Министерство образования и науки Республики Таджикистан
Таджикский национальный университет

УДК: 517.986.7(09)
ББК:

На правах рукописи

Рахматов Джамшед Шавкатович

К ТЕОРИИ НЕЧЕТКИХ И СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Д И С С Е Р Т А Ц И Я
на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук
01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы,
оптимальное управление

Научный руководитель:
академик Национальной
академии наук Таджикистана,
доктор физико-математических наук,
профессор Илолов М.

ДУШАНБЕ — 2024

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. За последние 10-20 лет теория нечетких и стохастических дифференциальных уравнений и ее приложения в различных областях науки и техники стала привлекать внимание математиков различных стран. Важнейшими работами в этой теории являются статьи M. Puri, D. Raleski [121], G. B. Price [119], M. Hukuhara [79], H. Radstrom [126], A. Ichikawa [80], G. Da Prato, J. Zabczyk [54], I. V. Melnikova [113], A. V. Balakrishnan [38], В. Н. Афанасьева, В. Б. Колмановского, В. Р. Носова [1], А. В. Плотникова, Н. В. Скрипника [9] и многих других.

Актуальными в теории нечетких и стохастических уравнений в частных производных являются исследования существования и единственности решений, устойчивости этих решений. Для доказательства соответствующих теорем необходимо привести предварительный анализ нечеткозначных и множествозначных отображений.

Диссертационная работа посвящена исследованию некоторых классов нечетких и стохастических дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных. В случае нечетких уравнений рассматриваются лишь скалярные уравнения. В случае же стохастических уравнений изучаются эволюционные уравнения с неограниченным оператором в главной линейной части. В качестве стохастического возмущения рассматривается белый шум в смысле Балакришнана. Следует подчеркнуть, что в этом случае берется вероятностное пространство с конечно-аддитивной мерой.

Степень научной разработанности изучаемой проблемы. Теоремы существования, единственности и стохастической устойчивости решений нечетких и стохастических дифференциальных уравнений в частных производных и их приложения были предметом исследований в научных трудах T. Abdeljawad [15], A. V. Balakrishnan [38], O. Kaleva [89], А. В. Плотникова, Н. В. Скрипника [9], M. Ilolov, K. S. Kuchakshoev, J. Sh. Rahmatov [85], M. Ilolov, K. Kuchakshoev, M. Mirshahi, J. Sh. Rahmatov [87], М. Илолова, Дж. Ш. Рахматова [6] и др.

Связь работы с научными программами (проектами), темами. Диссертационная работа выполнена в рамках реализации перспективных планов научно-исследовательских работ кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений Таджикского национального университета на 2016-2020 гг. по теме «Исследования по теории дифференциальных уравнений в банаховом пространстве и ее приложений» и на 2021-2025 гг. по теме «Исследования по теории стохастических эволюционных уравнений и ее приложения».

Общая характеристика работы

Цель исследования. Исследование нечеткого дробноподобного уравнения в частных производных

$$\frac{\partial^{\Psi}\Phi(\nu,\tau)}{\partial\nu^{\Psi}} + \alpha\odot\frac{\partial^{\delta}\Phi(\nu,\tau)}{\partial\tau^{\delta}} = F(\nu,\tau,\Phi(\nu,\tau)),$$

с начальными условиями

$$\Phi(\nu,0) = g(\nu), \Phi(0,\tau) = h(\tau),$$

где α-нечеткое число и абстрактное стохастическое дробное дифференциальное уравнение

$${}^{c}D_t^{\alpha}u(t) + Au(t) = f(u(t)) + B\omega(t),$$

с начальными условиями

$$u(0) = u_0,$$

где ${}^{c}D_t^{\alpha}$ - дробная производная Капуто порядка $\alpha, 0 < \alpha < 1$, A - почти секториальный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве H, $f : H \to H$ - нелинейное заданное отображение, $\omega(t)$ - абсолютный случайный процесс (белый шум в смысле Балакришиана) в сепарабельном гильбертовом пространстве H_n, B - линейный оператор, определенный в H со значениями в пространстве операторов из H_n в H, u_0 - заданный элемент в H.

Задачи исследования. В соответствии с поставленной целью необходимо дать анализ решений следующих задач:

1. Дать определение нечетких случайных переменных и их математические ожидания, и изучить их свойства.

2. Дать концепцию обобщенного дифференциала нечеткой функции и установить аналог теоремы Радстрема.

3. Доказать теоремы существования и единственности решений нечетких дробноподобных дифференциальных уравнений в частных производных на основе дробноподобного преобразования Лапласа.

4. Доказать теорему существования и единственности решений нечеткого интегро-дифференциального уравнения типа Урысона.

5. Найти явные формулы для решения линейной стохастической задачи Коши с почти секториальным неограниченным оператором в главной части.

6. Доказать основные теоремы второго метода Ляпунова для устойчивости решений стохастических дифференциальных уравнений с дробноподобными производными.

7. Дать подробный анализ одной конкретной задачи математическиой эпидемиологии возникающей при изучении режимов распространения пандемии COVID-19.

Объект исследования. Объектом исследования являются нечеткие дифференциальные уравнения с дробноподобными производными и дробные стохастические дифференциальные уравнения.

Предмет исследования. Предметом исследования являются доказательста теорем о существовании единственности и устойчивости решений рассматриваемых уравнений в частных производных и некоторые их приложения.

Научная новизна исследований. Результаты диссертации являются новыми и заключатся в следующем:

- определены нечеткие случайные переменные и их математические ожидания и изучены их свойства;

- дана концепция обобщенного дифференциала нечеткой функции и установлен аналог теоремы Радстрема;

- доказаны теоремы существования и единственности решений нечетких дробноподобных дифференциальных уравнений в частных производных на основе двойного дробноподобного преобразования Лапласа;
- доказана теорема существования решений нечеткого интегро - дифференциального уравнения типа Урысона;
- найдены явные формулы для решения линейной стохастической задачи Коши с почти секториальным неограниченным оператором в главной части;
- доказаны основные теоремы второго метода Ляпунова об устойчивости решений стохастических уравнений с дробноподобным производным;
- приведен подробный анализ конкретной задачи математической эпидемиологии возникающей при изучении режимов распространения пандемии COVID-19.

Положения, выносимые на защиту:

- леммы и теоремы о свойствах нечетких случайных переменных (величин) и их математическое ожидание;
- аналог теоремы Радстрема на случай обобщенного дифференциала нечеткой функции;
- теоремы существования и единственности решений нечетких дифференциальных уравнений с дробноподобными частными производными;
- теорема существования и единственности решения нечеткого интегро-дифференциального уравнения Урысона;
- формула явного решения линейного стохастического дифференциального уравнения с начальным условием и с почти секториальным неограниченным оператором в главной части;

- теорема второго (прямого) метода Ляпунова об устойчивости решений стохастических уравнений с дробноподобной производной;

- решение одной конкретной задачи математической эпидемиологии возникающей при анализе режимов распространения пандемии COVID-19.

Теоретическая и научно-практическая значимость работы. Работа носит теоретический характер. Методы развитые в диссертации и полученные здесь результаты могут быть использованы при исследовании новых и более общих нечетких и стохастических дифференциальных уравнений.

Личный вклад соискателя ученой степени. Постановка задачи принадлежит научному руководителю. Все результаты приведенные в разделе «Научная новизна исследования» получены лично соискателем.

Степень достоверности результатов. Все теоремы, утверждения и формулы в диссертации обеспечены строгими доказательствами, ряд выводов согласуются с исследованиями других авторов.

Соответствия диссертации паспорту научной специальности. Диссертационная работа выполнена по специальности 6D060102 — дифференциальные уравнения, динамические системы, оптимальное управление. Все результаты относятся к составной части этой специальности — нечеткие и стохастические дифференциальные уравнения и полностью соответствуют формуле специальности и пункту «Общая теория дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений» области исследования.

Апробация и реализация результатов диссертации. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах:

— Международная научная конференция «Современные проблемы математики и её приложений», посвященной 70 – летию со дня рождения академика АН РТ, доктора физико – математических наук, профессора Илолова Мамадшо, Душанбе, 14-15 марта 2018г.

— Республиканская научная конференция «Математический анализ и его приложения», посвященной 80-летию видного таджикского математика, профессора Бекназара Имомназарова, Таджикистан, Душанбе, 10-11 июня 2019г.

— Международная научная конференция «Сингулярные интегральные уравнения и дифференциальные уравнения с сингулярными коэффициентами», посвященной 70-летию профессора Джангибекова Гулходжа, Душанбе, 30-31 января 2020 г.

— Международная конференция «Воронежская зимняя математическая школа», Воронеж, 28 января – 2 февраля 2021 г.

— Международная конференция «Актуальные проблемы современной математики», посвященной 80-летию со дня рождения доктора физико-математических наук, профессора Темура Собирова, Душанбе, 25-26 июня 2021 г.

— Международная научная конференция «Уфимская осеняя, математическая школа», Уфа, 6-9 октября 2021 г.

— Международная конференция по стохастическим методам, Геленджик, 2–9 июня 2022 г.

— Международная научная конференция «Современные проблемы математического анализа и теории функций», посвященной 70-летию академика НАН Таджикистана Шабозова Мирганда Шабозовича, Душанбе, 24-25 июня 2022 г.

— Международная конференция «Воронежская зимняя математическая школа», Воронеж, 27 января - 1 февраля 2023 г.

— Научный семинар «Дробный анализ и его приложения» при Центре инновационного развития науки и новых технологий НАНТ (руководитель академик НАНТ Илолов М., 2018-2023 гг.)

Ряд результатов диссертации использованы при чтении специальных курсов для студентов и магистрантов.

Публикации по теме диссертации.Основные результаты диссертации опубликованы в 19 статьях и материалах конференций [1—A] — [19—A]. Работы [1—A] — [10—A] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий рекомендуемых ВАК при Президенте Республики Таджикистан и журналы входящие в Scopus в 2021-2023 годах. Из совместных работ с соавторами на защиту вносятся лишь результаты, полученные лично автором диссертации.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, выводов, рекомендаций по практическому использованию результатов, а также списка литературы, в который включены 150 наименований. В диссертации используется тройная нумерация. Первый номер указывает на номер главы, второй номер параграфа и третий номер относится к определениям, теоремам и другим утверждениям в данном параграфе. Аналогичным образом ведется нумерация формул. Общий объем диссертации 242 страницы.

ГЛАВА 1. БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ ОБЗОР ПО ИССЛЕДУЕМОЙ ТЕМЕ

В этой главе приводится обзор и анализ использованных в диссертации литературных источников. Глава состоит из двух параграфов. В первом параграфе дается обзор работ относительно нечеткого анализа и нечетких дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений. Во втором параграфе приводится обзор работ посвященных стохастическим дифференциальным уравнениям с белым шумом. В основном, рассматриваются вопросы существования, единственности и устойчивости решений, а также приложения этих результатов в эпидемиологии.

1.1. Обзор литературы по нечеткому анализу и нечетким дифференциальным и интегро-дифференциальным уравнениям

Элементы нечеткого анализа и теория нечетких дифференциальных уравнений разработаны в работах математиков различных стран.

Развитие теории нечетких множеств как часть теории многозначных отображений берет свое начало с работ L. A. Zadeh [147, 148]. В работе M. L. Puri, D. Ralescu [123] опубликованной в 1983 г. введено понятие H-производной на основе H-разности Хукухара, M. Hukuhara [79] и интеграла для нечетких отображений с использованием подхода R. J. Aumann at all. [34, 35] для α-срезок нечетких отображений.

Финский математик О.Калева в работе O. Kaleva [89] ввел в рассмотрение нечеткие дифференциальные уравнения в $\mathbb{R}^n$ на основе H-производной. В работе [89] изучались дифференциальные уравнения для нечеткозначных отображений действительной переменной. Дополнительно от нечетких отображений потребовалось выполнение ряда свойств: нормальность, выпуклость, полунепрерывность сверху, компактность носителя нечетких множеств в $\mathbb{R}^n$. Были изучены свойства измеримости нечеткозначных функций. Было определено понятие интеграла нечеткозначной функции и установлены некоторые его свойства. Приведенные в [34] определения являются обобщением соответствующих понятий для интеграла Ауманна для многозначных отображений.

Для концепции дифференцируемости были адаптированы понятия H-дифференцируемости из [120], которое, в свою очередь, является обобщением понятия дифференцируемости в смысле Хукухара для множествозначных функций. В [89] доказана теорема существования и единственности решений для нечетких дифференциальных уравнений

$$x'(t) = f(t, x(t)), \tag{1.1.1}$$

где от непрерывной функции f требуются условия Липщица. В работе О.Калева [90] для нечеткого уравнения (1.1.1) ставится задача Коши вида

$$x(t_0) = x_0, \tag{1.1.2}$$

где начальное значение x_0 является нечетким числом. Установлено, что задача Коши (1.1.1)-(1.1.2) для нечетких дифференциальных уравнений с непрерывной правой частью $f : [t_0, t_0 + \varphi]U \to U$ имеет решение тогда и только тогда, когда подпространство U является локально компактным. Напомним, что пространство X называется локально компактным, если каждая его точка имеет компактную окрестность.

Вскоре выяснилось, что решение задачи Коши с H-производной Пури-Ралеску имеет серезный недостаток. А именно. с течением времени оно становится более нечеткой. Следовательно, поведение нечеткого решения кардинальным образом отличается от четкого решения обыкновенных дифференциальных уравнений и требует других методов анализа. Чтобы преодолеть возникшую ситуацию, E. Huellermeier [78] интерпретировал нечеткое дифференциальное уравнение (1.1.1) в виде семейства соответствующих дифференциальных включений. Основная идея работы [78] заключается в распространение на этот случай теоремы об укладке доказаний C. V. Negoita D. A. Ralescu в [114].

В дальнейшем в работах O. Kaleva [89, 90, 91], S. Seikkala [133], C. Wu at all. [146], J. Park [118], А. В. Плотникова, Н. В. Скрипника [9] были получены аналогичные результаты при более общих условиях на правую часть уравнения, а также рассмотрим и другие свойства решений.

Данная диссертационная работа посвящена нечетким дифференциальным и интегро-дифференциальным уравнениям в частных производных.

Вторая глава диссертации посвящена элементам нечеткого анализа, в параграфе 2.1 приведены определения нечеткого множества, нечеткого числа, нечеткой переменной, нечеткой функции, нечеткого оператора, нечеткого отношения и нечеткого отображения. Все определения иллюстрируются конкретными примерами. Первоисточником этих понятий является статья американского математика L. A. Zadeh [147] вышедшая в свет в 1965 году. Основными результатами нечеткого анализа являются утверждения об α-срезках и выпуклых нечетких множествах.

Для полноты изложения в параграфе 2.1 приведены основные теоремы нечеткого анализа с доказательствами. Формулировка теоремы о разложении, принципа расширения Заде, теоремы о представлении приведены в удобной для нас форме, а их доказательства носят теоретико-функциональный характер. Свойства элементов нечеткого анализа были предметом исследования математиков различных стран.

В параграфе 2.2 нечеткие величины изучаются с позиции теории вероятности и стохастического анализа. Нечеткие случайные величины (или нечеткие переменные) являются обобщением на нечеткий случай случайных величин, векторов и процессов (см. напр. [5]). В параграфе 2.2 изложено интегральное исчисление для множествозначных (в частности нечеткозначных) функций. В работах M. Puri, D. Raleski [121, 122] приведены два различных типа сходимости для последовательности множеств (сходимость в смысле Хаусдорфа и Куратовского), которые лежат в основе теории интеграла для нечеткозначных функций. Идейной основой интеграла от нечеткозначной функции является интеграл Ауманна [34, 35]. В параграфе 2.1 обсуждается понятие математического ожидания нечеткой переменной и изучаются его свойства.

В параграфе 2.2 «Дифференциалы нечетких функций» рассматривается концепция дифференциала нечетких функций, являющейся обобщением дифференциала множествозначных функций введенный впервые в работах японского математика M. Hukuhara [79]. Понятия нечеткой случайной величины рассмотренные в параграфе 2.1 являются обобщением случайных множеств и учитывают неопределенности как нечеткого так и случайного характеора. В определении дифференциала множествозначных функций ключевым элементом является теорема разложения H. Radstrom [126]. В этой теореме установлено, что набор непустых, замкнутых, ограниченных и выпуклых подмножеств банахова пространства может быть вложено в нормированном пространстве. Именно этот результат позволяет определить дифференциал множествозначных функций, как дифференциал функций действующих в нормированном пространстве. Для того чтобы распространить дифференцируемость на нечетких функциях, необходимо обобщить теорему Радстрема с помощью введения соответствующего пространства нечетких подмножеств банахова пространства. Такое расширение предложено в пункте 2.2.1 с помощью удобного обобщения метрики Хаусдорфа.

В параграфе 2.4 обсуждаются понятия обобщенной нечеткой разности и обобщенной дифференцируемости в смысле Хукухара для нечеткозначных функций. Следует отметить, что концепция обобщенной дифференцируемости сначала рассматривалась для интервальнозначных функций в работах S. Markov [105, 106, 107, 108, 109]. В дальнейшем данное направление получило развитие в работах [3, 26, 46] и других, как для интервальнозначных так и для более общих нечеткозначных функций. Мотивация ввода новых обобщенных производных для нечеткозначных функций следует из их приложения в теории нечетких дифференциальных уравнений в частных производных.

Здесь укажем следующие публикации: T. Abdeljawad [15], N. Aguila-Camacho at all. [18], T. Allahveranloo, Ahmadi M. Barkhordari [22], R. J. Aumann [34, 35], A. Alderremy at all. [27, 28], A. Ali at all. [29], O. A. Arqub, M. Al-Smadi [31], T. Allahveranloo at all. [23, 24], L. Ahmad at all. [20, 21], B. Bede, S. G. Gal [44, 45], B. Bede [43], A. M. Bica [46].

Основные результаты полученные автором и изложенные в диссертации опубликованы в работах M. Ilolov, J. Rahmatov [5, 6, 7], Рахматова Дж.Ш. [11].

Естественный путь моделирования неопределенности состоит в написании соответствующего нечеткого дифференциального уравнения. Более сложные процессы предполагают введение дробноподобных производных. Именно так поступают в работах A. Alderremy at all. [27, 28], A. Younus at all. [150].

За последние годы, в связи с новыми приложениями теории нечетких дифференциальных уравнений. исследователи стали уделять внимание нечетким дифференциальным уравнениям в частных производных. В этом направлении отметим D. Afariogun at all. [19], D. J. Hashim at all. [75], A. Jameel at all. [88], A. Kilicman at all. [96], L. Stefanini [135, 136, 137], L. Stefanini B. Bede [138, 139], L. Stefanini M., L. Guerra [140], L. Stefanini L. Sorini M. L. Guerra [141] в которых предложены точные или численные решения нечетких уравнений в частных производных. Разнообразные аналитические и вычислительные методы позволяют найти решения нечетких УЧП (см. например публикации A. Ali at all. [29], O. A. Arqub at all. [31], T. Allahveranloo at all. [24], Chermahini S. Rahimi at all. [128], Z. Gouyandeh at all. [72]) и др. Очень удобным и полезным инстументом для решения нечетких УЧП являются интегральные преобразования. Такие преобразования для узких классов УЧП предложены в работе R. R. Dhunde, G. Waghmare [58].

Нечеткое преобразование Лапласа впервые было введено в статье T. Allahveranloo at all. [24] и далее подробно изучено такими авторами, как L. Ahmad at all. [20, 21], S. Salahshour at all. [130, 131], T. Abdeljawad [15], H. Eltayeb [63], F. S. Silva at all. [134].

Третья глава диссертации посвящена нечетким дифференциальным и интегро-дифференциальным уравнениям в частных производных. Одними из первых публикаций по нечетким дифференциальным уравнениям в частных производных являются статьи D. Galvez and J. L. Pino [69], S. Seikkala [133]. В работе [69] найдены достаточные условия существования нечетких решений. Там же приведены примеры нечетких дифференциальных уравнений в частных производных. В частности, рассматриваются уравнения вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = k_1 x^2 \cos y + k_2, \tag{1.1.3}$$

с граничными условиями

$$u(x,0)=c_1, u(x,\pi/2)=c_2, \tag{1.1.4}$$

где $x\in[0,M], y\in[0,\pi/2], M>0,\ k_1,k_2,c_1,c_2\in[0,M_i], 2\le i\le 5$.

В [69] доказано, что задача (1.1.3)-(1.1.4) не имеет решения Багли-Феуринг, но имеет решение Сейкала.

В параграфе 3.1 вводится и изучается двойное нечеткое преобразование Лапласа. Установлены теорема о переносе, первые формулировки которых изложены в работах [15]. Далее изучаются сильно обобщенные дробноподобные частные производные на основе результатов работ [110]. Аналоги разности и дробноподобной производной Хукухара и их обобщения изучаются подробным образом. Отметим, что впервые эти понятия возникли в работах [111].

В параграфе 3.3 «Нечеткое дробноподобное преобразование Лапласа и его приложения к дробноподобным уравнениям в частных производных» даётся обобщение нечеткого двойного преобразования Лапласа на случай дробноподобных частных производных. Введено также нечеткое дробноподобное обратное преобразование Лапласа. Приведен ряд теорем о свойствах таких преобразований. Определена свертка в нечетком дробноподбном смысле и установлена теорема о свертке. Далее изучаются нечеткие дробноподобные уравнения в частных производных порядка Ψ и предложена процедура решения этого уравнения с помощью прямого и обратного нечеткого дробноподобного преобразования Лапласа. Рассмотрены четыре возможные случая. Приведены два примера нечетких дробноподобных дифференциальных уравнений в частных производных с начальными или краевыми условиями. Здесь укажем один из них.

Рассмотрим нечеткое дробноподобное УЧП

$$\frac{\partial^{\Psi}\Phi(v,\tau,\gamma)}{\partial v^{\Psi}}=3\frac{\partial^{\delta}\Psi(v,\tau,\gamma)}{\partial\tau^{\delta}}+v \tag{1.1.5}$$

с краевыми условиями

$$\Phi(v,0,\gamma)=3v[\gamma-1,1-\gamma]+\frac{v^2}{2} \tag{1.1.6}$$

$$\Phi(0,\tau,\gamma)=\tau[\gamma-1,1-\gamma]. \tag{1.1.7}$$

для задачи (1.1.5), (1.1.6), (1.1.7) изучены четыре возможных случая.

Приводится графическое представление 1-го случая.

Рассмотрены также нечеткие дробноподобные одномерные уравнения теплопроводности и волновое уравнение. Для этих уравнений подробным образом приводится операционный анализ для всех возможных вариантов.

Параграф 3.3 посвящен нечеткому интегро-дифференциальному уравнению Урысона. Анализ указанного уравнения мотивируется задачами наблюдения в динамических системах управления с неполной информацией и неопределенными параметрами. В основном, рассматриваются вопросы разрешимости и исследуются качественные свойства этого уравнения Урысона.

Впервые, в монографии А. В. Плотников, Н. В. Скрипник [9] были поставлены задачи наблюдения в динамических системах управления с нечеткой информацией и неопределенными параметрами. Там же в [9] введены нечеткие линейные интегро-дифференциальные уравнения. Данному направлению также посвящены публикации O. Kaleva [91], M. Fechkan at all. [65], M. Kisilewicz [97], K. Deimling [57].

В диссертации изучается конечномерная система интегро-дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x}(t)=F(t,x(t),(Kx)(t)),x(0)=x_0,t\in I=[0,T], \tag{1.1.8}$$

где $(Kx)(t)=\int\limits_0^t K(t,s,x(s))ds$ нелинейный интегральный оператор Урысона.

С помощью обобщения принципа неподвижной точки Красносельского М.А. и известного неравенства B. Pachpatte [117] на нечеткий случай, доказано существование решения уравнения (1.1.8).

Основные результаты опубликованы в работе Рахматова Дж.Ш. [11].

В параграфе 3.4 рассматривается начально-граничная задача для нечеткого уравнения теплопроводности. На основе принципа расширения L. A. Zadeh [147] и концепции нечетких интегралов и производных и различные их обобщения предложены в работе O. Kaleva [90] изучены вопросы разрешимости и корректности начально-краевых задач для простейших обыкновенных нечетких дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений (см. напр. публикации B. Bede, S. G. Gal [44], T. Allahveranloo, Ahmadi M. Barkhordari [22]). Нечеткое уравнение теплопроводности рассматривалось с помощью операционного исчисления нечеткого преобразования Лапласа в работе Илолова М., Рахматова Дж.Ш. [5]. Окончательные результаты были опубликованы в работе Илолова М., Рахматова Дж.Ш. [6].

1.2. Библиографический обзор результатов по теории стохастических эволюционных уравнений дробного порядка

Стохастические эволюционные уравнения в бесконечномерных пространствах получили существенное развитие за последние три десятилетия. Это связано, с одной стороны, с развитием новых методов функционального и стохастического анализа, с другой стороны с потребностями таких направлений науки и техники, как квантовой физики, химической кинетики высокомолекулярных соединений, математической биологии и медицины, финансовой математики и др. Обобщение стохастических исчислений Ито-Стратановича и Скорохода-Балакришнана на бесконечномерном случае берет свое начало в работах японского математика A. Ichikawa [80, 81], в которых установлены условия устойчивости полулинейных стохастических эволюционных уравнений в гильбертовом пространстве. В монографии G. Da Prato, J. Zabczyk «Стохастические уравнения в бесконечномерных пространствах» [54] вышедшей в свет в 2014 г. подитожены основные достижения этого направления современной математики. Основное внимание уделено новым результатам по стохастическим методам интегрирования. Однако, к сожалению, в [54] очень мало уделяется внимание интегральному исчислению Скорохода и Балакришнана. Указанный пробел успешно восполняется в монографиях L. Gawarecki, V. Mandrekar [70], I. V. Melnikova [113], и статьи A. Filinkov, J. Sorensen [67].

В работах Yu. E. Gliklich [71], E. Nelson [115], M. Kovach and S. Larsson [98], G.A. Sviridyuk at all. [142] предложен иной подход к анализу стохастических уравнений на основе производной Нельсона-Гликлиха. В работе [142] установлено, что производная Нельсона-Гликлиха от винеровского процесса хорошо согласуется с предсказаниями Теории броуновского движения разработанной в самом начале 20-го столетия А. Эйнштейном и Ю. Смолуховским. Именно это подсказало дать этому стохастическому процессу название «белый шум». Глава 4 диссертации посвящена анализу задачи Коши для дифференциального уравнения вида

$$^{c}D_t^{\alpha}u(t) + Au(t) = f(x(t)) + B\omega(t), u(0) = u_0, \tag{1.2.1}$$

где ${}^{c}D_t^{\alpha}$-дробная производная порядка $\alpha, 0 < \alpha < 1$ H-значной функции $u(t)$, A-почти секториальный оператор в гильбертовом пространстве $H, f : H \to H$-нелинейное заданное отоборажение, $\omega(t)$-абсолютный процесс (белый шум в смысле Балакришнана) со значениями в другом сепарабельном пространстве H_n, B-линейный ограниченный оператор определенный в H со значениями в пространстве линейных операторов $Z(H_n, H)$. В рамках функционального исчисления разработанного в работе R. N. Wang at al. [145] для почти секториальных операторов, оператор A порождает резольвентные семейства операторов $\{S_\alpha(t)\}_{t\leq 0}$ и $\{Z_\alpha(t)\}_{t\leq 0}$. Наличие этих семейств операторов гарантирует корректность задачи Коши для соответствующего (1.2.1) однородного уравнения

$$ {}^{c}D_t^{\alpha}u(t) + Au(t) = 0. $$

От нелинейного отображения $f(\cdot)$ потребуется выполнение условий типа Липщица. На оператор B накладываются условия тесно связанные со свойствами абсолютного случайного процесса, или, что то же самое, с белым шумом $\omega(t)$ с конечно-аддитивной мерой. это понятие, впервые, введено в монографии A. V. Balakrishnan [38]. Рассматривается функциональное пространство $W = L_2((0,T); H)$, где $0 < T \leq \infty$, которое будет сепарабельным гильбертовым пространством, если таковым является пространство H. Через ω и μ обозначаются элемент пространства W и стандартная гауссовая мера на W соответственно. Таким образом введенное пространство W называется белым шумом, а каждый его элемент $\omega \in W$ реализацией белого шума.

Далее рассматривается функция

$$ W(t,\omega) = \int\limits_0^t \omega(s)ds $$

непрерывная по t при фиксированном ω, и при $t > s$ разность $|W(t,\omega) - W(s,\omega)|$ является гауссовой случайной величиной с нулевым математическим ожиданием и дисперсией, равной $(t-s)\|h\|^2$ где $h \in W = L_2((0,T); H)$. Отметим, что функция $[W(t,\omega), h]$ не будет реализацией винеровского процесса из-за того, что она имеет неограниченную вариацию на каждом конечном интервале при фиксированном ω.

Важно заметить, что модель пространственно-временной корреляции Балакришнана является одной из возможных моделей основанной на дельта-функции Дирака. Альтернативный подход основан на теории мартингалов и винеровских процессов. Если в линейном случае оба подхода дают одинаковые результаты, то в нелинейном случае возникает глубокое различие между ними.

Математические трудности возникающие на этом пути исследованы в работах A. V. Balakrishnan [36], Yu. V. Prokhorov [10], F. Cacase at all. [51], A. A. Kilbas at all. [95].

К этому направлению примыкают работы М. Илолова, В. Н. Козоброда [82, 83], М. Илолова, К. С. Кучакшоева, Дж. Ш. Рахматова [84, 85, 86]. В параграфе 4.1 диссертации изложены новые результаты по теории дробных стохастических дифференциальных уравнений с белым шумом Балакришнана в гильбертовом пространстве и подсчитаны его вероятностно-статистические характеристики.

Параграф 4.2 посвящен анализу устойчивых дробно-подобных дифференциальных уравнений. В нем изучается стохастическая устойчивость, асимптотическая устойчивость, экспоненциальная устойчивость почти наверное и p-моментная экспоненциальная устойчивость решений дробных дифференциальных уравнений. Основным аппаратом исследования является метод функций Ляпунова и дробно-подобная версия формулы Ито.

За последние годы нашли всестороннее применение различные варианты дробных производных при изучении различных наследственных свойств памяти для сложных систем различного характера (см. напр. B. Bayor, D. F. M. Torres [42], A. Chadha, S. M. Boca [52]). В работах T. Abdeljawad [15], R. Khalil at all. [93] введено новое понятие — дробно-подобное производное, а в работах A.A. Martinyuk [110], A.A. Martinyuk, I.M. Stamova [111] рассмотрены системы дифференциальных уравнений с такими производными. В монографии V. Lakshmikantham, S. Leela, A. A. Martinyuk [102] изложены новые результаты для нейронных сетей с позиции теории нечетких нелинейных систем. С другой стороны в последние годы получила новый импульс в своем развитии теория устойчивости дробных стохастических дифференциальных уравнений. И это неудивительно, поскольку стохастические свойства процессов и явлений являются важнейшими характеристиками реального мира, а устойчивость является высшим приоритетом при анализе прикладных сложных систем.

Математическая теория устойчивости решений стохастических дифференциальных функций состоит из двух основных направлений. Первое направление, это дальнейшее развитие прямого (или второго) метода Ляпунова (см. напр. хорошо известную монографию В. И. Афанасьева, В. Б. Калмановского, В. Р. Носова [1], статьи N. Aguila-Camacho at all. [18], Р. З. Хасьминского [13]). Второе направление — метод неподвижных точек Бартона, это работы T.A. Burton [48], T. A. Burton, T. Furumoohi [49], и T. Burton, B. Zhang [50]. Вопросы существованя, единственности и устойчивости решений стохастических дифференциальных уравнений в частных производных были предметом анализа в работах M. Ilolov, K. S. Kuchakshoev, J. Sh. Rahmatov [84], М. Илолова, В. Н. Козоброда [83], S. Salahshour at all. [130]. Новые результаты по стохастическим интегро-дифференциальным уравнениям изложены в работах Yu. E. Gliklich [71], J. S. Trigeasson at all. [143], B. Oksendal [116], A. Yu. Veretennikov [144].

В параграфе 4.2 рассматривается уравнение

$$\begin{cases} D^{\alpha}_{t_0}X(t) = b(t,X(t)) + \sigma(t,X(t))\frac{dW(t)}{dt}, t > 0, 0 < \alpha \le 1 \\ X(0) = X_0 \end{cases} \tag{1.2.2}$$

где через $D^{\alpha}_{t_0}$ обозначена дробно-подобная производная, $b,\sigma : [0,+\infty) \times R \to R$-измеримые функции, $\{W(t), t \in [0,+\infty)\}$-скалярное броуновское движение заданное на полном вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t\ge 0},\mathbb{P})$ такое, что

$$E\{W(0)\} = 0, E((W(t) - EW(t))(W(s)EW(s))) = t - s.$$

Для каждого $t \ge 0$ через $\mathcal{L}_t = \mathbb{L}^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ обозначено пространство $\mathcal{F}_t$-

измеримых, интегрируемых с квадратом функций $u : \Omega \to R$ таких, что $\|u\|^2 = E\{|u|^2\}$. Предел $X : [0, +\infty) \to \mathcal{L}_t$ называется $\mathcal{F}$-адаптированный, если $X(t) \in \mathcal{L}_t, t \in [0, +\infty)$.

В работе V. Lakshmikantham, S. Leela, M. Sambandham [101] в случае дробной производной Капуто методом сжатых отображений доказана теорема существования и единственности уравнения для задачи (1.2.2). При этом от функций b и σ требуется выполнение условий роста и Липщица.

В диссертации показано, что для некоторых простых функций Ляпунова, дробно-подобная прозводная является мажорантной для дробной производной Капуто от этих функций. Кроме того, установлена дробно-подобная версия формулы Ито. На основе названных здесь результатов, найдены достаточные условия стохастической устойчивости (или устойчивости по вероятности), асимптотической стохастической устойчивости и экспоненциальной устойчивости. Основные результаты параграфа 4.2 опубликованы в работе M. Ilolov, K.S. Kuchakshoev, J.Sh. Rahmatov [86].

В параграфе 4.3 изучается начальная задача для системы нелинейных дифференциальных уравнений дробного порядка являющейся детерминированной и стохастической моделью распространения эпидемии. В частности, такие задачи возникают при анализе распространения пандемии COVID-19. Здесь мы сосредоточимся на некоторых свойствах стохастических моделей эпидемий, которые не реализуются в детерминированных случаях. Важными свойствами дробных стохастических моделей являются вероятность вспышки пандемии, квазистационарные распределения вероятностей, конечная размерность площади распространения и ожидаемая продолжительность эпидемии. Перечисленные здесь свойства обусловлены стохастической природой процесса. Лучшего понимания оценки наличия, стабильности и лечения инфекционных заболеваний, можно добится с помощью математических моделей эпидемий. К сожалению, упомянутые здесь классические модели описываемые дифференциальными уравнениями целого порядка производной недостаточны для адекватного моделирования этих болезней. В этой связи важно привлечь дробные дифференциальные уравнения.

Теоретической базой исследований в области математического моделирования эпидемий послужила статья W.O. Kermack, A.G. McKendrick [94] вышедшая в свет еще в 1927 году. В этой работе, впервые, в литературный оборот был введен так называемый «закон действующих масс» согласно которому количество вновь инфицированных в популяции прямо пропорционально произведению текущих численностей восприимчивых и инфицированных индивидов. Эта модель дала старт широкому распространению детерминированных SIR-моделей (Susceptible-Infected-Recovered), в которых с помощью системы дифференциальных уравнений описывается взаимная динамика групп восприимчивых (S), инфицированных (I) и удаленных (R) индивидов.

В работах Н. Бейли [2], M.S. Baltbett [40] берет начало анализ стохастических моделей эпидемических процессов.

T. Elveback at all. [64] опубликовали результаты о первой индивидиум-ориентированной модели распространения болезни.

Последние годы наблюдается новый рост количества публикаций по моделям эпидемий в связи с пандемией COVID-19. Вирус SARS-COV-2 стал источником инфекции COVID-19. Первые случаи были документированы в декабре 2019 г. в провинции Вухан, КНР [61] и в дальнейшем вирус распространился на все континенты и привел к вспышке пандемии. Общее число стран подвергшихся этому глобальному вызову составляет 212. В работе B. Basti [41] отмечается, что лучшее понимание и оценивание наличия и размеров эпидемий (в том числе, пандемии COVID-19) можно достичь с помощью современных математических моделей эпидемий. К сожалению, упомянутые ранее классческие модели распространения эпидемий не являются в нужной степени аккуратными при моделировании этих сложных эпидемических процессов. В этой связи важными представляются методы дробного стохастического анализа. Адаптация дробных производных в смысле Капуто к описанию инфекционных болезней в биологических популяциях и в обществе является новым этапом в анализе моделей эпидемий. Следует отметить, что эффективность метода дробных производных подчеркнули ученые-специалисты и в других областях науки — акустики, реологии, химии полимеров и др. (см. J. Luchko и др. [104]).

В диссертации представлен анализ системы стохастических дифференциальных уравнений составляющей простейщую модель класса SIRD-а. Основные результаты опубликованиы в работе M. Ilolov, K.S. Kuchakshoev, M. Mirshahi, J.Sh. Rahmatov [87].

ГЛАВА 2. ЭЛЕМЕНТЫ НЕЧЕТКОГО АНАЛИЗА

В этой главе представлены определения нечетких множеств, и операции над ними и их свойства, α-множеств сечения и выпуклые нечеткие множества. Кроме того, на основе уточняющего нечеткого отношения вводится нечеткий оператор, и дается определение нечеткой функции. В то же время он описывают три основные теоремы нечеткой математики — принцип расширения, теорема о разложении и теорема о представлении. Наконец, исследуется нечеткие числа пяти типов и операции над ними.

2.1. Предварительные сведения и результаты нечеткого анализа

2.1.1. Нечеткие множества

Чтобы дать понятие нечеткого множества, сначала описывается фундаментальное понятие теории нечетких множеств — универсум. Так называемый универсум означает, что все задействованные объекты представляют собой наборы, обычно обозначаемые буквами английского алфавита X, Y, Z и т. д. Нечеткие множества отличаются от классических строгим математическим определением. Мы даем его математическое описание следующим образом.

Определение 2.1.1. *Нечеткое подмножество $\tilde{A}$ в универсальном множестве X — это множество пар*

$$\tilde{A} = \{(\mu_{\tilde{A}}(x), x) | x \in X\},$$

где $\mu_{\tilde{A}}(x)$ - действительное число принимающее значение в интервале $[0,1]$, называемое степенью принадлежности точки x в A. Функция определена на множестве X со значениями $\tilde{A}$ в интервале $[0,1]$

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{A}} : X &\rightarrow [0,1] \\ x &\mapsto \mu_{\tilde{A}}(x) \end{aligned}$$

называется функцией принадлежности нечеткого множества $\tilde{A}$.

Нечеткие подмножества также часто называют нечеткими множествами. Из определения 2.1.1 нечетких множеств, очевидно, следует несколько следующих утверждения:

(1) Понятие нечетких множеств является расширением понятия классического множества.

Если $\mathcal{F}(X)$ означает все нечеткие множества на X, т. е.

$$F(X) = \{A|\tilde{A} - \text{ нечеткое множество на } X\},$$

тогда $P(X) \subset \mathcal{F}(X)$, где $P(X)$ — обычные множества на X, т. е.

$$P(X) = A|A - \text{ нечеткое множество на } X.$$

Таким образом, если функция принадлежности нечеткого множества $\tilde{A}$ принимает только два значения, 0 и 1, то $\tilde{A}$ вырождается в классические множества X.

(2) Понятие функции принадлежности является расширением понятия характеристической функции.

Когда $A \in P(X)$ — обычное подмножество в X, то характеристическая функция A имеет вид

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, \in & \text{степень принадлежности x для A равна 1,} \\ 0, \in, & \text{степень принадлежности x для A равна 0.} \end{cases}$$

Это означает, что в нечетких множествах чем ближе степень принадлежности $\mu_{\tilde{A}}(x)$ нечеткого множества A к 1, тем больше x, принадлежащий $\tilde{A}$; тогда как чем ближе $\mu_{\tilde{A}}(x)$ к 0, тем меньше x, принадлежащий $\tilde{A}$. Если область значений $\mu_{\tilde{A}}(x)$ равна $\{0,1\}$, то нечеткое множество A является обычным множеством A, и функция принадлежности $\mu_{\tilde{A}}(x)$ является характеристической функцией $\chi_A(x)$.

(3) Мы называем нечеткие множества из $\mathcal{F}(X) \setminus (X)$ истинными нечеткими множествами.

Рассмотрим некоторые методы представления нечетких множеств, которые показаны ниже.

1^0 Метод представления нечеткого множества в смысле Л. Заде.

Пусть множество X является конечным множеством, т.е. пусть $X = x_1, x_2, \ldots, x_n$. Нечетким множеством будет

$$\tilde{A} = \frac{\mu_{\tilde{A}}(x_1)}{x_1} + \frac{\mu_{\tilde{A}}(x_2)}{x_2} + \ldots \frac{\mu_{\tilde{A}}(x_n)}{x_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_{\tilde{A}}(x_i)}{x_i},$$

где символ $\sum$ не является числовой суммой, $\frac{\mu_{\tilde{A}}(x_i)}{x_i}$ не является дробью; оно имеет только знаковое значение, т. е. степень принадлежности точки x_i нечеткому множеству $\tilde{A}$ то месть $\mu_{\tilde{A}}(x_i)$.

Если X — бесконечное множество, то нечеткое множество $\tilde{A}$ на X — это

$$\tilde{A} = \int\limits_{x \in X} \frac{\mu_{\tilde{A}}(x)}{x}.$$

Точно так же знак $\int$ здесь не является интегралом, а означает только бесконечную логическую сумму, а значение $\frac{\mu_{\tilde{A}}(x)}{x}$ соответствует конечному случаю.

2^0 Когда универсум X является конечным множеством, нечеткое множество, представленное в определении 2.1.1 имеет вид

$$\tilde{A} = \{(\mu_{\tilde{A}}(x_1)x_1), (\mu_{\tilde{A}}(x_2)x_2)\}, \ldots, (\mu_{\tilde{A}}(x_n)x_n).$$

3^0 Когда универсум X является конечным множеством, нечеткое множество, представленное в соответствии с векторной формой имеет вид

$$\tilde{A} = (\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2), \ldots, \mu_{\tilde{A}}(x_n)).$$

Примечательно, что X и $\emptyset$ также можно рассматривать как нечеткое множество в X, если функции принадлежности $\mu_{\tilde{A}}(x) = 1$ и $\mu_{\tilde{A}}(x) \equiv 0$, то $\tilde{A}$ - полное множество X и пустое множество $\emptyset$ соответственно.

Элемент, степень принадлежности которого равна 1, определенно принадлежит этому нечеткому множеству; элемент, степень принадлежности которого равна 0, определенно не принадлежит этому нечеткому множеству. Но значение функции принадлежности в $(0,1)$ образует точную границу, также называя различные подмножества нечеткими множествами.

Когда нечеткий объект описывается с помощью нечеткого множества, выбор его функции принадлежности является ключевым. Теперь мы даем три основные функции принадлежности:

1. Частный минитип (выпуклый вверх, рис. 2.1.1)

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} [1 + (a(x-c))^b]^{-1}, & \text{когда } x \geq c, \\ 1, & \text{когда } x < c. \end{cases}$$

где $c \in X$ — произвольная точка, $a > 0, b > 0$ - два параметра.

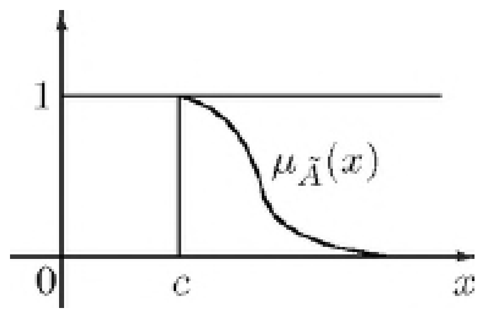

Рис. 2.1.1

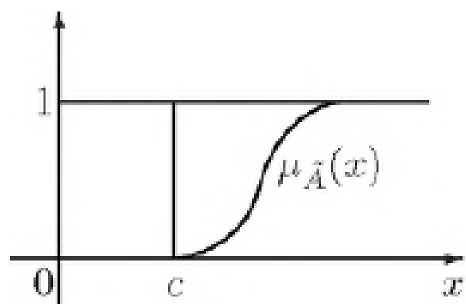

Рис. 2.1.2

2. Частный крупный тип (масштабный выпуклый вниз, рис. 2.1.2)

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0, & \text{когда } x \leq c, \\ [1 + (a(x-c))^b]^{-1}, & \text{когда } x > c. \end{cases}$$

где $x \in X$ — произвольная точка, $a > 0, b > 0$ — два параметра.

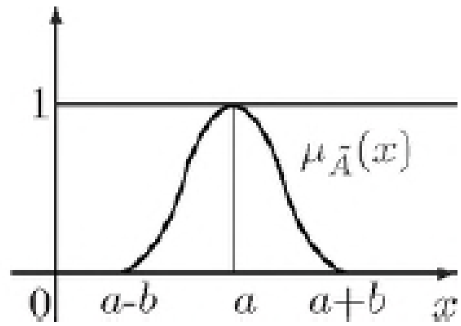

Рис. 2.1.3

3. Нормальный тип (средний тип, рис. 2.1.3)

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = e^{-(\frac{x-a}{b}^{2}},$$

где $a \in X$ — произвольное значение, $b > 0$ параметр.

Очевидно, что Типы 1 и 2 двойственны, и их смысл становится ясным с первого взгляда. Тип 3 — это нечеткое множество $\tilde{A}$, которое является «достаточно близко к числовому множеству a», тогда эта функция принадлежности в $\tilde{A}$ определяется на центральном типе согласно определению.

Пример 2.1.2. *Пусть $X \subseteq \mathbb{R}^+$ ($\mathbb{R}^+$ - множество неотрицательных действительных чисел). Рассматривая возраст как универсальное множество и принимая $X = [0, 100]$. Л.Заде ввел понятие «старость» $\tilde{O}$ и «молодость» $\tilde{Y}$, для которых функции принадлежности соответственно равны*

$$\mu_{\tilde{O}}(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le 50, \\ [1 + (\frac{x-50}{5})^{-2}]^{-1}, & 50 < x \le 100, \\ 1, & x > 100, \end{cases}$$

и

$$\mu_{\tilde{Y}}(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le 25, \\ [1 + (\frac{x-25}{5})^{2}]^{-1}, & 25 < x \le 100, \\ 1, & x > 100. \end{cases}$$

Если кому-то 28 лет, то степень его принадлежности к «молодости» или «старости» соответственно равна

$$[1+(\frac{28-25}{5})^2]^{-1}=0.735,$$

а степень его принадлежности к «старости» равна 0.

Если возраст какого-то человека 55 лет, то степень его принадлежности к «молодости» или «старости» соответственно равна

$$[1+(\frac{55-25}{5})^2]^{-1}=0.027$$

и

$$[1+(\frac{28-50}{5})^{-2}]^{-1}=0.5.$$

Согласно упомянутым выше трем типам функций принадлежности мы можем с определенной точностью вычислить степень его принадлежности конкретному объекту x. Когда не требуется высокая точность, то для простого учета мы можем определить степень принадлежности, приняв некоторую ее оценку.

Пример 2.1.3. *Предположим, что* $X = 1, 2, 3, 4$*, эти четыре элемента составляют небольшое числовое множество. Очевидно, что элемент* 1 *— это стандартно малое число, он должен принадлежать этому множеству, и его степень принадлежности равна* 1*; элемент* 4 *не является малым числом и не должен принадлежать этому множеству, его степень принадлежности равна* 0*. Элемент* 2 *«тоже становится малым» или делается «на восемьдесят процентов меньше», его степень принадлежности равна* $0,8$*; элемент* 3*, вероятно, «уменьшает силу» или «уменьшает на два процента»; его степень принадлежности* $0,2$*. Нечеткие множества записываются маленькими цифрами как* $\tilde{A}$*, их элементы по-прежнему равны* $1, 2, 3, 4$*, в то же время и задана степень принадлежности элемента к* A*, обозначаемая с помощью представления Заде,* $\tilde{A} = \frac{1}{1} + \frac{0.8}{2} + \frac{0.2}{3} + \frac{0}{4}$*, порядковое двойственное представление — это* $\tilde{A} = \{(1,1),(0.8,2),(0.2,3),(0,4)\}$*, векторный метод просто представляется как* $\tilde{A} = (1, 0.8, 0.2, 0)$*.*

2.1.2. Операции с нечеткими множествами

Поскольку область значений для функции принадлежности нечетких множеств, соответствующей характеристической функции четкого подмножества, расширяется от $\{0,1\}$ до $[0,1]$. Подобно характеристической функции, демонстрирующей связь между отличительным подмножеством, мы имеем следующее.

Определение 2.1.4. *Пусть* $\tilde{A}, B \in \mathcal{F}(X)$. *При произвольном* $x \in X$ *имеем включение:* $\tilde{A} \subseteq \tilde{B} \Leftrightarrow \mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{B}}(x)$, *равенство:* $\tilde{A} = \tilde{B} \Leftrightarrow \mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{B}}(x)$.

Из определения 2.1.4 следует, что $\tilde{A} = \tilde{B} \Leftrightarrow \tilde{A} \subseteq \tilde{B}$ и $\tilde{B} \subseteq \tilde{A}$. Другими словами, отношение включения — это бинарное отношение на нечетком степенном множестве $\mathcal{F}(X)$ со следующими свойствами:

(1) $\tilde{A} \subseteq \tilde{A}$ (отражение).

(2) $\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$ и $\tilde{B} \subseteq \tilde{A} \Rightarrow \tilde{A} = \tilde{B}$ (симметрия).

(3) $\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$ и $\tilde{B} \subseteq \tilde{C} \Rightarrow \tilde{A} \subseteq \tilde{C}$ (транзитивность)

Поскольку отношение $\subseteq$ составляет отношение порядка на $\mathcal{F}(X)$,то $(\mathcal{F}(X), \subseteq)$ обозначает частично упорядоченное множество. Опять же, поскольку $\emptyset, X \in \mathcal{F}(X)$, следовательно, $\mathcal{F}(X)$ содержит максимальный элемент X и минимальный элемент $\emptyset$.

Определение 2.1.5. *Тогда* $\tilde{A}, \tilde{B} \in \mathcal{F}(x)$. *Затем мы определяем*
Объединение:$\tilde{A} \cup \tilde{B}$, *функция принадлежности которого*

$$\mu_{(\tilde{A} \cup \tilde{B})}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) \bigvee \mu_{\tilde{B}}(x) = \max\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\}.$$

Пересечение:$\tilde{A} \cap \tilde{B}$, *функция принадлежности которого*

$$\mu_{(\tilde{A} \cap \tilde{B})}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) \bigwedge \mu_{\tilde{B}}(x) = \min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\}.$$

Дополнение:$\tilde{A}^C$, *функция принадлежности которого*

$$\mu_{\tilde{A}^C} = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x).$$

Их изображения выглядят как на рис. 2.1.4-2.1.6:

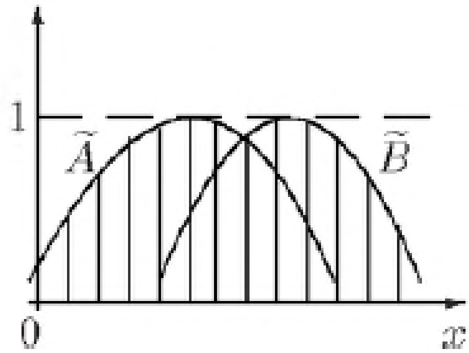

Рис. 2.1.4. $\tilde{A} \cup \tilde{B}$

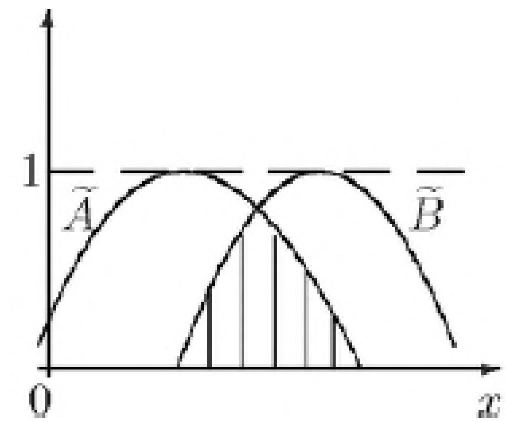

Рис. 2.1.5. $\tilde{A} \cap \tilde{B}$

Сравнивая операции объединения, пересечения и дополнения в отличительном множестве, мы немедленно обнаруживаем, что операция нечетких множеств является в точности параллельным определением операции отдельного множества, $\tilde{A} \cup \tilde{B}$ является минимальным нечетким множеством, включающим $\tilde{A}$ и снова включающим в $\tilde{B}$. $\tilde{A} \cap \tilde{B}$- максимальное нечеткое множество, включающее $\tilde{A}$ и снова включающее в $\tilde{B}$.

В соответствии с двумя типами случаев, когда универсум X конечно или бесконечно, формула вычисления объединения, пересечения и дополнения в нечетких множествах $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ может быть представлена, соответственно, следующим образом:

(1) Универсум есть $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ и $\tilde{A} = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\mu_{\tilde{A}}(x_i)}{x_i}, \tilde{B} = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\mu_{\tilde{B}}(x_i)}{x_i}$, тогда

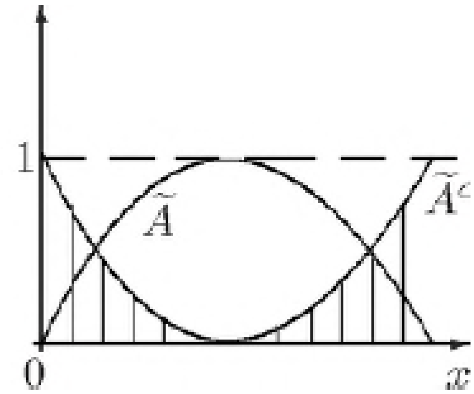

Рис. 2.1.6. $\tilde{A}^C$

$$\tilde{A}\bigcup\tilde{B}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\mu_{\tilde{A}}(x_i)\vee\mu_{\tilde{B}}(x_i)}{x_i},$$

$$\tilde{A}\bigcap\tilde{B}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\mu_{\tilde{A}}(x_i)\wedge\mu_{\tilde{B}}(x_i)}{x_i},$$

$$\tilde{A}^C=\sum_{i=1}^{n}\frac{1-\mu_{\tilde{A}}(x_i)}{x_i}.$$

(2) X — бесконечное множество, и $\tilde{A}=\int\limits_{x\in X}\frac{\mu_{\tilde{A}}(x)}{x},\tilde{B}=\int\limits_{x\in X}\frac{\mu_{\tilde{B}}(x)}{x}$, тогда

$$\tilde{A}\bigcup\tilde{B}=\int\limits_{x\in X}\frac{\mu_{\tilde{A}}(x)\vee\mu_{\tilde{B}}(x)}{x},$$

$$\tilde{A}\bigcap\tilde{B}=\int\limits_{x\in X}\frac{\mu_{\tilde{A}}(x)\wedge\mu_{\tilde{B}}(x)}{x},$$

$$\tilde{A}^C=(1-\int\limits_{x\in X}\frac{\mu_{\tilde{A}}(x)}{x}).$$

Пример 2.1.6. *Предположим* $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$*;* $\tilde{A}=\frac{1}{x_1}+\frac{0.8}{x_2}+\frac{0.2}{x_3}+\frac{0}{x_4}$*;* $\tilde{B}=\frac{0}{x_1}+\frac{0.2}{x_2}+\frac{0.8}{x_3}+\frac{0}{x_4}$*, тогда*

$$\tilde{A}\bigcup\tilde{B}=\frac{1\vee0}{x_1}+\frac{0.8\vee0.2}{x_2}+\frac{0.2\vee0.8}{x_3}+\frac{0\vee0}{x_4}=\frac{1}{x_1}+\frac{0.8}{x_2}+\frac{0.8}{x_3}+\frac{0}{x_4}$$

$$\tilde{A} \bigcap \tilde{B} = \frac{1 \wedge 0}{x_1} + \frac{0.8 \wedge 0.2}{x_2} + \frac{0.2 \wedge 0.8}{x_3} + \frac{0 \wedge 0}{x_4} = \frac{0}{x_1} + \frac{0.2}{x_2} + \frac{0.2}{x_3} + \frac{0}{x_4}.$$

$$\tilde{A}^C = \frac{1-1}{x_1} + \frac{1-0.8}{x_2} + \frac{1-0.2}{x_3} + \frac{1-0}{x_4} = \frac{0}{x_1} + \frac{0.2}{x_2} + \frac{0.8}{x_3} + \frac{0}{x_4}.$$

Пример 2.1.7. *Вычислить объединение, пересечение и дополнение нечетких множеств $\tilde{Y}$ и $\tilde{O}$ в примере 2.1.3 в разделе 2.1.1*

Из определения имеем

$$\begin{aligned}
\tilde{Y} \bigcup \tilde{O} &= \int\limits_{x \in X} \frac{\mu_{\tilde{Y}}(x) \vee \mu_{\tilde{O}}(x)}{x} \\
&= \int\limits_{0 \le x \le 25} \frac{\frac{1}{x} + \int\limits_{25 < x \le x^*} [1 + (\frac{x-25}{5})^2]^{-1}}{x} \\
&+ \int\limits_{x^* < x \le 100} \frac{[1 + (\frac{x-50}{5})^{-2}]^{-1}}{x} + \int\limits_{x > 100} \frac{1}{x},
\end{aligned}$$

где $x^* \approx 51$;

$$\begin{aligned}
\tilde{Y} \bigcap \tilde{O} &= \int\limits_{50 < x \le x^*} \frac{[1 + (\frac{x-50}{5})^{-2}]^{-1}}{x} \\
&+ \int\limits_{x^* < x \le 100} \frac{[1 + (\frac{x-25}{5})^2]^{-1}}{x};
\end{aligned}$$

$$\tilde{O}^C = \int\limits_{0 \le x \le 50} \frac{1}{x} + \int\limits_{50 < x \le 100} \frac{1 - [1 + (\frac{x-50}{5})^{-2}]^{-1}}{x};$$

$$\tilde{Y}^C = \int_{25 \le x \le 100} \frac{1 - [1 + (\frac{x-25}{5})^{-2}]^{-1}}{x} + \int_{x>100} \frac{1}{x}.$$

Операции объединения, пересечения и дополнения в нечетком множестве могут быть распространены на несколько нечетких множеств.

Определение 2.1.8. *Предположим, что T – множество индексов $A_t \in \mathcal{F}(X)(t \in T)$, тогда*

$$\mu_{\bigcup\limits_{t\in T} \tilde{A}_t}(x) = \bigvee_{t\in T} \mu_{\tilde{A}_t}(x) = \sup_{t\in T} \mu_{\tilde{A}_t}(x), x \in X,$$

$$\mu_{\bigcap\limits_{t\in T} \tilde{A}_t}(x) = \bigwedge_{t\in T} \mu_{\tilde{A}_t}(x) = \inf_{t\in T} \mu_{\tilde{A}_t}(x), x \in X.$$

Очевидно,

$$\bigcup_{t\in T} \tilde{A}_t, \bigcap_{t\in T} \tilde{A}_t \in \mathcal{F}(X).$$

В частности, когда T изафинитное множество,

$$\mu_{\bigcup\limits_{t\in T} \tilde{A}_t}(x) = \max_{t\in T} \mu_{\tilde{A}_t}(x), x \in X,$$

$$\mu_{\bigcap\limits_{t\in T} \tilde{A}_t}(x) = \min_{t\in T} \mu_{\tilde{A}_t}(x), x \in X.$$

Теорема 2.1.9. $(\mathcal{F}(X), \cup, \cap, c)$ *удовлетворяет следующим свойствам:*
(1) Закон идемпотента $\tilde{A} \cup \tilde{A} = \tilde{A}$, $\tilde{A} \cap \tilde{A} = \tilde{A}$.
(2) Коммутативный закон $\tilde{A} \cup \tilde{B} = \tilde{B} \cup \tilde{A}, \tilde{A} \cap \tilde{B} = \tilde{B} \cap \tilde{A}$.
(3) Ассоциативный закон

$$(\tilde{A} \cup \tilde{B}) \cup \tilde{C} = \tilde{A} \cup (\tilde{B} \cup \tilde{C})$$

(4) Закон абсорбции $(\tilde{A} \cup \tilde{B}) \cap \tilde{A} = \tilde{A}$, $(\tilde{A} \cap \tilde{B}) \cup \tilde{A} = \tilde{A}$

(5) Распределительный закон

$$(\tilde{A} \cup \tilde{B}) \cap \tilde{C} = (\tilde{A} \cap (\tilde{C}) \cup (\tilde{B} \cap \tilde{C}),$$

$$(\tilde{A} \cap \tilde{B}) \cup \tilde{C} = (\tilde{A} \cup (\tilde{C}) \cap (\tilde{B} \cup \tilde{C}).$$

(6) 0-1 закон

$$\tilde{A} \cap X = \tilde{A}.\tilde{A} \cap \varphi = \varphi,$$

$$\tilde{A} \cup X = X.\tilde{A} \cup \varphi = \tilde{A}.$$

(7) Закон отрицание отрицания $(\tilde{A}^C)^C = \tilde{A}$

(8) Двойственный закон $(\tilde{A} \cup \tilde{B})^C = \tilde{A}^C \cap \tilde{B}^C$, $(\tilde{A} \cap \tilde{B})^C = \tilde{A}^C \cup \tilde{B}^C$

Доказательство: Докажем, например, свойства (8), остальное можно проверить напрямую.

Из $\forall x \in X$ имеем

$$\begin{aligned}
\mu_{(\tilde{A}\cup\tilde{B})^C} &= 1 - \mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}(x) \\
&= 1 - \max\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\} = \min\{1 - \mu_{\tilde{A}}(x), 1 - \mu_{\tilde{B}}(x)\} \\
&= \min\{\mu_{\tilde{A}^C}(x), \mu_{\tilde{B}^C}(x)\} = \mu_{\tilde{A}^C\cap\tilde{B}^C}(x).
\end{aligned}$$

Следовательно

$$(\tilde{A} \bigcup \tilde{B})^C = \tilde{A}^C \bigcap \tilde{B}^C.$$

Аналогично можно доказать

$$(\tilde{A} \bigcap \tilde{B})^C = \tilde{A}^C \bigcup \tilde{B}^C.$$

Отмечается, что операция на нечетком множестве уже не удовлетворяет закону исключенного среднего. А именно, в общем случае мы имеем

$$\tilde{A}\bigcup\tilde{A}^C \neq X, \tilde{A}\bigcap\tilde{A}^C \leq \frac{1}{2}.$$

Пример 2.1.10. *Если* $\mu_{\tilde{A}} \equiv 0.5$, $\mu_{\tilde{A}^C} \equiv 0.5$, *то*

$$\mu_{\tilde{A}\cup\tilde{A}^C}(x) = \max\{0.5, 0.5\} = 0.5 \neq 1,$$

$$\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{A}^C}(x) = \min\{0.5, 0.5\} = 0.5 \neq 0.$$

2.1.3. α-срезки и выпуклые нечеткие множества

Определение 2.1.11. *Предположим, что* $\tilde{A} \in \mathcal{F}(X), \forall\alpha \in [0,1]$ *запишем*

$$(\tilde{A})_\alpha = A_\alpha = \{x|\mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}.$$

Тогда A_α *называется* α*-срезкой нечеткого множества* $\tilde{A}$. *Далее запишем*

$$(\tilde{A})_{\underset{\cdot}{\alpha}} = A_{\underset{\cdot}{\alpha}} = \{x|\mu_{\tilde{A}}(x) > \alpha\},$$

тогда $A_{\underset{\cdot}{\alpha}}$ *называется сильной* α*-срезкой нечеткого множества* $\tilde{A}$, *и*

$$\tilde{A}_{\underset{\cdot}{0}} = A_{\underset{\cdot}{0}} = \{x|\mu_{\tilde{A}}(x) > \alpha\} = supp\tilde{A}.$$

A_0 *называется носителем нечеткого множества* $\tilde{A}$.

Если носитель $supp\tilde{A} = \{x\}$ является одноточечным множеством, то $\tilde{A}$ называется нечеткой точкой на X.

Пример 2.1.12. *Пусть*

$$\tilde{A} = \frac{0.5}{x_1} + \frac{0.7}{x_2} + \frac{0}{x_3} + \frac{0.9}{x_4} + \frac{1}{x_5},$$

тогда

при $\alpha = 1, A_1 = \{x_5\}, A_1 = \emptyset$,
при $\alpha = 0.9, A_{0.9} = \{x_4, x_5\}, A_{0.9} = \{x_5\}$,
при $\alpha = 0.7, A_{0.7} = \{x_2, x_4, x_5\}, A_{0.7} = \{x_4, x_5\}$,

при $\alpha = 0.5, A_{0.5} = \{x_1, x_2, x_4, x_5\}, A_{0.5} = \{x_2, x_4, x_5\}$,
при $\alpha = 0, A_0 = X, A_0 = \{x_1, x_2, x_4, x_5\}$.

Множество α-срезок имеет следующие свойства

Свойство 2.3.3

(1) $(\tilde{A} \bigcup \tilde{B})_\alpha = A_\alpha \bigcup B_\alpha, (\tilde{A} \bigcap \tilde{B})_\alpha = A_\alpha \bigcap B_\alpha$

(2) $(\tilde{A} \bigcup \tilde{B})_{\underset{i\cdot}{\alpha}} = A_{\underset{i\cdot}{\alpha}} \bigcup B_{\underset{i\cdot}{\alpha}}, (\tilde{A} \bigcap \tilde{B})_{\underset{i\cdot}{\alpha}} = A_{\underset{i\cdot}{\alpha}} \bigcap B_{\underset{i\cdot}{\alpha}}$

2.1.4. Теорема о разложении

Определение 2.1.13. *Если* $\alpha \in [0,1], \tilde{A} \in \mathcal{F}(X)$ *то произведение числа* α *на нечеткое множество* $\tilde{A}$ *определяется как*

$$\mu_{\alpha,\tilde{A}}(x) = \alpha \bigwedge \mu_{\tilde{A}}(x) = min\{\alpha, \mu_{\tilde{A}}(x)\}.$$

Теорема 2.1.14. *(Теорема о разложении I). Для произвольного* $\tilde{A} \in \mathcal{F}(X)$ *имеем*

$$\tilde{A} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha A_\alpha, \tag{2.1.1}$$

$$\tilde{A} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha A_{\underset{\cdot}{\alpha}}, \tag{2.1.2}$$

Доказательство. Так как

$$\mu_{A_\alpha}(x) = \begin{cases} 1, & x \in A_\alpha \\ 0, & x \notin A_\alpha, \end{cases}$$

то

$$\mu_{(\bigcup\limits_{\alpha\in[0,1]} \alpha A_\alpha)}(x) = \sup_{0 \le \alpha \le 1} \alpha \mu_{A_\alpha}(x) = \sup_{x \in A_\alpha} = \sup_{\alpha \le \mu_{\tilde{A}}(x)} \alpha = \mu_{\tilde{A}}(x).$$

Таким образом, (2.1.1) доказано.

Аналогично можно доказать формулу (2.1.2).

Пример 2.1.15. *Предположим, что универсум* $X = 2, 1, 7, 6, 9$, *попробуйте разложить нечеткое множество*

$$\tilde{A} = \frac{0.1}{2} + \frac{0.3}{1} + \frac{0.5}{7} + \frac{0.9}{6} + \frac{1}{9}$$

применяя теорему о разложении.

Решение. Соответствующие срезки в нечетких множествах равны

$$\begin{aligned} A_{0,1} &= X, \quad 0 < \alpha \leq 0.1, \\ A_{0,3} &= \{1, 7, 6, 9\}, \ \ 0.1 < \alpha \leq 0.3, \\ A_{0,5} &= \{7, 6, 9\}, \ \ 0.3 < \alpha \leq 0.5, \\ A_{0,9} &= \{6, 9\}, \ \ 0.5 < \alpha \leq 0.9, \\ A_1 &= \{9\}, \quad 0.9 < \alpha \leq 1, \end{aligned}$$

$$\tilde{A} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha A_\alpha =$$

$$= \bigcup_{0<\alpha\leq 0.1} \alpha(\frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{7} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9}) \bigcup_{0.1<\alpha\leq 0.3} \alpha(\frac{1}{1} + \frac{1}{7} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9})$$

$$= \bigcup_{0.3<\alpha\leq 0.5} \alpha(\frac{1}{7} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9}) \bigcup_{0.5<\alpha\leq 0.9} \alpha(\frac{1}{6} + \frac{1}{9}) \bigcup_{0.9<\alpha\leq 1} \alpha(\frac{1}{9})$$

$$= 0.1A_{0,1} \bigcup 0.3A_{0,3} \bigcup 0.5A_{0,5} \bigcup 0.9A_{0,9} \bigcup A_1.$$

Определение 2.1.16. *Предположим, что* X *— это универсум дискурса. Пусть нечеткое многозначное отображение* $H : [0, 1] \to P(X), \alpha \mapsto H(\alpha)$ *удовлетворяет условию*

$$\alpha_1 < \alpha_2 \Rightarrow H(\alpha_1) \supseteq H(\alpha_2), \forall \alpha_1, \alpha_2 \in [0, 1],$$

тогда H *называется рукав-набором на* X *и записывается как* $H(X)$.

Мы можем получить более общую теорему о разложении, используя определение (2.1.16)

Теорема 2.1.17. *(Теорема о разложении II). Пусть* $\tilde{A} \in \mathcal{F}(X)$. *Если существует множествозначное отображение*

$$H : [0,1] \Rightarrow \mathcal{F}(X),$$

$$\alpha \mapsto H(\alpha),$$

такое, что $\forall a \in [0,1], {}_{\alpha} \subseteq (\alpha) \subseteq {}_{\alpha}$, *то*

(1) $\tilde{A} = \bigcup\limits_{\alpha \in [0,1]} \alpha H(\alpha)$.

(2) $\alpha_1 < \alpha_2 \Rightarrow H(\alpha_1) \supset H(\alpha_2)$.

(3) $A_\alpha = \bigcap\limits_{\lambda < \alpha} H(\lambda), \alpha \neq 0, A_\alpha = \bigcup\limits_{\lambda > \alpha} H(\lambda), \alpha \neq 1.$

Доказательство:

(1) Поскольку $A_\alpha \subseteq (\alpha) \subseteq A_\alpha$, то

$$\alpha A_\alpha \subseteq \alpha H(\alpha) \subseteq \alpha A_\alpha$$

$$\Rightarrow \tilde{A} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha A_\alpha \subseteq \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha H(\alpha) \subseteq \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha A_\alpha = \tilde{A}$$

$$\Rightarrow \tilde{A} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha H(\alpha).$$

Следовательно, (1) доказано.

(2) Так как $\forall x \in X$, то

$$x \in A_{\alpha_2} \Rightarrow \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha_2 > \alpha_1 \Rightarrow x \in A_{\alpha_1},$$

поэтому

$$\alpha_1 < \alpha_2 \Rightarrow H(\alpha_1) \supseteq A_{\alpha_1} \supseteq A_{\alpha_2} \supseteq H(\alpha_2).$$

(3) Так как

$$\forall \lambda < \alpha, H(\lambda) \supseteq A_{\dot{\lambda}} \supseteq A_\alpha \Rightarrow \bigcap_{\lambda<\alpha} H(\lambda) \supseteq A_\alpha, \alpha \neq 0.$$

Снова

$$\bigcap_{\lambda<\alpha} H(\lambda) \supseteq \bigcap_{\lambda<\alpha} A_\lambda = A_{(\bigvee\limits_{\lambda<\alpha} \lambda)} = A_\alpha, \alpha \neq 0,$$

следовательно, мы имеем

$$A_\alpha = \bigcap_{\lambda<\alpha} H(\lambda).$$

Аналогично доказывается вторая формула. Зная теорему о разложении II, нечеткие множества $\tilde{A}$ могут быть наглядно представлены набором множества $H(A_\alpha \subseteq H(\alpha) \subseteq A_\alpha)$, поэтому $H(\alpha)$ на самом деле имеет более широкое применение.

2.1.5. Принцип расширения

Теорема 2.1.18. *(Принцип расширения I, Лотфи А. Заде) [148] Пусть $f: X \to Y$ — обычная точечная функция и $\tilde{A} \in \mathcal{F}(X)$. Два отображения могут быть индуцированы через f и f^{-1} следующим образом:*

$$f: \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y), \quad f^{-1}: \mathcal{F}(Y) \to \mathcal{F}(X),$$
$$\tilde{A} \mapsto f(\tilde{A}) \in \mathcal{F}(Y), \quad \tilde{B} \mapsto f^{-1}(\tilde{B}) \in \mathcal{F}(X),$$

функции принадлежности которых обозначаются через

$$\mu_{f(\tilde{A})}(y) \triangleq \begin{cases} \bigvee\limits_{f(x)=y} \mu_{f(\tilde{A})}(x), & f^{-1}(y) \neq \phi, \\ 0, & f^{-1}(y) = \phi, \end{cases}$$

$$\mu_{f^{-1}(\tilde{B})}(x) \triangleq \tilde{B}(f(x)), y = f(x),$$

соответственно. $f(\tilde{A})$ называется образом $\tilde{A}$ относительно f и $f^{-1}(\tilde{B})$ — прообразом $\tilde{B}$.

Представление множества α — срезки в принципе расширения имеет вид.

Теорема 2.1.19. *(Принцип расширения II). Пусть отображение* $f : X \to Y$ *расширяется как отображение* $f : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y)$ *и* $f^{-1} : \mathcal{F}(Y) \to \mathcal{F}(X)$. *Тогда* $\forall \alpha \in [0,1], \tilde{A} \in \mathcal{F}(X), \tilde{B} \in \mathcal{F}(Y)$, *имеем*

$$\begin{aligned} 1^0 f(\tilde{A})_{\dot{\alpha}} &= f(A_{\dot{\alpha}}) \\ 2^0 f^{-1}(\tilde{B})_{\dot{\alpha}} &= f^{-1}(B_{\dot{\alpha}}) \\ 3^0 f^{-1}(\tilde{B})_{\alpha} &= f^{-1}(B_{\alpha}) \end{aligned}$$

Здесь $f(\tilde{A})_\alpha$ *— упрощение* $(f(\tilde{A}))_\alpha$.

Доказательство. Докажем только 1^0, остальные проверяются аналогично. Так как

$$y \in f(\tilde{A})_\alpha \Leftrightarrow \mu_{f(\tilde{A})}(y) > \alpha$$

$$\Leftrightarrow \bigvee_{f(x)=y} \mu_{\tilde{A}}(x) > \alpha$$

$$\Leftrightarrow \exists x \in X, \text{ удовлетворяющий } f(x) = x, \text{ такой, что } \mu_{\tilde{A}}(x) > \alpha$$

$$\Leftrightarrow \exists x \in X, \text{ удовлетворяющий } f(x) = x, \text{ такой, что } x \in A_\alpha$$

$$\Leftrightarrow y \in f(A_\alpha),$$

то, 1^0 доказано.

Следствие 2.1.20. *(Принцип расширения III). Пусть* $f : X \to Y, \tilde{A} \in \mathcal{F}(X), \tilde{B} \in \mathcal{F}(Y)$ *и* $f^(- 1)$. *Тогда*

$$f(\tilde{A}) = \bigcup_{\alpha\in[0,1)} \alpha f(A_\alpha),$$

$$f^{-1}(\tilde{B}) = \bigcup_{\alpha\in[0,1)} \alpha f^{-1}(B_\alpha),$$

$$f^{-1}(\tilde{B}) = \bigcup_{\alpha\in[0,1)} \alpha f^{-1}(B_{\underset{\cdot}{\alpha}}).$$

Алгебраически метод представления относится к обычному нечеткому множеству, он связан с расширением нечеткого множества через классическое множество. С другой точки зрения, в частности, выдвигается теорема о представлении. Более наглядный метод «коллекторных рукавов» дается следующим образом.

2.1.6. Теорема о представлении

Определение 2.1.21. *Для заданных* $H_1, H_2 \in \boldsymbol{H}(X)$, *если* $\forall\alpha \in [0,1]$, *имеем* $\bigcap_{\lambda<\alpha} H_1(\lambda) = \bigcap_{\lambda<\alpha} H_2(\lambda)$, *то эквивалентность* H_1 *и* H_2 *записывается как* $H_1 \sim H_2$.

Очевидно, соотношение «$\sim$» удовлетворяет (1) $H \sim H, \forall H \in \mathbf{H}(X)$ (отражение); (2) $H_1 \sim H_2 \Rightarrow H_2 \sim H_1$ (симметрия); (3) $H_1 \sim H_2$ и снова $H_2 \sim H_3 \Rightarrow H_1 \sim H_3$ (транзитивность); которые записываются как $\mathbf{H}'(X) = \{|H||H \in \mathbf{H}(X)\} = \mathbf{H}/\sim$, где классом является $|H| = \{H'|H' \sim H\}$.

Определение 2.1.22. *Предположим, что* $H, H_1, H_2 \in \boldsymbol{H}(X)$ *и* $H_t \in \boldsymbol{H}(X)(\forall t \in T)$ *с* $\forall\alpha \in [0,1]$, *тогда*

(1) Включение $\subseteq$: $H_1 \subseteq H_2 \Leftrightarrow H_1(\alpha) \subseteq H_2(\alpha)$;

(2) Объединение $\bigcup_{t\in T} H_t : (\bigcup\limits_{t\in T} H_t)(\alpha) \triangleq \bigcup\limits_{t\in T} H_t(\alpha)$;

(3) Пересечение $\bigcap\limits_{t\in T} H_t : (\bigcap\limits_{t\in T} H_t)(\alpha) \triangleq \bigcap\limits_{t\in T} H_t(\alpha)$;

(4) Дополнение $H^C : H^C(\alpha) \triangleq (H(1-\alpha))^C$.

Теорема 2.1.23. *(Теорема о представлении). Пусть* $H \in \boldsymbol{H}(X)$. *Тогда* $\bigcup\limits_{\alpha\in[0,1]} \alpha H(\alpha)$ *— нечеткое множество на* X, *записывающее* $\tilde{A}$ *и* $\forall\lambda, \alpha \in [0,1]$*:*

$$\begin{aligned}(1) A_\alpha &= \bigcap_{\lambda<\alpha} H(\alpha), \alpha \neq 0.\\ (2) A_{\underset{\cdot}{\alpha}} &= \bigcap_{\lambda>\alpha} H(\alpha), \alpha \neq 1.\end{aligned}$$

Доказательство. В соответствии с определением произведения чисел $\forall\alpha \in [0,1], H(\alpha) \in P(X)$, тогда $\alpha H(\alpha) \in \mathbf{H}(X)$, так что

$$\bigcup_{\alpha\in[0,1]} \alpha H(\alpha) \in \mathbf{H}(X),$$

записывается как $\tilde{A} = \bigcup\limits_{\alpha\in[0,1]} \alpha H(\alpha)$.

Согласно теореме о разложении II, если условие $A_{\underset{\cdot}{\alpha}} \subseteq H(\alpha) \subseteq A_\alpha$ выполняется, то (1) и (2) могут быть получены. Докажем, что это условие выполнено.

$$\begin{aligned}\forall\alpha[0,1] : x \in A_{\underset{\cdot}{\alpha}} &\Rightarrow \mu_{\tilde{A}}(x) > \alpha\\ &\Rightarrow [\bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda H(\lambda)](x) > \alpha\\ &\Rightarrow \bigvee_{\lambda\in[0,1]} \lambda \bigwedge H(\lambda)(x)] > \alpha\\ &\Rightarrow \exists\alpha_0 \in [0,1], \text{ такое, что } \alpha_0 \bigwedge H(\alpha_0)(x) > \alpha\\ &\Rightarrow \alpha_0 > \alpha \text{ и } H(\alpha_0)(x) = 1\\ &\Rightarrow x \in H(\alpha_0) \subseteq H(\alpha), (\alpha \neq 1);\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
x \in H(\alpha) \;&\Rightarrow\; H(\alpha)(x) = 1 \\
&\Rightarrow\; \bigvee_{\lambda \in [0,1]} \lambda \bigwedge H(\lambda)(x)] \geq \alpha \bigwedge H(\alpha)(x) = \alpha \\
&\Rightarrow\; \mu(_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha \Rightarrow x \in A_{\alpha}.
\end{aligned}
$$

Следовательно, выполнено условие $A_{\alpha} \subseteq H(\alpha) \subseteq A_{\alpha}$.

Следствие 2.1.24. *Предположим, что* $H \in \boldsymbol{H}(X)$, *если мы пишем, то*
(1) $\forall_{\alpha} \in [0,1], A_{\underset{\cdot}{\alpha}} \subseteq H(\alpha) \subseteq A_{\alpha}$,
(2) $\mu(_{\tilde{A}}(x) \bigvee\limits_{x \in H(\alpha)} \alpha$.
Это проще получить по теореме (2.1.23).

Пример 2.1.25. *Предположим, что* $X = [-1,1]$, *набор множеств в* X *есть*

$$H(\alpha) = [\alpha^2 - 1, 1 - \alpha^2], \alpha \in [0,1],$$

вычислить функцию принадлежности нечеткого множества A, *определяемую* H.

Его рисунок выглядит так:

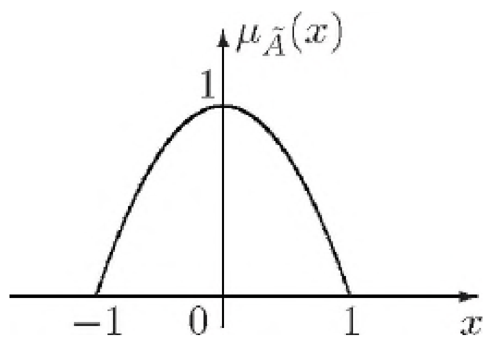

Рис. 2.1.7. $\mu(_{\tilde{A}}(x)$

Решение: потому что

$$\mu(_{\tilde{A}}(x) = \bigvee_{x \in H(\alpha)}, \alpha \in [0,1],$$

когда $-1 \leq \ \leq 0$, т. е. $= \alpha^{2-}1$,

$$\mu(_{\tilde{A}}(x) = \bigvee_{\alpha=\sqrt{1+x}} \alpha\sqrt{1+x};$$

когда $0 < \ \leq 1$, т. е. $= 1 - \alpha^2$,

$$\mu(_{\tilde{A}}(x) = \bigvee_{\alpha=\sqrt{1-x}} \alpha\sqrt{1-x}.$$

Поэтому

$$\mu(_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \sqrt{1+x}, & -1 \leq x \leq 0 \\ \sqrt{1-x}, & 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

2.1.7. Нечеткие числа пяти типов

В этом разделе мы обсудим свойства пяти типов нечетких чисел, включая нечеткие числа интервального типа, $(\cdot, c)$, T-типа, $L-R$-типа и плоского типа. Поскольку число 0 является особым примером интервального числа 0 и нечеткого числа $\tilde{0}$, в этой книге 0 обозначает их одним и тем же знаком.

Определение 2.1.26. *Пусть* $\mathbb{R}$ *обозначает множество действительных чисел, назовем* c, d *интервальными числами, записанными как* $c, d \in I_{\mathbb{R}}$*, где* $I_{\mathbb{R}}\{[c_i, d_i] < d_i, c_i, d_i \in \mathbb{R}, (i = 1, 2)\}$ *множество, состоящее из всех интервальных чисел.*

Если $c = [c_1, c_2], d = [d_1, d_2]$, то действие с определенными интервальными числами выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
c + d &= [c_1 + d_1, c_2 + d_2], \\
c - d &= [(c_1 - d_1) \wedge (c_2 - d_2), (c_1 - d_1) \vee (c_2 - d_2)], \\
c \cdot d &= [c_1 d_1 \wedge c_1 d_2 \wedge c_2 d_1 \wedge c_2 d_2, c_1 d_1 \vee c_1 d_2 \vee c_2 d_1 \vee c_2 d_2], \\
c \div d &= [\frac{c_1}{d_1} \wedge \frac{c_1}{d_2} \wedge \frac{c_2}{d_1} \wedge \frac{c_2}{d_2}, \frac{c_1}{d_1} \vee \frac{c_1}{d_2} \vee \frac{c_2}{d_1} \vee \frac{c_2}{d_2}], \\
c \vee d &= [c_1 \vee d_1, c_2 \vee d_2],
\end{aligned}$$

$$c \wedge d \;=\; [c_1 \wedge d_1, c_2 \wedge d_2]$$

Здесь $a \vee b = max\{a, b\}, a \wedge b = min\{a, b\}$.

Теорема 2.1.27. *Если заданы $c, d \in I_{\mathbb{R}}$, то $c{*}d \in I_{\mathbb{R}}$, где «$*$» обозначает алгебраические операции $+, ^{-}, \cdot, \div, \vee, \wedge$ на $\mathbb{R}$.*

Нечеткие числа получаются путем применения принципа расширения. С этого момента $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ представляет собой множество действительных нечетких чисел.

Определение 2.1.28. *Учитывая, что $\tilde{c}, \tilde{d}$ обозначают нечеткие числа, записанные как $\tilde{c}, \tilde{d} \in \mathcal{F}(\mathcal{R})$, где α-срезка $\tilde{c}$ и $\tilde{d}$ равна*

$$\tilde{c}_\alpha = [c_1(\alpha), c_2(\alpha)], \tilde{d}_1 = [d_1(\alpha), d_2], \alpha \in [0, 1],$$

соответственно, то операции над нечеткими числами определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}
\tilde{c} + \tilde{d} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha(\tilde{c}_\alpha + \tilde{d}_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha[c_1(\alpha) + d_1(\alpha), c_2(\alpha) + d_2(\alpha)];\\
\tilde{c} - \tilde{d} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha(\tilde{c}_\alpha - \tilde{d}_\alpha)\\
&= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha[(c_1(\alpha) - d_1(\alpha) \wedge c_2(\alpha) - d_2(\alpha)), (c_1(\alpha) - d_1(\alpha) \vee c_2(\alpha) - d_2(\alpha))]\\
\tilde{c} \cdot \tilde{d} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha(\tilde{c}_\alpha \cdot \tilde{d}_\alpha)\\
&= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha[c_1(\alpha)d_1(\alpha) \wedge c_1(\alpha)d_2(\alpha) \wedge c_2(\alpha)d_1(\alpha) \wedge c_2(\alpha)d_2(\alpha),\\
&\quad c_1(\alpha)d_1(\alpha) \vee c_1(\alpha)d_2(\alpha) \vee c_2(\alpha)d_1(\alpha) \vee c_2(\alpha)d_2(\alpha)];
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{c} \div \tilde{d} &= \bigcup_{\alpha\in[0,1]} \alpha(\tilde{c}_\alpha \div \tilde{d}_\alpha) \\
&= \bigcup_{\alpha\in[0,1]} \alpha[\frac{c_1(\alpha)}{d_1(\alpha)} \wedge \frac{c_1(\alpha)}{d_2(\alpha)} \wedge \frac{c_2(\alpha)}{d_1(\alpha)} \wedge \frac{c_2(\alpha)}{d_2(\alpha)}, \frac{c_1(\alpha)}{d_1(\alpha)} \vee \frac{c_1(\alpha)}{d_2(\alpha)} \vee \frac{c_2(\alpha)}{d_1(\alpha)} \vee \frac{c_2(\alpha)}{d_2(\alpha)}]; \\
\tilde{c} \vee \tilde{d} &= \bigcup_{\alpha\in[0,1]} \alpha(\tilde{c}_\alpha \vee \tilde{d}_\alpha) = \bigcup_{\alpha\in[0,1]} \alpha[c_1(\alpha) \vee d_1(\alpha), c_2(\alpha) \vee d_2(\alpha)]; \\
\tilde{c} \wedge \tilde{d} &= \bigcup_{\alpha\in[0,1]} \alpha(\tilde{c}_\alpha \wedge \tilde{d}_\alpha) = \bigcup_{\alpha\in[0,1]} \alpha[c_1(\alpha) \wedge d_1(\alpha), c_2(\alpha) \wedge d_2(\alpha)].
\end{aligned}
$$

Теорема 2.1.29. *Пусть* $\tilde{c}, \tilde{d} \in \mathcal{F}(\mathcal{R})$. *Тогда* $\tilde{c} * \tilde{d} \in \mathcal{F}(\mathcal{R})$.

Определение 2.1.30. $\tilde{c} \in \mathcal{F}(\mathcal{R}$ *называется нечетким числом, где* $\mathcal{R}$ *представляет собой множество целых действительных чисел, если*

i) $\tilde{c}$ *нормально, т. е. существует* $x_0 \in \mathcal{F}(\mathcal{R}$ *такое, что* $\mu_{\tilde{c}}(x_0) = 1$.

ii) $\forall\alpha \in (0, 1], \tilde{c}_\alpha$ *— отрезок.*

Теорема 2.1.31. *Пусть* $\tilde{c} \in \mathcal{F}(\mathcal{R}$ *— нечеткое число. Тогда*

i) $\tilde{c}$ *нечетко выпукло.*

ii) Если $\mu_{\tilde{c}}(x_0) = 1$, *то* $\mu_{\tilde{c}}(x)$ *не убывает для* $x \leq x_0$ *и* $\mu_{\tilde{c}}(x)$ *не возрастает для* $x \geq x_0$.

Доказательство. Поскольку $\tilde{c}_\alpha(\alpha \in (0, 1])$ — замкнутый интервал, $c_0 = \mathcal{R}$, т. е. $\forall\alpha[0, 1]$, множество $\tilde{c}_\alpha$ — выпуклое. Согласно теореме (2.1.14) можно доказать, что $\tilde{c}$ нечетко выпукло.

Теперь возьмем $x_1 < x_2 \leq x_0$ и пусть $\alpha = \mu_{\tilde{c}}(x_1)$. Так как $\mu_{\tilde{c}}(x_0) = 1$, то $[x_1, x_0] \subset \tilde{c}_\alpha$, следовательно, $x_2 \in \tilde{c}_\alpha$, такое, что $\mu_{\tilde{c}}(x) \geq \alpha$, т. е. $\mu_{\tilde{c}}(x_1) \leq \mu_{\tilde{c}}(x_2)$. Аналогично можно доказать, что $\mu_{\tilde{c}}(x_2) \leq \mu_{\tilde{c}}(x_1)$, если $x_0 \leq x_1 < x_2$. В целом теорема верна.

Теорема 2.1.32. *Пусть* $\tilde{c} \in \mathcal{F}(\mathcal{R})$ *и* $sup\tilde{c}$ *ограничены. Тогда* $\tilde{c}$ *— нечеткое число* $\Leftrightarrow$ *существует интервал* $[c_1, c_2]$, *такой что*

$$\mu_{\tilde{c}}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [c_1, c_2] \neq \phi, \\ L(x), & x < c_1, \\ R(x), & x > c_2. \end{cases} \tag{2.1.3}$$

где $L(x)$ *представляет собой непрерывную справа возрастающую функцию непрерывности справа* $(0 \leq L(x) < 1)$; $R(X)$ *представляет собой непрерывную слева убывающую функцию* $(0 \leq R(X) < 1)$.

Доказательство: Необходимость. Пусть $\tilde{c} \in \mathcal{F}(\mathcal{R})$. Тогда

(1) Поскольку $\tilde{c}$ — замкнутое выпуклое множество, $\tilde{c} = [c_1, c_2]$ и $\mu_{\tilde{c}}(x) = 1$ на $[c_1, c_2]$. Очевидно, что $\mu_{\tilde{c}}(x) < 1$ для $x \neq [c_1, c_2]$.

(2) Так как $\tilde{c} \in \mathcal{F}(\mathcal{R}, \forall\alpha \in [0,1], \tilde{c}_\alpha$ — отрезок, то считаем, что $\tilde{c}_\alpha = [c_{1_\alpha}, c_{2_\alpha}] \subset [0,1]$, тогда

$$\tilde{c} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha \tilde{c}_\alpha = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha [\tilde{c}_{1_\alpha}, \tilde{c}_{2_\alpha}].$$

Что касается $x < c_1$

$$Lx = \mu_{\tilde{c}}(x) = \bigvee_{\alpha \in [0,1]} \alpha \wedge \chi_{[c_{1_\alpha}, c_{2_\alpha}]}(x)$$

где χ представляет характеристическую функцию. Следовательно, $0 \leq L(x) < 1$. Если $x_1 < x_2 \leq c_1$, то $\mu_c(x_1) \leq \mu_{\tilde{c}}(x_2)$, иначе $\mu_c(x_1) > \mu_{\tilde{c}}(x_2)$. Снова $x_1 < x_2 \leq c_1 \Rightarrow x_2 \in (x_1, c_1 + \varepsilon) \Rightarrow \exists\lambda \in [0,1]$, такое, что

$$x_2 = \lambda x_1 + (1 - \lambda)(c_1 + \varepsilon), c_1 + \varepsilon \in (c_1, c_2).$$

Поскольку $\tilde{c}$ представляет собой выпуклое нечеткое множество на $[c_1, c_2]$,

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{c}}(x_2) &= \mu_{\tilde{c}}(\lambda x_1 + (1-\lambda)(c_1 + \varepsilon)) \geq \mu_{\tilde{c}}(x_1) \wedge \mu_{\tilde{c}}(c_1 + \varepsilon), \\ &\geq \mu_{\tilde{c}}(x_1) > \mu_{\tilde{c}}(x_2), \end{aligned}$$

что является противоречием. Следовательно, $L(x)$ — возрастающая функция.
(3) $L(x)$ продолжается справа, иначе существует $x < c_1, x_n \to x$, тогда

$$\lim_{x_n \to x} L(x_n) = \alpha > L(x),$$

Так как $x_n \in \tilde{c}_\alpha$ и c_α замкнуто, то $x \in c_\alpha$ такое, что $\mu_{\tilde{c}}(x_1) = L(x) \geq \alpha$. Следовательно, противоречие.

По той же причине $\mu_{\tilde{c}}(x) = R(x)$ является непрерывно убывающей слева функцией при $x > c_2$, причем $0 \leq R(x) < 1$.

Достаточность. Пусть $\tilde{c}$ удовлетворяет условию теоремы. Затем

(1) $\tilde{c}$, очевидно, нормальный.

(2) Докажите, что $\tilde{c}_\alpha = [c_{1_\alpha}, c_{2_\alpha}], \forall \alpha \in (0,1]$.

$\mu_{\tilde{c}}(x) = L(x)$ для $x < c_2$, поэтому мы выбираем $c_{1_\alpha} = \min\{xL(x) \geq \alpha\}$ и $\mu_{\tilde{c}}(x) = R(x)$ для $x > c_2$, так что мы выбираем $c_{1_\alpha} = \max\{xL(x) \geq \alpha\}$.

Очевидно, $\tilde{c}_\alpha = [c_{1_\alpha}, c_{2_\alpha}]$. Теперь докажем $[c_{1_\alpha}, c_{2_\alpha}] \subset \tilde{c}_\alpha$, и мы докажем только $[c_{1_\alpha}, c_1 \subset \tilde{c}_\alpha$ (поскольку мы можем доказать $(c_2, c_{2_\alpha}] \subset \tilde{c}_\alpha$ по той же причине). Опять же, мы докажем только $c_{1_\alpha} \in \tilde{c}_\alpha$ из-за монотонности $L(x)$.

Выберите $x_n \hookrightarrow c_{1_\alpha}$, затем $L(c_{1_\alpha}) = \lim\limits_{x_n \to c_{1_\alpha}} x_n \geq \alpha$, так что $c_{1_\alpha} \in \tilde{c}_\alpha$.

2.1.8. Тип $(\cdot, c), T, L - R$ и плоские нечеткие числа

Определение 2.1.33. $\tilde{c} = (\alpha, c)$ *определяется как* $(\cdot, c)$ *нечеткое число на пространстве произведения* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_j$; *его функция принадлежности*

$$\mu_{\tilde{c}}(\alpha) = \min_j [\mu_{\tilde{c}_j}(\alpha_j)]$$

$$\mu_{\tilde{c}}(\alpha_j) = \begin{cases} 1 - \frac{|\alpha_j - \alpha_j|}{c_j}, & \alpha_j - c_j \leq \alpha_j \leq \alpha_j + c_j, \\ 0, & \textit{в других случаях}, \end{cases} \tag{2.1.4}$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_j)^T, c = (c_1, c_2, \ldots, c_j)^T$; α *- обозначает центр* $\tilde{c}$, *c-расширение* $\tilde{c}$, *где* $c_j > 0$.

Далее идут частные случаи

Определение 2.1.34. *L называется эталонной функцией нечетких чисел, если L удовлетворяет условия:*

(i) $L(x) = L(-x)$;

(ii) $L(0) = 1$;

(iii) $L(x)$ — невозрастающая и кусочно-непрерывная функция на $[0, +\infty)$.

Определение 2.1.35. *Пусть L, R — эталонные функции нечеткого числа $\tilde{c}$, называемого нечетким числом $L - R$. Если*

$$\mu_{\tilde{c}}(x) = \begin{cases} L(\frac{c-x}{\underline{c}}), & x \le c, \underline{c} > 0 \\ R(\frac{x-c}{\overline{c}}), & x \le c, \overline{c} > 0, \end{cases} \tag{2.1.5}$$

пишем $\tilde{c} = (c, \underline{c}, \overline{c})_{LR}$, где c — среднее значение; $\underline{c}$ и $\overline{c}$ называются левым и правым концами $\tilde{c}$ соответственно. L называется левой ссылкой, а R — правой ссылкой. Если принять $\tilde{c}$ за переменную $\tilde{x}$, то $\tilde{x} = (x, \underline{\xi}, \overline{\xi})_{LR}$ представляет T-нечеткую переменную.

Определение 2.1.36. *Если L и R — функции, удовлетворяющие*

$$T(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & \text{если } -1 \le x \le 1 \\ 0, & \text{в противном случае}, \end{cases} \tag{2.1.6}$$

тогда мы называем $\tilde{c} = (c, \underline{c}, \overline{c})_T$ T-нечеткими числами, $T(\mathcal{R})$ представляет T-нечеткие числовые множества. Если взять $\tilde{c}$ за переменную $\tilde{x}$, то $\tilde{x} = (x, \underline{\xi}, \overline{\xi})_T$ представляет T-нечеткие переменные.

Определение 2.1.37. *Пусть L, R — эталонные функции, а четверка $c = (c^-, c^+, \sigma_c^-, \sigma_c^+)_{LR}$ называется $L - R$ плоским нечетким числом. Тогда*

$$\mu_{\tilde{c}}(x) = \begin{cases} L(\frac{c^- - x}{\sigma_c^-}), & x \le c^-, \sigma_c^- > 0 \\ R(\frac{x - c^+}{\sigma_c^+}), & x \ge c^+, \sigma_c^+ > 0 \\ 1, & \text{в противном случае} \end{cases} \tag{2.1.7}$$

удовлетворяющее, $\exists (c^-, c^+) \in \mathcal{R}, c^- < c^+$ где $\mu_{\tilde{c}}(x_1) = 1$.

В частности, $c = (c^-, c^+, \sigma_c^-, \sigma_c^+)$ называется плоским нечетким числом, где

$$\mu_{\tilde{c}}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{c^- - x}{x}, & \text{если } c^- - \sigma_c^- \le x \le c^- \\ 1, & \text{если } c^- < x < c^+ \\ 1 - \frac{x - c^+}{\sigma_c^+}, & \text{если } c^+ \le x \le c^+ + \sigma_c^+, \\ 0, \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{2.1.8}$$

Если мы возьмем интервал (c^-, c^+) равным (x^-, x^+), то $\tilde{x} = (x^-, x^+, \underline{\xi}, \overline{\xi})_{LR}$ и $\tilde{x} = (x^-, x^+, \underline{\xi}, \overline{\xi})$ представляют нечеткую переменную и плоскую нечеткую $L - R$ соответственно.

Определение 2.1.38. *Предположим, что «$*$» представляет собой произвольную обычную бинарную операцию в $\mathcal{R}$ такую, что $\forall \tilde{c}, \tilde{d} \in \mathcal{F}(\mathcal{R})$, мы определяем*

$$\tilde{c} * \tilde{d} = \int\limits_{x,y \in \mathcal{R}} \frac{\mu_{\tilde{c}}(x) \wedge \mu_{\tilde{d}}(y)}{x * y},$$

то есть $\forall z \in \mathcal{R}$,

$$\mu_{\tilde{c} * \tilde{d}}(z) = \bigvee_{x * y = z} (\mu_{\tilde{c}}(x) \wedge \tilde{d}(y)),$$

где «$*$» представляет арифметические операции $+, -, \cdot, \div$.

Соответственно, мы можем определить операции типа $L - R, T$ и плоские нечеткие числа.

А. Свойства операций для нечеткого числа $L - R$

Пусть $\tilde{c} = (c, \underline{c}, \overline{c})_{LR}, \tilde{d} = (d, \underline{d}, \overline{d})_{LR}$ и $\tilde{p} = (p, \underline{p}, \overline{p})_{LR}$ — нечеткое $L - R$ число. Тогда

1) $\tilde{c} + \tilde{d} = (c + d, \underline{c} + \overline{d}, \overline{c} + \overline{d})_{LR}$

2) $k \cdot \tilde{c} = \begin{cases} (kc, k\underline{c}, k\overline{c})_{LR}, & \text{когда } k \ge 0 \\ (kc, -k\overline{c}, -k\underline{c})_{LR}, & \text{когда } k < 0 \end{cases} (k \in \mathcal{R}).$

Пусть $({}_1\tilde{c} = -c$ для $k = -1$. Тогда $-\tilde{c} = -(c, \underline{c}, \overline{c})_{LR}$.

3) $\tilde{c} - \tilde{p} = (c - p, \underline{c} + \overline{p}, \overline{c} + \underline{p})_{LR}$ при $L = R$.

4) $\tilde{c}\cdot\tilde{d}\approx(cd, c\underline{d}+d\underline{c}, c\overline{d}+d\overline{c})_{LR}$.

5) $\tilde{c}\div\tilde{p}\approx(\frac{c}{p}, \frac{\overline{p}c+\underline{c}p}{p^2}, \frac{\underline{p}c+\overline{c}p}{p^2})_{LR}, p\neq 0$ $\tilde{c}$ и $\tilde{p}$ не делятся на $L\neq R$.

6) $m\tilde{a}x(\tilde{c},\tilde{d})\approx(c\vee d, \underline{c}\wedge\overline{d}, \overline{c}\vee\overline{d})_{LR}$, $m\tilde{i}n(\tilde{c},\tilde{d})\approx(c\wedge d, \underline{c}\vee\overline{d}, \overline{c}\wedge\overline{d})_{LR}$.

7) $\tilde{c}\leq\tilde{d}\Leftrightarrow c\leq d, \underline{c}\geq\overline{d}, \overline{c}\leq\overline{d}; \tilde{c}\subseteq\tilde{d}\Leftrightarrow c+\overline{c}\leq d-\overline{d}$, или $\tilde{c}=\tilde{d}$.

B. Свойства операций для T -нечетких чисел

Если $\tilde{c}_1=(c_1,\underline{c}_1,\overline{c}_1)_T, \tilde{c}_2=(c_2,\underline{c}_2,\overline{c}_2)_T$, то

(1) $\tilde{c}_1+\tilde{c}_2=(c_1+c_2, \underline{c}_1+\underline{c}_2, \overline{c}_1+\overline{c}_2)_T$;

(2) $\tilde{c}_1-\tilde{c}_2=(c_1+c_2, \underline{c}_1+\overline{c}_2, \overline{c}_1+\underline{c}_2)$;

(3) $\lambda\tilde{c}=\lambda(c,\underline{c},\overline{c})_T=\begin{cases}(\lambda c, \lambda\underline{c}, \lambda\overline{c}), & \forall\lambda>0\\ (\lambda c, -\lambda\overline{c}, -\lambda\underline{c})_T, & \forall\lambda<0.\end{cases}$

(4) $\tilde{c}^{-1}=(c,\underline{c},\overline{c})_T^{-1}\approx(\frac{1}{c}, \overline{c}c^{-2}, \underline{c}c^{-2})_T$.

C. Свойства операции для плоских нечетких чисел

Пусть $\tilde{c}=(c^-,c^+,\sigma_c^-,\sigma_c^+)$ и $d=(d^-,d^+,\sigma_d^-,\sigma_d^+)$ — плоские нечеткие числа. Тогда

1) $\tilde{c}+\tilde{d}=(c^-+d^-, c^++d^+, \sigma_c^-+\sigma_d^-, \sigma_c^++\sigma_d^+)$.

2) $k\cdot\tilde{c}=\begin{cases}(kc^-, kc^+, k\sigma_c^-, k\sigma_c^+), & \text{для } k>0,\\ (kc^+, kc^-, k\sigma_c^-, -k\sigma_c^+), & \text{для } k\leq 0.\end{cases}$

По определению типов $L-R, T$ или плоских нечетких чисел легко доказать их операционные свойства.

Мы можем вывести операционные свойства $(\cdot, c)$ нечетких чисел, поскольку они распространяются на плоские нечеткие числа.

Определение 2.1.39. *Пусть $x_0\in(a,b)$ и h такой, что $x_0+h\in(a,b)$, тогда уровнеподобная gH-производная (LgH-для краткости) функции $f:(a,.b)\to\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ в x_0 определяется как множество интервалозначных gH-производных*

$$f'_{LgH}(x_0)_\alpha=\lim_{h\to 0}\frac{1}{n}[f(x_0+h)]_\alpha\ominus_{gH}[f(x_0)]_\alpha. \tag{2.1.9}$$

Если $f'_{LgH}(x_0)_\alpha$ является компактным интервалом для всех $\alpha\in[0,1]$, то будем говорить что f является уровнеподобной обобщенной производной Хукухара (LgH-дифференцируемой для краткости) в x_0 и семейство интервалов $\{f'_{LgH}(x_0)_\alpha|\alpha\in[0,1]\}$ является gH-производной f в x_0, обозначаемой как $f'_{LgH}(x_0)$.

Яснее, LgH-дифференцируемость, и далее уровнеподобная непрерывность является необходимым условием для LgH-дифференцируемости, но не достаточным.

Следующий результат дает аналогичное выражените для нечеткой gH-производной в терминах производных в концевых точках множествах уровня. Этот результат является характеризацией gH-дифференцируемости важного класса нечетких функций.

Теорема 2.1.40. *Пусть $f : (a, .b) \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ такая, что*

$$[f(x)]_{\alpha} = [f_{\alpha}^{-}(x), f_{\alpha}^{+}(x)].$$

Предположим, что функции $f_{\alpha}^{-}(x)$ и $f_{\alpha}^{+}(x)]$ действительнозначные функции, дифференцируемые по x равномерно по $\alpha \in [0,1]$. Тогда функция $f(x)$, gH-дифференцируема в фиксированной точке $x \in (a,b)$, если и только если один из следующих случаев имеет место

а) $(f_{\alpha}^{-})'$ возрастающая, $(f_{\alpha}^{+})'$ убывающая как функции α и $(f_{1}^{-})'(x) \leq (f_{1}^{+})'(x)$, или

б) $(f_{\alpha}^{-})'$ убывающая, $(f_{\alpha}^{+})'$ возрастающая как функции α и $(f_{1}^{+})'(x) \leq (f_{1}^{-})'(x)$.

Кроме того, для любого $\alpha \in [0,1]$ имеем

$$[f'_{gH}(x)]_{\alpha} = [min\{(f_{\alpha}^{-})'(x), (f_{\alpha}^{+})'(x)\}, max\{(f_{\alpha}^{-})'(x), (f_{\alpha}^{+})'(x)\}].$$

Доказательство теоремы включает подробный обзор возможных случаев и носит элементарный характер. Мы его опускаем.

В соответствии с теоремой 2.1.40 для определения gH-дифференцируемости, когда обе функции $f_{\alpha}^{-}(x)$ и $f_{\alpha}^{+}(x)$ дифференцируемые, следует различать два случая, соответствующие (i) и (ii) в 2.1.34.

Определение 2.1.41. *Пусть $f : [a,b] \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ и $x_0 \in [a,b]$ с дифференцируемыми функциями $f_{\alpha}^{-}(x)$ и $f_{\alpha}^{+}(x)$ в x_0. Будем говорить, что*

1) f является (i)-дифференцируемой в x_0 если

$$(i)[f'_{gH}(x)]_\alpha = [(f^-_\alpha)'(x_0), (f^+_\alpha)'(x_0)], \alpha \in [0,1].$$

2) f является (ii)-дифференцируемой в x_0 если

$$(ii)[f'_{gH}(x)]_\alpha = [(f^+_\alpha)'(x_0), (f^-_\alpha)'(x_0)], \alpha \in [0,1].$$

Возможно, что $f : [a,b] \to \mathbb{R}_\mathcal{F}$ является gH-дифференцируемой в x_0 но не является (i)-gH-дифференцируемой в x_0 или (ii)-gH-дифференцируемой в x_0, как иллюстрирует следующий пример.

Пример 2.1.42. *Рассмотрим $f : (-1,1) \to \mathbb{R}_\mathcal{F}$ определенной через α-срезок*

$$[f(x)]_\alpha = [-\frac{1}{(1+|x|)(1+\alpha)}, \frac{1}{(1+|x|)(1+\alpha)}],$$

то есть

$$f^-_\alpha(x) = \frac{1}{(1+|x|)(1+\alpha)}, \text{ и } f^+_\alpha(x) = \frac{1}{(1+|x|)(1+\alpha)}.$$

Множествами уровня являются линии в рис.1.

Для всех $x \neq$ и всех $\alpha \in [0,1]$, обе функции $f^-_\alpha(x)$ и $f^+_\alpha(x)$ дифференцируемы и удовлетворяют условиям теоремы 2.1.40; в начале $x = 0$ функции $f^-_\alpha(x)$ и $f^+_\alpha(x)$ не дифференцируемые; Эти функции, соответственно, непрерывные слева и справа, но левая производная и правая производная различные, фактически

$$f^-_\alpha(x) = \begin{cases} -\frac{1}{(1-x)^2(1+\alpha)}, & x < 0 \\ \text{не существует}, & x = 0 \\ \frac{1}{(1+x)^2(1+\alpha)}, & x > 0, \end{cases}$$

и

$$f_\alpha^+(x) = \begin{cases} -\frac{1}{(1-x)^2(1+\alpha)}, & x<0 \\ \text{не существует}, & x=0 \\ \frac{1}{(1+x)^2(1+\alpha)}, & x>0 \end{cases}$$

Теперь, для gH-разности и $h \neq 0$ получим

$$\frac{|f(h)\ominus_{gH} f(0)|}{h} = \frac{1}{h}[-\frac{1}{(1+|h|)(1+\alpha)}, \frac{1}{(1+|h|)(1+\alpha)}]\ominus_{gH}[-\frac{1}{1+\alpha}, \frac{1}{1+\alpha}] =$$

$$= \frac{1}{h(1+\alpha)}[min\{\frac{|h|}{(1+|h|)}, \frac{-|h|}{(1+|h|)}\}, max\{idem\}] =$$

$$= frac1h(1+\alpha)[\frac{-|h|}{(1+|h|)}, \frac{|h|}{(1+|h|)}] = frac1(1+\alpha)[\frac{-1}{(1+|h|)}, \frac{1}{(1+|h|)}].$$

Отсюда следует существование предела

$$f'_{gH}(0) = \lim \frac{[f(h)\ominus_{gH} f(0)]_\alpha}{h} = [\frac{-1}{(1+\alpha)}, \frac{1}{(1+\alpha)}]$$

и f является gH-дифференцируемой при $x=0$ но $f_\alpha^-(x)$ и $f_\alpha^+(x)$ не дифференцируемые при $x=0$ для всех α; заметим, что f является (i)-gH-дифференцируемой при $x<0$ (ii)-gH-дифференцируемой при $x>0$.

2.2. Нечеткие случайные величины

Нечеткие случайные величины (или нечеткие переменные) обобщают случайные величины и случайные векторы; они также обобщают случайные множества [53]. Математическое ожидание нечетких величин является естественным обобщением интеграла многозначных функций [55]. Мы дадим определение математического ожидания следуя работе [56]. Сначала в пункте 2.2.1 коротко приводим некоторые результаты касающиеся интегрального исчисления для множественных функций. Далее в пункте 2.2.2 вводим понятие нечеткой случайной величины и устанавливаем, что математическое ожидание является нечетким выпуклым множеством. Наконец в пункте 2.2.3 приводятся свойства математического ожидания.

2.2.1. Интегральное исчисление для множествозначных функций

Концепция интеграла множественнозначной функции впервые встречается в работе H. Kudo [99] в связи с теорией эксперимента в статистике. Позже, используя работы [66] и [68] данная концепция интеграла получила развитие в работе [73], в которой доказаны некоторые важные свойства сходимости.

Приложения этих интегралов можно найти в экономике [76], теории управления [99], и стохастического анализа [100].

В работе M.L. Puri, D. Ralescu [120] - [125] приводятся два различных типа сходимости для последовательности множеств (сходимость в смысле Хаусдорфа и Куратовского).

Пусть A и B две непустые ограниченные множества в $\mathbb{R}^n$. Расстояние между A и B определяется через следующую метрику Хаусдорфа

$$d_H(A, B) = max\big[\sup_{a\in A}\inf_{b\in B}\|a-b\|, \sup_{b\in B}\inf_{a\in A}\|a-b\|\big] \tag{2.2.1}$$

где через $\|\cdot\|$ обозначена норма в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$.

Обозначим полуметрику Хаусдорфа через

$$\rho(A, B) = \sup_{a\in A}\inf_{b\in B}\|a-b\|.$$

Ясно, что

$$\rho(A,B) = 0 \Leftrightarrow A \subset \bar{B} \tag{2.2.2}$$

и

$$\rho(A,C) = \rho(A,B) + \rho(B,C), \tag{2.2.3}$$

где A, B, C непустые ограниченные множества в $\mathbb{R}^n$, $\bar{B}$ - замыкание множества B.

Кроме того,

$$d_H(A,B) = max[\rho(A,B), \rho(B,A)]$$

и

$$d_H(A,B) = 0 \Leftrightarrow \bar{A} = \bar{B}. \tag{2.2.4}$$

Если через $Q(\mathbb{R}^n)$ обозначим множество всех непустых подмножеств $\mathbb{R}^n$, то ясно, что $(Q(\mathbb{R}^n), dh)$ становится метрическим пространством. Имеет место следующий результат:

Теорема 2.2.1. *Метрическое пространство $(Q(\mathbb{R}^n), dh)$ полное и сепарабельное.*

Доказательство теоремы приведено в [121].

Другой тип сходимости для последовательности множеств дан Куратовским [112].

Будем говорить, что последовательность множеств $\{C_K\}, C_K\mathbb{R}^n$ сходится к множеству $C \subset \mathbb{R}^n$ обозначаемому как $C = \lim\limits_k C_K$, если

$$C = \liminf C_K = \limsup C_K, \tag{2.2.5}$$

где

$$\liminf C_K = \{x \in \mathbb{R}_n, x = \lim_{k\to\infty} x_K, x_K \in C_K\}, \tag{2.2.6}$$

$$\limsup C_K = \prod_{K=1}^{\infty} \big(\bigcup_{m=k}^{\infty} C_m \big). \tag{2.2.7}$$

Отметим, что для последовательности замкнутых множеств, из сходимости по метрике Хаусдорфа, следует сходимость в смысле Куратовского на $Q(\mathbb{R}^n)$ оба типа сходимости эквивалентные. Отсюда следует, что предельное множество непустое и таким образом, последовательность ограниченная.

Теперь, предположим, что $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ вероятностное пространство в котором, вероятностная мера P считается неанатомической мерой.

Множественнозначная функция, это функция $F : \Omega \to Q(\mathbb{R}^n)$ такая, что $F(\omega \neq \emptyset)$ для каждого $\omega \in \Omega$. Через $L^1(P)$ (или $L^1(P, \mathbb{R}^n)$) обозначим пространство P - интегрируемых функций $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$. Обозначим через $S(F)$ множество всех $L^1(P)$ селекторов функции F так, что

$$S(F) = \{f \in L^1(P) : f(\omega) \in F(\omega) \text{ почти везде}\}. \tag{2.2.8}$$

Интеграл Аумана от F определяется через равенства

$$(A) \int F \Big\{ \int_{\Omega} f dp : f \in S(F) \Big\}. \tag{2.2.9}$$

Следующий результат принадлежит R. J. Aumann [34, 35].

Теорема 2.2.2. *Если $F : \Omega \to Q(\mathbb{R}^n)$ множественнозначная функция, то $(A) \int F$ является выпуклым подмножеством $\mathbb{R}^n$.*

Следует заметить, что, вообще говоря, $(A) \int F$ может быть пустым множеством.

Функция $F : \Omega \to Q(\mathbb{R}^n)$ называется измеримой, если

$$graph\{(\omega, x) : x \in F(\omega)\}$$

принадлежит $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ (где через $\mathcal{B}$ обозначены борелевские подмножества $\mathbb{R}^n$). Функция $F : \Omega \to Q(\mathbb{R}^n)$ называется интегрально ограниченной, если существует функция $h : \Omega \to \mathbb{R}, h \in L^1(P, \mathbb{R})$ такая, что $\|x\| \leq h(\omega)$ для всех x, ω $x \in F(\omega)$.

Теорема 2.2.3. *[119]. Если* $F : \Omega \to Q(\mathbb{R}^n)$ *измерима и интегрально ограничена, то*

$$(A)\int F \neq \emptyset.$$

Отметим еще одно структурное свойство $(A)\int F$.

Теорема 2.2.4. *[119]. Если* $F : \Omega \to Q(\mathbb{R}^n), F(\omega)$ *замкнуто для каждого* $\omega \in \Omega$, *и если* F *интегрально ограничена, то*

$$(A)\int F$$

является компактным подмножеством $\mathbb{R}^n$.

Следующий результат является обобщением основной теоремы Лебега о сходимости.

Теорема 2.2.5. *[119]. Если* $F_K : \Omega \to Q(\mathbb{R}^n)$ *измеримая и если существует* $h \in L^1(P, \mathbb{R})$ *такая, что*

$$\sup_{k \geq 1} \|f_K(\omega)\| \leq h(\omega)$$

для каждого $f_K \in \int(F_K)$, *и если* $F_K(\omega) \to F(\omega)$ *(в смысле Куратовского), то*

$$A\int F_K \to A\int F.$$

2.2.2. Нечеткие переменные и их математические ожидания

Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ вероятностное пространство, где P вероятностная мера. Пусть через $\mathcal{F}_0(\mathbb{R}^n)$ обозначено множество нечетких подмножеств $u : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$ со следующими свойствами:

$$\{x \in \mathbb{R}^n : u(x) \geq x\} \text{ компактно для каждого} \tag{2.2.10}$$

$$\{x \in \mathbb{R}^n : u(x) \geq x\} \neq \emptyset. \tag{2.2.11}$$

Определение 2.2.6. *Нечеткая случайная переменная (или нечеткая переменная) является функция* $X:\Omega\to\mathcal{F}_0(\mathbb{R}^n)$ *такая, что*

$$\{(\omega,x):x\in X_\alpha(\omega)\}\in\mathcal{A}\times\mathcal{B} \tag{2.2.12}$$

для каждого $\alpha\in[0,1]$, *где* $X_\alpha(\omega):\Omega\to\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ *определен равенством*

$$X_\alpha(\omega)=\{x\in\mathbb{R}^n:X(\omega)(x)\geq\alpha\}. \tag{2.2.13}$$

Нечеткая переменная X называется интегрально ограниченной если X_α интегрально ограничена для всех $\alpha\in(0,1]$. Иными словами, если для любого $\alpha\in(0,1]$ существует $h_\alpha\in L^1(\Omega)$ такая, что $\|x\|\leq h_\alpha(\omega)$ для каждых $x,\omega\subseteqq x\in X_\alpha(\omega)$.

Здесь через $L^1(\Omega)$ обозначено пространство всех функций $h:\Omega\to\mathbb{R}$ интегрируемых относительно вероятностной меры P.

Мотивируемый примерами подробно приведенными во введении, определим математическое ожидание $E(X)$ нечеткой переменной $X:\Omega\to\mathcal{F}_0(\mathbb{R}^n)$ таким образом, что следующие условия выполняются:

$$E(X)\in\mathcal{F}_0(\mathbb{R}^n), \tag{2.2.14}$$

$$\{x\in\mathbb{R}^n:(E(X)(x)\geq\alpha)\}=\int X_\alpha \text{ для каждого } \alpha\in[0,1]. \tag{2.2.15}$$

Следующая теорема демонстрирует, что при выполнении ряда условий существует единственное нечеткое множество удовлетворяющее этим требованиям.

Сначала приводим одно вспомогательное утверждение.

Лемма 2.2.7. *Пусть* M *некоторое множество и пусть* $\{M_\alpha:\alpha\in[0,1]\}$ *семейство подмножеств* M *такое, что*

(1) $M_0=M$

(2) Из $\alpha\leq\beta$ *следует* $M_\beta\subseteq M_\alpha$,

(3) Из $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq ..., \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n \to \alpha$ *следует* $M_\alpha = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} M_{\alpha_n}$.

Тогда функция $\varphi : M \to [0,1]$ *определенная равенством*

$$\varphi(x) = sup\{\alpha \in [0,1] : x \in M_\alpha\}$$

обладает таким свойством, что $\{x \in M : \varphi(x \geq \alpha)\} = M_\alpha$ *для каждого* $\alpha \in [0,1]$.

Доказательство леммы можно найти в [119].

Теорема 2.2.8. *Если* $X : \Omega \to \mathcal{F}_0(\mathbb{R}^n)$ *интегрально ограниченная нечеткая переменная, то существует единственное нечеткое множество* $v \in \mathcal{F}_0(\mathbb{R}^n)$ *такое, что*

$$\{x \in \mathbb{R}^n : v(x) \geq \alpha\} = \int X_\alpha \text{ для любого } \alpha \in [0,1]. \tag{2.2.16}$$

Доказательство. Пусть $M_\alpha = \int X_\alpha, \alpha \in [0,1]$. Поскольку X_α измеримая и интегрально ограниченная то из теоремы 2.2.3 следует, что $M_\alpha \neq \emptyset$. Далее поскольку $X_\alpha(\omega) = \{x : X(\omega)x \geq \alpha\}$ замкнутые подмножества $\mathbb{R}^n$ для всех $\omega \in \Omega$, то из теоремы 2.2.4 следует, что $M_\alpha = \int X_\alpha$ компактное.

Рассмотрим теперь семейство $\{M_\alpha : \alpha \in [0,1]\}$ всех подмножеств $\mathbb{R}^n$. Заметим, что

$$X_0(\omega) = \{x : X(\omega)(x) \geq 0\} = \mathbb{R}^n \text{ для всех } \omega \in \Omega.$$

Таким образом, $\int X_0 = \mathbb{R}^n$. Если $\alpha \leq \beta$, то ясно, что

$$X_\alpha(\omega) \supseteq X_\beta(\omega) \text{ для } \omega \in \Omega.$$

И, тогда, $M_\alpha \supseteq M_\beta$.

Применим теперь лемму 2.2.7. Тогда увидим, что из $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq ...$ следует, что $M_\alpha = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} M_{\alpha_n}$.

Очевидно, что

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} X_{\alpha_n}(\omega) = X_0(\omega) \text{ для всех } \omega \in \Omega.$$

Поскольку $X_{\alpha_0}(\omega)$ компактное, то для $n \in \mathbb{N}$ получим

$$X_{\alpha_n}(\omega) \to X_{\alpha_0}(\omega), \tag{2.2.17}$$

где сходимость понимается в смысле метрики Хаусдорфа.

Теперь $X_{\alpha_1}(\omega) \geq X_{\alpha_2}(\omega) \geq \ldots$ и поскольку X_{α_1} является интегрально ограниченной, то найдется $h \in L^1(\Omega)$ такой, что $\|f(\omega)\| \leq h(\omega)$ для каждого $f \in S(X_{\alpha_1})$. Отсюда следует, что $\|g(\omega)\| \leq h(\omega)$ для каждого $f \in S(X_{\alpha_n}), n \in \mathbb{N}$. Итак $\{X_{\alpha_n}, n \geq 1\}$ ограниченно той же интегрируемой функцией, и поскольку X_{α_n} также измеримое, то из теоремы 2.2.5 следует, что

$$\int X_{\alpha_n} \to \int X_{\alpha_0}$$

в метрике Хаусдорфа. Заметим, что $\{X_{\alpha_n}, n \geq 1\}$ является убывающей последовательностью компактных множеств и поэтому оно должно сходится к их пересечению. Итак получим

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \int X_{\alpha_n} = \int X_{\alpha_0}. \tag{2.2.18}$$

Из леммы 2.2.7 следует, что нечеткое множество определенное как

$$v(x) = sup\{\alpha \in [0,1], x \in M_\alpha\}$$

удовлетворяет соотношение

$$\{x \in \mathbb{R} : v(x) \geq \alpha\} = M_\alpha = X_\alpha, \alpha \in [0,1]. \tag{2.2.19}$$

Единственность v очевидное, поскольку если два нечетких множества u и v удовлетворяют (2.2.19), то $\{x, v(x) \geq \alpha\} = \{x : \omega(x) \geq \alpha\}$ для каждого α и тогда $u = v$.

Наконец, $v \in \mathcal{F}_0(\mathbb{R}^n)$ поскольку $\{x : v(x) \geq \alpha\} = M_\alpha$ является компактным множеством и

$$\{x : v(x) = 1\} = M_1 = \int X_1 \neq \emptyset.$$

Доказательство завершено.

Мы используем доказанную выше теорему для определения математического ожидания нечеткой случайной переменной $X : \Omega \to \mathcal{F}_0(\mathbb{R}^n)$, которая является интегрально ограниченной.

Определение 2.2.9. *Математическое ожидание X обозначенное через $E(X)$ является нечетким множеством $v \in \mathcal{F}_0(\mathbb{R}^n)$ такое, что $\{x \in \mathbb{R}^n : v(x) \geq \alpha\} = \int X_\alpha$ для каждого $\alpha \in [0, 1]$.*

Заметим, что существование и единственность $v(x)$ установлено в теореме 2.2.8.

Итак

$$(E(X))(x) = \sup\{\alpha \in [0, 1] : x \in \int X_\alpha\} \tag{2.2.20}$$

и его множество уровня задается равенством

$$\{x : (E(X))(x) \geq \alpha\} = \int X_\alpha, \alpha \in [0, 1]. \tag{2.2.21}$$

2.2.3. Свойства математического ожидания

Нашей целью является распространение основной теоремы Лебега о сходимости на случай нечетких случайных величин. Для этого сначала определим метрику в $\mathcal{F}_0(\mathbb{R}^n)$, которая обобщает метрику Хаусдорфа

Пусть $u, v \in \mathcal{F}_0(\mathbb{R}^n)$ и введем число

$$d(u, v) = \sup_{\alpha > 0} d_H(L_\alpha(u), L_\alpha(v)), \tag{2.2.22}$$

где d_H-метрика Хаусдорфа, а

$$L_\alpha(u) = \{x : u(x) \geq \alpha\}, L_\alpha(v) = \{x : v(x) \geq \alpha\}.$$

Лемма 2.2.10. $(\mathcal{F}_0(\mathbb{R}^n), d)$ *является метрическим пространством.*

Доказательство. Проверим аксиомы метрики.

(1) Из $d(u, v) = 0$ следует, что $d_H(L_\alpha(u), L_\alpha(v)) = 0$ для каждого $\alpha > 0$, и, поэтому $L_\alpha(u) = L_\alpha(v), \alpha > 0$, и, отсюда следует $u = v$. Напомним, что $L_\alpha(u)$ и $L_\alpha(v)$ компактные множества.

(2) Очевидно, что $d(u, v) = d(v, u)$.

(3) Неравенство треугольника $d(u, v) \leq d(u, \omega) + d(\omega, v)$ вытекает из соответствующего неравенства для d_H.

Заметим, что если A и B компактные подмножества $\mathbb{R}^n$, и x_A и x_B и x соответстующие характеристические функции, то $d(x_A, x_B) = d_H(A, B)$.

Следующий результат обобщает теорему 2.2.1.

Теорема 2.2.11. *Метрическое пространство* $(\mathcal{F}_0(\mathbb{R}^n), d)$ *полное пространство.*

Доказательство. Пусть $\{u_n, n \geq 1\}$ последовательность Коши в $\mathcal{F}_0(\mathbb{R}^n)$. Рассмотрим фиксированное $\alpha > 0$. Тогда $\{L_\alpha(u_n), n \geq 1\}$ является последовательностью Коши в $(Q(\mathbb{R}^n)d_H)$, где через $Q(\mathbb{R}^n)$ обозначены все непустые компактные подпножества $\mathbb{R}^n$.

Поскольку $(Q(\mathbb{R}^n)d_H)$ полное в силу теоремы 2.2.1, то получим, что

$$L_\alpha(u_n) \xrightarrow{dh} M_\alpha \in Q(\mathbb{R}^n).$$

В самом деле, из определения 2.2.9 метрики d из непрерывности d_H легко заметить, что $L_\alpha(u_n) \xrightarrow{dh} M_\alpha$ равномерно непрерывно на $[0, 1]$.

Рассмотрим теперь семейство $\{M_\alpha : \alpha \in [0, 1]\}$ где $M_0 = \mathbb{R}^n$. Взяв $\alpha \leq \beta$ и обозначив через M полуметрику Хаусдорфа в $Q(\mathbb{R}^n)$, получим

$$\rho(M_\beta, M_\alpha) \leq \rho(M_\beta, L_\beta(u_n)) + \rho(L_\beta(u_n), L_\alpha(u_n)) + \rho(L_\alpha(u_n), M_\alpha).$$

Поскольку $L_\beta(u_n) \subseteq L_\alpha(u_n)$, то отсюда следует, что $\rho(L_\beta(u_n), L_\alpha(u_n)) = 0$. Тогда

$$\rho(M_\beta, M_\alpha) \leq \rho(M_\beta, L_\beta(u_n)) + \rho(L_\beta(u_n), M_\alpha) < \varepsilon,$$

если N достаточно больше. Следовательно, $\rho(M_\beta, M_\alpha) = 0$ и поскольку M_β, M_α замкнутые, то имеем $M_\beta \subseteq M_\alpha$.

Теперь возьмем $\alpha > 0$ такое, что $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$. Покажем, что

$$M_\alpha = \bigcap_{n=1}^{\infty} M_{\alpha_n}.$$

Очевидно, что

$$M_\alpha \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} M_{\alpha_n}. \tag{2.2.23}$$

Вновь воспользуемся полуметрикой Хаусдорфа и получим

$$\rho\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} M_{\alpha_n}, M_\alpha\right) \leq \rho\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} M_{\alpha_n}, \bigcap_{n=1}^{\infty} (L_{\alpha_n}(u_j))\right) + \rho\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} L_{\alpha_n}(u_j), M_\alpha\right)$$

для фиксированного j.

Но

$$\rho\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} (L_{\alpha_n}(u_j)(L_\alpha(u_j)\right) = 0.$$

Соответственно, для каждого $\varepsilon > 0$ существует j такой, что

$$\rho\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} M_{\alpha_n}, M_\alpha\right) \leq \varepsilon + \rho\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} M_{\alpha_n}, \bigcap_{n=1}^{\infty} L_{\alpha_n}(u_j)\right)$$

для $j \geq j_\varepsilon$, поскольку $L_\alpha(u_j) \to M_\alpha$.

Теперь

$$\rho\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} M_{\alpha_n}, \bigcap_{n=1}^{\infty}(L_{\alpha_n}(u_j))\right) \le \rho\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} M_{\alpha_n}, M_{\alpha_p}\right) + \rho(M_{\alpha_p}, L_{\alpha_p}(u_j)) +$$

$$+\rho\left(L_{\alpha_p}(u_j), \bigcap_{n=1}^{\infty}(L_{\alpha_n}(u_j))\right)$$

для любого $p \ge 1$.

Поскольку $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} M_{\alpha_n} \subseteq M_p$ то получим

$$\rho\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} M_{\alpha_n}, \bigcap_{n=1}^{\infty}(L_{\alpha_n}(u_j))\right) \le \rho(M_{\alpha_n}, L_{\alpha_p}(u_j)) + \rho\left(L_{\alpha_p}(u_j), \bigcap_{n=1}^{\infty}(L_{\alpha_n}(u_j))\right)$$

Теперь $\rho(M_{\alpha_n}, L_{\alpha_p}(u_j)) < \varepsilon$ для $i \ge j_0$. В силу равномерной сходимости $L_\alpha(u_j) \to M_\alpha, j_0$ не зависит от p. Поскольку $\{L_{\alpha_p}, p \ge 1\}$ убывает к $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(L_{\alpha_n}(u_j))$, то $\rho\left(L_{\alpha_{p_0}}(u_j), \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(L_{\alpha_n}(u_j))\right) < \varepsilon$ для некоторого p_0 зависящего от j. Таким образом, $\rho\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} M_{\alpha_n}, \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(L_{\alpha_n}(u_j))\right) < 2\varepsilon$, если j большое.

Наконец, выбирая j достаточно большим, получим

$$\rho\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} M_{\alpha_n}, M_{\alpha_n}\right) \le 3\varepsilon, \text{ т.е. } \bigcap_{n=1}^{\infty} M_{\alpha_n} \subseteq M_\alpha. \tag{2.2.24}$$

Из уравнения (2.2.22) и (2.2.23) следует, что

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} M_{\alpha_n} = M_\alpha.$$

Тогда с применением леммы 2.2.10 и с учетом существования $u \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ такое, что $L_\alpha(u) = M_\alpha$ для каждого $\alpha \in [0,1]$ получим, что

$$L_\alpha(u_n) \xrightarrow{dH} L(u).$$

Остается показать, что $u_n \to u$ в $(\mathcal{F}_0(\mathbb{R}^n), d)$.

Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда, поскольку $\{u_n\}$ последовательность Коши, то существует n_ε такой, что для $n, m > n_\varepsilon$ выполняется оценка $d(u_n, u_m) < \varepsilon$.

Пусть $n (> n_\varepsilon)$ фиксированное. Тогда

$$\begin{aligned} d_H(L_\alpha(u_n), L_\alpha(u)) &= \lim_{m\to\infty} d_H(L_\alpha(u_n), L_\alpha(u)) \leq \\ &\leq \lim_{m\to\infty} \sup_{\alpha>0} d_H(L_\alpha(u_n), L_\alpha(u)) = \\ &= \lim_{m\to\infty} d(u_n, u_m) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Итак $\sup\limits_{\alpha>0} d_H(L_\alpha(u_n), L_\alpha(u)) \leq \varepsilon$, т.е. $d(u_n, u) \leq \varepsilon$ для $n > n_0$.

Отсюда следует, что $u_n \to u$ в метрике d.

Теорема доказана.

Теорему 2.2.2 легко распространить на случай нечетких величин с помощью концепции нечеткой выпуклости.

Нечеткое множество $u : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ называется нечетким выпуклым множеством, если

$$u(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \min\{u(x), u(y)\} \text{ для каждого } x, y \in \mathbb{R}^n, \lambda \in [0,1]. \quad (2.2.25)$$

Теорема 2.2.12. *Если вероятностная мера P неатомическая, и если $X : \Omega \to \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ ограниченно интегрируемая нечеткая величина, то $E(X)$ является нечетким выпуклым множеством.*

Доказательства. Пусть $v = E(X)$. Поскольку $\{v \geq \alpha\} = \int X_\alpha$, то из теоремы 2.2.2 следует, что $\{v \geq \alpha\}$ выпуклое множество $\alpha \in [0,1]$. Теперь доказательство следует из того факта, что (2.2.25) эквивалентно выпуклости $\{v \geq \alpha\}$ для каждого $\alpha \in [0,1]$.

Следующая теорема результат расширения теоремы 2.2.5 сходимость в смысле Лебега на случай выпуклых множеств.

Теорема 2.2.13. *Пусть $\{X_K, k \geq 1\}$ и X интегрально ограниченные нечеткие величины, такие что $X_K(\omega) \xrightarrow{d} X(\omega)$ для почти всех $\omega \in \Omega$.*

Предположим, что существует функция $h \in L^1(\Omega)$ *иакая, что*

$$\sup_{x \in X_{k,\alpha}(\omega)} \|x\| \leq h(\omega)$$

для всех $k \geq 1$ *и* $\alpha > 0$,

$$X_{\alpha,k(\omega)} = L_\alpha(X_k(\omega)) = \{X_k(\omega) \geq \alpha\}.$$

Тогда

$$E(X_k) \xrightarrow{d} E(X).$$

Доказательство. Сначала предположим, что X_k, X такие, что $L_\alpha(X_k(\omega))$ и $L_\alpha(X(\omega))$ выпуклые подмножества $\mathbb{R}^n$ для каждого $\alpha \geq 0$.

Тогда для каждого $\alpha > 0$ из

$$\begin{aligned} d_H(L_\alpha(E(X_k)), L_\alpha(E(X))) = d_H(\int L_\alpha(X_k), \int L_\alpha(X)) \leq \\ \leq \int d_H(L_\alpha(X_k), L_\alpha(X)) \leq \int d(X_k(\omega), X(\omega) dP(\omega) \end{aligned} \tag{2.2.26}$$

следует, что

$$d(E(X_k), E(X)) \leq \int d(X_k(\omega), X(\omega)) dP(\omega).$$

Теперь

$$d(X_k(\omega), X(\omega)) \to 0 \text{ почти везде}$$

и, кроме того

$$d(X_k(\omega), X_k(\omega)) \leq d(X_k(\omega), 0) + d(0, X(\omega)),$$

через 0 обозначено множество $\{0\}$.

Отсюда следует, что

$$d(X_k(\omega),0)=\sup_{\alpha>0}d_H(L_\alpha(X_k(\omega),0))=$$
$$=\sup_{\alpha>0}\sup_{x\in X_{k,\alpha}(\omega)}\|x\|\le h(\omega),h(\omega)\in L^1(\Omega).$$

Используя теперь классическую теорему Лебега о сходимости получим $d(E(X_k),E(X))\to 0$.

Предположим теперь, что X_k, X так как в условиях теоремы. Для любого подмножества A из $\mathbb{R}^n$ через $c\circ A$ обозначим его выпуклое. Для случайного множества $F:\Omega\to\mathcal{P}\mathbb{R}^n$ введем обозначение $(C\circ F)(\omega)=C\circ(F(\omega)),\omega\in\Omega$. Заметим, что поскольку P неатомическая мера, то

$$\int F=\int C\circ F,$$

если интервал существует.

Кроме того, если F и G случайные множества (нет необходимости для выпуклости) то имеем

$$d_H(\int F,\int G)=d_H(\int C\circ F,\int c\circ G)\le$$
$$\le d_H(C\circ F,C\circ G)\le d_H(F,G).$$

Теперь из (2.2.26) следует доказательство теоремы.

2.3. Дифференциалы нечетких функций

В данном параграфе рассматривается концепция дифференциала нечетких функций являющейся обобщением дифференциала множествозначных функций введенного впервые Хукухарой, M. Hukuhara [79]. Понятие нечеткой случайной величины изученной нами в §2.1 является обобщением случайных множеств и учитывает неопределенности как нечеткого так и случайного характера.

В определении дифференциала множествозначных функций [92] ключевым элементом является теорема вложения H. Radstrom [126]. В этой теореме установлено, что набор непустых замкнутых, ограниченных и выпуклых подмножеств банахова пространства может быть вложено в нормированном пространстве. Именно этот результат позволяет определить дифференциал множествозначных функций как дифференциал функций действующих в нормированном пространстве. Чтобы распространить дифференцируемость на нечеткие функции, является естественным, во-первых, обобщить теорему Радстрёма с помощью введения соответствующего пространства нечетких подмножеств банахова пространства. Такое расширение изучается в пункте 2.3.1 через использование удобного обобщения метрики Хаусдорфа. Как приложение этой теоремы вложения вводится понятие дифференциала нечетких функций в пункте 2.3.2. Наконец, в пункте 2.3.3 изучаются некоторые его свойства.

2.3.1. Об одной теореме вложения

Пусть X рефлексивное банахово пространство, и пусть A, B два непустых ограниченных подмножества в X. Расстояние Хаусдорфа между A и B определяется, как

$$d_H(A,B) = \max\big[\sup_{a\in A}\inf_{b\in B}\|a-b\|, \sup_{b\in B}\inf_{a\in A}\|a-b\|\big], \tag{2.3.1}$$

где $\|\cdot\|$ норма в X.

Если через $Q(X)$ обозначить семейство всех непустых компактных и выпуклых X, то хорошо известно (см.напр. [126]), что $(Q(X), d_H)$ является полным метрическим пространством.

Если M множество, то нечеткое подмножество M это функция $u : M \to [0,1]$. множество всех нечетких множеств M это $\mathcal{F}(M)$ вполне дистрибутивная решетка, которая включает в себя обыкновенное подмножество M, характеризуемое функцией $M \to \{0,1\}$.

Для любого нечеткого подмножества $u : M \to [0,1]$ через

$$L_\alpha(u) = \{m \in M : u(m) \geq \alpha\}, \alpha \in [0,1]$$

обозначим α-срезку множества u.

Если M векторное пространство, то нечеткое подмножество $u \in \mathcal{F}(M)$ называется нечетко компактным (см. [129]), если

$$u(\lambda m_1 + (1-\lambda)m_2) \geq \min[u(m_1), u(m_2)] \tag{2.3.2}$$

для любых $m_1, m_2 \in M, \lambda \in [0,1]$.

Если X рефлексивное банахово пространство, то в порядке расширения хаусдорфого расстояния мы будем рассматривать подмножество $\mathcal{F}_0(X)$ множества $\mathcal{F}(X)$ содержащее все нечеткие множества $u : X \to [0,1]$ и обладающие следующими свойствами:

(1) u является полунепрывным сверху;

(2) u является нечетко выпуклым;

(3) Если $u, v \in \mathcal{F}_0(X)$ то можно определить расстояние между u и v через равенства

$$(u, v) = \sup_{\alpha > 0} d_H(L_\alpha(u), L_\alpha(v)), \tag{2.3.3}$$

где через d_H обозначено расстояние Хаусдорфа.

Мы используем следующий результат:

Теорема 2.3.1. $(\mathcal{F}_0(X), d)$ *является полным метрическим пространством.*

Доказательство приведено в §2.1 для случая $X = \mathbb{R}^n$, непосредственно распространяется на общий случай и поэтому мы его опускаем.

Теорема вложения Радстрёма может быть распространена на $\mathcal{F}_0(X)$. Чтобы это сделать определяется линейная структура на $\mathcal{F}_0(X)$ через соотношения

$$(u+v)(x) = \sup_{d\in[0,1]} \{x \in L_\alpha(u) + L_\alpha(v)\}, \tag{2.3.4}$$

$$(\lambda u)(x) = \begin{cases} u(\lambda^{-1}x), & \text{если } \lambda\lambda \neq 0, \\ 0, & \text{если } \lambda + 0, x \neq 0, \\ \sup\limits_{y\in X} u(y), & \text{если } \lambda + 0, x = 0, \end{cases}$$

для $u, v \in \mathcal{F}_0(X), \lambda \in \mathbb{R}$.

Ясно, что эти определения распространяют соответствующие операции в $Q(X)$, а именно, сложение множеств и их умножение на скаляр.

Чтобы обобщить теорему вложения используем следующий результат.

Лемма 2.3.2. *Пусть M множество и пусть $\{M_\alpha \big| \alpha \in [0,1]\}$ семейство подмножеств M такое, что:*

(1) $M_0 = M$,

(2) Из $\alpha \leq \beta$ следует, что $M_\beta \subseteq M_\alpha$,

(3) Из $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$ следует $M_\alpha = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} M_\alpha$.

Тогда нечеткое подмножество $\varphi : M \to [0,1]$ определенное через $\varphi(m) = \sup\{\alpha \in [0,1] \big| x \in M_\alpha\}$ обладает таким свойством, что $L_\alpha(\varphi) = M_\alpha$ для каждого $\alpha \in [0,1]$.

Нижеследующие утверждения лежат в основе Теоремы 2.3.6, которая является основным результатом данного параграфа.

Лемма 2.3.3. *Если $u, v \in \mathcal{F}_0(X)$, то $L_\alpha(u+v) = L_\alpha(u) + L_\alpha(v)$ для каждого $\alpha \in [0,1]$.*

Доказательство. Введем обозначение $X_\alpha = L_\alpha(u) + L_\alpha(v)$. Очевидно, что $X_0 = X$ и из $\alpha \leq \beta$ следует $X_\beta \subseteq X_\alpha$. Применяя лемму 2.3.2 мы получим, что из $\alpha_1 \le \alpha_2 \le \dots,\ \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha_0$ следует, что $X_{\alpha_0} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} X_{\alpha_n}$. Возьмем $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} X_{\alpha_n}$; тогда $x = x_n + y_n$, где $x_n \in L_{\alpha_n}(u), y_n \in L_{\alpha_n}(v)$. Поскольку $L_{\alpha_1}(u) \supset L_{\alpha_2}(u) \supset \dots$, то $\{x_n\}_n \subset L_{\alpha_1}(u)$; аналогично $\{y_n\}_n \subset L_{\alpha_1}(v)$. Далее поскольку $L_{\alpha_1}(u), L_{\alpha_1}(v)$ компактные множества, то существуют подпоследовательности такие, что $x_{n_k} \to x_0,\ y_{n_k} \to y_0$. Используя свойства полунепрерывности u и v и $u(x_n) \ge \alpha_n,\ v(y_n) \ge \alpha_n$ получим, что $u(x_0) \ge \alpha_0,\ v(y_0) \ge \alpha_0$. Отсюда и из того, что $x = x_n + y_n$ следует, что $x = x_0 + y_0 \in X_{\alpha_0}$.

Из теоремы 2.3.1 следует, что $u + v$ определенный в 2.3.4 удовлетворяет равенства

$$L_\alpha(u+v) = L_\alpha(u) + L_\alpha(v) \text{ для каждого } \alpha \in [0,1].$$

Лемма 2.3.4. *Если $u, v, \omega \in \mathcal{F}$ и $u + \omega = v + \omega$ то $u = v$.*

Доказательство. Утверждение следует из леммы 2.3.3. В случае умножения на скаляр, легко заметить, что $L_\alpha(\lambda u) = \lambda L_\alpha(u)$ для $u \in \mathcal{F}_0(X), \lambda \in \mathbb{R}$ и каждого $\alpha \in [0,1]$. Заметим, однако, что $(\mathcal{F}_0(X), +, \cdot)$ не является векторным пространством.

Лемма 2.3.5. *Если $u, v, \omega \in \mathcal{F}$, то $d(u+\omega, v+\omega) = d(u, v)$.*

Доказательство следует из определения 2.3.3.

Теперь приведем ожидаемый результат вложения.

Теорема 2.3.6. *Существует нормированное пространство X такое, что $\mathcal{F}_0(X)$ может быть изометрически вложенным в X.*

Доказательство следует из лемм 2.3.4 и 2.3.5.

Замечание 2.3.7. *Знание структуры нормированного пространства X будет необходимым в следующем пункте.*

Это может быть описано следующим образом.

Определим в $\mathcal{F}_0(X) \times \mathcal{F}_0(X)$ отношение эквивалентности

$$(u,v) \sim (u',v') \Leftrightarrow u+v' = v+u'. \tag{2.3.5}$$

Класс эквивалентности (u,v) будет обозначен как $< u,v >$. Пространство X будет множеством эквивалентных классов. Структура векторного пространства определена в X через

$$< u,v > + < u',v' > = < u+u', v+v' >, \tag{2.3.6}$$

$$\lambda < u,v > \begin{cases} < \lambda u, \lambda v >, & \text{если } \lambda \geq 0 \\ < (-\lambda)u, (-\lambda)v >, & \text{если } \lambda < 0. \end{cases} \tag{2.3.7}$$

Вложение $J : \mathcal{F}(X) \to X$ определяется как

$$j(u) < u, 0 > \tag{2.3.8}$$

где 0 - нечеткое подмножество $0(x) = 0$.

Наконец, норма в X определяется следующим образом

$$\| < u,v > \| = d(u,v). \tag{2.3.9}$$

2.3.2. Дифференциал нечеткой функции

Пусть X нормированное пространство и U открытое подмножество в X. Пусть Y рефлексивное банахово пространство.

Под нечеткой функцией будем понимать функцию $F : U \to \mathcal{F}(Y)$. Такая функция связывает с каждой точкой $x \in U$ нечеткое подмножество $F(x)$ из Y (со свойствами (1)-(3) описанными в пункте 2.2.1). Ясно, что такие функции являются обобщением множественнозначных функций из U в $Q(Y)$. Чтобы определить дифференциал нечеткой функции используем теорему вложения 2.3.6 и классическое понятие дифференциала в нормированных пространствах. По теореме 2.3.6 $\mathcal{F}_0(Y)$ может быть вложено изометрически в нормированное пространство $\mathcal{Y}$; пусть $\mathcal{F}_0(Y) \to \mathcal{Y}$ означает такое вложение.

Определение 2.3.8. *Нечеткая функция* $F : U \to \mathcal{F}_0(Y)$ *называется дифференцируемой в точке* $x_0 \in U$, *если отображение* $\hat{F} = j \circ F$ *дифференцируемо в* x_0.

Более точно, F *дифференцируема в* $x_0 \in U$, *если существует линейный ограниченный оператор* $\hat{F}'(x_0) : X \to \mathcal{Y}$ *такой, что*

$$\lim_{x \to x_0} [\|\hat{F}(x) - \hat{F}(x_0) - \hat{F}'(x_0)(x - x_0)\|] \Big| \|x - x_0\| = 0 \qquad (2.3.10)$$

Такое понятие дифференциала обобщающее дифференциал множествозначных функций из U в $Q(Y)$ изучено в работе [120].

Другими словами, H - дифференцируемость Пури и Ралеску [121] обобщает дифференцируемость Хукухары многозначных отображений на случай нечетких функций.

Если X конечномерное векторное пространство с базисом $e_1, e_2, ..., e_n$ и если $\hat{F}'(x_0)(e_k) \in j(\mathcal{F}(Y)) \subseteq \mathcal{Y}$ для $k = 1, 2, ..., n$, то будем говорить, что нечеткая функция F является конически дифференцируемым в $x_0 \in U$.

Это понятие имеет связь с дифференциалом Хукухары [122]. Чтобы определить дифференциал Хукухары нечетких функций мы будем рассматривать частный случай, когда $X = \mathbb{R}$ и $Y = \mathbb{R}^n$, и является открытым интервалом действительной прямой. Нечеткая функция в этом контексте будет $F : u \to \mathcal{F}_0(\mathbb{R}^n)$.

Если $u, v \in \mathcal{F}_0(\mathbb{R}^n)$, и если существует нечеткое подмножество $\xi \in \mathcal{F}_0(\mathbb{R}^n)$ такое, что $\xi + u = v$, то ξ единственное в силу леммы 2.3.4. В этом случае, ξ называаеться разностью Хукухары u и v и обозначается как $v - u$.

Определение 2.3.9. *Нечеткая функция* $F : U \to \mathcal{F}_0(\mathbb{R}^n)$ *называется* H *- дифференцируемой в* $x_0 \in U$ *если существует* $DF(x_0) \in \mathcal{F}_0(\mathbb{R}^n)$ *такой, что пределы* $\lim\limits_{h \to 0+} [(F(x_0 + h) - F(x_0))/h]$ *и* $\lim\limits_{h \to 0+} [(F(x_0 + h) - F(x_0))/h]$ *существуют и равны* $DF(x_0)$.

Здесь предел берется в метрическом пространстве $(\mathcal{F}_0(\mathbb{R}^n), d)$. В конечных точках U рассматриваются толко односторонние производные.

Замечание 2.3.10. *Из определения 2.3.9 непосредственно следует, что, если F H-дифференцируемо, то многозначное отображение $L_\alpha(F)$ дифференцируемо по Хукухаре для всех $\alpha \in [0,1]$ и*

$$L_\alpha(DF)(x) = L_\alpha(F')(x). \tag{2.3.11}$$

Здесь $L_\alpha(DF)$ обозначает производную Хукухары.

Обратный результат неверен, так как существование разностей Хукухары $\mathcal{L}_\alpha(u) - \mathcal{L}_\alpha(v), \alpha \in [0,1]$ не означает существования H - разностей $x - y$.

Однако для обратного результата справедливо следующее утверждение

Теорема 2.3.11. *Пусть $F : U \to \mathcal{F}_0(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет условиям:*

(а) для каждого U существует такое $\beta > 0$, что разности $F(x+h) - F(x)$ и $F(x) - F(x-h)$ существуют для всех $0 \leq h < \beta$;

(б) многозначные отображения $L_\alpha(F), \alpha \in [0,1]$ равномерно дифференцируемы по Хукухаре с производной $\mathcal{L}_\alpha(DF)$, т.е. для каждого $x \in U$ и $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$d(L_\alpha(F(x+h)) - L_\alpha(x))/h, \mathcal{L}_\alpha(DF(t)) < \varepsilon$$

$$d(L_\alpha(F(x)) - L_\alpha(F(x-h)))/h, \mathcal{L}_\alpha(DF(t)) < \varepsilon$$

для всех $0 \leq h \leq \delta$ и $\alpha \in [0,1]$.

Тогда F - дифференцируема, и производная дается уравнением 2.3.11.

Соотношение между конической дифференцируемостью и H - дифференцируемостью нечетких функций определяется следующим утверждением, которое обобщает соответствующий результат из [138].

Теорема 2.3.12. *Если нечеткая функция $F : U \to \mathcal{F}_0(\mathbb{R}^n)$ H дифференцируема в $x_0 \in U$, то F конически дифференцируема в x_0 и*

$$\hat{F}'x_0(h) = h < DF(x_0), 0 > . \tag{2.3.12}$$

Доказательство. Очевидно, что если $v - u$ существует для $u, v \in \mathcal{F}_0(\mathbb{R}^n)$, то $< v, 0 > - < u, 0 >=< u - v, 0 >$.

Имеем

$$\left\| \frac{\hat{F}(x_0 + \triangle x) - \hat{F}(x_0)}{\triangle x} - < DF(x_0) > \right\| = d\left(\frac{F(x_0 + \triangle x) - F(x_0)}{\triangle x}, DF(x_0) \right)$$

и результат следует из [138].

Вышеприведенная теорема показывает, что дифференцируемость в смысле определения 2.3.8 более общее понятие H-дифференцируемости.

2.3.3. Обобщенная нечеткая разность

Целью настоящего параграфа является использование нечеткой gH - разности введенной в [40], [41] для определения новых обощений дифференцируемости нечеткозначных функций и изучение их свойств. Приведены некоторые новые результаты, которые проливают свет на новые концепции дифференцируемости нечетких функций. Мотивация ввода новых обобщенных производных следует из их полезности в очень быстро развивающейся области нечеткого анализа и нечетких дифференциальных уравнений (см. напр. [1], [5], [6], [7], [9], [15], [26], [33], [32], [29], [23], [24], [15], [17], [30], [39] и тд.).

Основной идеей нашего исследования является концепция разности для нечетких чисел, а именно концепция - разности предложенной в [40], [41]. Отметим, что данная разность имеет большие преимущества по сравнению с известными ранее понятиями. Нам удается получить относительно простые выражения, проанализировать свойства и охарактеризовать g-разности.

Хорошо известно, что обычная разность Хукухара между двумя нечеткими числами существует только при очень жестких ограничениях [10], [25], [26]. Однако gH-разность двух нечетких чисел сущестует при менее жестких ограничениях, но она также не всегда существует [2], [41]. Концепция g-разности предложенной в [45] преодолевает недостатки указанные выше и существует всегда, как для нечетких чисел так и нечеткозначных функций. Такое же замечание верно и для концепций дифференцируемости.

Основанные на gH-разности новые концепции gH-производных рассматриваются в [3]. Основанное же на g-разности новая значительно более общая концепция нечеткого дифференцирования позволяет ввести g-производную. Изучаются соотношения между новой нечеткой производной и нечетким интегралом, найдены формулы типа Ньютона-Лейбница.

Введено понятие обобщенной нечеткой разности и приведены некоторые новые результаты, далее установлены новые свойства обобщенной производной Хукухара (gH-производной) для нечеткозначных функций, и вводится новая концепция обобщенной производной (g-производной).

Одно из первых определений разности и производной для множествозначных функций было дано японским математиком Хукухара [18] (H-разность и H-производная). Далее эти определения были обобщены на нечетком случае в [21] и получили применения в теории нечетких дифференциальных уравнений в работах [12], [22], [33], [32], [23]. Однако понятие H-производной в нечетких дифференциальных уравнениях сталкивается с некоторыми недостатками (см. [3], [4], [6], [7], [10], [13], [2]) связанными со свойствами пространства K^n-всех непустых компактных множеств n-мерного векторного пространства $\mathbb{R}^n$, в частности, с тем фактором, что сумма Минковского не сохраняется в обратном вычитании. С другой стороны, более общее определение вычитания для компактных интервалов, было введено несколькими авторами. Марков [34], [35], [19] определяет нестандартную разность (внутреннюю разность) и распространяет ее в интервальный анализ, вкючая интервальные дифференциальные уравнения (см. [27], [28]). В постановке разности Хукухара, интервальная разность и нечеткая разность и нечеткая обощенная разность Хукухара введена в [43], [44].

Мы начинаем с краткого изложения этих понятий.

Пусть K_C^n является пространством непустых компактных и выпуклых множеств $\mathbb{R}^n$. H-разность Хукухара была представлена как множества C, для которой соотношения $A \ominus_H B = C$ эквивалентно $(\Leftrightarrow) A = B + C$. Важным свойством $\ominus_H$ является то, что $A \ominus_H A = \{0\}$ для любого $A \in K_C^n$ и $(A+B) \ominus_H B = A$ для любого $A, B \in K_C^n$.

H-разность единственная, но она существует не всегда (необходимым условием существования $A \ominus_H B$ является то, что A содержит сдвиг $\{C\} + B$ множества B. Обобщение разности Хукухара преследует цели преодоления этой ситуации. Обобщенная разность Хукухара двух множеств $A, B \in K_C^n$ (gH-разность) определяется следующим образом

$$A \ominus_{gH} B = C \Leftrightarrow \begin{cases} (a) A = B + \\ \text{или} \\ (b) B = A + (-1)C. \end{cases} \tag{2.3.13}$$

Обозначим через $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ множество нечетких чисел, т.е. нормальных, нечетко выпуклых, полунепрерывных сверху и компактных нечетких множеств определенных на действительной оси. Фундаментальными понятиями теории нечетких множеств являются носитель, множества-уровней (или множества срезок) и ядро нечеткого числа.

Через $cl(x)$ обозначим замыкание множества X.

Определение 2.3.13. *Пусть $u \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ нечеткое число. Для $\alpha \in [0,1]$ множество α-уровня u (или просто α-срезка) определяется через*

$$[u]_\alpha = \{x | x \in \mathbb{R}, u(x) \geq \alpha\}$$

и для $\alpha = 0$ через замыкание носителя

$$[u]_0 = cl\{x | x \in \mathbb{R}, u(x) > \alpha\}.$$

Ядро u является множеством элементов $\mathbb{R}$ имеющих степень принадлежности 1, т.е.

$$[u]_1 = \{x | x \in \mathbb{R}, u(x) = 1\}.$$

Хорошо известно, что множества-уровней являются «вложенными», т.е.

$$[u]_\alpha \subseteq [u]_\beta \text{ для } \alpha > \beta.$$

Нечеткое множество u является нечетким числом тогда и только тогда, когда α-срезки непустые компактные интервалы вида

$$[u_\alpha] = [u_\alpha^-, u_\alpha^+] \subset \mathbb{R}.$$

Свойство «вложения» является основой для LU-представлений (L нижний, U верхний) (см. [14], [38]).

Замечание 2.3.14. *Нечеткое число α является вполне определенное через любой пары $u = (u^+, u^-)$ функции $u^-, u^+ : [0,1] \to \mathbb{R}$ определяющие концевые точки α-срезок и удовлетворяющие следующие условия:*

(i) $u^- : \alpha \to u^-_\alpha \in \mathbb{R}$ является ограниченной монотонной неубывающей непрерывной слева функцией для любого $\alpha = 0$;

(ii) $u^+ : \alpha \to u^*_\alpha \in \mathbb{R}$ является ограниченной монотонной невозвращающей непрерывной слева функцией для любой $\alpha \in [0,1]$ и непрерывной справа при $\alpha = 0$;

(iii) $u^-_1 \leq u^+_1$ для $\alpha = 1$ из которого следует, что $u^-_\alpha \leq u^+_\alpha$ для любой $\alpha \in [0,1]$.

Следующий результат установлен в [31]:

Замечание 2.3.15. *Пусть $\{U_\alpha | \alpha \in [0,1]\}$ является семейство действительных интервалов таких, что следующие условия имеют место:*

1. u_α является непустым компактным интервалом для всех $\alpha \in [0,1]$;

2. Если $0 < \alpha < \beta \leq 1$ то $U_\beta \subseteq U_\alpha$;

3. Задана произвольная неубывающая последовательность $\alpha_n \in [0,1]$ с $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha > 0$ и $U_\alpha = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} U_{\alpha_n}$.

Тогда существует единственная LU нечеткая величина и такая что $[u]_\alpha = U_\alpha$ для всех $\alpha \in [0,1]$ и $[u]_\circ = cl(\bigcup\limits_{\alpha \in [0,1]} U_\alpha)$.

Будем считать функции $u^-_{(\circ)}$ и $u^+_{(\circ)}$ нижней и верхней ветвями соответственно.

Трапецевидное нечеткое число обозначенное как (a, b, c, d), где $a \leq b \leq c \leq d$ имеет α-срезки

$$[u]_\alpha = [a + \alpha(b - a), d - \alpha(b - c)], \alpha \in [0,1].$$

В случае $b = c$ получим триангулярное нечеткое число.

Сложение $u+v$ и скалярное умножение ku определяют через уровни срезок, а именно

$$[u+v]_\alpha = [u]_\alpha + [v]_\alpha = \{x+y | x \in [u]_\alpha, y \in [v]_\alpha\}$$

$$[ku]_\alpha = k[u_\alpha] = \{kx | x \in [u]_\alpha, [0]_\alpha = \{0\} \text{ для любого } \alpha \in [0,1]\}.$$

Вычитание нечетких чисел $u-v$ определяется как сложение $u+(-v)$, где $-v = (-1)v$.

Стандартная разность Хукухара (H-разность $\ominus_H$) определяется через $u \ominus_H v = \omega \Leftrightarrow u = v + \omega$ будучи $+$ стандартным нечетким сложением. Если $u \ominus_H v$ существует, то его α-срезками является

$$[u \ominus_H v]_\alpha = [u_\alpha^- - v_\alpha^-, u_\alpha^+ - v_\alpha^v].$$

Хорошо известно, что $u \ominus_H u = 0$ (здесь через 0 обозначен однозначный набор $\{0\}$) для всех нечетких чисел u, однако $u - u \neq 0$.

Расстояние Хаусдорфа на $\mathbb{R}_\mathcal{F}$ определяется так

$$D(u,v) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \{\|[u]_\alpha \ominus_{gH} [v]_\alpha\|_*\},$$

где для интервала $[a,b]$ норма определена следующим образом

$$\|[a,b]\|_* = max\{|a|,|b|\}.$$

Метрика D корректно определена, поскольку gH-разность интервалов $[u]_\alpha \ominus_{gH} [v]_\alpha$ существует всегда. Кроме того, мы можем утверждать, что пара $(\mathbb{R}_\mathcal{F}, D)$ составляет полное метрическое пространство. Такое определение с эквивалентностью задает метрическое пространство нечетких чисел (см. напр. [12], [26], [14]).

Далее приводим следующее утверждение.

Лемма 2.3.16. *Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_\mathcal{F}$ функция с нечеткочисленными значениями. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$. Тогда если* *(i)* $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x)]_\alpha = U_\alpha = [u_\alpha^-, u_\alpha^+]$ *равномерно относительно* $\alpha \in [0,1]$*;*

(ii) для u_α^-, u_α^+ *выполняются условия замечания 2.3.14 или эквивалентно* U_α *удовлетворяет условия замечания 2.3.15, то*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = uc[u]_\alpha = U_\alpha = [u_\alpha^-, u_\alpha^+].$$

Определение 2.3.17. *Для заданных нечетких чисел* $u, v \in \mathbb{R}_\mathcal{F}$*, обобщенная разность Хукухара (*gH*-разность) является нечетким числом* ω *такое, что*

$$u \ominus_{gH} v = \omega \Leftrightarrow \begin{cases} (i) u = v + \omega \\ \text{или} \\ (ii) v = u - \omega. \end{cases} \tag{2.3.14}$$

Легко показать, (i) и (iii) оба будут верными если и только если ω будет четким числом.

В терминах α-срезок имеем

$$[u \ominus_{gH} v]_\alpha = [min\{u_\alpha^- - v_\alpha^-, u_\alpha^+ - v_\alpha^+\}],$$

$max\{u_\alpha^- - v_\alpha^-, u_\alpha^+ - v_\alpha^+\}$ и если H-разности существуют, то и $u \ominus_H v = u \ominus_{gH} v$; условия для существования $\omega = u \ominus_{gH} v \in \mathbb{R}_\mathcal{F}$ следующие

$$\text{случай (i)} \begin{cases} \omega_\alpha^- = u_\alpha^- - v_\alpha^-, \text{ и } \omega_\alpha^+ = u_\alpha^+ - v_\alpha^+ \\ \text{с } \omega_\alpha^- \text{ растущий, } \omega_\alpha^+ \text{ убывающий, } \omega_\alpha^- \le \omega_\alpha^+, \alpha \in [0,1]. \end{cases} \tag{2.3.15}$$

$$\text{случай (ii)} \begin{cases} \omega_\alpha^- = u_\alpha^+ - v_\alpha^+, \text{ и } \omega_\alpha^+ = u_\alpha^- - v_\alpha^-, \alpha \in [0,1] \\ \text{с } \omega_\alpha^- \text{ растущий, } \omega_\alpha^- \text{ убывающий, } \omega_\alpha^- \le \omega_\alpha^+. \end{cases} \tag{2.3.16}$$

Следующие свойства установлены в [40].

Замечание 2.3.18. *Пусть* $u, v \in \mathbb{R}_\mathcal{F}$*-нечеткие числа; Тогда*

i) если gH*-разность существует, то она единственная;*

ii) $u \ominus_{gH} v = u \ominus_H v$ *или* $u \ominus_{gH} v = -(v \ominus_{gH} u)$ *когда существуют выражения справа; в частности* $u \ominus_{gH} u = u \ominus_H u = 0$*;*

iii) если $u \ominus_{gH} v$ *существует в смысле (i), то* $v \ominus_{gH} u$ *существует в смысле (ii) и наоборот;*

iv) $(u + v) \ominus_{gH} v$*;*

v) $0 \ominus_{gH} (u \ominus_{gH} v = v \ominus_{gH} u$*;*

vi) $u \ominus_{gH} v = v \ominus_{gH} u = \omega$ *тогда и только тогда, когда* $u = v$.

В нечетком случае, возможно несуществования gH-разности двух нечетких чисел. Например, рассмотрим триангулярное и трапецевидное нечеткое число $u = (0, 1, 2, 4)$ и $v = (0, 1, 2, 3)$; по уравнению gH-разность существует и она для множества уровней 0 и 1 одинакова $[0, 1]$, однако gH-разность и $u \ominus_{gH} v$ не существует. В самом деле, если мы продолжим считать, что она существует, то как в случае (i) так и в (ii) условия 2.3.18 имеют место для всех $\alpha \in [0, 1]$. Однако

$$\omega_0^- = u_0^- - v_0^- = 0 < \omega_0^+ = u_0^+ - v_0^+ = 1$$

хотя $\omega_1^- = 1 > \omega_1^+ = 0$. Итак ни случай (i) и ни случай (ii) не верны из (2.3.16).

Определение 2.3.19. *Обобщенная разность (g-разность для краткости) двух нечетких чисел* $u, v \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ *задается через множества уровня*

$$[u \ominus_g v]_\alpha = cl \bigcup_{\beta \geq \alpha} ([u]_\beta \ominus_{gH} [v]_\beta) \text{ для любого } \alpha \in [0, 1] \tag{2.3.17}$$

где gH*-разность* $\ominus_{gH}$ *определена через интервальные операторы* $[u]_\beta$ *и* $[v]_\beta$.

Замечание 2.3.20. H*-разность (2.3.17) задается выражением*

$$[u \ominus_g v]_\alpha = [\inf_{\beta \geq \alpha} min\{u_\beta^- - v_\beta^-, u_\beta^+ - v_\beta^+\}, \sup_{\beta \geq \alpha} max\{u_\beta^- - v_\beta^-, u_\beta^+ - v_\beta^+\}].$$

Определение 2.3.21. *Обобщенная разность (g-разность для краткости) двух нечетких чисел* $u, v \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ *является разность их множеств* *уровня в виде*

$$[u \ominus_g v]_\alpha = cl \bigcup_{\beta \geq \alpha} ([u]_\beta \ominus_{gH} [v]_\beta) \text{ для любого } \alpha \in [0,1] \tag{2.3.18}$$

где gH-разность $\ominus_{gH}$-разность Хукухара с интервальными операндами $[u]_\beta$ и $[v]_\beta$.

Замечание 2.3.22. *g-разность (2.3.18) задается через следующее выражение*

$$[u \ominus_g v]_\alpha = [\inf_{\beta \geq \alpha} min\{u_\beta^- - v_\beta^-, u_\beta^+ - v_\beta^+\}, \sup_{\beta \geq \alpha} max\{u_\beta^- - v_\beta^-, u_\beta^+ - v_\beta^+\}].$$

Доказательство. Пусть $\alpha \in [0,1]$ фиксирован. Заметим, что для любого $\beta \geq \alpha$ мы имеем

$$[u]_\beta \ominus_{gH} [v]_\beta = [min]\{u_\beta^- - v_\beta^-, u_\beta^+ - v_\beta^+\} \leq$$

$$\leq [\inf_{\lambda \geq \beta} min\{u_\lambda^- - v_\lambda^-, u_\lambda^+ - v_\lambda^+\}, \sup_{\lambda \geq \beta} max\{u_\lambda^- - v_\lambda^-, u_\lambda^+ - v_\lambda^+\}]$$

и отсюда следует, что

$$cl \bigcup_{\beta \geq 0} ([u]_\beta \ominus_{gH} [v]_\beta) \subseteq [\inf_{\beta \geq \alpha} min\{u_\beta = v_\beta^-, u_\beta^+ - v_\beta^+\}, \sup_{\beta \geq \alpha} max\{u_\beta = v_\beta^-, u_\beta^+ - v_\beta^+\}].$$

Рассмотрим теперь равенства

$$cl \bigcup_{\beta \geq \alpha} ([u]_\beta \ominus_{gH} [v]_\beta) = cl \bigcup_{\beta \geq \alpha} [min\{u_\beta - v_\beta^-, u_\beta^+ - v_\beta^+\}, max\{u_\beta - v_\beta^-, u_\beta^+ - v_\beta^+\}].$$

Для любого $n \geq 1$, существуют $a_n \in \{u_\beta - v_\beta^-, u_\beta^+ - v_\beta^+\} : \beta \geq \alpha$ такие, что

$$\inf_{\beta \geq \alpha} min\{u_\beta^- - v_\beta^-, u_\beta^+ - v_\beta^+\} > a_n - 1/2.$$

Также существуют $b_n \in \{u_\beta - v_\beta^-, u_\beta^+ - v_\beta^+\}$ такие, что

$$\sup_{\beta \geq \alpha} max\{u_\beta^- - v_\beta^-, u_\beta^+ - v_\beta^+\} < b_n + 1/n.$$

Тогда имеем

$$cl \bigcup_{\beta \geq \alpha} ([u]_\beta \ominus_{gH} [v]_\beta) \geq [a_n, b_n], n \geq 1.$$

и мы получим

$$cl \bigcup_{\beta \geq \alpha} ([u]_\beta \ominus_{gH} [v]_\beta) \geq \bigcup_{\beta \geq \alpha} [a_n, b_n] \supseteq (\lim_{n \to \infty} a_n, \lim_{n \to \infty} b_n).$$

и наконец

$$cl \bigcup_{\beta \geq \alpha} ([u]_\beta \ominus_{gH} [v]_\beta = [\inf_{\beta \geq \alpha} min\{u_\beta^- - v_\beta^-, u_\beta^+ - v_\beta^+\}, \sup_{\beta \geq \alpha} max\{u_\beta^- - v_\beta^-, u_\beta^+ - v_\beta^+\}].$$

Итак, приходим к заключению

$$[\inf_{\beta \geq \alpha} min\{u_\beta^- - v_\beta^-, u_\beta^+ - v_\beta^+\}, \sup_{\beta \geq \alpha} max\{u_\beta^- - v_\beta^-, u_\beta^+ - v_\beta^+\}] =$$

$$= cl \bigcup_{\beta \geq \alpha} ([u]_\beta \ominus_{gH} [v]_\beta$$

и завершаем доказательства замечания.

Замечание 2.3.23. *Свойство установленное в предыдущем заменчании имеет место в частности для* $\alpha > 0$*. Этот случай покрывается из-за того, что функции* $u_\beta^- - v_\beta^-, u_\beta^+ - v_\beta^+$ *непрерывные справа.*

Следующее замечание дает простые выражения для $u \ominus_g v$ и $v \ominus_g u$.

Замечание 2.3.24. *Для любых двух нечетких чисел* $u, v \in \mathbb{R}_\mathcal{F}$ *существуют обе* g*-разности* $u \ominus_g v$ *и* $v \ominus_g u$ *и для любого* $\alpha \in [0, 1]$ *имеем*

$$u \ominus_g v = -(v \ominus_g u)$$

со свойствами

$$[u \ominus_g v]_\alpha = [d_\alpha^-, d_\alpha^+]$$

и

$$[v \ominus_g u]_\alpha = [-d_\alpha^+, d_\alpha^-]$$

где

$$d_\alpha^+ = inf(D_\alpha), d_\alpha^- = sup(D_\alpha)$$

и множества D_α *имеют вид*

$$d_\alpha = \{u_\beta^- - v_\beta^- | \beta \geq \alpha\} \bigcup \{u_\beta^+ - v_\beta^+ | \beta \geq \alpha\}.$$

Замечание 2.3.25. *Заметим, что существуют другие возможные выражения для* g*-разности такие как*

$$[u \ominus_g v]_\alpha = [min\{\inf_{\beta \geq \alpha}(u_\beta^- - v_\beta^-), \inf_{\beta \geq \alpha}(u_\beta^+ - v_\beta^+)\}, max\{\sup_{\beta \geq \alpha}(u_\beta^- - v_\beta^-), \sup_{\beta \geq \alpha}(u_\beta^+ - v_\beta^+)\}].$$

Следующее замечание устанавливает, что g-разность корректно определена для любой пары нечетких чисел $u, v \in \mathbb{R}_\mathcal{F}$.

Замечание 2.3.26. *Для любых нечетких чисел* $u, v \in \mathbb{R}_\mathcal{F}$ g*-разность* $u \ominus_g v$ *существует и является нечетким числом.*

Связь между gH-разностью, g-разностью и расстоянием Хаусдорфа допускает геометрическую интерпретацию построенных выше разностей.

Замечание 2.3.27. *Для всех* $u, v \in \mathbb{R}_\mathcal{F}$

$$D(u, v) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \|[u]_\alpha \ominus_{gH} [v]_\alpha\|_* = \|u \ominus_g v\|, \text{ где } \|\cdot\| = D(\cdot, 0).$$

Доказательство. Мы знаем, что $\omega = u \ominus_g v$ является нечетким числом, тогда

$$\|\omega\| = \sup_{\alpha \in [0,1]} max\{|\omega_\alpha^-|, |\omega_\alpha^+|\} = max\{|\omega_0^-|, |\omega_0^+|\}$$

и

$$\sup_{\alpha\in[0,1]} \|[u]_\alpha \ominus_{gH} [v]_\alpha\|_* =$$

$$= \sup_{\alpha\in[0,1]} \|[min\{u_\alpha^- - v_\alpha^-, u_\alpha^+ - v_\alpha^+\}, max\{u_\alpha^- - v_\alpha^-, u_\alpha^+ - v_\alpha^+\}]\|_* =$$

$$= \sup_{\alpha\in[0,1]} max\{|min\{u_\alpha^- - v_\alpha^-, u_\alpha^+ - v_\alpha^+\}|, |max\{u_\alpha^- - v_\alpha^-, u_\alpha^+ - v_\alpha^+\}| =$$

$$= \sup_{\alpha\in[0,1]} max\{|u_\alpha^- - v_\alpha^-|, |u_\alpha^+ - v_\alpha^+|\} = D(u,v).$$

Теперь, поскольку max и sup являются идемпатентными операторами, то мы получим

$$\|u \ominus_g v\| = \sup_{\alpha\in[0,1]} \|[u \ominus_g v]_*\| =$$

$$= \sup_{[0,1]} \|[\inf_{\beta\geq\alpha} min\{u_\beta^- - v_\beta^-, u_\beta^+ - v_\beta^+\}, \sup_{\beta\geq\alpha} max\{u_\beta^- - v_\beta^-, u_\beta^+ - v_\beta^+\}]\|_* =$$

$$= \sup_{\alpha\in[0,1]} \{\sup_{\beta\geq\alpha} max\{|u_\beta^- - v_\beta^-|, |u_\beta^+ - v_\beta^+|\}\} =$$

$$= \sup_{\alpha\in[0,1]} max\{|u_\beta^- - v_\beta^-|, |u_\beta^+ - v_\beta^+|\} = D(u,v).$$

2.3.4. Обобщенная дифференцируемость в смысле Хукухара (gH-дифференцируемость)

Концепции обобщенной дифференцируемости сначала рассматривалась для интегрально-значных функций в работах S. Markov ([107], [108]). Данное направление исследований было продолжено далее в нескольких работах [3], [8], [20], [46] и других, как для интегрально-значных так и для более общих нечетко-значных функций.

В настоящем параграфе мы сосредотачиваем свое внимание на нечетком случае. Будем представлять и сравнивать альтернативные определения для производной нечетко-значной функции.

Первые две концепции были приведены в работах [3], [46], [36] для нечеткого случая. В указанных работах используется обычное обозначение разности Хукухара, а именно $\ominus_H$.

Определение 2.3.28. *([3]). Пусть* $f : (a,b) \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ *и* $x_0 \in (a,b)$. *Будем говорить, что* F *является сильно обобщенная дифференцируемая по Хукухара функция в* x_0 *(*GH*-дифференцируема для краткости), если существует элемент* $f'(x_0) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ *такой, что для всех* $h \geq 0$ *достаточно малое выполняются условия*

(i) существует $f(x_0+h) \ominus_H f(x_0), f(x_0) \ominus_H f(x_0-h)$ *и*

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{f(x_0+h) \ominus_H f(x_0)}{h} = \lim_{h \searrow 0} \frac{f(x_0) \ominus_H f(x_0-h)}{h} = f'_G(x_0)$$

или (ii) существуют $f(x_0) \ominus_H f(x_0+h), f(x_0-h) \ominus_H f(x_0)$ *и*

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{f(x_0) \ominus_H f(x_0+h)}{h} = \lim_{h \searrow 0} \frac{f(x_0-h) \ominus_H f(x_0)}{h} = f'_G(x_0)$$

или (iii) существуют $f(x_0+h) \ominus_H f(x_0), f(x_0-h) \ominus_H f(x_0)$ *и*

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{f(x_0+h) \ominus_H f(x_0)}{h} = \lim_{h \searrow 0} \frac{f(x_0-h) \ominus_H f(x_0)}{h} = f'_G(x_0)$$

или (iv) существуют $f(x_0) \ominus_H f(x_0+h), f(x_0) \ominus_H f(x_0-h)$ *и*

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{f(x_0) \ominus_H f(x_0+h)}{h} = \lim_{h \searrow 0} \frac{f(x_0) \ominus_H f(x_0-h)}{h} = f'_G(x_0).$$

Определение 2.3.29. *([3]). Пусть* $f : (a,b) \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ *и* $x_0 \leftarrow (a,b)$. *Для последовательности* $h \searrow 0$ *и* $n_0 \in \mathbb{N}$ *вводим обозначения*

$$A_{n_0}^{(1)} = \{n \geq n_0;\ \textit{существует}\ E_n^{(1)} = f(x_0+h) \ominus_H f(x_0)\},$$

$$A_{n_0}^{(2)} = \{n \geq n_0;\ \textit{существует}\ E_n^{(2)} = f(x_0+h) \ominus_H f(x_0)\},$$

$$A_{n_0}^{(3)} = \{n \geq n_0;\ \textit{существует}\ E_n^{(3)} = f(x_0+h) \ominus_H f(x_0)\},$$

$$A_{n_0}^{(4)} = \{n \geq n_0;\ \textit{существует}\ E_n^{(4)} = f(x_0+h) \ominus_H f(x_0)\},$$

Будем говорить, что f *слабо обобщенная дифференцируемая по Хукухара функция на* x_0, *если для любой последовательности* $h \searrow 0$ *и существует*

$n_0 \in \mathbb{N}$ *такой, что*

$$A_{n_0}^{(1)} \bigcup A_{n_0}^{(2)} \bigcup A_{n_0}^{(3)} \bigcup A_{n_0}^{(4)} = \{n \in \mathbb{N}; n \geq n_0\}$$

и более того, существует элемент в $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ *обозначенный через* $f_\omega'(x_0)$ *такой что, если для некоторого* $j \in (1,2,3,4)$ *имеем* $card(A_{n_0}^{(j)}) = +\infty$, *то*

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in A_{n_0}^{(j)}}} D(\frac{E_n^{(j)}}{(-1)^{j+1}h_n} f_\omega'(x_0)) = 0.$$

Определение 2.3.30. *Пусть* $x_0 \in (a,b)$ *и* h *такой, что* $x_0 + h \in (a,b)$, *тогда* gH*-производная функции* $f \in (a,b) \to \mathbb{F}_{\mathcal{F}}$ *в* x_0 *определяется как*

$$f_{gH}'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}[f(x_0+h) \ominus_H f(x_0)]. \tag{2.3.19}$$

Если $f_{gH}'(x_0) \in \mathbb{F}_{\mathcal{F}}$ удовлетворяющий (2.3.19) существует, то будем говорить, что функция f обобщенная дифференцируемая по Хукухара (gH-дифференцируема для краткости) в x_0.

Теорема 2.3.31. *Концепция* gH*-дифференцируемости и слабая обобщенная дифференцируемость по Хукухара в смысле определения 2.3.29 совпадают.*

Доказательство. В самом деле, пусть f gH-дифференцируема (см. опр. 2.3.30). Тогда для любой последовательности $h_n \searrow 0$ для n достаточно большое существует по крайней мере две разности Хукухара из $f(x_0 + h_n) \ominus_H f(x_0), f(x_0) \ominus_H f(x_0 + h_n)$, $f(x_0) \ominus_H f(x_0 + h_n), f(x_0 - h_n) \ominus_H f(x_0)$. Как заключение получим

$$A_{n_0}^{(1)} \bigcup A_{n_0}^{(2)} \bigcup A_{n_0}^{(3)} \bigcup A_{n_0}^{(4)} = \{n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\}$$

для любого $n \in \mathbb{N}$. Обратное, если предположить слабую обобщенную по Хукухара дифференцируемость функции f, то поскольку, по крайней мере, два множества из $A_{n_0}^{(1)}, A_{n_0}^{(2)}, A_{n_0}^{(3)}, A_{n_0}^{(4)}$ будут бесконечными и

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[f(x_0+h)\ominus_{gH} f(x_0)] = \lim_{h>0}\frac{E_n^j}{(-1)^{j+1}h_n}$$

для по крайней мере двух индексов из $j = \{1, 2, 3, 4\}$, так что f является gH-дифференцируемой. Отсюда следует, что слабая обобщенная по Хукухара дифференцируемость эквивалентна gH-дифференцируемости.

Пример 2.3.13. Пусть $f(x) = p(x)a$ где p-четкая дифференцируемая функция и $a \in \mathbb{R}_F$. тносительно легко установить, что существует gH-дифференцируемая функция $f'_{gH}(x)$ такая, что

$$f'_{gH} = p^1(x)a.$$

ГЛАВА 3. НЕЧЕТКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

3.1. Двойное нечеткое преобразование Лапласа

3.1.1. Основные понятия

В этом разделе мы вспомним основные понятия, которыми нам предстоит пользоваться в большей части этой главы [16].

Нечеткое множество — это отображение $\eta : \mathbb{R}[0,1]$, которое обобщает классическио множество $\{0,1\}$ на случай интервала $[0,1]$. Нечеткое число η — это нечеткое множество, которое удовлетворяет некоторым дополнительным свойствам выпуклости, нормальности, полунепрерывности сверху и компактности. Мы используем $\mathbb{R}_\Phi$ для обозначения пространства всех действительных нечетких чисел [11]. Для $0 \leq \gamma < 1$, γ-срезы для нечеткого числа η определяются как множества $(\eta, \gamma) = \{\nu \in \mathbb{R} : \eta(\nu) \geq \gamma\}$. В форме γ -срезов нечеткое число η представимо в виде интервала $(\eta, \gamma) = [(\eta_*, \gamma), (\eta^*, \gamma)]$. Триангулярное нечеткое число η, задается упорядоченной тройкой чисел (a, b, c), с условием $a \leq b \leq c$. γ - срезы, связанные с триангулярным нечетким числом η имеют вид $[a + (b-a)\gamma, c - (c-b)\gamma]$.

Если $\eta, v \in \mathbb{R}_\Phi$, то сложение на пространстве нечетких чисел по γ-срезам определяется как $[(\eta + v), \gamma] = [(\eta_*, \gamma) + (v_*, \gamma), (\eta^*, \gamma) + (v^*, \gamma)]$. H -разность для двух нечетких чисел η и v, обозначаемая как $\eta \ominus v$ определяется в виде нечеткого числа ω такое, что $\omega = \eta + v$. В форме γ-срезов H -разность для двух нечетких чисел η и v имеет вид $[(\eta \ominus v), \gamma] = [(\eta_*, \gamma) - (v^*, \gamma), (\eta^*, \gamma) - (v_*, \gamma)]$. Нечеткозначная функция с двумя переменными ν и τ сопоставляет упорядоченную пару (ν, τ) нечеткому числу $\Phi(\nu, \tau)$. В форме γ-среза $\Phi(\nu, \tau)$ представляется в виде $\Phi(\nu, \tau, \gamma) = [\Phi_*(\nu, \tau, \gamma), \Phi^*(\nu, \tau, \gamma)]$ [6].

Нечеткозначная функция $\Phi(\nu, \tau)$ непрерывна в любой точке (ν_0, τ_0) , если $\|(\nu, \tau) - (\nu_0, \tau_0)\| < \delta$, то $\Phi(\nu, \tau) - L < \epsilon$. Математически мы можем записать это в виде $\lim\limits_{(\nu,\tau)\to(\nu_0,\tau_0)} \Phi(\nu, \tau) = L$.

Прежде чем дать определение нечеткого двойного преобразования Лапласа, сформулируем нечеткое одинарное преобразование Лапласа и выясним некоторые соответствующие свойства для нечеткозначной функции двух переменных.

Нечеткое однозначное преобразование Лапласа для $\Phi(\nu,\tau)$ по ν определяется как

$$\mathcal{L}^{\tau\upsilon}[\Phi(\nu,\tau)] = \phi(r_1,\tau) = \int\limits_0^\infty e^{-r_1\nu} \odot \Phi(\nu,\tau)d\nu.$$

Нечеткое однократное преобразование Лапласа для $\Phi(\nu,\tau)$ по τ определяется как

$$\mathcal{L}^{\tau}[\Phi(\nu,\tau)] = \phi(\nu,r_2) = \int\limits_0^\infty e^{-r_2\tau} \odot \Phi(\nu,\tau)d\tau.$$

Когда нечеткое преобразование Лапласа по τ применяется к сильно обобщенной частной производной относительно ν, то получаем следующий результат

$$\mathcal{L}^{\tau}[\frac{\partial\Phi(\nu,\tau)}{\partial\nu}] = \frac{\partial}{\partial\nu}[(\phi(\nu,r_2))].$$

Сформулируем теоремы переноса для нечеткого преобразования Лапласа:

Теорема 3.1.1. *[27] (Первая теорема о переносе.) Если Φ нечетко преобразуема по Лапласу, то*

$$\mathcal{L}^{\tau}(e^{-\alpha\tau}\Phi(\nu,\tau)) = \phi(\nu,r_2+a).$$

Теорема 3.1.2. *(Вторая теорема о переносе.) Если Φ нечетко преобразуема по Лапласу, то*

$$\mathcal{L}^{\tau}[U(\nu,\tau-\alpha)\odot\Phi(\nu,\tau-\alpha)] = e^{-\alpha r_2}\odot\phi(\nu,r_2),$$

где U — функция Хевисайда.

Теорема 3.1.3. *Для нечеткозначной функции $\Phi(\nu,\tau)$ имеем*

$$(\int\limits_0^\infty e^{-r_1\nu}\odot\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(\nu,\tau)d\nu) = r_1\odot\varphi(r_1,\tau)\ominus\Phi(0,\tau).$$

Доказательство. Доказательство легко провести с помощью интегрирования по частям для нечеткозначной функции [6]. В следующей таблице показано соответствующее двойное преобразование Лапласа для некоторых функций:

Функция $\Phi(\nu,\tau)$		Соответствующее двойное преобразование Лапласа $\phi(r_1,r_2)$
$\alpha\beta$	$=$	$\frac{\alpha\beta}{r_1 r_2}$.
$\nu\tau$	$=$	$\delta^{\frac{1}{\delta}}\Psi^{\frac{1}{\Psi}}\frac{\gamma(1+\frac{1}{\delta})\gamma(1+\frac{1}{\Psi})}{r_1^{1+\frac{1}{\delta}}r_2^{1+\frac{1}{\Psi}}}$.
$\frac{\nu^\Psi}{\Psi}\frac{\tau^\delta}{\delta}$	$=$	$\frac{1}{r_1^2 r_2^2}$.
$\frac{\nu^{p^\Psi}}{\Psi}\frac{\tau^{q^\delta}}{\delta}$	$=$	$\frac{p!q!}{r_1^{(p+1)}r_2^{(q+1)}}$.
$e^{\frac{\nu^\Psi}{\Psi}\frac{\tau^\delta}{\delta}}$	$=$	$\frac{1}{(r_1-1)(r_2-1)}$.
$e^{\frac{\nu^\Psi}{\Psi}\frac{\tau^\delta}{\delta}}\frac{\nu^{p^\Psi}}{\Psi}\frac{\tau^{q^\delta}}{\delta}p,q\in N$	$=$	$\frac{p!q!}{(r_1-1)^{(p+1)}(r_2-1)^{(q+1)}}$.
$cos(\lambda\frac{\nu^\Psi}{\Psi})cos(\lambda\frac{\tau^\delta}{\delta})$	$=$	$\frac{r_1 r_2}{(\lambda^2+r_1^2)(\lambda^2+r_2^2)}$.
$sin(\lambda\frac{\nu^\Psi}{\Psi})sin(\lambda\frac{\tau^\delta}{\delta})$	$=$	$\frac{\lambda^2}{(\lambda^2+r_1^2)(\lambda^2+r_2^2)}$.
$e^{\frac{\nu^\Psi}{\Psi}\frac{\tau^\delta}{\delta}}sinh(\lambda\frac{\nu^\Psi}{\Psi})sinh(\lambda\frac{\tau^\delta}{\delta})$	$=$	$\frac{1}{(r_1-2)r_1(r_2-2)r_2}$.
$e^{\frac{\nu^\Psi}{\Psi}\frac{\tau^\delta}{\delta}}cosh(\lambda\frac{\nu^\Psi}{\Psi})cosh(\lambda\frac{\tau^\delta}{\delta})$	$=$	$\frac{(r_1-1)(r_2-1)}{(r_1-2)r_1(r_2-2)r_2}$.

3.1.2. Сильно обобщенные дробноподобные частные производные

В этом подразделе мы определяем сильно обобщенную дробноподобную частную производную для решения нечетких дробноподобных дифференциальных уравнений в частных производных.

Определение 3.1.4. *Для нечеткозначной функции $\Phi(\nu,\tau)$ сильно обобщенная дробноподобная частная производная по ν имеет порядок Ψ и определяется как нечеткое число $\frac{\partial^\Psi\Phi(\nu,\tau)}{\partial\nu^\Psi}$ такое, что*

1. $\forall\theta>0$, H-разности $\Phi(\nu_0+\theta\nu^{1-\Psi},\tau)\ominus\Phi(\nu_0,\tau)$ и $\Phi(\nu_0,\tau)\ominus\Phi(\nu_0-\theta\nu^{1-\Psi},\tau)$ существуют и мы имеем следующее

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\Phi(\nu_0+\theta\nu^{1-\Psi},\tau)\ominus\Phi(\nu_0,\tau)}{\theta}=\lim_{\theta\to 0}\frac{\Phi(\nu_0,\tau)\ominus\Phi(\nu_0-\theta\nu^{1-\Psi},\tau)}{\theta}.$$

2. $\forall\theta>0$, *H-разности* $\Phi(\nu_0,\tau)\ominus\Phi(\nu_0+\theta\nu^{1-\Psi},\tau)$ *и* $\Phi(\nu_0-\theta\nu^{1-\Psi},\tau)\ominus\Phi(\nu_0,\tau)$ *существуют и мы имеем следующее*

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\Phi(\nu_0,\tau)\ominus\Phi^{\Psi}(\nu_0+\theta\nu^{1-\Psi},\tau)}{-\theta}=\lim_{\theta\to 0}\frac{\Phi(\nu_0-\theta\nu^{1-\Psi},\tau)\ominus\Phi(\nu_0,\tau)}{-\theta}.$$

Предложение 3.1.5. *Нечеткозначная функция* $\Phi(\nu,\tau)$ *называется дифференциалом типа* $(\Psi-1)$, *если* Φ *дифференцируема в первой форме данного определения, и дифференциал типа* $(\Psi-2)$, *если* Φ *дифференцируема во второй форме.*

Определение 3.1.6. *Для нечеткозначной функции* $\Phi(\nu,\tau)$ *сильно обобщенная дробноподобная частная производная порядка* δ *по* τ *определяется как нечеткое число* $\frac{\partial^{\delta}\Phi(\nu,\tau)}{\partial\tau^{\delta}}$ *такое, что*

1. $\forall\theta>0$, *H-разности* $\Phi(\nu,\tau_0+\theta\tau^{1-\delta})\ominus\Phi(\nu,\tau_0)$ *и* $\Phi(\nu,\tau_0)\ominus\Phi(\nu,\tau_0-\theta\tau^{1-\delta})$ *существуют и мы имеем следующее*

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\Phi(\nu,\tau_0+\theta\tau^{1-\delta})\ominus\Phi(\nu,\tau_0)}{\theta}=\lim_{\theta\to 0}\frac{\Phi(\nu,\tau_0)\ominus\Phi(\nu,\tau_0-\theta\tau^{1-\delta})}{\theta}.$$

2. $\forall\theta>0$, *H-разности* $\Phi(\nu,\tau_0)\ominus\Phi(\nu,\tau_0+\theta\tau^{1-\delta})$ *и* $\Phi(\nu,\tau_0-\theta\tau^{1-\delta})\ominus\Phi(\nu,\tau_0)$ *существуют и мы имеем следующее*

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\Phi(\nu,\tau_0)\ominus\Phi(\nu,\tau_0+\theta\tau^{1-\delta})}{-\theta}=\lim_{\theta\to 0}\frac{\Phi(\nu\tau_0-\theta\tau^{1-\delta})\ominus\Phi(\nu,\tau_0)}{-\theta}.$$

Предложение 3.1.7. Φ *называется дифференциалом типа* $(\delta-1)$, *если* Φ *дифференцируемо в первой форме, и дифференциалом типа* $(\delta-2)$, *если* Φ *дифференцируемо во второй форме.*

Для нечеткозначной функции Φ нечеткий дробноподобный интеграл Ψ-го порядка определяется как

$$I^{\psi}\Phi(\nu)=\int\limits_0^{\nu}\Phi(\mu)\mu^{\Psi-1}d\mu,$$

где интегрирование осуществляется в смысле нечеткого интеграла Римана.

Лемма 3.1.8. *Если непрерывная нечеткозначная функция $\Phi(\nu,\tau)$ является сильно обобщенно дробноподобно частично дифференцируемой по τ, то*

$$\int_0^b \frac{\partial^\delta \Phi(\nu,\tau)}{\partial \tau^\delta}\tau^{\delta-1}d\tau = \Phi(\nu,b)\ominus\Phi(\nu,a).$$

Лемма 3.1.9. *Для непрерывной нечеткозначной функции $\Phi(\nu,\tau)$, являющейся сильно обобщенно дробноподобной частичной дифференцируемой по υ, имеем*

$$\int_0^b \frac{\partial^\Psi \Phi(\nu,\tau)}{\partial \nu^\Psi}\nu^{\Psi-1}d\nu = \Phi(b,\tau)\ominus\Phi(a,\tau).$$

Доказательство. Если $\Phi(\nu,\tau)$ дифференцируемо по типу $(\Psi-1)$, то имеем

$$\begin{aligned}\int_0^b \frac{\partial^\Psi \Phi(\nu,\tau,\gamma)}{\partial \nu^\Psi}\nu^{\Psi-1}d\nu &= \int_0^b [\frac{\partial^\Psi \Phi_*(\nu,\tau,\gamma)}{\partial \nu^\Psi},\frac{\partial^\Psi \Phi^*(\nu,\tau,\gamma)}{\partial \nu^\Psi}]\nu^{\Psi-1}d\nu,\\ &= [\Phi_*(b,\tau,\gamma)-\Phi_*(a,\tau,\gamma),\Phi^*(b,\tau,\gamma)-\Phi^*(a,\tau,\gamma)]=v.\\ &= \Phi(b,\tau)\ominus\Phi(a,\tau).\end{aligned}$$

Это завершает доказательство.

3.1.3. Двойное нечеткое преобразование Лапласа

Сначала дадим определение нечеткому двойному преобразованию Лапласа и некоторым связанным с ним свойствам.

Нечеткое двойное преобразование Лапласа нечеткозначной функции $\Phi(\nu,\tau)$ есть

$$\mathcal{L}^\nu\mathcal{L}^\tau[\Phi(\nu,\tau)] = \phi(r_1,r_2) = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-r_2\tau}\odot e^{-r_2\nu}\odot\Phi(\nu,\tau)d\nu d\tau, \tag{3.1.1}$$

где интеграл в определении должен сходиться.

Мы можем записать приведенное выше определение в виде

$$\mathcal{L}^{\nu}\mathcal{L}^{\tau}[\Phi(\nu,\tau)] = [\mathcal{L}^{\nu}\mathcal{L}^{\tau}[\Phi_*(\nu,\tau,\gamma)], \mathcal{L}^{\nu}\mathcal{L}^{\tau}[\Phi^*(\nu,\tau,\gamma)]].$$

Определение 3.1.10. *Нечеткое двойное обратное преобразование Лапласа определяется как*

$$\mathcal{L}_{\nu}^{-1}\mathcal{L}_{\tau}^{-1}[\phi(r_1,r_2)] = \Phi(\nu,\tau) = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+\infty}\int\limits_{\beta-i\infty}^{\beta+\infty} e^{-r_2\tau}e^{-r_1\tau}\odot\phi(r_1,r_2)dr_1dr_2.$$

Нечеткое двойное преобразование Лапласа линейно, т. е. если $\mathcal{L}^{\nu}\mathcal{L}^{\tau}[\Phi(\nu,\tau)] = \phi(r_1,r_2)$, то для любых констант α,β и нечеткозначных функций Φ и Ψ, имеем

$$\mathcal{L}^{\nu}\mathcal{L}^{\tau}[\alpha\odot\Phi(\nu,\tau)+\beta\odot\Psi(\nu,\tau)] = \alpha\odot\mathcal{L}^{\nu}\mathcal{L}^{\tau}[\Phi(\nu,\tau)]+\beta\odot\mathcal{L}^{\nu}\mathcal{L}^{\tau}[\Psi(\nu,\tau)].$$

Точно так же нечеткое обратное двойное преобразование Лапласа также является линейным.

При изучении теории нечеткого преобразования Лапласа нам приходится изучать абсолютное значение нечеткозначной функции.

Определение 3.1.11. *Для нечеткозначной функции Φ абсолютное значение нечеткозначной функции в γ -срезах имеет вид*

$$|\Phi(\nu,\tau,\gamma)| = [|\Phi_*(\nu,\tau,\gamma)|, |\Phi^*(\nu,\tau,\gamma)|].$$

Определение 3.1.12. *Нечеткозначная функция Φ называется экспоненциального порядка в нечетком смысле, если*

$$\Phi(\nu,\tau) \leq Me^{\alpha\nu+\beta\tau}, (\forall)\alpha,\beta,M\in\mathbb{R}^+.$$

Замечание 3.1.13. *Нечеткое двойное преобразование Лапласа существует не для всех нечеткозначных функций. Например, $\Phi(\nu,\tau) = \nu\tau\odot\eta$ или*

$\nu^2+\tau^2\odot\eta$ не является нечетким двойным преобразованием Лапласа какой-либо нечеткозначной функции $\Phi(\nu,\tau)$, так как $\Phi(\nu,\tau)$ не сходится к нулю при $\nu\to\infty,\tau\to\infty$. Кроме того, нечеткое двойное преобразование Лапласа для $\Phi(\nu,\tau)=exp(\alpha\nu^2+\beta\tau^2)\odot\eta$ с $\alpha,\beta>0$ не существует, так как он не экспоненциального порядка, потому что

$$\lim_{\nu\to\infty,\tau\to\infty} exp(\alpha\nu^2+\beta\tau^2-r_1\nu^2+r_2\tau^2)\odot\tau=\infty.$$

Далее дадим условие существования нечеткого двойного преобразования Лапласа.

Теорема 3.1.14. *Если нечеткозначная функция Φ удовлетворяет двум условиям:*

1. Φ имеет нечеткий экспоненциальный порядок.

2. Φ ограничено и кусочно-непрерывно, то нечеткое двойное преобразование Лапласа существует и также сходится абсолютно.

Доказательство. Дано, что Φ ограничено, поэтому имеем $\Phi(\nu,\tau)<1$. Кроме того, Φ имеет экспоненциальный порядок, поэтому по определению экспоненциального порядка в нечетком смысле мы имеем

$$|\Phi(\nu,\tau)|\leq M_2e^{\alpha\nu+\beta\tau},(\forall)M_2,\alpha,\beta\in\mathbb{R}^+.$$

Положив $M=max\{M_1,M_2\}$, получим

$$|\Phi(\nu,\tau)|\leq Me^{\alpha\nu+\beta\tau},(\forall)\alpha,\beta,M\in\mathbb{R}^+.$$

Это дает

$$\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty e^{-r_1\nu-r_2\tau}\odot\Phi(\nu,\tau)d\nu d\tau\leq M\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty e^{-\nu(r_1-\alpha)}e^{-\tau(r_2-\beta)}d\nu d\tau.$$

Таким образом мы имеем

$$\lim_{r_1\to\infty, r_2\to\infty} \phi(r_1, r_2) = \frac{M}{(r_1-\alpha)(r_2-\beta)}, \text{ для } r_1 > \alpha, r_2 > \beta.$$

Теорема 3.1.15. *Нечеткое двойное преобразование Лапласа для нечеткозначной функции Φ, дифференцируемой первого порядка, имеет вид*

Случай 1: когда Φ сильно обобщенно частично дифференцируемо по ν, мы имеем

1. Если Φ дифференцируемо по типу (1), то

$$\mathcal{L}^{\nu}\mathcal{L}^{\tau}[\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(\nu,\tau)] = r_1 \odot \phi(r_1, r_2) \ominus \phi(0, r_2)$$

2. Если Φ дифференцируемо по типу (2), то

$$\mathcal{L}^{\nu}\mathcal{L}^{\tau}[\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(\nu,\tau)] = \ominus[\phi(0, r_2) - r_1 \odot \phi(r_1, r_2).$$

Случай 2: когда Φ сильно обобщенно частично дифференцируемо по τ, мы имеем

1. Если Φ дифференцируемо по типу (1), то

$$\mathcal{L}^{\nu}\mathcal{L}^{\tau}[\frac{\partial\Phi}{\partial\tau}(\nu,\tau)] = r_2 \odot \phi(r_1, r_2) \ominus \phi(r_1, 0)$$

2. Если Φ дифференцируемо по типу (2), то

$$\mathcal{L}^{\nu}\mathcal{L}^{\tau}[\frac{\partial\Phi}{\partial\tau}(\nu,\tau)] = \ominus[\phi(r_1, 0) - r_1 \odot \phi(r_1, r_2).$$

Доказательство. Используя определение нечеткого двойного преобразования Лапласа, мы имеем

$$\mathcal{L}^{\nu}\mathcal{L}^{\tau}[\frac{\partial\Phi}{\partial\tau}(\nu,\tau)] = \int_0^{\infty} e^{-r_2\tau} \odot (\int_0^{\infty} e^{-r_2\tau} \odot \frac{\partial\Phi}{\partial\tau}(\nu,\tau) d\nu) d\tau. \tag{3.1.2}$$

Используя теорему 3.1.3, имеем

$$(\int\limits_0^\infty e^{-r_2\tau} \odot \frac{\partial \Phi}{\partial \tau}(\nu, \tau) d\nu) = r_1 \odot \phi(r_1, \tau) \ominus \Phi(0, \tau). \tag{3.1.3}$$

Используя уравнение (3.1.3) в уравнении (3.1.2), получим

$$\mathcal{L}^\nu \mathcal{L}^\tau [\frac{\partial \Phi}{\partial \tau}(\nu, \tau)] = r_1 \odot \phi(r_1, r_2) \ominus \phi(0, r_2).$$

Это завершает наше доказательство.

Теорема 3.1.16. *Для нечеткой частной производной второго порядка по* ν *нечеткое двойное преобразование Лапласа имеет вид*

Случай 1: когда Φ *дифференцируемо по* v, *мы имеем*

1. Если Φ *и* $\frac{\partial \Phi(\nu,\tau)}{\partial \nu}$ *дифференцируемы по типу (1), то*

$$\mathcal{L}^\nu \mathcal{L}^\tau [\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2}(\nu, \tau)] = r_1^2 \odot \phi(r_1, r_2) \ominus r_1 \odot \phi(0, r_2) \ominus \frac{\partial \phi(0, r_2)}{\partial \nu}.$$

2. Если Φ *дифференцируема по типу (2)* Φ *и* $\frac{\partial \Phi(\nu,\tau)}{\partial \nu}$ *дифференцируема по типу (2), то*

$$\mathcal{L}^\nu \mathcal{L}^\tau [\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2}(\nu, \tau)] = -\frac{\partial \Phi(0, r_2)}{\partial \nu} \ominus (-r_1^2 \odot \phi(r_1, r_2)) \ominus r_1 \odot \phi(0, r_2).$$

3. Если Φ *дифференцируема по типу (2)* Φ *и* $\frac{\partial \Phi(\nu,\tau)}{\partial \nu}$ *дифференцируема по типу (1), то*

$$\mathcal{L}^\nu \mathcal{L}^\tau [\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2}(\nu, \tau)] = -r_1 \odot \phi(0, r_2) \ominus (-r_1^2 \odot \phi(r_1, r_2)) \ominus \frac{\partial \Phi(0, r_2)}{\partial \nu}.$$

4. Если оба Φ *и* $\frac{\partial \Phi(\nu,\tau)}{\partial \nu}$ *дифференцируемы по типу (2), то*

$$\mathcal{L}^\nu \mathcal{L}^\tau [\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2}(\nu, \tau)] = r_1^2 \odot \phi(r_1, r_2) \ominus r_1 \odot \phi(0, r_2) - \frac{\partial \phi(0, r_2)}{\partial \nu}.$$

Случай 2: для частной производной второго порядка по τ *двойное преобразование Лапласа*

1. Если Φ и $\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(\nu,\tau)$ дифференцируемы по типу (1), то

$$\mathcal{L}^{\nu}\mathcal{L}^{\tau}[\frac{\partial^2\Phi}{\partial\tau^2}(\nu,\tau)] = r_2^2 \odot \phi(r_1,r_2) \ominus r_2 \odot \phi(r_1,0) \ominus \frac{\partial \phi(r_1,0)}{\partial \tau}.$$

2. Если Φ дифференцируема по типу (1) Φ и $\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(\nu,\tau)$ дифференцируема по типу (2), то

$$\mathcal{L}^{\nu}\mathcal{L}^{\tau}[\frac{\partial^2\Phi}{\partial\tau^2}(\nu,\tau)] = -\frac{\partial \phi(r_1,0)}{\partial \tau} \ominus (-r_2^2 \odot \phi(r_1,r_2)) \ominus r_2 \odot \phi(r_1,0).$$

3. Если Φ дифференцируема по типу (2) Φ и $\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(\nu,\tau)$ дифференцируема по типу (1), то

$$\mathcal{L}^{\nu}\mathcal{L}^{\tau}[\frac{\partial^2\Phi}{\partial\tau^2}(\nu,\tau)] = -r_2 \odot \phi(r_1,0) \ominus (-r_2^2 \odot \phi(r_1,r_2)) \ominus \frac{\partial \Phi(r_1,0)}{\partial \tau}.$$

4. Если оба Φ и $\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(\nu,\tau)$ дифференцируемы по типу (2), то

$$\mathcal{L}^{\nu}\mathcal{L}^{\tau}[\frac{\partial^2\Phi}{\partial\tau^2}(\nu,\tau)] = r_2^2 \odot \phi(r_1,r_2) \ominus r_2 \odot \phi(0,r_2) - \frac{\partial \phi(r_1,0)}{\partial \tau}.$$

Теорема 3.1.17. *Для нечеткозначной функции, дифференцируемой по ν и τ, нечеткое двойное преобразование Лапласа имеет следующий вид*

1. В случае дифференцируемости $\Phi(\nu,\tau)$ по типу (1) по ν и τ имеем

$$\mathcal{L}^{\nu}\mathcal{L}^{\tau}[\frac{\partial^2\Phi}{\partial\nu\partial\tau}(\nu,\tau)] = r_1 r_2 \odot \phi(r_1,r_2) \ominus r_1 \odot \phi(r_1,0) \ominus r_2 \odot \phi(0,r_2) + \Phi(0,0).$$

2. В случае дифференцируемости $\Phi(\nu,\tau)$ по типу (2) по ν и τ имеем

$$\mathcal{L}^{\nu}\mathcal{L}^{\tau}[\frac{\partial^2\Phi}{\partial\nu\partial\tau}(\nu,\tau)] = \Phi(0,0) \ominus r_2 \odot \phi(0,r_2) - \ominus[(-r_2 \odot \phi(r_1,0) - \ominus r_1, r_2 \odot \phi(r_1,r_2))].$$

3. В случае дифференцируемости $\Phi(\nu,\tau)$ по типу (1) по ν и дифференцируемости по типу (2) по τ имеем

$$\mathcal{L}^{\nu}\mathcal{L}^{\tau}[\frac{\partial^2\Phi}{\partial\nu\partial\tau}(\nu,\tau)] = [-\ominus r_1 r_2 \odot \phi(r_1,r_2) - r_1 \odot \phi(r_1,0)] \ominus - r_2 \odot \phi(0,r_2) - \ominus \Phi(0,0).$$

4. В случае дифференцируемости $\Phi(\nu,\tau)$ по типу (2) по ν и дифференцируемости по типу (1) по τ имеем

$$\mathcal{L}^{\nu}\mathcal{L}^{\tau}[\frac{\partial^2\Phi}{\partial\nu\partial\tau}(\nu,\tau)] = -\ominus[r_1r_2\odot\phi(r_1,r_2)\ominus r_1\odot\phi(r_1,0)]-[r_2\odot\phi(0,r_2)-\ominus\Phi(0,0)].$$

Доказательство. Приведем доказательство для случая (2). Другие случаи аналогичны.

Так как Φ дифференцируемо типа (2) по ν, то

$$\mathcal{L}^{\nu}[\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(\nu,\tau)] = -\Phi(0,\tau) - \ominus r_1\odot\phi(r_1,\tau). \tag{3.1.4}$$

Если $\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}$ дифференцируема по типу (2) по τ, то

$$\mathcal{L}^{\nu}\mathcal{L}^{\tau}[\frac{\partial^2\Phi}{\partial\nu\partial\tau}(\nu,\tau)] = l^{\tau}[\frac{\partial}{\partial\tau}(\Phi(0,\tau)) - \ominus\frac{\partial}{\partial\tau}(r_1\odot\phi(r_1,\tau))]. \tag{3.1.5}$$

Теперь применим преобразование Лапласа для τ, и получаем

$$\mathcal{L}^{\nu}\mathcal{L}^{\tau}[\frac{\partial^2\Phi}{\partial\nu\partial\tau}(\nu,\tau)] = \Phi(0,0)\ominus r_2\odot\phi(0,r_2)-\ominus[(-r_2\odot\phi(r_1,0)-\ominus r_1,r_2\odot\phi(r_1,r_2))].$$

Это завершает доказательство.

Теорема 3.1.18. *Для нечеткозначной функции, у которой существует нечеткое двойное преобразование Лапласа, получим*

$$\mathcal{L}^{\nu}\mathcal{L}^{\tau}[e^{\alpha\nu+\beta\tau}\odot\Phi(\nu,\tau)] = \phi(r_1-\alpha, r_2-\beta).$$

Доказательство. Используя определение нечеткого двойного преобразования Лапласа, получим

$$\mathcal{L}^{\nu}\mathcal{L}^{\tau}[e^{\alpha\nu+\beta\tau}\odot\Phi(\nu,\tau)] = \int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\infty} e^{-r_2\tau}e^{-r_1\nu}e^{\alpha\nu+\beta\tau}\odot\Phi(\nu,\tau)d\nu d\tau.$$

Это приводит к

$$\mathcal{L}^{\nu}\mathcal{L}^{\tau}[e^{\alpha\nu+\beta\tau}\odot\Phi(\nu,\tau)]=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-(r_2-\beta)\tau}e^{-(r_1-\alpha)\tau}e^{\alpha\nu+\beta\tau}\odot\Phi(\nu,\tau)d\nu d\tau.$$

Таким образом, мы получаем искомый результат.

Теорема 3.1.19. *Для нечеткозначной функции, у которой существует нечеткое двойное преобразование Лапласа, имеем*

$$\mathcal{L}^{\nu}\mathcal{L}^{\tau}[\nu\tau\odot\Phi(\nu,\tau)]=(-1)^{1+1}\odot\frac{\partial^2\phi(r_1,r_2)}{\partial r_1\partial r_2}.$$

Доказательство. Если мы возьмем сильно обобщенную частную производную по r_1 и r_2, то получим

$$\frac{\partial^2\phi(r_1,r_2)}{\partial r_1\partial r_2}=(-1)(-1)\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-r_2\tau}e^{-r_1\nu}\odot\Phi(\nu\tau)d\nu d\tau.$$

Это можно записать как

$$\frac{\partial^2\phi(r_1,r_2)}{\partial r_1\partial r_2}=(-1)^{1+1}\odot\mathcal{L}^{\nu}\mathcal{L}^{\tau}[\nu\tau\Phi(\nu,\tau)],$$

или можем записать

$$\mathcal{L}^{\nu}\mathcal{L}^{\tau}[\nu\tau\Phi(\nu,\tau)]=(-1)^{1+1}\odot\frac{\partial^2\phi(r_1,r_2)}{\partial r_1\partial r_2}.$$

В общем, у нас есть

$$\mathcal{L}^{\nu}\mathcal{L}^{\tau}[\nu^p\tau^q\Phi(\nu,\tau)]=(-1)^{p+q}\odot\frac{\partial^{p+q}\phi(r_1,r_2)}{\partial r_1^p\partial r_2^q}.$$

Теорема 3.1.20. *(Вторая теорема о переносе). Для нечеткозначной функции, у которой существует нечеткое двойное преобразование Лапла-*

са, вторая теорема о переносе в нечетком смысле имеет вид

$$\mathcal{L}^{\nu}\mathcal{L}^{\tau}[\Phi(\nu-\eta,\tau-\mu)\odot U(\nu-\eta,\tau-\mu)] = e^{-r_1\eta}e^{-r_2\mu}\odot\phi(r_1,r_2),$$

где $U(\nu,\tau)$ *— единичная ступенчатая функция Хевисайда, определяемая формулой*

$U(\nu-\eta,\tau-\mu)=1$, *когда* $\nu>\eta$, *и* $\tau>\mu$,

$U(\nu-\eta,\tau-\mu)=0$, *когда* $\nu<\eta$, *и* $\tau<\mu$.

Доказательство. Используя определение нечеткого двойного преобразования Лапласа, получаем

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{\nu}\mathcal{L}^{\tau}[\Phi(\nu-\eta,\tau-\mu)\odot U(\nu-\eta,\tau-\mu)] \;&=\; \int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty e^{-r_1\nu}e^{-r_2\tau}\odot\Phi(\nu-\eta,\tau-\mu)\odot\\ &\quad\odot U(\nu-\eta,\tau-\mu)d\nu d\tau,\\ &=\; \int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty e^{-r_1\nu}e^{-r_2\tau}\odot\\ &\quad\odot\Phi(\nu-\eta,\tau-\mu)d\nu d\tau.\end{aligned}$$

Положим $\nu-\eta=a, \tau-\mu=b$, получим

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{\nu}\mathcal{L}^{\tau}[\Phi(\nu-\eta,\tau-\mu)\odot U(\nu-\eta,\tau-\mu)] \;&=\; e^{-r_1\nu}e^{-r_2\tau}\odot\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty e^{-r_1\nu}e^{-r_2\tau}\odot\\ &\quad\odot\Phi(a,b)\odot dadb\\ &=\; e^{-r_1\nu}e^{-r_2\tau}\odot\phi(r_1,r_2).\end{aligned}$$

Определение 3.1.21. *Если* $\Phi(\nu,\tau)$ *— нечеткозначная функция, а* $\Psi(\nu,\tau)$ *— вещественнозначная функция, то свертка в нечетком смысле определяется как*

$$(\Phi\circ\circ\Psi)(\nu,\tau)=\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\Phi(q,r)\odot\Psi(\nu-q,\tau-r)dqdr.$$

Теорема 3.1.22. *Для нечеткого двойного преобразования Лапласа теорема о свертке дается формулой*

$$\mathcal{L}^{\nu}\mathcal{L}^{\tau}\big[(\Phi \circ \circ \Psi)(\nu, \tau)\big] = \mathcal{L}^{\nu}\mathcal{L}^{\tau}\big[\Phi(\nu, \tau)\big] \odot \mathcal{L}^{\nu}\mathcal{L}^{\tau}\big[\Psi(\nu, \tau)\big].$$

3.2. Нечеткое дробноподобное двойное преобразование Лапласа

Теперь мы обобщим понятие нечеткого двойного преобразования Лапласа до нечеткого дробноподобного двойного преобразования Лапласа.

Определение 3.2.1. *Нечеткое дробноподобное двойное преобразование Лапласа для нечеткозначной функции* $\Phi(\nu,\tau)$ *есть*

$$\mathcal{L}^{\nu}\mathcal{L}^{\tau}[\Phi(\nu,\tau)] = \phi(r_1,r_2) = \int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\infty} e^{-r_2\frac{\tau^\delta}{\delta}}e^{-r_1\frac{\nu^\Psi}{\Psi}} \odot \Phi(\nu,\tau)\nu^{\Psi-1}\tau^{\delta-1}d\nu d\tau,$$

где интеграл в определении должен сходиться.

Мы можем записать приведенное выше определение в виде

$$\mathcal{L}^{\nu}_{\Psi}\mathcal{L}^{\tau}_{\delta}[\Phi(\nu,\tau)] = [\mathcal{L}^{\nu}_{\Psi}\mathcal{L}^{\tau}_{\delta}[\Phi_*(\nu,\tau)], \mathcal{L}^{\nu}_{\Psi}\mathcal{L}^{\tau}_{\delta}[\Phi^*(\nu,\tau)]].$$

Нечеткое дробноподобное двойное преобразование Лапласа является линейным. т. е. для констант α и β и нечеткозначных функций $\Phi(\nu,\tau)$ и $\Psi(\nu,\tau)$ имеем

$$\mathcal{L}^{\nu}_{\Psi}\mathcal{L}^{\tau}_{\delta}[\alpha\odot\Phi(\nu,\tau)+\beta\odot\Psi(\nu,\tau)] = \alpha\odot\mathcal{L}^{\nu}_{\Psi}\mathcal{L}^{\tau}_{\delta}[\Phi(\nu,\tau)] + \beta\odot\mathcal{L}^{\nu}_{\Psi}\mathcal{L}^{\tau}_{\delta}[\Psi(\nu,\tau)].$$

Определение 3.2.2. *Нечеткое дробноподобное обратное двойное преобразование Лапласа определяется как*

$$\mathcal{L}^{\nu-1}_{\Psi}\mathcal{L}^{\tau-1}_{\delta}[\phi(r_1,r_2)] = \Phi(\nu,\tau) = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\int\limits_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} e^{-r_1\frac{\nu^\Psi}{\Psi}}\odot e^{-r_2\frac{\tau^\delta}{\delta}}\odot\phi(r_1,r_2)\nu^{\Psi-1}\tau^{\delta-1}dr_1dr_2.$$

Хотя нечеткое дробноподобное двойное преобразование Лапласа существует для большого числа нечеткозначных функций, оно существует не всегда. Например, нечеткого дробноподобного двойного преобразования Лапласа для $\Phi(\nu,\tau) = \eta\odot e^{\frac{\nu^{2\Psi}}{2\Psi}+\frac{\tau^{2\delta}}{2\delta}}$ не существует, поскольку интеграл не сходится.

Здесь мы даем критерии существования нечеткого дробноподобного двойного преобразования Лапласа.

Определение 3.2.3. *Нечеткозначная функция* $\Phi(\nu,\tau)$ *имеет экспоненциальный порядок, если для некоторых вещественных констант* α,β *получаем* $\sup_{\nu,\tau>0}|\Phi(\nu,\tau)| \le Me^{\alpha\frac{\nu^\Psi}{\Psi}+\beta\frac{\tau^\delta}{\delta}}$.

Теорема 3.2.4. *Пусть* $\Phi(\nu,\tau)$ *имеет экспоненциальный порядок и непрерывен на отрезке* $[0,\infty)$, *тогда нечеткое дробноподобное двойное преобразование Лапласа* Φ *существует.*

Доказательство. Поскольку Φ имеет экспоненциальный порядок, мы имеем

$$|\Phi(\nu,\tau)| \le Me^{\alpha\frac{\nu^\Psi}{\Psi}+\beta\frac{\tau^\delta}{\delta}},$$

Теперь у нас есть

$$\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty e^{-r_2\frac{\tau^\delta}{\delta}}e^{-r_1\frac{\nu^\Psi}{\Psi}}\odot|\Phi(\nu,\tau)|\nu^{\Psi-1}\tau^{\delta-1}d\nu d\tau \le$$

$$\le M\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty e^{-\frac{\nu^\Psi}{\Psi}(r_1-\alpha)}e^{-\frac{\tau^\delta}{\delta}(r_2-\beta)}\nu^{\Psi-1}\tau^{\delta-1}d\nu d\tau$$

Теперь, выполнив нечеткое дробноподобное интегрирование и взяв $\lim_{r_{1\to\infty},r_{2\to\infty}}$, мы имеем

$$\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty e^{-r_1\frac{\nu^\Psi}{\Psi}}e^{-r_2\frac{\tau^\delta}{\delta}}\odot|\Phi(\nu,\tau)|\nu^{\Psi-1}\tau^{\delta-1}d\nu d\tau \le$$

$$\frac{M}{(r_1-\alpha)(r_2-\beta)},\text{ для } r_1>\alpha, r_2>\beta.$$

Итак мы имеем

$$\lim_{r_{1\to\infty},r_{2\to\infty}}\varphi(r_1,r_2)=0.$$

Доказано.

Связь между нечетким двойным преобразованием Лапласа и нечетким дробноподобным двойным преобразованием Лапласа.

Лемма 3.2.5. $\mathcal{L}_\Psi^\nu\mathcal{L}_\delta^\tau[\Phi(\nu,\tau)]=\mathcal{L}^\nu\mathcal{L}^\tau[\phi((\Psi\nu)^{\frac{1}{\Psi}},(\delta\tau)^{\frac{1}{\delta}})(r_1,r_2)]$.

Доказательство. Из определения 3.2.1 имеем

$$\mathcal{L}_{\Psi}^{\nu}\mathcal{L}_{\delta}^{\tau}[\Phi(\nu,\tau)] = \int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-r_2\frac{\tau^\delta}{\delta}} e^{-r_1\frac{\nu^\Psi}{\Psi}} \odot \Phi(\nu,\tau)\nu^{\Psi-1}\tau^{\delta-1}d\nu d\tau$$

Подставляя $\frac{\tau^\delta}{\delta} = t, \frac{\nu^\Psi}{\Psi} = u$ мы имеем

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\Psi}^{\nu}\mathcal{L}_{\delta}^{\tau}[\Phi(\nu,\tau)] &= \int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-r_2 t}e^{-r_1 u} \odot \Phi((u\Psi)^{\frac{1}{\Psi}},(t\delta)^{\frac{1}{\delta}})dtdu,\\ &= \mathcal{L}^{\nu}\mathcal{L}^{\tau}[\phi((\Psi\nu)^{\frac{1}{\Psi}},(\delta\tau)^{\frac{1}{\delta}})(r_1,r_2)].\end{aligned}$$

Теорема 3.2.6. *Нечеткое дробноподобное двойное преобразование Лапласа, применяемое к сильно обобщенной дробноподобной частной производной функции $\Phi(\nu,\tau)$ определяется в четырех случаях.*

Случай 1: Относительно ν, имеем два случая:

1. Если Φ дифференцируемо по типу $(\Psi-1)$, то

$$\mathcal{L}^{\nu}\mathcal{L}^{\tau}[\frac{\partial^\Psi\Phi}{\partial\nu^\Psi}(\nu,\tau)] = r_1\odot\phi(r_1,r_2)\ominus\phi(0,r_2).$$

2. Если Φ дифференцируемо по типу $(\Psi-2)$, то

$$\mathcal{L}^{\nu}\mathcal{L}^{\tau}[\frac{\partial^\Psi\Phi}{\partial\nu^\Psi}(\nu,\tau)] = \ominus[\phi(0,r_2) - r_1\odot\phi(r_1,r_2).$$

Случай 2: Относительно τ, имеем также два случая:

1. Если Φ дифференцируемо по типу $(\delta-1)$, то

$$\mathcal{L}^{\nu}\mathcal{L}^{\tau}[\frac{\partial^\Psi\Phi}{\partial\tau^\Psi}(\nu,\tau)] = r_2\odot\phi(r_1,r_2)\ominus\phi(r_1,0).$$

2. Если Φ дифференцируемо по типу $(\delta-2)$, то

$$\mathcal{L}^{\nu}\mathcal{L}^{\tau}[\frac{\partial^\Psi\Phi}{\partial\tau^\Psi}(\nu,\tau)] = \ominus[\phi(r_1,0) - r_2\odot\phi(r_1,r_2).$$

Теорема 3.2.7. *Когда мы применяем нечеткое дробноподобное двойное преобразование Лапласа к нечеткозначной функции, которая является сильно обобщенной дробноподобной дифференцируемой по частям, то мы имеем два случая.*

Случай 1: когда мы применяем нечеткое дробноподобное двойное преобразование Лапласа к сильно обобщенному дробноподобному частному дифференцируемому порядка 2Ψ *по* ν, *мы имеем четыре случая, которые*

1. Если и Φ, *и* $\frac{\partial^{\Psi}\Phi}{\partial\nu^{\Psi}}$ *дифференцируемы по типу* $(\Psi-1)$, *то имеем*

$$\mathcal{L}_{\Psi}^{\nu}\mathcal{L}_{\delta}^{\tau}[\frac{\partial^{2\Psi}\Phi}{\partial\nu^{2\Psi}}(\nu,\tau)] = r_1^2\odot\phi(r_1,r_2)\ominus r_1\odot\phi(0,r_2)\ominus\frac{\partial^{\Psi}\phi(0,r_2)}{\partial\nu^{\Psi}}.$$

2. Если Φ *дифференцируема по типу* $(\Psi-1)$ *и* $\frac{\partial^{\Psi}\Phi}{\partial\nu^{\Psi}}$ *дифференцируемы по типу* $(\Psi-2)$, *то*

$$\mathcal{L}_{\Psi}^{\nu}\mathcal{L}_{\delta}^{\tau}[\frac{\partial^{2\Psi}\Phi}{\partial\nu^{2\Psi}}(\nu,\tau)] = -\frac{\partial^{\Psi}\phi(0,r_2)}{\partial\nu^{\Psi}}\ominus(-r_1^2\odot\phi(r_1,r_2))\ominus r_1\odot\phi(0,r_2).$$

3. Если Φ *дифференцируема по типу* $(\Psi-2)$ *и* $\frac{\partial^{\Psi}\Phi}{\partial\nu^{\Psi}}$ *дифференцируемы по типу* $(\Psi-1)$, *то*

$$\mathcal{L}_{\Psi}^{\nu}\mathcal{L}_{\delta}^{\tau}[\frac{\partial^{2\Psi}\Phi}{\partial\nu^{2\Psi}}(\nu,\tau)] = -r_1\odot\phi(0,r_2)\ominus(-r_1^2\odot\phi(r_1,r_2))\ominus\frac{\partial^{\Psi}\phi(0,r_2)}{\partial\nu^{\Psi}}.$$

4. Если и Φ, *и* $\frac{\partial^{\Psi}\Phi}{\partial\nu^{\Psi}}$ *дифференцируемы по типу* $(\Psi-2)$, *то*

$$\mathcal{L}_{\Psi}^{\nu}\mathcal{L}_{\delta}^{\tau}[\frac{\partial^{2\Psi}\Phi}{\partial\nu^{2\Psi}}(\nu,\tau)] = -r_1^2\odot\phi(r_1,r_2)\ominus r_1\odot\phi(0,r_2)-\frac{\partial^{\Psi}\phi(0,r_2)}{\partial\nu^{\Psi}}.$$

Случай 2. Когда мы применяем нечеткое дробноподобное двойное преобразование Лапласа к сильно обобщенному дробноподобному частному дифференцируемому порядка 2Ψ *по* ν, *мы имеем четыре случая:*

1. Если и Φ, *и* $\frac{\partial^{\delta}\Phi}{\partial\tau^{\delta}}$ *дифференцируемы по типу* $(\delta-1)$, *то имеем*

$$\mathcal{L}_{\Psi}^{\nu}\mathcal{L}_{\delta}^{\tau}[\frac{\partial^{2\delta}\Phi}{\partial\tau^{2\delta}}(\nu,\tau)] = r_2^2\odot\phi(r_1,r_2)\ominus r_2\odot\phi(r_1,0)\ominus\frac{\partial^{\delta}\phi(r_1,0)}{\partial\nu^{\delta}}.$$

2. Если Φ дифференцируема по типу $(\delta-1)$ и $\frac{\partial^\delta \Phi}{\partial \tau^\delta}$ дифференцируемы по типу $(\delta-2)$, то

$$\mathcal{L}_\Psi^\nu \mathcal{L}_\delta^\tau [\frac{\partial^{2\delta}\Phi}{\partial \tau^{2\delta}}(\nu,\tau)] = -\frac{\partial^\delta \phi(r_1,0)}{\partial \tau^\delta} \ominus (-r_2^2 \odot \phi(r_1,r_2)) \ominus r_2 \odot \phi(r_1,0).$$

3. Если Φ дифференцируема по типу $(\delta-2)$ и $\frac{\partial^\delta \Phi}{\partial \tau^\delta}$ дифференцируемы по типу $(\delta-1)$, то

$$\mathcal{L}_\Psi^\nu \mathcal{L}_\delta^\tau [\frac{\partial^{2\delta}\Phi}{\partial \tau^{2\delta}}(\nu,\tau)] = -r_2 \odot \phi(r_1,0) \ominus (-r_2^2 \odot \phi(r_1,r_2)) \ominus \frac{\partial^\delta \phi(r_1,0)}{\partial \tau^\delta}.$$

4. Если и Φ, и $\frac{\partial^\delta \Phi}{\partial \tau^\delta}$ дифференцируемы по типу $(\delta-2)$, то

$$\mathcal{L}_\Psi^\nu \mathcal{L}_\delta^\tau [\frac{\partial^{2\delta}\Phi}{\partial \tau^{2\delta}}(\nu,\tau)] = -r_2^2 \odot \phi(r_1,r_2) \ominus r_2 \odot \phi(r_1,0) - \frac{\partial^\delta \phi(r_1,0)}{\partial \tau^\delta}.$$

Теорема 3.2.8. *Для нечеткозначной функции, у которой существует нечеткое дробноподобное двойное преобразование Лапласа, первая теорема о переносе в нечетком дробноподобном смысле имеет следующий вид*

$$\mathcal{L}_\Psi^\nu \mathcal{L}_\delta^\tau [e^{\alpha\frac{\nu^\Psi}{\Psi}+\beta\frac{\tau^\delta}{\delta}} \odot \Phi(\nu,\tau)] = \phi(r_1-\alpha, r_2-\beta).$$

Теорема 3.2.9. *Для нечеткозначной функции, у которой существует нечеткое дробноподобное двойное преобразование Лапласа, вторая теорема о переносе в нечетком дробноподобном смысле имеет следующий вид*

$$\mathcal{L}_\Psi^\nu \mathcal{L}_\delta^\tau [\Phi(\nu-\eta,\tau-\mu) \odot U(\nu-\eta,\tau-\mu)] = e^{-r_1\frac{\eta^\Psi}{\Psi}-r_2\frac{\mu^\delta}{\delta}} \odot \phi(r_1,r_2),$$

где $U(\nu,\tau)$ - единичная ступенчатая функция Хевисайда, определяемая формулой

$U(\nu-\eta,\tau-\mu)=1$, когда $\nu>\eta$, и $\tau>\mu$,

$U(\nu-\eta,\tau-\mu)=0$, когда $\nu<\eta$, и $\tau<\mu$,

Теперь мы определим свертку в нечетком дробноподобном смысле, а затем сформулируем теорему о свертке.

Определение 3.2.10. *Для нечеткозначной функции Φ и вещественнозначной функции Ψ свертка в нечетком дробноподобном смысле определяется как*

$$(\Phi \circ \circ \Psi)(\nu, \tau) = \int_0^{\nu} \int_0^{\tau} \Phi(q, r) \odot \Psi(\nu - q, \tau - r) q^{\Psi - 1} dq r^{\delta - 1} dr.$$

Замечание 3.2.11. *Если мы подставим $w = \nu - q, u = \tau - r$ в вышеприведенное определение 3.2.10, то получим*

$$\begin{aligned}(\Phi \circ \circ \Psi)(\nu, \tau) &= \int_0^{\nu} \int_0^{\tau} \Psi(w, u) \odot \Phi(\nu - w, \tau - u) w^{\Psi - 1} dw u^{\delta - 1} du, \\ &= (\Psi^{\varphi} \Phi)(\nu, \tau)\end{aligned}$$

Таким образом, нечеткая дробноподобная свертка обладает коммутативным свойством.

Теорема 3.2.12. *Теорема свертки в нечетком дробноподобном смысле дается формулой*

$$\mathcal{L}_{\Psi}^{\nu} \mathcal{L}_{\delta}^{\tau} [\Phi^{\circ\circ} \Psi(\nu, \tau)] = \mathcal{L}_{\Psi}^{\nu} \mathcal{L}_{\delta}^{\tau} [\Phi(\nu, \tau)] \odot \mathcal{L}_{\Psi}^{\nu} \mathcal{L}_{\delta}^{\tau} [\Psi(\nu, \tau)].$$

3.2.1. Нечеткие дробноподобные уравнения в частных производных порядка Ψ

Сначала мы решаем нечеткие дробноподобные уравнения в частных производных Ψ-го порядка, которые имеют общий вид, заданный формулой

$$\frac{\partial^{\Psi} \Phi(\nu, \tau)}{\partial \nu^{\Psi}} + \alpha \odot \frac{\partial^{\delta} \Phi(\nu, \tau)}{\partial \tau^{\delta}} =$$

$$= F(\nu, \tau, \Phi(\nu, \tau)), \Phi(\nu, 0) = g(\nu), \Phi(0, \tau) = h(\tau), \qquad (3.2.1)$$

где $\alpha \in \mathbb{R}, \Phi(\nu, \tau)$ — нечеткозначная функция, $h(\tau)$ и $g(\nu)$ — нечеткие числа, F—нечеткозначная линейная относительно $\Phi(\nu, \tau)$ функция.

Для решения уравнения (3.2.1) с нечетким дробноподобным двойным преобразованием Лапласа процедура выглядит следующим образом:

Во-первых, возьмем нечеткие дробноподобные двойные преобразования Лапласа в обеих частях уравнения (3.2.1), получаем

$$\mathcal{L}_{\Psi}^{\nu}\mathcal{L}_{\delta}^{\tau}[\frac{\partial^{\Psi}\Phi(\nu,\tau)}{\partial\nu^{\Psi}}+\alpha\odot\frac{\partial^{\delta}\Phi(\nu,\tau)}{\partial\tau^{\delta}}]=\mathcal{L}_{\Psi}^{\nu}\mathcal{L}_{\delta}^{\tau}[F(\nu,\tau,\Phi)].$$

Теперь у нас есть следующие четыре случая.

Случай 1: если Φ дифференцируемо по типу $(\delta-1)$ по τ и дифференцируемо типа $(\Psi-1)$, оба относительно ν, то

$$\mathcal{L}_{\Psi}^{\nu}\mathcal{L}_{\delta}^{\tau}[\frac{\partial^{\Psi}\Phi_{*}(\nu,\tau,\gamma)}{\partial\nu^{\Psi}}+\alpha\odot\frac{\partial^{\delta}\Phi_{*}(\nu,\tau,\gamma)}{\partial\tau^{\delta}}]=\mathcal{L}_{\Psi}^{\nu}\mathcal{L}_{\delta}^{\tau}[F_{*}(\nu,\tau,\Phi)],$$

$$\mathcal{L}_{\Psi}^{\nu}\mathcal{L}_{\delta}^{\tau}[\frac{\partial^{\Psi}\Phi^{*}(\nu,\tau,\gamma)}{\partial\nu^{\Psi}}+\alpha\odot\frac{\partial^{\delta}\Phi^{*}(\nu,\tau,\gamma)}{\partial\tau^{\delta}}]=\mathcal{L}_{\Psi}^{\nu}\mathcal{L}_{\delta}^{\tau}[F^{*}(\nu,\tau,\Phi)].$$

Отсюда следует, что

$$r_1\phi_{*}(r_1,r_2,\gamma)+\alpha(r_2\phi_{*}(r_1,r_2,\gamma))=G_{*}(r_1)+\alpha H_{*}(r_2)+\mathcal{L}_{\Psi}^{\nu}\mathcal{L}_{\delta}^{\tau}[F_{*}(\nu,\tau,\Phi)],$$

$$r_1\phi^{*}(r_1,r_2,\gamma)+\alpha(r_2\phi^{*}(r_1,r_2,\gamma))=G^{*}(r_1)+\alpha H^{*}(r_2)+\mathcal{L}_{\Psi}^{\nu}\mathcal{L}_{\delta}^{\tau}[F^{*}(\nu,\tau,\Phi)].$$

Случай 2: если Φ дифференцируемо по типу $(\Psi-2)$ по ν и дифференцируемо по типу $(\delta-1)$ по τ, то

$$\mathcal{L}_{\Psi}^{\nu}\mathcal{L}_{\delta}^{\tau}[\frac{\partial^{\Psi}\Phi^{*}(\nu,\tau,\gamma)}{\partial\nu^{\Psi}}+\alpha\odot\frac{\partial^{\delta}\Phi_{*}(\nu,\tau,\gamma)}{\partial\tau^{\delta}}]=\mathcal{L}_{\Psi}^{\nu}\mathcal{L}_{\delta}^{\tau}[F^{*}(\nu,\tau,\Phi)],$$

$$\mathcal{L}_{\Psi}^{\nu}\mathcal{L}_{\delta}^{\tau}[\frac{\partial^{\Psi}\Phi_{*}(\nu,\tau,\gamma)}{\partial\nu^{\Psi}}+\alpha\odot\frac{\partial^{\delta}\Phi^{*}(\nu,\tau,\gamma)}{\partial\tau^{\delta}}]=\mathcal{L}_{\Psi}^{\nu}\mathcal{L}_{\delta}^{\tau}[F_{*}(\nu,\tau,\Phi)].$$

Отсюда следует, что

$$r_1\phi^{*}(r_1,r_2,\gamma)+\alpha(r_2\phi_{*}(r_1,r_2,\gamma))=G^{*}(r_1)+\alpha H_{*}(r_2)+\mathcal{L}_{\Psi}^{\nu}\mathcal{L}_{\delta}^{\tau}[F^{*}(\nu,\tau,\Phi)],$$

$$r_1\phi_{*}(r_1,r_2,\gamma)+\alpha(r_2\phi^{*}(r_1,r_2,\gamma))=G_{*}(r_1)+\alpha H^{*}(r_2)+\mathcal{L}_{\Psi}^{\nu}\mathcal{L}_{\delta}^{\tau}[F_{*}(\nu,\tau,\Phi)].$$

Случай 3: если Φ дифференцируемо по типу $(\delta-2)$ по τ и дифференцируемо по типу $(\Psi-1)$ по ν, то

$$\mathcal{L}_{\Psi}^{\nu}\mathcal{L}_{\delta}^{\tau}[\frac{\partial^{\Psi}\Phi_{*}(\nu,\tau,\gamma)}{\partial\nu^{\Psi}}+\alpha\odot\frac{\partial^{\delta}\Phi_{*}(\nu,\tau,\gamma)}{\partial\tau^{\delta}}]=\mathcal{L}_{\Psi}^{\nu}\mathcal{L}_{\delta}^{\tau}[F^{*}(\nu,\tau,\Phi)],$$

$$\mathcal{L}_{\Psi}^{\nu}\mathcal{L}_{\delta}^{\tau}[\frac{\partial^{\Psi}\Phi^{*}(\nu,\tau,\gamma)}{\partial\nu^{\Psi}}+\alpha\odot\frac{\partial^{\delta}\Phi_{*}(\nu,\tau,\gamma)}{\partial\tau^{\delta}}]=\mathcal{L}_{\Psi}^{\nu}\mathcal{L}_{\delta}^{\tau}[F_{*}(\nu,\tau,\Phi)].$$

Отсюда следует, что

$$r_1\phi^{*}(r_1,r_2,\gamma)+\alpha(r_2\phi^{*}(r_1,r_2,\gamma))=G_{*}(r_1)+\alpha H^{*}(r_2)+\mathcal{L}_{\Psi}^{\nu}\mathcal{L}_{\delta}^{\tau}[F^{*}(\nu,\tau,\Phi)],$$

$$r_1\phi^{*}(r_1,r_2,\gamma)+\alpha(r_2\phi_{*}(r_1,r_2,\gamma))=G^{*}(r_1)+\alpha H_{*}(r_2)+\mathcal{L}_{\Psi}^{\nu}\mathcal{L}_{\delta}^{\tau}[F_{*}(\nu,\tau,\Phi)].$$

Случай 4: если Φ дифференцируемо по типу $(\Psi-2)$ по обеим τ и ν, то

$$\mathcal{L}_{\Psi}^{\nu}\mathcal{L}_{\delta}^{\tau}[\frac{\partial^{\Psi}\Phi^{*}(\nu,\tau,\gamma)}{\partial\nu^{\Psi}}+\alpha\odot\frac{\partial^{\delta}\Phi^{*}(\nu,\tau,\gamma)}{\partial\tau^{\delta}}]=\mathcal{L}_{\Psi}^{\nu}\mathcal{L}_{\delta}^{\tau}[F^{*}(\nu,\tau,\Phi)],$$

$$\mathcal{L}_{\Psi}^{\nu}\mathcal{L}_{\delta}^{\tau}[\frac{\partial^{\Psi}\Phi_{*}(\nu,\tau,\gamma)}{\partial\nu^{\Psi}}+\alpha\odot\frac{\partial^{\delta}\Phi_{*}(\nu,\tau,\gamma)}{\partial\tau^{\delta}}]=\mathcal{L}_{\Psi}^{\nu}\mathcal{L}_{\delta}^{\tau}[F_{*}(\nu,\tau,\Phi)].$$

Отсюда следует, что

$$r_1\phi^{*}(r_1,r_2,\gamma)+\alpha(r_2\phi^{*}(r_1,r_2,\gamma))=G^{*}(r_1)+\alpha H^{*}(r_2)+\mathcal{L}_{\Psi}^{\nu}\mathcal{L}_{\delta}^{\tau}[F^{*}(\nu,\tau,\Phi)],$$

$$r_1\phi_{*}(r_1,r_2,\gamma)+\alpha(r_2\phi_{*}(r_1,r_2,\gamma))=G_{*}(r_1)+\alpha H_{*}(r_2)+\mathcal{L}_{\Psi}^{\nu}\mathcal{L}_{\delta}^{\tau}[F_{*}(\nu,\tau,\Phi)].$$

Решая приведенную выше систему уравнений и беря нечеткое дробноподобное двойное преобразование Лапласа, получаем решение в виде $\Phi(\nu,\tau,\gamma)=[\Phi_{*}(\nu,\tau,\gamma),\Phi^{*}(\nu,\tau,\gamma)]$.

Теперь мы приведем пример, чтобы продемонстрировать осуществимость нашего метода.

Пример 3.2.13. *Рассмотрим нечеткое дробноподобное дифференциальное уравнение в частных производных порядка* Ψ

$$\frac{\partial^\Psi \Phi(\nu,\tau)}{\partial \nu^\Psi} = \frac{\partial^\delta \Phi(\nu,\tau)}{\partial \tau^\Psi},$$
$$\Phi(\nu,0) = (1,2,3), \Phi(0,\tau) = (-1,0,1)$$

Применяя нечеткое дробноподобное двойное преобразование Лапласа, мы получим четыре случая.

Случай 1: если Φ дифференцируемо типа $(\delta-1)$ по τ и дифференцируема типа $(\Psi - 1)$ по ν, то

$$r_2 \odot \phi(r_1, r_2) \ominus \phi(r_1, 0) = r_1 \odot \phi(r_1, r_2) \ominus \phi(0, r_2).$$

Теперь у нас есть

$$r_2\phi_*(r_1, r_2, \gamma) - \phi_*(r_1, 0, \gamma) = r_1\phi_*(r_1, r_2, \gamma) - \phi_*(0, r_2, \gamma),$$

$$r_2\phi^*(r_1, r_2, \gamma) - \phi^*(r_1, 0, \gamma) = r_1\phi^*(r_1, r_2, \gamma) - \phi^*(0, r_2, \gamma).$$

Теперь, после решения и использования граничного и начального условий, мы имеем
$$\phi_*(r_1, r_2, \gamma) = \frac{(1+\gamma)}{r_1(r_1 - r_2)} - \frac{\gamma - 1}{r_2(r_1 - r_2)},$$
$$\phi^*(r_1, r_2, \gamma) = \frac{3-\gamma}{r_1(r_1 - r_2)} - \frac{1-\gamma}{r_2(r_1 - r_2)}.$$

Случай 2: если Φ дифференцируемо типа $(\delta-1)$ по τ и дифференцируема типа $(\Psi - 2)$ по ν, то

$$-\phi(r_1, 0) \ominus (-r_2 \odot \phi(r_1, r_2)) = -\phi(0, r_2) \ominus (-r_1 \odot \phi(r_1, r_2)).$$

Теперь у нас есть

$$r_2\phi_*(r_1, r_2, \gamma) - \phi_*(r_1, 0, \gamma) = r_1\phi^*(r_1, r_2, \gamma) - \phi^*(0, r_2, \gamma),$$

$$r_2\phi^*(r_1, r_2, \gamma) - \phi^*(r_1, 0, \gamma) = r_1\phi_*(r_1, r_2, \gamma) - \phi_*(0, r_2, \gamma).$$

Теперь, после решения и использования граничного и начального условий, мы имеем

$$\phi_*(r_1,r_2,\gamma)=\frac{r_2(1+\gamma)}{r_1(r_2^2-r_1^2)}-\frac{(\gamma-1)}{r_2^2-r_1^2}+\frac{(3-\gamma)}{r_2^2-r_1^2}-\frac{r_1(\gamma-1)}{r_2(r_2^2-r_1^2)},$$

$$\phi^*(r_1,r_2,\gamma)=\frac{1+\gamma}{r_2^2-r_1^2}-\frac{r_1^2(1-\gamma)}{r_2(r_2^2-r_1^2)}+\frac{r_2(3-\gamma)}{r_1(r_2^2-r_1^2)}-\frac{r_2(\gamma-1)}{(r_2^2-r_1^2)}.$$

Случай 3: когда $\Phi(\nu,\tau)$ дифференцируемо типа $(\Psi-1)$ по ν и дифференцируемо типа $(\delta-2)$ по τ , то

$$-\phi(r_1,0)\ominus(-r_2\odot\phi(r_1,r_2))=r_1\odot\phi(r_1,r_2)\ominus\phi(0,r_2).$$

Теперь у нас есть

$$r_2\phi^*(r_1,r_2,\gamma)-\phi^*(r_1,0,\gamma)=r_1\phi_*(r_1,r_2,\gamma)-\phi_*(0,r_2,\gamma),$$

$$r_2\phi_*(r_1,r_2,\gamma)-\phi_*(r_1,0,\gamma)=r_1\phi^*(r_1,r_2,\gamma)-\phi^*(0,r_2,\gamma).$$

Теперь, после решения и использования граничного и начального условий, мы имеем

$$\phi_*(r_1,r_2,\gamma)=\frac{(3-\gamma)}{r_2^2-r_1^2}-\frac{r_1(\gamma-1)}{r_2(r_2^2-r_1^2)}+r_2\frac{(1+\gamma)}{r_2^2-r_1^2}-\frac{r_1(\gamma-1)}{r_2(r_2^2-r_1^2)},$$

$$\phi^*(r_1,r_2,\gamma)=\frac{1+\gamma}{r_2^2-r_1^2}-\frac{r_1^2(1-\gamma)}{r_2(r_2^2-r_1^2)}+\frac{r_2(3-\gamma)}{r_1(r_2^2-r_1^2)}-\frac{(1-\gamma)}{r_2^2-r_1^2}.$$

Случай 4: когда $\Phi(\nu,\tau)$ дифференцируемо типа $(\Psi-2)$ по ν и дифференцируемо типа $(\delta-2)$ по τ , то

$$-\phi(r_1,0)\ominus(-r_2\odot\phi(r_1,r_2))=-\phi(0,r_2)\ominus(-r_1\odot\phi(r_1,r_2)).$$

Теперь у нас есть

$$r_2\phi^*(r_1,r_2,\gamma)-\phi^*(r_1,0,\gamma)=r_1\phi^*(r_1,r_2,\gamma)-\phi^*(0,r_2,\gamma),$$

$$r_2\phi_*(r_1,r_2,\gamma)-\phi_*(r_1,0,\gamma)=r_1\phi_*(r_1,r_2,\gamma)-\phi_*(0,r_2,\gamma).$$

Теперь, после решения и использования граничного и начального условий, мы имеем

$$\phi_*(r_1, r_2, \gamma) = \frac{(1+\gamma)}{r_1(r_1 - r_2} - \frac{\gamma - 1}{r_2(r_1 - r_2)},$$

$$\phi^*(r_1, r_2, \gamma) = \frac{3-\gamma}{r_1(r_1 - r_2} - \frac{1 - \gamma}{r_2(r_1 - r_2)}.$$

Теперь, решив приведенные выше системы уравнений и применив обратное нечеткое дробноподобное двойное преобразование Лапласа, мы получим решение.

Пример 3.2.14. *Рассмотрим следующее нечеткое дробноподобное дифференциальное уравнение в частных производных:*

$$\begin{cases} \frac{\partial^\Psi \Phi(\nu,\tau,\gamma)}{\partial \nu^\Psi} = 3\frac{\partial^\delta \Phi(\nu,\tau,\gamma)}{\partial \tau^\delta} + \nu, \\ \Phi(\nu, 0, \gamma) = 3\nu[\gamma - 1, 1 - \gamma] + \frac{\nu^2}{2}, \\ \Phi(0, \tau, \gamma) = \tau[\gamma - 1, 1 - \gamma]. \end{cases}$$

У нас четыре случая.

Случай 1: если Φ дифференцируемо типа $(\delta - 1)$ по τ и дифференцируемо типа $(\Psi - 1)$ по ν.

Случай 2: если Φ дифференцируемо типа $(\delta - 1)$ по τ и дифференцируемо типа $(\Psi - 2)$ по ν.

Случай 3: если Φ дифференцируемо типа $(\Psi - 1)$ относительно ν и дифференцируемо типа $(\delta - 2)$ относительно τ.

Случай 4: если Φ дифференцируемо типа $(\Psi - 2)$ относительно ν и дифференцируемо типа $(\delta - 2)$ относительно τ.

Из нечеткого дробноподобного двойного преобразования Лапласа мы можем получить аналитические решения для всех вышеперечисленных случаев, как показано в последнем примере. Здесь мы рассматриваем графическое представление случая 1, остальное то же самое. При $\delta = \Psi = 1$ получаем

$$\begin{cases} \Phi_*(\nu, \tau, \gamma) = \frac{\nu^2}{2} + 3(\gamma - 1)\nu + (\gamma - 1)\tau, \\ \Phi^*(\nu, \tau, \gamma) = \frac{\nu^2}{2} + 3(1 - \gamma)\nu + (1 - \gamma)\tau. \end{cases}$$

Тогда $\Phi(\nu,\tau,\gamma)=[\Phi_*(\nu,\tau,\gamma),\Phi^*(\nu,\tau,\gamma)]$ для всех $0\le\gamma\le 1$. Для $\gamma=0$ имеем следующее:

$$\Phi(\nu,\tau,\gamma)=[\frac{\nu^2}{2}-3\nu-\tau,\frac{\nu^2}{2}+3\nu+\tau]$$

а его график приведен на рис. 3.2.1.

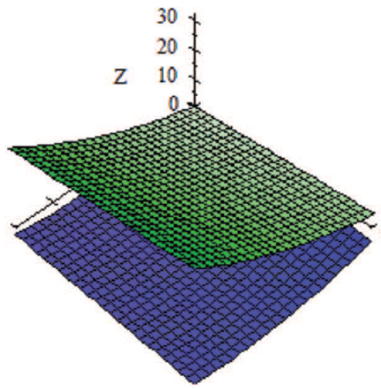

Рис. 3.2.1 График $\Phi(\nu,\tau,\gamma)=[\Phi_*(\nu,\tau,\gamma),\Phi^*(\nu,\tau,\gamma)]$ с $\gamma=0$

Для $\gamma=0.5$ имеем следующее:

$$\Phi(\nu,\tau,\gamma)=[\frac{\nu^2}{2}+3(-0.5)\nu+(-0.5)\tau,\frac{\nu^2}{2}+3(0.5)\nu+(0.5)\tau]$$

а его график приведен на рис. 3.2.2.

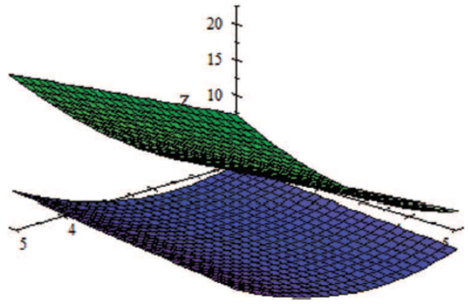

Рис. 3.2.2 График $\Phi(\nu,\tau,\gamma)=[\Phi_*(\nu,\tau,\gamma),\Phi^*(\nu,\tau,\gamma)]$ с $g=0.5$

Для $\gamma=0.7$ имеем следующее:

$$\Phi(\nu,\tau,\gamma)=[\frac{\nu^2}{2}+3(-0.3)\nu+(-0.3)\tau,\frac{\nu^2}{2}+3(0.3)\nu+(0.3)\tau]$$

а его график приведен на рис. 3.2.3.

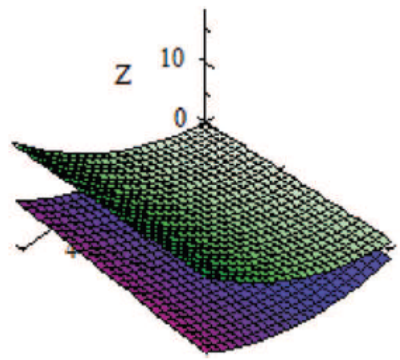

Рис. 3.2.3 График $\Phi(\nu,\tau,\gamma)=[\Phi_*(\nu,\tau,\gamma),\Phi^*(\nu,\tau,\gamma)]$ с $g=0.7$

Для $\gamma=1$ имеем следующее:

$$\Phi(\nu,\tau,\gamma)=[\frac{\nu^2}{2},\frac{\nu^2}{2}]$$

а его график приведен на рис. 3.2.4.

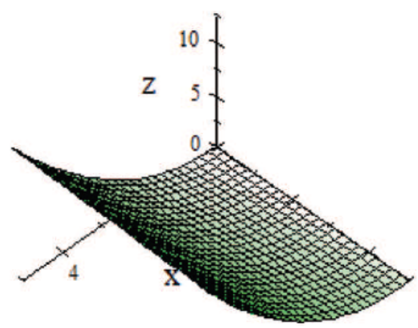

Рис. 3.2.4 График $\Phi(\nu,\tau,\gamma)=[\Phi_*(\nu,\tau,\gamma),\Phi^*(\nu,\tau,\gamma)]$ с $g=0.7$

3.2.2. Нечеткие дробноподобные уравнения в частных производных порядка 2Ψ

В этом подразделе мы решаем нечеткое дробноподобное уравнение теплопроводности и нечеткое дробноподобное волновое уравнение, используя нечеткое дробноподобное двойное преобразование Лапласа.

Уравнение теплопроводности

Нечеткое дробноподобное уравнение теплопроводности в одном измерении имеет множество форм, таких как

$$\frac{\partial^\delta}{\partial\tau^\delta}(\frac{\partial^\delta\Phi}{\partial\tau^\delta}) = \alpha\frac{\partial^2\Phi}{\partial\nu^2}.$$

Также эта форма использовалась некоторыми исследователями.

$$\frac{\partial^\delta\Phi}{\partial\tau^\delta} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial\nu^2}.$$

А мы используем нечеткое дробноподобное уравнение теплопроводности в следующем виде

$$\frac{\partial^\delta\Phi}{\partial\tau^\delta} = \alpha\odot\frac{\partial^2\Phi}{\partial\nu^2},$$
$$\Phi(\nu,0) = F(\nu), \Phi(0,\tau) = h(\tau), \Phi(a,\tau) = g(\tau),$$

где Φ- температура стержня постоянного сечения и однородного материала, лежащего вдоль оси, а α – константа диффузии. Мы приняли начальные и граничные условия как нечеткие числа. Для простоты возьмем $\alpha = 1$.

Для решения нечеткого дробноподобного уравнения теплопроводности с нечетким дробноподобным двойным преобразованием Лапласа процедура выглядит следующим образом:

Сначала применим нечеткое дробноподобное двойное преобразование Лапласа к обеим частям нечеткого дробноподобного уравнения теплопроводности.

$$\mathcal{L}^\nu_\Psi\mathcal{L}^\tau_\delta[\frac{\partial^{2\Psi}\Phi(\nu,\tau)}{\partial\nu^{2\Psi}}] = \mathcal{L}^\nu_\Psi\mathcal{L}^\tau_\delta[\frac{\partial^2\Phi(\nu,\tau)}{\partial\tau^\delta}].$$

Нечеткое дробноподобное уравнение теплопроводности преобразуется в дробноподобную краевую задачу.

1. Когда $\Phi(\nu,\tau)$ дифференцируемо типа $(\delta-1)$, мы имеем четыре случая, связанных с четырьмя типами производных по порядку 2Ψ.

Случай 1. Если Φ и $\frac{\partial^\Psi\Phi(\nu,\tau)}{\partial\nu^\Psi}$ - сильно обобщенный дробноподобный частично дифференцируемый типа $(\Psi-1)$, то получаем следующую систему уравнений

$$r_1^2\phi_*(r_1,r_2)-r_1\phi_*(0,r_2)-\frac{\partial^\Psi\phi_*(0,r_2)}{\partial\nu^\Psi}=r_2\phi_*(r_1,r_2,\gamma)-\phi_*(r_1,0,\gamma),$$

$$r_1^2\phi^*(r_1,r_2)-r_1\phi^*(0,r_2)-\frac{\partial^\Psi\phi^*(0,r_2)}{\partial\nu^\Psi}=r_2\phi^*(r_1,r_2,\gamma)-\phi^*(r_1,0,\gamma).$$

Случай 2: Если Φ и $\frac{\partial^\Psi\Phi(\nu,\tau)}{\partial\nu^\Psi}$- сильно обобщенный конформный частичный дифференцируемый типа $(\Psi-2)$, то получаем следующую систему уравнений

$$r_1^2\phi_*(r_1,r_2)-r_1\phi_*(0,r_2)-\frac{\partial^\Psi\phi^*(0,r_2)}{\partial\nu^\Psi}=r_2\phi_*(r_1,r_2,\gamma)-\phi_*(r_1,0,\gamma),$$

$$r_1^2\phi^*(r_1,r_2)-r_1\phi^*(0,r_2)-\frac{\partial^\Psi\phi_*(0,r_2)}{\partial\nu^\Psi}=r_2\phi^*(r_1,r_2,\gamma)-\phi^*(r_1,0,\gamma).$$

Случай 3: Если Φ сильно обобщенный дробноподобный частично дифференцируемый типа $(\Psi-2)$ и $\frac{\partial^\Psi\Phi(\nu,\tau)}{\partial\nu^\Psi}$ дифференцируемый типа $(\Psi-1)$, то, применяя нечеткий дробноподобный двойной дифференцируемый метод Лапласа преобразуя обе стороны, получим следующую систему уравнений

$$r_1^2\phi_*(r_1,r_2)-r_1\phi_*(0,r_2)-\frac{\partial^\Psi\phi^*(0,r_2)}{\partial\nu^\Psi}=r_2\phi^*(r_1,r_2,\gamma)-\phi^*(r_1,0,\gamma),$$

$$r_1^2\phi^*(r_1,r_2)-r_1\phi^*(0,r_2)-\frac{\partial^\Psi\phi_*(0,r_2)}{\partial\nu^\Psi}=r_2\phi_*(r_1,r_2,\gamma)-\phi^*(r_1,0,\gamma).$$

Случай 4: Если Φ сильно обобщенный дробноподобный частично дифференцируемый типа $(\Psi-1)$ и $\frac{\partial^\Psi\Phi(\nu,\tau)}{\partial\nu^\Psi}$ дифференцируемый типа $(\Psi-2)$, то, применяя нечеткий дробноподобный двойной дифференцируемый метод Лапласа преобразуя обе стороны, получим следующую систему уравнений

$$r_1^2\phi_*(r_1,r_2)-r_1\phi_*(0,r_2)-\frac{\partial^\Psi\phi_*(0,r_2)}{\partial\nu^\Psi}=r_2\phi^*(r_1,r_2,\gamma)-\phi^*(r_1,0,\gamma),$$

$$r_1^2\phi^*(r_1,r_2)-r_1\phi^*(0,r_2)-\frac{\partial^\Psi\phi^*(0,r_2)}{\partial\nu^\Psi}=r_2\phi_*(r_1,r_2,\gamma)-\phi_*(r_1,0,\gamma).$$

2. Когда $\Phi(\nu,\tau)$- сильно обобщенная конформная частичная дифферен-

цируемая система типа $(\delta - 2)$, мы снова имеем четыре случая, связанные с четырьмя типами производных по порядку 2Ψ.

Случай 1. Если Φ и $\frac{\partial^{\Psi}\Phi(\nu,\tau)}{\partial\nu^{\Psi}}$ - сильно обобщенный дробноподобный частично дифференцируемый типа $(\Psi - 1)$, то получаем следующую систему уравнений

$$r_1^2\phi_*(r_1,r_2) - r_1\phi_*(0,r_2) - \frac{\partial^{\Psi}\phi_*(0,r_2)}{\partial\nu^{\Psi}} = r_2\phi^*(r_1,r_2,\gamma) - \phi^*(r_1,0,\gamma),$$

$$r_1^2\phi^*(r_1,r_2) - r_1\phi^*(0,r_2) - \frac{\partial^{\Psi}\phi^*(0,r_2)}{\partial\nu^{\Psi}} = r_2\phi_*(r_1,r_2,\gamma) - \phi_*(r_1,0,\gamma).$$

Случай 2: Если Φ и $\frac{\partial^{\Psi}\Phi(\nu,\tau)}{\partial\nu^{\Psi}}$- сильно обобщенный дробноподобный частично дифференцируемый типа $(\Psi - 2)$, то получаем следующую систему уравнений

$$r_1^2\phi_*(r_1,r_2) - r_1\phi_*(0,r_2) - \frac{\partial^{\Psi}\phi^*(0,r_2)}{\partial\nu^{\Psi}} = r_2\phi^*(r_1,r_2,\gamma) - \phi^*(r_1,0,\gamma),$$

$$r_1^2\phi^*(r_1,r_2) - r_1\phi^*(0,r_2) - \frac{\partial^{\Psi}\phi_*(0,r_2)}{\partial\nu^{\Psi}} = r_2\phi_*(r_1,r_2,\gamma) - \phi_*(r_1,0,\gamma).$$

Случай 3: Если Φ сильно обобщенный дробноподобный частично дифференцируемый типа $(\Psi - 2)$ и $\frac{\partial^{\Psi}\Phi(\nu,\tau)}{\partial\nu^{\Psi}}$ дифференцируемый типа $(\Psi - 1)$, то, применяя нечеткий дробноподобный двойной дифференцируемый метод Лапласа преобразуя обе стороны, получим следующую систему уравнений

$$r_1^2\phi_*(r_1,r_2) - r_1\phi_*(0,r_2) - \frac{\partial^{\Psi}\phi^*(0,r_2)}{\partial\nu^{\Psi}} = r_2\phi_*(r_1,r_2,\gamma) - \phi_*(r_1,0,\gamma),$$

$$r_1^2\phi^*(r_1,r_2) - r_1\phi^*(0,r_2) - \frac{\partial^{\Psi}\phi_*(0,r_2)}{\partial\nu^{\Psi}} = r_2\phi^*(r_1,r_2,\gamma) - \phi^*(r_1,0,\gamma).$$

Случай 4: Если Φ сильно обобщенный дробноподобный частично дифференцируемый типа $(\Psi - 1)$ и $\frac{\partial^{\Psi}\Phi(\nu,\tau)}{\partial\nu^{\Psi}}$ дифференцируемый типа $(\Psi - 2)$, то, применяя нечеткий дробноподобный двойной дифференцируемый метод Лапласа преобразуя обе стороны, получим следующую систему уравнений

$$r_1^2\phi_*(r_1,r_2)-r_1\phi_*(0,r_2)-\frac{\partial^\Psi\phi_*(0,r_2)}{\partial\nu^\Psi}=r_2\phi_*(r_1,r_2,\gamma)-\phi_*(r_1,0,\gamma),$$

$$r_1^2\phi^*(r_1,r_2)-r_1\phi^*(0,r_2)-\frac{\partial^\Psi\phi^*(0,r_2)}{\partial\nu^\Psi}=r_2\phi^*(r_1,r_2,\gamma)-\phi^*(r_1,0,\gamma).$$

Теперь, решив приведенные выше системы уравнений и применив граничные условия, а затем реализовав нечеткое дробноподобное двойное обратное преобразование Лапласа, мы получим решение в виде $\Phi(\nu,\tau,\gamma)=[\Phi_*(\nu,\tau,\gamma),\Phi^*(\nu,\tau,\gamma)]$.

Теперь мы объясним преимущества нашего метода на примере.

Пример 4.3. Рассмотрим дробноподобное нечеткое уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial^\delta\Phi}{\partial\tau^\delta}=\frac{\partial^{2\Psi}\Phi}{\partial\nu^{2\Psi}},$$
$$\Phi(\nu,0)=0,\Phi(0,\tau)=(-1,0,1),$$
$$\frac{\partial^\Psi\Phi(0,\tau)}{\partial\nu^\Psi}=(1,2,3).$$

Нечеткое дробноподобное двойное преобразование Лапласа подразумевает восемь случаев описанной выше системы. Здесь мы рассмотрим четыре нетривиальных случая решения.

Случай 1: Если Φ и $\frac{\partial^\Psi\Phi}{\partial\nu^\Psi}$ дифференцируемы типа $(\Psi-1)$ по ν и Φ дифференцируема типа $(\delta-1)$ по τ, то, применяя нечеткое дробноподобное двойное преобразование Лапласа на обе стороны, получим

$$\phi_*(r_1,r_2,\gamma)=\frac{-r_1}{r_2(r_2-r_1^2)}(\gamma-1)-\frac{(1+\gamma)}{r_2(r_2-r_1^2)},$$

$$\phi^*(r_1,r_2,\gamma)=\frac{-r_1}{r_2(r_2-r_1^2)}(1-\gamma)-\frac{3-\gamma}{r_2(r_2-r_1^2)}.$$

Случай 2: Если Φ и $\frac{\partial^\Psi\Phi}{\partial\nu^\Psi}$ дифференцируемы типа $(\Psi-1)$ по ν и Φ дифференцируемы типа $(\delta-2)$ по τ, то, применяя нечеткое дробноподобное двойное преобразование Лапласа на обе стороны, получим

$$\phi_*(r_1,r_2,\gamma)=\frac{-r_1^3}{r_2(r_2^2-r_1^4)}(\gamma-1)-\frac{r_1^2(1+\gamma)}{r_2(r_2^2-r_1^4)}-\frac{r_1(1-\gamma)}{(r_2^2-r_1^4)}-\frac{(3-\gamma)}{(r_2^2-r_1^4)},$$

$$\phi^*(r_1,r_2,\gamma)=\frac{-r_1}{r_2^2-r_1^4}(\gamma-1)-\frac{r^2(1+\gamma)}{r_1(r_2^2-r_1^4)}-\frac{r_1^3(1-\gamma)}{r_2(r_2^2-r_1^4)}-\frac{r_1^2(3-\gamma)}{r_2(r_2^2-r_1^4)}.$$

Случай 3: Когда Φ и $\frac{\partial^\Psi\Phi}{\partial\nu^\Psi}$ дифференцируемы типа $(\Psi-2)$ по ν и Φ дифференцируемы типа $(\delta-1)$ по τ, то, применяя нечеткое дробноподобное двойное преобразование Лапласа на обе стороны, получим

$$\phi_*(r_1,r_2,\gamma)=\frac{-r_1(1-\gamma)}{r_2(r_2^2-r_1^4)}-\frac{1+\gamma}{r_2^2-r_1^4}-\frac{r_1^3(\gamma-1)}{r_2(r_2^2-r_1^4)}-\frac{r_1^2(3-\gamma)}{(r_2^2-r_1^4)},$$

$$\phi^*(r_1,r_2,\gamma)=\frac{-r_1^3(1-\gamma)}{r_2(r_2^2-r_1^4)}-\frac{r_1^2(1+\gamma)}{r_2(r_2^2-r_1^4)}-\frac{r_1(\gamma-1)}{r_2^2-r_1^4}-\frac{(3-\gamma)}{r_2^2-r_1^4}.$$

Случай 4: Когда Φ дифференцируемы типа $(\Psi-1)$ по ν и $\frac{\partial^\Psi\Phi}{\partial\nu^\Psi}$ Φ дифференцируемы типа $(\Psi-2)$ по ν и Φ дифференцируемы типа $(\delta-1)$ по τ, то, применяя нечеткое дробноподобное двойное преобразование Лапласа на обе стороны, получим

$$\phi_*(r_1,r_2,\gamma)=\frac{-r_1^3(\gamma-1)}{r_2(r_2^2-r_1^4)}-\frac{r_1^2(1+\gamma)}{r_2(r_2^2-r_1^4)}-\frac{r_1(\gamma-1)}{(r_2^2-r_1^4)}-\frac{3-\gamma}{(r_2^2-r_1^4)},$$

$$\phi^*(r_1,r_2,\gamma)=\frac{-r_1(1-\gamma)}{r_2^2-r_1^4}-\frac{1+\gamma}{r_2^2-r_1^4}-\frac{r_1^3(1-\gamma)}{r_2(r_2^2-r_1^4)}-\frac{r_1^2(3-\gamma)}{r_2(r_2^2-r_1^4)}.$$

Волновое уравнение

Давайте рассмотрим следующее волновое дробноподобное одномерное нечеткое уравнение

$$\frac{\partial^{2\delta}\Phi}{\partial\tau^{2\delta}}=\alpha^2\odot\frac{\partial^{2\Psi}\Phi}{\partial\nu^{2\Psi}},$$

$$\Phi(\nu,0)=\psi(\nu),\frac{\partial^\delta\Phi(\nu,0)}{\partial\tau^\delta}=F(\nu),$$

$$\Phi(0,\tau)=g(\tau),\frac{\partial^{\Psi}\Phi(0,\tau)}{\partial\nu^{\Psi}}=h(\tau).$$

Для решения нечеткого дробноподобного волнового уравнения с нечетким дробноподобным двойным преобразованием Лапласа процедура выглядит следующим образом:

Сначала применим нечеткое дробноподобное двойное преобразование Лапласа к обеим частям нечеткого дробноподобного волнового уравнения. В результате мы имеем шестнадцать возможных случаев.

1. Сначала возьмем $\Phi(\nu,\tau)$ и $\frac{\partial^{\Psi}(\nu,\tau)}{\partial\nu^{\Psi}}$ как дифференцируемые типа $(\Psi-1)$ по ν. Отсюда следует четыре ассоциированных случая.

Случай 1: Когда Φ и $\frac{\partial^{\delta}\Phi}{\partial\tau^{\delta}}$ — сильно обобщенные дробноподобные частично дифференцируемые типа $(\delta-1)$, то мы получаем следующий вид

$$r_2^2\phi_*(r_1,r_2)-r_2\phi_*(r_1,0)-\frac{\partial^{\delta}\phi_*(r_1,0)}{\partial\tau^{\delta}}=r_1^2\phi_*(r_1,r_2)-r_1\phi_*(0,r_2)-\frac{\partial^{\Psi}\phi_*(0,r_2)}{\partial\nu^{\Psi}},$$

$$r_2^2\phi^*(r_1,r_2)-r_2\phi^*(r_1,0)-\frac{\partial^{\delta}\phi^*(r_1,0)}{\partial\tau^{\delta}}=r_1^2\phi^*(r_1,r_2)-r_1\phi^*(0,r_2)-\frac{\partial^{\Psi}\phi^*(0,r_2)}{\partial\nu^{\Psi}},$$

Случай 2: Когда Φ и $\frac{\partial^{\delta}\Phi}{\partial\tau^{\delta}}$ — сильно обобщенные дробноподобные частично дифференцируемые типа $(\delta-2)$, то мы получаем следующий вид

$$r_2^2\phi_*(r_1,r_2)-r_2\phi_*(r_1,0)-\frac{\partial^{\delta}\phi^*(r_1,0)}{\partial\tau^{\delta}}=r_1^2\phi_*(r_1,r_2)-r_1\phi_*(0,r_2)-\frac{\partial^{\Psi}\phi_*(0,r_2)}{\partial\nu^{\Psi}},$$

$$r_2^2\phi^*(r_1,r_2)-r_2\phi^*(r_1,0)-\frac{\partial^{\delta}\phi_*(r_1,0)}{\partial\tau^{\delta}}=r_1^2\phi^*(r_1,r_2)-r_1\phi^*(0,r_2)-\frac{\partial^{\Psi}\phi^*(0,r_2)}{\partial\nu^{\Psi}}.$$

Случай 3: Когда Φ - сильно обобщенный дробноподобный частично дифференцируемый типа $(\delta-1)$ и $\frac{\partial^{\delta}\Phi}{\partial\tau^{\delta}}$- сильно обобщенный дробноподобный частично дифференцируемый типа $(\delta-2)$, то мы получаем следующий вид

$$r_2^2\phi_*(r_1,r_2)-r_2\phi_*(r_1,0)-\frac{\partial^{\delta}\phi_*(r_1,0)}{\partial\tau^{\delta}}=r_1^2\phi^*(r_1,r_2)-r_1\phi^*(0,r_2)-\frac{\partial^{\Psi}\phi^*(0,r_2)}{\partial\nu^{\Psi}},$$

$$r_2^2\phi^*(r_1,r_2)-r_2\phi_*(r_1,0)-\frac{\partial^{\delta}\phi_*(r_1,0)}{\partial\tau^{\delta}}=r_1^2\phi^*(r_1,r_2)-r_1\phi^*(0,r_2)-\frac{\partial^{\Psi}\phi^*(0,r_2)}{\partial\nu^{\Psi}}.$$

Случай 4: Когда Φ - сильно обобщенный дробноподобный частично дифференцируемый типа $(\delta-2)$ и $\frac{\partial^\delta \Phi}{\partial \tau^\delta}$- сильно обобщенный дробноподобный частично дифференцируемый типа $(\delta-1)$, то мы получаем следующий вид

$$r_2^2\phi_*(r_1,r_2) - r_2\phi_*(r_1,0) - \frac{\partial^\delta \phi^*(r_1,0)}{\partial \tau^\delta} = r_1^2\phi^*(r_1,r_2) - r_1\phi^*(0,r_2) - \frac{\partial^\Psi \phi^*(0,r_2)}{\partial \nu^\Psi},$$

$$r_2^2\phi^*(r_1,r_2) - r_2\phi^*(r_1,0) - \frac{\partial^\delta \phi_*(r_1,0)}{\partial \tau^\delta} = r_1^2\phi_*(r_1,r_2) - r_1\phi_*(0,r_2) - \frac{\partial^\Psi \phi_*(0,r_2)}{\partial \nu^\Psi}.$$

2. Теперь возьмем $\Phi(\nu,\tau)$ и $\frac{\partial^\Psi \Phi(\nu,\tau)}{\partial \nu^\Psi}$ как дифференцируемые типа $(\Psi-2)$. Отсюда следует четыре ассоциированных случая.

Случай 1: Когда Φ и $\frac{\partial^\delta \Phi}{\partial \tau^\delta}$ — сильно обобщенные дробноподобные частично дифференцируемые типа $(\delta-1)$, то мы получаем следующий вид

$$r_2^2\phi_*(r_1,r_2) - r_2\phi_*(r_1,0) - \frac{\partial^\delta \phi_*(r_1,0)}{\partial \tau^\delta} = r_1^2\phi_*(r_1,r_2) - r_1\phi_*(0,r_2) - \frac{\partial^\Psi \phi^*(0,r_2)}{\partial \nu^\Psi},$$

$$r_2^2\phi^*(r_1,r_2) - r_2\phi^*(r_1,0) - \frac{\partial^\delta \phi^*(r_1,0)}{\partial \tau^\delta} = r_1^2\phi^*(r_1,r_2) - r_1\phi^*(0,r_2) - \frac{\partial^\Psi \phi_*(0,r_2)}{\partial \nu^\Psi},$$

Случай 2: Когда Φ и $\frac{\partial^\delta \Phi}{\partial \tau^\delta}$ — сильно обобщенные дробноподобные частично дифференцируемые типа $(\delta-2)$, то мы получаем следующий вид

$$r_2^2\phi_*(r_1,r_2) - r_2\phi_*(r_1,0) - \frac{\partial^\delta \phi^*(r_1,0)}{\partial \tau^\delta} = r_1^2\phi_*(r_1,r_2) - r_1\phi_*(0,r_2) - \frac{\partial^\Psi \phi^*(0,r_2)}{\partial \nu^\Psi},$$

$$r_2^2\phi^*(r_1,r_2) - r_2\phi^*(r_1,0) - \frac{\partial^\delta \phi_*(r_1,0)}{\partial \tau^\delta} = r_1^2\phi^*(r_1,r_2) - r_1\phi^*(0,r_2) - \frac{\partial^\Psi \phi_*(0,r_2)}{\partial \nu^\Psi}.$$

Случай 3: Когда Φ - сильно обобщенный дробноподобный частично дифференцируемый типа $(\delta-1)$ и $\frac{\partial^\delta \Phi}{\partial \tau^\delta}$- сильно обобщенный дробноподобный частично дифференцируемый типа $(\delta-2)$, то мы получаем следующий вид

$$r_2^2\phi_*(r_1,r_2) - r_2\phi_*(r_1,0) - \frac{\partial^\delta \phi_*(r_1,0)}{\partial \tau^\delta} = r_1^2\phi^*(r_1,r_2) - r_1\phi^*(0,r_2) - \frac{\partial^\Psi \phi_*(0,r_2)}{\partial \nu^\Psi},$$

$$r_2^2\phi^*(r_1,r_2) - r_2\phi^*(r_1,0) - \frac{\partial^\delta \phi_*(r_1,0)}{\partial \tau^\delta} = r_1^2\phi_*(r_1,r_2) - r_1\phi_*(0,r_2) - \frac{\partial^\Psi \phi^*(0,r_2)}{\partial \nu^\Psi}.$$

Случай 4: Когда Φ - сильно обобщенный дробноподобный частично дифференцируемый типа $(\delta-2)$ и $\frac{\partial^\delta\Phi}{\partial\tau^\delta}$- сильно обобщенный дробноподобный частично дифференцируемый типа $(\delta-1)$, то мы получаем следующий вид

$$r_2^2\phi_*(r_1,r_2)-r_2\phi_*(r_1,0)-\frac{\partial^\delta\phi^*(r_1,0)}{\partial\tau^\delta}=r_1^2\phi^*(r_1,r_2)-r_1\phi^*(0,r_2)-\frac{\partial^\Psi\phi_*(0,r_2)}{\partial\nu^\Psi},$$

$$r_2^2\phi^*(r_1,r_2)-r_2\phi^*(r_1,0)-\frac{\partial^\delta\phi_*(r_1,0)}{\partial\tau^\delta}=r_1^2\phi_*(r_1,r_2)-r_1\phi_*(0,r_2)-\frac{\partial^\Psi\phi^*(0,r_2)}{\partial\nu^\Psi}.$$

3. В качестве третьего варианта возьмем Φ в качестве сильно обобщенного дробноподобного частично дифференцируемого типа $(\Psi-2)$ и $\frac{\partial^\Psi\Phi}{\partial\nu^\Psi}$ в качестве сильно обобщенного дробноподобного частично дифференцируемого типа $(\Psi-1)$, что позволяет нам имеют четыре случая, связанных с четырьмя типами производной для τ, которые задаются следующим образом:

Случай 1: Когда Φ и $\frac{\partial^\delta\Phi}{\partial\tau^\delta}$ — сильно обобщенные дробноподобные частично дифференцируемые типа $(\delta-1)$, то мы получаем следующий вид

$$r_2^2\phi^*(r_1,r_2)-r_2\phi^*(r_1,0)-\frac{\partial^\delta\phi^*(r_1,0)}{\partial\tau^\delta}=r_1^2\phi_*(r_1,r_2)-r_1\phi_*(0,r_2)-\frac{\partial^\Psi\phi^*(0,r_2)}{\partial\nu^\Psi},$$

$$r_2^2\phi_*(r_1,r_2)-r_2\phi^*(r_1,0)-\frac{\partial^\delta\phi^*(r_1,0)}{\partial\tau^\delta}=r_1^2\phi^*(r_1,r_2)-r_1\phi^*(0,r_2)-\frac{\partial^\Psi\phi_*(0,r_2)}{\partial\nu^\Psi},$$

Случай 2: Когда Φ и $\frac{\partial^\delta\Phi}{\partial\tau^\delta}$ — сильно обобщенные дробноподобные частично дифференцируемые типа $(\delta-2)$, то мы получаем следующий вид

$$r_2^2\phi^*(r_1,r_2)-r_2\phi^*(r_1,0)-\frac{\partial^\delta\phi_*(r_1,0)}{\partial\tau^\delta}=r_1^2\phi_*(r_1,r_2)-r_1\phi_*(0,r_2)-\frac{\partial^\Psi\phi^*(0,r_2)}{\partial\nu^\Psi},$$

$$r_2^2\phi_*(r_1,r_2)-r_2\phi_*(r_1,0)-\frac{\partial^\delta\phi^*(r_1,0)}{\partial\tau^\delta}=r_1^2\phi^*(r_1,r_2)-r_1\phi^*(0,r_2)-\frac{\partial^\Psi\phi_*(0,r_2)}{\partial\nu^\Psi}.$$

Случай 3: Когда Φ - сильно обобщенный дробноподобный частично дифференцируемый типа $(\delta-1)$ и $\frac{\partial^\delta\Phi}{\partial\tau^\delta}$- сильно обобщенный дробноподобный частично дифференцируемый типа $(\delta-2)$, то мы получаем следующий вид

$$r_2^2\phi_*(r_1,r_2)-r_2\phi_*(r_1,0)-\frac{\partial^\delta\phi_*(r_1,0)}{\partial\tau^\delta}=r_1^2\phi_*(r_1,r_2)-r_1\phi_*(0,r_2)-\frac{\partial^\Psi\phi^*(0,r_2)}{\partial\nu^\Psi},$$

$$r_2^2\phi^*(r_1,r_2)-r_2\phi^*(r_1,0)-\frac{\partial^\delta\phi^*(r_1,0)}{\partial\tau^\delta}=r_1^2\phi^*(r_1,r_2)-r_1\phi^*(0,r_2)-\frac{\partial^\Psi\phi_*(0,r_2)}{\partial\nu^\Psi}.$$

Случай 4: Когда Φ - сильно обобщенный дробноподобный частично дифференцируемый типа $(\delta-2)$ и $\frac{\partial^\delta\Phi}{\partial\tau^\delta}$- сильно обобщенный дробноподобный частично дифференцируемый типа $(\delta-1)$, то мы получаем следующий вид

$$r_2^2\phi_*(r_1,r_2)-r_2\phi_*(r_1,0)-\frac{\partial^\delta\phi^*(r_1,0)}{\partial\tau^\delta}=r_1^2\phi_*(r_1,r_2)-r_1\phi_*(0,r_2)-\frac{\partial^\Psi\phi^*(0,r_2)}{\partial\nu^\Psi},$$

$$r_2^2\phi^*(r_1,r_2)-r_2\phi^*(r_1,0)-\frac{\partial^\delta\phi_*(r_1,0)}{\partial\tau^\delta}=r_1^2\phi^*(r_1,r_2)-r_1\phi^*(0,r_2)-\frac{\partial^\Psi\phi_*(0,r_2)}{\partial\nu^\Psi}.$$

4. В четвертом случае мы возьмем Φ как сильно обобщенный дробноподобный частичный дифференцируемый типа $(\Psi-1)$, а $\frac{\partial^\Psi\Phi}{\partial\nu^\Psi}$ как сильно обобщенный конформный частичный дифференцируемый типа $(\Psi-2)$, что позволит нам иметь четыре случая, связанных с четырьмя типами производной для τ, которые задаются формулой

Случай 1: Когда Φ и $\frac{\partial^\delta\Phi}{\partial\tau^\delta}$ — сильно обобщенные дробноподобные частично дифференцируемые типа $(\delta-1)$, то мы получаем следующий вид

$$r_2^2\phi^*(r_1,r_2)-r_2\phi^*(r_1,0)-\frac{\partial^\delta\phi^*(r_1,0)}{\partial\tau^\delta}=r_1^2\phi_*(r_1,r_2)-r_1\phi_*(0,r_2)-\frac{\partial^\Psi\phi_*(0,r_2)}{\partial\nu^\Psi},$$

$$r_2^2\phi_*(r_1,r_2)-r_2\phi_*(r_1,0)-\frac{\partial^\delta\phi_*(r_1,0)}{\partial\tau^\delta}=r_1^2\phi^*(r_1,r_2)-r_1\phi^*(0,r_2)-\frac{\partial^\Psi\phi^*(0,r_2)}{\partial\nu^\Psi},$$

Случай 2: Когда Φ и $\frac{\partial^\delta\Phi}{\partial\tau^\delta}$ — сильно обобщенные дробноподобные частично дифференцируемые типа $(\delta-2)$, то мы получаем следующий вид

$$r_2^2\phi^*(r_1,r_2)-r_2\phi^*(r_1,0)-\frac{\partial^\delta\phi_*(r_1,0)}{\partial\tau^\delta}=r_1^2\phi_*(r_1,r_2)-r_1\phi_*(0,r_2)-\frac{\partial^\Psi\phi_*(0,r_2)}{\partial\nu^\Psi},$$

$$r_2^2\phi_*(r_1,r_2)-r_2\phi_*(r_1,0)-\frac{\partial^\delta\phi^*(r_1,0)}{\partial\tau^\delta}=r_1^2\phi^*(r_1,r_2)-r_1\phi^*(0,r_2)-\frac{\partial^\Psi\phi^*(0,r_2)}{\partial\nu^\Psi}.$$

Случай 3: Когда Φ - сильно обобщенный дробноподобный частично дифференцируемый типа $(\delta-2)$ и $\frac{\partial^\delta\Phi}{\partial\tau^\delta}$- сильно обобщенный дробноподобный частично дифференцируемый типа $(\delta - 1)$, то мы получаем следующий вид

$$r_2^2\phi_*(r_1,r_2) - r_2\phi_*(r_1,0) - \frac{\partial^\delta \phi^*(r_1,0)}{\partial \tau^\delta} = r_1^2\phi_*(r_1,r_2) - r_1\phi_*(0,r_2) - \frac{\partial^\Psi \phi_*(0,r_2)}{\partial \nu^\Psi},$$

$$r_2^2\phi^*(r_1,r_2) - r_2\phi^*(r_1,0) - \frac{\partial^\delta \phi_*(r_1,0)}{\partial \tau^\delta} = r_1^2\phi^*(r_1,r_2) - r_1\phi^*(0,r_2) - \frac{\partial^\Psi \phi^*(0,r_2)}{\partial \nu^\Psi}.$$

Случай 4: Когда Φ - сильно обобщенный дробноподобный частично дифференцируемый типа $(\delta - 1)$ и $\frac{\partial^\delta \Phi}{\partial \tau^\delta}$- сильно обобщенный дробноподобный частично дифференцируемый типа $(\delta - 2)$, то мы получаем следующий вид

$$r_2^2\phi_*(r_1,r_2) - r_2\phi_*(r_1,0) - \frac{\partial^\delta \phi_*(r_1,0)}{\partial \tau^\delta} = r_1^2\phi_*(r_1,r_2) - r_1\phi_*(0,r_2) - \frac{\partial^\Psi \phi_*(0,r_2)}{\partial \nu^\Psi},$$

$$r_2^2\phi^*(r_1,r_2) - r_2\phi^*(r_1,0) - \frac{\partial^\delta \phi^*(r_1,0)}{\partial \tau^\delta} = r_1^2\phi^*(r_1,r_2) - r_1\phi^*(0,r_2) - \frac{\partial^\Psi \phi^*(0,r_2)}{\partial \nu^\Psi}.$$

Решая приведенные выше системы уравнений и применяя нечеткое дробноподобное двойное обратное уравнение Лапласа, мы можем получить решение в виде $\Phi(\nu,\tau,\gamma) = [\Phi_*(\nu,\tau,\gamma), \Phi^*(\nu,\tau,\gamma)]$.

Теперь мы представляем пример нечеткого дробноподобного волнового уравнения, чтобы продемонстрировать обоснованность наших результатов.

Пример. Рассмотрим нечеткое дробноподобное волновое уравнение в одном измерении:

$$\frac{\partial^{2\delta}\Phi}{\partial \tau^{2\delta}} = \frac{\partial^{2\Psi}\Phi}{\partial \nu^{2\Psi}},$$

$$\Phi(0,\tau) = (0,1,2), \frac{\partial^\Psi \Phi(0,\tau)}{\partial \nu^\Psi} = (1,2,3),$$

$$\frac{\partial^\delta \Phi}{\partial \tau^\delta}(\nu,0) = 0, \Phi(\nu,0) = 0.$$

Нечеткое дробноподобное двойное преобразование Лапласа подразумевает шестнадцать возможностей. Здесь мы рассматриваем только четыре нетривиальных случая решения.

Случай 1: Когда оба Φ и $\frac{\partial^\delta \Phi}{\partial \tau^\delta}$ являются сильно обобщенным дробноподобными частично дифференцируемыми типа $(\delta - 1)$ и $\Phi(\nu,\tau)$, $\frac{\partial^\Psi \Phi}{\partial \nu^\Psi}$ дифференцируема типа $(\Psi - 1)$, то, получим

$$\phi_*(r_1,r_2,\gamma) = \frac{-r_2}{r_1(r_1^2-r_2^2)}(\gamma) - \frac{(1+\gamma)}{r_1(r_1^2-r_2^2)},$$

$$\phi^*(r_1,r_2,\gamma) = \frac{-r_2}{r_1(r_1^2-r_2^2)}(2-\gamma) - \frac{3-\gamma}{r_1(r_1^2-r_2^2)}.$$

Случай 2: Когда Φ и $\frac{\partial^\delta \Phi}{\partial \tau^\delta}$ дифференцируемыми типа $(\delta-1)$ по τ и $\Phi(\nu,\tau)$, $\frac{\partial^\Psi \Phi}{\partial \nu^\Psi}$ дифференцируема типа $(\Psi-2)$, то, получим

$$\phi_*(r_1,r_2,\gamma) = -(\gamma)\frac{-r_2^2}{r_1(r_1^4-r_2^4)} - (1+\gamma) - \frac{r_2^2}{r_1(r_1^4-r_2^4)} - \frac{r_1 r_2}{r_1^4-r_2^4}(2-\gamma) + \frac{r_1}{r_1^4-r_2^4}(3-\gamma),$$

$$\phi^*(r_1,r_2,\gamma) = -\gamma\frac{r_1}{r_1^4-r_2^4} - (1+\gamma)\frac{r_1}{r_1^4-r_2^4} + \frac{r_2^3}{r_1(r_1^4-r_2^4)}(2-\gamma) - \frac{r_2^2}{r_1(r_1^4-r_2^4)}(3-\gamma).$$

Случай 3: Когда Φ и $\frac{\partial^\delta \Phi}{\partial \tau^\delta}$ дифференцируемыми типа $(\delta-2)$ и $\Phi(\nu,\tau)$, $\frac{\partial^\Psi \Phi}{\partial \nu^\Psi}$ дифференцируема типа $(\Psi-1)$, то, получим

$$\phi_*(r_1,r_2,\gamma) = -(2-\gamma)\frac{r_1 r_2}{r_1^4-r_2^4} - (3-\gamma)\frac{r_1}{r_1^4-r_2^4} - \frac{r_2^3}{r_1(r_1^4-r_2^4)}(\gamma) - \frac{r_2^2}{r_1(r_1^4-r_2^4)}(1+\gamma),$$

$$\phi^*(r_1,r_2,\gamma) = -(2-\gamma)\frac{r_2^2}{r_1(r_1^4-r_2^4)} - (3-\gamma)\frac{r_2^2}{r_1(r_1^4-r_2^4)}\frac{r_1 r_2}{r_1^4-r_2^4}(1+\gamma) - \frac{r_1}{r_1^4-r_2^4}(1+\gamma).$$

Случай 4: Когда Φ дифференцируемыми типа $(\delta-1)$ и $\frac{\partial^\delta \Phi}{\partial \tau^\delta}$ дифференцируемыми типа $(\delta-2)$ и $\Phi(\nu,\tau)$, $\frac{\partial^\Psi \Phi}{\partial \nu^\Psi}$ дифференцируема типа $(\Psi-1)$, то, получим

$$\phi_*(r_1,r_2,\gamma) = -(2-\gamma)\frac{r_2^2}{r_1(r_1^4-r_2^4)} - (3-\gamma)\frac{r_2^2}{r_1(r_1^4-r_2^4)} - \frac{r_1 r_2}{r_1^4-r_2^4}(\gamma) + \frac{r_1}{r_1^4-r_2^4}(1+\gamma),$$

$$\phi_*(r_1,r_2,\gamma) = (2-\gamma)\frac{r_1}{r_1^4-r_2^4} - (3-\gamma)\frac{r_1}{r_1^4-r_2^4} + \frac{r_2^3}{r_1(r_1^4-r_2^4)}(\gamma) - \frac{r_2^2}{r_1(r_1^4-r_2^4)}(1+\gamma).$$

Решив вышеуказанную систему и применив нечеткое двойное обратное Лапласа, мы можем получить требуемое решение.

Заключение

Мы ввели нечеткое двойное преобразование Лапласа и нечеткое дробноподобное двойное преобразование Лапласа. Также представлены связанные свойства и теоремы для производных и интегралов преобразования. В этой главе мы применили нечеткое дробноподобное двойное преобразование Лапласа для получения решений нечетких дробноподобных УЧП (как в 1D, так и в 2D). Нечеткие дробноподобные уравнения в частных производных решаются с использованием этого подхода без преобразования в дробноподобные уравнения в частных производных, поэтому не важно находить решение уравнения в частных производных. Это самое большое преимущество этой системы. Таким образом, метод двойного преобразования Лапласа очень удобен и эффективен. Однако явные решения для каждой системы требуют обратного двойного преобразования Лапласа, которое сложно решить.

3.3. Нечеткое интегро-дифференциальное уравнение типа Урысона

Задачи наблюдения в динамических системах управления с неполной информацией и неопределенными параметрами описываются нечеткими интегро-дифференциальными уравнениями и системами таких уравнений. В этой связи актуальным является анализ разрешимости и исследование качественных свойств решений нечетких уравнений. В настоящей работе изучается конечномерная система нечетких интегро-дифференциальных уравнений с нелинейным оператором Урысона.

Задачи наблюдения в динамических системах управления с неполной информацией и неопределенными параметрами описываются нечеткими интегро-дифференциальными уравнениями и системами таких уравнений [9]. В этой связи актуальным является анализ разрешимости и исследование качественных свойств решений нечетких уравнений. Этому направлению теории дифференциальных, интегро-дифференциальных, функционально-дифференциальных уравнений и ее приложениями в различных задачах техники и естествознания посвящено большое количество опубликованных работ. В частности, в [90] рассматриваются уравнения в пространстве нечетких множеств. В работе [65] доказана теорема существования решений нелинейных интегрально-дифференциальных уравнений Вольтерра-Фредгольма. В [97] рассматриваются интегрально-дифференциальные уравнения Вольтерра в банаховых пространствах на основе теории неподвижных точек для соответствующих нелинейных операторов. В [57] вводятся меры некомпактности Хаусдорфа и Куратовского для анализа свойств уплотняющих операторов и с их помощью установлены теоремы существования решений нечетких абстрактных уравнений. В работе [6] рассматривается нечеткое нелинейное интегро-дифференциальное уравнение в том случае, когда правая часть удовлетворяет условиям типа Каратеодори и некоторым условиям роста в терминах функций от мер некомпактности Хаусдорфа и Куратовского. В настоящей работе изучается конечномерная система нечетких интегро-дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t), (Kx)(t)), x(0) = x_0, t \in I = [0, T], \tag{3.3.1}$$

где $(Kx)(t) = \int_0^t -K(t, s, x(s))ds$ – нелинейный интегральный оператор Урысона.

3.3.1. Предварительные сведения

В этом пункте приводим основные предположения и предварительные результаты, нужные нам в дальнейшем.

Пусть $\mathbb{R}^n$ – n-мерное векторное пространство с нормой $\|\cdot\|$.

Введем в рассмотрение пространство $\mathbb{E}^n$ отображений $u : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) u – является нормальным, то есть существует вектор $x_0\mathbb{R}^n$ такой, что $u(x_0) = 1$;

2) u – нечеткое выпуклое отображение, то есть

$$u(\lambda x + (1 - y)y) \geq \min\{u(x), u(y)\}$$

всякий раз, когда $x, y \in \mathbb{R}^n$ и $\lambda \in [0, 1]$;

3) u – является полунепрерывным сверху отображением, то есть для любого $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и $\varepsilon > 0$ существует $\delta(x_0, \varepsilon) > 0$ такой, что $u(x) < u(x_0) + \varepsilon$ всякий раз, когда $|x - x_0| < \delta$ и $x \in \mathbb{R}^n$;

4) замыкание множества $\{x\mathbb{R}^n, u(x) > 0\}$ компактное.

Множество $[u]^\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n : u(x) \geq \alpha\}$ называют множеством α-уровня для отображения u.

Из 1) - 4) следует, что множества α-уровня являются выпуклыми компактными подмножествами $\mathbb{R}^n$ для всех $\alpha \in [0, 1]$.

Нулевым элементом пространства $\mathbb{E}^n$ называется

$$\tilde{0}(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \neq 0, \\ 1, \text{ если } x = 0, \end{cases} \tag{3.3.2}$$

Легко проверить, что $\mathbb{E}^n$ является полулинейным полным метрическим пространством с метрикой

$$D(u,v) = \sup_{\alpha\in[0,1]} D_H([u]^\alpha, [v]^\alpha),$$

где

$$D_H(A,B) = \max\{\max_{\alpha\in A}\min_{b\in B}|a-b|, \max_{b\in B}\min_{\alpha\in A}|a-b|$$

является расстоянием Хаусдорфа между выпуклыми компактными подмножествами $\mathbb{R}^n$. Из теоремы 2.1 работы [90] следует, что $\mathbb{E}$ может быть вложено как замкнутый выпуклый конус в банахово пространство X. Отображение вложения $J : \mathbb{E}^n \to X$ является изометрическим изоморфизмом.

Функция $g : I \to \mathbb{E}^n$ называется простой, если существует конечное число попарно непересекающихся измеримых подмножеств $I_1, \ldots, I_n$ множества $I(I = \bigcup_{k=1}^n -I_K$ таких, что $g(\cdot)$ является постоянной на каждом I_K.

Отображение $f : I \to \mathbb{E}^n$ называется сильно измеримым, если существует последовательность $\{f_m\}_{m-1}^\infty$ простых функций $f_m : I \to \mathbb{E}^n$ таких, что $\lim D(f_m(t), f(t)) = 0$ для почти везде $t \in I$.

Следуя работе [121], определим интеграл от нечетких функций по уровням, то есть существует $g(t) \in \mathbb{E}^n$ такая, что

$$[g]^\alpha(t) = \int_0^t [f]^\alpha(s)ds.$$

Далее, если $g(\cdot) : I \to \mathbb{E}^n$ сильно измерима и интегрируема, то $j(g)(\cdot)$ является сильно измеримой и интегрируемой в смысле Бохнера и

$$J\left(\int_0^t g(s)ds\right) = \int_0^t J(g)(s)ds \text{ для всех } t \in I. \tag{3.3.3}$$

Напомним некоторые свойства интегрируемых нечетких множествозначных отображений, установленных в [97].

Теорема 3.3.1. *Пусть $G, K : I \to \mathbb{E}^n$ интегрируемые отображения и пусть $\lambda \in \mathbb{R}$. Имеют место следующие соотношения:*

i. $\int_0^T (G(t) + K(t))dt = \int_0^T G(t)dt + \int_0^T K(t)dt$;

ii. $\int_0^T \lambda G(t)dt = \lambda \int_0^T G(t)dt$;

iii. $D(G, K)$ *интегрируемая функция;*

iv. $D(\int_0^T G(t)dt, \int_0^T K(t)dt) = \int_0^T D(G(t), K(t))dt$.

Отображение $F : I \to \mathbb{E}^n$ называется дифференцируемым при $t \in I$ если существует $F(t) \in \mathbb{E}^n$ такое, что пределы

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(t+h) - F(t)}{h} \text{ и } \lim_{h \to 0+} \frac{F(t) - F(t-h)}{h}$$

существуют и равны $\dot{F}(t)$. В конечной точке интервала I рассматривается лишь односторонняя производная.

Пусть Y – полное метрическое пространство с метрикой $\rho y(\cdot, \cdot)$. Мера некомпактности Хаусдорфа $\beta : Y \to \mathbb{R}$ для ограниченных подмножеств A пространства Y определяется равенством

$$\begin{aligned} \beta(A) = inf\{d > o :\ &\text{А может быть покрыто конечным} \\ &\text{количеством шаров радиуса } \le d.\} \end{aligned}$$

Мера некомпактности Куратовского $\rho : Y \to \mathbb{R}$ для ограниченных подмножеств A пространства Y определяется другим равенством

$$\begin{aligned} \rho(A) = inf\{d > o : A &\text{ может быть покрыто конечным} \\ &\text{количеством множеств диаметра} \le d\}. \end{aligned}$$

Для любого ограниченного множества A введем обозначение

$$diam(A) = \sup_{a,b \in A} \rho_Y(a, b).$$

Хорошо известно, что

$$\rho(A) \le \beta(A) \le 2\rho(A). \tag{3.3.4}$$

По поводу доказательства неравенства (3.3.2) (см. например [97]).

Введем общее обозначение $\gamma(t)$ для $\beta(t)$ и $\rho(t)$ и перечислим свойства функции $\gamma(t)$:

i. $\gamma(A) = 0$ тогда и только тогда, когда A является предкомпактным, то есть замыкание $\bar{A}$ является компактным;

ii. $\gamma(A+B) = \gamma(A) + \gamma(B)$ и $\gamma(\bar{c_0}A) = \gamma(A)$;

iii. если $A \subset B$ то $\gamma(A) \le \gamma(B)$;

iv. $\gamma(A \cup B) = max(\gamma(A), \gamma(B))$;

v. γ является непрерывной относительно расстояния Хаусдорфа.

Следующая теорема доказана в [118].

Теорема 3.3.2. *Пусть X – сепарабельное банахово пространство и пусть $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ – интегрально ограниченная последовательность измеримых функций из I в X. Тогда отображение*

$$t \to \{g_n(t), n \ge 1\}$$

измеримо и

$$\beta\left(\int\limits_t^{t+h} \left\{\bigcup_{i=1}^{\infty} g_i(s)\right\} ds\right) \le \int\limits_t^{t+h} \left\{\bigcup_{i=1}^{\infty} g_i(s)\right\} ds, \tag{3.3.5}$$

где $t, t+h \in I$.

Отметим, что отображение $t \to \{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} g_i(t)\}$ является множественнозначным. По-другому, такие отображения называются мультифункциями. Интеграл в (3.3.3) определен в смысле Аумана в виде объединения значений всех интегралов от сильно измеримых функций.

Замечание 3.3.3. *Поскольку отображение вложения $J : \mathbb{E}^n \to X$ изометрическое и изоморфное, то оно сохраняет диаметр любого замкнутого* *подмножества, то есть $\rho(A) = \rho(J(A))$ для замкнутого и ограниченного множества $A \in \mathbb{R}^n$.*

Теорема 3.3.4. *Пусть $\{f_n(\cdot)\}_{n=1}^{\infty}$ – интегрально ограниченная последовательность сильно измеримых нечетких функций, определенных на I со значениями в $\mathbb{E}^n$. Тогда функция $t \to \rho(\{f_m(t), m \geq 1\})$ является измеримой и*

$$\rho\left(\int_a^b \bigcup_{m=1}^{\infty} f_m(s)ds\right) \leq \int_a^b \rho\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} f_m(s)\right)ds. \tag{3.3.6}$$

Доказательство. Поскольку f_m сильно измерима, то имеется $J(f_m)(\cdot)$ также сильно измеримая, и следовательно, почти везде сепарабельнозначная. Таким образом, существует сепарабельное банахово пространство $Y \subset X$ такое, что

$$J(f_m)(I\mathbb{N}) \subset Y,$$

где $N \subset I$ – множество меры нуль.

Далее без потери общности, из теоремы 2 и замечания 1 имеем

$$\rho\left(\int_a^b \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} f_m(s)\right)ds\right) = \rho\left(\int_a^b \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} J(f_m(s))\right)ds\right) \leq$$

$$\leq \beta\left(\int_a^b \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} J(f_m(s))\right)ds\right) = \int_a^b \beta\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} J(f_m(s))\right)ds <$$

$$< 2\int_a^b \rho\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} J(f_m(s))\right)ds = 2\int_a^b \rho\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} f_m(s)\right)ds.$$

Итак, мы получили (3.3.4).

Замечание 3.3.5. *Очевидно, что можно поменять местами $\rho(\cdot)$ и $\beta(\cdot)$ в (3.3.4). Возникает вопрос о том, что можно ли заменить 2 в правой части (3.3.4) на меньшую константу, используя специфику пространства нечетких множеств.*

3.3.2. Основной результат

Вернемся теперь к системе уравнений вида

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t), (Kx)(t)), x(0) = x_0, t \in [0, T], \tag{3.3.7}$$

где

$$(Kx)(t) = -\int_0^t K(t, s, x(s))ds.$$

Мы докажем существование решения для (3.3.7).

Пусть выполняются следующие условия:

(A1) $F : I \times \mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ такое, что

1) $t \to F(t, x, y)$ – сильно измеримое отображение для всех $x, y \in \mathbb{E}^n$;

2) $(x, y) \to F(t, x, y)$ – непрерывное отображение для почти всех $t \in I$.

Далее предположим, что существуют функции

$$a(\cdot), b(\cdot) \in L^1(I, \mathbb{R}_+)$$

такие, что

(A2) $\rho(F(t, A, B)) \leq \lambda(t)(\rho(A) + \rho(B))$ для всех непустых ограниченных подмножеств $A, B \in \mathbb{E}^n$ и $\lambda(\cdot) \in L^1(I, \mathbb{R}_+), \rho$ – мера некомпактности Куратовского;

(A3) $D(F(t, x, y), \hat{o}) \leq a(t) + b(t)[D(x, \hat{o}) + D(y, \hat{o})]$;

(A4) Оператор

$$(Ax)(t) = -\int_0^t K(t, s, x(s))ds$$

действует из I в $L^1(I, \mathbb{R}^n)$ и вполне непрерывен.

Теорема 3.3.6. *Если (A1) - (A4) имеет место, то задача (3.3.7) имеет, по крайней мере, одно решение на* $[0, T]$.

Доказательство. Сначала докажем, что решение (3.3.7) ограничено. В самом деле, имеем

$$D(x(t),\hat{o}) = D(x_0,\hat{o}) + D\Bigg(\int\limits_o^t F(s,x(s),(Kx)(s))ds,\hat{0}\Bigg) \leq$$

$$\leq D(x_0,\hat{o}) + \int\limits_0^t D(F(s,x(s),(Kx)(s)),\hat{o})ds \leq$$

$$\leq D(x_0,\hat{o}) + \int\limits_0^t \Bigg(a(s) + b(s)\Bigg[D(x(s),\hat{o}) + D\Bigg(\int\limits_0^t K(s,\tau,x(\tau))d\tau,\hat{o}\Bigg)\Bigg]\Bigg)ds \leq$$

$$\leq D(x_0,\hat{o}) + \int\limits_0^t \Bigg(a(s) + b(s)D(x(s),\hat{o}) + Mb(s)\int\limits_0^t d(x(\tau)d\tau,0)\Bigg)ds,$$

где $M = \max\limits_{t,s\in I,-\infty<x<\infty} |K_0(s,t,x)|$, где функция $K_0(s,t,x)$ непрерывно определена на $I\times I\times(-\infty,\infty)$ и равна $K(s,t,x)$ на $I\times I\times(-a,a)$ и равна нулю при $|x|\geq a$.

Далее обозначим

$$m(t) = D(x(t),\hat{o})$$

и получим

$$m(t) = m(0) + \int\limits_0^t \Bigg(a(s) + b(s) + m(s) + Mb(s)\int\limits_0^s m(\tau)d\tau\Bigg)ds.$$

Из неравенства B. Pachpatte (см., например [117]) следует, что существует число $M_0 > 0$ такое, что

$$m(t) = D(x(t),\hat{o}) \leq M_0 \text{ для всех } t\in[0,T].$$

Более того, мы получим, что

$$D((Kx)(t),\hat{o}) = D\Bigg(\int\limits_0^t K(t,s,x(s))ds,\hat{o}\Bigg) \leq \int\limits_0^t D(K(t,s,x(s),\hat{o}))ds \leq$$

$$\leq M\int\limits_0^t D(x(s),\hat{o})ds \leq MM_0T = M_1.$$

Отсюда следует, что

$$D(F(t,x(t),(Kx)(t)),\hat{o}) \leq a(t) + M_2 b(t) = M(t),$$

где $M_2 = M_0 + M_1$. Поскольку $a(\cdot), b(\cdot) \in L^1(I, \mathbb{R}_+)$, то получим, что $\mu(\cdot) \in L^1(I, \mathbb{R}_+)$. Пусть $c = \int_0^T \mu(s)ds + 1$. Определим

$$\Omega = \Big\{x(\cdot) \in C([0,T], \mathbb{E}^n) : \sup_{t\in[0,T]} D(x(t), x_0) \leq c\Big\}. \qquad (3.3.8)$$

Ясно, что Ω замкнутое, ограниченное и выпуклое множество. Далее определим оператор $P : C([0,T], \mathbb{E}^n) \to C([0,T], \mathbb{E}^n$ с помощью равества

$$(Px)(t) = x_0 + \int\limits_0^t F(s, x(s), (Kx)(s))ds, t \in [0,T].$$

Тогда

$$D((Px)(t), x_0) = D\bigg(\int\limits_0^t F(s,x(s),(Kx)(s))ds, \hat{o}\bigg) \leq$$

$$\leq \int\limits_0^t -D(F(s,x(s),(Kx)(s),\hat{o}))ds \leq \int\limits_0^T \mu(s)ds \leq \varepsilon$$

для $x \in \Omega$ и $t \in [0,T]$.

Таким образом, $P(\Omega) \subset \Omega$ и $P(\Omega)$ равномерно ограниченны на $[0,T]$.

Далее покажем, что P является непрерывным оператором на Ω. Для этого, предположим, что пусть последовательность $x_n(\cdot) \in \Omega$ сходится к $x(\cdot)$. Тогда

$$D((Px_n)(t), (Px)(t)) =$$

$$= D\Big(\int\limits_0^t F(s, x_n(s), (Kx_n)(s))ds, \int\limits_0^t F(s, x(s), (Kx)(s))ds \Big) \le$$

$$\le \int\limits_0^t D(F(s, x_n(s), (Kx_n)(s))), F(s, x(s), (Kx)(s))ds.$$

Кроме того, нам известно, что оператор $(Kx)(t) = \int_0^t -K(t, s, x(s))ds$ является непрерывным.

Тогда из (A1) следует, что

$$D((Px_n)(t), (Px)(t)) \to 0 \text{ при } n \to \infty$$

равномерно на $[0, T]$. Итак, P – непрерывный оператор на $[0, T]$.

Далее для меры некомпактности Куратовского получим неравенства

$$\rho(A(t)) \le R \int\limits_0^t \rho(A(s))ds, \tag{3.3.9}$$

где $R = e^{2(2+MT)\int_0^T \lambda(t)dt}$, а $A(t)$ – некоторое множество функций из Ω (3.3.8). Из (3.3.9) следует, что

$$\rho(A(t)) = 0$$

и, следовательно, $A(t)$ является предкомпактным множеством для каждого $t \in [0, T]$. Поскольку A является равностепенно непрерывным множеством, то теорема Арцела-Асколи справедлива в данном случае. Итак, последовательность $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится равномерно на $[0, T]$ к непрерывной функции $x(\cdot) \in \Omega$. Из неравенства треугольника

$$D((Px)(t), x(t)) \le D((Px)(t), (Px_n)(t)) +$$

$$+ D((Px_n)(t), x_n(t)) + D(x_n(t), x(t)) \to 0$$

получим, что

$$(Px)(t) = x(t) \text{ для всех } t \in [0, T],$$

то есть $x(\cdot)$ является решением (3.3.3).

Теорема доказана.

ГЛАВА 4. СТОХАСТИЧЕСКИЕ ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

4.1. Дробные эволюционные стохастические дифференциальные уравнения

Данный параграф посвящен теории разрешимости стохастических эволюционных уравнений дробного порядка возмущенные аддитивным слагаемым "белого шума". Полученные здесь результаты могут найти применение при анализе разнообразных стохастических релаксационных и диффузионных процессов в пористых и фрактальных следах.

Стохастические эволюционные уравнения получили существенное развитие за последние десятилетия. Это связано с тем, что их конечномерные реализации часто возникают в качестве математических моделей в физике, технике, химии, математической биологии, финансовой математике и других облатях знаний. Обобщение теории Ито-Стратановича-Скорохода на бесконечномерном случае берет свой начало в работах [80], [81]. В рамках этой теории, в частности, было исследовано линейное дифференциальное уравнение Ито с мультипликативным шумом [54], [70], [113], [67]. В работах [71], [115], [98], [142] был предложен иной подход к анализу стохастических уравнений на основе производной Нельсона-Гликлиха. В работе [142] установлено, что производная Нельсона-Гликлиха от винеровского процесса хорошо согласуется с предсказаниями теории броуновского движения Эйнштейна-Смолуховского, поэтому соответствующий стохастический процесс был назван "белым шумом".

Рассмотим задачу Коши для абстракного уравнения

$$ {}^{c}D_t^{\alpha} u(t) + Au(t) = f(u(t)) + B\omega(t), u(0) = u_0 \tag{4.1.1}$$

где ${}^{c}D_t^{\alpha}$ - дробная производная Капуто порядка $\alpha, 0 < \alpha < 1$, A - почти секториальный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве H, $f : H \to H$ - нелинейное заданное отображение, $\omega(t)$ - абсолютный случайный процесс (белый шум в смысле Балакришнана) в сепарабельном гильбертовом пространстве H_n, B - линейный оператор, определенный в H со значениями в пространстве операторов из H_n в H.

При анализе разрешимости задачи Коши (4.1.1) стандартным требованием является порождение оператором A резольвентных семейств операторов $\{S_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$ и $\{Z_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$. Это условие гарантирует корректность задачи Коши для детерминированного, невозмущенного однородного уравнения

$$^cD_t^\alpha + A(t)u(t) = 0.$$

Далее нужно потребовать от нелинейного отображения $f(\cdot)$ условия типа Липщица. Условия накладываемые на оператор B, тесно связаны со свойствами абсолютного случайного процесса (белого шума). Далее, в данной работе, под случайным процессом $\omega(t)$ будем понимать белый шум в смысле Балакришнана. Такое понятие впервые введено в монографии [38]. Рассматриваемое функциональное пространство является $W = L_2((0,T),H)$, где $0 < T \leq \infty$, которое будет сепарабельным гильбертовым пространством, если таковым является H. Далее через ω и μ обозначим элемент пространства W и стандартную гауссову меру на W соответственно. Так определенное пространство W называется белым шумом, а каждый его элемент $\omega \in W$ реализацией белого шума.

Положим далее

$$W(t,\omega) = \int\limits_0^t \omega(s)ds.$$

Функция $W(t,\omega)$ непрерывна по t при фиксированном ω, и при $t > s$ разность $[W(t,\omega) - W(s,\omega)]$ является гауссовой случайной величиной с нулевым математическим ожиданием и дисперсией, равной $(t-s)\|h\|^2$, где $h \in W$. Тем не менее, функция $[W(t,\omega), h]$ не может быть реализацией винеровского процесса, ввиду того, что такая реализация имеет неограниченную вариацию на каждом конечном интервале при фиксированном ω.

Модель пространственно-временной корреляции Балакришнана является одной из возможных моделей основанной на дельта-функции. Другой подход основан на теории мартингалов и венеровских процессов. Если ограничиться рассмотрением лишь линейных операторов, то оба подхода приводят к одинаковым результатам. При использовании нелинейных операторов появляется глубокое различие между этими подходами (см.напр.[36], [37], [51], [95]).

Настоящий параграф состоит из пяти разделов. В разделе 1 изложены основные определения и результаты теории интегралов и производных дробного порядка. Раздел 2 посвящен изучению резольвентных семейств операторов $S_\alpha(t)$ и $Z_\alpha(t)$. В разделе 3 приводятся основные свойства белого шума Балакришнана и соответствующий стохастический интеграл. Линейный случай задачи Коши изучается в разделе 4, а нелинейный в разделе 5.

4.1.1. Интегралы и производные дробного порядка

Пусть $J = [0, T] C\mathbb{R}$, X - банахово пространство, $\mathbb{N}$ - множество натуральных чисел, $\mathbb{R}$ - действительная область, $L(J, X)$ - пространство интегрируемых в смысле Лебега функций определенных на J со значениями в $X, AC^m(J, X)$ - пространство $(m-1)$ - раз непрерывно дифференцируемых на J, X - значных функций с абсолютно непрерывной производной порядка m, $W^{m.1}(J, X)$ пространства Соболева.

Определение 4.1.1. *Интеграл дробного порядка* $\alpha > 0$ *от функции* $f \in L^1(J, X)$ *имеет вид*

$$I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t \frac{f(s)ds}{(t-s)^{1-\alpha}},\ t > 0 \tag{4.1.2}$$

при условии, что правая часть поточечно определена на J, *где* $\Gamma(\cdot)$ *-гамма-функция Эйлера второго рода.*

Определение 4.1.2. *Производная Римана-Лиувилля дробного порядка* $\alpha > 0$ *от функции* f *имеет вид*

$$^{RL}D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int\limits_0^t \frac{f(s)ds}{(t-s)^(\alpha+1-n)},\ t > 0,\ n-1 < \alpha < n \tag{4.1.3}$$

Интеграл (4.1.2) для удобства записывается в виде

$$I_t^\alpha f()t = (g_\alpha * f)(t)$$

для функции

$$g_\alpha(t) = \begin{cases} \dfrac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \text{ если } t > 0, \\ \qquad 0 \text{ если } t \leq 0. \end{cases}$$

Приведем краткую сводку основных свойств интеграла (4.1.2) и производной (4.1.3) дробного порядка в виде следующего утверждения (см. напр. [67], [115]).

Лемма 4.1.3. *Пусть* $\beta > 0$ *и* $m = [\beta]$.

(1) Если $f \in L^1(J, X)$, *то* $g_{m-\beta} * (I_t^\beta f) \in W^{m,1}(J, X)$ *и* ${}^{RL}D_t^\beta I_t^\beta f(t) = f(t)$ *п.в.*

(2) Если $\alpha > \beta$ *и* $f \in L^1(J, X)$, *то* ${}^{RL}D_t^\beta I_t^\alpha f(t) = I_t^{\alpha-\beta} f(t)$ *п.в. в частности, если* $\alpha > k$, *то* $D^k I_t^\beta f(t) = I_t^{\beta-k} f(t)$ *п.в.*

(3) Если $p > \frac{1}{q}$ *и* $f \in L^p(J, X)$, *то* $I^\alpha f$ *непрерывна на* J.

Производная Римана-Лиувилля не очень удобна при моделировании реальных физических процессов. Поэтому вводится связанная с именем М.Капуто модифицированная дробная производная.

Определение 4.1.4. *Производная Капуто дробного порядка* $\alpha > 0$ *от функции* $f : J \to X$ *имеет вид*

$$ {}^cD_t^\alpha f(t) =^{RL} D^\alpha \left[f(t) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} f^k(0) \right], t > 0, n-1 < \alpha < n. \qquad (4.1.4)$$

Легко видеть, что производная Капуто от постоянной функции равна нулю. Заметим также, что интегралы во всех определениях (4.1.2), (4.1.3) и (4.1.4) понимаются в смысле Бохнера.

Лемма 4.1.5. *Пусть* $\alpha \in (0,1)$ *и* $h : J \to R$ *непрерывная функция. Функция* $u \in C(y, \mathbb{R})$ *заданная в виде*

$$u(t) = u_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds$$

является единственным решением следующей дробной задачи Коши

$${}^c D_t^\alpha u(t) = h(t), t \in J$$

$$u(0) = u_0.$$

Замечание 4.1.6. *Если вместо непрерывной функции* h *в лемме 4.1.5 взять интегрируемую функцию, то результат леммы остается верным.*

4.1.2. Почти секториальные операторы и основные свойства

Пусть X банахово пространство с нормой $\| \cdot \|$, A линейный замкнутый оператор, $D(A), R(A)$ и $\sigma(A)$ соответственно, область определения, область значения и спектр оператора .

Определение 4.1.7. . *Пусть* $-1 < \gamma < 0$ *и* $0 \leq \delta \leq \pi$. *Через* $\Theta_\delta^\gamma(X)$ *обозначим множество линейных замкнутых операторов* $A : D(A) \subseteq X \to X$ *таких, что:*

(1) спектр $\sigma(A)$ *принадлежит сектору*

$$\Sigma_\mu = \{\lambda \in C\{0\} : |arg\lambda| \leq \mu U0\};$$

(2) для каждого $\sigma < \mu < \pi$ *существует постоянная* $c_\mu > 0$ *такая, что*

$$\|(\lambda - A)^{-1} \leq c_\mu |\lambda|^\gamma \text{ для всех } \lambda \bar{\in} \Sigma^0_{\pi/2-\delta}.$$

Введем семейство операторов

$$\{T(t)\}_{t \in \Sigma^0_{\pi/2-\delta}}, \{S_\alpha(t)\}_{t \in \Sigma^0_{\pi/2-\delta}}, u\{Z_\alpha(t)\}_{t \in \Sigma^0_{\pi/2-\delta}}$$

ассоциированные с оператором A следующим образом

$$T(t) = e^{-t\lambda}(A) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\theta} e^{-t\lambda}(\lambda - A)^{-1}d\lambda, t \in \Sigma^0_{\pi/2-\delta}, \lambda \in \mathbb{C}(-\infty, 0],$$

$$S_\alpha = E_\alpha(-\lambda t^\alpha)(A)^\theta = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\theta} E_\alpha(-\lambda t^\alpha)(\lambda - A)^{-1}d\lambda, \in \Sigma^0_{\pi/2-\delta}, \lambda \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0],$$

$$Z_\alpha = E_{\alpha,\alpha}(-\lambda t^\alpha)(A)^\theta = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\theta} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda t^\alpha)(\lambda - A)^{-1}d\lambda, \in \Sigma^0_{\pi/2-\delta}, \lambda \in \mathbb{C}\setminus(\infty, 0], \tag{4.1.5}$$

где $E_{\alpha,\alpha}(\lambda) = \Sigma^\infty_{k=0}\frac{\lambda^k}{\Gamma(\alpha(k+1))}, \alpha > 0, \lambda \in \mathbb{C}$ - двухпараметрическая функция Миттага-Лефлера $E_\alpha(\lambda) = E_{1,\alpha}(z)$, контур $\Gamma_\theta = \{\mathbb{R}_+ e^{i\theta}\} \cup \{\mathbb{R}_+ e^{-i\theta}\}(0 < \theta < \pi)$ орентирован так, что S_θ открытый сектор в $\Sigma^0_\theta = \{\lambda \in \mathbb{C}\{0\} : |arg\lambda| < \theta\} \cup \{0\}$ лежит по правой стороне от Γ_θ.

Отметим, что семейство $\{T(t)\}_t \in \Sigma^0_{\pi/2-\delta}$ является полугруппой в силу свойства

$$T(s+t) = T(s)T(t)$$

для всех $t \in \Sigma^0_{\pi/2-\delta}$, кроме того, оператор $T(t)$ характеризуется как резольвента $(\lambda + A)^1$ оператора A, которая в свою очередь является преобразованием Лапласа полугруппы $T(t)$, т.е.

$$(\lambda + A)^{-1} = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)dt, \lambda \in \mathbb{C}, Re\lambda > 0. \tag{4.1.6}$$

Из (4.1.5) и (4.1.6) следует, что между оператором A и полугруппой $T(t)$ существует взаимное однозначное соответствие. Из определения (4.1.7) следует, что операторы $S_\alpha(t)$ и $Z_\alpha(t)$ могут быть представлены через $T(t)$ следующим образом

$$S_\alpha(t)x = \int\limits_0^\infty \Phi_\alpha(s)T(st^\alpha)xds, t \in \Sigma^0_{\pi/2-\delta}, x \in D(S_\alpha(t)), \tag{4.1.7}$$

$$Z_\alpha(t)x = \int\limits_0^\infty \alpha\Phi_\alpha(s)T(st^\alpha)xdsd, t \in \Sigma^0_{\pi/2-\delta}, x \in D(Z_\alpha(t)), \tag{4.1.8}$$

где функция $\Phi_\alpha(s)$ определяется так

$$\Phi_\alpha(\lambda) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^\infty \frac{(-\lambda)^k}{(k-1)!}\Gamma(k\alpha)\sin(k\pi\alpha), 0 < \alpha < 1, \lambda \in \mathbb{C}.$$

Опишем основные свойства операторов $S_\alpha(t)$ и $Z_\alpha(t)$ в виде следующих предложений.

Лемма 4.1.8. *Пусть $A \in \Theta^\gamma_\delta, -1 < \gamma < 0, 0 < \delta < \pi/2$. Имеют место следующие утверждения:*

(1) Для каждого $t \in \Sigma^0_{\pi/2-\delta}, S_\alpha(t)$ и $Z_\alpha(t)$ линейные и ограниченные операторы на R_+. Более того, существуют постоянные $C_S = C(\alpha,\gamma) > 0$ и $C_Z = C(\alpha,\gamma) > 0$ такие, что для всех $t > 0$

$$\|S_\alpha(t)\| \le C_S t^{-\alpha(1+\gamma)} \text{ и } \|Z_\alpha(t)\| \le C_Z t^{-\alpha(1+\gamma)}.$$

(2) Для $t > 0$, семейства $S_\alpha(t)$ и $Z_\alpha(t)$ непрерывные в равномерной операторной топологии. Более того, для каждого $r > 0$ эти семейства равномерно непрерывные на $[r,\infty)$.

(3) Для каждого фиксированного $t \in \Sigma^0_{\pi/2-\delta}$ и всех $x \in D(A)$,

$$(S_\alpha(t) - I)x = \int\limits_0^t -s^{(\alpha-1)}AZ_\alpha(z)xds.$$

(4) Для всех $x \in D(A)$ и $t > 0$

$${}^cD^\alpha_t S_\alpha(t)x = -AS_\alpha(t)x.$$

(5) Для всех $t > 0$ $S_\alpha(t)I^\alpha_t(t^{\alpha-1}Z_\alpha(t))$.

(6) Пусть $\beta > 1+\gamma$. Для всех $x \in D(A^\beta), \lim\limits_{t\to 0+} S_\alpha(t)x = x$.

Лемма 4.1.9. *([62]). Пусть* $A \in \Theta_\delta^\gamma(X), -1 < \gamma < 0, 0 < \delta < \pi/2$, *и пусть* $0 < \beta < 1 - \gamma$. *Тогда:*

(1) Область значений $R(Z_\alpha(t))$, *семейство* $Z_\alpha(t)$ *для* $t > 0$ *содержится в* $D(A^B)$.

(2) $S'_\alpha(t)x = -t^{\alpha-1}AZ_\alpha(t)x$, *и* $S'_\alpha(t)x$ *для* $x \in D(A)$ *локально интегрируема на* $(0, \infty)$.

(3) Для всех $x \in D(A)$ *и* $t > 0$, $\|AS^\alpha(t)x\| \leq ct^{-\alpha(1+\gamma)}\|Ax\|$, *где и - постоянная зависящая от* γ, α.

(4) Для каждого фиксированного $t \in \Sigma^0_{\pi/2-\delta}, Z_\alpha(t)$ *является линейным ограниченным оператором на* X^β. *Более того, существует положительная постоянная* C_0 *такая, что для всех* $t > 0$

$$\|A^\beta Z_\alpha(t)x \leq \alpha C_0 \frac{\Gamma(1-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\alpha(\gamma+\beta))} t^{-\alpha(\gamma+\beta+1)}\|x\|.$$

Лемма 4.1.10. *Если резольвента* $(\lambda + A)^{-1}$ *компактная для каждого* $\lambda > 0$, *то* $S_\alpha(t)$ *и* $Z_\alpha(t)$ *компактные для каждого* $t > 0$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольное число. Покажем, что

$$\zeta_\varepsilon(t) = \int\limits_\varepsilon^\infty \Phi_\alpha(s)T(st^\alpha - \varepsilon t^\alpha)ds, \xi_\varepsilon(t) = \int\limits_t^\infty \Phi_\alpha(s)T(st^\alpha)ds.$$

Тогда, $\xi_\varepsilon(t) = T(\varepsilon t^\alpha)\xi_\varepsilon(t)$ и легко доказать, что для каждого $t > 0, \xi_\varepsilon$ линейный ограниченный оператор на $\mathbb{R}_+$. Далее с помощью компактности $T(t), t > 0$ мы увидим, что $\xi_\varepsilon(t)$ компактный для каждого $t > 0$.

С другой стороны, заметим, что

$$\|\xi_\varepsilon(t) - S_\alpha(t)\| \leq \|\int\limits_0^\infty \Phi_\alpha(s)T(st^\alpha)ds\| \leq \int\limits_0^\infty \Phi_\alpha(s)s^{-1-\gamma}ds.$$

Следовательно, из компактности $\xi_\varepsilon(t), t > 0$ следует, что $S_\alpha(t)$ компактно для каждого $t > 0$. С помощью аналогичных рассуждений мы можем сделать заключение, что $Z_\alpha(t)$ также компактный для каждого $t > 0$. Лемма доказана.

4.1.3. Белый шум и стохастический интеграл Балакришнана

Пусть H сепарабельное гильбертово пространство и $W = L_2((0,T), H)$ гильбертово пространство всех измеримых функций

$$f : [0,T] \to H$$

таких, что

$$\int\limits_0^T \|f(t)\|^2 < \infty,$$

где $\|\cdot\|$ - норма в H.

Определим цилиндрическую меру μ на (W, Σ) (Σ - алгебра цилиндрических множеств) с помощью

$$\mu(E) = \int\limits_B G(x)dx,$$

где B - борелевское множество в $\mathbb{R}^n$ изоморфное к B - основание цилиндра E, и $G(x)$ - n - мерная гауссова плотность с нулевым средним и единичной ковариацией. Такая мера д называется гауссовой мерой на W.

Пусть $\mathbb{H}$ сепарабельное предгильбертово пространство. Очевидно, что $H \subset \mathbb{H}$. Измеримое по Борелю отображение $f : W \to H$ называется случайным вектором, если гауссова мера μ может быть расширена до счетно-аддитивной на σ - алгебре множеств вида ($f^{-1}(B)$, – борелевское множество на H).

Если $H = R^1$, то f называется случайной величиной.

Под конечно-аддитивным белым шумом в W будем понимать процесс с траекторией $\omega(\cdot)$ в W с гауссовой мерой μ и с характеристической функцией

$$C(h) = E[exp\Bigg(i\int\limits_0^T [N(t), h(t)]dt\Bigg) = exp\Bigg(-\frac{1}{2}\int\limits_0^T [h(t), h(t)]dt\Bigg).$$

Эта мера не может быть расширена до счетно-аддитивной на W. Пусть $f(\cdot)$ означает любую измеримую по Борелю функцию, отображающую W в другое (сепарабельное) гильбертово пространство H_r. В общем случае не надо определять распределение над H_r. Мы должны рассмотреть только специальный класс таких функций, которые имеют определенный предельный смысл. Таким образом, пусть P_N любая последовательность конечномерных проекторов на W таких, что P_N сильно сходятся к тождественному оператору. Тогда для каждого $N, f(P_N f)$ является случайной величиной. Предположим теперь, что

$$\{f(P_N\omega)\}$$

является последовательностью Коши по вероятностной мере. Тогда

$$C(h) = \lim_N C_N(h), h \in H_r, \tag{4.1.9}$$

где

$$C_N(h) = E[exp(i[f(P_N\omega), h])]$$

определяет счетно-аддитивную меру на борелевских множествах пространства H_r. Если предельная характеристическая функция $C(h)$ не зависит от частичной последовательности проекторов P_N, то мы назовем $f(\cdot)$ физической случайной величиной (ФСВ) и соответствующую предельную меру определим как распределения $f(\cdot)$. Напомним в этой связи известную предельную теорему Прохорова [116] для каждого борелевского множества B в H_r

$$\mu_N(B) \to \mu_f(B) \text{ если } \mu_f(\partial) = 0, \tag{4.1.10}$$

где $\mu_N(\cdot)$ является распределением $f(P_N\omega)$.

Теперь пользуясь соотношениями (4.1.9) и (4.1.10) приведем характеристику ФСВ. С этой целью воспользуемся следующей концепцией непрерывности.

Определение 4.1.11. *Пусть H^1, H^2 действительные сепарабельные гильбертовы пространства. Отображение $F : H^1 \to H^2$ является непрерывным в $x \in H^1$ относительно S - топологии, если для любого $\varepsilon > 0$*

существует оператор Гильберта-Шмидта $L_\varepsilon(x) : H^1 \to H^1$ такой, что из

$$\|L_\varepsilon(x)(x - x')\| < 1 \tag{4.1.11}$$

следует

$$\|F(x) - F(x')\| < \varepsilon \tag{4.1.12}$$

где F является равномерно S - непрерывным на $U \subset H_1$ если оператор Гильберта- Шмидта в (4.1.11) не зависит от $x \in U$.

Определение 4.1.12. *Отображение $F : H^1 \to H^2$ называется равномерно S - непрерывным в окрестности начала, если F равномерно S - непрерывно на множествах*

$$U_n = \{u \in H_1 \|L_n u\| \leq 1\},$$

где $\{L_n\}_1$ последовательность операторов Гильберта-Шмидта такая, что

$$\{L_n\}_{HS} \to 0 \text{ и } \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = H^1.$$

Совершенно очевидно, что равномерно S - непрерывное отображение является также равномерно S - непрерывно в окрестности начала.

С учетом неравенств (4.1.11), (4.1.12) и определения (4.1.10) можно привести критерий характеризующий ФСВ.

Лемма 4.1.13. *Достаточным условием того, что $F : H^1 \to H^2$ является ФСВ будет его равномерная S - непрерывность в окрестностях начала.*

4.1.4. Стохастическое эволюционное уравнение с линейным сносом

Пусть H - сепарабельное гильбертово пространство, A - почти секториальный оператор, т.е. $A \in \Theta_\sigma^\gamma(H), -1 < \gamma < 0, 0 < \sigma < \pi/2$. В соответствии с результатами раздела 4 определим функциональное пространство

$W = L_2((0,T),H)$, где $T \leq \infty$. Пусть, кроме того, H_n - другое сепарабельное гильбертово пространство (здесь n - является сокращением слова noise - шум) и положим $W_n = L_2((0,T),H_n)$. Обозначим через B линейный ограниченный оператор, действующий из H_n в H. Рассмотрим эволюционное уравнение вида

$$^cD_t^\alpha u(t) + Au(t) = B\omega(t), t > 0, u(0) = u_0, \tag{4.1.13}$$

где $^cD_t^\alpha$ - дробная производная Капуто порядка $\alpha, 0 < \alpha < 1, A \in \Theta_\sigma^\gamma(H), -1 < \gamma < 0, 0 < \sigma < \pi/2, \omega(t)$ - белый шум со значениями в другом сепарабельном гильбертовом пространстве H_n, B – линейный оператор из H в H_n.

Так как мы хотим подчеркнуть зависимость решения от случайного входа ω, то для него будем использовать обозначение $u(t,\omega)$. Уравнение

$$[u(t,\omega),v] = [u(0),v] + \int\limits_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}[u(t,\omega),A^*v]d\tau +$$
$$+ \int\limits_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}[\omega(\tau),v]dr, v \in D(A^*) \tag{4.1.14}$$

имеет решение, определяемое формулой

$$u(t,\omega) = S_\alpha(t)u_0 + \int\limits_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} Z_\alpha(t-\tau\tau)\omega(\tau)d\tau \tag{4.1.15}$$

и для каждого ω это решение единственно в классе слабо непрерывных функций, удовлетворяющих уравнение (4.1.14). Здесь $S_\alpha(t), Z_\alpha(t)$ - семейства резольвентных операторов введенные в разделе 3. Утверждение непосредственно следует из теоремы 4.8.3 монографии [38] и работы [59]. Далее используя формулу (4.1.15) вычислим корреляционный оператор соответствующий процессу $u(t,\omega)$. Поскольку элемент $u(t,\omega)$ определен для каждого t, то его можно определить для каждого момента времени t.

Предполагая u_0 заданным, получим

$$E([u(t,\omega)-S_\alpha u_0 v][u(\tau,\omega)-S_\alpha u_0,z])=$$

$$E\left(\int\limits_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}Z_\alpha(t-\tau)\omega(\tau),v]d\tau\int\limits_0^t [(t-\sigma)^{\alpha-1}Z_\alpha(\tau-\sigma)\omega(\tau),z])d\sigma\right)=$$

$$E\left(\int\limits_0^t [\omega(\tau),B^*(t-\tau)^{\alpha-1}Z_\alpha^*(t-\tau)v]d\tau\int\limits_0^t [\omega(\sigma),B^*(\tau-\sigma)^{\alpha-1}Z_\alpha^*(\tau-\sigma)v]d\sigma\right)=$$

$$=\int\limits_0^t [\omega(\sigma),B^*(\tau-\sigma)^{\alpha-1}Z_\alpha^*(\tau-\sigma)v,B^*(\tau-\sigma)^{\alpha-1}Z_\alpha^*(\tau-\sigma)]=$$

$$=[v,(t-\tau)^{\alpha-1}R_\alpha(\tau,\tau)z],t\geq\tau$$

Следовательно, корреляционный оператор $R_\alpha(t,\tau)$ определяется формулой

$$R_\alpha(t,\tau)=S_\alpha(t-\tau)R_\alpha(\tau,\tau),t\geq\tau, \tag{4.1.16}$$

где

$$R_\alpha(\tau,\tau)u_0=\int\limits_0^t (\tau-\sigma)^{\alpha-1}Z_\alpha(\tau-\sigma)BB^*Z_\alpha^*(\tau-\sigma)u_0 d\tau. \tag{4.1.17}$$

Из последнего представления непосредственно следует равенство

$${}^cD_t^\alpha[R_\alpha(\tau,\tau)u_0,v]=[R_\alpha(\tau,\tau)u_0,v]+$$

$$+[R_\alpha(\tau,\tau)u_0,A^*v]+[B^*u_0,A^*v]R_\alpha(0,0)=0, \tag{4.1.18}$$

для всех u_0,v из области определения $D(A^*)$. Обратно, уравнение (4.1.18) имеет единственное решение, и оно определяется формулой (4.1.17).

Далее, для каждого u_0 справедливо равенство

$$[R_\alpha(\tau,\tau)u_0,u_0]=\int\limits_0^\tau \|B^*S^*(\tau-\sigma)u_0\|^2 d\sigma,$$

и поэтому эта величина не убывает при $\tau \geq 0$.

Положим

$$[R_{\alpha\infty}u_0, u_0] = \lim_{\tau\to 0}[R_\alpha(\tau,\tau)u_0, u_0].$$

Предел справа конечен, если, например выполнено условие

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}log\|S(t)\| = \omega_0 < 0. \tag{4.1.19}$$

В этом случае оператор $R_{\alpha\infty}$ будет линейным ограниченным оператором, определенным равенством

$$[R_\infty A^* u_0, v] = \lim_{\tau\to\infty}[R_\alpha(\tau,\tau)u_0, v], u_0, v \in H. \tag{4.1.20}$$

С учетом уравнения (4.1.18) можно считать, что $R_{\alpha\infty}$ удовлетворяет уравнению

$$[R_\infty A^* u_0, v] + [[R_\infty u_0, A^* v]] + [B^* u_0, B^* v] = 0 \tag{4.1.21}$$

для всех $u_0, v \in H$ из области определения оператора A^*.

Конечно, условие (4.1.19) не является необходимым для того, чтобы оператор $R_{\alpha\infty}$ был определен корректно. В качестве примера, можно рассмотреть случай компактной полугруппы такой, что $S(t)Bx = exp(-\zeta t)x, \zeta > 0$. Отметим, что условие

$$[R_\alpha u_0, u_0] = 0 \text{ влечет } u_0$$

вовсе не означает, что ноль принадлежит резольвентному множеству. Этот факт отражает специфику бесконечномерного случая.

Дело в том, что в конечномерном случае оператор $R(\tau,\tau)$ всегда компактен.

Далее, пусть

$$\tilde{u}(t,\omega) = \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1} Z_\alpha(t-s)B\omega(s)ds.$$

Тогда равенство

$$L\omega = \tilde{u}(\cdot, \omega) \tag{4.1.22}$$

определяет линейный ограниченный оператор, отображающий пространство W_n в W. Формула $\chi(C) = \mu[\omega : L\omega \in C]$ определяет гауссову цилиндрическую меру на классе цилиндрических множеств из пространства W. Она является счетно-аддитивной на τ - алгебре борелевских множеств этого пространства тогда и только тогда, когда L – оператор Гильберта-Шмидта, или в том и только том случае, если $Z_\alpha(t)B$ – оператор Гильберта-Шмидта почти для всех $t \in (0, T)$ и

$$\int\limits_0^t \int\limits_0^t \|(t-\tau)^{\alpha-1} Z_\alpha(t-\tau)B\|^2 d\tau dt < \infty.$$

Это условие удовлетворяется, если либо $Z_\alpha(t)$ является полугруппой Гильберта-Шмидта, либо B-оператор Гильберта-Шмидта. Отметим, что

$$E((L\omega)(L\omega)^*) = LL^*.$$

Вышеизложенные рассуждения позволяют сформулировать следующее утверждение.

Теорема 4.1.14. *Пусть $f(\omega) = L(\omega)$, где L является любым линейным ограниченным преобразованием из H в H_n. $f(\cdot)$ является физической случайной величиной тогда и только тогда, когда L оператор Гильберта-Шмидта.*

4.1.5. Стохастические эволюционные уравнения с нелинейным сносом

В этом разделе рассмотрим нелинейную дробную задачу Коши вида

$${}^cD_t^\alpha u(t) + Au(t) = f(u(t)) + B\omega(t), t > 0, u(0) = u_0, \tag{4.1.23}$$

где $A \in \Theta\sigma^{\gamma}, -1 < \gamma < 0, 0 < \sigma < \pi/2$. Под слабым решением задачи (4.1.23) будем понимать функцию $u(t,\omega) : W_n = L_2((0,T), H_n) \to H$ удовлетворяющее уравнение

$$u(t,\omega) = S_\alpha(t)u_0 + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} Z_\alpha(t-\tau)d\tau[f(u(\tau,\omega)) + B\omega(\tau)]d\tau, \quad (4.1.24)$$

где μ_G - гауссова мера на W_n, ω точка в H_n, $B : W \to W_n$ - ограниченный оператор и $f : H \to H$ - равномерное липшицево отображение такое, что

$$\|f(u_1) - f(u_2)\| \leq L(f)\|u_1 - u_2\|, \quad (4.1.25)$$

где $L(f)$ - постоянная зависящая от f.

Определим интегральный контур Γ_σ ориентированный так, что открытый сектор Σ_σ^0 лежит справа от Γ_σ. Пусть $\beta \in \mathbb{C}$ и $A \in \Theta_\sigma^\gamma(H), -1 < \gamma < 0, 0 < \sigma < \pi/2$. Тогда комплексная степень A^β оператора A определяется так

$$^\beta = \lambda^\beta() = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\sigma} \lambda^\beta(\lambda - A)^{-1}d\lambda, \lambda \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0].$$

В случае $Re(\beta) > 1 + \gamma, A^{-\beta}$ принадлежит $\mathfrak{L}(H)$ - пространству всех линейных ограниченных операторов из H в H. Линейное пространство $H^\beta = D(A^\beta)$ является банаховым пространством с нормой

$$\|u\|_\beta = \|A^\beta u\|, u \in H^\beta.$$

Сформулируем и докажем следующее утверждение.

Теорема 4.1.15. *Предположим, что условие (4.1.25) выполнено и $u(t,\omega)$ удовлетворяют задачу (4.1.23). Тогда для каждого $u_0 \in H^\beta$ функция $u(t,\omega)$ удовлетворяет уравнению*

$$u(t,\omega) = S_\omega(t) + \int\limits_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} Z_\alpha(t-\tau) f(u(t,\omega))d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} Z_\alpha(t-\tau)\omega(\tau)d\tau. \qquad (4.1.26)$$

Доказательство. Совершенно ясно, что в условиях теоремы задача (4.1.23) эквивалентна решению интегрального стохастического уравнения вида

$$u(t,\omega) = u_0 - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} Au(\tau,\omega)d\tau + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(u(\tau,\omega))d\tau+$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} B\omega(\tau)d\tau, t \geq 0. \qquad (4.1.27)$$

Применяя к обеим частям (4.1.27) преобразование Лапласа получим

$$U(s) = S^{\alpha-1}(S^\alpha + A)^{-1}u_0 + (S^\alpha + A)^{-1}F(s) + (S^\alpha + A)^{(}-1)G\omega(s), \quad (4.1.28)$$

где

$$U(s) = \int\limits_0^\infty e^{-st}u(t)dt, F(s) = \int\limits_0^\infty e^{-st} f(u(t))dt, G\omega(s) =$$

$$\int\limits_0^\infty e^{-st}G\omega(t)dt, F(s), Res > \gamma i.$$

Используя леммы раздела 2, интегрируя по частям и учитывая соотношения (4.1.27) получим

$$S^{\alpha-1}(S^\alpha + A)^{-1}u_0 + (S^\alpha + A)^{-1}G\omega(s) =$$

$$= \int\limits_0^\infty e^{-st} S_\alpha(t) u_0 dt + \int\limits_0^\infty e^{-st} \Bigg(\int\limits_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} Z_\alpha(t-\tau) f(u(\tau)dt) \Bigg) dt +$$

$$\int\limits_0^\infty e^{-st} \Bigg(\int\limits_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} Z_\alpha(t-\tau) f B\omega(\tau) d\tau \Bigg) dt. \qquad (4.1.29)$$

Комбинируя (4.1.28) и (4.1.29) и учитывая теорему единственности преобразования Лапласа получим

$$u(t,\omega) = S_\alpha(t) u_0 \int\limits_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} Z_\alpha(t-\tau) f(u(\tau,\omega)) dt +$$

$$\int\limits_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} Z_\alpha(t-\tau) B\omega(\tau) dt.$$

Теорема 4.1.16. *Пусть выполнены условия теоремы 4.1.15. Тогда решение $u(t,\omega)$ задачи (4.1.23) является физической случайной величиной, если $S_\alpha(A)^-$ оператор Гильберта Шмидта и/или B оператор Гильберта Шмидта.*

Доказательство. Запишем уравнение (4.1.23) в интегральной форме

$$u(t,\omega) = u_0 + \int\limits_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} A u(\tau,\omega) d\tau + \int\limits_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(u(\tau,\omega)) d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \omega(\tau) d\tau \qquad (4.1.30)$$

или эквивалентно

$$u(t,\omega) = S_\alpha(t)u_0 + \int\limits_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(u(\tau,\omega))d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} Z_\alpha(t-\tau)B\omega(\tau)dt \tag{4.1.31}$$

Решение (4.1.31) является единственным слабым непрерывным решением задачи (4.1.23)

$$[u(t,u),v] = [u_0,v] + \int\limits_0^t [(t-\tau)^{\alpha-1} u(t,\omega),v]d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(u(\tau,\omega)),v]d\tau + \int\limits_0^t [(t-\tau)^{\alpha-1}\omega(\tau),v]d\tau$$

для каждого $v \in D(A^*)$, где $D(A^*)$ - область определения сопряженного почти секториального оператора A^*. Мы хотим показать, что $u(\cdot,\omega)$ является физической случайной величиной.

Из (4.1.31) получим

$$\|u(\cdot,\omega_1) - u(\cdot,\omega_2)\|_\omega^2$$

$$\leq 2\int\limits_0^{(T)} \left\| \int\limits_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} Z_\alpha(t-\tau)[f(u(\tau,\omega_1)) - f(u(\tau,\omega_2))]dt \right\|^2 dt +$$

$$+2\int\limits_0^{(T)} \left\| \int\limits_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} B[\omega_1(\tau) - \omega_2(\tau)]d\tau \right\|^2 dt \leq$$

$$\leq 2\int\limits_0^T \left\| \int\limits_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} Z_\alpha(t-\tau) \right\|^2 \|f(u(\tau,\omega_1)) - f(u(\tau,\omega_2))\|^2 d\tau dt +$$

$$+2\int\limits_0^{(T)}\left\|\int\limits_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}Z_\alpha(t-\tau)B[\omega_1(\tau)-\omega_2(\tau)]d\tau\right\|^2 dt\le$$

$$\le 2M(\alpha)e^{kT}L(f)\int\limits_0^{(T)}\left\|\int\limits_0^t\|(u(\tau,\omega_1))-f(u(\tau,\omega_2))\|_H^2 dt\right\|^2 d\tau dt+$$

$$+2\int\limits_0^{(T)}\left\|\int\limits_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}Z_\alpha(t-\tau)B[\omega_1(\tau)-\omega_2(\tau)]d\tau\right\|_H^2 dt. \tag{4.1.32}$$

Пусть $m(t)=\int\limits_0^t\|(u(\tau,\omega_1))-f(u(\tau,\omega_2))\|_H^2 d\tau$,

$$P(\alpha)=2M(\alpha)e^{kT}L(f),\beta(T)=$$

$$=2\int\limits_0^{(T)}\left\|\int\limits_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}Z_\alpha(t-\tau)\times BL[\omega_1(\tau)-\omega_2(\tau)]d\tau\right\|_H^2 dt. \tag{4.1.33}$$

тогда (4.1.33) можно переписать так

$$M(T)\le\int\limits_0^{(T)}Nm(t)dt+B(T) \tag{4.1.34}$$

и из неравенства Гронуолла следует

$$m(t)\le e^{NT}B(T) \tag{4.1.35}$$

или

$$\|u(\cdot,\omega_1)-u(\cdot,\omega_2)\|_W^2\le 2e^{NT}\left\|\int\limits_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}Z_\alpha(t-\tau)B[\omega_1(\tau)-\omega_2(\tau)]d\tau\right\|_W^2.$$

Теперь поскольку $Z_\alpha(t-\tau)(t-\tau)^{\alpha-1}$ является оператором Гильберта-

Шмидта можно определить оператор $L : W^1 \to W^2$ такой, что

$$Lf = g, g = \int\limits_0^t ((t-\tau)^{\alpha-1} Z_\alpha(t-\tau) Bf d\tau.$$

Тогда вводя $\gamma(N) = 2e^{NT}$ получим

$$\|u(\cdot,\omega_1) - u(\cdot,\omega_2)\|_W^2 \leq \gamma(N)\|L(\omega_1 - \omega_2)\|_W^2$$

или $u(\cdot,\omega)$ является равномерно непрерывным в S - топологии и $u(\cdot,\omega)$ является физической случайной величиной.

Теорема доказана.

4.2. Дробные стохастические эволюционные уравнения с белым шумом Балакришнана

Трудной проблемой теории меры и интеграла считается анализ взаимосвязи конечно-аддитивных и счетно-аддитивных мер. Первые фундаментальные результаты относительно этой проблемы принадлежат A. Alexandroff [26] и K. Yosida, E. Hewitt [149]. В этих работах рассматриваются вещественнозначные меры, которые обладают свойством конечной аддитивности но не обязательно счетной аддитивностью. Современное состояние проблемы подробным образом изложено в работе H. Duanmu, W. Weiss [60]. Во введении к цитируемой работе отмечено, что в отличие от теорем Ю. В. Прохорова [10] и А. Н. Ширяева [14], в которых установлено, что при условиях регулярности последовательность счетно-аддитивных мер сходится к счетно-аддитивной мере, можно доказать, что для каждой конечно-аддитивной вероятностной мере P на тотально ограниченном сепарабельном метрическом пространстве найдется последовательность счетно-аддитивных вероятностных мер $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ такая, что

$$\int f dP_n = \int f dP$$

для каждой ограниченной равномерно непрерывной действительнозначной функции f. Далее, в [60] отмечено, что с другой стороны, в отличие от теоремы Portmanteau [47], такая сходимость не имеет место для просто ограниченных непрерывных функций. Это означает, что предположения фундаментальной теоремы Portmanteau являются тонкими. В случае бесконечномерных фазовых пространств возникают иные математические трудности. В монографии A. V. Balakrishnan [39] описана структура измеримых множеств гильбертовых пространств, согласованная с ее топологией. Важным является то, что теория меры в гильбертовом пространстве отличается от классической тем, что мера определенная на алгебре цилиндрических множеств оказывается лишь конечно-аддитивной.

Настоящая статья посвящена разрешимости стохастических дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве с конечно-аддитивной вероятностной мерой и с дробным порядком производной. Во втором разделе работы излагаются результаты связанные с конечно-аддитивной вероятностной мерой на гильбертовом пространстве. Построена мера Гаусса, иллюстрирующая особенность бесконечномерного случая. Обсуждается также понятие стохастического интеграла на основе конечно-аддитивной вероятностной меры на абстрактном пространстве и разъясняется его взаимосвязь с интегралом Ито. В третьем разделе изучается детерминированное дробное эволюционное уравнение в гилбертовом пространстве. Результаты полученные в [103], для однородного уравнения о разрешимости и представлении решения принесены на случай неоднородного уравнения. В четвертом разделе вводится понятие белого шума Балакришнана и изучаются его свойства. В разделе 5 на основе понятия элементарной случайной величины или физической случайной величины дается понятие слабого решения дробного стохастического эволюционного уравнения. Установлены теоремы о существовании и единственности слабого случайного решения дробных эволюционных уравнений. Полученные результаты являются обобщением и усилением ряда работ [71], [86]. Далее найдена вероятностная характеристика - корреляционный оператор, соответствующий стохастическому решению.

4.2.1. Конечно-аддитивные меры Гаусса в гильбертовом пространстве

Хорошо известно, что классическая теория меры в конечномерных пространствах возникла в работах А.Лебега по теории интегрирования и нашла свое применение в теории вероятностей, математической физики, функционального анализа и другие разделы математики [3]. В частности, существенно повлияла на дальнейшее развитие теории вероятностей трактовка А.Колмогорова [12] вероятности события как меры множества. Теория меры в бесконечномерном гильбертовом пространстве отличается от классической тем, что мера определенная на алгебре цилиндрических множеств, оказывается лишь конечно-аддитивной. A. V. Balakrishnan [39] привел канонический пример в виде меры Гаусса илюстрирующий эту особенность вероятностных мер на бесконечномерных пространствах.

Алгебра цилиндрических множеств

Пусть H-сепарабельное вещественное гильбертово пространство. Выберем в нем n элементов $x_1, x_2, ..., x_n$ и пусть B-борелевское множество на эвклидовом n-мерном пространстве $\mathbb{R}^n$. Назовем цилиндрическим множеством множество таких элементов $y \in H$, что n-мерный вектор $\{[y, x_i\}, i = 1, 2, ..., n$ принадлежит B. Обозначим через H_n-конечномерное пространство, натянутое на элементы $x_1, x_2, ..., x_n$. Размерность пространства H_n может быть меньше n. Если P_n-оператор проектирования из H на H_n, то вместе с каждым элементом y в цилиндрическом множестве содержится и $P_n y + (I - P_n)H$. Этим и объясняется название "цилиндрическое множество".

Это множество можно определить иначе с более общих позиций. Рассмотрим конечно-мерное пространство H_m в H. Пусть B борелевское множество в H.

Цилиндрическим множеством будем называть множество, которое можно представить в виде суммы борелевского множества B и ортогонального дополнения к H_m. Борелевское множество B называют тогда основанием цилиндра, а H_m - его базисным пространством.

Основные свойства цилиндрических множеств установлены в $[B]$, а именно:

1) теоретико-множественное дополнение цилиндрического множества есть также цилиндрическое множество;

2) пересечение и объединение цилиндрических множеств есть также цилиндрическое множество;

3) два цилиндрических множества с основаниями B_1 в H_1 и B_2 в H_2 совпадает тогда и только тогда, когда $B_1 = B_2$.

Свойства 1)-3) показывают, что класс цилиндрических образует алгебру. Пространство H можно представить в виде объединения счетного числа цилиндрических множеств. Само пространство H и пустое множество являются цилиндрическими множествами. С другой стороны, очевидно, что объединение счетного числа из $\mathfrak{C}$ не обязательно принадлежит $\mathfrak{C}$. Наименьшее σ - алгебра множеств, содержащая открытые (или замкнутые) множеста в H, называется борелевской σ-алгеброй пространства H, и принадлежащие ей множества называются борелевским множествами. Класс борелевских множеств обозначим через $\mathcal{B}$.

Имеет место утверждение.

Лемма 4.2.1. *Класс борелевских множеств $\mathcal{B}$ совпадает с наименьшей σ-алгеброй содержащей все цилиндрические множества.*

Из леммы 4.2.1 следует, что $\mathcal{B}$-наименьшая σ - алгебра, содержащая все замкнутые шары (или, что эквивалентно, все открытые шары).

Итак, нами описаны два объекта из трех образующих вероятностное пространство: фазовое (выборочное) пространство H и борелевская σ - алгебра $\mathcal{B}$ его подмножеств. Следующий пункт посвящен вероятностным мерам Гаусса на конечномерных пространствах.

Мера Гаусса на $\mathbb{R}^n$

Начнем с изучения вероятностной меры Гаусса на эвклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ (см. напр. [4], [8]).

Пусть $n \in \mathbb{N}$ и пусть через $\mathcal{B}_0(\mathbb{R}^n)$ обозначена полная борелевская σ-алгебра на $\mathbb{R}^n$. Пусть через $\lambda^n : \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty)$ обозначена обычная n-мерная мера Лебега. Тогда стандартная мера Гаусса $\gamma^n \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to [0, 1]$ определяется формулой

$$\gamma^n(A) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \int\limits_A \exp\bigg(- \frac{1}{2}\|x\|^2_{\mathbb{R}_n}\bigg) d\lambda^n(x) \tag{4.2.1}$$

для любого измеримого множества $A \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^n)$.

В терминах производной Радона-Никодима равенства (4.2.1) можно переписать в виде

$$\frac{d\gamma^n(x)}{d\lambda^n} = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \exp\bigg(- \frac{1}{2}\|x\|^2_{\mathbb{R}^n}\bigg).$$

В более общем случае, мера Гаусса со средней $\mu \in \mathbb{R}^n$ и вариацией $\sigma^2, \sigma > 0$, задается следующим образом

$$\gamma^n_{\mu,\sigma^2}(A) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi\sigma^2)^n}} \int\limits_A \exp\left(\frac{1}{2\sigma^2}\|x-\mu\|^2_{\mathbb{R}^n}\right) d\lambda^n(x).$$

Мера Гаусса со средней $\mu > 0$ называется центрированной мерой Гаусса.

Мера Дирака δ_μ является слабым пределом γ^n_{μ,σ^2} при $\sigma \to 0$ и рассматривается как вырожденная мера Гаусса. Напротив, мера Гаусса с конечной ненулевой вариацией называется вынужденной мерой Гаусса.

Стандартной мерой Гаусса γ^n на $\mathbb{R}^n$ является вероятностной мерой связанной с нормальным (гауссовским) вероятностным распределением, то есть, если

$$z \sim N(\mu, \sigma^2)$$

то

$$P(z \in A) = \gamma^n_{\mu,\sigma^2}(A).$$

Мера Гаусса на цилиндрических множествах в H

Пусть Z-цилиндрическое множество с основанием B и базисным пространством H_m. Тогда по определению:

(1) $\mu(Z) = \chi_m(B)$-счетно-аддитивная вероятностная мера на σ-алгебре борелевских подмножеств в H_m. В частности, если $\{Z_k\}$-полярно непересекающиеся цилиндрические множества с общим базисным пространством H_m и соответствующими основаниями $\{B_k\}_\infty$, то

$$\mu\left(\sum_{k=1}^{\infty} Z_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(Z_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \chi_m(B_k).$$

(2) Условия согласованности. Для того чтобы мера μ была корректно определена, необходимо, чтобы выполнялось следующее условие: если

$$z = B + H_m^c = B + H_p + (H_m + H_p)^c,$$

где H_p-подпространство, ортогональное к H_m, то

$$\chi_m(B) = \chi_{m+p}(B + H_p),$$

где χ_{m+p}-борелевская мера на $H_m + H_p$.

Так как χ_m-счетно-аддитивная мера на борелевских подмножествах конечномерного пространства H_m, то

$$\chi_m(B) = inf \chi_m(G),$$

где G-произвольное открытое множество в H_m содержащее B.

Далее приведем пример цилиндрической конечно-аддитивной меры. Пусть R самосопряженный неотрицательно определенный оператор, отображающий H в H. Зададим меру χ на борелевских множествах конечномерного пространства H_m следующим образом. Выберем ортонормальный базис $\{e_1, ..., e_m\}$ в H_m. Борелевским множествам в H_m можно поставить во взаимно-однозначное соответствие борелевские множества в «координатном» пространстве

$$x \leftrightarrow \{[x, e_i] : i = 1, ..., m\}.$$

Введем теперь на борелевских множествах гауссову меру с матрицей вторых моментов $\{r_{ij}\}$, где $r_{ij} = [Re_i, e_i]$, а R - данный оператор.

Очевидно, что эта мера не зависит от выбранного базиса. Заметим, что $(m \times m)$ матрица $\{r_{ij}\}$ может быть вырожденной. Легко видеть, что введенная мера удовлетворяет условию согласованности. Обозначим эту цилиндрическую меру через μ.

Пусть N_R обозначает нуль-пространство оператора R, а H_m - подпространство в N_R. Тогда мера μ любого цилиндрического множества с основанием в H_m равна 1 или 0 в зависимости от того, содержит это множество нулевой элемент или нет.

Весьма важную роль играет следующее свойство рассматриваемой меры. Пусть $\{\varphi_i\}$ - полная ортонормированная система в множестве значений оператора R. Обозначим через E_n цилиндрическое множество:

$$E_n = \{x : \sum_{i=1}^{n} [x, \varphi_i]^2 \leq M^2\}, \mu > 0.$$

Так как

$$E_n \subset \bigcap_{i=1}^{n} \{x : [x, \varphi_i]^2 \leq M^2\},$$

то

$$\mu(E_n) \leq (\Phi(M)/\lambda_n)^n,$$

где

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x exp(-\frac{t^2}{2})dt$$

и

$$\lambda_n^2 = \min_{\varphi \in H_n} \frac{(R\varphi, \varphi)}{[\varphi, \varphi]},$$

где H_n-пространство, натянутое на векторы $\varphi_1, ..., \varphi_n$.

Но в этом случае

$$\frac{1}{n} log\mu(E_n) \leq log\Phi(\lambda/\lambda_n)$$

и, следовательно,

$$\overline{lim}\frac{1}{n} log\mu(E_n) \leq log\Phi(\mu/\lambda),$$

где

$$\lambda = \overline{lim}\lambda_n.$$

В частности, $\mu(E_n) \to 0$, если $\lambda > 0$.

Пусть $S(0, M)$-шар радиуса M с центром в начале координат. Тогда $S(0, M) \subset E_n$ для каждого n. Это доказывает, что на классе борелевских множеств $\mathcal{B}$ нет счетно-аддитивной меры совпадающей с мерой μ на цилиндрических множествах. Действительно, если P такая счетно-аддитивная мера, То

$$P(S(0, M)) \leq P(E_n)$$

а так как $P(E_n) = \mu(E_n)$, то $P(S(0, M)) = 0$ для всех M. Но

$$H = \bigcup_n S(0, n), n = 1, 2, ...$$

и потому

$$1 = \lim_{n \to \infty} P(S(0, n)),$$

и мы приходим к противоречию.

Итак, если R-положительно определенный самосопряженный оператор, для которого

$$[Rx, x] \geq m[x, x], m > 0,$$

то индуцированную им цилиндрическую меру нельзя продолжать так, чтобы она стала счетно-аддитивной на $\mathcal{B}$ при условии, что H бесконечномерно. А так как прототипами невырожденных гауссовских распределений являются положительно определенные операторы, мы вынуждены ограничиться лишь конечно-аддитивными мерами.

4.2.2. Задача Коши для дробного дифференциального уравнения в гильбертовом пространстве: детерминированный случай

Нашей целью в этом разделе является определение слабого решения одного класса дробных абстрактных дифференциальных уравнений. При этом дробные производные в уравнении будут производными Капуто. Будут установлены результаты для слабых и сильных решений однородных и неоднородных уравнений.

Операторы в дробных векторных пространствах Соболева

Пусть H действительное гильбертово пространство со внутренним произведением $< \cdot, \cdot >$ и нормой $\| \cdot \|$. Пусть A линейный самосопряженный положительный оператор на H с плотной областью определения $\mathfrak{D}(A)$. Оператор A удовлетворяет неравенства

$$< Ax, x > \geq a\|x\|^2 \ \forall x \in \mathfrak{D}(A) \tag{4.2.2}$$

для некоторого $a > 0$. Предположим, что спектр A состоит из последовательности положительных собственных значений $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ таких что $\lambda_n \to \infty$ при $n \to \infty$. Более того все λ_n являются изолированными числами и при этом собственное пространство генерируемое каждым простым λ_n имеет размерность один.

Более того, собственные функции e_n оператора A $(Ae_n = \lambda_n e_n)$ образуют ортонормальный базис пространства H.

Дробные степени A^θ определены для $\theta > 0$ (см.напр. [103]). Область $\mathfrak{D}(A^\theta)$ оператора A^θ состоит из тех $u \in H$ для которых

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{2\theta} \Big| < u, e_n > \Big|^2 < \infty$$

и

$$A^\theta u = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{\theta} < u, e_n > e_n, u \in \mathfrak{D}(A^\theta).$$

Легко установить, что $\mathfrak{D}(A^\theta)$ является гильбертовым пространством со следующей нормой

$$\|u\|_{\mathfrak{D}(A^\theta)} = \|A^\theta u\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{2\theta} \Big| < u, e_n > \Big|^2 \right)^{1/2}, u \in \mathfrak{D}(A^\theta), \tag{4.2.3}$$

и для любых $0 < \theta_1 < \theta_2$ имеем

$$\mathfrak{D}(A^{\theta_2}) \subset \mathfrak{D}(A^{\theta_1}).$$

В частности, норма пространства $\mathfrak{D}(\sqrt{A})$ определяется так

$$\|u\|_{\mathfrak{D}(\sqrt{A})} = \|\sqrt{A}\, u\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{2\theta} \Big| < u, e_n > \Big|^2 \right)^{1/2}, u \in \mathfrak{D}(\sqrt{A}). \tag{4.2.4}$$

Если обозначить двойственные к H пространства через H', то мы имеем

$$\mathfrak{D}(A^{-\theta}) = (\mathfrak{D}(A^\theta))' \tag{4.2.5}$$

элементы которого являются линейными ограниченными функционалами над $\mathfrak{D}(A^{\theta})$.

Если $u \in \mathfrak{D}(A^{-\theta})$ и $\varphi \in \mathfrak{D}(A^{\theta})$ то величина $u(\varphi)$ определяется формулой

$$< u, \varphi >_{-\theta,\theta} = u(\varphi). \tag{4.2.6}$$

В дополнении $\mathfrak{D}(A^{-\theta})$ является гильбертовым пространством с нормой

$$\|u\|_{\mathfrak{D}(A^{-\theta})} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-2\theta} \big| < u, e_n >_{-\theta,\theta} \big|^2 \right)^{1/2}, u \in \mathfrak{D}(A^{-\theta}), \tag{4.2.7}$$

и для любых $0 < \theta_1 < \theta_2$ имеем $\mathfrak{D}(A^{-\theta_1}) \subset \mathfrak{D}(A^{-\theta_2})$. Мы также напомним, что

$$< u, \varphi >_{-\theta,\theta} = (u, \varphi) \text{ для } u \in H, \varphi \in \mathfrak{D}(A^{\theta}). \tag{4.2.8}$$

Приводим теперь определение дробного векторного пространства Соболева. Для $\beta \in (0, 1), T > 0$ и пространства Гильберта H оснащенной нормой $\| \cdot \|_H$ через $H^{\beta}(0, T, H)$ обозначим пространства всех $u \in L^2(0, T, H)$ таких что

$$[u]_{H^{\beta}(0,T,H)} = \left(\int_0^T \int_0^T \frac{\|u(t) - u(\tau)\|_H^2}{|t - \tau|^{2\beta+1}} \right) < +\infty, \tag{4.2.9}$$

Тогда $H^{\beta}(0, T, H)$ с нормой

$$\| \cdot \|_{H^{\beta}(0,T;H)} = \| \cdot \|_{L^2(0,T;H)} + [\cdot]_{H^{\beta}(0,T;H)}$$

является гильбертовым пространством.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 4.2.2. *(см. [103]). Пусть H сепарабельное гильбертово пространство.*

1. Оператор Римана - Лиувилля

$$I^{\beta} : L^2(0, T; H) \to L^2(0, T; H), 0 < \beta \leq 1$$

является инъективным и область его значений $\mathfrak{R}(I^\beta)$ *определяется формулой*

$$\mathfrak{R}(I^\beta) = \begin{cases} H^\beta(0,T,H), & 0 < \beta < 1/2 \\ \{\varphi \in H^{1/2}(0,T;H) : \int\limits_0^T t^{-1}|v(t)|^2 dt < \infty\}, & \beta = 1/2 \\ H_0^\beta(0,T,H), & 1/2 < \beta \leq 1, \end{cases} \tag{4.2.10}$$

где $H_0^\beta(0,T,H) = \{u \in H^\beta(0,T;H) : u(0) = 0\}$.

2. Для оператора Римана - Лиувилля I^β *и обратный к нему* $I^{-\beta}$ *справедлива эквивалентность норм*

$$\begin{gathered} \|I^\beta(u)\|_{H^\beta(0,T;H)} \sim \|u\|_{L^2(0,T;H)}, u \in L^2(0,T;H), \\ \|I^{-\beta}(v)\|_{L^2(0,T;H)} \sim \|v\|_{H^\beta(0,T;H)}, u \in \mathfrak{R}(I^\beta). \end{gathered} \tag{4.2.11}$$

Дробные производные и функции Миттаг - Леффлера

Определение 4.2.3. *Для любого* $\alpha > 0$ *определим интегральный оператор Римана - Лиувилля порядка* α *формулой*

$$I^\alpha(f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds, f \in L^1(0,T) \text{ для п.в. } t \in (0,T),$$

где $T > 0$ *и*

$$\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt -$$

гамма - функция Эйлера.

Дробная производная Капуто порядка $\alpha \in (1,2)$ задается как

$${}^cD_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int\limits_0^t (t-s)^{1-\alpha} \frac{d^2 f}{ds^2}(s) ds.$$

Производную Капуто можно выразить через интегральный оператор Римана-Лиувилля

$$ {}^cD_t^\alpha f(t) = I^{2-\alpha}\left(\frac{d^2 f}{dt^2}\right)(t). $$

Если f^1 абсолютно непрерывна, то

$$ {}^cD_t^\alpha f(t) = \frac{d}{dt} I^{2-\alpha}(f' - f'(0))(t). $$

Для произвольных постоянных $\alpha, \beta > 0$ вводится функция Миттаг-Леффлера

$$ E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, z \in \mathbb{C}. $$

Функция $E_{\alpha,\beta}(z)$ является целой функцией $z \in \mathbb{C}$.

Отметим, что $E_{\alpha,1}(0) = 1$.

Далее вводим преобразование Лапласа функции $f(t)$ в виде

$$ \mathfrak{L}[f(t)](z) = \int\limits_0^\infty e^{zt} f(t) dt, z \in \mathbb{C}. $$

Лемма 4.2.4. *Пусть $\alpha \in (1,2)$ и $\beta > 0$. Тогда для любого $\mu \in \mathbb{R}$ такое, что $\pi\alpha/2 < \mu < \pi$ существует постоянная $C = C(\alpha, \beta, \mu)$ такая, что*

$$ |E_{\alpha,\beta}(z)| \leq \frac{C}{1 + |z|}, z \in \mathbb{C}, \mu \leq |arg(z)| \leq \pi. \tag{4.2.12} $$

Лемма 4.2.5. *Для $\alpha, \beta, \lambda > 0$ имеем*

$$ \mathfrak{L}[t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(-\lambda t^\alpha)](z) = \frac{z^{\alpha-\beta}}{z^\alpha + \lambda}, Rez > \lambda^{1/2}. \tag{4.2.13} $$

Лемма 4.2.6. *Если $\alpha, \lambda > 0$, то имеем*

$$ \frac{d}{dt} E_{\alpha,1}(-\lambda t^\alpha) = -\lambda t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda t^\alpha), t > 0 \tag{4.2.14} $$

$$\frac{d}{dt}(t^k E_{\alpha,k+1}(-\lambda t^\alpha)) = t^{k-1}E_{\alpha,k}(-\lambda t^\alpha), k \in \mathbb{N}, t \geq 0 \tag{4.2.15}$$

$$\frac{d}{dt}(t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda t^\alpha) = -\lambda t^{\alpha-2}E_{\alpha,\alpha-1}(-\lambda t^\alpha), t \geq 0. \tag{4.2.16}$$

Лемма 4.2.7. *Для любого $0 < \beta < 1$ функция $x \to \frac{x^\beta}{1+x}$ достигает свой maximum на $[0, +\infty]$ в точке $\frac{\beta}{1-\beta}$ и максимальное значение в виде*

$$\max_{x\geq 0}\frac{x^\beta}{1+\beta} = \beta^\beta(1-\beta)^{1-\beta}, \beta \in (0,1). \tag{4.2.17}$$

Слабые решения однородного дробного уравнения

Пусть $\alpha \in (1,2)$ и $T > 0$.

Определение 4.2.8. *Функция $u(t)$ называется слабым решением абстрактного дробного уравнения*

$$^cD_t^\alpha u + Au = 0 \tag{4.2.18}$$

если $u \in C([0,T]; \mathfrak{D}(\sqrt{A})), u' \in L^2(0,T;H)\bigcap C([0,T];\mathfrak{D}(A-\beta))$ для некоторого $\beta \in (0,1)$, и для любого $v \in \mathfrak{D}(\sqrt{A})$ имеется

$$< I^{2-\alpha}(u' - u'(0))(t), v > \in C^1([0,T])$$

и

$$\frac{d}{dt} < I^{2-\alpha}(u' - u'(0))(t), v > + < \sqrt{A}u(t), \sqrt{A}v >= 0, t \in (0,T). \tag{4.2.19}$$

Замечание 4.2.9. *Для слабого решения $u(t)$ уравнения (4.2.12) имеем $^cD_t^\beta \in H^{1-\beta}(0,T;H), \beta \in (0,1)$, где производная Капуто порядка $\beta \in (0,1)$ определяется формулой*

$$^cD_t^\beta u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\int\limits_0^t (t-s)^{-\beta}u'(s)ds = I^{1-\beta}(u')(t). \tag{4.2.20}$$

На самом деле, поскольку $u' \in L^2(0,T;H)$ то мы можем применить теорему 4.2.2 чтобы получить $I^{1-\beta}(u') \in H^{1-\beta}(0,T;H)$, так что ${}^cD_t^{\beta}u \in H^{1-\beta}(0,T;H)$.

В частности, для $\beta = \alpha/2$ и $\beta = 1-\alpha/2$ имеем

$$ {}^cD_t^{\alpha/2}u \in H^{1-\alpha/2}(0,T;H)u $$

$$ {}^cD_t^{1-\alpha/2}u \in H^{\alpha/2}(0,T;H). $$

Напомним (см. напр. [95]) что, для решения скалярных дробных дифференциальных уравнений применяется преобразование Лапласа.

Имеет место утверждение

Лемма 4.2.10. *для любого $\lambda > 0$ и $x, y \in \mathbb{R}$ решение задачи*

$$ \begin{cases} {}^cD_t^{\alpha}u(t) + Au(t) = 0, & t \geq 0 \\ u(0) = x, & u'(0) = y. \end{cases} $$

имеет вид

$$ u(t) = xE_{\alpha,1}(-\lambda t^{\alpha}) + ytE_{\alpha,2}(-\lambda t^{\alpha}). $$

Теорема 4.2.11. *Пусть $u_0 \in D(\sqrt{A})u$ и $u_1 \in H$, то функция*

$$ u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \big[< u_0, e_n > E_{\alpha,1}(-\lambda_n t^{\alpha}) + < u_1, e_n > tE_{\alpha,2}(-\lambda_n t^{\alpha}) \big] e_n \tag{4.2.21} $$

является единственным слабым решением (4.2.19) удовлетворяющее начальные условия

$$ u(0) = u_0, u'(0) = u_1. \tag{4.2.22} $$

Доказательство теоремы приводится по следующей схеме. Вначале надо убедиться в справедливости представления решений в виде ряда (4.2.21).

Для этого будем искать решение в виде

$$ u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_u(t) e_n \tag{4.2.23} $$

где функции $u_n(t) =< u(t), e_n >$ неизвестные. Легко видеть, что с учетом начальных условий (4.2.21) $u_n(t)$ будет решением задачи

$$\begin{cases} {}^cD_t^\alpha u_n(t) + \lambda_n u_n(t) = 0, & t \geq 0 \\ u_n(0) =< u_0, e_n >, & u_n'(0) =< u_1, e_n > \end{cases} \tag{4.2.24}$$

и, далее, с помощью Леммы 4.2.10 получим

$$u_n =< u_n, e_n > E_{\alpha,1}(-\lambda_n t^\alpha)+ < u_1, e_n > tE_{\alpha,2}(-\lambda_n t^\alpha), t \geq 0. \tag{4.2.25}$$

Теперь, взяв $u_0 \in \mathfrak{D}(\sqrt{A}), u_1 \in H$ покажем, что ряд (4.2.24) с $u_n(t)$ заданный в виде (4.2.25) является слабым решением (4.2.19) и удовлетворяет условий (4.2.21).

Во первых, заметим, что для любого $t \in [0, T]$ имеем $u(t) \in D(\sqrt{A})$. Действительно, поскольку

$$\|\sqrt{A}u(t)\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n |u_n(t)|^2 \leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n | < u_0, e_n > E_{\alpha,1}(-\lambda_n t^\alpha)|+$$

$$+2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \| < u_1, e_n > tE_{\alpha,2}(-\lambda_n t^\alpha)\|^2$$

то благодаря (4.2.20) получим

$$\lambda_n | < u_0, e_n > E_{\alpha,1}(-\lambda_n t^\alpha)|^2 \leq C\lambda_n |u_0, e_n|^2,$$

$$\lambda_n | < u_1, e_n > E_{\alpha,2}(-\lambda_n t^\alpha)|^2 \leq Ct^{2-\alpha} |u_1, e_n|^2 \times$$
$$\times \frac{\lambda_n t^\alpha}{(1 + \lambda_n t^\alpha)^2} \leq Ct^{2-\alpha} | < u_1 e_n > |^2$$

и, следовательно, учитывая $\alpha < 2$ получим

$$\|\sqrt{A}u(t)\|^2 \leq C\|\sqrt{A}u_0\|^2 + CT^{2-\alpha}\|u_1\|^2, \tag{4.2.26}$$

Итак, для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$\|\sqrt{A}\sum_{k=u}^{\infty}u_k(t)e_k\|^2 \le C\sum_{k=n}^{\infty}\lambda_k| < u_0, e_n > |^2 +$$

$$+CT^{2-\alpha}\sum_{k=n}^{\infty}| < u_1, e_k > |^2$$

и, кроме того,

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{t\in[0,T]}\|\sqrt{A}\sum_{k=n}^{\infty}u_k(t)e_k\| = 0$$

Как результат, ряд (4.2.24) равномерно в $[0,T]$ сходятся в $\mathfrak{D}(\sqrt{A})$ к $u \in C([0,T];\mathfrak{D}(\sqrt{A}))$.

Более того, $u(0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} < u_0, e_n > e_n = u_0$.

Слабые и сильные решения неоднородного уравнения

Напомним, что для нахождения решения скалярного дробного неоднородного уравнения можно использовать интегральное преобразование Лапласа функций Миттаг-Леффлера и их производные указанные в формулах (4.2.12) - (4.2.16).

Лемма 4.2.12. *Пусть $f(t)$ определена на полуоси $\mathbb{R}_+$. Для любых $\alpha, 1 < \alpha < 2, \lambda > 0$ и $x, y \in \mathbb{R}$ решение задачи*

$$^cD_t^\alpha u(t) + \lambda u(t) = f(t), t > 0$$

$$u(0) = x, u'(0) = y$$

представляется в виде

$$u(t) = \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda(t-s)^\alpha)f(s)ds + xE_{\alpha,1}(-\lambda t^\alpha) + yTE_{\alpha,2}(-\lambda t^\alpha).$$

Рассмотрим теперь неоднородное уравнение в пространстве H в виде

$$^cD_t^\alpha u(t) + Au(t) = f(t), t > 0 \tag{4.2.27}$$

с начальными условиями

$$u(0) = u_0, u'(0) = u_1, \tag{4.2.28}$$

где A самосопряженный положительно однородный оператор на H такой, что $\mathfrak{D}(\bar{A}) = H$.

Имеет место утверждение.

Теорема 4.2.13. *Предположим, что* $u_0 \in \mathfrak{D}(\sqrt{A})$ *и* $u_1 \in H$, *а функция* $f(t)$, *и принимающая значения в* H *сильно непрерывно дифференцируема на компактных отрезках* $[kT, (k+1)T] \subset \mathbb{R}_+$, $k \in \mathbb{N}v\{0\}$. *Тогда функция*

$$u(t) = \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n (t-s)^\alpha) < f(s), e_n > e_n ds +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} [< u_0, e_n > E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n t^\alpha) + < u_1, e_n > t E_{\alpha,2}(-\lambda_n t^\alpha)] e^n \tag{4.2.29}$$

является единственным слабым решением уравнения (4.2.28) удовлетворяющее начальные условия (4.2.30).

Дополнительно к этому заметим, что

$$u'(t) = (\alpha - 1) \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-2} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n (t-s)^2) < f(s), e_n > e_n ds -$$

$$\lambda_n \int\limits_0^t (t-s)^{2\alpha-2} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n (t-s)^2) < f(s), e_n > e_n ds +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} [-\lambda_n < u_0, e_n > t^{\alpha-1} E_{\alpha,1}(-\lambda_n t^\alpha) + < u_1, e_n > E_{\alpha,2}(-\lambda_n t^\alpha)] e_n \tag{4.2.30}$$

и $u' \in C([0,T], \mathfrak{D}(A^{-\theta}))$ для $\theta \in (\frac{2-\alpha}{2n}, 1/2)$.

Доказательство теоремы состоит в реализации принципа Дюамеля для рассматриваемого класса уравнений дробного порядка. Единственность слабого решения непосредственно следует из теоремы 4.2.11.

Теорема 4.2.14. *Пусть $f(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 4.2.11. Для $u_0 \in \mathfrak{D}(A)$ и $u_1 \in \mathfrak{D}(\sqrt{A})$ слабое решение уравнения (4.2.31) совпадает с сильным решением и имеет место равество*

$$ {}^cD_t^\alpha u(t) = -\lambda_n \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n (t-s)^\alpha) < f(s), e_n > e_n ds- $$

$$ -\sum_{n=1}^{\infty} [\lambda_n < u_0, e_n > E_{\alpha,1}(-\lambda_n t^\alpha) + \lambda_n < u_1, e_n > t E_{\alpha,2}(-\lambda_n t^\alpha)] e_n. $$

Центральное место в доказательстве этой теоремы занимает теорема Лерха об единственности обратного преоразования Лапласа в бесконечномерном случае и следующее равенство

$$ I^{2-\alpha}(u' - u_1)(t) = -\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n [< u_0, e_n > t E_{\alpha,2}(-\lambda_n t^\alpha) + $$

$$ + < u_1, e_n > t^2 E_{\alpha,3}(-\lambda_n t^\alpha)] e^n \qquad (4.2.31) $$

и то, что $I^{2-\alpha}(u' - u_1)(t) \in C([0, T], H)$.

Из (4.2.32) следует, что

$$ \frac{d}{dt} I^{2-\alpha}(u' - u_1)(t) = -\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n [< u_0, e_n > t E_{\alpha,2}(-\lambda_n t^\alpha) + $$

$$ + < u_1, e_n > t^2 E_{\alpha,2}(-\lambda_n t^\alpha)] e^n \qquad (4.2.32) $$

и $\frac{d}{dt} I^{2-\alpha}(u' - u_1)(t) \in C([0, T], H)$.

4.2.3. Белый шум Балакришнана

Пусть $(\Omega, \mathcal{B}, \rho)$ вероятностная тройка. В курсе теории вероятностей под случайной величиной понимается любая функция определенная на Ω и измеримая относительно борелевской σ-алгебры $\mathcal{B}$.

Нам здесь понадобятся конечно-аддитивные меры на алгебрах, так как в этом случае мы сможем рассматривать гауссовские случайные величины с неядерными корреляционными матрицами. В монографии [38] развивая схему Данфорда и Шварца предложен новый подход к определению случайной величины.

Итак, пусть Ω-абстрактное пространство, $\mathfrak{C}$-алгебра (не обязательно σ-алгебра) подмножеств в Ω, μ-конечно-аддитивная вероятностная мера, определенная на $\mathfrak{C}$. Функция $f(\omega)$ отображающая Ω в гильбертово пространство называется случайной величиной в слабом смысле, если для любого конечного набора элементов $\varphi_i, i = 1, ..., n$, из гильбертова пространства выполнены условия:

1) Множество $\{\omega : \{[f(\omega), \varphi_i]\} \in B\}$, где B борелевское множество евклидова пространства, принадлежит $\mathfrak{C}$;

2) Мера, индуцированная таким образом на борелевских множествах, счетно-аддитивна для каждого n.

Здесь набор $\{[f(\omega), \varphi_i]\}$ определяет обычную случайную величину. Если дана цилиндрическая вероятностная мера на гильбертовом пространстве, то можно построить соответствующую случайную величину, положив: $\Omega = H$, $\mathfrak{C}$-класс цилиндрических множеств и $f(\omega) = \omega$. Например, если цилиндрическая мера будет такой гауссовой мерой μ, что ее характеристическая функция имеет вид

$$\int\limits_H e^{i[\omega,\varphi]} d\mu = exp\Big(-\frac{\|\varphi\|^2}{2}\Big).$$

Тогда для произвольного ортонормального базиса $\{\varphi_k\}$ в H скалярные произведения $[f(\omega), \omega_k]$ определяют независимые гауссовы случайные величины с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. Однако, для всех ω

$$\sum_{k=1}^{\infty} [f(\omega), \varphi_k]^2 = \|f(\omega)\|^2 < \infty.$$

Это утверждение противоречит классической теории вероятности, согласно которой аналогичная сумма квадратов независимых гауссовских случайных величин с единичной дисперсией должна бесконечно расти с вероятностью 1. Следует отметить один принципиальный момент. В классической теории в качестве фазового пространства берется пространство всевозможных последовательностей и на борелевской алгебре его подмножеств определяют некоторую счетно-аддитивную меру. Здесь же речь идет лишь о конечно-аддитивных мерах, и определяются они на алгебрах. В действительности, для случая гауссовских случайных величин подпространство квадратично суммируемых последовательностей имеет меру нуль. Поэтому, исключительно важным является то, как устроено вероятностное пространство.

Везде в дальнейшем будем считать, что $\Omega = H$, $\mathfrak{C}$-класс цилиндрических множеств, а $\mathcal{B}$-борелевская алгебра на H. Отметим, что из условия 1) определения случайной величины следует, что прообразы борелевских множеств в E_n (n-фиксировано) принадлежат $\mathfrak{C}$. Но поскольку борелевские множества в E_n образуют σ-алгебру, их прообразы также образуют σ-алгебру.

Следовательно, мера μ определена и на σ-алгебре $\mathcal{B}$ борелевских множеств пространства H. Поэтому можно немного ослабить определение и называть $f(\omega)$ случайной величиной в слабом смысле, если для любого конечного набора n элементов φ_i из H множество $\{\omega : \{[f(\omega), \varphi_i]\} \in B\}$, где B борелевское множество в E_n, принадлежит $\mathcal{B}$, а мера μ определена и счетно-аддитивна на σ-подалгебре алгебры прообразов борелевских множеств.

Пусть теперь $(H, \mathfrak{C}, \mu)$-вероятностное пространство, где H-вещественное сепарабельное гильбертово пространство, $\mathfrak{C}$-класс цилиндрических множеств с конечномерными основаниями, а μ-цилиндрическая мера. Для заданной функции $f(\cdot)$ отображающей H в другое гильбертово пространство H', прообразы борелевских множеств $\{\omega : f(\omega) \in B, B \in H\}$ не обязательно принадлежат классу $\mathfrak{C}$. Поэтому в общем случае определить вероятность такого события не удастся. К какому классу функций относятся случайные переменные. Для ответа на этот вопрос мы будем действовать по аналогии с процедурой пополнения пространств с помощью последовательностей Коши. Обозначим через P оператор проектирования на конечномерное пространство. Тогда прообразы борелевских множеств функции $f(P\omega)$ (в предположении, что $f(\cdot)$ измерима по Борелю) принадлежит классу $\mathfrak{C}$.

Следовательно, для любого борелевского множества C из пространства

H' формула

$$\chi(C) = \mu\{\omega : P(\omega) \in C\}$$

определяет счетно-аддитивную меру на σ-алгебре борелевских множеств из H'. Таким образом функция $f(P\omega)$-случайная величина. В дальнейшем каждая такая функция будет называться элементарной случайной величиной (ЭСВ). Случайной переменной будем называть произвольную последовательность Коши по мере элементарных случайных величин.

Дадим расширение понятия ЭСВ.

Определение 4.2.15. *Пусть $f : H \to H$-измеримое борелевское отображение и пусть P_n-последовательность конечномерных проекторов сильно сходящихся к единичному оператору. Отображение $f(\cdot)$ называется физической случайной величиной (ФСВ), если:*

1) последовательность ручных функций $\{f(P_n\omega)\}$ является последовательностью Коши по вероятности для каждой $\{P_n\}$.

2) последовательность $\{v_n\}$ вероятностных мер индуцированных через $f \circ P_n$ и определенных как

$$v_n = \mu \circ (f \circ P_n)^{-1}$$

сильно сходится к той же вероятностной мере на H^1 для каждой последовательности P_n.

Условие 2) эквивалентно тому, что существует предел

$$C(\omega) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_H e^{i[f\circ P_n\omega, \omega']} d\mu(h)$$

не зависящий от P_n.

Если f является ФСВ, то μ можно всегда расширить до событий вида $f^{-1}(B')$, где B' борелевское множество в H' с помощью равенства

$$\mu(f^{-1}(B')) = \lim_{n\to\infty} \mu((\omega \in H \big| f \circ P_n(\omega) \in B')),$$

где предел существует по определению. Класс H'-значных ФСВ обозначается как $\mathfrak{L}'(H, \mathfrak{C}, \mu, H')$-сопряженное к $\mathfrak{L}(H, \mathfrak{C}, \mu, H')$ пространства.

К завершению наших построений вводим модель гауссовского шума. Естественно предположить, что гауссовский шум имеет значительно большую полосу чем просто сигнал. Это следует из того, что соответствующим представлением является тождественное отображение на H оснащенной мерой Гаусса μ_G с единичным корреляционным оператором. Такое отображение называется белым шумом Гаусса, или шумом Балакришнана.

Дадим характеристику ФСВ. Для достижения этой цели нужна следующая концепция непрерывности.

Определение 4.2.16. *Пусть H, H' действительные гильбертовые пространства. Отображение $F : H \to H'$ является непрерывным в $x \in H$ относительно S-топологии, если для любого $\varepsilon > 0$ существует оператор Гильберта-Шмидта $L_\varepsilon(x) : H \to H'$ такой, что из неравенства*

$$\|L_\varepsilon(x)(x - x')\| \le 1 \tag{4.2.33}$$

следует, что

$$\|F(x) - F(x')\| \le \varepsilon. \tag{4.2.34}$$

Отображение F является S-непрерывным на $U \subset H$ в случае, когда оператор Гильберта-Шмидта из (4.2.33) не зависит от $x \in H$.

Дадим более слабое понятие следующего вида.

Определение 4.2.17. *Отображение $F : H \to H'$ называется равномерно S-непрерывным в окрестности начала $(PSHOH)$ если F равномерно S-непрерывно на множествах*

$$U_n = \{x \in H : \|L_n x\| \le 1\}$$

где $\{L_n\}_{n\ge1}$ является последовательностью операторов Гильберта-Шмидта такая, что

$$\|L_n\|_{HS} \to 0 \text{ и } \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = H.$$

Очевидно, что равномерное S-непрерывное отображение является также PSHOH. В этом случае $L_n = \frac{1}{n}L$.

Теперь мы имеем все необходимые средства чтобы сформулировать критерии для ФСВ.

Теорема 4.2.18. *Достаточным условием того, что отображение $F : H \to H'$ было ФСВ является его PSHOH-ть.*

Полезной характеризацией PSHOH-сти отображения является следующее утверждение.

Теорема 4.2.19. *Отображение $F : H \to H'$ является PSHOH тогда и только тогда, когда существует оператор Гильберта-Шмидта $L : H \to H'$ и непрерывное отображение $g : H \to H'$ такое, что*

$$F = g \circ L.$$

4.2.4. Задача Коши для дробного дифференциального уравнения в гильбертовом пространстве: стохастический случай

В этом разделе используя семейства специальных функций Миттаг-Леффлера и разложения по собственным функциям неотрицательно определенного самосопряженного оператора A с плотной областью определения в гильбертовом пространстве H мы получим обобщение линейных с конечномерным пространством состояний на бесконечномерный случай, в частности, охватывает системы описываемые дифференциальными уравнениями в частных производных и дробные по времени производные порядка $\alpha, 1 < \alpha < 2$ вместе с белым шумом Балакришнана в качестве входа.

С этой целью, в самом начале, определим функциональное пространство $W = L_2(0, T; H)$ и $0 < T < \infty$. Пусть H_n-сепарабельное гильбертово пространство и пусть $W_n = L_2(0, T; H_n)$ (здесь буква n является сокращением слова noise). Обозначим через A оператор заданный в разделе 3 и через B линейный ограниченный оператор действующий из пространства H_n в H.

Рассмотрим дробное стохастическое дифференциальное уравнение

$$^{c}D_t^{\alpha}u(t) + Au(t) = B\omega(t), t > 0 \tag{4.2.35}$$

вместе с начальными условиями

$$u(0) = u_0, u'(0) = u_1. \tag{4.2.36}$$

Результаты полученные в разделе 3, в разделе 4 позволяют для каждого $\omega \in W_n$ переписать задачу (4.2.35), (4.2.36) в интегральной форме. Более того, можно утверждать, что указанное чуть ниже интегральное уравнение имеет единственное слабое решение. Так как мы хотим подчеркнуть зависимость решения от входа ω, то для этого будем использовать обозначение $u(t,\omega)$.

Напомним также, что через $e_n u \lambda_n$ обозначены n-ные собственные функции и собственные значения оператора A соответственно.

Уравнение

$$< u(t,\omega), e_n >=< u_0, e_n > + < u_1, e_n > t-$$

$$-\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} < u(s,\omega), Ae_n > ds + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} < B\omega(s), e_n > ds \tag{4.2.37}$$

имеет решение определяемое формулой

$$u(t,\omega) = \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n (t-s)^{\alpha}) < B\omega, e_n > e_n ds+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} [< u_0, e_n > E_{\alpha,1}(-\lambda_n t^{\alpha}) + < u_1, e_n > tE_{\alpha,2}(-\lambda_n t^{\alpha})] e_n,$$

и для каждого ω это решение единственно в классе слабо непрерывных функций, удовлетворяющих уравнению (4.2.37). Вычислим корреляционный оператор, соответствующий процессу $u(t,\omega)$. Процесс $u(t,\omega)$ определен в каждый момент времени t. Предполагая u_0 и u_1 заданными, получим

$$\mathbb{E}\Bigg(\Bigg[u(t,\omega)-\sum_{n=1}^{\infty}[< u_0,e_n > E_{\alpha,1}(-\lambda_n t^{\alpha})+ < u_1,e_n > E_{\alpha,2}(-\lambda_n t^{\alpha})e_n\Bigg]\times$$

$$\Bigg[u(s,\omega)-\sum_{n=1}^{\infty}[< u_0,e_n > E_{\alpha,1}(-\lambda_n t^{\alpha})+ < u_1,e_n > E_{\alpha,2}(-\lambda_n t^{\alpha})\Bigg]e_n\Bigg)=$$

$$\mathbb{E}\Bigg(\int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n(t-s)^{\alpha}) < B\omega, e_n > e_n ds\times$$

$$\times\int\limits_0^s (s-\sigma)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n(s-\sigma)^{\alpha}) < B\omega(\sigma), e_n > e_n d\sigma\Bigg)=$$

$$\mathbb{E}\Bigg(\int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n(t-s)^{\alpha}) < \omega(s), B^*e_n > e_n ds\times$$

$$\times\int\limits_0^s (s-\sigma)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n(s-\sigma)^{\alpha}) < \omega(\sigma), B^*e_n > e_n d\sigma\Bigg)=$$

$$\Bigg[\int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n(t-s)^{\alpha})ds\cdot$$

$$\int\limits_0^s (s-\sigma)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n(s-\sigma)^{\alpha})d\sigma\cdot\|B^*\|\Bigg]e_n.$$

Следовательно, корреляционный оператор $R(t,s)$ определяется формулами

$$R(t,s)u_0=\int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n(t-s)^{\alpha})ds\cdot$$

$$\int\limits_0^s (s-\sigma)^{\alpha-1}E_{\alpha,1}(-\lambda_n(s-\sigma)^{\alpha})u_0 d\sigma.$$

$$R(t,s)u_1 = \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n (t-s)^{\alpha}) ds \times$$

$$\times \int\limits_0^s (s-\sigma)^{\alpha-1} E_{\alpha,2}(-\lambda_n (s-\sigma)^{\alpha}) u_1 d\sigma.$$

В качестве заключения необходимо отметить, что конечно-аддитивный белый шум Гаусса (шум Балакришнана) имеет равномерную спктральную плотность мощности, является нормально распределенным, суммируется с полезным сигналом и статистически не зависит от сигнала. Чаще всего такие меры используются при цифровой обработке сигналов в системах космической связи и при анализе доходности ценных бумаг.

4.3. Функции Ляпунова и устойчивость решений стохастических дифференциальных уравнений с дробно-подобными производными

Данный параграф посвящен анализу вопросов устойчивости дробно-подобных стохастических дифференциальных уравнений. Стохастическая устойчивость и ассимптотическая стохастическая устойчивость изучается с помощью функции Ляпунова. Экспоненциальная устойчивость почти наверное и p-моментная экспоненциальная устойчивость устанавливается на основе формулы Ито дробно-подобной версии.

За последние десятилетия получили широкое применение различные варианты дробных производных при изучении свойства памяти для сложных систем в различных направлениях (см.напр. [42], [52]). В работах [15], [93] введено новое понятие - дробно-подобное производное, а в [110], [111] рассмотрены системы дифференциальных уравнений с этими производными. В работе [102] изложены новые результаты для нейронных сетей с дробным дискретным временем. С другой стороны, в последние годы получила развитие теория устойчивости дробных стохастических дифференциальных уравнений и ее приложений. И это неудивительно, поскольку стохастичность является важнейшим свойством реального мира, а устойчивость является высшим приоритетом для прикладных сложных систем.

Анализ устойчивости стохастических систем становится необходимым как в теоретическом так и в прикладном аспекте. Математическая теория устойчивости решений стохастических дифференциальных уравнений состоит из двух основных направлений. Это, прямой (второй) метод Ляпунова [1], [18], [13] и метод неподвижных точек Burton-а [48], [49], [50]. Вопросы существования, единственности и устойчивости решений стохастических дифференциальных уравнений в частных производных были предметом анализа в работах [84], [83], [132]. Новые результаты получены также по стохастическим интегро-дифференциальным уравнениям [71], [116], [144], [101].

Настоящий параграф посвящен развитию функций типа Ляпунова для стохастических дифференциальных уравнений с дробно-подобной производной вида

$$\mathfrak{D}_{t_0}^{\alpha} X(t) = b(t, X(t)) + \sigma(t, X(t))\frac{dW(t)}{dt}, t > 0, 0 < \alpha \leq 1 \quad (4.3.1)$$

$$X(0) = X_0 \quad (4.3.2)$$

где через $\mathfrak{D}_{t_0}^{\alpha}$ обозначена дробно-подобная производная $b, \sigma : [0, +\infty) \times R \to R$ - измеримые функции, и $\{W(t), t \in [0, +\infty)\}$ является скалярным броуновским движением заданным на полном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, F = \{\mathfrak{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbf{P})$ таким $W(0) = 0, E(W(t) - EW(t))(W(s) - EW(s)) = t - s$. Для каждого $t \in [0, +\infty)\}$ обозначим через $\mathfrak{L}_t = \mathbb{L}^2(\Omega, \mathfrak{F}, P)$-пространство всех $\mathfrak{F}_t$-измеримых, интегрируемых с квадратом функций $u : \Omega \to \mathbb{R}$ таких, что $\|u\|^2 = E\{|u|^2\}$.

Предел $X : [0, +\infty) \to \mathfrak{L}_t$ называется $\mathfrak{F}$- адаптированный, если $X(t) \in \mathfrak{L}_t, t \in [0, +\infty)$.

В работе [101] в случае дробной производной Капуто методом сжатых отображений была установлена теорема существования и единственности решений для уравнения (4.3.1). При этом от функций b и σ требуется выполнение условий Липщица.

Данный параграф имеет следующую структуру. В разделе 1 излагается определение дробно-подобной производной и изучаются свойства этой производной. Раздел 2 посвящен концепции дробно-подобной производной от функций типа Ляпунова. При этом показано, что для некоторых простых функций Ляпунова дробно-подобная производная является мажорантной для дробной производной Капуто от этих функций. В разделе 3 приведена дробно-подобная версия формулы Ито. В разделах 4, 5 указаны достаточные условия стохастической устойчивости (или устойчивости по вероятности), асимптотической стохастической устойчивости и экспоненциальной устойчивости. Наконец в разделе 6 представлены заключительные замечания.

4.3.1. Дробно-подобные производные

Пусть $\alpha \in (0, 1], R_+ = [0, \infty), t_0 \in R_+$ и задана непрерывная функция

$f(t) : [t_0, \infty) \to R$.

Определение 4.3.1. *([15]) Для любого $\alpha \in (0,1]$ дробно-подобная производная $\mathfrak{D}_{t_0}^{\alpha}(f(t))$ функции $f(t)$ порядка $0 < \alpha \le 1$ определяется равенством*

$$\mathfrak{D}_{t_0}^{\alpha} f(t) = lim\{\frac{f(t+\theta(t-t_0)^{1-\alpha}) - f(t)}{\theta}, \theta \to 0\}.$$

Если $t_0 = 0$, то $\mathfrak{D}_{t_0}^{\alpha}(f(t))$ приобретает форму

$$\mathfrak{D}_{t_0}^{\alpha}(f(t)) = lim\{\frac{f(t+\theta t^{1-\alpha}) - f(t)}{\theta}, \theta \to 0\}.$$

В случае $t_0 = 0$ будем пользоваться обозначением

$$\mathfrak{D}_{0}^{\alpha}(f(t)) = \mathfrak{D}^{\alpha}(f(t)).$$

Если $\mathfrak{D}^{\alpha}$ существует на $(0, b)$ то

$$\mathfrak{D}^{\alpha}(f(0)) = \lim_{t \to 0+} \mathfrak{D}^{\alpha}(f(t)).$$

Замечание 4.3.2. *Определение 4.3.1 удовлетворяет не всем условиям, которые выполнены для производных Римана-Лиувилля, Капуто и др. (см.напр. [110] и библиографию там).*

Имеет место следующее утверждение.

Лемма 4.3.3. *([110]) Пусть $\alpha \in (0,1], f(t), g(t) - \alpha$-дифференцируемые функции в точке $t > 0$*

Тогда выполняются равенства:

1) $\mathfrak{D}_{t_0}^{\alpha}(af(t) + bg(t)) = a \cdot \mathfrak{D}_{t_0}^{\alpha}(f(t)) + b \cdot \mathfrak{D}_{t_0}^{\alpha}(g(t))$ при всех $a, b \in \mathbb{R}$;

2) $\mathfrak{D}_{t_0}^{\alpha}(t^p) = p(t-t_0)^{1-\alpha} t^{p-1}$ при всех $p \in \mathbb{R}$;

3) $\mathfrak{D}_{t_0}^{\alpha}(f(t)g(t)) = f(t)\mathfrak{D}_{t_0}^{\alpha}(g(t)) + g(t)\mathfrak{D}_{t_0}^{\alpha}(f(t))$;

4) $\mathfrak{D}_{t_0}^{\alpha}(\frac{f(t)}{g(t)}) = \frac{g(t)\mathfrak{D}_{t_0}^{\alpha}(f(t)) - f(t)\mathfrak{D}_{t_0}^{\alpha}(g(t))}{y^2(t)}$;

5) $\mathfrak{D}_{t_0}^{\alpha}(f(t)) = 0$ для любой функции $f(t) = c$, где c произвольная постоянная.

Замечание 4.3.4. *Равенства 1)-5) из леммы 4.3.3 аналогичны классическим результатам математического анализа для целых порядков производных. Эти утверждения не имеют места для дробных производных Римана-Лиувилля и др. (см. [110]). Утверждение 5) имеет место для дробной производной Капуто.*

Лемма 4.3.5. *([110]). Пусть $0 < \alpha \leq 1$, функция $h(t) = m(g(t))$ является дифференцируемой по $g(t)$ для всех $t \in \mathbb{R}_+$, функция $g(t)$ – α-дифференцируемой при $t \neq t_0$ и $g(t) \neq 0$, тогда*

$$\mathfrak{D}_{t_0}^{\alpha} g(t) = m'(g(t)) \mathfrak{D}_{t_0}^{\alpha}(g(t)).$$

Дробно-подобный интеграл порядка $0 < \alpha \leq 1$ вводится с помощью формулы

$$I_{t_0}^{\alpha} f(t) = \int\limits_{t_0}^{t} (s - t_0)^{\alpha - 1} f(s) ds, t > t_0.$$

Лемма 4.3.6. *Пусть функция $f(t) : (t_0, \infty) \to R$ – α - дифференцируемо при $0 < q \leq 1$. Тогда при всех $t > t_0$ верно соотношение*

$$I_{t_0}^{\alpha}(\mathfrak{D}_{t_0}^{\alpha} f(t)) = f(t) - f(t_0).$$

4.3.2. Функция Ляпунова и ее дробно-подобная производная

Важным методом исследования устойчивости различных классов детерминированных и стохастических систем является второй метод Ляпунова (см.напр. [1]). В качестве инструмента исследования во втором (прямом) методе используются некоторые специальные функции, называемые функциями Лапунова.

Вещественную непрерывно дифференцируемую функцию $V : T + B_r \to R$, удовлетворяющую условию $V(t, 0) = 0$, называют функцией Ляпунова. Здесь через B_r обозначен шар радиуса r с центром в начале координат в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ с нормой $|x| = (\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2)^{1/2}$, а через T интервал действительной оси $T = \{a < t < \infty\}$, где a есть $-\infty$ или же некоторое число. Назовем производной $\dot{V}$ функции $V(t, x)$ в силу уравнений

$$\dot{x}(t) = b(t, x(t)), b, x \in \mathbb{R}^n \tag{4.3.3}$$

$$x(t_0) = x_0, b(t, 0) \equiv 0 \tag{4.3.4}$$

величину

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} b_i(t, x) = \frac{\partial V}{\partial t} + (\nabla V, b(t, x)). \tag{4.3.5}$$

Если $x = x(t)$ есть решение (4.3.3), то $\dot{V}$ представляет собой полную производную по времени от сложной функции $V(t, x(t))$. Отметим, что для вычисления $\dot{V}$ фактического знания решения $x(t)$ не требуется.

Далее через K обозначим класс функций $\omega_i(u), u \geq 0, i = 0, 1, 2, \ldots$ - скалярные непрерывные неубывающие такие, что $\omega_i(0) = 0$ и $\omega_i(u) > 0$ при $u > 0$.

Сущность классического прямого метода Ляпунова заключается в справедливости следующих трех теорем.

Теорема 4.3.7. *([1]). Пусть существует функция $V(t, x)$ такая, что*

$$\omega_1(|x|) \leq V(t, x), \dot{V}(t, x) \leq 0.$$

Тогда тривиальное решение системы (4.3.3) устойчиво по Ляпунову.

Теорема 4.3.8. *([1]). Если $\omega_1(|x|) \leq V(t, x) \leq \omega_2(|x|), \dot{V}(t, x) \leq -\omega_3(|x|)$, то тривиальное решение системы (4.3.3) асимптотически устойчиво по Ляпунову.*

Теорема 4.3.9. *([1]). Если в области $V(t, x) > 0$ имеет место неравенство $\dot{V}(t, x) \geq \omega_4(|x|)$, то тривиальное решение неустойчиво.*

Целью настоящей работы является распространение вышеприведенных утверждений на случай задачи (4.3.1)-(4.3.2).

В этой связи заметим, что взамен обычной производной в теоремах (4.3.3)-(4.3.5) приходится привлечь производную Дини для функции Ляпунова в виде

$$D^{+}V(t,x)=\lim_{h\to 0+}\frac{1}{h}[V(t+h,x+h)b(t,x)-V(t,x)]. \tag{4.3.6}$$

В работе [111] таким же путем вводится понятие дробно-подобной производной для уравнения вида

$$\mathfrak{D}^{\alpha}_{t_0}(x(t))=b(t,x(t)), \tag{4.3.7}$$

$$x(t_0)=x_0, \tag{4.3.8}$$

где $x\in\mathbb{R}^n, b\in C(R_+\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n), t_0\geq 0.$

Определение 4.3.10. *Пусть V непрерывная и α - дифференцируемая функция, $V: R_+\times B_r\to\mathbb{R}^m$ и $x(t,t_0,x_0)$ является решением задачи (4.3.7)-(4.3.8).*

Тогда для $(t,x)\in R_+\times B_r$ выражение

$$^{+}\mathfrak{D}^{\alpha}_{t_0}V(t,x)=\lim\sup\{\frac{V(t+\theta(t-t_0)^{1-\alpha},x(t+\theta(t-t_0)^{1-\alpha},t,x))-V(t,x)}{\theta},\theta\to 0+\} \tag{4.3.9}$$

является верхней правой дробно-подобной производной функции Ляпунова.

Соответственно определяются нижняя правая, верхняя левая и нижняя левая дробно-подобная производная функции Ляпунова.

Лемма 4.3.11. *Пусть $V(t,x)$ непрерывная, α - дифференцируемая и локально-липшицуемая функция относительно второй переменной x на $R_+\times B_r$. Тогда дробно-подобная производная функции $V(t,x)$ относительно решения $x(t,t_0,x_0)$ определяется в виде*

$$^{+}\mathfrak{D}^{\alpha}_{t_0}V(t,x)=$$

$$\lim\sup\{\frac{V(t+\theta(t-t_0)^{1-\alpha},x+\theta(t-t_0)^{1-\alpha},b(t,x))-V(t,x)}{\theta},\theta\to 0+\} \tag{4.3.10}$$

где $(t,x)\in R_+\times B_r$.

Если $V(t,x(t)) = V(x(t)), 0 < \alpha \leq 1$, функция V дифференцируема по x, и функция $x(t)$ α - дифференцируема по t для $t > t_0$, то

$$^{+}\mathfrak{D}_{t_0}^{\alpha} V(t,x) = V'(x(t)) V(t,x)|_{(7)}.$$

В работе [111] приведены примеры функций Ляпунова $V_1(x) = x^2(t), x \in R, V_2(x) = x^T x, x \in \mathbb{R}^n$ и $V_3(x) = x^T P x, x \in \mathbb{R}^n$, $P - (n \times n)$ - матрица и вычислены их дробно-подобные производные.

Установлено следующее утверждение.

Лемма 4.3.12. *Пусть $x \in R, y \in \mathbb{R}^n$ и P является постоянной матрицей порядка $n \times n$. Тогда для функций $V_1 = x^2(t), V_2 = y^T(t)y(t)$ и $V_3 = y^T(t)Py(t)$ имеют места следующие оценки:*

1) ${}_{t_0}^{c}D_t^{\alpha}(x^2(t)) \leq^{+} \mathfrak{D}_{t_0}^{\alpha}(x^2(t))$ *для* $x \in \mathbb{R}$*;*

2) ${}_{t_0}^{c}D_t^{\alpha}(y^T(t)y(t)) \leq^{+} \mathfrak{D}_{t_0}^{\alpha}(y^T(t)y(t))$ *для* $y \in \mathbb{R}$*;*

3) ${}_{t_0}^{c}D_t^{\alpha}(y^T(t)Py(t)) \leq^{+} \mathfrak{D}_{t_0}^{\alpha}(y^T(t)Py(t))$ *для* $x \in \mathbb{R}$*;*

Из леммы 4.3.12 следует, что дробно подобное производное функции Ляпунова является верхней оценкой (мажорантой) дробной производной Капуто этих же функций Ляпунова.

4.3.3. Формула Ито для функций с дробно-подобной производной

Сначала приводим определение решения задачи (4.3.1), (4.3.2).

Определение 4.3.13. *Для каждого $X_{t_0} \in \mathfrak{L}_0\ \mathfrak{F}$ - адаптированный случайный процесс X называется решением задачи (4.3.1), (4.3.2), если выполнено следующее равенство для $t_0 \in [0, \infty)$:*

$$X(t) = X(t, t_0, X_{t_0}) =$$

$$= X_{t_0} + \int\limits_{t_0}^{t} (s-t_0)^{\alpha-1} b(s, X(s)) ds + \int\limits_{t_0}^{t} (s-t_0)^{\alpha-1} \sigma(s, X(s)) dW(s). \quad (4.3.11)$$

Делаем следующие предположения:

(A1) Существует постоянная $L > 0$ такая, что для всех

$$X, \tilde{X} \in \mathbb{R}, t \in [0, +\infty)$$

$$|b(t, X) - b(t, \tilde{X})| + |\sigma(t, X) - \sigma(t, \tilde{X})| \leq L|X - \tilde{X}|;$$

(A2) Функция $\sigma(\cdot, 0)$ существенно ограниченна, т.е.

$$\|\sigma(t, 0)\|_\infty = ess \sup_{t \in [0, +\infty)} |\sigma(t, 0)| < +\infty,$$

и $\sigma(\cdot, 0)$ L_2 интегрируема, т.е.

$$\int_0^{+\infty} |\sigma(t, 0)|^2 dt < +\infty.$$

Лемма 4.3.14. *Предположим, что (A1) и (A2) выполненны. Тогда для $\alpha \in (0, 1)$ задачи (4.3.1), (4.3.2) имеет единственное решение $X \in \mathfrak{L}_t := \mathbb{L}^2(\Omega, \mathfrak{F}_t, P)$ заданное в виде (4.1).*

Далее представим новую версию формулы Ито для функций с дробно-подобной производной. Эта формула определяет правило дифференцирования функций от стохастических процессов с дробно-подобной производной.

Пусть $W(t), t \geq 0$ - стандартное скалярное броуновское движение и пусть через $Y \in C^{1,2}(R_t \times R, \mathbb{R})$ обозначено семейство всех действительнозначных функций $Y(\cdot, Z(\cdot))$ определенные и непрерывно дифференцируемые по Z на $R_t \times R$.

Пусть $Z(t), t \geq t_0$ является процессом Ито для уравнения

$$dz(t) = \tilde{b}(t) + \tilde{\sigma}(t) dW(t),$$

где $\tilde{b} \in \mathbb{L}^1(R_+, R)$ и $\tilde{\sigma} \in \mathbb{L}^2(R_+, R)$.

Напомним стандартную одномерную формулу Ито.

Лемма 4.3.15. *Пусть* $Y(\cdot) = Y(\cdot, Z(\cdot)) \in C^{1,2}(R_+ \times R, R)$. *Тогда* $Y(t), t \geq 0$ *является процессом Ито заданный равенством*

$$dY(t) = [Y_t(t, Z(t)) + Y_Z(t, Z(t))\tilde{b}(t)\frac{1}{2}y_Z(t, Z(t))]dt+$$

$$+Y_z(t, Z(t))\bar{\sigma}(t)dW(t) \text{ почти наверное (п.н.)}$$

Пусть теперь $T > 0$. Предположим, что $\tilde{X}(t)$ является процессом Ито для уравнения

$$D^{\alpha}_{t_0}\tilde{X} = b(t) + \sigma(t)\frac{dW(t)}{dt}, t_0 \in [0, T], 0 < \alpha < 1 \tag{4.3.12}$$

с начальным уровнем

$$\tilde{X}(t_0) = X_{t_0}. \tag{4.3.13}$$

Из леммы 4.3.14 и из формулы (4.3.12), (4.3.13) следует, что существует единственное для $t_0 \in [0, T]$ решение вида

$$\tilde{X}(t) = X_{t_0} + \int\limits_{t_0}^{t}(s - t_0)^{\alpha-1}b(s)ds + \int\limits_{t_0}^{t}(s - t_0)^{\alpha-1}\sigma(s)dW(s).$$

Заметим, что когда $t_0 \in [0, T]$, (4.3.12) эквивалентно уравнению

$$d\tilde{X}(t) = \tilde{X}'(t)dt =$$

$$= (\alpha - 1)[\int\limits_{t_0}^{t}(s - t_0)^{\alpha-1}b(s)ds + \int\limits_{t_0}^{t}(s - t_0)^{\alpha-2}\sigma(s)dW(s)]dt, \tag{4.3.14}$$

где $(\cdot - t_0)^{\alpha-2}b(\cdot) \in \mathbb{L}^1[0, T]$ и $(\cdot - t_0)^{\alpha-2}\sigma(\cdot) \in \mathbb{L}^2[0, T]$.

Теперь мы готовы представить дробно-подобную версию формулы Ито.

Теорема 4.3.16. *Пусть* $Y(\cdot) = Y(\cdot, \tilde{X}(\cdot)) \in C^{1,2}(R_+ \times R, R)$. *Тогда* $Y(\cdot)$ *является процессом Ито заданный в виде следующей формулы*

$$dY(t, \tilde{X}(t)) = Y_t(t, \tilde{X}(t))dt+$$

$$+(\alpha-1)Y_{\tilde{X}}(t,\tilde{X}(t))\int\limits_{t_0}^{t}(s-t_0)^{\alpha-2}b(s)dsdt+$$

$$+(\alpha-1)Y_{\tilde{X}}(t,\tilde{X}(t))\int\limits_{t_0}^{t}(s-t_0)^{\alpha-2}\sigma(s)dW(s)dt.$$

Доказательство.

Из леммы 4.3.15 и в силу (4.3.14) получим соотношения

$$dY(t,\tilde{X}(t))=\frac{\partial Y(t,\tilde{X}(t))}{\partial t}+\frac{\partial Y(t,\tilde{X}(t))}{\partial \tilde{X}}d\tilde{X}(t)+$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial Y^2(t,\tilde{X}(t))}{\partial \tilde{X}^2}(d\tilde{X}(t))^2=$$

$$=Y_t(t,\tilde{X}(t))dt+(\alpha-1)Y_{\tilde{X}}(t,\tilde{X}(t))\int\limits_{0}^{t}(s-t_0)^{\alpha-2}b(s)dsdt+$$

$$+(\alpha-1)Y_{\tilde{X}}(t,\tilde{X}(t))\int\limits_{t_0}^{t}(s-t_0)^{\alpha-2}\sigma(s)dW(s)dt.$$

Теорема доказана.

4.3.4. О стохастической устойчивости

Хорошо известно, что вопрос об устойчивости некоторого решения уравнения (4.3.1) с помощью замены переменных может быть сведен к исследованию вопроса об устойчивости тривиального решения. Поэтому будем считать, что

$$b(t,0)\equiv 0,\sigma(t,0)\equiv 0,t\geq 0. \tag{4.3.15}$$

При выполнении условия (4.3.15) уравнение (4.3.1) имеет тривиальное решение $x(t)\equiv 0$. Под устойчивостью тривиального решения уравнения (4.3.1) понимается его свойство мало изменяется при малом изменении начальных условий. В зависимости от конкретного понимания выражения «малое изменение решения» возможны различные определения устойчивости.

Приводим некоторые из них.

Определение 4.3.17. *Тривиальное решение уравнения (4.3.1) называется стохастически устойчивым или устойчивым по вероятности, если для каждой пары* $\varepsilon \in (0,1)$ *и* $l > 0$ *существует* $\delta(\varepsilon, l, 0) > 0$ *такое, что* $P\{|X(t)| < l\} \geq 1-\varepsilon, t \geq 0$ *всякий раз когда* $|X_0| < \delta$.

В противном случае, такое решение называется стохастически неустойчивым.

Определение 4.3.18. *Тривиальное решение (4.3.1) называется асимптотически стохастически устойчивым, если оно стохастически устойчиво, и более того, для каждого* $\varepsilon \in (0,1)$ *существует* $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon) > 0$ *такое, что* $P\{\lim\limits_{t\to+\infty} X(t) = 0\} \geq 1-\varepsilon$, *всякий раз когда* $|X_0| \leq \delta_0$.

Определение 4.3.19. *Тривиальное решение (4.3.1) называется экспоненциально стохастически устойчивым почти наверное (п.н.) если*

$$\lim_{t\to+\infty} sup\frac{1}{t}ln|X(t)| < 0 \text{ п.н.}$$

для всех $x_0 \in \mathbb{R}$.

4.3.5. Устойчивость по Ляпунову и ассимптотическая устойчивость

Пусть $k > 0$ произвольное число. Обозначим через S_k множества функций $S_k = \{X(\cdot) \in \mathbb{R}, |X(\cdot)| < k\}$, через $a \bigwedge b$ минимум a и b, $a \bigvee b$ максимум a и b и через $I_{\{\cdot\}}$ - индикаторную функцию.

Пусть выполнено условие:

(V1) Существует положительно-определенная функция $V \in C^{1,2}(R_+; [0,+\infty)) \times S_k$ такая, что для всех $(t, X(t) \in [0,+\infty)) \times S_k, \alpha \in (0,1)$

$$L^\alpha V(t,X(t)) := V_t(t,X(t)) + (\alpha-1)V_X(t,X(t))\int\limits_{t_0}^{t}(s-t_0)^{\alpha-2}b(s,X(s))ds \tag{4.3.16}$$

Из определения функции Ляпунова следует, что $V(t,0) \equiv 0$.

Пусть, кроме того, существует непрерывная неубывающая функция $\mu \in K$, такая что

$$V(t, X(t)) \geq \mu(|X(t)|)$$

для всех $(t, X(t)) \in [0, +\infty) \times S_k$.

Имеет место утверждение.

Теорема 4.3.20. *Предположим, что условия (A1), (A2) и (V1) выполнены и* $0 < \alpha < 1$. *Тогда тривиальное решение уравнения (4.3.1) стохастически устойчиво.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon \in (0,1)$ и $l > 0$ произвольное число такое, что $l < k$. По непрерывности V и условии $V(t_0, 0) = 0$ можно найти $\delta = \delta(\varepsilon, l)$ такое, что

$$\frac{1}{\varepsilon} \sup_{x \in S_\delta} V(t, X(t)) \leq \mu(l) \tag{4.3.17}$$

Очевидно, что $\delta < l$. Фиксируем $X_{t_0} \in S_\delta$ и пусть η время первого выхода $X(t)$ из S_l, т.е.

$$\eta = inf\{t > t_0 : X(t) \in S_l\}.$$

По теореме 4.3.20 для любого $t > t_0$ имеем

$$V(\eta \bigwedge t, X(\eta \bigwedge t)) = V(t_0, X_{t_0}) +$$

$$+ \int_{t_0}^{\eta \bigwedge t} V_\tau(\tau, X(\tau)) d\tau + (\alpha - 1) \int_{t_0}^{\eta \bigwedge t} V_X(\tau, X(\tau)) \int_{t_0}^{S} V_X (s - t_0)^{\alpha - 2} b(s, X(s)) ds d\tau +$$

$$(\alpha - 1) \int_{t_0}^{\eta \bigwedge t} V_X(\tau, X(\tau)) \int_{t_0}^{S} V_X (s - t_0)^{\alpha - 2} \sigma(s, X(s)) dW(s) d\tau =$$

$$= V(t_0, X_{t_0}) + \int_{t_0}^{\eta \bigwedge t} L^\alpha V(\tau, X(\tau)) d\tau dt +$$

$$+(\alpha-1)\int\limits_{t_0}^{\eta\bigwedge t} V_X(\tau,X(\tau))\int\limits_{t_0}^{S}(s-t_0)^{\alpha-2}\sigma(s,X(s))dW(s)d\tau. \qquad (4.3.18)$$

Беря математическое ожидание от (4.3.18) и учитывая, чо $L^{\alpha}V\leq 0$ получим для любого $t\geq t_0$ и $0<\alpha<1$

$$(\alpha-1)|E\int\limits_{t_0}^{\eta\bigwedge t} V_X(\tau,X(\tau))\int\limits_{t_0}^{S}(s-t_0)^{\alpha-2}\sigma(s,X(s))dW(s)d\tau|\leq$$

$$\leq(\alpha-1)|E\int\limits_{t_0}^{\eta\bigwedge t} V_X(\tau,X(\tau))\int\limits_{t_0}^{S}(s-t_0)^{\alpha-2}\sigma(s,X(s))dW(s)d\tau|\leq 0$$

С учетом (4.3.17) имеем

$$P\{\eta\leq t\}\leq\varepsilon.$$

Пусть $t\to+\infty$, т.е. $P\{\eta\leq+\infty\}\leq\varepsilon$.

Тогда имеем $P\{|X(t)|\leq r\}\geq 1-\varepsilon$ для всех $t\geq 0$. По определению 4.3.17 тривиальное решение (4.3.1) стохастически устойчиво.

Теорема доказана.

Пусть теперь выполнено следующее условие

(V2): Существует положительно-определенная убывающая функция $V\in C^{1,2}([0,+\infty)\times S_k;R_+)$ такая, что $L^{\alpha}V<0, \alpha\in(0,1)$, где $L^{\alpha}V$ определена в (4.3.16).

Из (V2) следует $V(t,0)\equiv 0$. Кроме того, существуют непрерывные неубывающие функции μ_1,μ_2,μ_3 такие, что

$$\mu_1(|X(t)|)\leq V(t,X(t))\leq\mu_2(|X(t)|),$$

$$L^{\alpha}V(t,X(t))\leq-\mu_3(|X(t)|)$$

для всех $(t,X(t))\in[0,+\infty)\times S_k$.

Теорема 4.3.21. *Пусть выполнены условия (A1), (A2) и (V2). Тогда тривиальное решение (4.3.1) асимптотически стохастически устойчиво.*

Доказательство. По теореме 4.3.21 тривиальное решение уравнения (4.3.1) стохастически устойчиво. Далее можно показать, что существует $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$P(\lim_{t\to+\infty} X(t) = 0) \geq 1 - \varepsilon$$

для $|X_0| < \delta_0, \varepsilon \in (0,1)$.

Основываясь на определении 4.3.18 получим, что тривиальное решение (4.3.1) асимптотически стохастически устойчиво.

Теорема доказана.

4.3.6. Экспоненциальная устойчивость почти наверное

Пусть выполнено условие (V3): $V \in C^{1,2}([0,+\infty) \times \mathbb{R}; R_+)$ и существуют постоянные $c_1 > 1, c_2 \in \mathbb{R}, c_3 \geq 0$ такие, что

(1) $c_1(|X(t)|) \leq V(t, X(t))$,

(2) $L^\alpha V(t, X(t)) \leq c_2 V(t, X(t))$,

(3) $|V_X(t, X(t))|^2 \int\limits_0^t |\sigma(t, X(t))(s - \tau)^{\alpha-2}|^2 d\tau \geq c_3 V^2(t, X(t))$ для всех $X(t) \neq 0, \alpha \in (0,1)$ и $t \geq 0$.

Справедливо утверждение

Теорема 4.3.22. *Пусть выполняются условия (A1), (A2) и (V3). Тогда*

$$\lim_{t\to+\infty} sup \frac{1}{t} ln|X(t)| \leq -\frac{1}{lnc_1}(1-\alpha)(c_2 + c_3) \text{ п.н.} \tag{4.3.19}$$

В частности, если $c_2 + c_3 = 0$, то тривиальное решение (4.3.1) экспоненциально устойчиво почти наверное.

Доказательство. Фиксируем любой $X_0 \neq 0$. Из теоремы 5.54.3.21 и условия (V3)(2), (3) для $\alpha \in (0,1)$ имеем

$$lnV(t, X(t)) = lnV(0, X_0) + \int\limits_0^t \frac{(V_s(s, X(s)))}{V(s, X(s))} ds +$$

$$+(\alpha-1)\int\limits_0^t \frac{V_X(s,X(s))\int\limits_0^s b(s,X(s))(s-\tau)^{\alpha-2}d\tau}{V(s,X(s))}ds+$$

$$+(\alpha-1)\int\limits_0^t \frac{V_X(s,X(s))\int\limits_0^s \sigma(s,X(s))(s-\tau)^{\alpha-2}d\tau}{V(s,X(s))}dW(\tau)ds \leq$$

$$\leq lnV(0,X(0))+\int\limits_0^t \frac{L^\alpha V_s(s,X(s))}{L(s,X(s))}ds+$$

$$+(\alpha-1)\int\limits_0^t \frac{V_X(s,X(s))\int\limits_0^s \sigma(\tau,X(\tau))(s-\tau)^{\alpha-2}dW(\tau)}{V(s,X(s))}ds.$$

Вводим обозначение

$$M(t)=\int\limits_0^t V_X(s(V(s)))\int\limits_0^s \sigma(\tau,X(\tau))(s-\tau)^{\alpha-2}dW(\tau)/V(s,X(s))ds.$$

Тогда пусть $n=1,2,\ldots$. Для произвольного $\varepsilon\in(0,1)$ с помощью (V3)(3) можно получить

$$P\{\sup_{0\leq t\leq n}|M(t)+\varepsilon\int\limits_0^t \frac{V_x^2(s,X(s))\int\limits_0^t |\sigma(\tau,X(\tau))(s-\tau)^{\alpha-2}|^2d\tau}{V^2(s,X(s))}ds|\geq c_3t\}\leq\varepsilon$$

Используя теорему Бореля-Кантелли (см.напр. [1]) мы получим почти наверное

$$M(t)\leq c_3t-\varepsilon\int\limits_0^t \frac{V_x^2(s,X(s))\int\limits_0^s g(\tau,X(\tau))(s-\tau)^{\alpha-2}|^2d\tau}{V^2(s,X(s))}ds=(1-\varepsilon)c_3t. \tag{4.3.20}$$

Таким образом, с помощью (V3)(3) и (4.3.20) имеем

$$lnV(t,X(t)) \leq lnV(0,X(0)) - (1-\alpha)[c_2 + (1-\varepsilon)c_3]t.$$

Далее получим

$$\frac{1}{t}lnV(t,X(t)) \leq -(1-\alpha)[c_2+(1-\varepsilon)c_3] + \frac{lnV(0,X(0))}{t}.$$

Таким образом

$$\lim_{t\to+\infty} sup\frac{1}{t}lnV(t,X(t)) \leq -(1-\alpha)[c_2+(1-\varepsilon)c_3].$$

Используя теперь (V3)(1) получим

$$\lim_{t\to+\infty} sup\frac{1}{t}lnc_1|X(t)| \leq \lim_{t\to+\infty} sup\frac{1}{t}lnV(t,X(t)) \leq -(1-\alpha)[c_2+(1-\varepsilon)c_3] \leq$$

$$\leq lnV(t_0X_{t_0}) + \int\limits_{t_0}^{t} \frac{L^\alpha V(\tau,X(\tau)}{L(\tau,X(\tau))}+$$

$$+(1-\alpha)\int\limits_{t_0}^{t} V_X(\tau,X(\tau))\int\limits_{t_0}^{s}(s-t_0)^{\alpha-2}\sigma(s,X(s))dW(s)/V(s,X(s))d\tau.$$

Введем обозначение

$$M(t) = \int\limits_{0}^{t} V_X(\tau,X(\tau))\int\limits_{t_0}^{s}(s-t_0)^{\alpha-2}\sigma(s,X(s))dW(s)/V(s,X(s))d\tau.$$

Пусть $n=1,2,\ldots$ Для произвольного $\varepsilon\in(0,1)$ с помощью (V3)(3) получим

$$P\{\sup_{0\leq t\leq n}|M(t)+\varepsilon\int\limits_{t_0}^{t}\frac{V_x^2(\tau,X(\tau))\int\limits_{t_0}^{s}|(s-t_0)^{\alpha-2}\sigma(s,X(s))|^2ds}{V^2(\tau,X(\tau))}d\tau| \geq c_3t\} \leq \varepsilon$$

Используя свойства σ -алгебры $\mathfrak{F}$ получим неравенство

$$M(t) \le c_3 t - \varepsilon \int\limits_{t_0}^{t} \frac{V_x^2(\tau, X(\tau)) \int\limits_{t_0}^{s} |(s-t_0)^{\alpha-2}\sigma(s, X(s))|^2 ds}{V^2(\tau, X(\tau))} d\tau = (1-\varepsilon)c_3 t \text{ п.н.} \tag{4.3.21}$$

Таким образом, с помощью (V3)(3) и (4.3.21) имеем

$$lnV(t, X(t)) \le lnV(t_0, X_{t_0}) - (1-\alpha)[c_2 + (1-\varepsilon)c_3 t].$$

Далее получим

$$\frac{1}{t} lnV(t, X(t)) \le -(1-\alpha)[c_2 + (1-\varepsilon)c_3 t] + \frac{lnV(t_0, X_{t_0})}{t}.$$

Итак

$$\lim_{t\to+\infty} lnV(t, X(t)) \le -(1-\alpha)[c_2 + (1-\varepsilon)c_3]$$

Используя теперь (V3)(1) получим

$$\lim_{t\to+\infty} sup \frac{1}{t} lnc_1 |X(t)| \le \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} ln(t, X(t)) \le$$

$$-(1-\alpha)[c_2 + (1-\varepsilon)c_3].$$

Наконец, получим

$$\lim_{t\to+\infty} sup \frac{1}{t} ln|X(t)| \le \frac{1}{lnc_1}(1-\alpha)[c_2 + (1-\varepsilon)\varepsilon_3].$$

Поскольку ε произвольное, то получим оценку 4.3.19

Отметим, что $c_1 > 1$. Тогда, если $c_2 + \varepsilon_3 > 0$, то имеем

$$-(1/lnc_1)(1-\alpha)(c_2 + c_3) < 0.$$

По определению 4.3.17 тривиальное решение (4.3.1) является экспоненциально устойчиво почти наверное.

В качестве заключения отметим, что для детерминированных и стохастических систем дифференциальных уравнений с дробными производными Римана-Лиувилля, Капуто, Грюнвальда-Летникова в работах [110], [111] даны определения функций Ляпунова с дробными порядками производных.

Однако практическое вычисление этих производных связано с большими трудностями из-за отсутствия для них цепного правила. В настоящей работе, прямой метод Ляпунова переносится на скалярных стохастических дифференциальных уравнений с дробно-подобными производными для которых выполнено цепное правило дифференцирования сложных фукций. С этой целью вводится новая дробно-подобная версия формулы Ито. Важным является, то обстоятельство что дробно-подобные производные являются мажорантами для дробных производных Капуто.

4.4. Нелинейное стохастическое уравнение в эпидемиологии

Данная статья посвящена начальной задаче для системы нелинейных дифференциальных уравнений дробно-детерминированной и стохастической моделей. Проблемы такого типа возникают, когда мы анализируем распространение пандемии COVID-19. В данном параграфе мы сосредоточимся на некоторых свойствах стохастических моделей эпидемий, которые не реализуются в детерминированных случаях. Важными свойствами дробных стохастических моделей являются вероятность вспышки пандемии, квазистационарные распределения вероятностей, конечная размерность распространения и ожидаемая продолжительность эпидемии. Перечисленные здесь свойства зависят от стохастической природы процесса. Лучшего понимания оценки наличия, стабильности и лечения инфекционных заболеваний можно добиться с помощью математических эпидемических моделей. К сожалению, упомянутые выше классические модели недостаточно точны для моделирования таких заболеваний. В связи с этим важно привлечь дробные дифференциальные уравнения.

4.4.1. Введение

Статья W. O. Kermack, McKendrick [94], вышедшая в свет в 1927 году, послужила теоретической основой для дальнейших исследований в области математического моделирования эпидемий. В этой работе для задач эпидемиологии впервые применен так назиаемый «закон действующих масс», согласно которому количество вновь инфицированных в популяции прямо пропорционально произведению текущих численностей восприимчивых и инфицированных индивидов. Именно данная модель дала начало широкому применению детерминированных SIR - моделей (Susceptible - Infected - Recovered) в которых с помощью системы дифференциальных уравнений описывается динамика групп восприимчивых, инфицированных и выздоровевших индивидов.

Исследования стохастической SIR - модели в непрерывном времени Baltbelt [40], Бейли [2] и Basti at all. [41] положили начало стохастических моделей эпидемических процессов.

Элвбек с соавторами [64] опубликовали результаты о первой индивидум - ориентированной модели распространения заболевания. Новое направление с учетом развития вычислительных технологий и предсказательной силы стохастических моделей сыграло решающую роль в развитии математической эпидемиологии.

Последние годы выросла актуальность проблематики в связи с пандемией COVID-19.

Вирус SARS-COV-2 привел к инфекции COVID-19. Первые случаи были документированы в Wuhan, China [25] и в дальнейшем вирус распространился на все континенты и привел к вспышке пандемии. Общее число стран подвергшихся этому глобальному вызову составляет 212. Доступные на начальном периоде пандемии антивирусные препараты и вакцины оказались не эффективными против нового вируса. Усилиями ученых различных стран на последующих стадиях пандемии были разработаны новые вакцины и ими были привиты большие популяции.

Лучшее понимание и оценивание наличия, устойчивости и управления инфекционными болезнями можно достичь через математические модели эпидемии [64]. К сожалению, классические модели упомянутые выше не являются в нужной степени аккуратными при моделировании таких болезней. В этой связи важным является привлечение дробных дифференциальных уравнений. Адаптация дробных производных в смысле Капуто к описанию инфекционных болезней в биологических сообществах является новым этапом в анализе модели эпидемий. Надо отметить, что эффективность методов дробного анализа отметили ученые-специалисты и в других областях науки - акустики, реологии, химии полимеров и др. [25]. В работе [74] с учетом положительного фактора вакцинации v как вакцинный параметр восприимчивой популяции введена система дифференциальных уравнений с дробной производной Капуто порядка $\alpha, 0 < \alpha, 1$ в виде

$$
\begin{cases}
{}^{c}D_t^{\alpha} S(t) = -vS(t) - \beta \frac{J(t)S(t)}{N_0}, \\
{}^{c}D_t^{\alpha} J(t) = \beta \frac{J(t)S(t)}{N_0} - (\gamma + k)J(t), \\
{}^{c}D_t^{\alpha} R(t) = vS(t) + \gamma J(t), \\
{}^{c}D_t^{\alpha} D(t) = kJ(t),
\end{cases}
\tag{4.4.1}
$$

вместе с положительными начальными условиями

$$
S(0) = S_0, J(0) = J_0, R(0) = R_0, D(0) = D_0. \tag{4.4.2}
$$

Здесь общая численность популяции N разделяется на следующие эпидемиологические классы:

S - восприимчивый класс, J - инфицированный класс, R - выздоравливающий класс, D - умерший класс.

Параметры в системе (4.4.1) описываются таким образом:

β - среднее число контактов одного человека за время t; γ - уровень выздоравливающих; k уровень смертности.

Настоящая работа посвящена анализу системы стохастических дифференциальных уравнений и стохастической модели SIRD-а.

4.4.2. Дробные интегралы и производные

Существует множество определений дробного интегрирования и дифференцирования. Здесь нам потребуются определения дробного интеграла Римана-Лиувилля и дробной производной Капуто, впервые введенные в [127], [74].

Пусть $L([0,T],R)$ — пространство интегрируемых по Лебегу скалярных функций в $[0,],T<\infty$.

Определение 4.4.1. *Дробный интеграл порядка Римана-Лиувилля* $0<\alpha<1$, *функции* $f\in L([0,T],R)$ *задается уравнением*

$$
I_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds. \tag{4.4.3}
$$

Гамма-функция определяется как

$$\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt, \alpha > 0.$$

Пусть $C^1([0,T],R)$ — пространство непрерывно дифференцируемых скалярных функций, определенных на $[0,T]$.

Определение 4.4.2. *Дробная производная Капуто порядка $\alpha, 0 < \alpha < 1$, определяется выражением*

$$^cD_t^\alpha f(t) = I_t^{1-\alpha}(\frac{d}{ds}f)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^t (t-s)^{-\alpha} f'(s) ds, \tag{4.4.4}$$

где $I_t^{1-\alpha}$ - дробный интеграл из 4.4.3, $f \in C^1([0,T],R)$.

Формула разложения производной Капуто порядка $\alpha, 0 < \alpha < 1$ следует непосредственно из (4.4.3) и (4.4.4)

$$(I_t^{\alpha c} D_t^\alpha f)(t) = \varphi(t) - \varphi(0), \text{ для } \varphi \in C([0,T],R). \tag{4.4.5}$$

4.4.3. Детерминированная дробная модель эпидемий (SIRD)

Хорошо известно, что дробно-дифференциальный оператор Капуто (4.4.4) имеет широкое применение на анализе инфекционных болезней различных биологических моделей, в частности, в непрерывных по времени моделируемых сред [104]. Отталкиваясь от [104] и рассматривая положительный фактор вакцинации v как параметр восприимчивых популяций перейдем к системе дифференциальных уравнений (4.4.1) с дробными производными Капуто порядка $\alpha, 0 < \alpha < 1$ вида

$$\begin{cases} {}^cD_t^\alpha S(t) = -vS(t) - \beta\frac{J(t)S(t)}{N_0}, \\ {}^cD_t^\alpha J(t) = \beta\frac{J(t)S(t)}{N_0} - (\gamma + k)J(t), \\ {}^cD_t^\alpha R(t) = vS(t) + \gamma J(t), \\ {}^cD_t^\alpha D(t) = kJ(t), t \geq 0 \end{cases} \tag{4.4.6}$$

Переход между популяциями S, J, R, D в процессе трансмиссии для COVID-19 описывается с помощью ориентированного графа в виде рис 4.4.1.

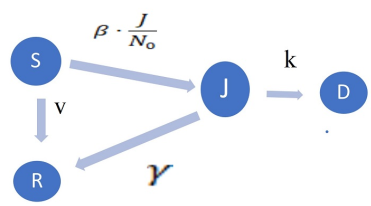

Рис. 4.4.1. Модель SJRD - схема трансмиссии для COVID - 19

В этом разделе работы, учитывая результаты статьи [41] приводим качественный анализ решений задачи (4.4.6), (4.4.7), находим признаки устойчивости и ограниченности решений и вычислим точки равновесия нелинейной системы (4.4.6), так называемые disease-free состояний. Далее установим необходимые условия существования хотя бы одного решения задачи (4.4.6) - (4.4.7) и его единственности на основе известных теорем о неподвижных точках нелинейного оператора.

Лемма 4.4.3. *Решение задачи (4.4.6), (4.4.7) ограничено в feasible области вида*

$$U = \{(S, J, R, D) \in \mathbb{R}^4_+, 0 \leq N(t) \leq N_0\}.$$

Пандемия наступает при условии

$$S_0 > \frac{\gamma + k}{\beta} N_0,$$

где $\frac{\gamma+k}{\beta}$ называется пороговым значением или критическим размером пандемии в сообществе.

Лемма 4.4.4. *Disease-free точкой равновесия системы (4.4.6) является*

$$U_* = (\frac{\gamma + k}{\beta} N_0, 0, R_0, 0).$$

По определению, $U_* = (S_*, J_*, R_*, D_*)$ является решением системы дробных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} ({}^c D_t^\alpha S)(t) = 0, \\ ({}^c D_t^\alpha J)(t) = 0, \\ ({}^c D_t^\alpha R)(t) = 0, \\ ({}^c D_t^\alpha D)(t) = 0 \end{cases} \tag{4.4.7}$$

Учитывая элементы дробного дифференциального исчисления находим из второго уравнения системы (4.4.6), что

$$\frac{\beta S(t) - (\gamma + k) N_0}{N_0} \cdot J(t) = 0,$$

и, далее, получим

$$S(t) = S_* = \frac{\gamma + k}{\beta} N_0.$$

В равновесной точке U_* COVID-19 не распространяется, и что то же самое, класс смертности убывает до нуля в отсутствии новых инфекций.

Определение 4.4.5. *Точка равновесия U_* свободная от пандемии называется локально ассимптотически устойчивой, если класс инифицированной популяции $S(t)$ удовлетворяет условии $S(t) \leq S_*$ и неустойчивой, если $S(t) > S_*$.*

Далее в этом пункте используя теорему о неподвижной точке мы сформулируем результат о существовании хотя бы одного решения системы (4.4.6). Пусть $U = (S, J, R, D) \in E$, где $E = [C([0, T], \mathbb{R}_+)]^4$ является банаховым пространством с нормой

$$\|u\|_E = \|S\|_c + \|J\|_c + \|R\|_c + \|D\|_c$$

и пусть

$$\begin{cases} f_1(t,u(t)) = -vS(t) - \beta\frac{J(t)S(t)}{N_0} \\ f_2(t,u(t)) = \beta\frac{J(t)S(t)}{N_0} - (\gamma+k)J(t) \\ f_3(t,u(t)) = vS(t) + \gamma J(t) \\ f_3(t,u(t)) = KJ(t). \end{cases}$$

Ясно, что функция $f = (f_1, f_2, f_3, f_4) \in ([0,T] \times E)^4$ является непрерывной.

Применяя дробный интеграл (4.4.4) к обеим частям системы (4.4.6) и используя (4.4.5) получим

$$S(t) = S_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f_1(\tau, u(\tau))d\tau$$

$$J(t) = J_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f_2(\tau, u(\tau))d\tau$$

$$R(t) = R_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f_3(\tau, u(\tau))d\tau$$

$$D(t) = D_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f_4(\tau, u(\tau))d\tau$$

Выбирая $u_0 = (u_1, u_2, u_3, u_4) = (S_0, J_0, R_0, D_0)$ мы получим

$$u(t) = u_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, u(\tau))d\tau. \tag{4.4.8}$$

Имеют место утверждения

Теорема 4.4.6. *Пусть* $\beta, v, \gamma, k, \alpha, t \in \mathbb{R}_+, \alpha \in (0,1)$ *и*

$$T < \left(\frac{\Gamma(\alpha+1)}{4(\beta+v+\gamma+k+3)}\right)^{1/\alpha}.$$

Тогда существует по крайней мере одно решение задачи (4.4.6), (4.4.7) определенное на $[0,T]$.

Теорема 4.4.7. *Пусть* $\alpha \in (0,1)$ *и* $\beta, v, \gamma, k, \mu \in \mathbb{R}_+$, *такие, что*

$$\mu = max\{\beta+v+2, \beta+\gamma+k+2, v+\gamma+3, k+3\}.$$

Если

$$\frac{4\mu T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} < 1$$

тогда задача (4.4.6), (4.4.7) допускает единственное решение.

4.4.4. Стохастический интеграл и стохастическое дифференциальное уравнение

Важное место среди различных классов стохастических процессов занимают марковские процессы. Под марковским процессом следует понимать процесс, значение которого в момент времени t_0 полностью определяет его будущее поведение независимо от прошлого. Примером марковского процесса является винеровский процесс. Можно считать, что решение обыкновенного детерминированного дифференциального уравнения также представляет собой марковский процесс. С помощью винеровского процесса $W(t)$ можно построить широкий класс марковских процессов с непрерывными траекториями, определенными как решения стохастического дифференциального уравнения вида

$$\begin{gathered} dX(t) = a(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t), t > 0 \\ X(0) = x, X \in \mathbb{R}^n, \xi \in \mathbb{R}^m. \end{gathered} \tag{4.4.9}$$

Здесь x детерминированный или случайный вектор начальных условий, вектор-функция $a(t,X) \in \mathbb{R}^n$ и матрица $\sigma(t,X) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ заданы и W -

стандартный винеровский процесс. Уравнение (4.4.9) является символической записью следующего интегрального тождества

$$X(t) = x_0 + \int\limits_0^t \alpha(s, X(s))ds + \int\limits_0^t \sigma(s, X(s))dW(s). \qquad (4.4.10)$$

Последний интеграл в правой части равенства (4.4.10) называется стохастическим интегралом Ито.

Напомним ряд свойств стохастических интегралов Ито. Определим на основном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ семейство σ - алгебр $\mathfrak{F}_t$, порожденных винеровским процессом $W(t)$, удовлетвлряющих условиям:

а) для любых t и $s, t < s$, справедливо вложение $\mathfrak{F}_t \subset \mathfrak{F}_s$;

б) винеровский процесс $W(t)$ измерим относительно $\mathfrak{F}_t$;

Последнее означает, что для любого борелевского множества $A \in \mathbb{R}^n$ событие $\{\omega : W(t) \in A\}$ принадлежит $\mathfrak{F}_t$;

в) при любых неотрицательных t и s процесс $W(t+s) - W(t)$ не зависит от любого из событий σ - алгебры $\mathfrak{F}_t$.

Стохастический интеграл Ито

$$\xi(t) = \int\limits_0^t \alpha(s)dW(s) \qquad (4.4.11)$$

определен для любых случайных процессов $\alpha(t)$, удовлетворяющих требованиям:

1) процесс $\alpha(t)$ измерим относительно $\mathfrak{F}_t$ при любом t;

2) с вероятностью 1 конечен интеграл

$$J(\alpha) = \int\limits_0^T E(|\alpha(t)|^2/F_0)dt.$$

Рассматриваемый как функция верхнего предела стохастический интеграл (4.4.11) определяет некоторый случайный процесс $\xi(t)$ с нулевым математическим ожиданием и корреляционной матрицей

$$E\xi(t) = E\int\limits_0^t \alpha(s)dW(s)\Big|^{\mathfrak{F}_0} = 0$$

$$E\xi(t_1)\xi^1(t_2) = \int\limits_0^{min(t_1,t_2)} E(\alpha(s)\alpha^{'}(s)\Big|_{\mathfrak{F}_0})ds.$$

Решение уравнения (4.4.9) является марковским процессом, переходная вероятность которого $P(t,x,t,A), t_1 > t, A \in \mathbb{R}^n$ определяется равенством

$$P(t,x,t,A) = P(X_{t,x}(t_1) \in A). \tag{4.4.12}$$

В равенстве (4.4.12) процесс $X_{t,x}(s)$ есть решение уравнения (4.4.9) при $s > t$ с начальным условием $X_{t,x}(t) = x$.

В задачах математической эпидемиологии возникает необходимость вычисления средних значений нескольких функционалов от решений уравнения (4.4.9). Иногда эту задачу можно свести к решению краевой задачи для уравнений в частных производных. Пусть, например, требуется вычислить математическое ожидание

$$EF(X_{t,x}(s)), s \geq t. \tag{4.4.13}$$

Здесь $F(x)$ - заданная непрерывная ограниченная скалярная функция. Значения функционала (4.4.13) зависит от начального момента t и начального вектора x. Положим

$$m(t,x) = EF(X_{t,x}(s)), s \geq t, \tag{4.4.14}$$

где s фиксировано.

Предположим, что коэффициенты $a(t,x)$ и $\sigma(t,x)$ уравнения (4.4.9) определены при $0 \leq t \leq T, x \in \mathbb{R}^n$ и имеют в этой области непрерывные ограниченные производные по x до второго порядка включительно. Тогда функция

$u(t,x)$ из (4.4.14) удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a^{'}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}Tr\sigma\sigma^{'}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, t \leq s, x \in \mathbb{R}^n. \quad (4.4.15)$$

Из 4.4.14 вытекает начальное условие для $u(t,x)$:

$$\lim_{t\to s} u(t,x) = F(x), x \in \mathbb{R}^n. \quad (4.4.16)$$

Решив задачу (4.4.15), (4.4.16) получим значение функционала (4.4.13) при произвольных (t,x). Уравнение (4.4.15) называется обратным уравнением Колмогорова.

4.4.5. Стохастическая дробная модель SIRD-а

Результаты изложенные в разделах 3, 4 позволяют утверждать, что стохастическая дробная модель SIRD-а следует из субдиффузионного процесса. Такой вывод основан на природу дробных по времени процессов, присуствующих в системе (4.4.9). Случайные величины $S(t), J(t)$ являются непрерывными и ограниченными, т.е.

$$0 \leq S(t) \leq N, 0 \leq J(t) \leq N.$$

Дадим эвристический вывод дробных стохастических дифференциальных уравнений для дробной модели эпидемий SIRD. Как было отмечено во введении SIRD дает хорошее описание распространения COVID-19.

Приведем высокоточную конечно-разностную аппроксимацию дробной производной Капуто основанной на разложении подинтегральной функции в ряд Тейлора с последующей заменой производных конечно-разностными соотношениями.

Следуя работе [41], введем конечно-разностную сетку $\Omega_{\triangle t} = \{t_j = j\triangle t, j = 0, ..., N\}$, на которой аппроксимации производной дробного порядка функции одной переменной X будет записана в виде

$$^{c}\triangle_t^{\alpha} X(t_j) = \frac{\triangle t_j^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\sum_{i=0}^{j=1}[w_{1,j} - e(X_{l+1} - X_{l-1}) +$$

$$+w_2, j-l(X_{i+l}-2X_l+X_{l+1})]+0(\triangle t^{3-\alpha}) \qquad (4.4.17)$$

где $\triangle$ - шаг по времени, $X_{l+1}=X(t_{l+1})$, $j=1,...,N, 0<\alpha<1$.

Весовые функции в (4.4.17) задаются следующим образом

$$w_{1,j-l}=\frac{2-\alpha}{2}[(j-l)^{1-\alpha}-(j-l-1)^{1-\alpha}]$$

$$w_{2,j-l}=(j-l)^{2-\alpha}-(j-l-1)^{2-\alpha}-(2-\alpha)(j-l-1)^{1-\alpha},$$

при $j=1,...,N, 1=0,...,j-1$.

Пусть теперь

$$\sum_{j=1}^{n}\triangle t_j^{-\alpha}=\triangle t^{\alpha}, \triangle^{\alpha}X(t)=\sum_{j=1}^{n}\triangle^{\alpha}X(t_j),$$

и

$$\triangle^{\alpha}X(t)=(\triangle^{\alpha}S(t),\triangle^{\alpha}J(t))^T.$$

Для $\triangle t_i$ достаточно малых резонно считать, что случайные переменные $\{\triangle^{\alpha}X(t_i)\}$ на интервале $\triangle^{\alpha}t$ являются независимыми и одинаково распределенными. Для n достаточно большой из центральной предельной теоремы следует, что $\triangle^{\alpha}X(t)$ имеет приближенное нормальное распределение со средним $E(\triangle^{\alpha}X(t))$ и ковариационной матрицей $Var(\triangle^{\alpha}X(t))$ (см. напр. L.J.S.Allen [25], [86]).

Таким образом

$$\triangle^{\alpha}X(t)-E(X(t))=\mathfrak{N}(\mathbf{0},Var(\triangle^{\alpha}X(t))),$$

где **0** нулевой вектор. Математическое ожидание $\triangle X$ порядка $\triangle t$ это изменение времени вероятности (+1 или -1) т.е.

$$\mathbb{E}(\triangle^{\alpha}X)=\begin{pmatrix}-\beta SJ/N\\ BSJ/N-\gamma t\end{pmatrix}\triangle t^{\alpha}=f\triangle t^{\alpha}$$

и матрица ковариации

$$Var(\triangle^\alpha X) = \mathbb{E}(\triangle^\alpha (\triangle^\alpha)^T) =$$

$$= \mathbb{E}\begin{pmatrix} (\triangle^\alpha S)^2 & \triangle^\alpha S \triangle^\alpha J \\ \triangle^\alpha S \triangle^\alpha S & (\triangle^\alpha J)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta SJ/N & -\beta SJ/N \\ -\beta SJ/N & \beta SJ/N + \gamma J \end{pmatrix} \triangle t = Var \triangle t^\alpha.$$

Чтобы написать стохастическое дифференциальное уравнение для стохастического процесса SIRD требуется либо квадратный корень от ковариационной матрицы Var, либо матрица G такая, что $GG^T = Var$. Приведенная ниже матрица G обладает нужным свойством, а именно

$$G = \begin{pmatrix} -\sqrt{\beta SJ/N} & 0 \\ \sqrt{\beta SJ/N} & -\sqrt{\gamma J} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\triangle X(t) = f(X(t))\triangle t + G(X(t))\triangle W(t),$$

где $\triangle W(t) = (\triangle W_1(t), \triangle W_2(t))^2$ и $\triangle W(t) = N(0, \triangle t)$.

Устремляя $\triangle t \to 0$ переходим к системе стохастических дифференциальных уравнений

$$^cD_t^\alpha X(t) = f(X(t))dt + G(X(t)dW(t)), \tag{4.4.18}$$

где $W(t) = (W_1(t), W_2(t))^T$ - вектор двух независимых винеровских процессов.

Перепишем (4.4.18) в терминах случайных величин $S(t)$ и $J(t)$ и получим следующую систему дробных стохастических дифференциальных уравнений:

$$^cD_t^\alpha S(t) = -\frac{\beta}{N} SJ + B_{11}\frac{dW_1}{dt} + B_{12}\frac{dW_2}{dt}$$

$$^cD_t^\alpha J(t) = \frac{\beta}{N} SJ - \gamma J + B_{21}\frac{dW_1}{dt} + B_{22}\frac{dW_2}{dt}$$

где W_1, W_2 - независимые винеровские процессы, и элементы матрицы $B = (B_{ij}), i, j = 1, 2$ могут быть зависимыми от S и I.

ОБСУЖДЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Выводы

В диссертации исследованы некоторые классы нечетких и стохастических дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений с целыми, дробными и дробноподобными порядками производных.

По итогам исследования получены следующие новые результаты:

- доказаны леммы и теоремы о свойствах нечетких случайных переменных (величин) и их математическое ожидание [1—A], [2—A], [3—A];

- доказан аналог теоремы Радстрема на случай обобщенного дифференциала нечеткой функции [3—A], [4—A], [5—A];

- доказаны теоремы существования и единственности решений нечетких дифференциальных уравнений с дробноподобными частными производными [5—A], [6—A], [7—A];

- доказана теорема существования и единственности решения нечеткого интегро-дифференциального уравнения Урысона [6—A], [7—A], [8—A];

- найдена формула явного решения линейного стохастического дифференциального уравнения с начальным условием и с почти секториальным неограниченным оператором в главной части [7—A], [8—A], [9—A];

- доказана теорема второго (прямого) метода Ляпунова об устойчивости решений стохастических уравнений с дробноподобной производной [6—A], [8—A], [9—A];

- найдено решение одной конкретной задачи математической эпидемиологии возникающей при анализе режимов распространения пандемии COVID-19 [8—A], [9—A], [10—A].

Рекомендации по практическому использованию результатов

Полученные в диссертации результаты имеют теоретический характер. Методы развитые в диссертации и полученные результаты можно применить при исследовании новых и более общих классов нечетких и стохастических дифференциальных и интегро-дифференциальных с целыми и дробными порядками производных. Приложения указанных результатов могут быть использованы при анализе стохастических моделей эпидемий. Отдельные части диссертации могут быть использованы при чтении специальных курсов для студентов и магистрантов, обучающихся по специальности «Математика» и «Прикладная математика».

Список литературы

А) Список использованных источников

[1] Афанасьев, В. Н. Математическая теория конструирования систем управления [Текст] / В. Н. Афанасьев, В. Б. Колмановский, В. Р. Носов // Москва, Высшая школа. — 1989.

[2] Бейли, Н. Математика в биологии и медицине [Текст] / Н. Бейли // М.:Мир. — 1970. — 327 С

[3] Березанский, Ю. М. Функциональный анализ [Текст] / Березанский Ю.М., Г.Ф. Ус, Шефтель З.Г // Киев: "Высшая школа". — 1990.

[4] Богачев, В. И. Гауссовские меры [Текст] / В. И. Богачев // М.: Физматлит. — 1997.

[5] Илолов, М. Нечеткое уравнение теплопроводности [Текст] / М. Илолов, Дж. Ш. Рахматов // Современные проблемы математики и её приложений. Материалы международной научной конференции, посвященной 70 – летию со дня рождения академика АН РТ, доктора физико - математических наук, профессора Илолова Мамадшо. — Душанбе. —- 2018. — С 113 – 118.

[6] Илолов, М. О начально-краевой задаче для нечеткого уравнения теплопроводности [Текст] / М. Илолов, Дж. Ш. Рахматов // Вестник Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева, Серия Математика. Информатика. Механика. — 2018. — №2 (123). — С 71-75.

[7] Илолов, М. Функционально-дифференциальные включения типа Хейла с дробным порядком производной в банаховом пространстве [Текст] / М. Илолов, Д.Н. Гулджонов, Дж. Ш. Рахматов // Чебышевский сборник. — 2019. — т. 20. — вып. 4. — С 208-225.

[8] Иосида, К. Функциональный анализ [Текст] / К. Иосида // М.:Мир. — 1972.

[9] Плотников, А. В. Дифференциальные уравнения с «четкой» и нечеткой многозначной правой частью. Асимптотические методы [Текст] / А. В. Плотников, Н. В. Скрипник // Одесса: Астропринт. — 2009. — 192 с.

[10] Прохоров, Ю. В. Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей [Текст] / Ю. В. Прохоров // Теория вероятностей и ее применения. — т. 1. — вып. 2. — 1956. — С 177-238.

[11] Рахматов, Дж. Ш. Нечеткое интегро-дифференциальное уравнение типа Урысона [Текст] / Дж. Ш. Рахматов // Доклады НАН Таджикистана. — 2021. — т. 64. — №9-10. — С 491 - 500

[12] Скороход, А. В. Интегрирование в гильбертовом пространстве [Текст] / А. В. Скороход // Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит.. — 1975.

[13] Хасьминский, Р. З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях [Текст] / Р. З. Хасьминский // М.Наука. — 1969.

[14] Ширяев, А. Н. Вероятность: В 2-х книгах [Текст] / А. Н. Ширяев // М.:МЦНМО. — 2007.

[15] Abdeljawad, T. On conformable fractional calculus [Text] / T. Abdeljawad // Journal of Computational and Applied Mathematics — 279. — 2015. — P 57–66. — DOI 10.1016/j.cam.2014.10.016.

[16] Abdeljawad, T. On fuzzy conformable double Laplace transform with applications to partial differential equations [Text] / T. Abdeljawad, A. Younus, M. A. Alqudah, U. Atta // In. Computer Modelling in Engineering and Sciences. — 2022. — DOI 10:32604/cmes2022.02.09.15

[17] Agarwal, R. P. Existence for Set Differential Equations via Multivalued Operator Equations [Text] / R. P. Agarwal D. O'Regan // Differential Equations and Applications. — vol. 5. — Nova Science Publishers, New York. — 2007. — P 1–5.

[18] Aguila-Camacho, N. Lyapunov functions for fractional order systems [Text] / N. Aguila-Camacho, M. A. Duarte-Mermoud, J. A. Gallegos // Commun.Nonlinear Sci.Numer.Simul. — 19. — 2014. — P 2951-2957.

[19] Afariogun, D. On fuzzy henstock-kurzweil-stieltjes diamond double integral on time scales [Text] / D. Afariogun, A. Mogbademu, H. Olaoluwa // Journal of Mathematical Analysis and Modeling. — 2(2). — 2021. — P 38–49. — DOI 10.48185/jmam.v2i2.295.

[20] Ahmad, L. Solving nth order fuzzy differential equation by fuzzy laplace transform [Text] / L. Ahmad, M. Farooq, S. Abdullah //. — 2014. — arXiv preprint arXiv:1403.0242.

[21] Ahmad, L. Solving forth order fuzzy differential equation by fuzzy laplace transform [Text] / L. Ahmad, M. Farooq, S. Abdullah // Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics — 12. — 2016. — P 449–468.

[22] Allahveranloo, T. Fuzzy Laplace Transforms [Text] / T. Allahveranloo T., M. Barkhordari Ahmadi // Soft Computering. — v. 14.— №3. — P 235-243

[23] Allahviranloo, T. On fuzzy solutions for heat equation based on generalized hukuhara differentiability [Text] / T. Allahviranloo, Z. Gouyandeh, A. Armand, A. Hasanoglu // Fuzzy Sets and Systems. — 265. — 2015. — P 1–23. — DOI 10.1016/j.fss.2014.11.009.

[24] Allahviranloo, T. Fuzzy laplace transforms [Text] / T. Allahviranloo, M. B. Ahmadi // Soft Computing. — 14(3). — 2010. — P 235–243. — DOI 10.1007/s00500-008-0397-6.

[25] Allen, L. J. S. An introduction to stochastic epidemic models [Text] / L. J. S. Allen // In P.Brauer, P.V. Van den Driessohe, J,Wu (Eds.) Lecture notes in mathematics: Mathematical Epidemiology. Berlin: Springer. — Ch.3. — 1945. — P 81-130.

[26] Alexandroff, A. D. Additive set-functions in abstract spaces. I [Text] / A. D. Alexandroff // Mat. Sb. — 8:2. — 1940. — P 307–348.

[27] Alderremy, A. New exact solutions of time conformable fractional Klein Kramer equation [Text] / A. Alderremy, H. Abdel-Gawad, K. M. Saad, S. Aly // Optical and Quantum Electronics, 53(12). — 2021. — P 1–14. — DOI 10.1007/s11082-021-03343-7.

[28] Alderremy, A. A fuzzy fractional model of coronavirus (COVID-19) and its study with legendre spectral method [Text] / A. Alderremy, J. Gomez-Aguilar, S. Aly, K. M. Saad // Results in Physics. — P 21. — 2021. — 103773. DOI 10.1016/j.rinp.2020.103773.

[29] Ali, A. Numerical simulation of time partial fractional diffusion model by laplace transform [Text] / A. Ali, I. Suwan, T. Abdeljawad, Abdullah // AIMS Mathematics. — 7(2). — 2020. — P 2878–2890. — DOI 10.3934/math.2022159.

[30] Armand, A. Some fundamental results on fuzzy calculus [Text] / A. Armand, T. Allahviranloo, Z. Gouyandeh // Iranian Journal of Fuzzy Systems. — 15(3). — 2018. — P 27–46.

[31] Arqub, O. A. Fuzzy conformable fractional differential equations: Novel extended approach and new numerical solutions [Text] / O. A. Arqub, M. Al-Smadi // Soft Computing. — 24(16). — 2020. — P 12501–12522. — DOI 10.1007/s00500-020-04687-0.

[32] Artstein, Z. A strong law of large numbers for random compact sets [Text] / Z. Artstein, R.A. Vitale // Ann. Probab. — 1975. — P 879—882.

[33] Aubin, J.-P. et all. Impulse differential Inclusions: a Viability Approach to Hybrid Systems [Text] / J.-P. Aubin et all. // IEEE Transactions on Automatic Control. — 47(1).— 2002. — P 2-20.

[34] Aumann, R. J. Integrals of set-valued functions [Text] / R.J. Aumann // J. Math. Anal. Appl. 12 1965. — P 1-12.

[35] Aumann, R. J. A variational problem arising in economic [Text] / R. J. Aumann, M. Perles // J. Mulh. Anal. Appl. — 11. — 1965. — P 488-503.

[36] Balakrishnan, A. V. Radon-Nikodim derivatives of a class of weak distributios on Hilbert spaces [Text] / A. V. Balakrishnan // Appl. Math. Opt. — 3. — 1977. — P 209-255.

[37] Balakrishnan, A.V. An infinite dimensional Gaussian Markov process with non-nuclear steady state covariance [Text] / A. V. Balakrishnan // Teor. Veroyatnost. i Primene. — V.38. — 3. — 1993. — P 656-661.

[38] Balakrishnan, A.V. Applied Functional Analysis [Text] / A. V. Balakrishnan // Springer - Verlag, Applications of Mathematics. — 1976.

[39] Balakrishnan, A. V. Introduction to optimization theory in a Hilbert Space [Text] / A. V. Balakrishnan // New York: Springer-Verlag. — 1971.

[40] Baltbelt, M. S. An Introduction to Stochastic Process, with special reference to methods and applications [Text] / M. S. Baltbelt // Cambridge Univ. Press. — 1978. — 388 p.

[41] Basti, B. at all. Stability Analysis and Existence of Solutions for a Modified SIRD Model of Covid-19 with Fractional Derivatives [Text] / B. Basti // Symmetry. — 2021. — 13. — P 1431. https://doi.org/10.3390/sym13081431

[42] Bayor, B. Existence of solution to a local fractional nonlinear differenial equations [Text] / B. Bayor, D. F. M. Torres // J.Appl.Mech.Tech.Phys. — 55(2).— 2014.— P 191-198.
[43] Bede, B. Note on "Numerical solutions of fuzzy differential equations by predictor–corrector method" [Text] / B. Bede // Inf. Sci. — 178. — 2008. — P 1917–1922.
[44] Bede, B. Generalizations of the differentiability of fuzzy-number-valued functions with applications to fuzzy differential equations [Text] / B. Bede, S.G. Gal // Fuzzy Sets Syst. — 151. — 2005. — P 581–599.
[45] Bede, B. Solutions of fuzzy differential equations based on generalized differentiability [Text] / B. Bede, S. G. Gal // Commun. Math. Anal. — 9. — 2010. — P 22–41.
[46] Bica, A. M. Error estimation in the approximation of the solution of nonlinear fuzzy Fredholm integral equations [Text] / A. M. Bica // Inf. Sci. — 178. — 2008. — P 1279–1292.
[47] Billingsley, P. Probability and Measures [Text] / P. Billingsley // New York, John Wiley and Sons. Inc. — 1999.
[48] Burton, T. A. Fractional differential equations and Lyapunov functionals [Text] / T. A. Burton // Nonlinear Anal. Theory Methods Appl. — 74. — 2011. — P 5648-5662.
[49] Burton, T.A. Krasnoselski's fixed point theorem and stability [Text] / T.A. Burton, T. Furumochi // Nonlinear Anal.Theory Methods. — 49. — 2002. — P 445-454.
[50] Burton, T. Fixed points and fractional differential equations [Text] / T. Burton, B. Zhang // Fixed Point Theor. — 13. — 2013. — P 313-325.
[51] Cacase, F., Conte, F., Germani, A., Palombo, G. White Noise Solutions for Nonlinear Stochastic Systems [Text] / F. Cacase, F. Conte, A. Germani, G. Palombo // IFAC Papers Online 49-18. — 2016. — P 327-332.
[52] Chadha, A. Existence and exponential stability for neutral stochastic fractional differential equations with impulses driven by Poisson [Text] / A. Chadha, S.N. Boca // Stochastic.— 90(5).— 2018.— P 663-681.
[53] Cressie, N. A central limit theorem for random sets [Text] / N. Cressie // Z. Wahrsch. Verw. Gebiefe 49. — 1979. — P 37-47.

[54] Da Prato, G. Stochastic equations in infinite dimensions [Text] / G. Da Prato, J. Zabczyk // Cambridge: Camb. Univ. Press. — 2014.

[55] Debreu, G. Integration of correspondences, Proc. Fifth Berkeley Symp. Math. Statist. Probability [Text] / G. Debreu // Univ. of California Press. — Berkeley. — 1966. — P 351-372

[56] Debreu, G., Schmeidler, D. The Radon-Nikodym derivative of a correspondence, in "Proc. Fifth Berkeley Symp. Math. Statist. Probability [Text] / G. Debreu, D. Schmeidler // Univ. of California Press. Berkeley. — 1970. — P 41-56.

[57] Deimling, K. Nonlinear Functional Analysis [Text] / K. Deimling // Berlin, Springer. — 1985. — 300 p.

[58] Dhunde, R. R. Double laplace transform method for solving space and time fractional telegraph equations [Text] / R. R. Dhunde, G. Waghmare // International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. — 2016. — 1–7. — DOI 10.1155/2016/1414595.

[59] Ding, X. L. Analytical solutions to fractional evolution equations with almost sectorial operators [Text] / X. L. Ding, B. Ahmad // Advances in Difference Equations. — 206. — 2016. — https://doi.org/10.1186/s13662-016-0097-y.

[60] Duanmu, H. Finitely-Additive [Text] / H. Duanmu, W. Weiss // Countable-Additive and Internal probability Measures. — 2020. — arXiv: 2020.02463v1[math.l0]6Oct2020.

[61] Editorial Board. Is the World Ready for the Coronavirus. / Editorial Board // The New York Times. — 29 January 2020.

[62] El - Nadi, K. E. On some stochastic parabolic differential equations in a Hilbert space [Text] / K. E. El - Nadi // International Journal of Stochastic Analysis. — V.2. — 2005. — P 167-173.

[63] Eltayeb, H. A note on double conformable laplace transform method and singular one dimensional conformable pseudohyperbolic equations [Text] / H. Eltayeb, S. Mesloub, Y. T. Abdalla, A. Klicman // Mathematics. — 7(10). — 2019. — 949 p. — DOI 10.3390/math7100949.

[64] Elveback, T. Stochastic two-agent epidemic simulation models for a community of families [Text] / T. Elveback, E. Ackerman, L. Gatewood,

J. Fox // American Journal of Epidemiology. — no. 93. — 1971. — P 267-280.

[65] Fechkan, M. Fractional order equations and inclusions [Text] / M. Feckan, J. R. Wang, M. Pospisil M. // De Gruyter. — 2015. — 366 p.

[66] Feron, R. Ensembles aleatoires flous [Text] / R. Feron // C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A 282. — 1976. — P 903-906. 409/l 1412.9422.

[67] Filinkov, A. Differential equations in spaces of abstract stochastic distributions [Text] / A. Filinkov, J. Sorensen // Stoch. Stoch. Rep. — 2003. — v. 72.– N3-4. — P 129-173.

[68] Fortet R. Ensembles aleatoires et ensembles flous [Text] / R. Feron, M. Kambouzia // Publ. Econometriques 9. — 1976. — P 1-23.

[69] Galvez D. Buckley-feuring solutions for non-polynomial fuzzy partial differential equations. Application to utility theory [Text] / D. Galvez, J. L. Pino // 2009 IEEE International Conference on Fuzzy Systems, Jeju, Korea (South). — 2009. — P 1814-1819, doi: 10.1109/FUZZY.2009.5277382.

[70] Gawarecki, L. Stochastic Differential equations in infinite dimensions with applications to stochastic partial differential equations [Text] / L. Gawarecki, V. Mandrekar // Berlin; Heidelberg: Springer — Verl. — 2011.

[71] Gliklich, Yu. E. Global and Stochastic Analysis with Appercations to Mathematical Physics [Text] / Yu. E. Gliklich // London; Dordrecht; Heidelberg; New York: Springer. — 2011.

[72] Gouyandeh, Z. A fuzzy solution of heat equation under generalized hukuhara differentiability by fuzzy Fourier transform [Text] / Z. Gouyandeh, T. Allahviranloo, S. Abbasbandy, A. Armand // Fuzzy Sets and Systems. — 309. — 2017. — P 81–97. — DOI 10.1016/j.fss.2016.04.010.

[73] Goodman, I. R. Fuzzy sets as equivalence classes of random sets, Recent Developments in Fuzzy Set and Possibility Theory (R. Yager, Ed.) [Text] / I. R. Goodman // Pergamon, Elmsford, N.Y. — 1980.

[74] Hasan at all. A new estimation method for the COVID-19 time-varying reproduction number active cases [Text] / Hasan at all. // medArxiv. — 2020.

[75] Hashim, D. J. Optimal homotopy asymptotic method for solving severalmodels of first order fuzzy fractional tips [Text] / D. J. Hashim, A.

F. Jameel, T. Y. Ying, A. Alomari, N. Anakira // Alexandria Engineering Journal. — 61(6). — 2022. — P 4931–4943. — DOI 10.1016/j.aej.2021.09.060.

[76] Hermes, H. Calculus of set-valued functions and control [Text] / H. Hermes // J. Math. Mech. — 18. — 1968. — P 47-59.

[77] Hilfer, R. Applications of fractional calculus in physics [Text] / R. Hilfer // New Jersey: World Scientific. — 2001.

[78] E. Huellermeier, E. An approach to modelling and simulation of uncertain dynamical systems [Text] / E. Huellermeier // Int. J. Uncertainty Fuzziness Knowl. Based Syst. — 5. — 1997. — P 117–137.

[79] Hukuhara, M. Integration des applications mesurables dont la valuer est un compact convexe [Text] / H. Hukuhara // Funkcial. Ekvac. — 10. — 1967. — P 205-223.

[80] Ichikawa, A. Stability of semilinear stochastic evolution equations [Text] / A. Ichikawa // J. Math. Anal. Appl. — 1982.— N90.— pp. 12-44.

[81] Ichikawa, A. Semilinear stochastic evolution equations [Text] / A. Ichikawa // Stochastics. — 1984.— N12.— P 1-39.

[82] Ilolov, M. Periodic random perturbations of differential - difference equations of neytral type [Text] / M. Ilolov, V. N. Kozobrod // Dokladi AN Taj. SSR. — V.26. — 7. — 1983. — P 405-408 (Russian).

[83] Ilolov, M. Periodic random perturbations of differential equations with parameter [Text] / M. Ilolov, V. N. Kozobrod // Dokladi AN Taj. SSR. — V.31, N3. — 1988. — P 147-150 (Russian).

[84] Ilolov, M. Fractional stochastic evolution equations: Whitenoise model [Text] / M. Ilolov, K. S. Kuchakshoev, J. S. Rahmatov // Communications on Stochastic Analysis. — 2020. — 14(3-4). — P 55-69.

[85] Ilolov M. Fractional stochastic evolution equations: Whitenoise model [Text] / M. Ilolov, K. S. Kuchakshoev, J. S. Rahmatov // Communications on Stochastic Analysis. — 2020. — 14(3-4). — P 55-69

[86] Ilolov, M. Lyapunov function and stability of solutions of stochastic differential equations with fractional-like derivatives [Text] / M. Ilolov, K. S. Kuchakshoev, J. Sh. Rahmatov // Global and Stochastic Analysis. — 2021. — v. 8 N. 2. — P 87-99.

[87] Ilolov, M. Nonlinear stochastic equation in epidemiology [Text] / M. Ilolov, K. Kuchakshoev, M. Mirshahi, J. Sh. Rahmatov // Global and Stochastic Analysis. — V. 10. No. 3. — (December, 2023). — P 75-84

[88] Jameel, A. Numerical algorithm for solving second order nonlinear fuzzy initial value problems [Text] / A. Jameel, N. Anakira, A. Shather, A. Saaban, A. Alomari // International Journal of Electrical and Computer Engineering. — 10(6). —. 2020. — P 6497–6506. — DOI 10.11591/ijece.v10i6.pp6497-6506.

[89] Kaleva, O. Fuzzy differential equations [Text] / O. Kaleva // Fuzzy Sets and Systems. — 1987. — v. 24, №3. — P 301-317.

[90] Kaleva, O. The Cauchy problem for fuzzy differential equations [Text] / O. Kaleva // Fuzzy Sets and Systems. — 1980. — v. 35. — P 389-396.

[91] Kaleva, O. A note on fuzzy differential equations [Text] / O. Kaleva // Nonlinear Anal. — 64. — 2006. — P 895–900.

[92] Kampe de feriet J. Une interpretation des mesures de plausibilite et de credibilite au sens de G. Shafer et de la fonction d'appartenance definissant un ensemble flou de L. Zadeh, in "Publ. IRMA 2" [Text] / J. Kampe de feriet // Universite de Lille, France. — 1980.

[93] Khalil, R. A new definition of fractional derivative [Text] / R. Khalil, M. Al-Horani, A. Yousef // J.Comput.Apll.Math. — 264. — 2014. — P 65-70.

[94] Kermak, W. O. A contribution to the theory of epidemics [Text] / W. O. Kermak, McKendrick // Proc. R. Soc. Lond. A. — 115. — 1927. — P 700-272.

[95] Kilbas, A. A. Theory and Applications of fractional Differential Equations [Text] / A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo // Elsevier. — 2006.

[96] Kilicman, A. An application of double laplace transformand double sumudu transform [Text] / A. Kilicman, H. Gadain // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 30(3). — 2009. — P 214–223. — DOI 10.1134/S1995080209030044.

[97] Kisilewicz, M. Multivalued Differential equations in separable Banach Spaces [Text] / M. Kisilewicz // J. Opt. Theory and Appl. — 1982. — v. 37. — P 231-240.

[98] Kovach, M. Introduction to Stochastic Partial Differential Equations. New Directions on the Mathematical and Computer Sciences. [Text]

/ M. Kovach, S. Larsson // National Universities Commission, Auja, Nigeria.Lagos.Publications of the ICMCS. — 2007. — V.4. — P 159-232.

[99] Kudo, H. Dependent experiments and sufficient statistics [Text] / H. Kudo // Natur. Sci. Rep. Ochanomizu Univ. — 4. — 1953. — P 151-163.

[100] Kuratowski, C. “Topologie I,” Monografie Matematyczne [Text] / C. Kuratowski // Warsaw. — 1948.

[101] Lakshmikantham, V. Lyapunov Theory theory for fractional differential equations [Text] / V. Lakshmikantham, S. Leela, M. Sambandham // Commun.Appl.Anal. — 12. — 2008. — P 365-376.

[102] Lakshmikantham, V.Stability analysis of nonlinear systems [Text] / V. Lakshmikantham, S. Leela, A. A. Martynyuk // Mariel Dekker. — 1998.

[103] Loretti, P. Weak Solutions for Time-Fractional Evolution Equations in Hilbert Spaces [Text] / P. Loretti, D. Sforza // Fractal Fract. — 2021. — 5. — P 138. — https://doi.org/10.3390/fractalfract5040138

[104] Luchko, J., Rivero, M. Fractional models, non-locality and complex systems [Text] / J. Luchko, M. Rivero, J. Trujillo, M. P. Velasco // Comp. Math. Appli. — 2010. — 59. — P 1048-1056.

[105] Markov, S. An on-standard subtraction of intervals [Text] / S. Markov // Serdica. — 3. — 1977. — P 359–370.

[106] Markov, S., Extended interval arithmetic [Text] / S. Markov // C. R. Acad. Bulg. Sci. — 30. — 1977. — P 1239–1242.

[107] Markov, S. Existence and uniqueness of solutions of the interval differential equation X ’= f (t,X) [Text] / S. Markov // C. R. Acad. Bulg. Sci. — 31. — 1978. — P 1519–1522.

[108] Markov, S. Calculus for interval functions of areal variable [Text] / S. Markov // Computing. — 22. — 1979. — P 325–337.

[109] Markov, S. On the algebra of intervals and convex bodies [Text] / S. Markov // J. Universal Comput. Sci. — 4. — 1998. — P 34–47.

[110] Martynyuk, A. A. On the stability of a system of equations with fractional derivatives with respect to two measures [Text] / A. A. Martynyuk // J.Math.Sci. — 217. — 2016. — P 468-475.

[111] Martynyuk, A. A. Fractional-like derivative of Lyapunov-type functions and applications to stability analysis of motion [Text] / A. A. Martynyuk, I. M.

Stamova // Electronic Journal of Differential Equations. — 208(62). — 2018. — P 1-12.

[112] Matheron, G. Random Sets and Integral Geometry [Text] / G. Matheron // Wiley, New York. — 1975.

[113] Melnikova, I. V. Stochastic Cauchy problems in infinite dimensions. Generalized and regularized solutions [Text] / I. V. Melnikova // Boca Raton; London; New York: CRS Press — 2016.

[114] Negoita, C. V. Application of Fuzzy Sets to Systems Analysis [Text] / C. V. Negoita, D. A. Ralescu // John Wiley & Sons. — 1975.

[115] Nelson, E. Dynamical Theory of Brownian motion [Text] / E. Nelson // Princeton: Princeton University Press. — 1967.

[116] Oksendal, B. Stochastic differential equations an introduction with applications [Text] / B. Oksendal // Springer Science Business Media. — 2013.

[117] Pachpatte, B. A note on Gronwall-Bellman inequality [Text] / B. Pachpatte // J. Math. Anal. Appl. — 1973. — v. 44. — P 758-762.

[118] Park, J. Existence and uniqueness theorem for a solution of fuzzy Volterra integral equations [Text] / J. Park, H. Han // Fuzzy sets and systems. — 1998. — v. 105. — P 481-488.

[119] Price, G. B. The theory of integration [Text] / G. B. Price // Trans. Amer. Math. Sot. — 47. — 1940. — P 1-50.

[120] Puri, M. L. Differentielle d'une fonction floue [Text] / M.L. Puri, D. Ralescu // C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I. P 293. — 1981. — P 237-239.

[121] Puri, M. Fuzzy random variables [Text] / M. Puri, D. Raleski // J. Math. Anal. Appl. — 1973. — v. 4. — P 409-422.

[122] Puri, M. L. Integration on fuzzy sets [Text] / M.L. Puri, D. Ralescu // Advan. Appl. Math. 3. — 1982. — P 430-434.

[123] Puri, M. L. Strong law of large numbers for Banach space valued random sets [Text] / M.L. Puri, D. Ralescu // Ann. Probab. — 11. — 1983. — P 222-224.

[124] Puri, M.L. Differentials of fuzzy functions [Text] / M.L. Puri, D. Ralescu // J. Math. Anal. Appl. — 91. — 1983. — P 552-558.

[125] Puri, M.L. Fuzzy Random Variables [Text] / M.L. Puri, D. Ralescu // J. of Math. Anal. and App. 114. — 1986. — 409-422.

[126] Radstrom, H. An embedding theorem for spaces of convex sets [Text] / H. Radstrom // Proc. Amer. Math. Soc. 3. — 1952. — P 165-169.
[127] Rafii, A. Oncologic trogocytosis of an original stromal cells induces chemoresistance of ovarian tumours [Text] / A. Rafii, P. Mirshahi, M. Poupot, A. M. Faussat, A. Simon, E. Ducros, E. Mery // PloS one. — 3 (12). — 2008. — e3894. — 99.
[128] Rahimi Chermahini, S. Analytical fuzzy triangular solutions of the wave equation [Text] / S. Rahimi Chermahini, M. S. Asgari // Soft Computing. — 25(1). — 2021. — P 363–378. — DOI 10.1007/s00500-020-05146-6.
[129] Richter, H. Verallgemeinerung eines in der Statistik benotigten Satzes der Masstheorie [Text] / H. Richter // Math. Ann. — 150. — 1963. — P 85-90.
[130] Salahshour, S. Applications of fuzzy laplace transforms [Text] / S. Salahshour, T. Allahviranloo // Soft Computing. — 17(1). — 2013. — P 145–158. — DOI 10.1007/s00500-012-0907-4.
[131] Salahshour, S. Solving fuzzy heat equation by fuzzy laplace transforms. InternationalConference on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems [Text] / S. Salahshour, E. Haghi //Dortmund, Germany, Springer. — 2010
[132] Sakthivel, R. Existence of solutions for nonlinear fractional stochastic differential equations [Text] / R. Sakthivel, P. Revathi, Y. Pen // Nonlinear Anal.Theory Methods Appl. — 81 . — 2013. — P 70-86.
[133] Seikkala, S. On the fuzzy initial value problem [Text] / S. Seikkala // Fuzzy Sets Syst. — 24. — 1987. — P 319–330.
[134] Silva, F. S. Conformable Laplace transform of fractional differential equations [Text] / F. S. Silva, D. M. Moreira, M. A. Moret // Axioms. — 7(3). — 2018. — 55 p.
[135] Stefanini, L. On the generalized LU-fuzzy derivative and fuzzy differential equations, in: Proceedings of the 2007 IEEE International Conference on Fuzzy Systems [Text] / L. Stefanini // London. — 2007. — P 710–715.
[136] Stefanini, L. A generalization of Hukuhara difference, in: D. Dubois, M. A. Lubiano, H. Prade, M. A. Gil, P. Grzegorzewski, O. Hryniewicz (Eds.), Soft Methods for Handling Variability and Imprecision [Text] / L. Stefanini // Series on Advances in Soft Computing. — vol. 48. — Springer. — 2008.

[137] Stefanini, L. A generalization of Hukuhara difference and division for interval and fuzzy arithmetic [Text] / L. Stefanini // Fuzzy Sets Syst. — 161. — 2010. — P 1564–1584.

[138] Stefanini, L. Generalized Hukuhara differentiability of interval-valued functions and interval differential equations [Text] / L. Stefanini, B. Bede // Nonlinear Anal. — 71. — 2009. — P 1311–1328.

[139] Stefanini, L. Some notes on generalized Hukuhara differentiability of interval-valued functions and interval differential equations [Text] / L. Stefanini, B. Bede // Working Paper 1208, University of Urbino. — 2012. — Available online at the RePEc repository. — http://ideas.repec.org/f/pst233.html.

[140] Stefanini, L. On fuzzy arithmetic operations: some properties and distributive approximations [Text] / L. Stefanini, M. L. Guerra // Int. J. Appl. Math. — 19. — 2006. — P 171–199. — (An extended version is available at the RePEc repository, http://ideas.repec.org/f/pst233.html).

[141] Stefanini, L. Fuzzy numbers and fuzzy arithmetic, in: W. Pedrycz, A. Skowron, V. Kreinovich (Eds.), Hand book of Granular Computing [Text] / L. Stefanini, L. Sorini, M. L. Guerra // John Wiley & Sons, Ltd, 2008 (Chapter 12).

[142] Sviridyuk, G. A. Multipoint initial-final problem for one class of Sobolev type models of higher order with additive "white noise" [Text] / G. A. Sviridynk, A. A. Zamyshlyaeva, S. A. Zagrebina // Vestnik YUUrGU. Seriya "Matematicheskoe modelirovanie i proramirovanie". — V.11.– N3. — 2018. — P 103-117.

[143] Trigeasson, J. C. Lyapunov approach to the stabilityof fractional differential equations [Text] / J. C. Trigeasson, N. Maamzi, J. Sabatier, A. A. Dusfaloup // Signal Process. — 91. —2011. — P 437-445.

[144] Veretennikov, A. Yu. On weak solutions of highly degenerate SDEs [Text] / A. Yu. Veretennikov // Automation and Remote Control. — 83(3). —2020. — P 398-410.

[145] Wang, R. N. Abstract fractional Cauchy problems with almost sectorial operators [Text] / R. N. Wang, D. H. Chen, T. J. Xiao // J.Differential Equations. — 252. — 2012. — P 202-235.

[146] Wu C. Approximate solutions, existence and uniqueness of the Cauchy problem of fuzzy differential equations [Text] / C. Wu, S. Song, E. S. Lee // J. Math. Anal. Appl. — 202. — 1996. — P 629–644.

[147] Zadeh, L. A. Fuzzy Sets [Text] / L. A. Zadeh // Information and Control. — 1965. — v.8, №3. — P 338-353.

[148] Zadeh, L. A. Fuzzy sets and information granularity, in "Advances in Fuzzy Set Theory and Applications" (M. Gupta, R. Ragade, and R. Yager, Eds.) [Text] / L. A. Zadeh // North-Holland, Amsterdam. — 1979. — P 3-18.

[149] Yosida, K. Finitely-Additive Measures [Text] / K. Yosida, E. Hewitt // Transactions of the American Mathematical Society, 1952. — v. 72. — N1. — P 46-66.

[150] Younus, A. Some fundamental results on fuzzy conformable differential calculus [Text] / A. Younus, M. Asif, U. Atta, T. Bashir, T. Abdeljawad // Journal of Fractional Calculus and Nonlinear Systems. — 2(2). — 2021. — P 31–61. — DOI 10.48185/jfcns.v2i2.341.

Б) РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. В журналах, зарегистрированных в реестре ВАК при Президенте Республики Таджикистан и РИНЦ:

[1—A] Рахматов Дж. Ш. О начально-краевой задаче для нечеткого уравнения теплопроводности [Текст] / М. Илолов, Дж. Ш. Рахматов // Вестник Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева, Серия Математика. Информатика. Механика. — 2018. — №2 (123). — С 71-75.

[2—A] Рахматов Дж. Ш. Дробные интегро-дифференциальные включения типа Хейла в банаховом пространстве [Текст] / М. Илолов М., Д.Н. Гулджонов, Дж.Ш. Рахматов // Известия АН РТ. — 2019. — №1(174). — С 7-16.

[3—A] Рахматов Дж. Ш. Функционально-дифференциальные включения типа Хейла с дробным порядком производной в банаховом пространстве [Текст] / М. Илолов, Д. Н. Гулджонов, Дж. Ш. Рахматов // Чебышевский сборник. — 2019. — т. 20, вып. 4. — С 208-225.

[4—A] Rahmatov J. Sh. Fractional stochastic evolution equations: Whitenoise model [Text] / M. Ilolov, K. S. Kuchakshoev, J. Sh. Rahmatov // Communications on Stochastic Analysis. — 2020. — 14(3-4). — P 55-69.

[5—A] Рахматов Дж. Ш. Эволюционные уравнения дробного порядка с запаздыванием в банаховом пространстве [Текст] / М. Илолов, С. Расули (ИРА), Дж. Ш. Рахматов. // Известия АН РТ. — 2020. — №3(180). — С 7-21.

[6—A] Rahmatov J. Sh. Lyapunov function and stability of solutions of stochastic differential equations with fractional-like derivatives [Text] / M. Ilolov, K. Kuchakshoev, J. Sh. Rahmatov // Global and Stochastic Analysis. — 2021. — V. 8 №2. — P 87-99.

[7—А] Рахматов Дж. Ш. Дробные эволюционные стохастические дифференциальные уравнения [Текст] / М. Илолов, Х. С. Кучакшоев, Дж. Ш. Рахматов // Известия НАНТ. — 2021. — №3(184). — С 7-25.

[8—А] Рахматов Дж. Ш. Нечеткое интегро-дифференциальное уравнение типа Урысона [Текст] / Дж. Ш. Рахматов // Доклады НАН Таджикистана. — 2021. — том 64, №9-10. — С 491 - 500.

[9—А] Рахматов Дж. Ш. Дробные эволюционные стохастические дифференциальные уравнения [Текст] / М. Илолов, Х. С. Кучакшоев, Дж. Ш. Рахматов // Известия НАНТ. — 2021. — №3(184). — С 7-25.

[10—А] Rahmatov J. Sh. Nonlinear stochastic equation in epidemiology [Text] / Ilolov M., Kuchakshoev K., Mirshahi M., Rahmatov J. Sh. // Global and Stochastic Analysis Vol. — 10 № 3. — P 75-84.

2. В других изданиях:

[11—А] Рахматов Дж. Ш. Нечеткое уравнение теплопроводности [Текст] / М. Илолов, Дж. Ш. Рахматов // Современные проблемы математики и её приложений. Материалы международной научной конференции, посвященной 70 – летию со дня рождения академика АН РТ, доктора физико – математических наук, профессора Илолова Мамадшо. — Душанбе. — 2018. — С 113 – 118.

[12—А] Рахматов Дж. Ш. Об одном приложении теоремы Красносельского о неподвижной точке [Текст] / М. Илолов, Дж. Ш. Рахматов // Материалы республиканской научной конференции «Математический анализ и его приложения», посвященной 80-летию видного таджикского математика, профессора Бекназара Имомназарова. — Таджикистан. — Душанбе. — 10-11 июня 2019г. — Душанбе. — ТНУ. — С 101-109.

[13—A] Рахматов Дж. Ш. Об одной теореме существования для функционально-дифференциальных включений [Текст] / М. Илолов, Д. Н. Гулджонов, Дж. Ш. Рахматов // Материалы международной научной конференции, посвященной 70-летию профессора Джангибекова Гулходжа (Таджикистан, Душанбе, 30-31 января 2020 г.) «Сингулярные интегральные уравнения и дифференциальные уравнения с сингулярными коэффициентами». — ТНУ. — Душанбе. — 2020. — С 131-135.

[14—A] Рахматов Дж. Ш. О стохастической инвариантности дробных дифференциальных включений [Текст] / М. Илолов, С. М. Лашкарбеков, Дж. Ш. Рахматов // Актуальные проблемы современной математики. Материалы международной конференции, посвященной 80-летию со дня рождения доктора физико-математических наук, профессора Темура Собирова (Душанбе, 25-26 июня 2021 г.). — С 82-84.

[15—A] Рахматов Дж. Ш. О решениях нечетких дифференциальных уравнений дробного порядка. Современные методы теории функций и смежные проблемы [Текст] / М. Илолов, Дж. Ш. Рахматов // Материалы Международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа» (Воронеж, 28 января – 2 февраля 2021 г.). Воронежский государственный университет; Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова; Математический институт им. В.А.Стеклова РАН. — Воронеж: Издательский дом ВГУ. — 2021. — С 129-131.

[16—A] Рахматов Дж. Ш. Об эквивалентности экспоненциальной дихотомии и устойчивости по Хайеру-Улам линейных периодических дифференциальных уравнений в банаховом пространстве [Текст] / М. Илолов, Дж. Ш. Рахматов // Уфимская осеняя, математическая школа: Материалы международной научной конференции (г.Уфа, 6-9 октября 2021 г.). В двух томах. — Том 1. — Уфа: Аэтерна. — 2021. — С 189-191.

[17—A] Рахматов Дж. Ш. Задача Коши для дробных абстрактных стохастических дифференциальных уравнений [Текст] / М. Илолов, Рахматов Дж. Ш., С. М. Лашкарбеков // Материалы Конференции “7th International Conference on Stochastic Methods” - сателлитная конференция Международного конгресса математиков 2022 (МКМ-2022) (2–9 июня 2022 г., г. Геленджик, пос. Дивноморское)

[18—A] Рахматов Дж. Ш. Об одном примере почти секторального оператора [Текст] / М. Илолов, Дж. Ш. Рахматов, С. М. Лашкарбеков // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математического анализа и теории функций», посвященной 70-летию академика НАН Таджикистана Шабозова Мирганда Шабозовича (Душанбе, 24-25 июня 2022 г.). — 2022. — С 238-241.

[19—A] Рахматов Дж. Ш. Дробные стохастические дифференциальные уравнения с процессом Леви [Текст] / М. Илолов, С. М. Лашкарбеков, Дж. Ш. Рахматов // Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы. Международной конференции: Воронежская зимняя математическая школа (27 января - 1 февраля 2023 г.). — Воронеж: Издательский дом ВГУ. — 2023. — С 171-175.