

«УТВЕРЖДАЮ»

Ректор Российско-Таджикского  
(Славянского) университета

Файзулло М.К.



20 мая 2024 г.

## ОТЗЫВ

ведущей организации на диссертацию Рахматова Джамшеда Шавкатовича «К теории нечетких и стохастических дифференциальных уравнений, и ее приложения» представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы, оптимальное управление

За последние десятилетия теория нечетких и стохастических дифференциальных уравнений в частных производных и ее приложения в различных областях науки и техники стали привлекать внимание исследователей-математиков, как близкого так и дальнего зарубежья. В этой связи отметим публикации M.Puri, D.Ralesku, M.Hukuhara, H.Radstrom, A.Ichikawa, G.Da Prato, J.Zabczyk, I.V.Melnikova, A.V.Balakrishnan, В.Н.Афанасьева, Б.В.Колмановского, В.Р.Носова, А.М.Самойленко, Н.А.Перестюка, А.В.Плотникова, И.В.Скрипника и многих других. Актуальными в теории нечетких и стохастических уравнений в частных производных являются исследования существования, единственности и устойчивости решений. При доказательстве соответствующих утверждений важную роль играет анализ нечеткозначных и множественных отображений, действующих в метрических пространствах.

Диссертационная работа Рахматова Дж.Ш. посвящена исследованию некоторых классов нечетких и стохастических дифференциальных уравнений в частных производных с дробными и дробноподобными порядками производных по времени. Насколько нам известно, такие классы уравнений не рассматривались ранее и не имеются публикации в доступной нам литературе. В случае нечетких уравнений рассматриваются лишь одномерные скалярные уравнения. В случае же стохастических уравнений изучаются эволюционные уравнения с неограниченным оператором в главной линейной части. В качестве стохастического возмущения рассматривается белый шум в смысле Балакришнана.

Диссертация состоит из введения и четырех глав. Первая глава посвящена обзору библиографических источников по исследуемой теме. В

параграфе 1.1 приводится анализ опубликованных работ, посвященных нечетким дифференциальным уравнениям с дробными порядками производных по времени. В основном рассмотрены случаи дифференциальных уравнений с постоянными нечеткими коэффициентами в линейной части. Анализ приводится с помощью операционного метода. В параграфе 1.2 дается обзор работ посвященных линейным и стохастическим дифференциальным уравнениям в гильбертовом пространстве. Эти уравнения возмущены белым шумом Балакришнана и впервые изучаются подробным образом.

Вторая глава (§§2.1-2.4) диссертации посвящена нечеткому анализу дробных дифференциальных уравнений и интегро-дифференциальному уравнению с нелинейностью типа Урысона. Параграф 2.1 посвящен предварительному материалу из нечеткого анализа используемый далее в тексте диссертации. В частности, приведены понятия нечетких множеств, операции с нечеткими множествами, функциями и числами. В § 2.2 введены и изучены нечеткие случайные величины и их математические ожидания. Нечеткая случайная величина (или нечеткая переменная) является функция  $X: \Omega \rightarrow \mathcal{F}_0(\mathbb{R}^n)$  такая, что

$$\{(\omega, x): x \in X_\alpha(\omega)\} \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$$

для каждого  $\alpha \in [0,1]$  где  $X_\alpha(\omega)$  определен равенством

$$X_\alpha(\omega) = \{x \in \mathbb{R}^n: X(\omega)(x) \geq \alpha\}.$$

В §2.3 изучается концепция дифференциала нечеткой функции, являющейся обобщением дифференциала множественных функций Хукухара. Такое понятие введено в работах S.Markov.

Глава 3 посвящена нечетким дифференциальным и интегро-дифференциальным уравнениям дробного порядка производной по времени. Для исследования вопросов существования и единственности уравнения в частных производных вида

$$\frac{\partial^\psi \Phi(v, \tau)}{\partial v^\psi} + \alpha \odot \frac{\partial^\delta \Phi(v, \tau)}{\partial \tau^\delta} = F'(v, \delta, \Phi(v, \tau))$$

с начальными условиями вида

$$\Phi(v, 0) = g(v), \quad \Phi(0, \tau) = h(\tau)$$

применяется метод дробного нечеткого прямого преобразования Лапласа и обратного. Такое преобразование имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^\nu \mathcal{L}^\tau [\Phi(v, \tau)] &= \varphi(r_1, r_2) = \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-r_2 \frac{\tau^\delta}{\delta}} e^{r_1 \frac{v^\psi}{\psi}} \odot \Phi(v, \tau) v^{\psi-1} \tau^{\delta-1} dv d\tau. \end{aligned}$$

В §3.3 изучается нечеткое интегро-дифференциальное уравнение типа Урысона

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t), (Kx)(t)), x(0) = x_0, t \in I = [0, T];$$

где

$$(Kx)(t) = - \int_0^t K(t, s, x(s)) ds$$

и выполняются соответствующие условия, при которых задача имеет, по крайней мере, одно решение на  $I$ .

Четвертая глава работы посвящена дробным стохастическим эволюционным уравнениям. Отметим, что эти уравнения имеют конечномерные реализации в качестве математических моделей в физике, технике, математической биологии и финансовой математике. В параграфе 4.1 развита теория разрешимости стохастических эволюционных уравнений с дробным по времени порядком производной и аддитивным стохастическим членом типа белого шума. В этом параграфе и далее рассматривается белый шум типа А.В.Балакришнана определенный на вероятностном пространстве с конечно-аддитивной мерой. Такая специфика свойственна бесконечномерным фазовым пространствам, и она приводит к необходимости ввода нового стохастического интеграла отличного от хорошо известных интегралов Ито и Стратановича.

Рассматривается задача Коши вида

$${}^C D_t^\alpha u(t) + Au(t) = f(u(t)) + B\omega(t), u(0) = u_0,$$

где  ${}^C D_t^\alpha$  – дробная производная Капуто порядка  $\alpha, 0 < \alpha < 1$ ,  $A$  – почти секториальный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве  $H$ ,  $f: H \rightarrow H$  – нелинейное заданное отображение,  $\omega(t)$  – белый шум в смысле Балакришнана в сепарабельном гильбертовом пространстве  $H_n$ ,  $B$  – линейный оператор определенный в  $H$  со значениями в пространстве операторов из  $H_n$  в  $H$ . Требуется, что оператор  $A$  порождает резольвентные семейства операторов  $\{S_\alpha(t)\}_{t \geq 0}$  и  $\{Z_\alpha(t)\}_{t \geq 0}$ . Эти требования гарантируют корректность соответствующей детерминированной задачи. Кроме того, от нелинейного отображения  $f(\cdot)$  надо потребовать выполнения условия типа Липшица, а на оператор накладывать условия, связанные со свойствами белого шума. Анализу взаимосвязи конечно-аддитивных и счетно-аддитивных мер посвящен §4.2. С конечно-аддитивными мерами тесно связано понятие физических случайных величин более адекватных в приложениях. В параграфе 4.3 установлены основные теоремы второго (прямого) метода Ляпунова о стохастической устойчивости решений дробноподобных стохастических дифференциальных уравнений. Дробноподобные производные функций Ляпунова впервые введены в этом параграфе. В параграфе 4.4 рассматривается конкретная задача стохастической математической эпидемиологии. В ней установлены устойчивые и неустойчивые режимы распространения пандемии COVID-19.

Отметим, что все основные утверждения, установленные в диссертации доказаны автором самостоятельно на основе методов функционального анализа, дробного анализа и стохастического анализа. Основные результаты, изложенные в диссертации, докладывались на международных конференциях.

В целом в диссертационной работе Рахматова Дж.Ш. получены важные научные результаты, представляющие теоретический и практический интерес. Эти результаты могут быть применены при анализе различных начально-краевых задач для нечетких и стохастических дифференциальных уравнений в частных производных. Диссертация написана автором самостоятельно, содержит новые научные результаты, выдвигаемые для публичной защиты, и характеризует личный вклад автора диссертации в теорию функционального анализа, дробного анализа и стохастического анализа.

Необходимые ссылки на авторов и источники заимствования материалов в диссертации имеются. Автореферат соответствует требованиям ВАК при Президенте Республики Таджикистан, полно и правильно отражает основные положения диссертационной работы.

Основные результаты диссертации опубликованы в 19 статьях и материалах научных конференций, в том числе 10 статей в рецензируемых журналах, рекомендованных ВАК при Президенте РТ.

В диссертации встречается незначительное число опечаток как в математических формулах, так и в основном тексте. Однако эти замечания и имеющиеся некоторые грамматические и стилистические погрешности не снижают в целом высокой оценки диссертационной работы. В автореферате опечатки и ошибки не обнаружены

Вышесказанное дает основание считать, что диссертационная работа Рахматова Джамшеда Шавкатовича «К теории нечетких и стохастических дифференциальных уравнений и ее приложения» представленная на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы, оптимальное управление, является научно-квалификационной работой и полностью соответствует требованиям ВАК при Президенте Республики Таджикистан, предъявляемым к кандидатским диссертациям и ее автор Рахматов Дж.Ш. заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы, оптимальное управление.

Результаты диссертационной работы Рахматова Джамшеда Шавкатовича заслушаны на специальном семинаре кафедры математики и физики Российско-Таджикского (Славянского) университета (17 мая 2024г.).

Отзыв составил доктор физико-математических наук, профессор по специальности 01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы, оптимальное управление С.З.Курбоншоев Отзыв обсужден и утвержден на заседании кафедры математики и физики Российско-Таджикского (Славянского) университета (протокол №10 от 17 мая 2024г.).

Председатель семинара, доцент кафедры математики и физики Российско-Таджикского (Славянского) университета, кандидат физико-математических наук по специальности по специальности 01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ



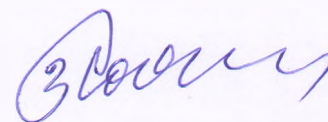
Д.С.Гаибов

Председатель заседания, заведующий кафедрой Математики и физики Российско-Таджикского (Славянского) университета, кандидат физико-математических наук по специальности 01.04.02 – Теоретическая физика, доцент



Б.Дж.Гулбоев

Эксперт по диссертации профессор кафедры математики и физики Российско-Таджикского (Славянского) университета, доктор физико-математических наук по специальности 01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы, профессор



С.З.Курбоншоев

Секретарь заседания, заведующая кабинетом кафедры математики и физики Российско-Таджикского (Славянского) университета



Махмадова Ф.Ш.

Адрес: Российско-Таджикский (Славянский) университет, 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. М.Турсун-заде, 30. Сайт: <http://www.rtsu.tj>; e-mail: [p.rektora@mail.ru](mailto:p.rektora@mail.ru)  
Тел.: (+992 37) 221 35 50

Подписи Д.С.Гаибова, Б.Дж.Гулбоева, С.З.Курбоншоева и Ф.Ш.Махмадовой заверяю:

Начальник УК РТСУ



Рахимов А.А.