными начальными условиями. В третьем параграфе решена интегро-дифференциальная нелинейная система и доказано справедливость решения в случаи для 3-ей краевой задачи. Исследование стационарной численности популяций с учетом возраста и пространственного распределения приведено соответственно в четвёртом и пятом параграфе. В шестом параграфе приведено исследование численности изолированной популяции описываемой интегро-дифференциальной задачей для образования плоских, стоячих и стационарных волн с учётом возрастного состава и пространственных распределений.

Временные и возрастные распределения

Для изучения нелинейных популяционных волн в данной главе введены дополнительные параметры, характеризующие возрастную структуру популяции. Временные и возрастные распределения позволяют более точно описывать динамику популяции, где каждый возрастной класс влияет на поведение всей популяции, а возрастная структура сама по себе меняется со временем. В частности, для возрастных моделей использовались уравнения с разделением переменных, учитывающие взаимодействие между разными возрастными классами.

Пространственное распределение

Пространственная компонента задачи также играет важную роль в описании процессов распространения популяций, особенно в условиях миграции и адаптации к различным условиям окружающей среды. В данной работе для моделирования пространственного распределения популяций использовались нелинейные уравнения в частных производных. Оказалось, что пространственное распределение сильно влияет на устойчивость популяции, её способность к адаптации и выживанию в меняющихся условиях.

Нелинейность моделей

Нелинейные уравнения, описывающие взаимодействие популяций, могут приводить к сложным явлениям, таким как многократные бифуркации, когда небольшие изменения в параметрах модели могут кардинально изменить поведение популяции. Например, в зависимости от значений коэффициентов взаимодействия между возрастными классами или пространственных параметров, популяция может быть устойчива, колебаться или даже вымирать. Моделирование таких явлений требует использования более сложных численных методов и теоретических инструментов.

Таким образом, исследование нелинейных задач с учётом временно-возрастных и пространственных распределений позволяет глубже понять динамику популяций и экосистем, что имеет важное значение для создания более точных и гибких моделей для предсказания изменений в биологических системах. Важным результатом работы является установление связи между нелинейностью взаимодействий и различными типами динамики популяций, что открывает новые горизонты для практического применения моделей в области экологии и биологии.

В четвёртой главе диссертационной работы представлен алгоритм численного решения нелинейных интегро-дифференциальных задач, связанных с моделированием популяционных волн, и разработан комплекс компьютерных программ для решения таких задач. Эта часть работы является важным шагом в практическом применении теоретических моделей, так как численные методы и программные комплексы позволяют решать задачи, которые невозможно решить аналитически или для которых аналитические решения слишком сложны или не существуют.

Интегро-дифференциальные задачи

Интегро-дифференциальные задачи, рассматриваемые в данной главе, включают как дифференциальные уравнения в частных производных, так и интегральные компоненты, которые отражают различные формы взаимодействия между частями популяции. Например, интегральные уравнения могут использоваться для моделирования влияния взаимодействий между разными частями популяции (например, межвидовой конкуренции) или для учёта запаздываний в реакции популяции на изменения внешней среды. Включение интегральных членов делает задачи существенно сложнее с точки зрения численного решения.

В рамках данного исследования была проведена работа по разработке численных методов для решения сложных интегро-дифференциальных уравнений, возникающих при математическом моделировании популяционных процессов. Основным результатом стало создание вычислительного алгоритма, сочетающего современные подходы разностных схем с инновационными методами численного интегрирования. Особенностью разработанного алгоритма является его способность эффективно учитывать интегральные члены взаимодействия, играющие ключевую роль в динамике биологических систем, что достигается за счет специальной параметризации и адаптивного выбора шагов дискретизации.

Важным достижением исследования стало создание численного метода, обладающего исключительной устойчивостью при работе с большими временными шагами, что особенно ценно для долгосрочного прогнозирования популяционной динамики. Этот результат был получен благодаря введению новых процедур и разработке специальных критериев контроля точности. Метод демонстрирует высокую эффективность при моделировании нелинейных систем с пространственной неоднородностью и сложными взаимодействиями, включая случаи с пороговыми эффектами и явлениями насыщения.

Значительная часть работы посвящена созданию комплексного программного обеспечения, реализующего предложенные численные методы. Разработанный программный комплекс отличается модульной архитектурой, включающей специализированные блоки для предварительной обработки данных, численного решения уравнений, визуализации и анализа результатов. Особое внимание уделено оптимизации вычислительных процедур, что позволяет эффективно решать задачи высокой размерности. Программная реализация поддерживает возможности параллельных вычислений, существенно расширяя диапазон решаемых прикладных задач.

Проведенные вычислительные эксперименты продемонстрировали высокую надежность и точность разработанного программного комплекса. Тестирование проводилось на широком классе задач, включая как тестовые примеры с известными аналитическими решениями, так и новые сложные случаи, представляющие практический интерес для математической биологии. Особо следует отметить устойчивую работу алгоритмов в условиях сильной нелинейности и при наличии особенностей в решениях, что подтверждает универсальность и практическую ценность разработанных методов.

Разработаны строгие математические формулировки для классов интегро-дифференциальных уравнений, описывающих такие системы, с обоснованием корректности постановок соответствующих краевых задач. Особое внимание уделено учету функциональных зависимостей и нелокальных взаимодействий, характерных для биологических систем.

Полученные результаты создают прочную основу для дальнейшего развития методов математического моделирования в экологии и смежных областях, предлагая новые перспективные инструменты для анализа и прогнозирования сложных биологических систем.

ВЫВОДЫ

- ✓ для интегро-дифференциальной задачи с переменными коэффициентами в линейном случае доказана теорема об абсолютной равномерной сходимости рядов Фурье для 3-крайвой задачи, где коэффициенты ряда Фурье удовлетворяют интегральному уравнению типа восстановления, найдено и обосновано решение в виде рядов Фурье для неоднородной задачи с функциональными условиями[1-А, 6-А, 8-А, 11-А];
- ✓ доказан принцип максимума для линейных интегро-дифференциальных задач с функциональными условиями и найдены априорные оценки, так же найдено решение пространственно-одномерных линейных задач с функциональными условиями[5-А, 9-А, 12-А];
- ✓ создана математическая модель интегро-дифференциальной задачи популяционных волн в нелинейных системах с учётом временно-возрастной структуры и пространственных распределений и доказано её решение[4-А, 7-А];
- ✓ доказано и обосновано стационарное решение нелинейной интегро-дифференциальной задачи, предложено определение стационарной численности с учетом возраста и пространственных распределений[2-А, 7-А];
- ✓ найдено решение интегро-дифференциальной задачи численности изолированной популяции в частных производных с функциальными начальными условиями для образования плоских, S-волн, стоячих и стационарных волн с учётом возрастного состава и пространственных распределений[7-А, 8-А];
- ✓ разработан алгоритм численного решения нелинейной интегро-дифференциальной задачи и приведены результаты комплекса компьютерных программ[2-А, 3-А].

РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПРАКТИЧЕСКОМУ ИСПОЛЬЗОВАНИЮ РЕЗУЛЬТАТОВ

Результаты данного исследования представляют собой значительный вклад в развитие современной математической теории, существенно расширяя методологические возможности анализа нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных с функциональными начальными условиями и их приложений в области математической биологии и экологического моделирования. Разработанный в ходе работы комплексный математический аппарат позволяет принципиально по-новому подойти к исследованию сложных пространственно-временных процессов в биологических системах, открывая перспективы для решения целого класса ранее недоступных для анализа теоретических и прикладных задач.

Особую научную и практическую ценность представляет созданная в ходе исследования методика численного решения, которая позволяет эффективно учитывать как специфику функциональных начальных условий, так и сложную нелинейную структуру рассматриваемых уравнений. Реализованный в виде высокоэффективного программного комплекса, этот метод демонстрирует исключительную вычислительную устойчивость и точность, что было подтверждено серией контрольных расчетов и сравнений с известными аналитическими решениями. Универсальность данного инструментария позволяет с одинаковой эффективностью применять его как для фундаментальных исследований волновых процессов в распределенных биологических системах, так и для решения конкретных прикладных задач экологического мониторинга и управления природными ресурсами.

Разработанные в исследовании методы существенно расширяют возможности математического моделирования биологических процессов, преодолевая принципиальные ограничения традиционных подходов. Они позволяют с высокой точностью учитывать пространственную неоднородность среды, временные запаздывания в динамике популяций, а также сложные нелинейные эффекты межвидового взаимодействия. Это дает возможность более адекватно описывать реальные биологические системы, где классические модели часто оказываются недостаточно точными, особенно при анализе критических режимов развития популяций под воздействием внешних факторов.

Практическая значимость полученных результатов проявляется в широких возможностях их применения для решения актуальных задач современной экологии. Разработанные подходы могут быть успешно использованы для прогнозирования динамики численности видов, оптимизации стратегий, оценки последствий климатических изменений для экосистем, а также для разработки мер по контролю инвазивных видов и сохранению биоразнообразия. Особенно перспективным представляется применение этих методов при создании систем поддержки принятия решений в области управления биологическими ресурсами.

Теоретическая ценность работы заключается в создании прочного фундамента для дальнейших исследований в области математического моделирования биологических процессов. Разработанный программный комплекс может служить эффективной платформой для создания специализированных модулей, адаптированных под конкретные прикладные задачи.

Междисциплинарный характер исследования, объединяющий передовые достижения современной математики с актуальными проблемами теоретической и прикладной биологии, значительно расширяет область потенциального применения полученных результатов. Они представляют существенный интерес не только для специалистов по дифференциальным уравнениям и математическому моделированию, но и для широкого круга исследователей в области экологии, популяционной генетики и управления природными ресурсами. Это создает уникальные возможности для научного сотрудничества и практической реализации разработанных методов, способствуя прогрессу в понимании сложных биологических систем и совершенствовании подходов к их изучению и устойчивому управлению.

Список литературы

А) Список использованных источников

[1]. Ablowitz M.J. Explicit solutions of Fisher’s equation for a special wave speed / M.J. Ablowitz, A. Zeppetella // Bull. Math. Biology. – 1979. – 41. – P. 835-840.

[2]. Auger P., Poggiale J-Ch. Emergence of population growth models: fast migration and slow growth / P. Auger, J-Ch. Poggiale // J. Theor. Biology. – 1996. – Vol. 182. – P. 99-108.

[3]. Bazykin A.D. A model of evolutionary appearance of dissipative stucture in ecosystems / A.D. Bazykin, A.I. Khibnik, E.A. Aponina // J. Math. Biology. – 1983. – №18. – P. 13-23.

[4]. Chow P.l. Periodic and travelling wave solution to Volterra- Lotka equation with diffusion / P.L. Chow, W.C. Tam // Bull. Math. Biol. – 1976. – Vol. 38. – P. 643-658.

[5]. Dubey B. A predator-prey interaction model with self and cross-diffusion / B. Dubey, B. Das, J. Hassain // Ecol. Model. – 2002. – Vol. 141. – P. 67-76.

[6]. Hilborn K. Some long term dynamics of predator-prey models with diffusion / K. Hilborn // Ecol. Modelling. – 1979. – Vol. 6. – P. 23-33.

[7]. H. Von Foester. Some Remark on Changing Population. / The kinetics of Cellular Proliferations.—N.Y., 1959, —pp. 131-139.

[8]. J. D. Murray. Nonexistence of wave solutions for the class of reaction diffusion equations given by the Volterra interacting populations equations with diffusion // J. Theor. Biology, 1975, Vol. 52, pp. 459-469).

[9]. L. Demetrius. Statistical mechanics and population biology // Journal of statistical physics, 1983, vol. 30, No. 3, p.p. 709-753.

[10]. Lotka A.J. Elements of mathematical biology / A.J. Lotka. – NY: Dover, 1956. – 465 p.

[11]. Lotka, A.T. The stability of the normal age distributions [Text] / A.T. Lotka // Proc. Nat. Acad. Sci. – 1922. – Я6. – P. 339-345.

[12]. Lotka, A.T. Theoricanalytique des associations biologiques [Text] / A.T. Lotka. – Paris: Principles, 1939. – 218 p.
[13]. Malthus T.R. An essay on the principle of population / T.R. Malthus. – London: J. Johnson, 1798. – 134 p.
[14]. May R. Biological Populations with Nonoverlapping Generations: Stable Points, Stable Cycles and Chaos / R. May // Science, New Series. – 1974. – Vol. 186. – P. 645-647.
[15]. Mitchell A.R. The Finite Difference Method in Partial Differential Equations / A.R. Mitchell, D.F. Griffiths. – Chichester: Wiley, 1980. – 284 p.
[16]. M. Murima, . Nishiura, M. Yamaguti. Some diffusive prey and predator systems and their bifurcation problems / In the book: Bifurcation theory and applications in scientific disciplines. The New York Academy of Science, NY, 1979, pp. 490-510.
[17]. Nicholson A.J. and Bailey V.A. The balance of animal populations, Proceedings of the Zoological Society of London, 1, 1935, 551–598.
[18]. Okubo A. and Levin S.A. Diffusion and Ecological Problems, Springer, 2002, 2nd edition.
[19]. Okubo A. Diffusion and ecological problems: Mathematical models. Biomathematics; vol. 10. Berlin, Springer Verlag, 1980, — 254 p.
[20]. Pearl R. The growth of populations / R. Pearl // The Quart. Rev. of Biol. – 1927. – Vol. 2, №4. – P. 532-548.
[21]. Richtmyer R.D. Difference Methods for Initial-Value Problems / R.D. Richtmyer, K.W. Morton. – New York: Wiley, 1967. – 420 p.
[22]. Rosenzweig M.L. Graphical representation and stability conditions of predator-prey interactions / M.L. Rosenzweig, R.H. MacArthur // Amer. Natur. – 1963. – Vol. 97, №893. – P. 209-223.
[23]. Volpert A.I. Traveling wave solutions of parabolic systems / A.I. Volpert, V.A. Volpert, V.A. Volpert. – American Mathematical Society, 2000. – 448 p.

[24]. Wang W. Adaptation of prey and predators between patches / W. Wang, Y. Takeuchi // J. Theor. Biology. – 2009. – Vol. 258. – P. 603–613.

[25]. W. O. Kermack, A. G. McKendrick. Contributions to the mathematical theory of epidemics// Proc. Roy. Soc., A, 1927, Vol. 16, p.p. 35-55.

[26]. Александров А.Ю., Платонов А.В., Старков В.Н., Степенко Н.А. Математическое моделирование и исследование устойчивости биологических сообществ. СПб.: Соло, 2006. — 186 с.

[27]. Абакумов А.И. Оптимальный сбор урожая в моделях популяций / А.И. Абакумов // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 1994. – Т. 1, вып. 6. – С. 834-849.

[28]. Абакумов А.И. Управление и оптимизация в моделях эксплуатируемых популяций / А.И. Абакумов. – Владивосток: Дальнаука, 1993. – 129 с.

[29]. Александров А.Ю. Математическое моделирование и исследование устойчивости биологических сообществ / А.Ю. Александров, А.В. Платонов, В.Н. Старков, Н.А. Степенко. – СПб.: Соло, 2006. – 186 с.

[30]. Александров А.Ю. О диссипативности некоторых классов моделей популяционной динамики / А.Ю. Александров, А.В. Платонов, Я. Чэнь // Вестник СПбГУ. Сер.10: Прикладная математика, информатика, процессы управления. – 2010. – Вып. 2. – С. 3–17.

[31]. Аматов, М. А. Математическое моделирование популяционных волн / М. А. Аматов, Г. М. Аматова // Вопросы современной науки и практики. Университет им. В.И. Вернадского. №2(56). 2015. С. 170-177.

[32]. Апонин Ю.М. Математическая модель сообщества хищник-жертва с нижним порогом численности жертвы / Ю.М. Апонин, Е.А. Апонина // Компьютерные исследования и моделирование. – 2009. – Т. 1, №1. – С. 51-56.

[33]. Базыкин А.Д. Нелинейная динамика взаимодействующих популяций. Москва-Ижевск: Институт компьютерных технологий, 2003. — 368 с.

[34]. Базыкин А.Д. Математическая биофизика взаимодействующих популяций / А.Д. Базыкин. – М.: Наука, 1985. – 181 с.

[35]. Балыкина Ю.Е., Колпак Е.П Математические модели функционирования фолликула щитовидной железы ./ Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. — 2013. — № 3. — С. 20—31.

[36]. Батурин В.А. Планирование и прогнозирование природноэкономических систем / В.А. Батурин, Д.М. Скитневский, А.К. Черкашин. – Новосибирск: Наука, 1984. – 169 с.

[37]. Борисов А.В. Численное моделирование одномерной популяционной динамики с нелокальным воздействием / А.В. Борисов, Р.О. Резаев, А.Ю. Трифонов, А.В. Шаповалов // Известия Томского политех. унта. – 2009. – Т. 315, №2. – С. 24-28.

[38]. Васильев М.Д. Модель охраняемой популяции при наличии конкуренции на билокальном ареале / М.Д. Васильев, Ю.И. Трофимцев // Вестник Кем. университета. – 2015. – Т. 1, №2(62). – С. 11-22. 131

[39]. Васильев М.Д. Создание охраняемой территории: моделирование динамики популяции и оценка затрат / М.Д. Васильев, М.П. Григорьев, Ю.И. Трофимцев // Мат. заметки ЯГУ. – 2013. – Т. 20, вып. 2. – С. 222-236.

[40]. Васильев М.Д. Эколого-экономическая модель охраняемой популяции со случайной величиной добычи / М.Д. Васильев, Ю.И. Трофимцев // Тр. Межд. науч. чтений "Приморские зори - 2012"/ под общ. ред. А.И. Агошкова. – Владивосток: Изд-во ТАНЭБ, 2012. – Вып. 1. – С. 75-78.

[41]. Владимиров В.С. Уравнения математической физики.

М:,Наука,1988.-512с.

[42]. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование / В. Вольтерра. – М.: ИКИ, 2004. – 288 с.

[43]. Г. Остер, Дж. Гукенхеймер. Бифуркации в моделях популяции / В кн.: Дж. Марсден, М. Мак-Кракен Бифуркация рождения цикла и ее приложения. — М.: Мир, 1980. — с. 254-273.

[44]. Гайко В.А. Глобальный бифуркационный анализ квартичной модели «хищник–жертва» / В.А. Гайко // Компьютерные исследования и моделирование. – 2011. – Т. 3, № 2. – С. 125-134.

[45]. Гимельфарб А.А. Динамическая теория биологических популяций / А.А. Гимельфарб, Л.Р. Гинзбург, Р.А. Полуэктов, Ю.А. Пых, В.А. Ратнер. – М.: Наука-Физматгиз, 1974. – 455 с.

[46]. Говорухин В. Н. Популяционные волны и их бифуркации в модели «активный хищник – пассивная жертва» / В. Н. Говорухин, А.Д. Загребнева // Компьютерные исследования и моделирование 2020 Т. 12 № 4 С. 831–843.

[47]. Горбунова Е.А. Математические модели одиночной популяции / Е.А. Горбунова, Е.П. Колпак // Вестник СПбГУ. Сер. 10: Прикладная математика, информатика, процессы управления. – 2012. – Вып. 4. – С. 18-30.

[48]. Горбунова Е.А., Колпак Е.П. Математические модели одиночной популяции // Вест. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. — 2012. — Вып. 4. — С. 18— 30.

[49]. Глызин С.Д. Разностная аппроксимация уравнения «реакция — диффузия» на отрезке // Моделирование и анализ информационных систем. — 2009. — Т. 16. — № 3. — С. 96—116.

[50]. Гроссман С. Математика для биологов / С. Гроссман, Дж. Тернер. – М.: Высшая школа, 1983. – 384 с. 134

[51]. Гурман В.И. Модели природных систем / В.И. Гурман, И.П. Дружинина. – Новосибирск: Наука, 1978. – 222 с.

[52]. Домбровский Ю.А. Пространственная и временная упорядоченность в экологических и биохимических системах / Ю.А. Домбровский, Г.С. Маркман. – Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 1983. – 120 с.

[53]. Жукова И.В., Колпак Е.П Математическая модель солидной опухоли // Естественные и математические науки в современном мире. — 2013. — № 13. — С. 18—25.

[54]. Журавлёв В.М. Нелинейные волны в многокомпонентных системах с дисперсией и диффузией. Точно решаемые модели. // Ульяновск: УлГУ, 2001. 200 с.

[55]. Ильичев В.Г. Об экономических механизмах управления биоресурсами / В.Г. Ильичев, Д.Б. Рохлин, Г.А. Угольницкий // Известия Академии наук. Теория и системы управления. – 2000. – Вып. 4. – С. 104-110.

[56]. Кодиров О.К. Исследование процессов малых поперечных и продольных колебаний струны и тепловых волн с особенностями, которые описываются дифференциальными уравнениями в частных производных второго порядка в экстремальных режимах. [Текст] / О.К. Кодиров, М. Гадозода, М.К.Юнуси // Вестник национального университета. Серия естественных наук – 2022.-С. 134-162.

[57]. Колмогоров А.Н., Петровский И.Г., Пискунов Н.С. Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества, и его применение к одной биологической проблеме // Бюл. МГУ. Сер. А. Матеем. и мех. — 1937. — Т. 1. — Вып. 1. — С. 1—26.

[58]. Колобов А.В., Полежаев А.А. Влияние случайной подвижности злокачественных клеток на устойчивость фронта опухоли // Компьютерные исследования и моделирование. — 2009. — Т. 1. — № 2. — С. 225—332.

[59]. Колпак Е.П., Балыкина Ю.Е., Котина Е.Д., Жукова И.В. Математическая модель нарушений функционирования щитовидной железы // Молодой Ученый. — 2014. — № 2(61). — С. 19—24.

[60]. Колпак Е.П., Горбунова Е.А., Балыкина Ю.Е., Гасратова Н.А. Математическая модель одиночной популяции на билокальном ареале // Молодой ученый. — 2014. — № 1 (6). — С. 28—33.
[61]. Колпак Е.П., Столбовая М.В. Математическая модель кинетики роста растений // Журнал научных публикаций аспирантов и докторантов. — 2013. — № 12 (90). — С. 230—232.
[62]. Ковалева Е.С. Динамика модели популяционной кинетики с косимметрией / Е.С. Ковалева, В.Г. Цибулин, К. Фришмут // Мат. моделирование. – 2008. – Т. 20, №2. – С. 85-92.
[63]. Ковалева Е.С. Семейство стационарных режимов в модели динамики популяций / Е.С. Ковалева, В.Г. Цибулин, К. Фришмут // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2009. – Т. 12, №1. – С. 98-108.
[64]. Колмогоров А.Н. Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества, и его применение к одной биологи135 ческой проблеме / А.Н. Колмогоров, И.Г. Петровский, Н.С. Пискунов // Бюл. МГУ. Сер. А. – 1937. – №6. – С. 1-26.
[65]. Колпак Е.П. Математическая модель одиночной популяции на билокальном ареале / Е.П. Колпак, Е.А. Горбунова, Ю.А. Балыкина, Н.А. Гасратова // Молодой ученый. – 2014. – №1. – С. 28-33.
[66]. Кудряшев Н.А. О точных решениях уравнений семейства Фишера / Н.А. Кудряшев // Теоретическая и математическая физика. – 1993. – Т. 94, №2. – С. 296–306.
[67]. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа, м.Наука, 1967
[68]. Леонов А.М. Восстановление популяции с помощью убежищ / А.М. Леонов, Ю.И. Трофимцев // Тез. докл. II Международной конференции по мат. моделированию. – Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1997. – С. 66-67.
[69]. Леонов А.М. Качественный анализ динамики промысловых популяций при наличии охраняемых территорий / А.М. Леонов, Ю.И.

Тро136 фимцев // Мат. проблемы экологии. Тез. докл. II Всеросс. конф. – Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1994. – С. 112-113.

[70]. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных, М.: Наука, 1976.-39Ic.

[71]. Леонов А.М. Особые точки и бифуркационные параметры модели восстановления популяции / А.М. Леонов, Ю.М. Трофимцев // Мат. заметки ЯГУ. – 2008. – Т. 15, вып 2. – С. 106-118.

[72]. Логофет, Д.О. Исследование системы пар «хищник—жертва», связанных по конкуренции [Текст] / Д.О. Логофет // Докл. АН СССР. – 1975. – Т. 224, № 3. – С. 529-531.

[73]. Логофет, Д.О. Об устойчивости одного класса матриц возникающих в математической теории биологических сообществ [Текст] / Д.О. Логофет // Докл. АН СССР. – 1975. – Т. 221, № 6. – С. 1272-1275.

[74]. Логофет, Д.О. Вопросы качественной устойчивости и регуляризации в динамических моделях агроценоза хлопчатника [Текст] / Д.О. Логофет, М.К. Юнусов // Вопросы кибернетики. – М., 1979. – Вып. 52. – С.62-74.

[75]. Ляпунов А.А. Биогеоценозы и математическое моделирование / А.А. Ляпунов // Природа. – 1971. – №10. – С. 38-41.

[76]. Ляпунов А.А. О методологических вопросах математической биологии / А.А. Ляпунов, Г.П. Багриновская // Математическое моделирование в биологии: материалы 1 школы по математическому моделированию сложных биологических систем, Мозжинка, март 1973 г. – М. – 1975. – С. 5-18.

[77]. Мазалов В.В. Об одной задаче управления популяцией / В.В. Мазалов, А.Н. Реттиева // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2002. – Т. 9, вып. 2. – С. 293-306.

[78]. Мальтус Т. Опыт закона о народонаселении, Петрозаводск: Петроком, 1993. 139 С.

[79]. Марчук, П.И. Математическое моделирование в проблеме охраны

окружающей среды [Текст] / П.И. Марчук. – М.: Наука, 1982. – 320 с.
[80]. Марри Дж. Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии / Дж. Марри. – М.: Мир, 1983. – 397 с.
[81]. Моисеев, Н.Н. Модели экологии и эволюции [Текст] / М.Н. Моисеев. – М.: Знание, 1983. – 64 с. – (Новое в жизни науке, технике. Сер. Математика, кибернетика. № 10).
[82]. Новосельцев, В.Н. Теория управления и биосистемы [Текст] / В.Н. Новосельцев. – М.: Наука, 1978. – 320 с.
[83]. Одум Ю.П. Экология. В 2-х томах / Ю.П. Одум. – М.: Мир, 1986. Т. 1. – 328 с. Т. 2. – 376 с.
[84]. Одум, Ю. Основы экологии [Текст] / Ю. Одум. – М.: Мир,1975. – 740 с.
[85]. Одинаев Р.Н. Математическая модель задачи защиты растений в биосистеме типа “вредные насекомые – полезные насекомые” с произвольными трофическими функциями // «Системы и средства информатики», 2019. – Т.29.Вып.1.С.96-108.
[86]. Одинаев, Р.Н. Разработка математических моделей процесса защиты растений с учетом временно-возрастной структуры в биосистеме типа «вредные насекомые - полезные насекомые» с произвольными трофическими функциями [Текст] / Р.Н. Одинаев // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. – Бишкек, 2018. – № 2. – С. 24-28.
[87]. Одинаев Р.Н. Численный метод решения интегро-дифференциальной задачи защиты растений [Текст] / Р.Н. Одинаев // Вестн. Тадж. нац. ун-та. Сер. Естеств. наук. – 2017. – №1/5. – С. 112-116
[88]. Олейник О.А. Кружков С.Н. Квазилинейные параболические уравнения второго порядка со многими независимыми переменными, УМН, т.16 в 5(1961), с. 115-155
[89]. П.Курант Р. Уравнения с частными производными, М.: Мир 1964

[90]. Полуэктова Р.А. Динамическая теория биологических популяций [Текст] / под ред. Р.А. Полуэктова. – М.: Наука, 1974. – 455 с.

[91]. Реттиева А.Н. Задача управления биоресурсами с меняющейся долей заповедной территории и миграцией / А.Н. Реттиева // Тезисы докладов Третьей Всероссийской школы молодых ученых «Математические методы в экологии». – Петрозаводск, 2008. – С. 138–139.

[92]. Ризниченко Г.Ю. Математические модели биологических продукционных процессов: Учебное пособие / Г.Ю. Ризниченко, А.Б. Рубин. – М.: Изд-во МГУ, 1993. – 302 с.

[93]. Ризниченко Г.Ю., Рубин А.Б. Биофизическая динамика продукционных процессов. Москва-Ижевск: Институт компьютерных технологий, 2004. — 464 с.

[94]. Ризниченко Г.Ю. Математические модели в биофизике и экологии / Г.Ю. Ризниченко. – Москва-Ижевск: ИКИ, 2003. – 184 с.

[95]. Романов М.Ф. Математические модели в экологии / М.Ф. Романов, М.П. Федоров. – СПб.: Иван Федоров, 2003. – 240 с. 138

[96]. Романовский, Ю.М**.** Математическое моделирование в биофизике [Текст] / Ю.М. Романовский, Н.В. Степанова, Д.С. Чернавский. – М.: Наука, 1972. – 159 с.

[97]. Романовский Ю.М. Математическое моделирование в биофизике / Ю.М. Романовский, Н.В. Степанова, Д.С. Чернавский. – М.: Наука, 1975. – 344 с.

[98]. Самарский А.А. Аддитивные разностные схемы для задач математической физики / А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич. – М.: Наука, 1999. – 319 с.

[99]. Самарский А.А. Математическое моделирование. Идеи. Методы. Примеры / А.А. Самарский, А.П. Михайлов. – М.: Физматлит, 2005. – 320 с.

[100]. Самарский А. А., Михайлов А. П. Компьютеры и жизнь — М.:

Педагогика, 1987. — 127 с.
[101]. Самарский А.А. Разностные схемы с операторными множителями / А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич, П.П. Матус. – Минск: ЦОТЖ, 1998. – 442 с.
[102]. Самарский А.А. Теория разностных схем / А.А. Самарский. – М.: Наука, 1989. – 616 с.
[103]. Самарский А.А. Численные методы решения задач конвекции диффузии / А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич. – М.: УРСС, 2009. – 8 с.
[104]. Свирежев Ю.М. Математическое моделирование биологических систем / Ю.М. Свирежев, Е.Я. Елизаров. – М.: Наука, 1972. – 160 с.
[105]. Свирежев Ю.М. О регулировании численности популяции с возрастной структурой / Ю.М. Свирежев, Н.Н. Тимофеев // Журнал общей биологии. – 1980. – Вып. 2. – С. 200-209.
[106]. Свирежев Ю.М., Логофет Д.О. Устойчивость биологических сообществ / Ю.М. Свирежев, Д.О. Логофет. – М.: Наука, 1978. – 352 с. 139
[107]. Свирежев Ю.М. Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии. М: Наука, 1987. — 368 с.
[108]. Скалецкая Е.И. Дискретные модели динамики численности популяций и оптимизация промысла / Е.И. Скалецкая, Е.Я. Фрисман, А.П. Шапиро. – М.: Наука, 1979. – 165 с.
[109]. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики, м., Наука, 1972
[110]. Тютюнов Ю.В. Механистическая модель эффекта Олли и интерференции в популяции хищников / Ю.В. Тютюнов, Л.И. Титова, С.В. Бердников // Биофизика. – 2013. – Т. 58, вып. 2. – С. 349-356.
[111]. Цыганов М.А., Бикташев В.Н., Бриндли Дж., Холден А.В., Иваницкий Г.Р. Волны в кросс-диффузионных системах особый класс нелинейных волн. // УФН, Т.177, №3, 2007, С.275-300.

[112]. Филиппов А.Ф. Об условиях существования решений квазилинейного параболического уравнения, дан СССР, т.141,N3(I961), с. 568-570
[113]. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа .-М.: Мир, 1968.-423с.
[114]. Четвериков, С. С. Волны жизни/ С. С. Четвериков// Изв. о-ва любителей естествознания, антропологии и этнографии. – 1905. – Т. 3, №6. – С. 106
[115]. Чистяков А.Е. Решение задачи динамики популяций на основе модели "хищник-жертва"/ А.Е. Чистяков, Ю.В. Першина // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2013. – №1. – С. 142-149.
[116]. Шапиро А.П. Математические модели популяций / А.П. Шапиро, А.С. Клещев. – Владивосток: ДВНЦ АН СССР, 1979. – 132 с.
[117]. Шапиро А.П. Реккурентные уравнения в теории популяционной биологии / А.П. Шапиро, С.П. Луппов. – М.: Наука, 1983. – 134 с.
[118]. Юнусов М.К. О решении одного класса нелокальных задач. М., 1991.-30с. - ВЦ АН СССР
[119]. Юнусов М.К. Решение одного класса интегро-дифференциальных задач и его приложения в биологии.- Душанбе, 1991.-53с.
[120]. Юнусов М. Решение одной интегро-дифференциальной задачи методом Фурье.-Докл. АН ТаджССР,I984, т.27,N9, с.49I-494
[121]. [Юнусов М.К. Математические модели управления агроценозами и охраняемыми биологическими популяциями. Диссертация на соискание ученной степени доктора физ-мат. наук.м.: ВЦ АН ссср, 1990г.-312с.
[122]. Юнусов М. О решении некоторых интегро дифференциальных задач. -Докл. АН ТаджССР, 1990,т.33,N6, с. 368-371
[123]. Юнуси М. О новых постоновках задач для дифференциальных уравнений. Тезисы докл. апрельской науч. теор. конфер. проф. преподовательского состава. Душанбе, 1991, с.14

[124]. Юнуси (ов), М.К. О задачах оптимального управления, связанных с моделями агроценозов [Текст] / М.К. Юнуси (ов) // Докл. АН ТаджССР. – 1978. – Т.21, № 4. – С.10-14.

[125]. Юнусов, М.К. Математическая модель интегрированного метода борьбы с вредителями [Текст] / М.К. Юнусов // Докл АН ТаджССР. – 1979. – Т.22, № 2. – С.652-656.

[126]. Юнусов, М.К. Необходимые и достаточные условия сбора планируемого урожая [Текст] / М.К. Юнусов // Математическое моделирование в проблемах рационального природопользования. – Ростов-н/Д., 1986. – С.182-183.

[127]. Юнуси (ов), М.К. Математические модели борьбы с вредителями агроценозов [Текст] / М.К. Юнуси (ов). – Душанбе: Дониш, 1991. – 141 с.

[128]. Юнусов, М.К. Математические модели охраняемых популяций [Текст] / М.К. Юнуси. – М.: ВЦ АН СССР, 1991. – 27 с.

[129]. Юнусов, М.К. Математические модели управления агроценозами и охраняемыми биологическими популяциями [Текст]: дис. … д-ра физ.-мат. наук / М.К. Юнусов. – М., 1990. – 312 с.

[130]. Юнуси, М.К. Оптимальное управление в некоторых задачах управления агроценозами и охраняемых биологических видов[1] [Текст] / М.К. Юнуси // Вестн. Тадж. нац. ун-та. Сер. Естеств. наук. – 2018. – № 2. – С. 38-48.

[131]. Юнуси, М.К. Оптимальное управление в задачах защиты планируемого урожая, охраняемыми биологическими популяциями и их приложения [Текст] / М.К. Юнуси. – Душанбе: ТНУ, 2018. – 287 с.

[132]. Я. В. Белотелое, Д. А. Саранча. Линейный анализ устойчивости двухуровневых систем с диффузией. / В кн.: Проблемы экологического мониторинга и моделирования экосистем. Л.: Гидрометеоиздат, 1985, том VII. — С. 179-194..

[133]. Яворский. В. А, Киреев В. Б., Лобанов. А. И. Возрастная структура и скорость изменения численности стабильной популяции, их связь с обобщенным ресурсом (на украинском языке) // Демография достижения, 1997, Вип. 19, с. 178— 190.

[134]. Э.Зайдлер, Нелинейный функциональный анализ и его приложения [Текст] / Э. Зайдлер;Transl.by Л.Ф.Бор. - Нью-Йорк [и др.] : Springer. Том. 2/А : Линейные монотонные операторы. - 1990. - XVIII,467 с. : ил. - ISBN 0-387-96802-4

Б) РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. В журналах, входящих в перечень ВАК при Президенте Рес-публики Таджикистан и ВАК Российской Федерации

[1-А] Ф. Раимзода Об одной интегро-дифференциальной задаче с переменными коэффициентами / М.К. Юнуси, Ф. Раимзода // Вестник Таджикского национального университета. -Душанбе. -2015. -1/4(168). – С.15-17.

[2-А] Ф. Раимзода Об одном методе решения одной нелинейной интегро-дифференциальной задачи/ М.К. Юнуси, Ф. Раимзода // Вестник ТНУ. Сер. естественных наук. – 2016. Вып. 1/2(196). – С. 8-13.

[3-А] Ф. Раимзода Алгоритм численного решения одной нелинейной интегро-дифференциальной задачи/ М.К. Юнуси, Ф. Раимзода // Вестник ТНУ. Сер. естественных наук. – 2016. Вып. 1/3(200). – С. 20-22.

[4-А] Ф. Раимзода Математическое моделирование популяционных волн в нелинейных системах с учётом временно-возрастных и пространственных распределений / Ф. Раимзода // Вестник ТНУ. Сер. естественных наук. – 2021. №2. – С. 71-80.

[5-А] Ф. Раимзода Решение одной пространственно-одномерной линейной задачи с функциональными условиями / М.Илолов, Ф. Раимзода // Доклады НАН Таджикистана, Т.66, №7-8, 400-408 с.

[6-А] Ф. Раимзода. Представление решения одной неоднородной задачи/ Ф. Раимзода // Доклады НАН Таджикистана, Т.67, №5-6, 254-260 с.

Статьи и тезисы в публикациях конференции:

[7-А] Раимзода Ф. Исследование нелинейных популяционных волн с учетом возрастного состава и пространственных распределений / Ф. Раимзода // Материалы международной научной конференции, посвященной 70–летию академика НАН Таджикистана Шабозова Мирганда Шабозовича (Душанбе, 24-25 июня 2022 г.) С.312-314.

[8-А] Раимзода Ф. Решение неоднородной интегро-дифференциальной задачи с функциональными начальными условиями / Ф. Раимзода // Материалы международной научной конференции, «Современные проблемы математики и её приложения» посвященной 20–летию развития естественных, точных и математических наук 2020-2040 годы (Душанбе, 20-21 октября 2022 г.) С.180-182.

[9-А] Раимзода Ф. Доказательство принципа максимума для линейных интегро-дифференциальных задач с функциональными условиями / Раимзода Ф, Нарзуллоев П.Л., Раимзода Фарахноз. // Материалы международной научно-практической конференции «Компьютерный анализ проблем науки и технологий», посвященная «2020-2040 годы, 20-летию изучения и развития естественных, точных и математических наук в области науки и образования» и «75-летию Таджикского национального университета» г.Душанбе 2023 год, 298-302 с.

[10-А] Раимзода Ф. Об одной обратной задаче для теплопроводности / Илолов М., Раимзода Ф. // Материалы международной научной конференции посвященной 75-летию ТНУ, 20-летию развития точных, естественных и математических наук 2020-2040 годы, и 85-летию академика НАН Таджикистана Раджабов Нусрат. г.Душанбе 2023 год.

[11-А] Раимзода Ф. Об одном решении задачи с начальными и краевыми условиями 3-го рода / Раимзода Ф // Материалы XII-международной научно-практической конференции «Современные проблемы математического моделирования и её приложения», посвященной «Объявления 2020-2040 годы,20-летию изучения и развития естественных, точных и математических наук в области науки и образования» и «75-летию Таджикского национального университета» (Таджикистан, Душанбе,18 май 2024), 333-336 с.

[12-А] Раимзода Ф. Решение одной задачи с функциональными начальными условиями и краевыми условиями 3-го рода / Раимзода Ф., Раимзода Ф., Мусоев С.С. // Материалы международной научно-практической конференции XIV Ломоносовские чтения «Роль филиала Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова в городе Душанбе в развитии науки и образования».(22-23 ноября 2024г.), 107-110с.

[13-А] Раимзода Ф. Решение одной задачи с функциональными начальными условиями и краевыми условиями 3-го рода / Раимзода Ф., Раимзода Ф., Мусоев С.С. // Материалы международной научно-практической конференции XIV Ломоносовские чтения «Роль филиала Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова в городе Душанбе в развитии науки и образования».(22-23 ноября 2024г.), 107-110с.