ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертацию Дж.Ш.Рахматова, выполненной на тему: «К теории нечётких и стохастических дифференциальных уравнений и ее приложения», на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук 01.01.02 - Дифференциальные уравнения, динамические системы, оптимальное управление.

Актуальность темы исследования. За последние 10-20 лет теория нечётких и стохастических дифференциальных уравнений и ее приложения в различных областях науки и техники стала привлекать внимание математиков различных стран. Важнейшими работами в этой теории являются статьи M. Puri, D. Raleski, G. B. Price, M. Hukuhara, H. Radstrom, A. Ichikawa, G. Da Prato, J. Zabczyk, I. V. Melnikova, A. V. Balakrishnan, В. Н. Афанасьева, В. Б. Колмановского, В. Р. Носов , А. В. Плотникова, Н. В. Скрипника и многих других.

Актуальными в теории нечётких и стохастических уравнений в частных производных являются исследования существования и единственности решений, устойчивости этих решений. Для доказательства соответствующих теорем необходимо привести предварительный анализ соответствующих нечёткозначных и множествозначных отображений.

Диссертационная работа посвящена исследованию некоторых классов нечётких и стохастических дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных. В случае нечётких уравнений рассматриваются лишь скалярные уравнения. В случае же стохастических уравнений изучаются эволюционные уравнения с неограниченным оператором в главной линейной части. В качестве стохастического возмущения рассматривается белый шум в смысле Балакришнана. Следует подчеркнуть, что в этом случае берется вероятностное пространство с конечно-аддитивной мерой. Работа относится к специальности 01.01.02 Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление – области математики, посвященной изучению дифференциальных уравнений. Основными составными частями специальности являются обыкновенные дифференциальные уравнения и уравнения с частными производными. Главные научные цели специальности: исследование разрешимости дифференциальных уравнений, описание качественных и количественных характеристик решений, приложения.

Структура и содержание работы. Диссертация Рахматова Дж.Ш. состоит из введения, четырех глав, заключения, выводов и библиографии. Полный объем диссертации 242 страницы; библиография включает 150 наименований.

Первая глава посвящена обзору библиографических источников по исследуемой теме. В параграфе 1.1 приводится анализ опубликованных работ, посвященных нечетким дифференциальным уравнениям с дробными порядками производных по времени. В основном рассмотрены случаи дифференциальных уравнений с постоянными нечеткими коэффициентами в линейной части. Анализ приводится с помощью операционного метода. В параграфе 1.2 дается обзор работ посвященных линейным и стохастическим дифференциальным уравнениям в гильбертовом пространстве. Эти уравнения возмущены белым шумом Балакришнана и впервые изучаются подробным образом.

Вторая глава (§§2.1-2.4) диссертации посвящена нечёткому анализу дробных дифференциальных уравнений и интегро-дифференциальному уравнению с нелинейностью типа Урысона. Параграф 2.1 посвящён предварительному материалу из нечёткого анализа используемый далее в тексте диссертации. В частности, приведены понятия нечётких множеств, операции с нечёткими множествами, функциями и числами. В § 2.2 введены и изучены нечёткие случайные величины и их математические ожидания. Нечёткая случайная величина (или нечёткая переменная) является функция $X\colon \Omega \to \mathcal{F}_0(\mathbb{R}^n)$ такая, что

$$\{(\omega, x) \colon x \in X_\alpha(\omega)\} \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$$

для каждого $\alpha \in [0,1]$ где $X_\alpha(\omega)$ определен равенством

$$X_\alpha(\omega) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon X(\omega)(x) \geq \alpha\}.$$

В §2.3 изучается концепция дифференциала нечёткой функции, являющейся обобщением дифференциала множествозначных функций Хукухара. Такое понятие введено в работах S.Markov.

Глава 3 посвящена нечётким дифференциальным и интегро-дифференциальным уравнениям дробного порядка производной по времени. Для исследования вопросов существования и единственности уравнения в частных производных вида

$$\frac{\partial^{\psi}\Phi(v,\tau)}{\partial v^{\psi}} + \alpha \odot \frac{\partial^{\delta}\Phi(v,\tau)}{\partial \tau^{\delta}} = F(v,\delta,\Phi(v,\tau))$$

с начальными условиями вида

$$\Phi(v,0) = g(v), \qquad \Phi(0,\tau) = h(\tau)$$

применяется метод дробного нечёткого прямого преобразования Лапласа и обратного. Такое преобразование имеет вид

$$\mathcal{L}^{v}\mathcal{L}^{\tau}[\Phi(v,\tau)] = \varphi(r_1,r_2) =$$

$$= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-r_2\frac{\tau^{\delta}}{\delta}} e^{r_1\frac{v^{\psi}}{\psi}} \odot \Phi(v,\tau) v^{\psi-1}\tau^{\delta-1} dv\, d\tau.$$

В §3.3 изучается нечёткое интегро-дифференциальное уравнение типа Урысона

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t), (Kx)(t)), x(0) = x_0, t \in I = [0,T];$$

где

$$(Kx)(t) = -\int_0^t K(t,s,x(s))ds$$

и выполняются соответствующие условия, при которых задача имеет, по крайней мере, одно решение на I.

Четвёртая глава работы посвящена дробным стохастическим эволюционным уравнениям. Отметим, что эти уравнения имеют конечномерные реализации в качестве математических моделей в физике, технике, математической биологии и финансовой математике. В параграфе 4.1 развернута теория разрешимости стохастических эволюционных уравнений с дробным по времени порядком производной и аддитивным стохастическим членом типа белого шума. В этом параграфе и далее рассматривается белый шум типа А.В.Балакришнана определённый на вероятностном пространстве с конечно-аддитивной мерой. Такая специфика свойственна бесконечномерным фазовым пространствам, и она приводит к необходимости ввода нового стохастического интеграла отличного от хорошо известных интегралов Ито и Стратановича.

Рассматривается задача Коши вида

$$^{C}D_t^{\alpha}u(t) + Au(t) = f(u(t)) + B\omega(t), u(0) = u_0,$$

где ${}^{C}D_t^{\alpha}$ – дробная производная Капуто порядка $\alpha, 0 < \alpha < 1$, A – почти секториальный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве H, $f\colon H \to H$ – нелинейное заданное отображение, $\omega(t)$ – белый шум в смысле Балакришнана в сепарабельном гильбертовом пространстве H_n, B – линейный оператор определенный в H со значениями в пространстве операторов из H_n в H. Требуется, что оператор A порождает резольвентные семейства операторов $\{S_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$ и $\{Z_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$. Эти требования гарантируют корректность соответствующей детерминированной задачи. Кроме того, от нелинейного отображения $f(\cdot)$ надо потребовать выполнения условия типа Липщица, а на оператор накладывать условия, связанные со свойствами белого шума. Анализу взаимосвязи конечно-аддитивных и счетно-аддитивных мер посвящен §4.2. С конечно-аддитивными мерами тесно связано понятие физических случайных величин более адекватных в приложениях. В параграфе 4.3 установлены основные теоремы второго (прямого) метода Ляпунова о стохастической устойчивости решений дробноподобных стохастических дифференциальных уравнений. Дробноподобные производные функций Ляпунова впервые введены в этом параграфе. В параграфе 4.4 рассматривается конкретная задача стохастической математической эпидемиологии. В ней установлены устойчивые и неустойчивые режимы распространения пандемии COVID-19.

Степень достоверности результатов. Все теоремы, утверждения и формулы в диссертации обеспечены строгими доказательствами, ряд выводов согласуются с исследованиями других авторов.

Новизна и практическая значимость, ценность научных работ соискателя. Результаты диссертации являются новыми и заключатся в следующем:

- определены нечеткие случайные переменные и их математические ожидания и изучены их свойства;
- дана концепция обобщенного дифференциала нечеткой функции и установлен аналог теоремы Радстрема;
- доказаны теоремы существования и единственности решений нечетких дробноподобных дифференциальных уравнений в частных производных на основе двойного дробноподобного преобразования Лапласа;
- доказана теорема существования решений нечеткого интегро-

дифференциального уравнения типа Урысона;

- найдены явные формулы для решения линейной стохастической задачи Коши с почти секториальным неограниченным оператором в главной части;
- доказаны основные теоремы второго метода Ляпунова об устойчивости решений стохастических уравнений с дробноподобным производным;
- приведен подробный анализ конкретной задачи математической эпидемиологии, возникающей при изучении режимов распространения пандемии COVID-19.

Полнота изложения материалов диссертации в работах, опубликованных соискателем. По теме диссертации опубликованы 19 работ, из них 10 в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных ВАК при Президенте Республики Таджикистан и прошли апробацию на ряде международных и республиканских конференций.

Замечания. Диссертация Рахматова Дж.Ш. не лишена недостатков. Наиболее существенными из них на наш взгляд являются следующие:

1. В §3.3 «Нечёткие интегро-дифференциальные уравнения типа Урысона» на странице 134 отмечен повтор текста. Данный параграф посвящен анализу разрешимости и исследованию качественных свойств решений указанного класса нечётких уравнений.

   Результаты получены на основе понятия меры некомпактности и уплотняющих операторов. На наш взгляд, предварительные сведения об уплотняющих операторах приведенные здесь недостаточно полные. Этот недостаток проявляется при доказательстве основной теоремы этого параграфа.
2. В § 4.4 диссертации вводится понятие физической случайной величины и изучаются её свойства. Примеры иллюстрирующие эти свойства приведены, однако они не очень убедительные.

Отмеченные недоработки не умаляют достоинство диссертации в целом.

Выводы. Автореферат соответствует требованиям ВАК при Президенте РТ, полно и правильно отражает основные положения диссертации. На основании вышеизложенного можно сделать вывод о том, что диссертация Рахматова Джамшеда Шавкатовича «К теории нечетких и стохастических дифференциальных уравнений и ее приложения» представляет собой законченное, самостоятельно выполненное научное исследование, содержащее решения, имеющие существенное значение, соответствующее критериям, установленным в «Положении о порядке присуждения ученых степеней», а ее автор Рахматов Дж.Ш. заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 - Дифференциальные уравнения, динамические системы, оптимальное управление.

Официальный оппонент:

кандидат физико-математических наук, 01.01.02 - Дифференциальные уравнения, динамические системы, оптимальное управление, заведующий отделом дифференциальных уравнений Института математики им. А.Джураева НАНТ

Рахмонов Бахтовар Абдуганиевич

Адрес: 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, улица Айни 299/4.

Тел.: моб. (992) 918754597; e-mail: bakhtovar-1989@mail.ru

Подпись Б.А.Рахмонова заверяю:

Начальник ОК ИМ НАНТ М.Маллаева

03. 06. 2024г.

ШУЪБАИ КАДРХО
ОТДЕЛ КАДРОВ
ИНСТИТУТИ МАТЕМАТИКАИ БА НОМИ АКАДЕМИК А.ЧЎРАЕВИ АКАДЕМИЯИ МИЛЛИИ ИЛМҲОИ ТОҶИКИСТОН • ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. АКАДЕМИКА А.ДЖУРАЕВА НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК ТАДЖИКИСТАНА