

Отзыв

официального оппонента на диссертацию Дж. Ш. Рахматова, выполненную на тему: « К теории нечётких и стохастических дифференциальных уравнений и её приложения », на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук 01.01.02 - Дифференциальные уравнения, динамические системы, оптимальное управление.

В диссертационной работе Рахматова Дж.Ш. исследованы некоторые классы нечётких и стохастических дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений с целыми, дробными и дробноподобными порядками производных. По итогам исследования получены следующие новые результаты: доказаны леммы и теоремы о свойствах нечётких случайных переменных (величин) и их математическое ожидание; доказан аналог теоремы Радстрёма на случай обобщенного дифференциала нечёткой функции; доказаны теоремы существования и единственности решений нечётких дифференциальных уравнений с дробноподобными частными производными; доказана теорема существования и единственности решения нечёткого интегро-дифференциального уравнения Урысона; найдена формула явного решения линейного стохастического дифференциального уравнения с начальным условием и с почти секториальным неограниченным оператором в главной части; доказана теорема, второго (прямого) метода Ляпунова об устойчивости решений стохастических уравнений с дробноподобной производной; найдено решение одной конкретной задачи математической эпидемиологии возникающей при анализе режимов распространения пандемии COVID-19.

Работа относится к специальности 01.01.02 Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление – области математики, посвященной изучению дифференциальных уравнений. Основными составными частями специальности являются обыкновенные дифференциальные уравнения и уравнения с частными производными.

Главные научные цели специальности: исследование разрешимости дифференциальных уравнений, описание качественных и количественных характеристик решений, приложения.

Диссертация Рахматова Дж.Ш. состоит из введения, четырех глав, выводов и библиографии, включающей 150 наименований.

Первая глава посвящена обзору библиографических источников по исследуемой теме. В параграфе 1.1 приводится анализ опубликованных работ, посвященных нечётким дифференциальным уравнениям с дробными порядками производных по времени. В основном рассмотрены случаи дифференциальных уравнений с постоянными нечёткими коэффициентами в линейной части. Анализ приводится с помощью операционного метода. В параграфе 1.2 даётся обзор работ посвященных линейным и стохастическим дифференциальным уравнениям в гильбертовом пространстве. Эти уравнения возмущены белым шумом Балакришнана и впервые изучаются подробным образом.

Вторая глава (§§2.1-2.4) диссертации посвящена нечёткому анализу дробных дифференциальных уравнений и интегро-дифференциальному уравнению с нелинейностью типа Урысона. Параграф 2.1 посвящен предварительному материалу из нечёткого анализа используемый далее в тексте диссертации. В частности, приведены понятия нечётких множеств, операции с нечёткими множествами, функциями и числами. В § 2.2 введены и изучены нечёткие случайные величины и их математические ожидания. Нечёткая случайная величина (или нечёткая переменная) является функция $X: \Omega \rightarrow \mathcal{F}_0(\mathbb{R}^n)$ такая, что

$$\{(\omega, x): x \in X_\alpha(\omega)\} \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$$

для каждого $\alpha \in [0,1]$ где $X_\alpha(\omega)$ определен равенством

$$X_\alpha(\omega) = \{x \in \mathbb{R}^n: X(\omega)(x) \geq \alpha\}.$$

В §2.3 изучается концепция дифференциала нечёткой функции, являющейся обобщением дифференциала множественных функций Хукухара. Такое понятие введено в работах S.Markov.

Глава 3 посвящена нечётким дифференциальным и интегро-дифференциальным уравнениям дробного порядка производной по времени. Для исследования вопросов существования и единственности решения уравнений в частных производных

$$\frac{\partial^\psi \Phi(v, \tau)}{\partial v^\psi} + \alpha \odot \frac{\partial^\delta \Phi(v, \tau)}{\partial \tau^\delta} = F(v, \delta, \Phi(v, \tau))$$

с начальными условиями вида

$$\Phi(v, 0) = g(v), \quad \Phi(0, \tau) = h(\tau)$$

применяется метод дробного нечёткого прямого преобразования Лапласа и обратного. Такое преобразование имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^v \mathcal{L}^\tau [\Phi(v, \tau)] &= \varphi(r_1, r_2) = \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-r_2 \frac{\tau^\delta}{\delta}} e^{r_1 \frac{v^\psi}{\psi}} \odot \Phi(v, \tau) v^{\psi-1} \tau^{\delta-1} dv d\tau. \end{aligned}$$

В §3.3 изучается нечёткое интегро-дифференциальное уравнение типа Урысона

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t), (Kx)(t)), x(0) = x_0, t \in I = [0, T],$$

где

$$(Kx)(t) = - \int_0^t K(t, s, x(s)) ds$$

и выполняются соответствующие условия, при которых задача имеет, по крайней мере, одно решение на I .

Четвёртая глава работы посвящена дробным стохастическим эволюционным уравнениям. Отметим, что эти уравнения имеют конечномерные реализации в качестве математических моделей в физике, технике, математической биологии и финансовой математике. В параграфе 4.1 развёрнута теория разрешимости стохастических эволюционных уравнений с дробным по времени порядком производной и аддитивным стохастическим членом типа белого шума. В этом параграфе и далее рассматривается белый шум типа А.В. Балакришнана определенный на

вероятностном пространстве с конечно-аддитивной мерой. Такая специфика свойственна бесконечномерным фазовым пространствам, и она приводит к необходимости ввода нового стохастического интеграла отличного от хорошо известных интегралов Ито и Стратановича.

Рассматривается задача Коши вида

$${}^c D_t^\alpha u(t) + Au(t) = f(u(t)) + B\omega(t), u(0) = u_0,$$

где ${}^c D_t^\alpha$ – дробная производная Капуто порядка $\alpha, 0 < \alpha < 1$, A – почти секториальный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве H , $f: H \rightarrow H$ – нелинейное заданное отображение, $\omega(t)$ – белый шум в смысле Балакришнана в сепарабельном гильбертовом пространстве H_n , B – линейный оператор определенный в H со значениями в пространстве операторов из H_n в H . Требуется, что оператор A порождает резольвентные семейства операторов $\{S_\alpha(t)\}_{t \geq 0}$ и $\{Z_\alpha(t)\}_{t \geq 0}$. Эти требования гарантируют корректность соответствующей детерминированной задачи. Кроме того, от нелинейного отображения $f(\cdot)$ надо потребовать выполнения условия типа Липшица, а на оператор накладывать условия, связанные со свойствами белого шума. Анализу взаимосвязи конечно-аддитивных и счетно-аддитивных мер посвящен §4.2. С конечно-аддитивными мерами тесно связано понятие физических случайных величин более адекватных в приложениях. В параграфе 4.3 установлены основные теоремы второго (прямого) метода Ляпунова о стохастической устойчивости решений дробноподобных стохастических дифференциальных уравнений. Дробноподобные производные функций Ляпунова впервые введены в этом параграфе. В параграфе 4.4 рассматривается конкретная задача стохастической математической эпидемиологии. В ней установлены устойчивые и неустойчивые режимы распространения пандемии COVID-19.

Отметим некоторые недостатки диссертационной работы Рахматова Дж.Ш.

1. На странице 102 в формулировке Теоремы 3.1.15 допущена ошибка:

Вместо выражения

$$\varphi(r, 0) \ominus r_1 \odot \varphi(r_1, r_2)$$

ошибочно набрана

$$\ominus [\varphi(r, 0) - r_1 \odot \varphi(r_1, r_2)].$$

2. На странице 106 в формулировке Теоремы 3.1.19 вместо выражения

$$(-1)^{p+q} \odot \frac{\partial^{p+q} \varphi(r_1, r_2)}{\partial r_1^p \partial r_2^q}$$

стоит выражение

$$(-1)^{1+1} \odot \frac{\partial^2 \varphi(r_1, r_2)}{\partial r_1 \partial r_2}.$$

3. На странице 135 в двух местах вместо включения $x \in \mathbb{R}^n$ написано $x \mathbb{R}^n$.

Отмеченные ошибки не влияют на общую оценку диссертации.

Подводя итоги, отметим, что:

- диссертация Рахматова Дж.Ш. является завершённым научно квалификационным исследованием;
- содержание диссертации соответствует специальности 01.01.02- Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление;
- полученные в диссертации результаты являются новыми и свидетельствуют о весомом вкладе соискателя в исследовании актуальных задач некоторых классов нечётких и стохастических дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений с целыми, дробными и дробноподобными порядками производных;
- основные научные результаты диссертации опубликованы в 19 работах, из них 10 в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных ВАК при Президенте Республики Таджикистан и прошли апробацию на ряде международных и республиканских конференций;
- ссылки на авторов и источники заимствования материалов и отдельных результатов в диссертации имеются.

- методы, развитые в диссертации и полученные здесь результаты, могут быть использованы при исследовании новых и более общих нечётких и стохастических дифференциальных уравнений.

Оформление диссертации соответствует требованиям ВАК, изложение грамотное и ясное.

В связи с вышеизложенным считаю, что рецензируемая диссертация «К теории нечётких и стохастических дифференциальных уравнений и ее приложения» является завершённой квалификационной работой и соответствует основным пунктам «Порядка присуждения учёных степеней», Приложение к постановлению Правительства Республики Таджикистан «О Положении о диссертационном совете, Порядке присуждения ученых степеней, Порядке присвоения учёных званий и Порядке государственной регистрации защищённых диссертаций» от 30 июня 2021 года, № 267 и её автор Рахматов Джамшед Шавкатович заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 - Дифференциальные уравнения, динамические системы, оптимальное управление.

Доктор физико-математических наук, 01.01.02 - Дифференциальные уравнения, динамические системы, оптимальное управление, профессор кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений Бохтарского государственного университета имени Носира Хусрава

Шамсудинов Файзулло Мамадуллоевич

Адрес: 735140, Республика Таджикистан, г. Бохтар, ул. Айни, 67

Тел.: моб. (+992)918-66-70-65; e-mail: faizullo100@yahoo.com

Подпись Ф.М. Шамсудинова заверяю:

Начальник ОК и СЧ Бохтарского государственного университета имени Носира Хусрава



Шукурзод Дж.А.

31.05.2024.