Отзыв

на диссертационную работу Рахматова Джамшеда Шавкатовича «К теории нечетких и стохастических дифференциальных уравнений и ее приложения» представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы, оптимальное управление

За последние десятилетия теория нечетких и стохастических дифференциальных уравнений в частных производных и ее приложения в различных областях науки и техники стали привлекать внимание исследователей-математиков, как близкого так и дальнего зарубежья. В этой связи отметим публикации M.Puri, D.Ralesku, M.Hukuhara, H.Radstrom, A.Ichikawa, G.Da Prato, J.Zabczyk, I.V.Melnikova, A.V.Balakrishnan, В.Н.Афанасьева, Б.В.Колмановского, В.Р.Носова, А.М.Самойленко, Н.А.Перестюка, А.В.Плотникова, И.В.Скрипника и многих других. Актуальными в теории нечетких и стохастических уравнений в частных производных являются исследования существования, единственности и устойчивости решений. При доказательстве соответствующих утверждений важную роль играет анализ нечеткозначных и множествозначных отображений, действующих в метрических пространствах.

Диссертационная работа Рахматова Дж.Ш. посвящена исследованию некоторых классов нечетких и стохастических дифференциальных уравнений в частных производных с дробными и дробноподобными порядками производных по времени. Насколько нам известно, такие классы уравнений не рассматривались ранее и не имеются публикации в доступной нам литературе. В случае нечетких уравнений рассматриваются лишь одномерные скалярные уравнения. В случае же стохастических уравнений изучаются эволюционные уравнениям с неограниченным оператором в главной линейной части. В качестве стохастического возмущения рассматривается белый шум в смысле Балакришнана.

Диссертация состоит из введения и четырех глав. Первая глава посвящена обзору библиографических источников по исследуемой теме. В параграфе 1.1 приводится анализ опубликованных работ, посвященных нечетким дифференциальным уравнениям с дробными порядками производных по времени. В основном рассмотрены случаи дифференциальных уравнений с постоянными нечеткими коэффициентами в линейной части. Анализ приводится с помощью операционного метода. В параграфе 1.2 дается обзор работ посвященных линейным и стохастическим дифференциальным уравнениям в гильбертовом пространстве. Эти уравнения возмущены белым шумом Балакришнана и впервые изучаются подробным образом.

Вторая глава (§§2.1-2.4) диссертации посвящена нечеткому анализу дробных дифференциальных уравнений и интегро-дифференциальному уравнению с нелинейностью типа Урысона. Параграф 2.1 посвящекн предварительному материалу из нечеткого анализа используемый далее в тексте диссертации. В частности, приведены понятия нечетких множеств, операции с нечеткими множествами, функциями и числами. В § 2.2 введены и изучены нечеткие случайные величины и их математические ожидания. Нечеткая случайная величина (или нечеткая переменная) является функция $X: \Omega \to \mathcal{F}_0(\mathbb{R}^n)$ такая, что

$$\{(\omega, x): x \in X_\alpha(\omega)\} \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$$

для каждого $\alpha \in [0,1]$ где $X_\alpha(\omega)$ определен равенством

$$X_\alpha(\omega) = \{x \in \mathbb{R}^n: X(\omega)(x) \geq \alpha\}.$$

В §2.3 изучается концепция дифференциала нечеткой функции, являющейся обобщением дифференциала множествозначных функций Хукухара. Такое понятие введено в работах S.Markov.

Глава 3 посвящена нечетким дифференциальным и интегро-дифференциальным уравнениям дробного порядка производной по времени. Для исследования вопросов существования и единственности уравнения в частных производных вида

$$\frac{\partial^\psi \Phi(v,\tau)}{\partial v^\psi} + \alpha \odot \frac{\partial^\delta \Phi(v,\tau)}{\partial \tau^\delta} = F(v, \delta, \Phi(v,\tau))$$

с начальными условиями вида

$$\Phi(v,0) = g(v), \qquad \Phi(0,\tau) = h(\tau)$$

применяется метод дробного нечеткого прямого преобразования Лапласа и обратного. Такое преобразование имеет вид

$$\mathcal{L}^v \mathcal{L}^\tau[\Phi(v,\tau)] = \varphi(r_1, r_2) =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-r_2 \frac{\tau^\delta}{\delta}} e^{r_1 \frac{v^\psi}{\psi}} \odot \Phi(v,\tau) v^{\psi-1} \tau^{\delta-1} dv\, d\tau.$$

В §3.3 изучается нечеткое интегро-дифференциальное уравнение типа Урысона

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t), (Kx)(t)), x(0) = x_0, t \in I = [0, T];$$

где

$$(Kx)(t) = -\int_0^t K(t,s,x(s))ds$$

и выполняются соответствующие условия, при которых задача имеет, по крайней мере, одно решение на I.

Четвертая глава работы посвящена дробным стохастическим эволюционным уравнениям. Отметим, что эти уравнения имеют конечномерные реализации в качестве математических моделей в физике, технике, математической биологии и финансовой математике. В пароаграфе 4.1 развернута теория разрешимости стохастических эволюционных уравнений с дробным по времени порядком производной и аддитивным стохастическим членом типа белого шума. В этом параграфе и далее рассматривается белый шум типа А.В.Балакришнана определенный на вероятностном пространстве с конечно-аддитивной мерой. Такая специфика свойственна бесконечномерным фазовым пространствам, и она приводит к необходимости ввода нового стохастического интеграла отличного от хорошо известных интегралов Ито и Стратановича.

Рассматривается задача Коши вида

$${}^{C}D_t^{\alpha}u(t) + Au(t) = f(u(t)) + B\omega(t), u(0) = u_0,$$

где ${}^{C}D_t^{\alpha}$ – дробная производная Капуто порядка $\alpha, 0 < \alpha < 1$, A – почти секториальный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве H, $f: H \to H$ – нелинейное заданное отображение, $\omega(t)$ – белый шум в смысле Балакришнана в сепарабельном гильбертовом пространстве H_n, B – линейный оператор определенный в H со значениями в пространстве операторов из H_n в H. Требуется, что оператор A порождает резольвентные семейства операторов $\{S_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$ и $\{Z_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$. Эти требования гарантируют корректность соответствующей детерминированной задачи. Кроме того, от нелинейного отображения $f(\cdot)$ надо потребовать выполнения условия типа Липщица, а на оператор накладывать условия, связанные со свойствами белого шума. Анализу взаимосвязи конечно-аддитивных и счетно-аддитивных мер посвящен §4.2. С конечно-аддитивными мерами тесно связано понятие физических случайных величин более адекватных в приложениях. В параграфе 4.3 установлены основные теоремы второго (прямого) метода Ляпунова о стохастической устойчивости решений дробноподобных стохастических дифференциальных уравнений. Дробноподобные производные функций Ляпунова впервые введены в этом параграфе. В параграфе 4.4 рассматривается конкретная задача стохастической математической эпидемиологии. В ней установлены устойчивые и неустойчивые режимы распространения пандемии COVID-19.

Отметим, что все основные утверждения, установленные в диссертации доказаны автором самостоятельно на основе методов функционального анализа, дробного анализа и стохастического анализа. Основные результаты, изложенные в диссертации, докладывались на международных конференциях.

В целом в диссертационной работе Рахматова Дж.Ш. получены важные научные результаты, представляющие теоретический и практический интерес. Эти результаты могут быть применены при анализе различных начально-краевых задач для нечетких и стохастических дифференциальных уравнений в частных производных.

Основные результаты диссертации опубликованы в 19 статьях и материалах научных конференций, в том числе 10 статей в рецензируемых журналах, рекомендованных ВАК при Президенте РТ.

Диссертационная работа отвечает всем требованиям ВАК при Президенте РТ, предъявляемым к кандидатским диссертациям и ее автор Рахматов Дж.Ш. заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы, оптимальное управление

Научный руководитель,

академик НАНТ, доктор

физико-математических наук, профессор Илолов М.

ШУЪБАИ КАДРҲО

16.03.2024