Министерство образования и науки Республики Таджикистан
ГОУ «Худжандский государственный университет
имени академика Б. Гафурова»

УДК 517.9

На правах рукописи

Садиков Маъруфжон Обидович

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧ О ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Д И С С Е Р Т А Ц И Я

на соискание ученой степени доктора философии (PhD)
– доктор по специальности 6D060100 – Математика: 6D060102
–Дифференциальные уравнения, динамические
системы и оптимальное управление

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор **Байзаев С.**

Х У Д Ж А Н Д – 2 0 2 3

Оглавление

Список используемых обозначений ……...3

Введение…….……..4

Глава 1. Обзор литературы по исследуемой теме ……...……10

1.1. Обзор литературы по системам уравнений в частных производных первого порядка с двумя независимыми переменными …….…10

1.2. Обзор литературы по линейным уравнениям в частных производных второго порядка с одной комплексной независимой переменной …….16

Глава 2. Системы вещественных уравнений с частными производными на всей плоскости ……...23

2.1. Вспомогательный материал ……..…23

2.2. Об умеренно растущих решениях эллиптической системы четырех уравнений с частными производными…… ……...26

2.3. Об умеренно растущих решениях гиперболической системы четырех уравнений с частными производными……..…….....32

2.4. О решениях систем четырех уравнений с частными производными в пространстве Шварца…… ...…….....41

Глава 3. Системы комплексных уравнений в частных производных второго порядка …… ……..61

3.1. О решениях эллиптических систем, обобщающих уравнение метааналитических функций……...……61

3.2. Системы с оператором Бицадзе…….……...68

3.3. Системы с операторами Лапласа и ∂_{zz}…….....86

Глава 4. Анализ и обсуждение результатов……109

Выводы ……....117

Рекомендации по практическому использованию результатов …… ……..118

Список литературы……119

Список используемых обозначений

R^2 – вещественная плоскость;

C – комплексная плоскость;

R^4 – четырёхмерное евклидово пространство;

C_α – пространство вещественных (или комплексных) функций, ограниченных на всей плоскости и удовлетворяющих условию Гёльдера с показателем $\alpha \in (0,1)$;

C_α^1 – пространство таких функций $f \in C_\alpha$, что $f_x,\ f_y \in C_\alpha$;

C_α^2 – пространство таких функций $f \in C_\alpha^1$, что $f_{xx},\ f_{xy}, f_{yy} \in C_\alpha$;

$\partial_{\bar z} = \frac{1}{2}\left(\partial_x + i\partial_y\right),\ \partial_z = \frac{1}{2}\left(\partial_x - i\partial_y\right)$ – операторы комплексного дифференцирования;

E_n – единичная матрица n-го порядка;

trB – след матрицы B;

D – пространство основных функций на R^2;

D' – пространство обобщённых функций (распределений);

C^∞ – пространство функций, определенных и бесконечно дифференцируемых на всей плоскости R^2 (или C);

S – пространство функций из C^∞, убывающих на бесконечности вместе со всеми производными быстрее любой степени $\left(|x|+|y|\right)^{-1}$;

S' – пространство умеренно растущих обобщённых функций (распределений);

$\mathrm{Ker}A$ – ядро оператора A;

$\mathrm{Coker} = F/R(A)$ – коядро оператора;

у.ч.п. – уравнение с частными производными.

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. Теория у.ч.п. и систем у.ч.п. на вещественной (комплексной) плоскости разработана в научных трудах выдающихся ученых – Бернштейн С.Н, Петровский И.Г, Лаврентьев М.А, Векуа И.Н, Михайлов Л.Г, Берс Л., Джураев А.Д, их учеников и последователей (см., напр., [16], [17], [24], [25], [34], [45], [50], [70], [71], [105]).

В теории у.ч.п. и систем у.ч.п. эллиптического типа актуальными являются следующие сингулярные задачи о решениях, определенных в неограниченных областях плоскости и удовлетворяющих тем или иным условиям: суммируемость, ограниченность или рост на бесконечности не выше степенного.

Диссертационная работа посвящена исследованию задач о решениях на всей плоскости, удовлетворяющих условиям ограниченности или роста на бесконечности не выше степенного, систем четырёх линейных вещественных у.ч.п и эллиптических систем второго порядка с одной комплексной переменной. Отметим, что для однородных систем эти задачи могут иметь бесконечномерное ядро и выявление условий конечномерности ядра таких задач является важным и актуальным.

Степень научной разработанности изучаемой проблемы. Задачи о решениях эллиптических уравнений и систем, принадлежащих конкретным пространствам функций, определённых во всей плоскости были предметом исследований в научных трудах И.Н. Векуа [24], [25], В.С. Виноградова [26], [27], Э. Мухамадиева [51] – [54], В.П. Паламодова [68], Н.Е. Товмасяна [87], [91], С. Байзаева [5], Д. Сафарова [78], [79] и др. (подробный аналитический обзор приведён в параграфе 1.1 главы 1).

Связь работы с научными программами (проектами), темами. Диссертационная работа выполнена в рамках реализации перспективных планов научно-исследовательских работ кафедр математического анализа и высшей и прикладной математики Худжандского государственного университета им.

академика Б. Гафурова на 2016 – 2020 гг. по теме «Исследование представления решений некоторых дифференциальных, интегральных и операторных уравнений с особенностями, их свойств, разрешимость краевых задач» и на 2021 – 2025 гг. по теме «Исследование математических моделей и классов дифференциальных уравнений специального вида и их применение в решении задач экономики, естествознания, прикладной механики и технической физики».

Общая характеристика работы

Цель исследования. Изучение систем четырёх вещественных у.ч.п первого порядка вида

$$u_x + Au_y + Bu = 0, \tag{0.1}$$

здесь $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)^T$, $A, B -$ вещественные постоянные матрицы четвертого порядка и эллиптических систем уравнений второго порядка с одной комплексной переменной вида

$$\begin{aligned} Lw \equiv \alpha w_{\bar{z}\bar{z}} + \beta w_{\bar{z}z} + \gamma w_{zz} + a_1(z) w_{\bar{z}} + a_2(z) w_z + a_3(z) \overline{w}_{\bar{z}} + \\ + a_4(z) w + a_5(z) \overline{w} = 0, \end{aligned} \tag{0.2}$$

где $\alpha, \beta, \gamma -$ постоянные, одновременно не равные нулю, в функциональных пространствах на всей плоскости с дополнительными условиями типа ограниченности или роста на бесконечности не выше степенного.

Задачи исследования. В соответствии с поставленной целью решить следующие задачи:

• найти решения модельной системы уравнений, когда

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -E_2 \\ E_2 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & B_1 \\ -B_1 & 0 \end{pmatrix}, \; B_1 = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},$$

из пространства S', в частности решения, имеющие рост на бесконечности не выше чем $(|x| + |y|)^N$;

• найти умеренно растущие решения системы уравнений вида (0.1), когда

$$A=\begin{pmatrix} 0 & A_1 \\ -A_1 & 0 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}, \tag{0.3}$$

где $A_1,\ B_j$ – матрицы второго порядка;

• составить алгоритм нахождения решений, имеющих на бесконечности не выше чем $(|x|+|y|)^N$, системы уравнений вида (0.1);

• найти решения из пространства S', в частности, имеющих на бесконечности рост не выше чем $(|x|+|y|)^N$, системы уравнений вида (0.2), в случае постоянных коэффициентов;

• найти условия, при выполнении которых оператор $L: C_\alpha^2 \to C_\alpha$ будет *n*-нормальным, т.е. имеет замкнутый образ LC_α^2 и конечномерное ядро;

• найти условия, при выполнении которых оператор $L: C_\alpha^2 \to C_\alpha$ будет *d*-нормальным, т.е. имеет замкнутый образ LC_α^2 и конечномерное коядро.

Объект исследования. Объектом исследования являются системы четырёх вещественных линейных у.ч.п. первого порядка с двумя независимыми переменными и эллиптические системы уравнений второго порядка с одной комплексной переменной.

Предмет исследования. Предметом исследования являются доказательства теорем о существовании решений рассматриваемых систем у.ч.п. в конкретных функциональных пространствах.

Научная новизна исследования. Новизна исследования заключается в следующем:

• найдены явные формулы для решений из пространства S' модельной системы;

• найдены явные формулы для решений умеренного роста системы (0.1), когда коэффициенты определяются формулой (0.3);

•предложен алгоритм нахождения решений, имеющие роста на бесконечности не выше чем $(|x|+|y|)^N$, системы уравнений вида (0.1);

• найдены явные формулы для решений из пространства S' системы вида (0.2), в случае постоянных коэффициентов;

•в терминах предельных уравнений найдены необходимые и достаточные условия *n*-нормальности операторов вида $L: C_\alpha^2 \to C_\alpha$;

•в терминах коэффициентов найдены достаточные условия *n*-нормальности операторов вида $L: C_\alpha^2 \to C_\alpha$;

•в терминах коэффициентов найдены достаточные условия *d*-нормальности операторов вида $L: C_\alpha^2 \to C_\alpha$.

Теоретическая и научно-практическая значимость работы. Работа имеет теоретический характер. Методы, развитые в диссертации и полученные результаты можно применять при исследовании других классов систем уравнений в частных производных в пространствах функций, определённых в неограниченных областях.

Личный вклад соискателя ученой степени. Постановка задачи принадлежит научному руководителю. Все результаты, приведённые в разделе «Научная новизна исследования» получены лично соискателем.

Соответствие диссертации паспорту научной специальности (формуле и области исследования). Диссертационная работа выполнена по специальности 6D060102 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление, относится к составной части этой специальности – уравнения с частными производными и полностью соответствует формуле специальности и пункту «Качественная теория дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений» области исследования.

Положения, выносимые на защиту.

• теорема о решениях модельной системы из пространства S';

•формула для решений умеренного роста системы (0.1), когда коэффициенты определяются формулой (0.3);

•алгоритм нахождения решений, имеющих рост на бесконечности не выше чем $(|x|+|y|)^N$, системы уравнений вида (0.1);

•теоремы о решениях из пространства S' системы (0.2), с постоянными коэффициентами;

•теорема о необходимых и достаточных условиях *n*-нормальности операторов вида $L: C_\alpha^2 \to C_\alpha$;

•теоремы о достаточных условиях *n*-нормальности в терминах коэффициентов оператора;

•теоремы о достаточных условиях *d*-нормальности в терминах коэффициентов оператора.

Степень достоверности результатов. Все теоремы, утверждения и формулы решений в диссертации обеспечены строгими доказательствами, ряд выводов согласуются с исследованиями других авторов.

Апробация и реализация результатов диссертации. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах:

- Республиканская научно-практическая конференция «Современные проблемы точных наук и их роль в формировании научного мировоззрения общества», посвящённая 30-летию государственной независимости Республики Таджикистан, Худжанд, 26 – 27 октября 2018 г.

- Научно-практическая конференция «Илм ва инноватсия дар низоми татбиқи ҳадафҳои стратегияи миллӣ”, посвященная 30-летию государственной независимости Республики Таджикистан, Худжанд, 21-24 апреля 2021 г.

- Международная конференция по алгебре, анализу и геометрии 2021. Казань (РФ), 22 – 28 августа 2021 г.

- Уфимская осенняя математическая школа – 2021. Уфа (РФ), 6 – 9 октября 2021 г.

- II международная научно-практическая конференция «О применении дифференциальных уравнений при решении прикладных задач», посвященная 80-летию чл.-корр. НАНТ Э. Мухамадиева. Душанбе, 4 ноября 2021 г.

- Республиканская научно-практическая конференция «Современные проблемы прикладной математики и их роль в формировании технического мировоззрения общества», Худжанд, 29 – 30 ноября 2021 г.

- Научный семинар при Таджикском государственном университете права, бизнеса и политики под руководством д.ф.-м.н., проф. С. Байзаева (2018 – 2022 гг.).

Ряд результатов диссертации использованы при чтении специальных курсов для студентов и магистрантов.

Публикации по теме диссертации. Основные результаты диссертации опубликованы в 12 статьях и материалах научных конференций [1-А] – [12-А]. Работы [1-А] – [4-А] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, из списка ВАК при Президенте Республики Таджикистан. Из совместных работ с научным руководителем С. Байзаевым на защиту выносятся лишь результаты, полученные лично автором диссертации.

Структура диссертации и объем. Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, выводов, рекомендаций по практическому использованию результатов, а также списка литературы, в котором включены 123 наименований. В диссертации используется двойная нумерация. Первый номер указывает на номер главы, второй номер параграфа или номер определения, леммы и теоремы в данной главе. Аналогичным образом ведется нумерация формул. Общий объём диссертации – 133 страниц.

ГЛАВА 1

ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ ПО ИССЛЕДУЕМОЙ ТЕМЕ

В главе 1 даётся обзор и анализ использованных в диссертации источников. В первом параграфе даётся анализ работ, касательно системам линейных у.ч.п. на плоскости В основном рассмотрены случаи систем линейных у.ч.п., заданных в неограниченных областях плоскости. Во втором параграфе дается обзор работ, посвященных линейным комплексным у.ч.п. эллиптического типа, заданных в неограниченных областях комплексной плоскости.

1.1. Обзор литературы по системам уравнений в частных производных первого порядка на плоскости

Теория у.ч.п. эллиптического типа и систем таких уравнений на плоскости разработана в трудах выдающихся ученых – Бернштейн С.Н, Петровский И.Г, Лаврентьев М.А, Векуа И.Н, Михайлов Л.Г, Берс Л., Джураев А.Д, их учеников и последователей (см., например, [16], [17], [24], [25], [36], [45], [50], [71], [105]). Как пишет американский математик Липман Берс, «… чтобы решить задачу прикладного характера для эллиптического уравнения, редко бывает достаточным заглянуть в справочник или посоветоваться со специалистами. Почти во всех случаях такая задача имеет особенности, которые не позволяют автоматически воспользоваться общей теорией. Например, может случиться, что рассматриваемая область неограниченна, …» ([17], с. 141).

Приведём обзор работ, посвященных исследованию эллиптических и гиперболических уравнений и систем в плоских областях.

В трудах И.Н. Векуа, Л. Берса, их соратников и последователей (см. [17], [21], [23], [25], [105], [110]) построена теория у.ч.п.

$$w_{\bar{z}} + a(z)w + b(z)\overline{w} = f(z), \tag{1.1}$$

называемых уравнениями обобщенных аналитических функций (терминология И.Н. Векуа) или псевдоаналитических функций (терминология Л. Берса) и более общие уравнения в неограниченных областях комплексной плоскости C в регулярном случае, т. е. при условии, что коэффициенты и правая часть уравнения принадлежат классу $L_{p,2}(C)$ – множество функций $f(z)$, заданных во всей комплексной плоскости C и удовлетворяющих условиям

$$f(z) \in L_p(K), \quad f_2(z) \equiv |z|^{-2} f\left(\frac{1}{z}\right) \in L_p(K), \quad p > 2,$$

где K – единичный круг $\{z : |z| < 1\}$. Заметим, что $L_{p,2}(C)$ по норме

$$\|f\|_{p,2} = \|f\|_{L_p(K)} + \|f_2\|_{L_p(K)}$$

будет банаховым пространством. При таких условиях получены формулы представления решений, утверждения о разрешимости граничных задач Гильберта и Римана, определены индексы таких задач и установлены аналоги теоремы Лиувилля.

Если коэффициенты уравнения (1.1) не принадлежат классу $L_{p,2}(C)$, то утверждение типа теоремы Лиувилля, как в теории аналитических функций, вообще говоря, не имеет место. Этот факт для случая постоянных коэффициентов, очевидно не принадлежащих пространству $L_{p,2}(C)$, кроме тривиального – тождественно равного нулю случая, установлено в работах В.С. Виноградова (см., например, [26], [27]). Для случая переменных коэффициентов, принадлежащих C_a^1 С. Байзаевым [5] показано, что ядро однородного уравнения соответствующее (1.1) может быть бесконечномерным.

В работах Л.Г. Михайлова, его учеников и последователей (см., например, [37], [50], [58], [59], [93], [111]) исследованы уравнения вида (1.1) с сингулярными коэффициентами вида $\frac{a_0}{z^\alpha}$ и получены результаты, аналогичные регулярному случаю.

Эллиптическим уравнениям и системам в неограниченных областях посвящены многочисленные работы. В работах М. Отелбаева, С.А. Исхокова и их последователей [38] – [41], [60], [61], [107] исследованы проблемы коэрцитивности, теоремы разделимости, нётеровости и регулярного расширения для эллиптических уравнений, а в трудах Э. Мухамадиева, С.Байзаева и их учеников [3] – [10], [30], [31], [33], [51] – [54] исследованы проблемы нормальной разрешимости эллиптических у.ч.п. в классах функций, определенных в R^n, нётеровости и вычисления индекса эллиптических у.ч.п. вида

$$Lw = w_{\bar{z}} + q_1(z)\, w_z + q_2(z)\, \overline{w}_z + a(z) w + b(z)\, \overline{w}$$

в пространстве C_a^1, разрешимости уравнений обобщенных аналитических функций в C_a^1 и обыкновенных дифференциальных уравнений. Также изучены задачи о медленно растущих решениях ряда классов многомерных эллиптических и гиперболических систем. Показано, что необходимым и достаточным условием нётеровости оператора $L : C_\alpha^1 \to C_\alpha$ является требование о том, что ядро всех предельных операторов должно быть нулевым. В случае слабо осциллирующих на бесконечности коэффициентов, т.е. удовлетворяющих условию вида

$$\lim_{z\to\infty} \sup_{|z-\zeta|<1} |\, a(z) - a(\zeta)\,| = 0,$$

необходимым и достаточным условием нётеровости оператора $L : C_\alpha^1 \to C_\alpha$ является то, что на бесконечности функция $|b(z)|$ должна доминировать над функцией $|a(z)|$, при этом индекс оператора $L : C_\alpha^1 \to C_\alpha$ равен индексу Коши функции $b(z)$ на бесконечности.

В работах [106], [108] получены формулы индекса для эллиптических операторов в ограниченной области плоскости.

В работах С. Байзаева и Д.А. Воситовой ([6], [7]) исследована разрешимость систем линейных уравнений первого порядка, записанных в векторной форме

$$u_x + Au_y + Bu = 0 \tag{1.2}$$

в пространствах функций, определённых на всей плоскости и имеющих рост на бесконечности не выше степенного. Для эллиптического случая двух уравнений и в случае более двух уравнений при условии коммутируемости матриц A и B была предложена схема нахождения указанных решений. Установлено, что если зафиксировать порядок роста решения на бесконечности, например, если искать решения $u(x, y)$, имеющие рост не выше чем полином степени N, то есть

$$\|u(x, y)\| \le M\left(1 + |x| + |y|\right)^N, \tag{1.3}$$

здесь $\|\cdot\|$ – какая-нибудь норма в R^2 или R^n, $M > 0$ N – неотрицательное целое число, то пространство таких решений в эллиптическом случае всегда будет конечномерным (равным нулю или $n(N+1)$, n – размерность системы), а в гиперболическом случае может быть нулевым или бесконечномерным.

В диссертационной работе рассматриваются четырехмерные системы вида (1.2), коммутируемость матриц A и B не предполагается, причем тип системы может эллиптическим, гиперболическим или составным. Оказалось, что пространство решений, удовлетворяющих условию (1.3), в эллиптическом случае может быть и бесконечномерным (это было обнаружено при компьютерном моделировании). Этот отличительный факт является одним из подтверждений актуальности исследуемой проблемы для систем вида (1.2).

Э. Мухамадиевым и С. Байзаевым исследованы двумерные равномерно эллиптические системы вида (1.2) с переменными коэффициентами, из C_α (см. [52]). Найдены критерия, нётеровости соответствующего системе, оператора в указанном пространстве и построена формула для нахождения индекса

этого оператора. Следует отметить, что критерия нётеровости и формула индекса выписываются через предельные значения матрицы $B(z)$ на бесконечности.

В научных работах О.А. Олейник, В.П. Паламодова, Н.Е. Товмасяна, их учеников и последователей (см. [35], [42], [56], [57], [67], [69], [72], [88] - [90], [109]) исследованы задача Дирихле в неограниченных областях, задача о полиномиальных решениях в полупространстве и нелокальные задачи для ряда эллиптических уравнений, а также изучено поведение решений в неограниченных областях; получены условия разрешимости исследуемых задач и формулы для решения.

В ряде работ Д. Сафарова и его учеников (см., например, [32], [79], [80]) изучены задачи о двоякопериодических и квазипериодических решениях эллиптических уравнений первого порядка с одной независимой комплексной переменной; получены формулы представления таких решений через эллиптические функции Вейерштрасса, теоремы о разрешимости, а также индексе рассматриваемых задач. Отметим, что указанные уравнения в вещественных переменных относятся к двумерным системам вида (1.2).

Солдатов А.П. и его ученики исследовали (см. [55], [83], [84]) задачи Римана-Гильберта и Шварца для ряда классов эллиптических систем у.ч.п. первого порядка в C_α. В частности, для $J-$аналитических (или аналитических по Дуглису) функций, т.е. функций, удовлетворяющих системе у.ч.п. вида

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} - J \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0,$$

где $J-$матрица, не имеющая вещественных собственных значений, получены условия разрешимости задачи Шварца и установлены соответствующие теоремы.

Б.Б. Ошоровым [62] – [66] проведены исследования трёхмерных аналогов систем уравнений Коши-Римана, некоторых краевых задач для систем

Коши-Римана, краевых задач с разрывными граничными условиями для некоторых классов векторных и матричных функций. Получены априорные оценки и теоремы разрешимости для рассматриваемых задач.

1.2. Обзор литературы по линейным уравнениям в частных производных второго порядка с одной комплексной переменной

Полианалитическими функциями называют решения уравнения с частными производными вида

$$\frac{\partial^n w}{\partial \bar{z}^n} = 0, \tag{1.4}$$

где $\frac{\partial^n}{\partial \bar{z}^n}$ – итерации оператора Коши-Римана. Полианалитические функции встречаются в ряде задач механики и имеют тесную связь с теорией у.ч.п. (см., например, [13], [66], [103]).

При $n = 2$ решения уравнения (1.4) называют бианалитическими функциями, а само уравнение системой уравнений Бицадзе (см. [18], [20], стр. 133). Как было установлено А.В. Бицадзе, для уравнения (1.4) в указанном случае задача Дирихле в круге не является нётеровой (соответствующая однородная задача имеет бесчисленное множество линейно независимых решений).

В работах М.Б. Балка, М.Ф. Зуева и их последователей (см. [11] – [14], [104]), посвящённые полианалитическим функциям, установлены граничные свойства и формулы представления этих функций и их обобщений. Отметим, что несмотря на близость уравнений вида (1.4) к уравнениям Коши-Римана, многие утверждения справедливые для аналитических функций не имеют место для полианалитических функций. Например, две не равные полианалитические функции могут совпадать на отрезке положительной длины или принцип максимума модуля для аналитических функций может не выполняться для полианалитических функций.

Обобщениями полианалитических функций являются так называемые метааналитические функции. Такими функциями называют решения уравнения с частными производными вида

$$\frac{\partial^n w}{\partial \bar{z}^n} + a_1 \frac{\partial^{n-1} w}{\partial \bar{z}^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} + a_n w = 0 \qquad (1.5)$$

с постоянными коэффициентами $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Для целых метааналитических функций, т.е. определенных во всей комплексной плоскости, теорема Лиувилля как для аналитических функций, не имеет место. Имеется аналог этой теоремы, точнее представление метааналитических функций через квазиполиномы относительно z и $\bar{z}$ (см. [13], стр. 225), называемое представлением Гурса.

Представляют интерес обобщения уравнений вида (1.5), когда в левой части присутствуют слагаемые типа $\frac{\partial w}{\partial z}$ или $\overline{w}$. Для таких уравнений утверждения типа теоремы Лиувилля как для аналитических функций могут быть не верны. Например, в [4-А, 12-А] установлено, что «для системы

$$w_{\bar{z}\bar{z}} + c\overline{w} = 0,$$

где $c \neq 0$ задача об ограниченных во всём C решениях не является нётеровой» [4-А, 12-А]). Все функции вида

$$w(z) = p\omega(z) + q\overline{\omega(z)},$$

здесь $p -$ произвольная постоянная,

$$q = \frac{|c|}{\bar{c}} \bar{p} e^{-2i\alpha}, \ \ \omega(z) = \exp\left[2i\sqrt{|c|}\,\mathrm{Re}\left(e^{-i\alpha} z\right)\right], \ 0 \le \alpha < 2\pi,$$

являются ограниченным на всей плоскости и удовлетворяют данной системе.

Н. Раджабовым и А.Б. Расуловым (см. [73], [74]) изучена задача линейного сопряжения для системы Бицадзе с младшими членами, коэффициенты которых имеют сверхсингулярную особенность в виде окружности; найдено интегральное представление решений и соответствующие формулы обращения, а также установлены теоремы разрешимости некоторых краевых задач.

В работах К.М. Расулова и его учеников (см. [75], [76], [81], [94], [95]) разработаны методы решения краевых задач для полианалитических функций и краевых задач типов Газемана, Карлемана, Неймана, Рикье и внешней краевой задачи типа Карлемана в случае круга для метааналитических функций.

В диссертации Б.Ф. Фатулаева (см. [94]) исследованы линейные краевые задачи с сопряжением и со сдвигом для уравнений вида (1.5) при n=2. Эти задачи имеют важное значение в механике сплошных сред и математической физике. В указанной диссертации получены условия разрешимости и нётеровости, исследуемых задач. Для ряда частных задач получены формулы решений.

Диссертация В.В. Сенчилова (см. [81]) посвящена исследованию неклассических краевых задач типа Неймана и типа Рикье в классах метааналитических функций при n=2 в круге. Получены необходимые и достаточные условия разрешимости и нётеровости этих задач. Приведены конкретные случаи, когда указанные задачи не являются нётеровыми.

Солдатов А.П. и его ученики исследовали на полуплоскости (см. [85], [86], [100], [101]) эллиптические системы у.ч.п. второго порядка, задачу Римана-Гильберта для бианалитических функций и задачу линейного сопряжения для полианалитических функций. В диссертации Чан Куанг Выонг (см. [100]) для уравнений вида (1.5) изучены граничная задача Римана и односторонняя граница задача. При этом используется аппарат теории функций комплексной переменной. Установлена связь полианалитических функций и J - аналитических функций и на основе этого изучена общая краевая задача для уравнений вида (1.5).

В ряде работ Д. Сафарова и его учеников (см. [1], [2], [77] – [80]) изучены задачи о двоякопериодических решениях некоторых классов линейных, квазилинейных и нелинейных эллиптических систем второго порядка с одной комплексной переменной; с применением аппарата теории двоякопериодических обобщенных аналитических функций и теории эллиптических

функций Вейерштрасса получены формулы представления таких решений, установлены теоремы о разрешимости рассматриваемых задач и подсчитан индекс.

Б.Б. Ошоровым [65] проведено исследование корректности краевых задач для некоторых классов уравнений вида (1.5) с аналитическими коэффициентами. Показано, что решение данного уравнения сводится к решению n неоднородных уравнений Коши-Римана. Для некоторых значений n и коэффициентов установлены теоремы разрешимости граничных задач в ограниченных и неограниченных областях.

Отметим также работу Хоанг Куок Тоан [99], в которой для уравнения вида (1.4) при n=2 изучены ряд краевых задач, отличающихся от обычных.

Эллиптическим уравнениям и системам второго порядка и высших порядков в неограниченных областях посвящены многочисленные работ. В работах М. Отелбаева, С.А. Исхокова и их последователей [38] - [41], [60], [61], [97] исследован проблемы коэрцитивности, теоремы разделимости и нётеровости для эллиптических уравнений, а в трудах Э. Мухамадиева, С.Байзаева и их последователей [5], [8], [54], [97] изучены проблемы нормальной разрешимости и нётеровости эллиптических у.ч.п. в классах функций, определенных в R^n, нётеровости и вычислению индекса эллиптических у.ч.п. второго порядка на плоскости, а также изучены гиперболические у.ч.п. второго порядка с двумя независимыми переменными в пространствах функций, ограниченных во всей плоскости, периодических или почти-периодических.

В научных работах Н.Е. Товмасяна, его учеников и последователей (см. [48], [49], [89], [91], [109]) исследованы задача Дирихле, задача о полиномиальных решениях в полупространстве и нелокальные задачи для ряда эллиптических уравнений второго порядка, а также изучено поведение решений в неограниченных областях; установлены теоремы разрешимости и соответствующие решения этих задач.

В работе Н.Е. Товмасяна и А.О. Бабаяна [91] для у.ч.п. вида

$$u_{tt} + u_{xx} + u_{yy} - 2au_t - 2bu_x + cu = 0, \tag{1.6}$$

где $a, b, c -$ вещественные постоянные, в полупространстве $R_+^3 = \{(t, x, y) : t > 0, (x, y) \in R^2\}$ изучены задачи о решениях, удовлетворяющих условию

$$|u(t, x, y)| \le K\left(1 + x^2 + y^2\right)^{0,5\alpha}(1+t)^{\beta},\ (t, x, y) \in \overline{R_+^3} \tag{1.7}$$

или

$$|u(t, x, y)| \le K\left(1 + x^2 + y^2 + t^2\right)^{0,5\alpha},\ (t, x, y) \in \overline{R_+^3} \tag{1.8}$$

где $\alpha -$ фиксированное неотрицательное число, K и β некоторые положительные числа, вообще говоря, зависящие от u. Класс функций, удовлетворяющих этим неравенствам обозначим через $Q_{\alpha,\beta}\left(\overline{R_+^3}\right)$ и $M_{\alpha}\left(\overline{R_+^3}\right)$ соответственно. Аналогично определяется класс $Q_{\alpha}\left(R^2\right)$ с разницей в том что в (1.7) нужно взять вместо функции $u(t, x, y)$ функцию двух переменных $u(x, y)$ и полагать $\beta = 0$. Авторами рассмотрена следующая модифицированная задача Дирихле в полупространстве.

Задача ТБ. Найти функцию $u(t, x, y) \in Q_{\alpha,\beta}\left(\overline{R_+^3}\right)$, удовлетворяющую уравнению (1.6) и краевому условию

$$u(0, x, y) = f(x, y),$$

здесь $f(x, y) -$ функция из класса $Q_{\alpha}\left(R^2\right)$.

Относительно задачи ТБ установлены ряд утверждений:

- если $c > 0$ и $a \le 0$, то пространство решений однородной задачи ТБ является бесконечномерным;

- если число c отрицательное или неположительное и число a положительное, то однородная задача ТБ не имеет ненулевых решений, т.е. ядро задачи ТБ является нулевым;

- если $c=0$ и $a\le 0$, то однородная задача ТБ имеет $\kappa = 0{,}5([\alpha]+1)([\alpha]+2)$ линейно независимых решений, т.е. ядро задачи ТБ имеет размерность κ; здесь $[\alpha]-$целая часть числа α.

Далее для уравнения (1.6) при $c=0$ и $a\le 0$ рассмотрена задача Коши с полиномиальными начальными данными и установлено существование и единственность решения в классе

$$Q\left(\overline{R_+^3}\right)=\bigcup_{\alpha\ge 0} Q_{\alpha,\beta}\left(\overline{R_+^3}\right).$$

Первые два утверждения показывают, что задача ТБ может быть не нётеровым.

В диссертации мы исследуем более общие уравнения на плоскости и для них задачу типа (1.7) с $\beta=0$. Методика исследования для случая постоянных коэффициентов похожая на метод, используемый в работе [91], а в случае переменных коэффициентов используются методы функционального анализа, в том числе принцип Банаха (см. [42], стр. 213), априорные оценки шаудеровского типа (см. [17], стр. 241), совершенно отличающиеся от методов работ [89] и [91].

В работах Шамсудинова Ф.М. (см., например, [102]) исследованы ряд классов сингулярных гиперболических уравнений и преопределенных систем у.ч.п. на плоскости, для которых получены представления многообразия решений и установлены ряд важных свойств решений.

В диссертационной работе исследуются две группы проблем.

1. Разрешимость систем четырёх линейных уравнений первого порядка, записанных в векторной форме

$$u_x + Au_y + Bu = 0,$$

в пространствах функций, определённых на всей плоскости и имеющих рост на бесконечности не выше степенного. Такая проблема для эллиптического случая двух уравнений и в случае более двух уравнений при условии коммутируемости матриц *A* и *B* была изучена в работах С. Байзаева и Д.А. Воситовой ([6], [7]); в этих работах предложена схема нахождения указанных решений и установлено, что при фиксации роста решения на бесконечности, пространство таких решений в эллиптическом случае конечномерное, а в гиперболическом случае может быть и бесконечномерным. В рассматриваемом нами случае тип системы может эллиптическим, гиперболическим или составным, коммутируемость матриц *A* и *B* не предполагается. Оказалось, что такое пространство в эллиптическом случае может быть и бесконечномерным (это было обнаружено при компьютерном моделировании). Этот факт является одним из подтверждений актуальности исследуемой проблемы.

2. Впервые исследованы проблемы нормальной разрешимости, нормальной разрешимости с конечномерным ядром или коядром эллиптических уравнений второго порядка с одной комплексной переменной вида

$$Lw \equiv \alpha w_{\bar{z}\bar{z}} + \beta w_{\bar{z}z} + \gamma w_{zz} + a_1(z) w_{\bar{z}} + a_2(z) w_z + a_3(z) \overline{w}_{\bar{z}} + a_4(z) w + a_5(z) \overline{w} = 0, \quad (1.9)$$

где $\alpha, \beta, \gamma -$постоянные, одновременно не равные нулю, в пространстве C_α^2 Оказалось, что подобно задаче Дирихле для уравнения Бицадзе (случай $\alpha = 1, \beta = \gamma = a = b = c = 0,$ см. [18] – [20]), задача о решениях из пространства C_α^2 уравнений вида (1.9) может быть не нётеровой. Один пример был приведен ранее.

Как было отмечено выше, интерес к краевым задачам для полианалитических функций и их обобщениям связан с прикладными задачами из механики и теории у.ч.п.

В связи с выше сказанным, исследование второй группы проблем является также важным и актуальным.

ГЛАВА 2
СИСТЕМЫ ВЕЩЕСТВЕННЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ НА ВСЕЙ ПЛОСКОСТИ

Глава 2 посвящена системам линейных у.ч.п. первого порядка на плоскости R^2. Изучены задачи нахождения решений из пространства S', а также решений полиномиального роста.

2.1. Вспомогательный материал

В диссертации используются ряд функциональных пространств (см., например, [5], [17], [44]), которые были приведены в разделе «Список используемых обозначений».

В дальнейшем приведем формулы норм только для вещественного случая, для комплексного случая эти формулы определяются аналогично.

Норма в пространстве C_0 определяется так:

$$\| u \|_0 = \sup_{x,y} | u(x,y) |;$$

по этой норме C_0 является банаховым пространством.

Норму в C_α можно определить по формуле

$$\| u \|_\alpha = \sup_{x,y} | u(x,y) | + H_\alpha(u),$$

здесь

$$H_\alpha(u) = \sup_{(x_1,y_1)\neq(x_2,y_2)} \left(|x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2 \right)^{-\alpha/2} | u(x_1,y_1) - u(x_2,y_2) |$$

и это пространство является банаховым.

Нормы в пространствах C_α^1 и C_α^2 определяются так:

$$\| u \|_{\alpha,1} = \| u \|_\alpha + \| u_x \|_\alpha + \| u_y \|_\alpha;$$

$$\| u \|_{\alpha,2} = \| u \|_{\alpha,1} + \| u_{xx} \|_\alpha + \| u_{xy} \|_\alpha + \| u_{yy} \|_\alpha;$$

эти пространства являются банаховыми.

Аналогично определяются пространства вектор-функций, для которых сохраним приведенные обозначения и знак $|\cdot|$ будет означать евклидову норму. Нам также понадобятся формулы представления распределений $f(x,\ y)$, с точечным носителем $(x_0,\ y_0)$ или носитель принадлежит окружности $\{(x,y) \div x^2 + y^2 = r_0^2\}$. Первая группа обобщённых функций представляется в виде (см. [28], стр. 49)

$$f(x,\ y) = \sum_{k,\, j\geq 0,\, k+j\leq m} C_{kj} \frac{\partial^{k+j}\delta(x-x_0,\ y-y_0)}{\partial x^k \partial y^j},$$

а вторая – в виде (см. [10], стр. 4)

$$f(x,y) = \sum_{k=0}^{N} (c_k(\theta) \times \delta^{(k)}(r-r_0), \psi(r,\theta)),$$

где

C_{kj} – постоянные,

$c_k(\theta)$ – 2π-периодические обобщенные функции,

$(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta),\ \psi(r,\theta) = \varphi(re^{i\theta}),\ r>0,\ \varphi \in D.$

Нам будут нужны в дальнейшем ряд понятий касательно линейных операторов (см., например, [96], стр. 104 – 109).

Оператор $A \in L(E,\ F)$ называется *нормально разрешимым*, если его образ $R(A)$ являются замкнутым.

Нормально разрешимый оператор с конечномерным ядром (коядром) называется n*-нормальным* (**(**d*-нормальным*).

Если оператор A d-нормальный, то размерность его коядро совпадает с размерностью ядра сопряжённого оператора $A^*: F^* \to E^*$.

Нам понадобятся следующие утверждения.

Лемма 2.1 (см. [43], стр. 14). *Для нормальной разрешимости оператора* $A \in L(E,\ F)$ *необходимо и достаточно, чтобы уравнение Ax=f было разрешимо для тех и только тех правых частей, которые ортогональны всем решениям сопряженного однородного уравнения A*y=0.*

Лемма 2.2 (см. [5], стр. 28). *Пусть оператор* $A \in L(E, F)$ *n-нормальный и подпространство* $E_0 \subset E$ *не имеет пересечения с ядром оператора A. Тогда* $L(E_0)$ *является замкнутым в F.*

Лемма 2.3 (см. [15], стр. 107). *Пусть* $A, B, C, D -$ *квадратные матрицы одинакового порядка и* $AB = BA$ *или* $CD = DC$. *Тогда справедливо равенство*

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC).$$

2.2. Об умеренно растущих решениях эллиптической системы четырех уравнений с частными производными

2.2.1. Рассмотрим следующую систему:

$$Lu \equiv u_x + Au_y + Bu = 0, \tag{2.1}$$

здесь $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)^T$ – четырёхмерная искомая вектор-функция A, B – вещественные постоянные матрицы четвертого порядка.

Для системы (2.1) исследуем задачу о разрешимости в пространстве Шварца S'. В пространстве S' система (2.1) равносильна следующей системе функциональных уравнений:

$$P(\xi,\eta)\hat{u}(\xi,\eta) = 0, \tag{2.2}$$

где

$\hat{u}(\xi,\eta)$ – преобразование Фурье функции $u(x,y)$,

$P(\xi,\eta) = i\xi E_4 + i\eta A + B$ – символ дифференциального оператора L.

Учитывая эту связь получим следующее утверждение.

Теорема 2.1. *1) Если в уравнении (2.2) определитель матритцы* $P(\xi,\eta)$ *нигде не равняется нулю, то* $\hat{u}(\xi,\eta) = 0$, *следовательно,* $u(x,y) \equiv 0$, *т.е. в этом случае система (2.1) в* S' *имеет только нулевое решение.*

2) Если на некотором множестве $\Gamma \subset R^2$ *определитель матритцы* $P(\xi,\eta)$ *равняется нулю, то* $\hat{u}(\xi,\eta)$ *является обобщенной функцией с носителем на Г.*

С учетом утверждения 2) важной задачей является определение структуры множества *Г*.

2.2.2. Модельная эллиптическая система. Рассмотрим случай $A = \begin{pmatrix} 0 & -E_2 \\ E_2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & B_1 \\ -B_1 & 0 \end{pmatrix}$, $B_1 = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ – матрица второго порядка. В этом случае

$$P(\xi,\eta)=i\xi\begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}+i\eta\begin{pmatrix} 0 & -E_2 \\ E_2 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & B_1 \\ -B_1 & 0 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} i\xi E_2 & -i\eta E_2+B_1 \\ i\eta E_2-B_1 & i\xi E_2 \end{pmatrix}.$$

Матрицы $i\xi E_2$ и $-i\eta E_2+B_1$ являются коммутируемыми, поэтому в силу леммы 2.3 (см. § 2.1) имеем

$$\det P(\xi,\eta)=\det\begin{pmatrix} i\xi E_2 & -i\eta E_2+B_1 \\ i\eta E_2-B_1 & i\xi E_2 \end{pmatrix}=$$

$$=\det\left[-\xi^2E_2+\left(i\eta E_2-B_1\right)^2\right]=\det\left[\left(\xi^2+\eta^2\right)E_2+2i\eta B_1-B_1^2\right].$$

Далее с учетом того что

$$B_1^2=\begin{pmatrix} b_{11}^2+b_{12}b_{21} & (b_{11}+b_{22})b_{12} \\ (b_{11}+b_{22})b_{21} & b_{22}^2+b_{12}b_{21} \end{pmatrix},$$

находим

$$\det P(\xi,\eta)=\det\begin{pmatrix} \xi^2+\eta^2+2i\eta b_{11}-b_{11}^2-b_{12}b_{21} & 2i\eta b_{12}-(b_{11}+b_{22})b_{12} \\ 2i\eta b_{21}-(b_{11}+b_{22})b_{21} & \xi^2+\eta^2+2i\eta b_{22}-b_{22}^2-b_{12}b_{21} \end{pmatrix}=$$

$$=\left(\xi^2+\eta^2\right)^2-\left(b_{11}^2+2b_{12}b_{21}+b_{22}^2\right)\left(\xi^2+\eta^2\right)+2i\eta\left(b_{11}+b_{22}\right)\left(\xi^2+\eta^2\right)-$$

$$-2i\eta\left[b_{11}\left(b_{22}^2+b_{12}b_{21}\right)+b_{22}\left(b_{11}^2+b_{12}b_{21}\right)\right]-4\left(b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21}\right)\eta^2+$$

$$+4i\eta b_{12}b_{21}\left(b_{11}+b_{22}\right)+\left(b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21}\right)^2.$$

После выделения вещественной и мнимой части окончательно имеем

$$\det P(\xi,\eta)=(\xi^2+\eta^2)^2-\left[(trB_1)^2-2\det B_1\right]\xi^2-\left[(trB_1)^2+2\det B_1\right]\eta^2+$$

$$+(\det B_1)^2+2itrB_1(\xi^2+\eta^2-\det B_1)\eta.$$

Итак, множество $\Gamma=\{(\xi,\eta):\det P(\xi,\eta)=0\}$ состоит из точек (ξ,η), координаты которых должны удовлетворять следующей системе двух уравнений:

$$(\xi^2+\eta^2)^2-\alpha\xi^2-\beta\eta^2+\gamma^2=0, \qquad (2.3)$$

$$\mu(\xi^2+\eta^2-\gamma)\eta=0, \qquad (2.4)$$

где

$$\alpha = (trB_1)^2 - 2\det B_1,$$
$$\beta = (trB_1)^2 + 2\det B_1,$$
$$\gamma = \det B_1,$$
$$\mu = trB_1.$$

Множество точек (ξ,η) удовлятворяющих уравнению (2.3) обозначим через Γ_1, а множество точек, удовлятворяющих уравнению (2.4) – через Γ_2. Тогда $\Gamma = \Gamma_1 \cap \Gamma_2$ и мы должны определить структуру множеств Γ_1 и Γ_2. Для этого будем исследовать систему уравнений (2.3), (2.4).

Уравнения (2.3) и (2.4) запишем в полярных координатах:

$$r^4 - (\alpha\cos^2\varphi + \beta\sin^2\varphi)r^2 + \gamma^2 = 0, \tag{2.5}$$

$$\mu(r^2 - \gamma)r\sin\varphi = 0. \tag{2.6}$$

При $\mu = 0$ множество Γ_2 совпадает с плоскостью R^2 и в силу равенств $\beta = -\alpha = 2\gamma$ уравнение (2.5) примет вид

$$r^4 + 2\gamma\cos 2\varphi \cdot r^2 + \gamma^2 = 0. \tag{2.7}$$

Отсюда находим

$$r^2 = -\gamma\cos 2\varphi \pm \sqrt{-\gamma^2\sin^2 2\varphi}.$$

Если $\gamma = 0$, то $r = 0$, если же $\gamma \neq 0$, то $\varphi \in \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\right\}$ и мы получаем

$$\Gamma = \Gamma_1 = \begin{cases} (0,0) \text{ при} \gamma = 0, \\ (0, \pm i\sqrt{\gamma}) \text{ при } \gamma > 0, \\ (0, \pm\sqrt{|\gamma|}) \text{ при } \gamma < 0. \end{cases}$$

Итак, при $\mu = 0$ множество Γ состоит из одной или двух точек и обобщенная функция $\hat{u}(\xi,\eta)$ представляется в виде:

$$\hat{u}(\xi,\eta) = \sum_{\substack{j+k\le N \\ j,k\ge 0}} \left[c_{jk} \frac{\partial^{j+k}\delta(\xi-\xi_0, \eta-\xi_0)}{\partial\xi^j \partial\eta^k} + d_{jk} \frac{\partial^{j+k}\delta(\xi+\xi_0, \eta+\xi_0)}{\partial\xi^j \partial\eta^k} \right], \tag{2.8}$$

где

N – произвольное неотрицательное целое число,

c_{jk}, d_{jk} – векторы размерности четыре,

$\xi_0 \in \{0, \sqrt{-\gamma}, i\sqrt{\gamma}\}$ в зависимости от знака γ, причем при $\xi_0 = 0$ нужно взять $d_{jk} = 0$.

Пусть $\mu \neq 0$. Тогда из (2.6) получаем равенство $(r^2 - \gamma) r \sin\varphi = 0,$ из которого следует, что множество Γ_2 совпадает с осью $O\xi$ при $\gamma \leq 0$ и является объединением этой оси с окружностью $r^2 = \gamma$ при $\gamma > 0$. В случае $\gamma \leq 0$ в уравнение (2.5) подставим $\varphi = 0$ и с учетом соотношения $\alpha = \mu^2 - 2\gamma$ находим:

$$r^2 = \frac{1}{2}\left(\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\gamma^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\alpha \pm \mu\sqrt{\mu^2 - 4\gamma}\right). \tag{2.9}$$

Отсюда при $\gamma = 0$ получаем $r^2 = 0,\ \mu^2$ и тогда $\Gamma = \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \{0, \pm\mu\}$, т.е. Γ состоит из трех точек. Если же $\gamma < 0$, то Γ будет состоять из четырех точек вида $\{\pm r_1, \pm r_2\}$, где r_1, r_2 – значения квадратного корня из правой части соотношения (2.9). В случае $\gamma > 0$ коэффициент при r^2 в уравнении (2.5) представим в виде

$$\alpha\cos^2\varphi + \beta\sin^2\varphi = \left(\mu^2 - 2\gamma\right)\cos^2\varphi + \left(\mu^2 + 2\gamma\right)\sin^2\varphi =$$
$$= \mu^2 - 2\gamma\cos 2\varphi$$

и вычислим дискриминант

$$D = \left(\mu^2 - 2\gamma\cos 2\varphi\right)^2 - 4\gamma^2.$$

Неравенство $D \geq 0$ эквивалентно неравенству $\cos 2\varphi \leq \dfrac{\mu^2}{2\gamma} - 1$, которое очевидно имеет решение. Поэтому уравнение (2.5) относительно r^2 разрешимо

$$r^2 = \frac{1}{2}\left(\mu^2 - 2\gamma\cos 2\varphi \pm \sqrt{D}\right).$$

Эти соотношения показывают, что Γ_1 состоит из двух замкнутых кривых, пересечения которых с Γ_2 определяют множество Γ. В этом случае для определения обобщенной функции $\hat{u}(\xi,\eta)$ также нужно использовать формулы вида (2.8).

Таким образом, мы определили множество решений системы (2.5), (2.6) и оно в зависимости от значений и знаков величин следа - $tr\,B_1 = \mu$ и определителя - $\det B_1 = \gamma$ матрицы B_1 есть несколько точек вида $\pm(\xi,\eta)$ и возможно самой точки О.

А именно, справедлива следующая

Теорема 2.2. *Множество* Γ *- решений системы уравнений (2.3), (2.4) определяется следующим образом:*

a) если $\mu = 0$, *то*

$$\Gamma = \begin{cases} (0,0)\ при\gamma = 0, \\ (0,\pm\sqrt{\gamma})\ при\gamma > 0, \\ (\pm\sqrt{|\gamma|},0)\ при\ \gamma < 0; \end{cases}$$

b) если $\mu \neq 0$, *то*

$$\Gamma = \begin{cases} \{(0,0),(\mu,0),(-\mu,0)\ при\gamma = 0, \\ (\pm r_1,\pm r_2)\ при\mu^2 > 4\gamma, \\ (\pm\frac{1}{2}|\mu|,\pm\frac{1}{2}\sqrt{4\gamma-\mu^2})\ при\ \mu^2 \le 4\gamma, \end{cases}$$

где r_1, r_2 *– значения квадратного корня из чисел* $\frac{1}{2}\left(\mu^2 - 2\gamma \pm \mu\sqrt{\mu^2 - 4\gamma}\right)$.

Далее используя формулу вида (2.8) можно определить обобщенную функцию $\hat{u}(\xi,\eta)$ и применяя обратное преобразование Фурье с учётом формулы из [29, стр. 102], можно найти функцию $u(x,y)$.

Справедлива следующая

Теорема 2.3. *Решения модельной системы из* S' *определяются следующим образом:*

а) если $\mu = 0$, *то*

$$u(x,y) = \begin{cases} e^{i\sqrt{\gamma y}}P(x,y) + e^{-i\sqrt{\gamma y}}Q(x,y) \ \ при\ \gamma \geq 0, \\ e^{i\sqrt{|\gamma|}x}P(x,y) + e^{-i\sqrt{\gamma x}}Q(x,y) \ \ при\ \gamma < 0, \end{cases}$$

где $P, Q -$ *многочлены одинакового порядка, коэффициенты которых определяются через коэффициенты модельной системы;*

б) если $\mu \neq 0$, *то*

$$u(x,y) = \begin{cases} e^{i\mu x}P(x,y) + e^{-\mu x}Q(x,y) + R(x,y) \ \ при\ \gamma = 0 \\ \sum\limits_{j=1}^{2}[e^{ir_j x}P_j(x,y) + e^{-ir_j x}Q_j(x,y)] \ \ при\ \mu^2 > 4\gamma \\ e^{i(r_3 x + r_4 y)}P_3(x,y) + e^{-i(r_3 x + r_4 y)}Q_3(x,y) \ \ при\ \mu^2 \leq 4\gamma \end{cases}$$

где $P, Q, R, P_j, Q_j -$ *многочлены, коэффициенты которых определяются через коэффициенты модельной системы, причем* $\deg P = \deg Q$, $\deg P_j = \deg Q_j$, r_1, r_2 *– значения квадратного корня из чисел*

$$\frac{1}{2}(\mu^2 - 2\gamma \pm \mu\sqrt{\mu^2 - 4\gamma}), \qquad r_3 = \frac{|\mu|}{2}, r_4 = \frac{1}{2}\sqrt{4\gamma - \mu^2}\,.$$

Выше приведенную схему будем также использовать в дальнейшем, и находить решения систем у.ч.п. В следующем параграфе излагается метод нахождения коэффициентов многочленов, входящих в формулу, определяющую решения систем у.ч.п.

2.3. Об умеренно растущих решениях гиперболической системы четырех уравнений с частными производными

2.3.1. Рассмотрим следующую систему уравнений с частными производными

$$U_x + AU_y + BU = 0, \tag{2.10}$$

где

$$U = (U_1, U_2, U_3, U_4)^T, \ A = \begin{pmatrix} 0 & A_1 \\ -A_1 & 0 \end{pmatrix}, \ A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$B = (b_{jk})$ – постоянная вещественная матрица четвертого порядка.

Легко проверить, что в общем случае матрицы A и B не являются перестановочными. Собственные значения матрицы A кратные и равны ± 1, т.е. система (2.10) является гиперболической.

В этом параграфе изучается вопрос нахождения умеренно растущих решений (см. [98]) систем вида (2.10).

Будем использовать запись матриц в следующем виде

$$A = [-e_4, e_3, e_2, -e_1], \ B = [b_1, b_2, b_3, b_4], \ E_4 = [e_1, e_2, e_3, e_4],$$

где через b_j обозначены столбцы матрицы B, а через e_j – единичные орты в R^4. Тогда символ системы (2.10) запишется так

$$P(\xi, \eta) = i\xi E + i\eta A + B =$$

$$= i\xi[e_1, e_2, e_3, e_4] + i\eta[-e_4, e_3, e_2, -e_1] + [b_1, b_2, b_3, b_4] =$$

$$= [i\xi e_1 - i\eta e_4 + b_1, i\xi e_2 + i\eta e_3 + b_2, i\xi e_3 + i\eta e_2 + b_3, i\xi e_4 - i\eta e_1 + b_4].$$

Поэтому

$$\det P(\xi, \eta) = \det[\xi e_1 - \eta e_4 - ib_1, \xi e_2 + \eta e_3 - ib_2, \xi e_3 + \eta e_2 - ib_3, \xi e_4 - \eta e_1 - ib_4],$$

здесь мы использовали четность порядка символа P.

Мы должны изучать уравнение вида

$$\det\left[\xi e_1 - \eta e_4 - ib_1, \xi e_2 + \eta e_3 - ib_2, \xi e_3 + \eta e_2 - ib_3, \xi e_4 - \eta e_1 - ib_4\right] = 0 \qquad (2.11)$$

с переменными $(\xi,\ \eta)$. Если вычислить левую часть этого уравнения, то получим

$$Q(\xi,\ \eta) \equiv \det P(\xi,\eta) = \xi^4 + P_{31}\xi^3\eta + P_{22}\xi^2\eta^2 + P_{13}\xi\eta^3 + P_{04}\eta^4 + P_{30}\xi^3 + P_{21}\xi^2\eta +$$
$$+ P_{12}\xi\eta^2 + P_{03}\eta^3 + P_{20}\xi^2 + P_{11}\xi\eta + P_{02}\eta^2 + P_{10}\xi + P_{01}\eta + P_{00},$$

где P_{jk} – коэффициенты, определяемые следующим образом. В силу равенств

$$Q(0,0) = \det B,\ Q(0,\eta) = \det\left[\eta A - iB\right] = \eta^4 \det\left[A - \frac{i}{\eta}B\right],\ \eta \neq 0,$$

имеем

$$P_{00} = \det B;\ P_{04} = \det A = 1. \qquad (2.12)$$

Далее используя правило дифференцирования определителей, имеем

$$Q_\xi(\xi,\eta) = \det\left[e_1, e_2\xi + e_3\eta - ib_2,\ e_3\xi + e_2\eta - ib_3,\ e_4\xi - e_1\eta - ib_4\right] +$$
$$+ \det\left[e_1\xi - e_4\eta - ib_1, e_2,\ e_3\xi + e_2\eta - ib_3,\ e_4\xi - e_1\eta - ib_4\right] +$$
$$+ \det\left[e_1\xi - e_4\eta - ib_1, e_2\xi + e_3\eta - ib_2,\ e_3,\ e_4\xi - e_1\eta - ib_4\right] +$$
$$+ \det\left[e_1\xi - e_4\eta - ib_1, e_2\xi + e_3\eta - ib_2,\ e_3\xi + e_2\eta - ib_3,\ e_4\right],$$

тогда

$$P_{10} = Q_\xi(0,0) = \det\left[e_1, -ib_2,\ -ib_3,\ -ib_4\right] + \det\left[-ib_1, e_2,\ -ib_3,\ -ib_4\right] +$$
$$\det\left[-ib_1, -ib_2,\ e_3,\ -ib_4\right] + \det\left[-ib_1, -ib_2,\ -ib_3,\ e_4\right] =$$
$$= \det\left[ie_1, b_2,\ b_3,\ b_4\right] + \det\left[b_1, ie_2,\ b_3,\ b_4\right] +$$
$$\det\left[b_1, b_2,\ ie_3,\ b_4\right] + \det\left[b_1, b_2, b_3,\ ie_4\right]. \qquad (2.13)$$

Используя теорему Лапласа, нетрудно уследить, что правая часть этого равенства представляет собою сумму главных миноров третьего порядка (см. [46], стр. 41) матрицы B, умноженную на i , поэтому

$$P_{10} = i \sum_{1 \le j_1 < j_2 < j_3 \le 4} B \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_1 & j_2 & j_3 \end{pmatrix}. \qquad (2.14)$$

Аналогично находим

$$P_{01} = Q_\eta(0,0) = \det[-ie_4, b_2, b_3, b_4] + \det[b_1, ie_3, b_3, b_4] + \det[b_1, b_2, ie_2, b_4] + \det[b_1, b_2, b_3, -ie_1]. \tag{2.15}$$

Правая часть этой формулы составляется так: в матрице B столбцы заменяем на столбцы $-e_4, e_3, e_2, -e_1$ и просуммируем полученные четыре определителя. С помощью формулы Коши-Бине (см. [46], стр. 41) легко установить, что

$$P_{01} = i\left(B_{14}^{(3)} - B_{23}^{(3)} - B_{32}^{(3)} + B_{41}^{(3)}\right), \tag{2.16}$$

где $B_{kj}^{(3)}$ – миноры третьего порядка матрицы B.

Коэффициенты при квадратичных членах в разложении $Q(\xi, \eta)$ вычисляем точно также:

$$\begin{aligned} P_{20} = \frac{1}{2} Q_{\xi\xi}(0,0) = \det[ie_1, ie_2, b_3, b_4] + \det[ie_1, b_2, ie_3, b_4] + \\ \det[ie_1, b_2, b_3, ie_4] + \det[b_1, ie_2, ie_3, b_4] + \det[b_1, ie_2, b_3, ie_4] + \\ + \det[b_1, b_2, ie_3\, ie_4], \end{aligned} \tag{2.17}$$

Правая часть этой формулы составляется так:

в матрице B столбцы j и k заменяем на столбцы ie_j и ie_k соответственно и вычислим сумму полученных шести определителей; другими словами, находим сумму главных миноров второго порядка матрицы B и результат умножим на (– 1):

$$P_{20} = -\sum_{1 \le j_1 < j_2 \le 4} B\begin{pmatrix} j_1 & j_2 \\ j_1 & j_2 \end{pmatrix}.$$

Аналогично находим

$$\begin{aligned} P_{11} = Q_{\xi\eta}(0,0) = \det[ie_1, ie_3, b_3, b_4] + \det[ie_1, b_2, ie_2, b_4] + \\ + \det[b_1, ie_2, b_3, -ie_1] + \det[b_1, b_2, ie_3, -ie_1] + \det[-ie_4, ie_2, b_3, b_4] + \\ + \det[-ie_4, b_2, ie_3, b_4] + \det[b_1, ie_3, b_3, ie_4] + \det[b_1, b_2, ie_2\, ie_4], \end{aligned} \tag{2.18}$$

$$\begin{aligned} P_{02} = Q_{\eta\eta}(0,0) = \det[-ie_4, ie_3, b_3, b_4] + \det[-ie_4, b_2, b_3, -ie_1] + \\ + \det[-ie_4, b_2, ie_2, b_4] + \det[b_1, ie_3, ie_2, b_4] + \\ + \det[b_1, ie_3, b_3, -ie_1] + \det[b_1, b_2, ie_2, -ie_1]. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Коэффициенты при членах степени три в разложении $Q(\xi,\ \eta)$ вычисляются так:

$$P_{30} = \frac{1}{6} Q_{\xi\xi\xi}(0,0) = -i \cdot trB, \tag{2.20}$$

$$P_{21} = \frac{1}{2} Q_{\xi\xi\eta}(0,0) = \frac{3}{2} i\left(b_{23} + b_{32} + b_{41}\right), \tag{2.21}$$

$$P_{12} = \frac{1}{2} Q_{\xi\eta\eta}(0,0) = i \cdot trB, \tag{2.22}$$

$$P_{03} = \frac{1}{6} Q_{\eta\eta\eta}(0,0) = i\left(b_{14} + b_{41} - b_{23} - \frac{2}{3} b_{32} \right). \tag{2.23}$$

Коэффициенты при членах степени четыре в разложении $Q(\xi,\ \eta)$ равны:

$$P_{31} = \frac{1}{6} Q_{\xi\xi\xi\eta}(0,0) = 0, \quad P_{22} = \frac{1}{4} Q_{\xi\xi\eta\eta}(0,0) = -2, \quad P_{13} = \frac{1}{6} Q_{\xi\eta\eta\eta}(0,0) = 0. \tag{2.24}$$

Таким образом, определитель символа системы (2.10) имеет вид

$$Q(\xi,\ \eta) = R(\xi,\ \eta) + iS(\xi,\eta),$$

где

$$R(\xi,\eta) = \xi^4 - 2\xi^2\eta^2 + \eta^4 + P_{20}\xi^2 + P_{11}\xi\eta + P_{02}\eta^2 + P_{00},$$

$$S(\xi,\eta) = P_{30}\xi^3 + P_{21}\xi^2\eta + P_{12}\xi\eta^2 + P_{03}\eta^3 + P_{10}\xi + P_{01}\eta,$$

здесь коэффициенты P_{jk} определяются по формулам (2.12) – (2.24).

Множество точек (ξ,η), удовлетворяющих алгебраическим уравнениям

$$\xi^4 - 2\xi^2\eta^2 + \eta^4 + P_{20}\xi^2 + P_{11}\xi\eta + P_{02}\eta^2 + P_{00} = 0,$$

$$P_{30}\xi^3 + P_{21}\xi^2\eta + P_{12}\xi\eta^2 + P_{03}\eta^3 + P_{10}\xi + P_{01}\eta = 0$$

соответственно, обозначим символами Γ_1 и Γ_2.

Пусть $U(x,y)$ решение из пространства S' системы (2.10). Тогда носитель распределения $\hat{U}(\xi,\eta)$ содержится в множестве $\Gamma = \Gamma_1 \cap \Gamma_2$. Зная множе-

ство Г можно определить структуру носителя распределения $\hat{U}(\xi,\eta)$ и используя, например, теоремы о видах распределений с точечным носителем или с носителем на окружности (см. п. 1.2), можно найти $\hat{U}(\xi,\eta)$ и далее решение $U(x,y)$. Эту схему приведем на примере модельной системы.

2.3.2. Модельная гиперболическая система. Пусть в системе (2.10) матрица B является диагональной

$$B = diag[b_{11}, b_{22}, b_{33}, b_{44}]$$

и $b_{11} \neq b_{44}$ либо $b_{22} \neq b_{33}$. Тогда легко проверить, что матрицы A и B не являются перестановочными. Находя по формулам (2.12) – (2.24) коэффициенты P_{jk}, для определения множеств Γ_1 и Γ_2 имеем следующие уравнения соответственно

$$\xi^4 - 2\xi^2\eta^2 + \eta^4 + \alpha\xi^2 + \beta\eta^2 + \gamma = 0, \tag{2.25}$$

$$-\delta\xi^3 + \delta\xi\eta^2 + \varepsilon\xi = 0, \tag{2.26}$$

где

$$\alpha = -(b_{11}b_{22} + b_{11}b_{33} + b_{11}b_{44} + b_{22}b_{33} + b_{22}b_{44} + b_{33}b_{44}),$$

$$\beta = b_{11}b_{44} + b_{22}b_{33},$$

$$\gamma = b_{11}b_{22}b_{33}b_{44},$$

$$\delta = b_{11} + b_{22} + b_{33} + b_{44},$$

$$\varepsilon = b_{11}b_{22}b_{33} + b_{11}b_{22}b_{44} + b_{11}b_{33}b_{44} + b_{22}b_{33}b_{44}.$$

Уравнения (2.25), (2.26) показывают, что Γ_1 не пусто, симметрично относительно осей координат, может состоять из одной, двух, трёх, четырёх неограниченных кривых или нескольких точек, а Γ_2 содержит прямую $\xi = 0,$ симметрично относительно осей координат, может состоять из двух

кривых (прямых), может совпадать со всей плоскостью R^2. Отметим некоторые очевидные случаи:

1) если δ и ε не равны нулю, то Γ_2 является объединением прямой $\xi = 0$ и гиперболы $\xi^2 - \eta^2 = \varepsilon/\delta$;

2) если $\delta \neq 0$ и $\varepsilon = 0$, то Γ_2 является объединением трёх прямых $\xi = 0,\ \xi = \pm\eta$;

3) если $\delta = 0$ и $\varepsilon \neq 0$, то Γ_2 совпадает с прямой $\xi = 0$;

4) если $\delta = \varepsilon = 0$, то Γ_2 совпадает с плоскостью R^2.

Теперь изложим схему нахождения решений системы (2.10) из S'.

На множестве Г возьмем, например, две симметричные точки $\pm(\xi_0, \eta_0)$. Тогда $\hat{U}(\xi,\eta)$ будет иметь вид

$$\hat{U} = \sum_{\substack{j+k\le N\\ j,k\ge 0}} \left[c_{jk} \frac{\partial^{j+k}\delta(\xi-\xi_0,\eta-\eta_0)}{\partial\xi^j\partial\eta^k} + d_{jk} \frac{\partial^{j+k}\delta(\xi+\xi_0,\eta+\eta_0)}{\partial\xi^j\partial\eta^k} \right], \qquad (2.27)$$

где c_{jk}, d_{jk} – векторы размерности четыре, N – целое неотрицательное число. Используя обратное преобразование Фурье, с учётом формулы из [29, стр. 102], находим

$$U(x,y) = e^{i(\xi_0 x+\eta_0 y)}P(x,y) + e^{-i(\xi_0 x+\eta_0 y)}Q(x,y), \qquad (2.28)$$

где P, Q – многочлены степени N.

Находя частные производные U_x, U_y и подставляя в систему (2.10), получим:

$$\begin{aligned}
&e^{i(\xi_0 x+\eta_0 y)}(i\xi_0 P(x,y)+P_x) + e^{-i(\xi_0 x+\eta_0 y)}(-i\xi_0 Q(x,y)+Q_x) + \\
&+ A(e^{i(\xi_0 x+\eta_0 y)}(i\eta_0 P(x,y)+P_y) + e^{-i(\xi_0 x+\eta_0 y)}(-i\eta_0 Q(x,y)+Q_y)) + \\
&+ B\left(e^{i(\xi_0 x+\eta_0 y)}P(x,y) + e^{-i(\xi_0 x+\eta_0 y)}Q(x,y)\right) = 0.
\end{aligned}$$

Отсюда приравняв к нулю коэффициенты при экспонентах, получим следующую систему:

$$\begin{cases} i\xi_0 P + P_x + A(i\eta_0 P + P_y) + BP = 0, \\ -i\xi_0 Q + Q_x + A(-i\eta_0 Q + Q_y) + BQ = 0. \end{cases} \tag{2.29}$$

Многочлены P и Q запишем в виде суммы однородных многочленов $P_j = \sum_{k=0}^{j} p_{jk} x^k y^{j-k}$, $Q_j = \sum_{k=0}^{j} q_{jk} x^k y^{j-k}$, $j = \overline{0, N}$, p_{jk}, q_{jk} – векторы размерности четыре и подставим в систему (1.31):

$$\sum_{j=0}^{N} (i\xi_0 P_j + \frac{\partial P_j}{\partial x} + i\eta_0 A P_j + A\frac{\partial P_j}{\partial y} + BP_j) = 0, \tag{2.30}$$

$$\sum_{j=0}^{N} (-i\xi_0 Q_j + \frac{\partial Q_j}{\partial x} - i\eta_0 A Q_j + A\frac{\partial Q_j}{\partial y} + BQ_j) = 0. \tag{2.31}$$

Рассмотрим уравнение (2.30). Откуда для P_N получим соотношение

$$(i\eta_0 A + i\xi_0 E_4 + B)P_N = 0.$$

Тогда уравнение (2.30) примет вид

$$\sum_{j=0}^{N-1} (i\eta_0 A + i\xi_0 E_4 + B)P_j + \sum_{j=0}^{N} (\frac{\partial P_j}{\partial x} + A\frac{\partial P_j}{\partial y}) = 0.$$

Здесь во второй сумме заменяя j на $j+1$, с учетом того что P_0 постоянный вектор, имеем

$$\sum_{j=0}^{N-1} \left((i\eta_0 A + i\xi_0 E_4 + B)P_j + \frac{\partial P_{j+1}}{\partial x} + A\frac{\partial P_{j+1}}{\partial y} \right) = 0.$$

Отсюда получим соотношения

$$(i\xi_0 E_4 + i\eta_0 A + B)P_j + \frac{\partial P_{j+1}}{\partial x} + A\frac{\partial P_{j+1}}{\partial y} = 0, \; j = \overline{0, N-1}. \tag{2.32}$$

Из уравнения (2.32) следует, что

$$(i\xi_0 E_4 + i\eta_0 A + B)p_{Nk} = 0.$$

Определитель Δ матрицы $D = i\xi_0 E_4 + i\eta_0 A + B$ этой СЛАУ равен нулю и так как эта система однородная, то у неё есть ненулевые решения.

Теперь рассмотрим уравнение (2.32) в случае $j=N-1$:

$$(i\xi_0 E_4 + i\eta_0 A + B)P_{N-1} + \frac{\partial P_N}{\partial x} + A\frac{\partial P_N}{\partial y} = 0,$$

или

$$(i\xi_0 E_4 + i\eta_0 A + B)P_{N-1} = -\frac{\partial P_N}{\partial x} - A\frac{\partial P_N}{\partial y}.$$

Подставим выражения для P_{N-1} и P_N:

$$\sum_{k=0}^{N-1}(i\xi_0 E_4 + i\eta_0 A + B)p_{N-1,k}x^k y^{N-1-k} =$$

$$= -\sum_{k=0}^{N} k p_{N,k} x^{k-1} y^{N-k} - \sum_{k=0}^{N}(N-k)Ap_{N,k}x^k y^{N-1-k}.$$

В первой сумме правой части отбросим первое слагаемое, а во второй – последнее (они равны нулю) и заменяя в первой сумме k на $k+1$, получим следующее равенство

$$\sum_{k=0}^{N-1}(i\xi_0 E_4 + i\eta_0 A + B)p_{N-1,k}x^k y^{N-1-k} =$$

$$= -\sum_{k=0}^{N-1}\Big((k+1)p_{N,k+1} + (N-k)Ap_{N,k}\Big)x^k y^{N-1-k}.$$

Приравнивая соответствующие коэффициенты при $x^k y^{N-1-k}$, получим неоднородную систему линейных алгебраических уравнений с неизвестными $p_{N-1,k}$:

$$(i\xi_0 E_4 + i\eta_0 A + B)p_{N-1,k} = -(N-k)Ap_{Nk} - (k+1)p_{N,k+1}, \quad k = \overline{0, N-1}.$$

Так как $\Delta = 0$, то нужно требовать условие разрешимости этой системы, т.е. правая часть должна быть ортогональной всем решениям союзной однородной системы. В силу этого на p_{Nk} возникают дополнительные условия и они зависят от ранга матрицы *D*.

Далее рассматривая уравнение (2.32) при $j=N-2$, и повторяя выше проведенные выкладки и умозаключения можно показать, что на вектора $p_{N-1,k}$ нужно накладывать дополнительные ограничения.

Продолжая эту процедуру, можно сделать вывод, что при каждом $j=0,1,...,N,$ для всех $k=0,1,...,N$ одна (в случае $rangD=3$) или две (в случае $rangD=2$) координаты вектора p_{jk} будут произвольными.

Аналогичным образом исследуется уравнение (2.31) и при определении векторов $q_{j,k}$ при каждом $j=0,1,...,N,$ для всех $k=0,1,...,N$ одна или две координаты будут произвольными.

Таким образом, многообразие полученных решений системы (2.10) для каждого значения N имеет размерность $2(N+1)$ или $4(N+1)$.

2.4. О решениях систем четырех уравнений с частными производными в пространстве Шварца

В параграфах 2.2 и 2.3 были исследованы модельные системы четырех у.ч.п. и был изложен метод нахождения многообразия решений из пространства $S' = S'(R^2)$. Теперь рассмотрим общую систему вида

$$W_x + PW_y + QW = 0, \tag{2.33}$$

где $W \in R^4$, P, Q – действительные квадратные матрицы четвертого порядка. Для этой системы исследуется задача о решениях, принадлежащих пространству S'. Задачи нахождения решений систем у.ч.п. в конкретных пространствах, являются одной из актуальных задач, они рассмотрены в работах Л. Хёрмандера, В.С. Виноградова, Д. Сафарова, С. Байзаева и др. (см [3], [26], [78], [98]). В работах С. Байзаева и Д.А. Воситовой [6], [7] рассмотрены двухмерные системы вида (2.33) и установлено, что в случае эллиптичности системы пространство решений, имеющих рост на бесконечности не выше степенного является конечномерным.

Нами при помощи компьютерного моделирования обнаружено, что для четырёхмерных систем вида (2.33) эллиптического типа выше указанное пространство может быть бесконечномерным. Приведем соответствующий пример.

Пусть в системе (2.33)

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Найдем собственные значения матрицы P, используя лемму 2.3. Имеем

$$\det(P - \lambda E_4) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} =$$

$$\det\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = \det\left[\lambda^2 E_2 - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \det\begin{pmatrix} \lambda^2 & -1 \\ 1 & \lambda^2 \end{pmatrix} = \lambda^4 + 1 = 0.$$

Отсюда получаем, что собственные значения равны корню четвертой степени от -1, т.е.

$$\lambda_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i),\ \lambda_{3,4} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i).$$

Поэтому в данном примере система (2.33) является эллиптической.

Проверим, что вектор-функции

$$U(x,y) = e^{i(\xi x+\eta y)}p + e^{-i(\xi x+\eta y)}q, \tag{2.34}$$

где $(\xi,\eta)-$ точка кривой Γ:

$$\xi^4 + \eta^4 - \xi^2 + 9\eta^2 - 2 = 0, \tag{2.35}$$

$p,q-$векторы, удовлетворяющие соотношениям

$$\begin{aligned} &(i\xi E_4 + i\eta P + Q)p = 0, \\ &(i\xi E_4 + i\eta P - Q)q = 0, \end{aligned} \tag{2.36}$$

являются решениями системы (2.33).

Действительно, в силу (2.36) имеем

$$\begin{aligned} &U_x + PU_y + QU = i\xi e^{i(\xi x+\eta y)}p - i\xi e^{-i(\xi x+\eta y)}q + \\ &+ P\left(i\eta e^{i(\xi x+\eta y)}p - i\eta e^{-i(\xi x+\eta y)}q\right) + Q\left(e^{i(\xi x+\eta y)}p + e^{-i(\xi x+\eta y)}q\right) = \\ &= e^{i(\xi x+\eta y)}(i\xi E + i\eta P + Q)p - e^{-i(\xi x+\eta y)}(i\xi E + i\eta P - Q)q = 0. \end{aligned}$$

Остается показать, что существуют ненулевые векторы p,q, удовлетворяющие соотношениям (2.36).

Используя лемму 2.3 вычислим определитель матрицы $S = i\xi E_4 + i\eta P + Q$:

$$\det S = \det\begin{pmatrix} i\xi+1 & 0 & i\eta-1 & -2 \\ 0 & i\xi+1 & 1 & -i\eta+2 \\ 2 & i\eta+1 & i\xi-1 & 0 \\ i\eta+2 & 1 & 0 & i\xi-1 \end{pmatrix} =$$

$$= \det\left[\begin{pmatrix} i\xi+1 & 0 \\ 0 & i\xi+1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} i\xi-1 & 0 \\ 0 & i\xi-1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} i\eta-1 & -2 \\ 1 & -i\eta+2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & i\eta+1 \\ i\eta+2 & 1 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \det\begin{pmatrix} -\xi^2+5 & \eta^2+3 \\ -\eta^2-6 & -\xi^2-4 \end{pmatrix} = \xi^4 + \eta^4 - \xi^2 + 9\eta^2 - 2 = 0,$$

в силу (2.35).

Аналогично можно вычислить определитель матрицы $T = i\xi E_4 + i\eta P - Q$:

$$\det T = 0.$$

Итак, определители матриц S и T равны нулю, поэтому существуют ненулевые векторы p, q, удовлетворяющие соотношениям (2.35).

Таким образом, семейство ограниченных функций вида (2.34) удовлетворяют системе (2.33), поэтому пространство решений, имеющих рост на бесконечности не выше степенного этой системы является бесконечномерным.

В связи с этим представляется важным исследование задачи о решениях системы (2.33), имеющих рост на бесконечности не выше степенного.

Вначале рассмотрим случай

$$P = \begin{pmatrix} 0 & A_1 \\ A_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$$

где A_i, B_j – матрицы второго порядка (i=1,2; j=1, 2, 3, 4). В этом случае систему (2.33) можно записать в следующем виде :

$$\begin{cases} U_x + A_1 V_y + B_1 U + B_2 V = 0, \\ V_x + A_2 U_y + B_3 U + B_4 V = 0, \end{cases} \tag{2.37}$$

где $U,V \in R^2$, $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = W$.

Применяя к системе (2.37) преобразование Фурье, получим систему функциональных уравнений

$$\begin{cases} i\xi \hat{U}(\xi,\eta) + i\eta A_1 \hat{V}(\xi,\eta) + B_1 \hat{U}(\xi,\eta) + B_2 \hat{V}(\xi,\eta) = 0, \\ i\xi \hat{V}(\xi,\eta) + A_2 \hat{U}(\xi,\eta) + B_3 \hat{U}(\xi,\eta) + B_4 \hat{V}(\xi,\eta) = 0, \end{cases}$$

которая равносильна следующей системе

$$\begin{cases} (i\xi E_2 + B_1)\hat{U} + (i\eta A_1 + B_2)\hat{V} = 0, \\ (i\eta A_2 + B_3)\hat{U} + (i\xi E_2 + B_4)\hat{V} = 0, \end{cases} \tag{2.38}$$

где $\hat{U} = FU, \hat{V} = FV$, i- мнимая единица и F преобразование Фурье на плоскости, $(\xi,\eta) \in R^2$.

Система (2.38) – это система линейных алгебраических уравнений отросительно неизвестных $\hat{U}, \hat{V}$ с матричными переменными коэффициентами. Матрица коэффициентов этой системы следующая:

$$M = \begin{pmatrix} i\xi E_2 + B_1 & i\eta A_1 + B_2 \\ i\eta A_2 + B_3 & i\xi E_2 + B_4 \end{pmatrix}.$$

Введём обозначения

$$A = A_1 A_2,\ B = B_1 B_4 - B_2 B_3,\ C = B_1 + B_4,\ D = A_1 B_3 + B_2 A_2 \tag{2.39}$$

и пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 \\ d_3 & d_4 \end{pmatrix}. \tag{2.40}$$

Предположим, что матрица B_1 (или B_3) с матрицамы A_1 и B_2 (или A_1 и B_4) коммутируемы. Тогда определитель матрицы M с учётом леммы 2.3 вычисляется так:

$$\det M = \det\begin{pmatrix} i\xi E_2 + B_1 & i\eta A_1 + B_2 \\ i\eta A_2 + B_3 & i\xi E_2 + B_4 \end{pmatrix} =$$

$$= \det\left(\left(i\xi E_2 + B_1\right)\left(i\xi E_2 + B_4\right) - \left(i\eta A_1 + B_2\right)\left(i\eta A_2 + B_3\right)\right) =$$

$$= \det\left(-\xi^2 E_2 + i\xi\left(B_1 + B_4\right) + B_1 B_4 + \eta^2 A_1 A_2 - i\eta\left(A_1 B_3 + B_2 A_2\right) - B_2 B_3\right).$$

Используются обозначения (2.39), последнее равенство перепишем в виде

$$\det M = \det\left(-\xi^2 E + \eta^2 A + B + i\xi C - i\eta D\right).$$

Далее учитывая формулы (2.40), имеем

$$\det M = \det\begin{bmatrix} -\xi^2 + \eta^2 a_1 + b_1 + i\xi c_1 - i\eta d_1 & \eta^2 a_2 + b_2 + i\xi c_2 - i\eta d_2 \\ \eta^2 a_3 + b_3 + i\xi c_3 - i\eta d_3 & -\xi^2 + \eta^2 a_4 + b_4 + i\xi c_4 - i\eta d_4 \end{bmatrix}$$

или

$$\det M = \xi^4 - trA\xi^2\eta^2 + \det A\eta^4 - [trB + \det C)]\xi^2 + \alpha_1\xi\eta + \beta_1\eta^2 + \det B -$$
$$- i(trC\xi^3 - trD\xi^2\eta + \alpha_2\xi\eta^2 + \beta_2\eta^3 + \alpha_3\xi + \beta_3\eta),$$

где

$$\alpha_1 = c_1 d_4 + c_4 d_1 - c_2 d_3 - c_3 d_2,$$

$$\beta_1 = a_1 b_4 + a_4 b_1 - a_2 b_3 - a_3 b_2 - \det D,$$

$$\alpha_2 = a_2 c_3 + a_3 c_2 - a_1 c_4 - a_4 c_1,$$

$$\beta_2 = a_1 d_4 + a_4 d_1 - a_2 d_3 - a_3 d_2,$$

$$\alpha_3 = b_2 c_3 + b_3 c_2 - b_1 c_4 - b_4 c_1,$$

$$\beta_3 = b_1 d_4 + b_4 d_1 - b_2 d_3 - b_3 d_2.$$

Система (2.38) являются однродной и критерием существования ненулевого решения этой системы является условие: $\det M = 0$. Это равенство эквивалентно следующим двум равенствам:

$$\xi^4 - trA\xi^2\eta^2 + \det A\eta^4 - [trB + \det C)]\xi^2 + \alpha_1\xi\eta + \beta_1\eta^2 + \det B = 0, \qquad (2.41)$$

$$trC\xi^3 - trD\xi^2\eta + \alpha_2\xi\eta^2 + \beta_2\eta^3 + \alpha_3\xi + \beta_3\eta = 0. \qquad (2.42)$$

Проанализируем множество решений системы уравнений (2.41), (2.42). Через Γ_1 и Γ_2 обозначим множество решений этих уравнений, а через Γ - множество решений системы (2.41), (2.42), т. е. $\Gamma = \Gamma_1 \cap \Gamma_2$.

Очевидно, что множество Γ_1 симметрично относительно начало координат (при $\alpha_1 = 0$ относительно координатных осей) и является кривой четвертого порядка, а множество Γ_2 в общем случае – есть кривая третьего порядка и проходит через начало координат.

Проведенный нами теоретический анализ и компютерное моделирование показало, что геометрическое представление множества Γ_1 могут быть такими:

а) эллипсообразная кривая, с центром в начале координат (рисунок 1);

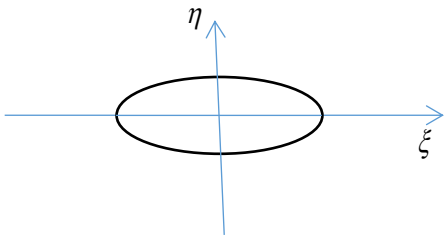

Рисунок 1. Г1 - эллипсообразная кривая

б) две эллипсообразные кривые, симметричине относительно оси ξ или оси η (рисунки 2, 3):

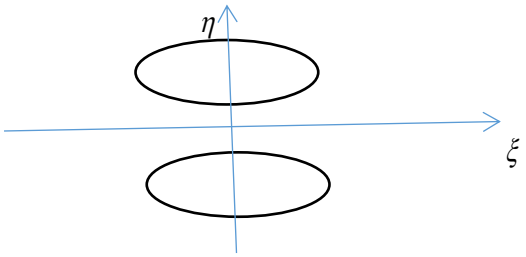

Рисунок 2. Г1 – две эллипсообразные кривые, симметричине относительно оси ξ

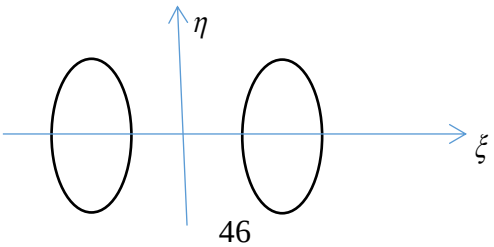

Рисунок 3. Г1 – две эллипсообразные кривые, симметричине относительно оси η

в) петля вида восьмерки (см. Пример 2).

Геометрическое представление множества Γ_2 могут быть такими:

а) распложенная симметрично относительно точки О эллипсообразная кривая (рисунок 1);

б) распложенная симметрично относительно относительно оси ξ или η кривая, подобная гиперболе (рисунки 4, 5);

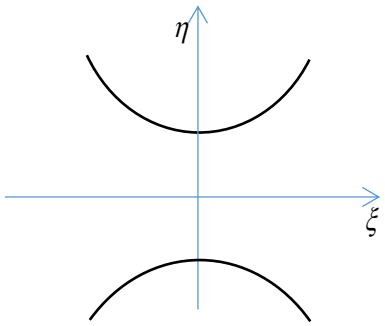

Рисунок 4. Г2 – гиперболическая кривая, симметричная относительно оси ξ

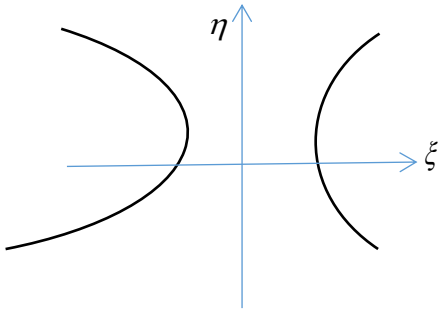

Рисунок 5. Г2 – гиперболическая кривая, симметричная относительно оси η

г) две прямые или одна точка.

Отметим, что перечисленные картинки охватывают не все случаи, например возможен случай когда $\Gamma_2 = R^2$ или Γ_2 состоит из объединения прямой, проходяшей через точку О и окружности с центром в начале координат.

Для ряда этих случаев приведем конкретные примеры.

Пример 1. Пусть $P = A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $Q = B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Отметим, что в этом примере система (2.33) будет гиперболической и матрицы P и Q не являются перестановочными. В этом случае уравнения Γ_1 и Γ_2 соответственно будут иметь вид:

$$\xi^4 + \eta^4 - 2\xi^2\eta^2 + 9\xi^2 - \eta^2 - 20 = 0,$$

$$\xi^2\eta - \eta^3 - 2\eta = 0.$$

Геометрическое представление следующее:

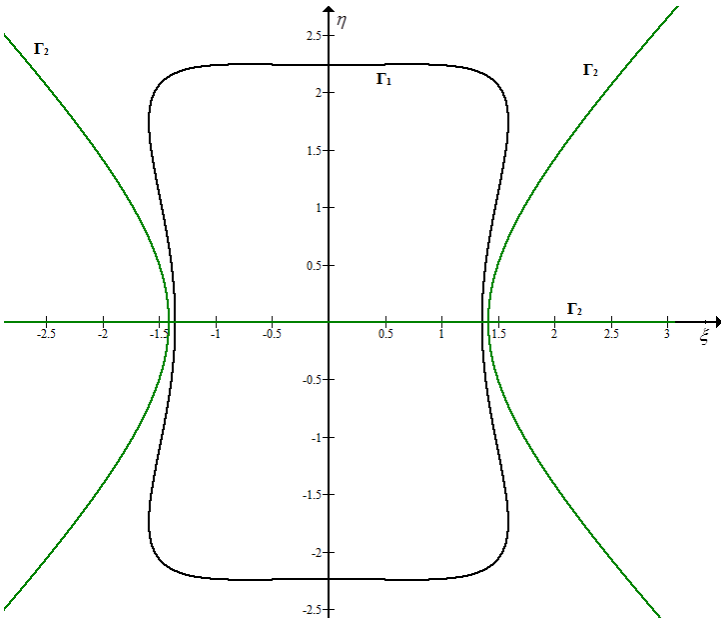

Рисунок 6. Кривые Г₁ и Г₂ для примера 1

Множество Γ состоит из 2 точек.

Пример 2. Пусть $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -6 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Отметим, что в этом примере система (2.33) будет эллиптической и матрицы P и Q не являются перестановочными. В этом случае уравнения Γ_1 и Γ_2 соответственно будут иметь вид:

$$\xi^4 + \eta^4 + 2\xi^2\eta^2 + 24\xi^2 - 16\eta^2 - 8\xi\eta = 0,$$

$$\xi^3 + \eta^2\xi + 20\xi - 4\eta = 0.$$

Геометрическое представление следующее:

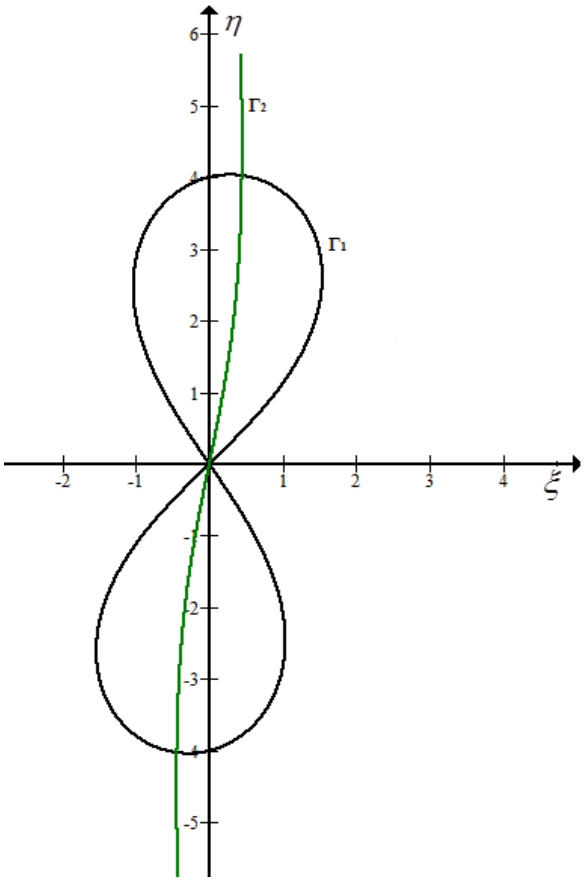

Рисунок 7. Кривые Г₁ и Г₂ для примера 2

Множество Γ состоит из 3 точек.

Пример 3. Пусть $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Отметим, что в этом примере система (2.33) будет составного типа и матрицы P и Q не являются перестановочными. В этом случае уравнения Γ_1 и Γ_2 соответственно будут иметь вид:

$$\xi^4 - \eta^4 - 40\xi^2 + 144 = 0,$$

$$\eta^3 - \xi^2\eta + 12\eta = 0.$$

Геометрическое представление следующее:

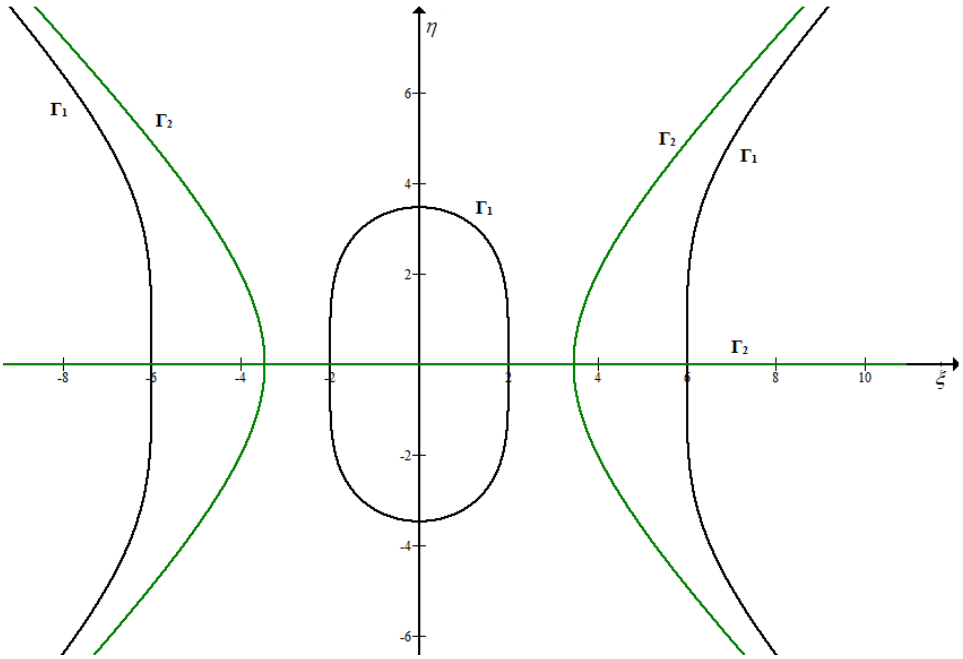

Рисунок 8. Кривые Г₁ и Г₂ для примера 3

Множество Γ состоит из 4 точек.

Пересечение множеств Γ_1 и Γ_2, т.е. множество Γ является множеством решений системы (2.41) и (2.42) . В примере 1 множество Γ состоит из 2 точек, в примере 2 – из 3 точек, а в премере 3 – из 4 точек. В примере, приведённом в начале параграфа множество Γ_1 эта кривая $\xi^4+\eta^4-\xi^2+9\eta^2-2=0,$ а множество Γ_2 совпадает с плоскостью R^2, поэтому $\Gamma=\Gamma_1.$

Отметим, что кроме случая $\Gamma_2=R^2$ и когда кривые Γ_1 и Γ_2 не имеют общих компонент, то как следует из теории алгебра ических кривых (см. [92], стр. 75) множество Γ конечное и может состоять максимум из 12 точек.

Носитель обобщенной вектор-функции $\omega(\xi,\eta)=\begin{pmatrix}\hat{U}(\xi,\eta)\\ \hat{V}(\xi,\eta)\end{pmatrix}$ есть множество Γ. В зависимости от структуры этого множества, вектор-функция $\omega(\xi,\eta)$ определяется соответствующими формулами.

Например, если Γ являются точкой (ξ_0, η_0), то согласно формуле представления распределения с носителем из одной точки, вектор-функция $\omega(\xi,\eta)$ пишется по следующей формуле:

$$\omega(\xi,\eta) = \sum_{k,\, j\geq 0,\, k+j\leq m} C_{kj} \frac{\partial^{k+j}\delta(\xi-\xi_0,\, \eta-\eta_0)}{\partial\xi^k \partial\eta^j},$$

где $C_{kj} \in R^4$, $\delta -$ функция Дирака.

Также в случае, когда Γ– окружность, используя вторую формулу из §2.1 получим, что вектор-функция $\omega = (\xi,\eta)$ имеет вид :

$$\omega(\xi,\eta) = \sum_{k=0}^{N} (c_k(\theta) \times \delta^{(k)}(r-r_0), \psi(r,\theta)), \tag{2.43}$$

где

$(\xi,\eta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$, $\psi(r,\theta) = \varphi(re^{i\theta})$, $r > 0$, $\varphi \in D$,

$c_k(\theta) - 2\pi$-периодические обобщенные функции.

После определения вектор-функции $\omega(\xi,\eta)$, решения системы (2.33) можно определить по формуле $W(x,y) = F^{-1}\omega(\xi,\eta)$, $F^{-1} -$ обратное преобразование Фурье.

Аналогичным образом рассматривается случай

$$P = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix},\ Q = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}.$$

Для этого случая предложим пример, для которого используется формула (2.43).

Пусть

$$P = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & -A_1 \end{pmatrix},\ Q = \begin{pmatrix} 0 & B_2 \\ B_3 & 0 \end{pmatrix},\ B_2 = E_2,\ B_3 = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix},$$

причем

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix},\ a_1 + a_4 = 0,\ a_1^2 + a_2 a_3 = -1.$$

Тогда согласно лемме 2.3 имеем

$$\det M = \det\left[i\xi E_4 + i\eta \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & -A_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & B_2 \\ B_3 & 0 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \det\begin{pmatrix} i\xi E_2 + i\eta A_1 & E_2 \\ B_3 & i\xi E_2 - i\eta A_1 \end{pmatrix} = \det\left(-\xi^2 E_2 + \eta^2 A_1^2 - B_3\right).$$

Далее учитывая структуру матриц A_1 и B_3, нетрудно получить, что

$$\det M = (\xi^2 + \eta^2)^2 + (b_1 + b_4)(\xi^2 + \eta^2) + \det B_3.$$

Множество Γ равняется множеству точек (ξ, η), для которых

$$(\xi^2 + \eta^2)^2 + (b_1 + b_4)(\xi^2 + \eta^2) + \det B_3 = 0. \qquad (2.44)$$

Если $\det B_3 < 0$, то уравнение

$$\lambda^2 + (b_1 + b_4)\lambda + \det B_3 = 0$$

имеет одно положительное и одно отрицательное решение:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(-b_1 - b_4 + \sqrt{D}) > 0, \qquad \lambda_2 = \frac{1}{2}(-b_1 - b_4 - \sqrt{D}) < 0,$$

где

$$D = (b_1 + b_4)^2 - 4\det B_3 > 0.$$

Поэтому в этом случае уравнение (2.44) относительно $\xi^2 + \eta^2$ имеет одно решение

$$\xi^2 + \eta^2 = \lambda_1,$$

и множество Γ – окружность с центром в начале координат, радиуса $\sqrt{\lambda_1}$. Если $\det B_3 > 0$ и $D > 0$, то при $b_1 + b_4 < 0$ множество Γ состоит из двух окружностей с центрамы в начале координат и радиусами $\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}$, а при $b_1 + b_4 \geq 0$ будет пустым. Наконец, если $\det B_3 = 0$, то при $b_1 + b_4 < 0$ множество Γ состоит из точки 0 и окружности с центром в начале координат и радиуса $\sqrt{\lambda_1}$, а при $b_1 + b_4 \geq 0$ будет пустым.

Таким образом, для данного примера, чтобы найти решения из S' нужно поступить следующим образом:

- при $\det B_3 < 0$ или $\det B_3 > 0,\ D > 0,\ b_1 + b_4 < 0$ нужно использовать формулу (2.43);

- при $\det B_3 > 0,\ D > 0,\ b_1 + b_4 > 0$ или $\det B_3 = 0,\ b_1 + b_4 \geq 0$ данное уравнение не имеет ненулевых решений

при $\det B_3 = 0$ и $b_1 + b_4 < 0$ нужно использовать формулу (2.43) и представление обобщенной функции с очечным носителем.

В связи с выше изложенным, справедлива ниже приводимая теорема о представлении решений из S' системы

$$U_x + \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & -A_1 \end{pmatrix} U_y + \begin{pmatrix} 0 & E_2 \\ B_3 & 0 \end{pmatrix} = 0 \qquad (2.45)$$

где

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix},\ \textit{причем}\ a_1 + a_4 = 0,\ a_1^2 + a_2 a_3 = -1$$

$$B_3 = (b_{ij})$$

Теорема 2.4. *1) При* $\det B_3 < 0$ *решение системы (2.45) имеет вид*

$$U(x, y) = F^{-1}\omega,$$

где ω *определяется по формуле (2.43), в которой* $r_0 = \sqrt{\lambda_1}$;

2) При $\det B_3 > 0$ *и* $D > 0$, *если* $b_1 + b_4 < 0$, *то*

$$U(x, y) = F^{-1}(\omega_1 + \omega_2),$$

где ω_1, ω_2 *определяются по формуле (2.43) с* $r_0 = \sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}$, *соответственно, а если же* $b_1 + b_4 \geq 0$, *то система (2.45) в* S' *не имеет нулевых решений;*

3) При $\det B_3 = 0$, *если* $b_1 + b_4 < 0$, *то*

$$U(x, y) = F^{-1}(\omega_0 + \omega_1),$$

где ω_0 *– распределение с носителем в точке 0, а если же* $b_1 + b_4 \geq 0$, *то система (2.45) не имеет в* S' *ненулевых решений.*

Теперь рассмотрим общий случай системы (2.33)

$$W_x + AW_y + BW = 0, \qquad (2.46)$$

где $W \in R^4$, *A, B* – действительные квадратные матрицы четвертого порядка. Будем использовать запись матриц в следующем виде

$$A = [a_1, a_2, a_3, a_4],\ B = [b_1, b_2, b_3, b_4],\ E_4 = [e_1, e_2, e_3, e_4],$$

где через a_j, b_j, e_j обозначены столбцы матриц A, B, E_4 соответственно. Тогда символ системы (2.46) запишется так

$$P(\xi,\eta) = i\xi E_4 + i\eta A + B =$$

$$= i\xi[e_1, e_2, e_3, e_4] + i\eta[a_1, a_2, a_3, a_4] + [b_1, b_2, b_3, b_4] =$$

$$= [i\xi e_1 + i\eta a_1 + b_1, i\xi e_2 + i\eta a_2 + b_2, i\xi e_3 + i\eta a_3 + b_3, i\xi e_4 + i\eta a_4 + b_4].$$

Поэтому

$$\det P(\xi,\ \eta) = \det[\xi e_1 + \eta a_1 - ib_1, \xi e_2 + \eta a_2 - ib_2, \xi e_3 + \eta a_3 - ib_3, \xi e_4 + \eta a_4 - ib_4],$$

здесь мы использовали четность порядка символа *P*.

Мы должны изучать уравнение вида

$$\det[\xi e_1 + \eta a_1 - ib_1, \xi e_2 + \eta a_2 - ib_2, \xi e_3 + \eta a_3 - ib_3, \xi e_4 + \eta a_4 - ib_4] = 0 \qquad (2.47)$$

с переменными $(\xi,\ \eta)$. Если вычислить левую часть этого уравнения, то получим

$$Q(\xi,\ \eta) \equiv \det P(\xi,\eta) = \xi^4 + P_{31}\xi^3\eta + P_{22}\xi^2\eta^2 + P_{13}\xi\eta^3 + P_{04}\eta^4 + P_{30}\xi^3 + P_{21}\xi^2\eta +$$
$$+ P_{12}\xi\eta^2 + P_{03}\eta^3 + P_{20}\xi^2 + P_{11}\xi\eta + P_{02}\eta^2 + P_{10}\xi + P_{01}\eta + P_{00},$$

где P_{jk} – коэффициенты, подлежащие определению. Учитывая равенства

$$Q(0,0) = \det B,\ Q(0,\eta) = \det[\eta A - iB] = \eta^4 \det\left[A - \frac{i}{\eta}B\right],\ \eta \neq 0,$$

имеем

$$P_{00} = \det B;\ P_{04} = \det A. \tag{2.48}$$

Далее используя правило дифференцирования определителей, имеем

$$\begin{aligned} Q_\xi(\xi,\eta) = {} & \det[e_1, e_2\xi + a_2\eta - ib_2,\ e_3\xi + a_3\eta - ib_3,\ e_4\xi + a_4\eta - ib_4] + \\ & + \det[e_1\xi + a_1\eta - ib_1, e_2,\ e_3\xi + a_3\eta - ib_3,\ e_4\xi + a_4\eta - ib_4] + \\ & + \det[e_1\xi + a_1\eta - ib_1, e_2\xi + a_2\eta - ib_2,\ e_3,\ e_4\xi + a_4\eta - ib_4] + \\ & + \det[e_1\xi + a_1\eta - ib_1, e_2\xi + a_2\eta - ib_2,\ e_3\xi + a_3\eta - ib_3,\ e_4], \end{aligned}$$

тогда

$$\begin{aligned} P_{10} = Q_\xi(0,0) = {} & \det[e_1, -ib_2,\ -ib_3,\ -ib_4] + \det[-ib_1, e_2,\ -ib_3,\ -ib_4] + \\ & \det[-ib_1, -ib_2,\ e_3,\ -ib_4] + \det[-ib_1, -ib_2,\ -ib_3,\ e_4] = \\ = {} & \det[ie_1, b_2,\ b_3,\ b_4] + \det[b_1, ie_2,\ b_3,\ b_4] + \\ & \det[b_1, b_2,\ ie_3,\ b_4] + \det[b_1, b_2, b_3,\ ie_4]. \end{aligned} \tag{2.49}$$

Используя теорему Лапласа, нетрудно уследить, что правая часть этого равенства представляет собою сумму главных миноров третьего порядка (см. [46], стр. 41) матрицы B, умноженную на i , поэтому

$$P_{10} = i \sum_{1 \le j_1 < j_2 < j_3 \le 4} B \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_1 & j_2 & j_3 \end{pmatrix}. \tag{2.50}$$

Аналогично находим

$$\begin{aligned} P_{01} = Q_\eta(0,0) = {} & \det[ia_1, b_2,\ b_3,\ b_4] + \det[b_1, ia_2,\ b_3, b_4] + \\ & \det[b_1, b_2,\ ia_3,\ b_4] + \det[b_1, b_2,\ b_3,\ ia_4]. \end{aligned} \tag{2.51}$$

Правая часть этой формулы составляется так: в матрице B столбец j заменяем на столбец ia_j и просуммируем полученные четыре определителя. С помощью формулы Коши-Бине (см. [46], стр. 41) легко установить, что

$$P_{01} = i \sum_{k,\,j=1}^{4} (-1)^{k+j} a_{kj} B_{kj}^{(3)} \tag{2.52}$$

где $B_{kj}^{(3)}$ – миноры третьего порядка матрицы B.

Коэффициенты при квадратичных членах в разложении $Q(\xi, \eta)$ вычисляем точно также:

$$P_{20} = \frac{1}{2} Q_{\xi\xi}(0,0) = \det[ie_1, ie_2, b_3, b_4] + \det[ie_1, b_2, ie_3, b_4] + \det[ie_1, b_2, b_3, ie_4] + \det[b_1, ie_2, ie_3, b_4] + \det[b_1, ie_2, b_3, ie_4] + \det[b_1, b_2, ie_3\, ie_4], \tag{2.53}$$

$$P_{11} = Q_{\xi\eta}(0,0) = \det[ie_1, ia_2, b_3, b_4] + \det[ie_1, b_2, b_3, ia_4] + \det[ie_1, b_2, ia_3, b_4] + \det[b_1, ia_2, ie_3, b_4] + \det[b_1, ie_2, b_3, ia_4] + \det[b_1, b_2, ie_3, ia_4] + \det[ia_1, ie_2, b_3, b_4] + \det[ia_1, b_2, b_3, ie_4] + \det[ia_1, b_2, ie_3, b_4] + \det[b_1, ie_2, ia_3, b_4] + \det[b_1, ia_2, b_3, ie_4] + \det[b_1, b_2, ia_3\, ie_4], \tag{2.54}$$

$$P_{02} = Q_{\eta\eta}(0,0) = \det[ia_1, ia_2, b_3, b_4] + \det[ia_1, b_2, b_3, ia_4] + \det[ia_1, b_2, ia_3, b_4] + \det[b_1, ia_2, ia_3, b_4] + \det[b_1, ia_2, b_3, ia_4] + \det[b_1, b_2, ia_3, ia_4]. \tag{2.55}$$

Правые части этих формул составляются так:

для P_{20} в матрице B столбцы j и k заменяем на столбцы ie_j и ie_k соответственно и вычислим сумму полученных шести определителей; другими словами, находим сумму главных миноров второго порядка матрицы B и результат умножим на (– 1):

$$P_{20} = -\sum_{1 \le j_1 < j_2 \le 4} B\begin{pmatrix} j_1 & j_2 \\ j_1 & j_2 \end{pmatrix}.$$

для P_{11} в матрице B столбцы j и k заменяем на столбцы ie_j и ia_k соответственно и просуммируем полученные 12 определителей;

для P_{02} в матрице B столбцы j и k заменяем на столбцы ia_j и ia_k соответственно и вычислим сумму полученных шести определителей.

Коэффициенты при членах степени три в разложении $Q(\xi, \eta)$ вычисляются так:

$$P_{30} = \frac{1}{6} Q_{\xi\xi\xi}(0,0) = -itrB, \tag{2.56}$$

$$P_{21}=\frac{1}{2}Q_{\xi\xi\eta}(0,0)=-i\{\det[e_1,e_2,a_3,b_4]+\det[e_1,e_2,b_3,a_4]+\det[e_1,a_2,e_3,b_4]+$$
$$+\det[e_1,b_2,e_3,a_4]+\det[e_1,a_2,b_3,e_4]+\det[e_1,b_2,a_3,e_4]+$$
$$+\det[a_1,e_2,e_3,b_4]+\det[b_1,e_2,e_3,a_4]+\det[a_1,e_2,b_3,e_4]+ \qquad (2.57)$$
$$+\det[b_1,e_2,a_3,e_4]+\det[a_1,b_2,e_3,e_4]+\det[b_1,a_2,e_3,e_4]\},$$

$$P_{12}=\frac{1}{2}Q_{\xi\eta\eta}(0,0)=-i\{\det[a_1,a_2,e_3,b_4]+\det[a_1,a_2,b_3,e_4]+\det[a_1,e_2,a_3,b_4]+$$
$$+\det[a_1,b_2,a_3,e_4]+\det[a_1,e_2,b_3,a_4]+\det[a_1,b_2,e_3,a_4]+$$
$$+\det[e_1,a_2,a_3,b_4]+\det[b_1,a_2,a_3,e_4]+\det[e_1,a_2,b_3,a_4]+ \qquad (2.58)$$
$$+\det[b_1,a_2,e_3,a_4]+\det[e_1,b_2,a_3,a_4]+\det[b_1,e_2,a_3,a_4]\},$$

$$P_{03}=\frac{1}{6}Q_{\eta\eta\eta}(0,0)=-i\{\det[a_1,a_2,a_3,b_4]+\det[a_1,a_2,b_3,a_4]+$$
$$+\det[a_1,b_2,a_3,a_4]+\det[b_1,a_2,a_3,a_4]\}. \qquad (2.59)$$

Правые части этих формул составляются так:

для P_{21} в матрице E_4 столбцы j и k заменяем на столбцы a_j и b_k соответственно, вычислим сумму полученных 12 определителей и результат умножим на $(-i)$;

для P_{12} в матрице A столбцы j и k заменяем на столбцы e_j и b_k соответственно, просуммируем полученные 12 определителей и результат умножим на $(-i)$;

для P_{03} в матрице A столбец j заменяем на столбец b_j, вычислим сумму полученных четырех определителей и результат умножим на $(-i)$.

Коэффициенты при членах степени четыре в разложении $Q(\xi, \eta)$ вычисляются так:

$$P_{31}=\frac{1}{6}Q_{\xi\xi\xi\eta}(0,0)=trA,$$

$$P_{22}=\frac{1}{4}Q_{\xi\xi\eta\eta}(0,0)=\det[a_1,a_2,e_3,e_4]+\det[a_1,e_2,e_3,a_4]+$$
$$+\det[a_1,e_2,a_3,e_4]+\det[e_1,a_2,a_3,e_4]+$$
$$+\det[e_1,a_2,e_3,a_4]+\det[e_1,e_2,a_3\,a_4], \qquad (2.60)$$

$$P_{13}=\frac{1}{6}Q_{\xi\eta\eta\eta}(0,0)=\det[a_1,a_2,a_3,e_4]+\det[a_1,a_2,\,e_3,\,a_4]+$$
$$+\det[a_1,e_2,a_3,e_4]+\det[e_1,a_2,\,a_3,\,a_4]. \qquad (2.61)$$

Правые части формул (2.60) и (2.61) составляются так:

коэффициент P_{22} равен сумме главных миноров второго порядка матрицы A:

$$P_{22}=\sum_{1\le j_1<j_2\le 4}A\begin{pmatrix} j_1 & j_2 \\ j_1 & j_2 \end{pmatrix}.$$

коэффициент P_{13} равен сумме главных миноров третьего порядка матрицы A:

$$P_{13}=\sum_{1\le j_1<j_2<j_3\le 4}A\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_1 & j_2 & j_3 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, определитель символа системы (2.46) имеет вид

$$Q(\xi,\,\eta)=R(\xi,\,\eta)+iS(\xi,\eta),$$

где

$$R(\xi,\eta)=\xi^4+P_{31}\xi^3\eta+P_{22}\xi^2\eta^2+P_{13}\xi\eta^3+P_{04}\eta^4+$$
$$+P_{20}\xi^2+P_{11}\xi\eta+P_{02}\eta^2+P_{00},$$
$$S(\xi,\eta)=P_{30}\xi^3+P_{21}\xi^2\eta+P_{12}\xi\eta^2+P_{03}\eta^3+$$
$$+P_{10}\xi+P_{01}\eta,$$

здесь коэффициенты P_{jk} определяются по формулам (2.48) – (2.61).

Множества Γ_1 и Γ_2 определяются как множество точек (ξ,η), удовлетворяющих уравнениям соответственно

$$\xi^4+P_{31}\xi^3\eta+P_{22}\xi^2\eta^2+P_{13}\xi\eta^3+P_{04}\eta^4+P_{20}\xi^2+P_{11}\xi\eta+P_{02}\eta^2+P_{00}=0,$$
$$P_{30}\xi^3+P_{21}\xi^2\eta+P_{12}\xi\eta^2+P_{03}\eta^3+P_{10}\xi+P_{01}\eta=0.$$

Эти соотношения показывают, что Γ_1 симметрично относительно точки O, если не пусто, может состоять из одной или двух замкнутых (в случае эллип-

тичности системы (2.46)) или неограниченных кривых (в случае неэллиптичности системы (2.46)) или нескольких точек, а Γ_2 тоже симметрично относительно точки О, содержит эту точку, может состоять из одной или двух кривых (прямых), одна из которых может быть замкнутой, может совпадать со всей плоскостью. Ввиду громоздкости вычислений исследование уравнений Γ_1 и Γ_2 проводить не будем. Отметим, что схема исследования такая же, как и для модельной системы.

С учетом предположений о коммутируемости некоторых матриц, сделанных выше, целесообразно изложить следующую лемму.

Лемма 2.4. *Пусть*

$$A=\begin{pmatrix} 0 & A_1 \\ -A_1 & 0 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix},$$

где

$$A_1=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ B_j=\begin{pmatrix} a_j & b_j \\ c_j & d_j \end{pmatrix}.$$

Матрицы A и B коммутируеми тогда и только тогда, когда матрицы B_3 *и* B_4 *имеют вид:*

$$B_3=\begin{pmatrix} -d_2 & c_2 \\ b_2 & -a_2 \end{pmatrix},\ B_4=\begin{pmatrix} d_1 & -c_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix}. \qquad (2.62)$$

Доказательство. *Необходимость*. Пусть матрицы *A* и *B* являются коммутируемыми, т.е.

$$AB = BA. \qquad (2.63)$$

Согласно умножению блочных матриц, имеем

$$AB=\begin{pmatrix} 0 & A_1 \\ -A_1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_1B_3 & A_1B_4 \\ -A_1B_1 & -A_1B_2 \end{pmatrix},$$

$$BA=\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & A_1 \\ -A_1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -B_2A_1 & B_1A_1 \\ -B_4A_1 & B_3A_1 \end{pmatrix}.,$$

Отсюда с учетом (2.28) получим следующие равенства:

$$A_1B_3 = -B_2A_1,\ \ A_1B_4 = B_1A_1, \tag{2.64}$$

$$A_1B_1 = B_4A_1,\ \ -A_1B_4 = B_3A_1. \tag{2.65}$$

Так как

$$A_1B_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_3 & -d_3 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix},$$

$$B_2A_1 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_2 & -a_2 \\ d_2 & -c_2 \end{pmatrix}, \tag{2.66}$$

$$A_1B_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_4 & b_4 \\ c_4 & d_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_4 & -d_4 \\ a_4 & b_4 \end{pmatrix},$$

$$B_1A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & -a_1 \\ d_1 & -c_1 \end{pmatrix}, \tag{2.67}$$

то в силу (2.64) имеем

$$a_3 = -d_2,\ b_3 = c_2,\ c_3 = b_2,\ d_3 = -a_2,$$

$$a_4 = d_1,\ b_4 = -c_1,\ c_4 = -b_1,\ d_4 = a_1.$$

Отсюда следуют равенства (2.62). Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть выполнено (2.62). Тогда

$$A_1B_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -d_2 & c_2 \\ b_2 & -a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_2 & a_2 \\ -d_2 & c_2 \end{pmatrix},$$

$$A_1B_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_1 & -c_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & -a_1 \\ d_1 & -c_1 \end{pmatrix}$$

и в силу (2.66), (2.67) имеем:

$$A_1B_3 = -B_2A_1,\ \ A_1B_4 = B_1A_1,\ A_1B_1 = B_4A_1,\ \ -A_1B_4 = B_3A_1,$$

т.е. верны равенства (2.64) и (2.65), что эквивалентно (2.67).

Коммутируемость матриц A и B установлена. Достаточность доказана.

ГЛАВА 3

СИСТЕМЫ КОМПЛЕКСНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Глава 3 посвящена системам у.ч.п. второго порядка с комплексной переменной. Изучены задачи нахождения общего решения, а также решений полиномиального роста, в частности ограниченных на всей комплексной плоскости решений.

3.1. О решениях эллиптических систем, обобщающих уравнение метааналитических функций

В этом параграфе будем излагать наши результаты, опубликованные в [4–А; 6-А]: «Рассмотрим эллиптическую систему второго порядка, записанную в комплексной форме

$$Lw \equiv w_{\bar{z}\bar{z}} + a(z)w_{\bar{z}} + b(z)w + c(z)\overline{w} = f(z), \qquad (3.1)$$

При $a = b = c = f = 0$ получаем уравнение бианалитических функций или так называемую систему уравнений Бицадзе. Как известно, задача Дирихле для уравнения Бицадзе не будет нётеровым. Для систем вида (3.1) задача об ограниченных на всей комплексной плоскости C решениях, может быть не нётеровым. Например, система

$$w_{\bar{z}\bar{z}} + c\overline{w} = 0,$$

где $c -$ ненулевая постоянная, имеет бесконечное число линейно независимых ограниченных на C решений

$$w(z) = p\omega(z) + q\overline{\omega(z)},$$

где

$p -$ произвольная постоянная,

$$q = \frac{|c|}{\overline{c}}\,\overline{p}e^{-2i\alpha},$$

$$\omega(z)=\exp\left[2i\sqrt{|c|}\,\mathrm{Re}\left(e^{-i\alpha}z\right)\right],$$

α – вещественная постоянная.

Когда a и b являются постоянными и $c=f=0$ система (3.1) превращается в уравнение метааналитических функций.

В связи с этим исследование системы (3.1) является актуальной. Эту систему будем рассматривать в пространстве Шварца S' и изложим процедуру нахождения всех решений однородного уравнения $Lw=0$.

Пусть коэффициенты a,b,c постоянные и $f=0$. В пространстве S' уравнение $Lw=0$ эквивалентно функциональному уравнению

$$(-\zeta^2+2ia\zeta+4b)\hat{w}(\zeta)+4c\hat{\bar{w}}(\zeta)=0, \qquad (3.2)$$

где $\hat{w}(\zeta),\ \hat{\bar{w}}(\zeta)-$образ Фурье распределений $w(z),\ \bar{w}(z)\in S'$. Используя равенство $\hat{w}(-\zeta)=\hat{\bar{w}}(\zeta)$, из (3.2) получим

$$4\bar{c}\hat{w}(\zeta)+(-\bar{\zeta}^2+2i\bar{a}\bar{\zeta}+4\bar{b})\hat{\bar{w}}(\zeta)=0. \qquad (3.3)$$

Соотношения (3.2) и (3.3) образуют систему двух линейных алгебраических уравнений в пространстве S'. Определитель этой системы равен

$$\Delta(\zeta)=|\zeta|^4-4|a|^2|\zeta|^2-8\,\mathrm{Re}(\bar{b}\zeta^2)+16(|b|^2-|c|^2)-4i\,\mathrm{Re}\left(\bar{a}|\zeta|^2-4a\bar{b}\right)\zeta. \quad (3.4$$

Если $\Delta(\zeta)\neq 0\ \ \forall\zeta\in C,$ то система (3.2), (3.3) будет иметь только нулевое решение $\hat{w}(\zeta)=0$ и тогда $w(z)\equiv 0$. Если же $\Delta(\zeta)=0$ на каком-нибудь множестве K, то носитель $\mathrm{supp}\hat{w}(\zeta)$ распределения $\hat{w}(\zeta)$ будет принадлежать множеству K, и зная K можно определить $\hat{w}(\zeta)$ и далее $w(z)$.

Пусть $\Gamma,\ \Gamma_1,\ \Gamma_2$ –множество нулей функций $\Delta(\zeta),\ \mathrm{Re}\Delta(\zeta),\ \mathrm{Im}\Delta(\zeta)$ соответственно. Тогда $\Gamma=\Gamma_1\cap\Gamma_2$ и множества $\Gamma_1,\ \Gamma_2$ имеют такие свойства: Γ_1 –ограничено, симметрично относительно начало координат O, при вещественном $b-$относительно вещественной оси; $\Gamma_2=C$ при $a=0,\ \Gamma_2$ – проходит через точку O.

В указанной работе изучена структура множеств Γ_1 и Γ_2.

Случай 1: $a=0$, тогда $\Gamma_2 = C$, а Γ_1 определяется уравнением

$$|\zeta|^4 - 8\,\mathrm{Re}(\bar{b}\,\zeta^2) + 16(|b|^2 - |c|^2) = 0\,. \qquad (3.5)$$

Если $b=c=0$, то $\Gamma = \Gamma_1 = \{0\}$. Тогда согласно формулы представления распределения с носителем $\{0\}$, получим:

$$\hat{w}(\zeta) = \sum_{k,tj=0}^{N} c_{jk} \frac{\partial^{j+k}}{\partial\zeta^j \partial\bar{\zeta}^k}\delta(\zeta), \qquad (3.6)$$

где c_{jk} – постоянные, $\dfrac{\partial^{j+k}}{\partial\zeta^j \partial\bar{\zeta}^k}$ – производные δ-функции Дирака, N – произвольное неотрицательное целое число. Совершая обратное преобразование Фурье, находим

$$w(z) = \sum_{\substack{j+k=0\\ j,k\geq 0}}^{N} d_{jk} z^j \bar{z}^k,$$

d_{jk} – постоянные. Представляя эту функцию в виде суммы однородных по z и $\bar{z}$ многочленов и подставляя в уравнение $Lw=0$ можно показать, что

$$w(z) = P_N(z) + Q_{N-1}(z)\bar{z}\,,$$

где P_N и Q_{N-1} – многочлены по z степени N и N-1 соответственно.

Если $b=0$ и $c\neq 0$, то Γ_1 – окружность $\{\zeta : |\zeta| = 2\sqrt{|c|}\}$. В этом случае используя теорему о структуре обобщенных функций с носителем на окружности (см. §2.1), имеем

$$\hat{w}(\zeta) = \sum_{j=0}^{N} c_j(\theta) \times \delta^{(i)}(r - r_0),\ \ \zeta = re^{i\theta},$$

где $c_i(\theta) - 2\pi$-периодические обобщенные функции, $r_0 = 2\sqrt{|c|}$.

Далее совершая обратное преобразование Фурье, находим $w(z)$ и подставляя в уравнение $Lw=0$, можно найти окончательный вид решений этого уравнения. Например, по аналогии как в главе 2, параграф 2.3, можно построить решения вида

$$w(z) = e^{i(\xi 0,z)}\varphi(z,\bar{z}) + e^{-i(\xi 0,z)}\Psi(z,\bar{z}),$$

где

φ, Ψ – вполне определенные многочлены по $z, \bar{z}, |\xi_0| = 2\sqrt{|c|}$.

Пусть $b \neq 0$. Левую часть уравнения (3.5) обозначим через $f(\zeta)$. Полагая $\zeta = \xi + i\eta,\ b = b_1 + ib_2$, имеем

$$f(\zeta) \equiv f(\xi,\eta) = (\xi^2 + \eta^2)^2 - 8\left[b_1(\xi^2 - \eta^2) + 2b_2\xi\eta\right] + 16(|b|^2 - |c|^2).$$

Далее, пусть $\eta = t\xi,\ t \in R$. Тогда

$$f(\xi, t\xi) = (1+t^2)\xi^4 - 8\left[(b_1(1-t^2) + 2b_2 t\right]\xi^2 + 16(|b|^2 - |c|^2).$$

Если $|b| < |c|$, то $f(0,0) = 16\left(|b|^2 - |c|^2\right) < 0$ и так как $f(\xi, t\xi) \to +\infty$ при $|\xi| \to +\infty$, то найдется точка $\xi_0 = \xi_0(t)$, что $f(\xi_0, t\xi_0) = 0$. Следовательно, Γ_1 является замкнутой кривой, содержащей внутри точку (0,0).

Уравнение кривой Γ_1 запишем в полярных координатах $\xi = \rho\cos\varphi,\ \eta = \rho\sin\varphi$:

$$\rho^4 - 8|b|\rho^2\cos(2\varphi + \varphi_0) + 16(|b|^2 - |c|^2) = 0, \tag{3.7}$$

где

$$\cos\varphi_0 = \frac{b_1}{|b|},\ \sin\varphi_0 = -\frac{b_2}{|b|}.$$

При $|b| < |c|$ уравнение (3.7) относительно ρ^2 имеет единственное решение

$$\rho^2 = 4|b|\cos(2\varphi + \varphi_0) + 4\sqrt{-|b|^2\sin^2(2\varphi + \varphi_0) + |c|^2}. \tag{3.8}$$

Это уравнение определяют замкнутую кривую, симметричную, относительно начало координат, при $b_2 = 0$ – относительно осей координат.

При $|b| = |c|$ из (3.7) получаем соотношения

$$\rho = 0 \text{ или } \rho^2 = 8|b|\cos(2\varphi + \varphi_0), \tag{3.9}$$

которые определяют кривую вида «восьмерки», проходящую через начало координат.

При $|b|>|c|$ уравнение (3.7) относительно ρ^2 имеет два решения

$$\rho^2 = 4|b|\cos(2\varphi+\varphi_0) \pm 4\sqrt{-|b|^2\sin^2(2\varphi+\varphi_0)+|c|^2} \qquad (3.10)$$

и при $c \neq 0$ множество Γ_1 состоит из двух замкнутых кривых, расположенных симметрично относительно друг другу в правой и левой полуплоскостях.

Таким образом, множество Γ есть одна или две замкнутые кривые, симметрично друг другу относительно начало координат или осей координат. Взяв на Γ две произвольные симметричные точки $\pm\zeta_0$, получаем

$$\hat{w}(\zeta) = \sum_{\substack{j+k\le N\\ j,k\ge 0}} \left[c_{jk}\frac{\partial^{j+k}\delta(\zeta+\zeta_0)}{\partial\zeta^j\partial\bar{\zeta}^k} + d_{jk}\frac{\partial^{j+k}\delta(\zeta-\zeta_0)}{\partial\zeta^j\partial\bar{\zeta}^k}\right], \qquad (3.11)$$

где c_{jk}, d_{jk} – постоянные.

Далее находим $w(z)$. Выбирая несколько пар точек вида $\pm\zeta_k$, можно строить богатое многообразие решений.

Если $c=0$, то Γ_1 состоит из двух точек $(2\sqrt{|b|}; -\frac{\varphi_0}{2}+\pi k)$, $k=0,1$. В этом случае нужно воспользоваться формулой (3.11).

Случай 2. $a \neq 0$. Если $b=0$, то

$$\mathrm{Re}\Delta(\zeta) = |\zeta|^4 - 4|a|^2|\zeta| - 16|c|^2, \ \mathrm{Im}\Delta(\zeta) = -4|\zeta|^2\,\mathrm{Re}\,\bar{a}\zeta\,.$$

Множество Γ_1 будет окружностью $|\zeta| = r_0$, где $r_0 = \sqrt{2|a|^2 + 2\sqrt{|a|^4+4|c|^2}}$, а множество Γ_2 является прямой, которая содержит точку O. Следовательно, множество Γ это две точки $\pm\zeta_0$, где $|\zeta_0| = r_0$ и $\mathrm{Re}\bar{a}\zeta_0 = 0$. Опять нужно воспользоваться формулой (3.11).

Пусть $b \neq 0$. Уравнения кривых Γ_1 и Γ_2 в полярных координатах выглядят так

$$\rho^4 - 4(|a|^2 + 2\mathrm{Re}(\bar{b}e^{2i\varphi}))\rho^2 + 16(|b|^2 - |c|^2) = 0, \qquad (3.12)$$

$$\rho\,\mathrm{Re}\left[e^{i\varphi}(\bar{a}\rho^2 - 4a\bar{b})\right] = 0. \qquad (3.13)$$

В работе [4–А] нами показано что «в случаях $|b|<|c|$ и $|b|=|c|$ аналогично как при $a=0$ можно показать, что Γ_1 является замкнутой кривой или кривой типа «восьмерки», симметричной относительно точки *O*. При $|b|>|c|$ множество Γ_1 может состоять из двух замкнутых кривых, симметричных друг другу относительно точки *O* или расположенной одна внутри другой и симметричной относительно точки *O*. (такая картина возможна, например, при $|a|^2<2|b|$ или расположенной одна внутри другой и симметричной относительно точки *O* (такая картина возможна при $|a|^2>2|b|$). Множество Γ_2 может быть неограниченной кривой (прямой) или замкнутой кривой, симметричных относительно точки *O*. Поэтому множество Γ может состоять из одной точки *O* или нескольких симметричных относительно начало координат точек, в таких случаях нужно использовать формулы видов (3.9) и (3.11), а может быть и пустым» [4–А], [6–А].

Резюмируя всё выше сказанное, получаем следующее утверждение.

Теорема 3.5. *1) При a=b=c=0 все решения из пространства S' однородного уравнения соответствующего (2.1) даются формулой*

$$w(z)=P_N(z)+Q_{N-1}(z)\bar{z},$$

где P_N и Q_{N-1} –произвольные многочлены по z степени N и N-1 соответственно (N- произвольное неотрицательное целое число).

2) При $a=b=0$ и $c\neq 0$ каждой точке $\pm\zeta_0$ окружности $\left\{\zeta:|\zeta|=2\sqrt{|c|}\right\}$ соответствуют решения вида

$$w(z)=e^{i(\xi 0,z)}\varphi(z,\bar{z})+e^{-i(\xi 0,z)}\psi(z,\bar{z}), \qquad (3.14)$$

где φ,ψ вполне определенные многочлены по $z,\bar{z}$

3) Если a=0 и $bc\neq 0$, то каждой точке $\pm\zeta_0$ кривой Γ_1 с уравнением (3.8) при $|b|<|c|$ (соответственно (3.9) при $|b|=|c|$ или (3.10) при $|b|>|c|$ соответствуют решения вида (3.14).

4) При $a \neq 0$ $b = 0$ *решениями будут функции вида (3.14) с точкой* $\pm\zeta_0$, *удовлетворяющей условиям:* $|\zeta_0| = r_0$ *и* $\mathrm{Re}\,\bar{a}\zeta_0 = 0$, *где*

$$r_0 = \sqrt{2|a|^2 + 2\sqrt{|a|^4 + 4|c|^2}}.$$

5) При $ab \neq 0$ *решениями будут функции вида (3.14) с точкой* $\pm\zeta_0$, *принадлежащей пересечению кривой* Γ_1 *с уравнением вида аналогичным уравнениям (3.8) - (3.10) и кривой* Γ_2 *с уравнением*

$$\mathrm{Re}(\bar{a}|\zeta|^2 - 4a\bar{b})\zeta = 0.$$

3.2. Системы с оператором Бицадзе

В этом параграфе будем исследовать системы уравнений и операторы вида

$$Lw \equiv w_{\bar{z}\bar{z}} + a_1(z)w_{\bar{z}} + a_2(z)w_z + a_3(z)\overline{w}_{\bar{z}} + a_4(z)w + a_5(z)\overline{w} = 0.$$

Эти результаты опубликованы в работе [3–А]: «Главной частью оператора L является так называемый оператор Бицадзе – $w_{\bar{z}\bar{z}}$, в различных функциональных пространствах и в различных ситуациях.

3.2.1. Системы с постоянными коэффициентами. Рассмотрим систему вида

$$w_{\bar{z}\bar{z}} + a_1 w_{\bar{z}} + a_2 w_z + a_3 \overline{w}_{\bar{z}} + a_4 w + a_5 \overline{w} = 0 \qquad (3.15)$$

с постоянными коэффициентами.

В следующем пункте будет установлено, что условие отсутствия ненулевых решений систем вида (3.15) в пространстве C_α^2 является критерием нётеровости оператора $L: C_\alpha^2 \to C_\alpha$. Систему (3.15) будем исследовать в более широком пространстве чем C_α^2, а именно, в пространстве Шварца S'.

В пространстве S' уравнение (3.15) эквивалентно функциональному уравнению

$$\left(-\zeta^2 + 2ia_1\zeta + 2ia_2\overline{\zeta} + 4a_4\right)\hat{w}(\zeta) + (2ia_3\zeta + 4a_5)\hat{\overline{w}}(\zeta) = 0, \qquad (3.16)$$

где

$\hat{w}(\zeta)$, $\hat{\overline{w}}(\zeta)$ – образы Фурье» [3–А].

Используя равенство $\hat{w}(-\zeta) = \overline{\hat{w}}(\zeta)$, из (3.16) получим

$$\left(2i\overline{a_3}\overline{\zeta} + 4\overline{a}_5\right)\hat{w}(\zeta) + (-\overline{\zeta}^2 + 2i\overline{a_1}\overline{\zeta} + 2i\overline{a}_2\zeta + 4\overline{a}_4)\hat{\overline{w}}(\zeta) = 0. \qquad (3.17)$$

Соотношения (3.16) и (3.17) образуют систему двух линейных алгебраических уравнений в пространстве S':

$$\begin{cases}\left(-\zeta^2+2ia_1\zeta+2ia_2\overline{\zeta}+4a_4\right)\hat{w}(\zeta)+(2ia_3\zeta+4a_5)\hat{\overline{w}}(\zeta)=0,\\ \left(2i\overline{a}_3\overline{\zeta}+4\overline{a}_5\right)\hat{w}(\zeta)+(-\overline{\zeta}^2+2i\overline{a}_1\overline{\zeta}+2i\overline{a}_2\zeta+4\overline{a}_4)\hat{\overline{w}}(\zeta)=0.\end{cases} \tag{3.18}$$

Вычислим определитель этой системы:

$$\Delta(\zeta)=\left(-\zeta^2+2ia_1\zeta+2ia_2\overline{\zeta}+4a_4\right)(-\overline{\zeta}^2+2i\overline{a}_1\overline{\zeta}+2i\overline{a}_3\zeta+4\overline{a}_4)-$$
$$-\left(2ia_3\zeta+4a_5\right)(2i\overline{a}_3\overline{\zeta}+4\overline{a}_5)=|\zeta|^4-2i\overline{a}_1\zeta^2\overline{\zeta}-2i\overline{a}_2\zeta^3-4\overline{a}_4\zeta^2-$$

$$-2ia_1\zeta\overline{\zeta}^2-4|a_1|^2|\zeta|^2-4a_1\overline{a}_2\zeta^2+8ia_1\overline{a}_4\zeta-2ia_2\overline{\zeta}^3-4\overline{a}_1a_2\overline{\zeta}^2-$$
$$-4|a_2|^2|\zeta|^2+8ia_2\overline{a}_4\overline{\zeta}-4a_4\overline{\zeta}^2+8i\overline{a}_1a_4\overline{\zeta}+8i\overline{a}_2a_4\zeta+16|a_4|^2+$$
$$+4|a_3|^2|\zeta|^2-8ia_3\overline{a}_5\zeta-8i\overline{a}_3a_5\overline{\zeta}-16|a_5|^2,$$

т.е.

$$\Delta(\zeta)=|\zeta|^4+4\left(|a_3|^2-|a_1|^2-|a_2|^2\right)|\zeta|^2-8\,\mathrm{Re}\left[(a_1\overline{a}_2+\overline{a}_4)\zeta^2\right]+$$
$$16\left(|a_4|^2-|a_5|^2\right)+4i\,\mathrm{Re}\left[\left(\overline{a}_1\zeta^2\overline{\zeta}+\overline{a}_2\zeta^3-4\overline{a}_2a_4\zeta-4a_1\overline{a}_4\zeta+4a_3\overline{a}_5\zeta\right)\right]. \tag{3.19}$$

Нами установлено следующее:

«Если $\Delta(\zeta)\neq 0\ \ \forall\zeta\in C,$ то система (3.18) будет иметь только нулевое решение $\hat{w}(\zeta)=0$ и тогда $w(z)\equiv 0$. Если же $\Delta(\zeta)=0$ на каком-нибудь множестве *K*, то носитель $\mathrm{supp}\hat{w}(\zeta)$ распределения $\hat{w}(\zeta)$ будет принадлежать множеству *K*, и зная *K* можно определить $\hat{w}(\zeta)$ и далее $w(z)$.

Пусть $\Gamma,\ \Gamma_1,\ \Gamma_2$ – множество нулей функций $\Delta(\zeta),\ \mathrm{Re}\Delta(\zeta),\ \mathrm{Im}\Delta(\zeta)$ соответственно. Тогда $\Gamma=\Gamma_1\cap\Gamma_2$ и множества $\Gamma_1,\ \Gamma_2$ имеют такие свойства: Γ_1 – ограничено, симметрично относительно начало координат О, при вещественном $a_1\overline{a}_2+\overline{a}_4$ – относительно осей координат; $\Gamma_2=C$ при $a_1=a_2=a_3a_5=0,$ множество Γ_2 содержит точку О» [6-А].

Справедлива следующая

Лемма 3.5. *Пусть коэффициенты уравнения (3.15) удовлетворяют условиям*

$$|a_4|>|a_5|,\qquad |a_3|^2+2\sqrt{|a_4|^2-|a_5|^2}>|a_1|^2+|a_2|^2+2|\overline{a}_1a_2+a_4| \tag{3.20}$$

Тогда множество Γ будет пустым.

В условиях этой леммы уравнение (3.15) в S' не имеет ненулевых решений. В частности, это уравнение в пространстве C_α^2 будет иметь только нулевое решение. Также оно не имеет ненулевых периодических решений и решений, имеющих рост при $z \to \infty$ не выше степенного. Как отмечено в работе [3-А] «эта лемма играет важную роль при исследовании уравнений с переменными коэффициентами в гёльдеровых пространствах.

Доказательство леммы 3.5. Пусть выполнены условия (3.20). Рассмотрим вещественную часть определителя $\Delta(\zeta)$:

$$f(\zeta) = |\zeta|^4 + 4\left(|a_3|^2 - |a_1|^2 - |a_2|^2\right)|\zeta|^2 - 8\,\mathrm{Re}\left[\left(a_1\bar{a}_2 + \bar{a}_4\right)\zeta^2\right] + 16\left(|a_4|^2 - |a_5|^2\right).$$

Покажем, что эта функция является положительной при всех ζ. Имеем очевидное неравенств

$$f(\zeta) \geq |\zeta|^4 + 4\left(|a_3|^2 - |a_1|^2 - |a_2|^2 - 2|a_1\bar{a}_2 + \bar{a}_4|\right)|\zeta|^2 + 16\left(|a_4|^2 - |a_5|^2\right). \qquad (3.21)$$

Введя обозначения

$$a = |a_3|^2 - |a_1|^2 - |a_2|^2 - 2|a_1\bar{a}_2 + \bar{a}_4|,\ b = |a_4|^2 - |a_5|^2,\ t = |\zeta|^2,$$

изучим функцию $h(t) = t^2 + 4at + 16b$ при $t \geq 0$. Для $a \geq 0$ в силу первого неравенства из условия (3.20) (которое эквивалентно $b > 0$), имеем

$$h(t) > 0\ \forall t \geq 0.$$

Если $a < 0$, то функция $h(t)$ в точке $t_0 = -2a$ имеет минимум

$$\min_t h(t) = 4\left(4b - a^2\right).$$

В силу второго неравенства из (3.20), при $a < 0$ следует что $4b - a^2 > 0$. Поэтому $\min_t h(t) > 0$ и следовательно, $h(t) > 0\ \forall t \geq 0$. Тогда из неравенства

(3.21), которое можно переписать так $f(\zeta) \geq h\left(|\zeta|^2\right)$, получим $f(\zeta) > 0 \ \forall \zeta$ и $\Gamma = \varnothing$. Лемма доказана» [3-А].

3.2.2. Системы с переменными коэффициентами. Рассмотрим систему с оператором Бицадзе в главной части

$$Lw \equiv w_{\bar{z}\bar{z}} + a_1(z) w_{\bar{z}} + a_2(z) w_z + a_3(z) \overline{w}_{\bar{z}} + a_4(z) w + a_5(z) \overline{w} = 0. \quad (3.22)$$

Как было отмечено в параграфе 3.1 для таких систем задача Дирихле и задача о решениях из C_α^2, в общем, не являются нётеровыми.

Предположим, что $a_j \in C_\alpha$, $j = 1,...,5$. Тогда при $w \in C_\alpha^2$ функция

$$lw = w_{\bar{z}\bar{z}} + a_1(z) w_{\bar{z}} + a_2(z) w_z + a_3(z) \overline{w}_{\bar{z}} + a_4(z) w + a_5(z) \overline{w}$$

функция будет принадлежат и C_α и отображение $w \to \ell w$ является линейным оператором $L : C_\alpha^2 \to C_\alpha$. Покажем, что этот оператор будет ограниченным.

Действительно, пусть $w \in C_\alpha^2$. Согласно неравенству треугольника справедливо следующее

$$\begin{aligned} \| Lw \|_\alpha \leq \| w_{\bar{z}\bar{z}} \|_\alpha + \| a_1(z) w_{\bar{z}} \|_\alpha + \| a_2(z) w_z \|_\alpha + \\ + \| a_3(z) \overline{w}_{\bar{z}} \|_\alpha + \| a_4(z) w \|_\alpha + \| a_5(z) \overline{w} \|_\alpha . \end{aligned} \quad (3.23)$$

Для $a(z)$ из C_α линейные отображения $w \to a(z) w$ и $w \to a(z) w_z$ из C_α^2 в C_α будут ограниченными. Тогда существует постоянная $k > 0$, что

$$\| a(z) w \|_\alpha \leq k \| w \|_{\alpha,2}, \ \| a(z) w_z \|_\alpha \leq k \| w \|_{\alpha,2}.$$

По определению нормы пространства C_α^2 из последних неравенств и (3.23) следует, что

$$\| Lw \|_\alpha \leq (5k+1) \| w \|_{\alpha,2}.$$

Это неравенство означает, что оператор $L: C_\alpha^2 \to C_\alpha$ является ограниченным.

Пусть $a \in C_\alpha$ и $\{h_n\} \subset C$ такая последовательность, что $h_n \to \infty$. Тогда из функциональной последовательности $a(z+h_n)$ можно выделить подпоследовательность $a(z+h_{n_k})$, которая в любом круге равномерно сходится к некоторой функции $\tilde{a}(z)$ из C_α. Отметим, что если функция $a \in C_\alpha$ слабо осциллирует на бесконечности, т.е. удовлетворяет условию

$$\lim_{z\to\infty} \sup_{|z-\zeta|<1} |a(z)-a(\zeta)| = 0,$$

то предельная функция $\tilde{a}$ будет постоянной.

По коэффициентам оператора $L: C_\alpha^2 \to C_\alpha$, в силу выше отмеченного составим операторы

$$\tilde{L}w = w_{\bar{z}\bar{z}} + \tilde{a}_1 w_{\bar{z}} + \tilde{a}_2 w_z + \tilde{a}_3 \overline{w}_{\bar{z}} + \tilde{a}_4 w + \tilde{a}_5 \overline{w}, \qquad (3.24)$$

которых назовем предельными для L. Множество предельных операторов обозначим символом $H(L)$. Для слабо осциллирующих при $z \to \infty$ функций $a \in C_\alpha$ выше указанные предельные операторы будут иметь постоянные коэффициенты.

Следующая теорема дает критерию *n*-нормальности оператора $L: C_\alpha^2 \to C_\alpha$.

Теорема 3.6. *Пусть* $a_j(z) \in C_\alpha$, $j = 1,\ldots,5$. *Оператор* $L: C_\alpha^2 \to C_\alpha$ *будет n-нормальным, тогда и только тогда, когда все предельные уравнения* $\tilde{L}w = 0$ *в пространстве* C_α^2 *не имеют ненулевых решений.*

Доказательство этой теоремы опубликовано в нашей работе [3-А] и мы её воспроизведем. «Необходимость. Предположим, что оператор $L: C_\alpha^2 \to C_\alpha$ *n*-нормальный. Для системы (3.22) в силу эллиптичности имеет место теорема единственности. Поэтому подпространство

$$E=\{w: w\in C_\alpha^2,\ w(z)=0\ при\ |z|\le 1\}$$

имеет с ядром оператора L нулевое пересечение $E_0 \cap KerL=\{0\}$ и согласно лемме 2.2 (см. §2.1) образ $F=LE$ является подпространством пространства C_α.

Так, оператор L взаимно однозначно отображает E из C_α^2 на подпространство F из C_α. Согласно теореме Банаха оператор $L: E\to F$ будет ограниченно обратимым, т. е. существует постоянная $k>0$, что имеет место оценка

$$\| L^{-1}g \|_{\alpha,2} \le K\| g \|_\alpha \qquad \forall g\in F.$$

Отсюда имеем следующее неравенство

$$\| Lw \|_\alpha \ge m\| w \|_{\alpha,2}, \tag{3.25}$$

где $m=K^{-1},\ w\in E.$

Возьмем произвольную функцию w с компактным носителем из C_α^2 и произвольную последовательность $\{h_n\}\subset C$ с $h_n\to\infty$. Для больших n носитель функции $(S_{-h_n}w)(z)=w(z-h_n)$ не будет иметь общих точек кругом $\{z:|z|\le 1\}$ и следовательно $S_{-h_n}w\in E.$ Поэтому для указанных n из (3.25) будем иметь

$$\|L(S_{-h_n}w)\|_\alpha \ge m\|S_{-h_n}w\|_{\alpha,2}. \tag{3.26}$$

Функции $S_{-h_n}w$ имеют такие свойства:

$$\|S_{-h_n}w\|_{\alpha,2}=\| w\|_{\alpha,2},\ \|S_{h_n}L(S_{-h_n}w)\|_\alpha=\|L(S_{-h_n}w)\|_\alpha.$$

Поэтому (3.26) можно представить так

$$\left\| S_{h_n} L(S_{-h_n} w) \right\|_{\alpha} \geq m \| w \|_{\alpha,2}. \qquad (3.27)$$

Гёльдеровы пространства C_{α}^{κ} с уменьшением α расширяются. Поэтому согласно известной теореме (см. [17], стр. 144) оператор $L : C_{\alpha'}^{1} \to C_{\alpha'}$ является n-нормальным. Тогда подобно оценке (3.27) будет иметь место неравенство

$$\| g_n \|_{\alpha'} \geq m' \| w \|_{\alpha',2}, \qquad (3.28)$$

здесь

$g_n = S_{h_n} L(S_{-h_n} w)$,

m' – постоянная, общая для всех w и n.

Нетрудно подсчитать, что

$$g_n = w_{\bar{z}\bar{z}} + a_1(z+h_n) w_{\bar{z}} + a_2(z+h_n) w_z + \\ + a_3(z+h_n)\overline{w}_{\bar{z}} + a_4(z+h_n) w + a_5(z+h_n)\overline{w}.$$

Как было отмечено, последовательности $\{a_k(z+h_n)\}_{n=1}^{\infty}$, $k=\overline{1,5}$ имеют подпоследовательности $\{a_k(z+h_{n_j})\}_{j=1}^{\infty}$, $k=\overline{1,5}$, сходящиеся равномерно в любом компакте к функциям a_{κ}^{0}. Пусть

$$p_j \equiv g_{n_j}, \; L_0 w = w_{\bar{z}\bar{z}} + a_1^0 w_{\bar{z}} + a_2^0 w_z + a_3^0 w_{\bar{z}} + a_1^0 w + a_1^0 \overline{w}.$$

Тогда имеем

$$\left\| p_j - L_0 w \right\|_{\alpha'} = \sup \left| [\sum_{\kappa=1}^{5} a_k(z+h_{n_j}) - a_{k0}^0] w(z) \right| + \sup_{z_1 \neq z_2} q(z_1, \; z_2),$$

где

$$q_j(z_1, \; z_2) = |z_1 - z_2|^{-\alpha'} \left| [\sum_{\kappa=1}^{5} a_k(z+h_{n_j}) - a_{k0}^0] w(z_1) - [\sum_{\kappa=1}^{5} a_k(z+h_{n_j}) - a_{k0}^0] w(z_2) \right|.$$

Так как у функции $w(z)$ носитель K компактный, то

$$\sup\left|[\sum_{\kappa=1}^{5} a_k(z+h_{n_j}) - a_{k0}^0]\,w(z)\right| \to 0 \text{ при } j\to\infty. \qquad (3.29)$$

Пусть $q_j^0 = \sup\limits_{z_1\neq z_2} q_j(z_1, z_2)$ и $\varepsilon_j \to 0$. Выберем точки $\xi_j,\ \eta_j \in C,\ \xi_j \neq \eta_j$, так что

$$q_j^0 - \varepsilon_j \le q_j(\varsigma_j, \eta_j) \le q_j^0,\ j = 1, 2,... \qquad (3.30)$$

и пусть подпоследовательность $\delta_{j_\kappa} = \left|\xi_{j_\kappa} - \eta_{j_\kappa}\right|$ имеет предел δ. Так как функция $q(z_1,\ z_2)$ является симметричной, то возможны следующие два случая:

а) $\xi_{j_\kappa} \in K,\ \eta_{j_\kappa} \in K,\quad k = 1, 2,...;$ б) $\xi_{j_\kappa} \in K,\ \eta_{j_\kappa} \notin K,\ k = 1, 2,...$

Случай а). Справедливы цепочка неравенств

$$q_{j_k}(\xi_{j_k}, \eta_{j_k}) \le \left|\xi_{j_k} - \eta_{j_k}\right|^{-\alpha'} \cdot$$
$$\left\{\left|[\sum_{l=1}^{5} a_l(\xi_{j_k} + h_{n_{j_k}}) - a_l^0]\,w(\xi_{j_k})\right| + \left|[\sum_{l=1}^{5} a_l(\eta_{j_k} + h_{n_{j_k}}) - a_l^0]\,w(\eta_{j_k})\right|\right\} \le \qquad (3.31)$$
$$\left|\xi_{j_k} - \eta_{j_k}\right|^{-\alpha'}\left\{\left|[\sum_{l=1}^{5} a_l(\xi_{j_k} + h_{n_{j_k}}) - a_l^0]\,w(\xi_{j_k})\right| + \left|[\sum_{l=1}^{5} a_l(\xi_{j_k} + h_{n_{j_k}}) - a_l^0]\,w(\eta_{j_k})\right|\right\}.$$

В силу того что для любой ограниченной последовательности $\{\xi_j\} \subset C$ имеет место соотношение

$$\lim_{j\to\infty}\left|\sum_{l=1}^{5} a_l(\xi_j + h_{n_{jk}}) - a_l^0\right| = 0,$$

то при $\delta > 0$ из (3.31) путем предельного перехода при $k \to \infty$, имеем

$$\lim_{k\to\infty} q_{j_k}(\xi_{j_k}, \eta_{j_k}) = 0. \qquad (3.32)$$

При $\delta = 0$ то из соотношений

$$q_{jk}(\xi_{jk}, \eta_{jk}) \le \left|\xi_{jk} - \eta_{jk}\right|^{-a'}\left(\left|\sum_{i-1}^{5} a_i(\xi_{jk} h_{n_{jk}}) - a_i^0\right|\right\|w(\xi_{jk}) - w(\eta_{jk})\Big\|_c$$

$$+\left|\sum_{i-1}^{5} a_i(\xi_{jk}+h_{n_{jk}})-\sum_{i-1}^{5} a_i(\eta_{jk}+h_{n_{jk}})\right|\left\|w(\eta_{jk})\right\|_c)\le$$

$$\le\left|\sum_{i-1}^{5} a_i(\xi_{jk}+h_{n_{jk}})-a_1^0\right|H_{a'}(w)+\sup_{zeC}\left\|w(z)\right\|_c\sum_{i-1}^{5} H_a(a_i)\left|\xi_{jk}-\eta_{jk}\right|^{a-d}$$

здесь $H_\alpha(a_l),\ H_{\alpha'}(w)-$постоянные Гёльдера, вытекает соотношение (3.32). Далее из (3.30) и (3.32) следует, что $q_j^0\to 0$ при $j\to\infty$. Отсюда и из (3.29) получим нужное нам предельное соотношение:

$$\lim_{k\to\infty}\left\|p_{j_k}-L_0 w\right\|_{\alpha'}=0\,.$$

Случай 2. Так как $w(\eta_{j_k})=0,$ то из (3.31) получим

$$q_{j_k}(\xi_{j_k},\eta_{j_k})\le\left|\xi_{j_k}-\eta_{j_k}\right|^{-\alpha'}\left|\sum_{l=1}^{5} a_l(\xi_{j_\kappa}+h_{n_{j_k}})-a_l^0\right|\left\|\,w(\xi_{j_k})-w(\eta_{j_k})\,\right\|_C\le$$

$$\le\left|\sum_{l=1}^{5} a_l(\xi_{j_\kappa}+h_{n_{j_k}})-a_l^0\right|H_{\alpha'}(w).$$

Тогда имеем

$$\lim_{k\to\infty} q_{j_k}(\xi_{j_k},\eta_{j_k})=0\,.$$

Поэтому $q_{j_k}^0\to 0$ и $\left\|p_{j_k}-L_0 w\right\|_{\alpha'}=0$ при $k\to\infty$. Это нужно было установить.

Далее в соотношение (3.28) при $n=n_{j_k}$ переходим к пределу:

$$\left\|L_0 w\right\|_{\alpha'}\ge m'\left\|w\right\|_{\alpha',2}. \tag{3.33}$$

Теперь используя свойство непрерывности слева по α гёльдеровых норм $\|\,.\,\|_\alpha$ и $\|\ .\,\|_{\alpha,\,2}$ (см. [5], стр. 28) из (3.33) при $\alpha'\to\alpha-0$, получим

$$\left\|L_0 w\right\|_{\alpha}\ge m'\left\|w\right\|_{\alpha,\,2}, \tag{3.34}$$

где $w\in C_\alpha^2$ и имеет компактный носитель.

В дальнейшем установим справедливость (3.34) для произвольной $w\in C_\alpha^2$. Возьмем функцию $\varepsilon(z)\in D$ такую, что $0\le\varepsilon(z)\le 1\ \ \forall z\in C$ и

$\varepsilon(z)\equiv 1$ при $|z|\geq 2$. Так как функции $v_n(z)=\varepsilon\left(\frac{z}{n}\right)w(z)$ с компактным носителем являются элементами пространства C_α^2, то для них имеет место оценка типа (3.34):

$$\|L_0 v_n\|_\alpha \geq m'\|v_n\|_{\alpha,2}.$$

Поэтому учитывая соотношения

$$L_0 v_n = L_0\left[\varepsilon\left(\frac{z}{n}\right)w(z)\right]=\varepsilon\left(\frac{z}{n}\right)L_0 w+\frac{1}{n}\varepsilon_{\bar z}\left(\frac{z}{n}\right)w$$

и

$$\|L_0 v_n\|_\alpha \leq \left\|\varepsilon\left(\frac{z}{n}\right)L_0 w\right\|_\alpha+\frac{1}{n}\left\|\varepsilon_{\bar z}\left(\frac{z}{n}\right)w\right\|_\alpha$$

имеем

$$\left\|\varepsilon\left(\frac{z}{n}\right)L_0 w\right\|_\alpha+\frac{1}{n}\left\|\varepsilon_{\bar z}\left(\frac{z}{n}\right)w\right\|_\alpha \geq m'\left\|\varepsilon\left(\frac{z}{n}\right)w\right\|_{\alpha,2}$$

Отсюда при $n\to\infty$ следует неравенство

$$\|L_0 w\|_\alpha \geq m'\|w\|_{\alpha,2} \quad \forall\, w\in C_\alpha^2,$$

а в свою очередь из этой оценки получаем, что у предельного уравнения

$$L_0 w \equiv w_{\bar z\bar z}+a_1^0 w_{\bar z}+a_2^0 w_z+a_3^0 w_{\bar z}+a_1^0 w+a_1^0\overline{w}=0 \qquad (3.35)$$

в C_α^2 нет ненулевых решений. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть все предельные уравнения вида (3.35) не имеют в C_α^2 ненулевых решений. В таком случае для оператора $L\colon C_\alpha^2\to C_\alpha$ имеет место априорная оценка вида

$$\|w\|_{\alpha,2}\leq K\left(\|Lw\|_\alpha+\max_{|t|\leq 1}|w(t)|\right)\ \forall\, w\in C_\alpha^2, \qquad (3.36)$$

здесь K постоянная общая для всех w (эта априорная доказывается подобно схеме для операторов первого порядка, см. [8], стр. 820).

Пусть $\{w_n(z)\} \in KerL$ и $\|w_n\|_{\alpha,2} = 1$. Используя теорему Арцела и априорную оценку (3.36) можно установить, что существует подпоследовательность $\{w_{n_j}\}$ и её предельная функция $w_0(z)$, для которых верно неравенство

$$\left\|w_{n_j} - w_0\right\|_{\alpha,2} \le K \max_{|t|\le 1} \left|w_{n_j}(t) - w_0(t)\right|, \qquad (3.37)$$

Отсюда получаем, что предельное соотношение

$$\left\|w_{n_j} - w_0\right\|_{\alpha,2} \to 0 \quad при \ n_j \to \infty.$$

Итак, мы показали, что ядро оператора L компактна. Тогда из леммы Рисса (см., например, [47]) следует, что ядро оператора L имеет конечную размерность.

Далее установим замкнутость образа LC_α^2. Возьмем последовательность $\{f_n\}$ из образа LC_α^2, сходящуюся в C_α к функции f_0. Через $w_n(z)$ обозначим решение уравнения $Lw = f_n$. Множество всех решений этого уравнения обозначим через B_n, оно представляется в виде $w_n + KerL$.

Для $v \in KerL$ имеем

$$\lim_{\|v\|_{\alpha,2}\to\infty} \|w_n + v\|_{\alpha,2} \ge \lim_{\|v\|_{\alpha,2}\to\infty} \left(\|v\|_{\alpha,2} - \|w_n\|_{\alpha,2}\right) = \infty.$$

Поэтому функционал

$$p_n(v) = \|w_n + v\|_{\alpha,2}, \ v \in KerL$$

в некоторой точке $v_n \in KerL$ достигает своего минимума:

$$p_n(v_n) = \min_{v\in KerL} \|w_n + v\|_{\alpha,2}.$$

Положим $\omega_n = w_n(z) + v_n(z), \ r_n = \|\omega_n\|_{\alpha,2}$. Тогда $\omega_n \in B_n$ и $\|\omega_n\|_{\alpha,2} \le \|w\|_{\alpha,2}$ для всех $w \in B_n$. Покажем, что последовательность $\{r_n\}$ ограниченная. Действительно, если $\{r_n\}$ неограниченная, то считая $r_n \to \infty$ и полагая $u_n = \dfrac{\omega_n}{r_n}, \quad g_n = \dfrac{f_n}{r_n}$, имеем

$$\|u_n\|_{\alpha,2} = 1,\ Lu_n = g_n,\ \|g_n\|_\alpha \to 0. \qquad (3.38)$$

Из первого равенства (3.38) и неравенства (3.37) следует, что из последовательности $\{u_n(z)\}$ можно извлечь подпоследовательность $\{u_{n_j}\}$, сходящуюся в C_α^2 к некоторой функции $u_0(z)$. Очевидно, что $Lu_0 = 0$, поэтому $L(u_{n_j} - u_0) = g_{n_j}$ или $L(r_{n_j}(u_{n_j} - u_0)) = f_{n_j}$, т.е. $r_{n_j}(u_{n_j} - u_0) \in B_{n_j}$. Тогда в силу выбора $\omega_n(z)$ имеем

$$\left\|r_{n_j}(u_{n_j} - u_0)\right\|_{\alpha,2} \geq \left\|\omega_{n\,j}\right\|_{\alpha,2} = r_{n_j}$$

или $\left\|u_{n_j} - u_0\right\|_{\alpha,2} \geq 1$, что противоречит сходимости $u_{n_j}(z)$ к $u_0(z)$ по норме пространства C_α^2.

Итак, мы показали что $\{r_n\}$ ограниченная. Далее подобно предыдущему тогда аналогично можно найти подпоследовательность $\{\omega_{n_j}\}$ и функцию $\omega_0(z)$, такие что

$$\left\|\omega_{n_j} - \omega_0\right\|_{\alpha,2} \to 0 \quad при\ n_j \to \infty.$$

Поэтому переходя в равенстве $L\omega_{n_j} = f_{n_j}$ к пределу, получим $L\omega_0 = f_0$, т.е. $f_0 \in LC_\alpha^2$.

Замкнутость образа C_α^2 доказана, поэтому оператор $L: C_\alpha^2 \to C_\alpha$ является *n*-нормальным. Теорема доказана» [3-А].

Далее будем изучать *d*-нормальность оператора $L: C_\alpha^2 \to C_\alpha$.

Справедлива следующая

Теорема 3.7. *Пусть* $a_j(z) \in C_a$, $j = 1,...,5$. *Чтобы оператор* $L: C_\alpha^2 \to C_\alpha$ *был d-нормальным, необходимо чтобы все предельные уравнения* $\tilde{L}\omega = 0$ *в* C_a^2 *имели только ненулевое решение*

Доказательство. Пусть оператор $L: C_\alpha^2 \to C_\alpha$ d-нормальный. Рассмотрим предельные уравнения

$$\tilde{L}w = f,\ \tilde{L} \in H(L),\ f \in C_\alpha. \tag{3.39}$$

Покажем, что эти уравнения разрешимы в пространстве C_α^2. Возьмем $\varphi \in KerL^*$, т.е. $\varphi \in (C_\alpha)^*$ и $\varphi(Lw) = 0\ \forall w \in C_\alpha^2$. Пусть $\{f_n\} \in C_\alpha$ ограниченная последовательность и равномерно сходится на любом компакте к f. Покажем, что $\{f_n\}$ слабо сходится к f, т.е.

$$\varphi(f_n) \to \varphi(f). \tag{3.40}$$

Так как образ LC_α^2 замкнутый и коядро $C_\alpha / LC_\alpha^2 -$конечномерное, то найдется конечномерное подпространство $E \in C_\alpha$ такое, что $C_\alpha = E \oplus LC_\alpha^2$. Пусть $f_n = g_n + h_n$, здесь $g_n \in E,\ h_n \in LC_\alpha^2$. Последовательность g_n является ограниченной, поэтому у неё есть подпоследовательность g'_{n_j}, имеющую в C_α предел g' и тогда h'_{n_j} равномерно сходится на каждом круге к функции $h' = f - g'$. Покажем, что $h' \in LC_\alpha^2$. Так как оператор $L: C_\alpha^2 \to C_\alpha$ нормально разрешимый, то из [96], стр. 105 получаем, что существуют $w_{n_j} \in C_\alpha^2$ такие, что

$$Lw_{n_j} = h'_{n_j},\ \left\| w_{n_j} \right\|_{\alpha,2} \le K \left\| h'_{n_j} \right\|_\alpha,$$

здесь $K > 0$ и не зависит от h'_{n_j}. Отсюда следует, что подпоследовательность w_{n_j} вместе с производными второго порядка равномерно сходится на каждом круге к такой функции $w_0(z)$, что $Lw_0 = h'$, т.е. $h' \in LC_\alpha^2$.

Далее имеем

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(f_n) = \lim_{n\to\infty} \varphi(g_n) = \varphi(g') = \varphi(g' + h') = \varphi(f).$$

Возьмем базис $g_1, g_2, ..., g_m$ в E и пусть $f \in C_\alpha$, $f = g + h$, здесь $g \in E,\ h \in LC_\alpha^2$. Тогда $g = c_1 g_1 + c_2 g_2 + ... c_m g_m,\ c_j \in R$ и построим линейные функционалы:

$$\varphi_j(f) = c_j,\ j = 1,...,m.$$

Покажем, что эти функционалы непрерывны. Действительно, если $f_n \to 0$ в C_α и $f_n = l_n + h_n$, здесь $l_n \in E,\ h_n \in LC_\alpha^2$, то как было указано выше последовательность l_n является ограниченной и в силу конечномерности E можно считать, что она сходится в C_α к функции $l(z)$, тогда h_n будет сходится в C_α к $-l(z)$ и в силу того что $E \cap LC_\alpha^2 = 0$ имеем: $l(z) \equiv 0$. Поэтому $\varphi_j(f_n) = \varphi_j(l_n) \to 0,\ j = 1,...,m.$ Далее очевидно, что функционалы φ_j линейно независимы и $\varphi_j(Lw) = 0\ \forall w \in C_\alpha^2,\ j = 1,...,m.$ Следовательно, $\varphi_j,\ j = 1,...,m$ образуют базис в $KerL*$.

Построим линейный ограниченный в C_α оператор

$$Pf = \sum_{j=1}^{m} \varphi_j(f) g_j.$$

Этот оператор переводит C_α в E и имеет место равенство

$$\varphi_k(f - Pf) = \varphi_k(f) - \sum_{j=1}^{m} \varphi_j(f) \varphi_k(g_j) = 0.$$

Поэтому правая часть уравнения

$$Lw = f - Pf \tag{3.41}$$

ортогональна всем решениям сопряженного уравнения $L*v = 0$. Тогда из леммы 2.1 (см. §2.2) следует, что уравнение (3.41) имеет решение $w(z)$ и как указано выше справедлива оценка

$$\|w\|_{\alpha,2} \le K\|f - Pf\|_\alpha \le K'\|f\|_\alpha, \tag{3.42}$$

здесь $K' > 0$ и не зависит от f.

Возьмем $\{h_n\} \subset C$ такую что $h_n \to \infty$ и пусть $\tilde{L} \in H(L)$ предельный оператор, соответствующий h_n, а $w_n(z)$ — решение уравнения (3.41), удовлетворяющий оценке (3.42) с $f(z) = g(z - h_n) \equiv S_{-h_n} g$, здесь $g \in C_\alpha$ — произвольная функция с компактным носителем. Тогда функция $u_n(z) = S_{h_n} w$ удовлетворяет соотношениям

$$S_{h_n} L S_{-h_n} u = g - S_{h_n} P S_{-h_n} g \tag{3.43}$$

и

$$\|u_n\|_{\alpha,2} \le K' \|g\|_\alpha. \tag{3.44}$$

В силу того что $h_n \to \infty$ и функция g имеет компактный носитель, последовательность $S_{-h_n} g$ равномерно сходится на каждом круге к нулю, поэтому из (3.40) получаем: $\varphi_j(S_{-h_n} g) \to 0$ при $n \to \infty$ для каждого j. Тогда правая часть уравнения (3.43) равномерно сходится на каждом круге к функции g.

В силу соотношений (3.43) и неравенства (3.44) будем считать, что

$u_n \Rightarrow v$ вместе с частными производными,

$$S_{h_n} L S_{-h_n} u_n \Rightarrow \tilde{L} v \equiv v_{\bar{z}\bar{z}} + a_1^0 v_{\bar{z}} + a_2^0 v_z + a_3^0 v_{\bar{z}} + a_4^0 v + a_5^0 \bar{v}.$$

Тогда функция $v(z)$ будет решением уравнения $\tilde{L} w = g$ и в силу (3.44) верно неравенство

$$\|v\|_{\alpha,2} \le K' \|g\|_\alpha. \tag{3.45}$$

Таким образом, предельное уравнение (3.39) для любых $\tilde{L} \in H(L)$, $f \in C_\alpha$ — с компактным носителем имеет по крайней мере одно решение, удовлетворяющее оценке вида (3.42).

Теперь для произвольной функции $f \in C_\alpha$, возьмем такую функцию $\eta(z) \in C^\infty$, что $\eta(z) = 1$ при $|z| \le 1$ и $\eta(z) = 0$ при $|z| \ge 2$. Тогда члены после-

довательности $\eta(z/n)f(z)$ имеют компактные носители и сходится в C_α к функции $f(z)$. Уравнения $\tilde{L}w=\eta(z/n)f(z)$ имеют решения $\omega_n(z)$, причем в силу оценки (3.42) последовательность $\{\omega_n(z)\}\subset C_\alpha^2$ является ограниченной и следовательно,

$$\omega_n \Rightarrow \omega_0$$

вместе с частными производными на каждом круге. Легко установить, что ω_0 будет решением уравнения (3.42).

Мы показали, что уравнение (3.39) при всех $\tilde{L}\in H(L)$ всюду разрешимо. Поэтому в силу известной теоремы (см. [43], стр. 19), для решений сопряженного уравнения

$$\left(\tilde{L}\right)^*\varphi=\psi,\ \ \varphi\in(C_\alpha)^*,\ \psi\in(C_\alpha^2)^*$$

верна оценка

$$\|\varphi\|_{C_\alpha^*}\le M\left\|\tilde{L}^*\varphi\right\|_{(C_\alpha^2)^*}.$$

Из этой оценки следует, что $Ker\,L^*=0$. Следовательно, в силу леммы 2.1 (см. §2.2) оператор $L: C_\alpha^2\to C_\alpha$ является нормально разрешимым. Отсюда и из соотношения $\dim Ker\,\tilde{L}<\infty$ получаем, что оператор $\tilde{L}$ будет *n*-нормальным. Тогда в силу теоремы 3.5 все предельные операторы $\tilde{L}: C_\alpha^2\to C_\alpha$ имеют нулевое ядро. Теорема доказана.

3.2.3. Достаточные условия *d*-нормальности. Приведем условия, обеспечивающие *d*-нормальную разрешимость оператора $L: C_\alpha^2\to C_\alpha$.

Теорема 3.8. *Пусть коэффициенты оператора* L *являются слабо осциллирующими на бесконечности и найдутся положительные числа* ε *и* R, *что для* $|z|>R$ *выполнены условия:*

a) $|a_4(z)|>|a_5(z)|+\varepsilon$;

$$b)\ |a_3(z)|^2 - |a_1(z)|^2 - |a_2(z)|^2 > 2\left(\left|\overline{a_1(z)}a_2(z) + a_4(z)\right| - \sqrt{|a_4(z)|^2 - |a_5(z)|^2}\right) + \varepsilon.$$

Тогда оператор $L: C_\alpha^2 \to C_\alpha$ *будет d-нормальным.*

Доказательство. Будем в начале считать что $a_j \in C_\alpha^1$. Установим, что все предельные операторы $\tilde{L}: C_\alpha^2 \to C_\alpha$ имеют нулевое ядро. Действительно, из условий теоремы следует, что во-первых, коэффициенты $\tilde{a}_j$, $j = 1, 2, ..., 5$ всех предельных операторов будут постоянными и во-вторых, удовлетворяют условиям:

$$|\tilde{a}_4| > |\tilde{a}_5|;$$

$$|\tilde{a}_3|^2 - |\tilde{a}_1|^2 - |\tilde{a}_2|^2 > 2\left(\left|\overline{\tilde{a}_1}\tilde{a}_2 + \tilde{a}_4\right| - \sqrt{|\tilde{a}_4|^2 - |\tilde{a}_5|^2}\right). \qquad (3.46)$$

Эти неравенства совпадают с условиями леммы 3.5. Поэтому все предельные уравнения $\tilde{L}\omega \equiv 0$ имеют в пространстве S', в том числе в пространстве C_α^2, только нулевое решение. Тогда в силу теоремы 3.5 оператор $L: C_\alpha^2 \to C_\alpha$ будет *n*-нормальным. Следовательно, образ этого оператора LC_α^2 будет замкнутым.

Остается показать, что коядро оператора, т.е. ядро сопряженного оператора $L^*: (C_\alpha^2)^* \to (C_\alpha)^*$ является конечномерным. Для нашего случая ядро сопряженного оператора L^* будет изоморфным ядру союзного оператора:

$$L^T w = w_{zz} - (\bar{a}_1 w)_z - (\bar{a}_2 w)_{\bar{z}} - (a_3 \overline{w})_{\bar{z}} + \bar{a}_4 w + a_5 \overline{w}. \qquad (3.47)$$

Это устанавливается стандартным образом аналогично как в теории эллиптических операторов на компактных многообразиях [36], [102].

Оператор L^T представим в виде

$$L^T w = w_{zz} - \bar{a}_1 w_z - \bar{a}_2 w_{\bar{z}} - a_3 \overline{w}_{\bar{z}} + \left[\bar{a}_4 - (\bar{a}_1)_z - (\bar{a}_2)_{\bar{z}}\right] w + \left[a_5 - (a_3)_{\bar{z}}\right] \overline{w} = 0. \qquad (3.48)$$

Нетрудно доказать, что у слабо осциллирующих на бесконечности функций $a(z)$ справедливы предельные соотношения

$$a_{\bar{z}} \to 0, a_{\bar{z}} \to 0 \text{ при } z \to \infty.$$

Поэтому предельные операторы для оператора L^T имеют вид

$$\tilde{L}^T w = w_{zz} - \bar{a}_1^0 w_z - \bar{a}_2^0 w_{\bar{z}} - a_3^0 \overline{w}_{\bar{z}} + \bar{a}_4^0 w + a_5^0 \overline{w}. \qquad (3.49)$$

Легко уследить, что коэффициенты предельных операторов (3.49) удовлетворяют условиям (3.20) леммы 3.5. Следовательно, для всех предельных операторов $Ker\tilde{L} = \{0\}$ Тогда из теоремы 3.5 получаем, что оператор $L^T : C_\alpha^2 \to C_\alpha$ является *n*-нормальным и поэтому имеет конечномерное ядро. Поэтому оператор L^* также имеет конечномерное ядро.

Итак, в случае гладких коэффициентов *d*-нормальность оператора L установлена. В общем случае, используя метод усреднения коэффициентов можно доказать *d*-нормальность оператора L. Теорема доказана.

3.3. Системы с операторами Лапласа и ∂_{zz}

В этом параграфе будем исследовать системы уравнений и операторы видов

$$M_1 w \equiv \Delta w + a_1(z) w_{\bar z} + a_2(z) w_z + a_3(z) \overline{w}_{\bar z} + \\ + a_4(z) w + a_5(z) \overline{w} = 0, \tag{3.50}$$

$$M_2 w \equiv w_{zz} + a_1(z) w_{\bar z} + a_2(z) w_z + a_3(z) \overline{w}_{\bar z} + \\ + a_4(z) w + a_5(z) \overline{w} = 0, \tag{3.51}$$

где $\Delta-$оператор Лапласа, в различных функциональных пространствах и в различных ситуациях.

Для систем видов (3.50) и (3.51) задача об ограниченных на всей комплексной плоскости C решениях может быть не нётеровым. Например, для системы

$$\Delta w + c\overline{w} = 0,$$

здесь $C \neq 0$ все ограниченные на C функции.

$$w(z) = p\omega(z) + q\overline{\omega(z)},$$

являются решениями и линейно независимы, где

$p-$ произвольная постоянная,

$$q = \frac{|c|}{\overline{c}}\overline{p},$$

$$\omega(z) = \exp\left[2i\sqrt{|c|}\,\mathrm{Re}\left(e^{-i\alpha} z\right)\right],\ 0 \le \alpha < 2\pi.$$

Пример системы вида (2.51) будет приведен позже (см. п. 3.3.3).

3.3.1. Системы с оператором Лапласа и с постоянными коэффициентами. Рассмотрим систему вида

$$\Delta w + a_1 w_{\bar z} + a_2 w_z + a_3 \overline{w}_{\bar z} + a_4 w + a_5 \overline{w} = 0 \tag{3.52}$$

с постоянными коэффициентами.

Отметим, что аналогично как в параграфе 2 условие отсутствия ненулевых решений систем вида (3.49) в пространстве C_α^2 будет критерием нётеровости оператора $M_1 : C_\alpha^2 \to C_\alpha$. Систему (3.52) будем исследовать в пространствах Шварца. Результаты опубликованы в работе [4-А] и схема исследования следующая:

«В пространстве S' уравнение (3.52) эквивалентно функциональному уравнению

$$\left(-|\zeta|^2 + 2ia_1\zeta + 2ia_2\overline{\zeta} + 4a_4\right)\hat{w}(\zeta) + (2ia_3\zeta + 4a_5)\hat{\overline{w}}(\zeta) = 0, \qquad (3.53)$$

здесь $\hat{w}(\zeta)$, $\hat{\overline{w}}(\zeta)$ – образы Фурье распределений $w(\zeta)$, $\overline{w}(\zeta) \in S'$. Используя равенство $\overline{\hat{w}(-\zeta)} = \hat{\overline{w}}(\zeta)$, из (3.53) получим

$$\left(2i\overline{a_3}\overline{\zeta} + 4\overline{a}_5\right)\hat{w}(\zeta) + (-|\zeta|^2 + 2i\overline{a_1}\overline{\zeta} + 2i\overline{a}_2\zeta + 4\overline{a}_4)\hat{\overline{w}}(\zeta) = 0. \qquad (3.54)$$

Соотношения (3.53) и (3.54) образуют систему двух линейных алгебраических уравнений в пространстве S':

$$\begin{cases} \left(-|\zeta|^2 + 2ia_1\zeta + 2ia_2\overline{\zeta} + 4a_4\right)\hat{w}(\zeta) + (2ia_3\zeta + 4a_5)\hat{\overline{w}}(\zeta) = 0, \\ \left(2i\overline{a_3}\overline{\zeta} + 4\overline{a}_5\right)\hat{w}(\zeta) + (-|\zeta|^2 + 2i\overline{a_1}\overline{\zeta} + 2i\overline{a}_2\zeta + 4\overline{a}_4)\hat{\overline{w}}(\zeta) = 0. \end{cases} \qquad (3.55)$$

Вычислив определитель этой системы, имеем

$$\Delta(\zeta) = |\zeta|^4 + 4\left(|a_3|^2 - |a_1|^2 - |a_2|^2 - 2\operatorname{Re}a_4\right)|\zeta|^2 - 8\operatorname{Re}\left(a_1\overline{a}_2\zeta^2\right) +$$
$$16\left(|a_4|^2 - |a_5|^2\right) - 4i\operatorname{Re}\left[\left(a_1\zeta + a_2\overline{\zeta}\right)|\zeta|^2 - 4\left(a_1\overline{a}_4 + a_3\overline{a}_5\right)\zeta - 4a_2\overline{a}_4\overline{\zeta}\right].$$

Если $\Delta(\zeta) \neq 0 \quad \forall \zeta \in C,$ то система (3.55) будет иметь только нулевое решение $\hat{w}(\zeta) = 0$ и тогда $w(z) \equiv 0$. Если же $\Delta(\zeta) = 0$ на каком-нибудь множестве *K*, то носитель $\operatorname{supp}\hat{w}(\zeta)$ распределения $\hat{w}(\zeta)$ будет принадлежать множеству *K*, и зная *K* можно определить $\hat{w}(\zeta)$ и далее $w(z)$.

Пусть $\Gamma,\ \Gamma_1,\ \Gamma_2$ — множество нулей функций $\Delta(\zeta), \operatorname{Re}\Delta(\zeta), \operatorname{Im}\Delta(\zeta)$ соответственно. Тогда $\Gamma = \Gamma_1 \cap \Gamma_2$ и множества $\Gamma_1,\ \Gamma_2$ имеют такие свойства: Γ_1 — ограничено, симметрично относительно начало координат *O*, при вещественном $a_1\bar{a}_2$ — относительно осей координат; $\Gamma_2 = C$ при $a_1 = a_2 = a_3 a_5 = 0,$ множество Γ_2 содержит точку *O*» [4-A].

По аналогии с параграфом 3.2 (лемма 3.5) в этом случае справедлива следующая

Лемма 3.6. *Пусть коэффициенты уравнения (3.52) удовлетворяют условиям*

$$|a_4| > |a_5|, \quad |a_3|^2 + 2\sqrt{|a_4|^2 - |a_5|^2} > \left(|a_1| + |a_2|\right)^2 + 2\operatorname{Re} a_4. \qquad (3.56)$$

Тогда множество Γ *будет пустым.*

Доказательство этой аналогичен доказательству леммы 1 из нашей работы [3-A]. «Пусть выполнены условия (3.56). Рассмотрим вещественную часть определителя $\Delta(\zeta)$:

$$f(\zeta) = |\zeta|^4 + 4\left(|a_3|^2 - |a_1|^2 - |a_2|^2 - 2\operatorname{Re} a_4\right)|\zeta|^2 - 8\operatorname{Re}\left(a_1\bar{a}_2\zeta^2\right) + \\ + 16\left(|a_4|^2 - |a_5|^2\right).$$

Покажем, что эта функция является положительной при всех ζ. Имеем очевидное неравенство

$$f(\zeta) \geq |\zeta|^4 + 4\left(|a_3|^2 - |a_1|^2 - |a_2|^2 - 2|a_1\bar{a}_2| - 2\operatorname{Re} a_4\right)|\zeta|^2 + 16\left(|a_4|^2 - |a_5|^2\right)$$

или

$$f(\zeta) \geq |\zeta|^4 + 4\left(|a_3|^2 - \left(|a_1| + |a_2|\right)^2 - 2\operatorname{Re} a_4\right)|\zeta|^2 + 16\left(|a_4|^2 - |a_5|^2\right). \qquad (3.57)$$

Пусть

$$a=|a_3|^2-(|a_1|+|a_2|)^2-2\mathrm{Re}a_4,\ b=|a_4|^2-|a_5|^2,\ t=|\zeta|^2.$$

Рассмотрим функцию $h(t)=t^2+4at+16b$ при $t\geq 0$. Для $a\geq 0$ в силу второго неравенства из условия (3.57) (которое эквивалентно $b>0$), имеем

$$h(t)>0\ \forall t\geq 0.$$

Если $a<0$, то функция $h(t)$ в точке $t_0=-2a$ имеет минимум

$$\min_t h(t)=4(4b-a^2).$$

Первое неравенство из (3.56) запишем в виде

$$a+2\sqrt{b}>0.$$

Отсюда с учетом того, что $a<0$ имеем $4b-a^2>0$. Поэтому $\min_t h(t)>0$ и следовательно, $h(t)>0\ \forall t\geq 0$. Тогда из неравенства (2.57), которое можно переписать так $f(\zeta)\geq h(|\zeta|^2)$, получим $f(\zeta)>0\ \forall\zeta$ и $\Gamma=\varnothing$. Лемма доказана» [3-А].

Лемма 3.6 важна при исследовании систем у.ч.п. пространствах C_z

3.3.2. Системы с переменными коэффициентами. Рассмотрим систему вида

$$\begin{aligned}M_1w\equiv\Delta w+a_1(z)w_{\bar z}+a_2(z)w_z+a_3(z)\overline{w}_{\bar z}+\\+a_4(z)w+a_5(z)\overline{w}=0.\end{aligned}\qquad(3.58)$$

Как было отмечено в начале этого параграфа для таких систем задача о решениях из C_α^2 может быть не нётеровой. Поэтому представляет интерес нахождение условий, при выполнении которых нётеровость указанной задачи имеет место.

Предположим, что коэффициенты системы (3.58) принадлежат пространству C_α. Тогда дифференциальное выражение

$$lw = \Delta w + a_1(z)w_{\bar z} + a_2(z)w_z + a_3(z)\overline{w}_{\bar z} + a_4(z)w + a_5(z)\overline{w}$$

для $w \in C_\alpha^2$ будет принадлежат C_α и порождает линейный оператор $M_1 : C_\alpha^2 \to C_\alpha$. Аналогично как в параграфе 3.2 можно показать, что этот оператор будет ограниченным.

Точно также как в параграфе 3.2 для $a \in C_\alpha$ и $\{h_n\} \subset C$, $h_n \to \infty$ используя последовательность $a(z + h_n)$ можно строить предельные функции $\tilde a(z)$ из C_α и далее по коэффициентам оператора $M_1 : C_\alpha^2 \to C_\alpha$ и по всевозможным последовательностям $h_n \to \infty$ ввести предельные операторы вида

$$\tilde M_1 w = \Delta w + \tilde a_1 w_{\bar z} + \tilde a_2 w_z + \tilde a_3 \overline{w}_{\bar z} + \tilde a_4 w + \tilde a_5 \overline{w}. \qquad (3.59)$$

Как прежде совокупность операторов вида (3.59) обозначим символом $H(M_1)$. Для коэффициентов со слабо осцилляцией при $z \to \infty$, как было указано раньше, коэффициенты предельных операторов будут постоянными.

Имеется тесная связь между *n*-нормальностью, а также *d*-нормальностью оператора $M_1 : C_\alpha^2 \to C_\alpha$ и нетривиальной разрешимостью уравнений с предельными операторами. Эти связи можно сформулировать в виде следующих утверждений.

Теорема 3.9. *Пусть* $a_j(z) \in C_\alpha$. *Оператор* $M_1 : C_\alpha^2 \to C_\alpha$ *будет n-нормальным, тогда и только тогда, когда все предельные уравнения* $\tilde M_1 w = 0$ *в пространстве* C_α^2 *не имеют ненулевых решений.*

Теорема 3.10. *Пусть* $a_j(z) \in C_\alpha$. *Если оператор* $M_1 : C_\alpha^2 \to C_\alpha$ *является d-нормальным, то необходимо чтобы у всех предельных операторов* $\tilde M_1 : C_\alpha^2 \to C_\alpha$ *ядро было нулевым.*

Аналогом теоремы 3.7 о достаточных условиях d-нормальности оператора $M_1 : C_\alpha^2 \to C_\alpha$ является следующее утверждение.

Теорема 3.11. *Пусть коэффициенты оператора* M_1 *являются слабо осциллирующими на бесконечности и найдутся положительные числа* ε *и* R, *что для* $|z| > R$ *выполнены условия:*

a) $|a_4(z)| > |a_5(z)| + \varepsilon;$

b) $|a_3(z)|^2 + 2\sqrt{|a_4(z)|^2 - |a_5(z)|^2} > \left(|a_1(z)| + |a_2(z)|\right)^2 + 2\,\mathrm{Re}\,a_4 + \varepsilon.$

Тогда оператор $M_1 : C_\alpha^2 \to C_\alpha$ *будет* d*-нормальным.*

Доказательство теоремы 3.9. Необходимость. Предположим, что оператор $M_1 : C_\alpha^2 \to C_\alpha$ является n-нормальным. Докажем, что у всех предельных операторов $\tilde{M}_1 : C_\alpha^2 \to C_\alpha$ ядро будет нулевым.

Система (3.58) является эллиптической, поэтому для неё имеет место теорема единственности (см. [17], стр. 148). В силу этого следующее подпространство из C_α^2

$$E = \left\{ w : w \in C_\alpha^2,\ w(z) = 0 \ при\ |z| \le 1 \right\}$$

имеет с ядром $KerM_1$ оператора M_1 нулевое пересечение

$$E_0 \cap KerL = \{0\}$$

и согласно лемме 2.2 (см. §2.1) образ $F = M_1 E$ будет подпространством пространства C_α.

Итак, оператор M_1 взаимно однозначно отображает E из C_α^2 на подпространство F из C_α. Согласно теореме Банаха оператор $M_1 : E \to F$ будет иметь ограниченный обратный. Тогда найдется постоянная $k > 0$, что

$$\left\| M_1^{-1} g \right\|_{\alpha,2} \le K \| g \|_{\alpha} \qquad \forall g \in F.$$

Отсюда имеем следующее неравенство

$$\| M_1 w \|_{\alpha} \ge m \| w \|_{\alpha,2}, \tag{3.60}$$

где $m = K^{-1}$, $w \in E$.

Пусть w произвольная функция с компактным носителем из C_{α}^{2} и $\{h_n\} \subset C$ произвольная последовательность с $h_n \to \infty$. При больших значениях n функции $(S_{-h_n} w)(z) = w(z - h_n)$ обращаются в нуль во всех точках круга $\{z : |z| \le 1\}$ и поэтому $S_{-h_n} w \in E$. Тогда из (3.60) будем иметь

$$\left\| M_1 (S_{-h_n} w) \right\|_{\alpha} \ge m \left\| S_{-h_n} w \right\|_{\alpha,2}. \tag{3.61}$$

Функции S_{-h_n} w имеют такие свойства:

$$\left\| S_{-h_n} w \right\|_{\alpha,2} = \| w \|_{\alpha,2}, \ \left\| S_{h_n} M_1 (S_{-h_n} w) \right\|_{\alpha} = \left\| M_1 (S_{-h_n} w) \right\|_{\alpha}.$$

Поэтому (2.61) можно представить так

$$\left\| S_{h_n} M_1 (S_{-h_n} w) \right\|_{\alpha} \ge m \| w \|_{\alpha,2}. \tag{3.62}$$

Гёльдеровы пространства C_{α}^{κ} с уменьшением α расширяются. Поэтому согласно известной теоремы (см. [17], стр. 144) оператор $M_1 : C_{\alpha'}^{1} \to C_{\alpha'}$ является n-нормальным. Тогда подобно оценке (3.62) будет иметь место неравенство

$$\| g_n \|_{\alpha'} \ge m' \| w \|_{\alpha',2}, \tag{3.63}$$

здесь

m' – постоянная, общая для всех w и n,

$$g_n = S_{h_n} M_1 (S_{-h_n} w).$$

Нетрудно подсчитать, что

$$g_n = \Delta w + a_1(z+h_n) w_{\bar z} + a_2(z+h_n) w_z + \\ + a_3(z+h_n)\overline{w}_{\bar z} + a_4(z+h_n) w + a_5(z+h_n)\overline{w}.$$

Как было отмечено, последовательности $\{a_k(z+h_n)\}_{n=1}^{\infty}$, $k=\overline{1,5}$ имеют подпоследовательности $\{a_k(z+h_{n_j})\}_{j=1}^{\infty}$, $k=\overline{1,5}$, со свойством

$$a_k\left(z+h_{n_j}\right) \Rightarrow a_k^0,\ |z|<R,\ R - \text{произвольное}.$$

Пусть

$$p_j \equiv g_{n_j},\ M_{10} w = \Delta w + a_1^0 w_{\bar z} + a_2^0 w_z + a_3^0 w_{\bar z} + a_1^0 w + a_1^0 \overline{w}.$$

Тогда имеем

$$\left\| p_j - M_{10} w \right\|_{\alpha'} = \sup \left| [\sum_{\kappa=1}^{5} a_k(z+h_{n_j}) - a_{k0}^0] w(z) \right| + \sup_{z_1 \neq z_2} q(z_1,\ z_2),$$

где

$$q_j(z_1,\ z_2) = |z_1 - z_2|^{-\alpha'} \left| [\sum_{\kappa=1}^{5} a_k(z+h_{n_j}) - a_{k0}^0] w(z_1) - [\sum_{\kappa=1}^{5} a_k(z+h_{n_j}) - a_{k0}^0] w(z_2) \right|.$$

В силу того что у функции $w(z)$ носитель K является компактным, справедливо соотношение

$$\sup \left| [\sum_{\kappa=1}^{5} a_k(z+h_{n_j}) - a_{k0}^0] w(z) \right| \to 0 \text{ при } j \to \infty. \qquad (3.64)$$

Пусть $q_j^0 = \sup_{z_1 \neq z_2} q_j(z_1, z_2)$ и $\varepsilon_j \to 0$. Выберем точки $\xi_j,\ \eta_j \in C,\ \xi_j \neq \eta_j$, так что

$$q_j^0 - \varepsilon_j \le q_j(\varsigma_j, \eta_j) \le q_j^0,\ j = 1,\ 2, \ldots \qquad (3.65)$$

и пусть подпоследовательность $\delta_{j_\kappa} = \left| \xi_{j_\kappa} - \eta_{j_\kappa} \right|$ имеет предел δ. Так как функция $q(z_1,\ z_2)$ является симметричной, то возможны следующие два случая:

а) $\xi_{j_K} \in K,\ \eta_{j_K} \in K,\quad k=1,2,...;$ б) $\xi_{j_K} \in K,\ \eta_{j_K} \notin K, k=1,2,...$

Случай а). Справедливы неравенства

$$q_{j_k}(\xi_{j_k}, \eta_{j_k}) \le \left|\xi_{j_k} - \eta_{j_k}\right|^{-\alpha'} \cdot$$
$$\left\{\left|[\sum_{l=1}^{5} a_l(\xi_{j_k} + h_{n_{j_k}}) - a_l^0]w(\xi_{j_k})\right| + \left|[\sum_{l=1}^{5} a_l(\eta_{j_k} + h_{n_{j_k}}) - a_l^0]w(\eta_{j_k})\right|\right\} \le \tag{3.66}$$
$$\left|\xi_{j_k} - \eta_{j_k}\right|^{-\alpha'}\left\{\left|[\sum_{l=1}^{5} a_l(\xi_{j_k} + h_{n_{j_k}}) - a_l^0]w(\xi_{j_k})\right| + \left|[\sum_{l=1}^{5} a_l(\xi_{j_k} + h_{n_{j_k}}) - a_l^0]w(\eta_{j_k})\right|\right\}.$$

В силу того что для любой ограниченной последовательности $\{\xi_j\} \subset C$ имеет место соотношение

$$\lim_{j\to\infty}\left|\sum_{l=1}^{5} a_l(\xi_j + h_{n_{jk}}) - a_l^0\right| = 0,$$

то при $\delta > 0$ из (3.66) путем предельного перехода при $k \to \infty$, имеем

$$\lim_{k\to\infty} q_{j_k}(\xi_{j_k}, \eta_{j_k}) = 0 \tag{3.67}$$

При $\delta = 0$ то из соотношений

$$q_{jk}(\xi_{jk}, \eta_{jk}) \le \left|\xi_{jk} - \eta_{jk}\right|^{-a'}\left(\left|\sum_{i-1}^{5} a_i(\xi_{jk} h_{n_{jk}}) - a_i^0\right|\left\|w(\xi_{jk}) - w(\eta_{jk})\right\|_c + \right.$$
$$\left. + \left|\sum_{i-1}^{5} a_i(\xi_{jk} + h_{n_{jk}}) - \sum_{i-1}^{5} a_i(\eta_{jk} + h_{n_{jk}})\right|\left\|w(\eta_{jk})\right\|_c\right) \le$$
$$\le \left|\sum_{i-1}^{5} a_i(\xi_{jk} + h_{n_{jk}}) - a_1^0\right| H_{a'}(w) + \sup_{z\in C}\left\|w(z)\right\|_c \sum_{i-1}^{5} H_a(a_i)\left|\xi_{jk} - \eta_{jk}\right|^{a-d}$$

здесь $H_\alpha(a_l),\ H_{\alpha'}(w)$ – постоянные Гёльдера, вытекает соотношение (3.67). Далее из (3.65) и (3.67) следует, что $q_j^0 \to 0$ при $j \to \infty$. Отсюда и из (3.64) получим нужное нам предельное соотношение:

$$\lim_{k\to\infty}\left\|p_{j_k} - M_{10}w\right\|_{\alpha'} = 0.$$

Случай 2. Так как $w(\eta_{j_k}) = 0,$ то из (3.66) получим

$$q_{j_k}(\xi_{j_k}, \eta_{j_k}) \le \left|\xi_{j_k} - \eta_{j_k}\right|^{-\alpha'} \left|\sum_{l=1}^{5} a_l(\xi_{j_\kappa} + h_{n_{j_k}}) - a_l^0\right| \left\| w(\xi_{j_k}) - w(\eta_{j_k}) \right\|_C \le$$

$$\le \left|\sum_{l=1}^{5} a_l(\xi_{j_\kappa} + h_{n_{j_k}}) - a_l^0\right| H_{\alpha'}(w).$$

Тогда имеем

$$\lim_{k\to\infty} q_{j_k}(\xi_{j_k}, \eta_{j_k}) = 0\,.$$

Поэтому $q_{j_k}^0 \to 0$ и $\left\| p_{j_k} - L_0 w \right\|_{\alpha'} = 0$ при $k \to \infty$. Это нужно было установить.

Далее в соотношение (3.63) при $n = n_{j_k}$ переходим к пределу:

$$\left\| M_{10} w \right\|_{\alpha'} \ge m' \left\| w \right\|_{\alpha',2}. \tag{3.68}$$

Теперь используя свойство непрерывности слева по α гёльдеровых норм $\|\,.\,\|_\alpha$ и $\|\,.\,\|_{\alpha,2}$ (см. [5], стр. 28) из (3.68) при $\alpha' \to \alpha - 0$, получим

$$\left\| M_{10} w \right\|_{\alpha} \ge m' \left\| w \right\|_{\alpha,2}, \tag{3.69}$$

где $w \in C_\alpha^2$ и имеет компактный носитель.

В дальнейшем установим справедливость (3.69) для произвольной функции $w \in C_\alpha^1$. Возьмем функцию $\varepsilon(z) \in D$ такую, что $0 \le \varepsilon(z) \le 1 \quad \forall z \in C$ и $\varepsilon(z) \equiv 1$ при $|z| \ge 2$. Так как функции $v_n(z) = \varepsilon\left(\dfrac{z}{n}\right) w(z)$ имеют компактный носитель и являются элементами пространства C_α^1, то для них имеет место оценка типа (3.69):

$$\left\| M_{10} v_n \right\|_{\alpha} \ge m' \left\| v_n \right\|_{\alpha,2}.$$

Поэтому учитывая соотношения

$$M_{10} v_n = M_{10}\left[\varepsilon\left(\frac{z}{n}\right) w(z)\right] = \varepsilon\left(\frac{z}{n}\right) M_{10} w + \frac{1}{n}\varepsilon_{\bar z}\left(\frac{z}{n}\right) w$$

и

$$\|M_{10}v_n\|_\alpha \le \left\| \varepsilon\left(\frac{z}{n}\right)M_{10}w \right\|_\alpha + \frac{1}{n}\left\| \varepsilon_{\bar z}\left(\frac{z}{n}\right)w \right\|_\alpha$$

имеем

$$\left\| \varepsilon\left(\frac{z}{n}\right)M_{10}w \right\|_\alpha + \frac{1}{n}\left\| \varepsilon_{\bar z}\left(\frac{z}{n}\right)w \right\|_\alpha \ge m'\left\| \varepsilon\left(\frac{z}{n}\right)w \right\|_{\alpha,2}$$

Переходя при $n \to \infty$ к пределу, получим

$$\|M_{10}w\|_\alpha \ge m'\|w\|_{\alpha,2} \quad \forall\, w \in C_\alpha^2,$$

Отсюда заключаем, что предельное уравнение

$$M_{10}w \equiv \Delta w + a_1^0 w_{\bar z} + a_2^0 w_z + a_3^0 w_{\bar z} + a_1^0 w + a_1^0 \overline{w} = 0 \qquad (3.70)$$

в C_α^2 имеет только нулевое решение. Необходимость доказана.

Достаточность. Допустим, что уравнения (3.70) в C_α^2 имеют только нулевое решение. Покажем, что оператор $M_1 : C_\alpha^2 \to C_\alpha$ будет n-нормальным.

Для оператора $M_1 : C_\alpha^2 \to C_\alpha$ имеет место априорная оценка вида

$$\|w\|_{\alpha,2} \le K\left(\|M_1 w\|_\alpha + \max_{|t|\le 1}|w(t)| \right) \forall\, w \in C_\alpha^2, \qquad (3.71)$$

здесь $K > 0$ общая для всех W (эта априорная доказывается подобно операторам первого порядка, см. [8], стр. 820).

Пусть $\{w_n(z)\} \in KerM_1$ и $\|w_n\|_{\alpha,2} = 1$. Используя теорему Арцела (см. [42], 104) и априорную оценку (3.71) можно установить, что существует подпоследовательность $\{w_{n_j}\}$ и её предельная функция $w_0(z)$ для которых верны соотношения:

$$w_0(z) \in C_\alpha^2 \text{ и } M_1 w_0 = 0.$$

Поэтому из неравенства (3.71) следует, что

$$\left\|W_{n_j} - W_0\right\|_{a,2} \to 0 \qquad (3.72)$$

$$\left\|w_{n_j} - w_0\right\|_{\alpha,2} \le K \max_{|t|\le 1}\left|w_{n_j}(t) - w_0(t)\right|, \qquad (3.72)$$

причем $\|w_0\|_{\alpha,2} = 1$. Мы получили, что единичная сфера ядра оператора M_1 компактна и тогда из леммы Рисса (см., например, [47]) следует, что ядро оператора M_1 имеют конечную размерность.

Далее установим замкнутость образа $M_1 C_\alpha^2$. Возьмем последовательность $\{f_n\}$ из образа $M_1 C_\alpha^2$, сходящуюся в C_α к функции f_0. Через $w_n(z)$ обозначим решение уравнения $M_1 w = f_n$. Множество всех решений этого уравнения обозначим через B_n, оно представляется в виде $w_n + KerM_1$.

Для $v \in KerM_1$ имеем

$$\lim_{\|v\|_{\alpha,2}\to\infty}\|w_n + v\|_{\alpha,2} \ge \lim_{\|v\|_{\alpha,2}\to\infty}\left(\|v\|_{\alpha,2} - \|w_n\|_{\alpha,2}\right) = \infty$$

Поэтому функционал

$$p_n(v) = \|w_n + v\|_{\alpha,2},\ v \in KerM_1$$

в некоторой точке $v_n \in KerM_1$ достигает своего минимума:

$$p_n(v_n) = \min_{v\in KerM_1}\|w_n + v\|_{\alpha,2}.$$

Функции $\omega_n = w_n(z) + v_n(z),\ r_n = \|\omega_n\|_{\alpha,2}$ принадлежат B_n и удовлетворяют неравенству $\|\omega_n\|_{\alpha,2} \le \|w\|_{\alpha,2}$, $w \in B_n$. Последовательность $\{r_n\}$ будет ограниченным, так как если $r_n \to \infty$, то рассматривая последовательности $u_n = \dfrac{\omega_n}{r_n}$, $g_n = \dfrac{f_n}{r_n}$, имеем

$$\|u_n\|_{\alpha,2} = 1,\ M_1 u_n = g_n,\ \|g_n\|_\alpha \to 0. \qquad (3.73)$$

Из соотношений (3.73) и (3.72) можно заключить, что есть такая подпоследовательность $\{u_{n_j}\}$, которая по норме C_α^2 сходится, причем для предела $u_0(z)$ справедливо равенство

$$M_1 u_0 = 0,$$

Тогда

$$M_1(u_{n_j} - u_0) = g_{n_j}$$

т.е.

$$M_1(r_{n_j}(u_{n_j} - u_0)) = f_{n_j},$$

Отсюда получаем

$$r_{n_j}(u_{n_j} - u_0) \in B_{n_j}.$$

Согласно выбора $\omega_n(z)$, справедливо неравенство

$$\left\| r_{n_j}(u_{n_j} - u_0) \right\|_{\alpha,2} \geq \left\| \omega_{n\,j} \right\|_{\alpha,2} = r_{n_j}$$

т.е.

$$\left\| u_{n_j} - u_0 \right\|_{\alpha,2} \geq 1.$$

Это неравенство означает, что $u_{n_j}(z)$ не может иметь пределом $u_0(z)$ и мы получаем противоречие.

Поэтому $\{r_n\}$ является ограниченной. Далее подобно предыдущему можно найти подпоследовательность $\{\omega_{n_j}\}$ и функцию $\omega_0(z)$, такие что

$$\left\| \omega_{n_j} - \omega_0 \right\|_{\alpha,2} \to 0 \quad при \ n_j \to \infty.$$

Поэтому переходя в равенстве $M_1 \omega_{n_j} = f_{n_j}$ к пределу, получим $L\omega_0 = f_0$, т.е. $f_0 \in LC_\alpha^2$.

Замкнутость образа C_α^2 доказана, поэтому оператор $M_1 : C_\alpha^2 \to C_\alpha$ является n-нормальным. Теорема 3.9 доказана.

Доказательство теоремы 3.10. Пусть оператор $M_1 : C_\alpha^2 \to C_\alpha$ является d-нормальным. Докажем, что у всех предельных операторов $\tilde{M}_1 \in H(M_1)$ ядро нулевое.

Рассмотрим неоднородные предельные уравнения

$$\tilde{M}_1 w = f,\ \tilde{M}_1 \in H(M_1),\ f \in C_\alpha. \tag{3.74}$$

Покажем, что эти уравнения разрешимы в пространстве C_α^2. Возьмем $\varphi \in Ker M_1{}^*$, т.е. $\varphi \in (C_\alpha)^*$ и $\varphi(M_1 w) = 0\ \forall w \in C_\alpha^2$, а также ограниченную в C_α последовательность f_n, равномерно сходящуюся на каждом круге к функции f. Докажем, что верно предельное соотношение

$$\varphi(f_n) \to \varphi(f). \tag{3.75}$$

Согласно определению d-нормальности оператор $M_1 : C_\alpha^2 \to C_\alpha$ многообразие $M_1 C_\alpha^2$ будет замкнутым, а фактор-пространство $C_\alpha / M_1 C_\alpha^2$ –конечномерным. Поэтому найдется конечномерное подпространство $E \in C_\alpha$ такое, что $C_\alpha = E \oplus M_1 C_\alpha^2$.

Пусть $f_n = g_n + h_n$, здесь $g_n \in E,\ h_n \in M_1 C_\alpha^2$. Последовательность g_n является ограниченной, поэтому у неё есть подпоследовательность g'_{n_j} имеющую в C_α предел g' и тогда h'_{n_j} равномерно сходится на каждом круге к функции $h' = f - g'$. Покажем, что $h' \in M_1 C_\alpha^2$. Так как оператор $M_1 : C_\alpha^2 \to C_\alpha$ нормально разрешимый, то из [96], стр. 105 получаем, что существуют $w_{n_j} \in C_\alpha^2$ такие, что

$$M_1 w_{n_j} = h'_{n_j},\ \left\| w_{n_j} \right\|_{\alpha,2} \le K \left\| h'_{n_j} \right\|_\alpha,$$

здесь $K > 0$ и не зависит от h'_{n_j}. Отсюда следует, что подпоследовательность w_{n_j} вместе с производными второго порядка равномерно сходится на каждом круге к такой функции $w_0(z)$, что $M_1 w_0 = h'$, т.е. $h' \in M_1 C_\alpha^2$.

Далее имеем

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(f_n) = \lim_{n\to\infty} \varphi(g_n) = \varphi(g') = \varphi(g' + h') = \varphi(f).$$

Возьмем базис $g_1, g_2, \ldots, g_m$ в E и пусть

$$f \in C_\alpha,\ f = g + h,$$

здесь $g \in E,\ h \in M_1 C_\alpha^2$. Тогда

$$g = c_1 g_1 + c_2 g_2 + \ldots c_m g_m,\ c_j \in R$$

Построим линейные функционалы:

$$\varphi_j(f) = c_j,\ j = 1, \ldots, m.$$

и покажем, что они непрерывны. Действительно, если

$$f_n \to 0 \text{ в } C_\alpha \text{ и } f_n = l_n + h_n,$$

здесь $l_n \in E,\ h_n \in M_1 C_\alpha^2$, то как было указано выше последовательность l_n является ограниченной и в силу конечномерности E можно считать, что она сходится в C_α к функции $l(z)$, тогда h_n будет сходиться в C_α к функции $-l(z)$ и в силу того что $E \cap M_1 C_\alpha^2 = 0$ имеем: $l(z) \equiv 0$. Поэтому

$$\varphi_j(f_n) = \varphi_j(l_n) \to 0,\ j = 1, \ldots, m.$$

Далее очевидно, что функционалы φ_j линейно независимы и

$$\varphi_j(M_1 w) = 0\ \forall w \in C_\alpha^2,\ j = 1, \ldots, m.$$

Следовательно, φ_j, $j=1,...,m$ образуют базис в $KerM_1*$.

Построим линейный ограниченный в C_α оператор

$$Pf=\sum_{j=1}^{m}\varphi_j(f)g_j.$$

Этот оператор переводит C_α в E и имеет место равенство

$$\varphi_k(f-Pf)=\varphi_k(f)-\sum_{j=1}^{m}\varphi_j(f)\varphi_k(g_j)=0.$$

Поэтому правая часть уравнения

$$M_1w=f-Pf \tag{3.76}$$

ортогональна всем решениям сопряженного уравнения $M_1*v=0$. Тогда из леммы 2.1 (см. §2.2) следует, что уравнение (3.76) имеет решение $w(z)$ и как указано выше справедлива оценка

$$\|w\|_{\alpha,2}\le K\|f-Pf\|_\alpha\le K'\|f\|_\alpha, \tag{3.77}$$

здесь $K'>0$ и не зависит от f.

Возьмем $\{h_n\}\subset C$ такую что $h_n\to\infty$ и пусть $\tilde{M}_1\in H(M_1)$ предельный оператор, соответствующий h_n, а $w_n(z)-$решение уравнения (3.76), удовлетворяющий оценке (3.77) с $f(z)=g(z-h_n)\equiv S_{-h_n}g$, здесь $g\in C_\alpha-$ произвольная функция с компактным носителем. Тогда функция $u_n(z)=S_{h_n}w$ удовлетворяет соотношениям

$$S_{h_n}M_1S_{-h_n}u=g-S_{h_n}PS_{-h_n}g \tag{3.78}$$

и

$$\|u_n\|_{\alpha,2}\le K'\|g\|_\alpha. \tag{3.79}$$

Из (3.75), (3.78) и (3.79) в силу того что $h_n\to\infty$ и функция g имеет компактный носитель, получим следующие предельные соотношения:

$$S_{-hn}g \Rightarrow 0,\ |z| < R \qquad R \text{ – произвольное,}$$
$$f_j(S_{-hn}g) \to 0\ при\ n \to \infty$$
$$S_{hn}PS_{-hn}g \Rightarrow 0\ \ |z| < R$$

В силу соотношений (3.78) и неравенства (3.79) будем считать, что

$u_n \Rightarrow v$ вместе с частными производными,

$$S_{h_n}M_1S_{-h_n}u_n \Rightarrow \tilde{M}_1 v\ = \Delta v +$$

$$a_1^0 v_{\bar{z}} + a_2^0 v_z + a_3^0 v_{\bar{z}} + a_4^0 v + a_5^0 \bar{v}.$$

Тогда функция $v(z)$ будет решением уравнения $\tilde{M}_1 w = g$ и в силу (3.79) верно неравенство

$$\|v\|_{\alpha,2} \le K'\|g\|_\alpha. \tag{3.80}$$

Итак, у уравнения вида (3.74) $\forall\ \tilde{M}_1 \in H(M_1),\ f \in C_\alpha -$ с компактным носителем, есть хотя бы одно решение, для которого справедливо неравенство вида (3.77).

Пусть $\eta(z) \in C^\infty$, такая, что $\eta(z) = 1$ при $|z| \le 1$ и $\eta(z) = 0$ при $|z| \ge 2$. Теперь для произвольной функции $f \in C_\alpha$, У последовательности $\eta(z/n)f(z)$ носители компактные и она сходится к $f(z)$ по норме C_α.

Уравнения

$$\tilde{M}_1 w = \eta(z/n)f(z)$$

имеют решения $\omega_n(z)$, причем в силу оценки (3.77) последовательность $\{\omega_n(z)\} \subset C_\alpha^2$ является ограниченной, и поэтому как выше будем иметь:

$\omega_n \Rightarrow \omega_0 \in C_\alpha^2,\ \ |z| < R,$ вместе с производными второго порядка,

причем функция $\omega_0(z) \in C_\alpha^2$, будет решением (3.76).

Мы показали, что уравнение (3.74) при всех $\tilde{M}_1 \in H(M_1)$ всюду разрешимо. Поэтому, в силу известной теоремы (см. [43], стр. 19), для решений сопряженного уравнения

$$\left(\tilde{M}_1\right)^* \varphi = \psi, \;\; \varphi \in (C_\alpha)^*, \; \psi \in (C_\alpha^2)^*$$

верна оценка:

$$\|\varphi\|_{C_\alpha^*} \le M \left\|\tilde{M}_1^* \varphi\right\|_{(C_\alpha^2)^*}.$$

Из этой оценки следует, что $Ker\, M_1^* = 0$. Следовательно, в силу леммы 2.1 (см. §2.2) оператор $M_1 : C_\alpha^2 \to C_\alpha$ является нормально разрешимым. Отсюда и из соотношения $\dim Ker\, \tilde{M}_1 < \infty$ получаем, что $\tilde{M}_1$ будет n-нормальным. Тогда в силу теоремы 3.9 все предельные операторы $\tilde{M}_1 : C_\alpha^2 \to C_\alpha$ имеют нулевое ядро.

Теорема 3.10 доказана.

3.3.3. Системы с оператором ∂_{zz}. Рассмотрим систему вида

$$w_{zz} + a_1 w_{\bar{z}} + a_2 w_z + a_3 \overline{w}_{\bar{z}} + a_4 w + a_5 \overline{w} = 0 \qquad (3.81)$$

с постоянными коэффициентами.

Система (3.81) в пространстве C_α^2, в общем случае, не является нётеровой. Для системы

$$w_{zz} + c\overline{w} = 0,$$

здесь $c -$ ненулевая постоянная, все ограниченные функции

$$w(z) = p\omega(z) + q\overline{\omega(z)},$$

являются решениями и линейно независимы, где

$p -$ произвольная постоянная,

$$q = \frac{|c|}{\overline{c}} e^{2i\alpha} \overline{p},$$

$$\omega(z)=\exp\left[2i\sqrt{|c|}\,\mathrm{Re}\left(e^{-i\alpha}z\right)\right],\ 0\le\alpha<2\pi.$$

Отметим, что аналогично как в параграфе 2 условие отсутствия ненулевых решений систем вида (3.81) в пространстве C_α^2 будет критерием нётеровости оператора $M_2: C_\alpha^2\to C_\alpha$.

Уравнение вида (3.81) исследовано в наших работах [3-А], [4-А]. Изложим это. «Рассмотрим уравнение (3.81) в пространстве S' и применим к нему преобразование Фурье

$$\left(-\overline{\zeta}^2+2ia_1\zeta+2ia_2\overline{\zeta}+4a_4\right)\hat{w}(\zeta)+(2ia_3\zeta+4a_5)\hat{\overline{w}}(\zeta)=0, \qquad (3.82)$$

где

$\hat{w}(\zeta),\ \hat{\overline{w}}(\zeta)-$образы Фурье распределений $w(\zeta),\ \overline{w}(\zeta)\in S'$.

Используя равенство $\overline{\hat{w}(-\zeta)}=\hat{\overline{w}}(\zeta)$, из (2.82) получим

$$\left(2i\overline{a_3}\overline{\zeta}+4\overline{a}_5\right)\hat{w}(\zeta)+(-\zeta^2+2i\overline{a_1}\overline{\zeta}+2i\overline{a}_2\zeta+4\overline{a}_4)\hat{\overline{w}}(\zeta)=0. \qquad (3.83)$$

Соотношения (3.82) и (3.83) образуют систему двух линейных алгебраических уравнений в пространстве S':

$$\begin{cases}\left(-\overline{\zeta}^2+2ia_1\zeta+2ia_2\overline{\zeta}+4a_4\right)\hat{w}(\zeta)+(2ia_3\zeta+4a_5)\hat{\overline{w}}(\zeta)=0,\\ \left(2i\overline{a_3}\overline{\zeta}+4\overline{a}_5\right)\hat{w}(\zeta)+(-\zeta^2+2i\overline{a_1}\overline{\zeta}+2i\overline{a}_2\zeta+4\overline{a}_4)\hat{\overline{w}}(\zeta)=0.\end{cases} \qquad (3.84)$$

Вычислив определитель этой системы, имеем

$$\begin{aligned}\Delta(\zeta)=&|\zeta|^4+4\left(|a_3|^2-|a_1|^2-|a_2|^2\right)|\zeta|^2-8\,\mathrm{Re}\left(a_1\overline{a}_2+a_4\right)\zeta^2+\\ &16\left(|a_4|^2-|a_5|^2\right)-4i\,\mathrm{Re}\left[a_1\zeta^2+a_2|\zeta|^2-4\left(a_1\overline{a}_4+\overline{a}_2a_4-a_3\overline{a}_5\right)\right]\zeta.\end{aligned} \qquad (3.85)$$

Если $\Delta(\zeta)\ne 0\ \ \forall\zeta\in C,$ то система (3.84) будет иметь только нулевое решение $\hat{w}(\zeta)=0$ и тогда $w(z)\equiv 0$. Если же $\Delta(\zeta)=0$ на каком-нибудь мно-

жестве K, то носитель $\operatorname{supp}\hat{w}(\zeta)$ распределения $\hat{w}(\zeta)$ будет принадлежать множеству K, и зная K можно определить $\hat{w}(\zeta)$ и далее $w(z)$.

Пусть $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2$ – множество нулей функций $\Delta(\zeta)$, $\operatorname{Re}\Delta(\zeta)$, $\operatorname{Im}\Delta(\zeta)$ соответственно. Тогда $\Gamma = \Gamma_1 \cap \Gamma_2$ и множества Γ_1, Γ_2 имеют такие свойства: Γ_1 – ограничено, симметрично относительно начало координат O, при вещественном $a_1\bar{a}_2 + a_4 -$ относительно осей координат; $\Gamma_2 = C$ при $a_1 = a_2 = a_3 a_5 = 0,$ множество Γ_2 содержит точку O» [3–A], [4–A].

По аналогии с параграфом 3.2 (лемма 3.5) в этом случае справедлива следующая

Лемма 3.7. *Пусть коэффициенты уравнения (3.81) удовлетворяют условиям*

$$|a_4| > |a_5|, \quad |a_3|^2 + 2\sqrt{|a_4|^2 - |a_5|^2} > |a_1|^2 + |a_2|^2 + 2|a_1\bar{a}_2 + a_4|., \tag{3.86}$$

Тогда множество Γ *будет пустым.*

Доказательство проводится подобно доказательству леммы 3.5.

Теперь рассмотрим уравнения вида (3.81) с переменными коэффициентами. Будем предполагать, что все коэффициенты оператора M_2 принадлежат гёльдеровому пространству C_α. Тогда оператор M_2 будет действовать из C_α^2 в C_α и является ограниченным. Этот факт проверяется аналогично как для оператора с главной частью $\partial_{\bar{z}\bar{z}}$ (см. п. 3.2.1).

Для оператора $M_2 : C_\alpha^2 \to C_\alpha$ имеют место аналоги теорем 3.6 – 3.8 о n-нормальности и d-нормальности.

Теорема 3.12. *Пусть* $a_j(z) \in C_\alpha$. *Оператор* $M_2 : C_\alpha^2 \to C_\alpha$ *будет* n-*нормальным, тогда и только тогда, когда все предельные уравнения* $\tilde{M}_2 w = 0$ *в* C_α^2 *не имеют ненулевых решений.*

Теорема 3.13. *Если* $a_j \in C_\alpha$ *и оператор* $M_2 : C_\alpha^2 \to C_\alpha$ d-*нормальный, то все предельные уравнения* $\tilde{M}_2 w = 0$ *в* C_α^2 *не имеют ненулевых решений.*

Теорема 3.14. *Пусть коэффициенты оператора* M_2 *являются слабо осциллирующими на бесконечности и найдутся положительные числа* ε *и* R, *что для* $|z| > R$ *выполнены условия:*

$a)$ $|a_4(z)| > |a_5(z)| + \varepsilon;$

$b)$ $|a_3(z)|^2 + 2\sqrt{|a_4(z)|^2 - |a_5(z)|^2} > |a_1(z)|^2 + |a_2(z)|^2 + 2\left|a_1(z)\overline{a_2(z)} + a_4(z)\right| + \varepsilon.$

Тогда оператор $M_2 : C_\alpha^2 \to C_\alpha$ *будет* d*-нормальным.*

Доказательства теорем 3.12 и 3.13 проводятся аналогично как доказательства теорем 3.6 и 3.9 соответственно.

Доказательство теоремы 3.14. Покажем, что оператор $M_2 : C_\alpha^2 \to C_\alpha$ будет d-нормальным. Прежде всего докажем, что все предельные операторы

$$\widetilde{M}_2 w \equiv w_{zz} + \widetilde{a}_1 w_{\bar{z}} + \widetilde{a}_2 w_z + \widetilde{a}_3 \overline{w}_{\bar{z}} + \widetilde{a}_4 w + \widetilde{a}_5 \overline{w} = 0,$$

как операторы, действующие из C_α^2 в C_α имеют нулевое ядро. Действительно, из условия слабой осциллируемости на бесконечности коэффициентов оператора M_2 следует, что коэффициенты $\widetilde{a}_j$, $j = 1, 2, ..., 5$ всех предельных операторов $\widetilde{M}_2$ будут постоянными, т.е.

$$\widetilde{a}_j \equiv const, \ j = 1, 2, ..., 5.$$

Далее из условий a) и b) теоремы путем перехода к пределу при $z \to \infty$ получаем, что для коэффициентов $\widetilde{a}_j$, $j = 1, 2, ..., 5$ всех предельных операторов $\widetilde{M}_2$ верны неравенства:

$$|\widetilde{a}_4| > |\widetilde{a}_5|;$$

$$|\widetilde{a}_3|^2 + 2\sqrt{|\widetilde{a}_4|^2 - |\widetilde{a}_5|^2} > |\widetilde{a}_1|^2 + |\widetilde{a}_2|^2 + 2\left|\overline{\widetilde{a}_1}\widetilde{a}_2 + \widetilde{a}_4\right|.$$

Из этих неравенств и леммы 3.7 получаем, что носители решений $w \in S'$ уравнений $\tilde{M}_2 \omega = 0 \qquad \forall \tilde{M}_2 \in H(M_2)$ будут пустыми. Поэтому $Ker \tilde{M}_2 = 0$ и в силу теоремы 3.13 $M_2 : C_\alpha^2 \to C_\alpha$ будет *n*-нормальным. Следовательно, образ этого оператора $M_2 C_\alpha^2$ будет замкнутым.

Остается показать, что коядро оператора, т.е. ядро сопряженного оператора $M_2 *: \left(C_\alpha^2\right)* \to \left(C_\alpha\right)*$ является конечномерным. Для нашего случая ядро сопряженного оператора $M_2 *$ будет изоморфным ядру союзного оператора:

$$M_2{}^T w = w_{\bar{z}\bar{z}} - \left(\bar{a}_1 w\right)_z - \left(\bar{a}_2 w\right)_{\bar{z}} - \left(a_3 \overline{w}\right)_{\bar{z}} + \bar{a}_4 w + a_5 \overline{w}. \qquad (3.87)$$

Это устанавливается стандартным образом аналогично как в теории эллиптических операторов на компактных многообразиях [36], [102].

Оператор M_2^T представим в виде

$$\begin{aligned} M_2^T w = w_{\bar{z}\bar{z}} - \bar{a}_1 w_z - \bar{a}_2 w_{\bar{z}} - a_3 \overline{w}_{\bar{z}} + \\ + \left[\bar{a}_4 - \left(\bar{a}_1\right)_z - \left(\bar{a}_2\right)_{\bar{z}}\right] w + \left[a_5 - \left(a_3\right)_{\bar{z}}\right] \overline{w}. \end{aligned} \qquad (3.88)$$

Нетрудно доказать, что у слабо осциллирующих на бесконечности функций все производные первого порядка на бесконечности стремятся к нулю. Поэтому предельные операторы для оператора M_2^T имеют вид

$$\tilde{M}_2{}^T w = w_{\bar{z}\bar{z}} - \bar{a}_1^0 w_z - \bar{a}_2^0 w_{\bar{z}} - a_3^0 \overline{w}_{\bar{z}} + \bar{a}_4^0 w + a_5^0 \overline{w}. \qquad (3.89)$$

Легко уследить, что коэффициенты предельных операторов (3.89) удовлетворяют неравенствам (3.86). Поэтому $Ker \tilde{M}_2^T = 0$. Тогда из теоремы 3.12 получаем, что оператор $M_2^T : C_\alpha^2 \to C_\alpha$ является *n*-нормальным и поэтому имеет конечномерное ядро. Поэтому оператор $M_2 *$ также имеет конечномерное ядро.

Итак, в случае гладких коэффициентов *d*-нормальность оператора M_2 установлена.

В общем случае, когда $a_j(z) \in C_\alpha$ используя метод усреднения коэффициентов, можно доказать *d*-нормальность оператора M_2.

Теорема 3.14 доказана.

ГЛАВА 4

АНАЛИЗ И ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Объектами исследования диссертации являются системы четырёх вещественных линейных у.ч.п. вида

$$u_x + Au_y + Bu = 0, \tag{4.1}$$

здесь $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)^T$, $A, B -$ вещественные постоянные матрицы порядка четыре и эллиптические системы уравнений второго порядка с одной комплексной переменной вида

$$\begin{gathered} Lw \equiv \alpha w_{\bar{z}\bar{z}} + \beta w_{\bar{z}z} + \gamma w_{zz} + a_1(z) w_{\bar{z}} + a_2(z) w_z + a_3(z) \overline{w}_{\bar{z}} + \\ + a_4(z) w + a_5(z) \overline{w} = 0, \end{gathered} \tag{4.2}$$

где $\alpha, \beta, \gamma -$ постоянные, одновременно не равные нулю. Эти системы исследованы в функциональных пространствах на всей плоскости с дополнительными условиями типа ограниченности на бесконечности и не выше степенного роста на бесконечности.

Двумерные эллиптические системы вида (4.1) с переменными коэффициентами в гёльдеровых пространствах функций на всей плоскости изучены в работе Э. Мухамадиева и С. Байзаева [52] и получены критерия нётеровости таких систем и формула для индекса. Система вида (4.1) в случае $u \in R^2$, а также в эллиптическом и гиперболическом случаях при условии перестановочности матриц A и B рассматривались в работах С. Байзаева и Д.А. Воситовой (см., например, [6], [30]). Для двумерного случая установлены утверждения о решениях умеренного роста, в частности решениях, имеющих рост при $|x| + |y| \to \infty$ не выше чем многочлен порядка N. В последнем случае получена формула для размерности указанного пространства. В многомерном случае, указанном выше, получены формулы общего решения

и выделены решения степенного роста, а также формулы для размерности пространства таких решений.

Развивая метод исследования указанных работ, во второй главе диссертации исследованы четырехмерные системы вида (4.1) произвольного типа. Основными результатами этой главы являются теоремы 2.2 – 2.4, а также формулы для решений умеренного роста и решений, имеющих рост при $|x|+|y|\to\infty$ не выше чем многочлен.

В параграфе 2.2 для модельной эллиптической системы вида (4.1) определена структура множеств Γ_1, Γ_2 −нулей вещественной, соответственно мнимой части определителя символа системы (4.1). Эта структура зависит от элементов матрицы B и результат сформулирован в виде теоремы 2.2. В отличии от двумерных систем, рассмотренных в работах В.С. Виноградова [27], С. Байзаева и Д.А. Воситовой [30], где множество $\Gamma=\Gamma_1\cap\Gamma_2$ может быть пустым, состоять из одной или двух точек, в рассматриваемом случае систем из четырех уравнений множество Γ может состоять из одной, двух или трех точек. Определяя структуру множества Γ построены соответствующие многообразия решений системы и результат изложен в теореме 2.3.

В третьем параграфе исследована система (4.1) для случая, когда

$$A=\begin{pmatrix} 0 & A_1 \\ -A_1 & 0 \end{pmatrix},\ A_1=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В этом случае, в общем, матрицы A и B не являются перестановочными и система является гиперболической. Оказывается, что для данного случая Γ_1 не пусто, симметрично относительно осей координат, может состоять из одной, двух, трёх, четырёх неограниченных кривых или нескольких точек, а Γ_2 содержит прямую $\xi=0,$ симметрично относительно осей координат, может состоять из двух кривых (прямых), может совпадать со всей плоско-

стью R^2. Показано, что решения из пространства S' определяются формулой вида

$$U(x,y)=e^{i(\xi_0 x+\eta_0 y)}P(x,y)+e^{-i(\xi_0 x+\eta_0 y)}Q(x,y),$$

где $P, Q-$ многочлены произвольного порядка N, коэффициенты которых определяются через элементы матрицы B, $(\xi_0,\eta_0)-$произвольная точка множества Г. Многообразие таких решений является бесконечномерным (имеет мощность континиум).

В четвертом параграфе на основе схем, построенных в предыдущих параграфах для модельных систем, исследована общая система вида (4.1). При помощи компьютерного моделирования обнаружено, что для четырёхмерных систем вида (4.1) эллиптического типа, в отличие от двумерных систем (см. [6]), пространство решений, имеющих рост при $|x|+|y|\to\infty$ не выше чем многочлен порядка N, может быть бесконечномерным. Построен соответствующий пример. Пусть в системе (4.1)

$$A=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&-1\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&0&-1&-2\\0&1&1&2\\2&1&-1&0\\2&1&0&-1\end{pmatrix}.$$

Собственные значения матрицы A равны:

$$\lambda_{1,2}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i),\ \lambda_{3,4}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i).$$

В данном случае система (4.1) является эллиптической. Матрицы A и B не коммутируются, поэтому результаты работы С. Байзаева и Д.А. Воситовой [6] нельзя применять. Семейство вектор-функций

$$U(x,y)=e^{i(\xi x+\eta y)}p_+ + e^{-i(\xi x+\eta y)}p_-,$$

где

$(\xi,\eta)-$ точка кривой $\Gamma:\xi^4+\eta^4-\xi^2+9\eta^2-2=0,$

$p_{\pm}$ – векторы, соответственно удовлетворяющие соотношениям

$$(i\xi E_4 + i\eta P \pm Q)p = 0,$$

будут решениями системы (4.1), являются ограниченными во всей плоскости и образуют бесконечномерное пространство.

Это различие от двумерного случая показывает, что исследование четырехмерных систем вида (4.1) является актуальным как в теоретическом, так и в практическом плане.

Имеется и другое существенное различие от двумерного случая. В случае четырехмерных систем множество Γ может быть замкнутой кривой, и не одной. Например, для системы

$$U_x + \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & -A_1 \end{pmatrix} U_y + \begin{pmatrix} 0 & E_2 \\ B_3 & 0 \end{pmatrix} = 0 \qquad (4.3)$$

где

$A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$, причем $a_1 + a_4 = 0, a_1^2 + a_2 a_3 = -1, \quad B_3 = (bij),$

множество Γ равняется множеству точек (ξ, η), для которых

$$(\xi^2 + \eta^2)^2 + (b_1 + b_4)(\xi^2 + \eta^2) + \det B_3 = 0.$$

Заметим, что система (4.3) является эллиптической. Пусть

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(-b_1 - b_4 + \sqrt{D}), \qquad \lambda_2 = \frac{1}{2}(-b_1 - b_4 - \sqrt{D}),$$

где

$$D = (b_1 + b_4)^2 - 4\det B_3.$$

Если $\det B_3 < 0$, то множество Γ – окружность с центром в начале координат, радиуса $\sqrt{\lambda_1}$. Если же $\det B_3 > 0$ и $D > 0$, то при $b_1 + b_4 < 0$ множество Γ состоит из двух окружностей с центрамы в начале координат и радиусами $\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}$, а при $b_1 + b_4 \geq 0$ будет пустым. Наконец, если $\det B_3 = 0$, то при

$b_1 + b_4 < 0$ множество Γ состоит из точки 0 и окружности с центром в начале координат и радиуса $\sqrt{\lambda_1}$, а при $b_1 + b_4 \geq 0$ будет пустым.

Для решений системы (4.3) из пространства S' справедлива ниже приводимая теорема, в которой используется формула о представлении обобщенной функции с носителем на окружности $\{x^2 + y^2 = r_0^2\}$ [10, стр. 3]

$$\omega(\xi,\eta) = \sum_{k=0}^{N} (c_k(\theta) \times \delta^{(k)}(r - r_0), \psi(r,\theta)), \tag{4.4}$$

где

$(\xi,\eta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$, $\psi(r,\theta) = \varphi(re^{i\theta})$, $r > 0$, $\varphi \in D$,

$c_k(\theta) - 2\pi$-периодические обобщенные функции.

Теорема 2.4. *1) При* $\det B_3 < 0$ *решение системы (2.45) имеет вид*

$$U(x,y) = F^{-1}\omega,$$

где ω *определяется по формуле (2.43), в которой* $r_0 = \sqrt{\lambda_1}$;

2) При $\det B_3 > 0$ *и* $D > 0$, *если* $b_1 + b_4 < 0$, *то*

$$U(x,y) = F^{-1}(\omega_1 + \omega_2),$$

где ω_1, ω_2 *определяются по формуле (2.43) с* $r_0 = \sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}$, *соответственно, а если же* $b_1 + b_4 \geq 0$, *то система (2.45) в* S' *не имеет нулевых решений;*

3) При $\det B_3 = 0$, *если* $b_1 + b_4 < 0$, *то*

$$U(x,y) = F^{-1}(\omega_0 + \omega_1),$$

где ω_0 *– распределение с носителем в точке 0, а если же* $b_1 + b_4 \geq 0$, *то система (2.45) не имеет в* S' *ненулевых решений.*

В случае общей системы (4.1) составлен алгоритм нахождения носителя образов Фурье решений системы из пространства S'. Определяя эти носители можно затем найти соответствующие решения.

Глава 3 посвящена комплексным у.ч.п. второго порядка вида (4.2). Это уравнение является обобщением уравнений бианалитических и метааналитических функций. Уравнениям бианалитических и метааналитических функций посвящено много работ (см., например, [11], [13]). В работах М.Б. Балка, М.Ф. Зуева, А.А. Гольдберга, А.П. Солдатова и их последователей (см., например, [11] - [14], [22], [82], [85], [86], [95], [101]) для выше указанных уравнений установлены ряд свойств, в частности, граничные свойства и формулы представления решений этих уравнений и предложены схемы решения граничных задач для них, краевых задач типа Газемана, типа Карлемана, типа Неймана и типа Рикье для метааналитических функций. Получены необходимые и достаточные условия разрешимости этих задач. Из задач в неограниченных областях рассмотрены только задача сопряжения и внешняя краевая задача типа Карлемана в случае единичного круга.

А.В. Бицадзе доказано (см. [18], [20], стр. 133), что для уравнения бианалитических функций задача Дирихле не является нётеровой, выписаны решения, образующие бесконечномерное линейное пространство.

В диссертации показано, что ядро систем вида (4.2) в пространстве C_α^2 могут иметь бесконечную размерность, т.е. для таких систем задача о решениях из C_α^2 в общем случае не является нётеровой.

В связи с выше указанным, исследование для систем вида (4.2) задач о решениях полиномиального роста и о нормальной разрешимости этих уравнений в гёльдеровых пространствах функций на всей комплексной плоскости является актуальным.

В параграфе 3.1 рассмотрена система вида

$$Lw \equiv w_{\bar z\bar z} + a(z)w_{\bar z} + b(z)w + c(z)\overline{w} = 0. \qquad (4.5)$$

В предположении, что коэффициенты a,b,c являются постоянными установлена теорема 2.5 о явном виде решений из S'. Отметим, что присутствие в (4.5) слагаемого $c\overline{w}$ меняет картину многообразия решений системы (4.5).

Например, в данном случае многообразие решений полиномиального роста может быть бесконечномерным, т.е. утверждение типа теоремы Лиувилля, справедливого для бианалитических функций [13], не имеет место для уравнений вида (4.5).

В параграфах 3.2 и 3.3 исследованы уравнения и операторы следующих видов

$$L_1 w \equiv w_{\bar{z}\bar{z}} + a_1(z) w_{\bar{z}} + a_2(z) w_z + a_3(z) \overline{w}_{\bar{z}} + a_4(z) w + a_5(z) \overline{w} = 0, \qquad (4.6)$$

$$L_2 w \equiv \Delta w + a_1(z) w_{\bar{z}} + a_2(z) w_z + a_3(z) \overline{w}_{\bar{z}} + a_4(z) w + a_5(z) \overline{w} = 0, \qquad (4.7)$$

$$L_3 w \equiv w_{zz} + a_1(z) w_{\bar{z}} + a_2(z) w_z + a_3(z) \overline{w}_{\bar{z}} + a_4(z) w + a_5(z) \overline{w} = 0, \qquad (4.8)$$

где $\Delta -$оператор Лапласа, в гёльдеровых пространствах функций C_α^2 на всей комплексной плоскости.

Отметим, что и для уравнений (4.6) – (4.8) многообразие решений, имеющих рост при $z \to \infty$ не выше многочлена порядка N, может быть бесконечномерным, т.е. утверждения типа теоремы Лиувилля в общем случае для этих уравнений не имеют место.

В параграфе 3.2 установлены теоремы 3.6 – 3.8 относительно *n*-нормальности и *d*-нормальности оператора $L_1 : C_\alpha^2 \to C_\alpha$.

В теореме 3.6 утверждается, что *n*-нормальность этого оператора эквивалентна отсутствию ненулевых решений, так называемых, предельных уравнений в пространстве C_α. Предельные уравнения имеют также вид (4.6), только их коэффициенты определяются через частичные пределы соответствующих коэффициентов оператора L_1 на бесконечности. Например, если коэффициенты $a_j \in C_\alpha$ на бесконечности стабилизируются или имеют слабую осцилляцию на бесконечности, или же их частные производные стремятся при $z \to \infty$ к нулю, то коэффициенты всех предельных уравнений будут постоянными. В связи с последним, исследован вопрос об отсутствии

ненулевых решений уравнений вида (4.6) с постоянными коэффициентами в пространстве C_α; результат исследования сформулирован в виде леммы 3.5.

В теореме 3.7 утверждается, что условие отсутствия ненулевых решений предельных уравнений в пространстве C_α является необходимым для *d*-нормальности оператора $L_1 : C_\alpha^2 \to C_\alpha$, а в теореме 3.8, в случае слабой осцилляции коэффициентов на бесконечности, получены достаточные условия для *d*-нормальности в виде двух неравенств, выписываемых непосредственно через коэффициенты самого оператора.

В параграфе 3.3 установлены теоремы 3.9 – 3.14 относительно *n*-нормальности и *d*-нормальности операторов $L_j : C_\alpha^2 \to C_\alpha,\ j = 2,3$. В теореме 3.9 (соответственно 3.12) говорится об эквивалентности *n*-нормальности оператора $L_2 : C_\alpha^2 \to C_\alpha$ (соответственно L_3) отсутствию ненулевых решений соответствующих предельных уравнений в пространстве C_α, а в теореме 3.10 (соответственно 3.13) – о том, что последние условия достаточны для *d*-нормальности оператора $L_2 : C_\alpha^2 \to C_\alpha$ (соответственно L_3). Теоремы 3.11 и 3.14 это теоремы, связывающие свойства *d*-нормальности операторов $L_j : C_\alpha^2 \to C_\alpha,\ j = 2,3$ с выполнением некоторых неравенств, выписываемых непосредственно через коэффициенты самых операторов.

Найдены условия отсутствия ненулевых решений уравнений вида (4.7) и (4.8) с постоянными коэффициентами в пространстве C_α. Эти условия явно выражаются через коэффициенты указанных уравнений, и они приведены в формулировках лемм 3.6 и 3.7.

Все теоремы 3.6 – 3.14, в отличие от классических методов [12], [23], [24], доказываются методами функционального анализа. Такого типа теоремы ранее были известны для эллиптических операторов первого порядка на плоскости (см., например, [7], [8]).

Выводы

Объектами исследования диссертации являются системы четырёх вещественных линейных у.ч.п. вида (4.1) и эллиптические системы уравнений второго порядка с одной комплексной переменной вида (4.2). Эти системы исследованы в функциональных пространствах на всей плоскости с дополнительными условиями типа ограниченности на бесконечности и не выше степенного роста на бесконечности. По итогам исследования получены следующие новые результаты:

• найдены явные формулы для решений из пространства S' модельной системы [1-А], [5-А], [10-А];

• найдены явные формулы для решений умеренного роста системы (4.1), когда коэффициенты определяются формулами

$$A=\begin{pmatrix} 0 & A_1 \\ -A_1 & 0 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix},$$

где A_1, B_j – матрицы второго порядка [1-А], [8-А], [9-А];

• предложен алгоритм нахождения решений, имеющих рост при $|x|+|y|\to\infty$ не выше чем $(|x|+|y|)^N$, системы уравнений вида (4.1) [2-А], [11-А];

• найдены явные формулы для решений из пространства S' системы (4.5), когда коэффициентов постоянны [3-А], [4-А], [6-А], [12-А];

• в терминах предельных уравнений найдены необходимые и достаточные условия *n*-нормальности операторов вида $L:C_\alpha^2\to C_\alpha$ [3-А], [7-А];

• в терминах коэффициентов найдены достаточные условия *n*-нормальности операторов вида $L:C_\alpha^2\to C_\alpha$ [3-А];

• в терминах коэффициентов найдены достаточные условия *d*-нормальности операторов вида $L:C_\alpha^2\to C_\alpha$ [3-А], [7-А].

Рекомендации по практическому использованию результатов

Полученные в диссертации результаты в основном носят теоретический характер. Эти результаты и методы исследования задач можно использовать при изучении нелокальных задач для других классов у.ч.п. на плоскости и в пространстве. Некоторые раздели диссертации можно использовать при проведении учебных занятий со студентами и магистрантами математических профилей.

Список литературы

А) Список использованных источников

[1] Абдулвохиди, О. Двоякопериодичиские решения некоторых классов линейных и неленейных эллиптических систем второго порядка на плоскости: дис. … д-ра философии (PhD): 6D060102 [Текст] / Абдулвохиди Олимхон. Бохтар, – 2020. – 95 с.

[2] Абдулвохиди, О. Обобщенные двоякопериодические решения одной эллиптической системы второго порядка с переменными коэффициентами [Текст] / О. Абдулвохид // ДАН РТ. – 2019. – Т. 60. № 3-4. – С. 163 – 166.

[3] Байзаев, С. О медленно растущих решениях одной многомерной эллиптической системы [Текст] / С. Байзаев // Доклады АН ТаджССР. – 1991. – Т. 34, № 6. – С. 329–332.

[4] Байзаев, С. Эллиптические системы с ограниченными коэффициентами на плоскости [Текст] /С. Байзаев. – Новосибирск. НГУ, – 1999. – 74 с.

[5] Байзаев, С. Исследования по теории ограниченных решений эллиптических систем на плоскости: дис. … д-ра физ.-мат. наук: 01.01.02 [Текст] / Байзаев Саттор. Новосибирск, – 1999. – 297 с.

[6] Байзаев, С. О решениях одной системы уравнений с частными производными с двумя независимыми переменными [Текст] /С. Байзаев, Д.А.Воситова // Уфимский математический журнал. – 2013. – Т. 5, № 2 . – С. 12 – 17.

[7] Байзаев, С. Нётеровость одного класса эллиптических систем в гёльдеровых пространствах [Текст] / С. Байзаев, Д. А. Воситова // Вестник Ошского государственного университета. – 2013, №1. – С. 95 – 100.

[8] Байзаев, С. Об индексе эллиптических операторов первого порядка на плоскости [Текст]/ С. Байзаев, Э. Мухамадиев // Дифференциальные уравнения. – 1992. – Т. 28, №5. – С. 818 – 827.

[9] Байзаев, С. О нётеровости обобщенных уравнений Коши – Римана [Текст] / С. Байзаев, Э. Мухамадиев // Известия АН ТаджССР. Отд. физ.-мат., хим. и геол. наук. – 1988. №2 (108). – С. 3 – 9.

[10] Байзаев, С. О некоторых функциональных уравнениях в пространствах Шварца и их приложениях [Текст]/ С. Байзаев, М.А. Рахимова // Уфимский математический журнал. – 2018. – Т. 10, №1. – С. 3 – 13.

[11] Балк, М.Б. О полианалитических функциях [Текст]/ М.Б. Балк, М.Ф. Зуев, УМН, – 1970, – Т. 25, выпуск 5(155). – С. 203–226.

[12] Балк, М.Б. О функциях, полианалитических в круге [Текст]/ М.Б. Балк, А.А. Гольдберг // Известия вузов. Математика. – 1977, № 5. – С. 3–14.

[13] Балк, М.Б. Полианалитические функции и их обобщения. Итоги науки и техники. Серия: Современные проблемы математики. Фундаментальные направления [Текст] / М.Б. Балк, – 1991. – Т. 85. – С. 187–246.

[14] Балк, М.Б., О граничных свойствах полианалитических функций в жордановых областях [Текст] / М.Б. Балк, В.П. Василенков // Известия вузов. Математика. – 1992, № 8. – С. 3–12.

[15] Беллман, Р. Введение в теорию матриц [Текст] / Р. Беллман. М.: Наука, –1976. – 351 с.

[16] Бернштейн, С.Н. Собрание сочинений. Т. 3 [Текст] / С.Н. Бернштейн. М.: Изд. АН СССР. – 1960. – 356.

[17] Берс, Л. Уравнения с частными производными [Текст] / Л. Берс, Ф. Джон, М. Шехтер. М.: Мир, – 1966. – 351 с.

[18] Бицадзе, А.В. О единственности решения задачи Дирихле для эллиптических уравнений с частными производными [Текст]/ А.В. Бицадзе // УМН, – 1948. – Т. 3, № 6(28). – С. 211–212.

[19] Бицадзе, А.В. К теории нефредгольмовых эллиптических краевых задач. – В кн.: Дифференциальные уравнения с частными производными [Текст] / А.В. Бицадзе. М.: Наука. – 1970. – С. 64 – 70.

[20] Бицадзе, А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных / А.В. Бицадзе. М.: Наука, – 1981. – 448 с.

[21] Блиев, Н.К. Обобщённые аналитические функции в дробных пространствах [Текст] / Н.К. Блиев. Алма-Ата, – 1985. – 235 с.

[22] Болотин, И.Б. Вторая основная краевая задача типа Римана для бианалитических функций в плоскости со щелями [Текст] И.Б. Болотин. // Сборник трудов межд. конф. по алгебре, анализу и геометрии. Казань, 22 – 28 августа 2021 г. – С. 8 – 14.

[23] Боярский, Б.В. Общие свойства решений эллиптических систем на плоскости. - В кн.: Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного [Текст] / Б.В. Боярский. М.: Физматгиз. – 1960. – С. 461 – 483.

[24] Векуа, И.Н. Новые методы решения эллиптических уравнений [Текст] / И.Н. Векуа. М.-Л.: ГИТТЛ, – 1948. – 296 с.

[25] Векуа, И.Н. Обобщённые аналитические функции [Текст] / И.Н. Векуа. М.: Наука, – 1988. – 509 с.

[26] Виноградов, В.С. О решениях степенного роста для систем эллиптического типа. В сб.: Комплексный анализ и его приложения [Текст] / В.С. Виноградов. М.: Наука. – 1978. – С. 120 – 125.

[27] Виноградов, В.С. О теореме Лиувилля для обобщённых аналитических функций [Текст] / В.С. Виноградов // ДАН СССР. – 1968. –Т. 183. – С. 503-506.

[28] Владимиров, В.С. Обобщённые функции в математической физике [Текст] / В.С. Владимиров. М.: Наука, – 1976. – 280 с.

[29] Владимиров, В.С. Сборник задач по уравнениям математической физике [Текст] / В.С. Владимиров, В.П. Михайлов, А.А. Вашарин, Х.Х. Каримова, Ю.В. Сидоров, М.И. Шабунин. М.: Наука, – 1974. – 256 с.

[30] Воситова, Д.А. О нётеровости одного класса многомерных эллиптических систем в гёльдеровых пространствах [Текст] / С. Байзаев, Д. А. Воситова // Ученые записки Худжандского госуниверситета им. акад. Б. Гафурова. –2014, №2. Часть 1. – С. 135 – 136.

[31] Воситова, Д.А. О решениях умеренного роста одной эллиптической системы [Текст] /Д.А. Воситова // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. – 2012. – Т. 55, №1. – С. 23 – 29.

[32] Гаюров А.Т. Квазипериодические решения второго рода неоднородной системы Коши – Римана [Текст] / Д.С. Сафаров, А.Т. Гаюров // ДАН РТ. – 2014. –Т.57. – №6. – С. 459 – 466.

[33] Гуломнабиев, С.Г. О разрешимости одной системы линейных дифференциальных уравнений в пространстве ограниченных на всей оси функций [Текст]/ С.Г. Гуломнабиев. Международный научно-исследовательский журнал. Екатеринбург, –2020. №6 (96), часть 1. – С. 18 – 22.

[34] Джураев, А. Метод сингулярных интегральных уравнений [Текст] / А. Джураев. М.: Наука, – 1987. – 415 с.

[35] Дикополов Г.В. О корректных краевых задачах для уравнений в частных производных в полупространстве [Текст]/ Г.В. Дикополов, Шилов Г.Е. // Известия АН СССР. Математика. – 1960. – Т. 24. – С. 369 – 380.

[36] Егоров, Ю.В. Линейные уравнения главного типа [Текст] / Ю.В. Егоров. М.: Наука, – 1984. –360 с.

[37] Зарипов С.К. Построение аналога теоремы Фредгольма для одного класса модельных интегро-дифференциальных уравнений первого порядка с логарифмической особенностью в ядре [Текст] / С.К. Зарипов // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия физ.-мат. науки. – 2017. – Т. 21. – № 2. – С. 236-248.

[38] Исхоков С.А. О конечномерности ядра некоторых вырождающихся эллиптических операторов недивергентного вида [Текст] / С.А. Исхоков, К.Э. Хакназаров // Доклады Национальной академии наук Таджикистана. 2022. Т. 65. № 3-4. С. 157-161.

[39] Исхоков С.А., Об одном функциональном пространстве со степенными весами во всем пространстве [Текст] / С.А. Исхоков, Б.А. Рахмонов // Доклады Национальной академии наук Таджикистана. 2022. Т. 65. № 7-8. С. 451-457.

[40] Каримов О.Х. О коэрцитивных свойствах и разделимости бигармонического оператора с матричным потенциалом [Текст] / О.Х. Каримов // Уфимский математический журнал. – 2017. – Т. 9, № 1 . – С. 55 – 62.

[41] Каримов О.Х. Коэрцитивная оценка и теорема разделимости для одного нелинейного дифференциального оператора в гильбертовом пространстве [Текст] / О.Х. Каримов // Чебышевский сборник. – 2017. – Т. 18, № 4 . – С. 245 – 254.

[42] Карачик, В.В. Полиномиальные решения дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами I [Текст] / В.В. Карачик // Вестник ЮУрГУ, №10, – 2011. – С. 14 – 21.

[43] Крейн, С.Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве / С.Г. Крейн. – М.: Наука, – 1971. – 104 с.

[44] Крылов, Н.В. Лекции по эллиптическим и параболическим уравнениям в пространствах Гельдера [Текст] / Н.В. Крылов. Новосибирск: Научная книга, –1998. – 176 с.

[45] Лаврентьев, М.А. Общая задача теории квазиконформных отображений плоских областей [Текст] / М.А. Лаврентьев // Математический сборник. – 1947. – Т. 21 (63). Вып. 2. – С. 285 – 320.

[46] Ланкастер, П. Теория матриц [Текст] / П. Ланкастер. – М.: Наука, – 1978, – 280 с.

[47] Люстерник, Л.А. Элементы функционального анализа [Текст] / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. – М.: Наука, – 1978, – 280 с.

[48] Меликсетян, Э.П. Задача Дирихле для эллиптических систем дифференциальных уравнений второго порядка в верхней полуплоскости [Текст] / Э.П. Меликсетян [Текст] // Изв. АН Арм.ССР, математика. – 1979. – Т. XIV, № 5.

[49] Меликсетян, Э.П. Задача Дирихле для эллиптических систем дифференциальных уравнений второго порядка в классе суммируемых функций [Текст] / Э.П. Меликсетян // Изв. АН Арм.ССР, математика. – 1979. – Т. XIV,

[50] Михайлов, Л.Г. Новый класс особых интегральных уравнений и его применения к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами [Текст] / Л.Г. Михайлов. Душанбе, 1963.

[51] Мухамадиев, Э. О нормальной разрешимости и нётеровости эллиптических операторов в пространствах функций на R^n [Текст]/ Э. Мухамадиев // Записки научных семинаров ЛОМИ. – 1981. – Т. 110. – С. 120–140.

[52] Мухамадиев, Э. О нётеровости и индексе эллиптических операторов 1-го порядка на плоскости [Текст]/ Э. Мухамадиев, С. Байзаев //Доклады АН ТаджССР, – 1987. – Т. 30, № 4. – С. 206 – 210.

[53] Мухамадиев, Э. К теории ограниченных решений обобщенной системы Коши – Римана [Текст]/ Э. Мухамадиев, С. Байзаев // ДАН СССР. – 1986. – Т. 287, № 2. – С. 280 – 283.

[54] Мухамадиев, Э. Ограниченные решения гиперболических уравнений с постоянными коэффициентами [Текст]/ Э. Мухамадиев, С. Байзаев // Известия АН РТ. – 2011, №1 (142). – С. 20 – 26.

[55] Николаев, В.Г. О решениях задачи Шварца для J-аналитических функций с одинаковым жордановым базисом действительной и мнимой части матрицы J. [Текст]/ В.Г. Николаев // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия физ.-мат. наук. – 2016. –Т. 20, №3. – С. 410 –422.

[56] Олейник, О.А. О поведении решений неоднородных эллиптических систем в неограниченных областях [Текст]/ О.А. Олейник, Н.О. Максимова // Труды семинара им. И.Г. Петровского, МГУ. – 1978, № 3. – С. 117 – 137.

[57] Осколков, А.П. О разрешимости задачи Дирихле для некоторых классов линейных эллиптических систем в неограниченных областях [Текст] / А.П. Осколков, В.А. Тарасов // В сб.: Дифференциальные уравнения. Вып. 8, –Рязань. – 1976. – С. 145 – 161.

[58] Оспанов, К.Н. К теории сингулярных эллиптических систем первого порядка [Текст]/ К.Н. Оспанов // Материалы межд. науч. конф. «Функцио-

нальный анализ и его приложения». Астана, 2 – 5 октября 2012 г. – С. 172 – 174.

[59] Оспанов, К.Н. Об обобщенной системе Коши – Римана с негладкими коэффициентами [Текст]/ К.Н. Оспанов, М. Отелбаев // Известия вузов: математика. – 1989. № 3. – С. 48 – 56.

[60] Отелбаев, М. Коэрцитивные оценки и теоремы разделимости для эллиптических уравнений в R^n [Текст] / М. Отелбаев // Труды МИАН СССР. – 1983. – Т. 161. – С. 195 – 217.

[61] Отелбаев, М. Сборник избранных научных трудов, опубликованных в 1972 – 2011 гг. [Текст]/ М. Отелбаев. – Астана: Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилёва, – 2012. – 579 с.

[62] Ошоров, Б.Б. Трёхмерные аналоги систем уравнений Коши-Римана и Бицадзе [Текст]/ Б.Б. Ошоров // Вестник Новосибирского госуниверситета. Серия «Математика, механика, информатика». – 2005. – Т. 5. Выпуск 1. – С. 64 – 68.

[63] Ошоров, Б.Б. О некоторых краевых задачах для систем уравнений Коши-Римана и Бицадзе [Текст]/ Б.Б. Ошоров // Доклады РАН. – 2006. – Т. 407, №4. – С. 446 – 449.

[64] Ошоров, Б.Б. Краевые задачи с разрывными граничными условиями для некоторых классов векторных и матричных функций [Текст] / Б.Б. Ошоров. – М.: Изд-во Академии естествознания. – 2010. – 257 с.

[65] Ошоров, Б.Б. О корректности краевых задач для метааналитических функций [Текст]/ Б.Б. Ошоров //Сборник научных трудов. Бурятский госуниверситет. – Улан- Удэ, – 2010. – С. 63 – 82.

[66] Ошоров, Б.Б. Об одной математической модели изгибаний поверхностей [Текст]/ Б.Б. Ошоров / Бато Б. Ошоров // Вестник Восточно-Сибирского госуниверситета технологий и управления. – 2014. № 1. – С. 5 – 12.

[67] Павлов, А.Л. Об общих краевых задачах для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в полупространстве [Текст]/ А.Л. Павлов // Мат. сб., – 1977. – Т. 103 (145), №3 (7). – С. 367 – 391.

[68] Паламодов, В.П. Линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами [Текст] / В.П. Паламодов. М:. Физматгиз. 1967. - 468 с.

[69] Паламодов, В.П. О корректных краевых задачах для уравнений в частных производных в полупространстве [Текст]/ В.П. Паламодов // Изв. АН СССР, математика. – 1960. – Т. 24. – С. 381 – 386.

[70] Петровский, И.Г. Об аналитичности решений уравнений с частными производными [Текст]/ И.Г. Петровский // Матем. Сб. –1939. – Т. 5, № 1. – С. 6 – 58.

[71] Петровский, И.Г. Избранные труды. Системы уравнений с частными производными. Алгебраическая геометрия [Текст] / И.Г. Петровский. – М.: Наука, –1986. – 500 с.

[72] Ройтберг, Я.А. Нелокальные задачи для эллиптических уравнений и систем [Текст] / Я.А. Ройтберг, З.Г. Шефтель // Сиб. мат. журнал. – 1972. – Т. 13, № 1. – С. 165 – 181.

[73] Раджабов, Н.Р. О корректной постановке задач для системы Бицадзе со сверхсингулярной точкой и окружностью [Текст] / Н.Р. Раджабов, А.Б. Расулов// Научные журналы НИУ «БелГУ» Серия: Математика. Физика. – 2011. №23(118). Вып. 25. – С. 93 – 101.

[74] Раджабов, Н. Задача линейного сопряжения для системы Бицадзе сосверхсингулярной окружностью [Текст]/ Н. Раджабов, А.Б. Расулов //Дифференциальные уравнения. – 2014. – Т. 50, №4. – С. 529 – 536.

[75] Расулов, К.М. О решении одной краевой задачи типа Газемана для бианалитических функций [Текст]/ К.М. Расулов, Б.Ф. Фатулаев // Труды математического центра им. Н.И. Лобачевского. – Казань: "УНИПРЕСС", – 1998. – С. 204 – 206.

[76] Расулов, К.М. О решении одной видоизмененной краевой задачи типа Рикье для метааналитических функций в круге [Текст]/ К.М. Расулов, В.В. Сенчилов //Дифференциальные уравнения. 2005. Т. 41, № 3. – С. 415 – 418.

[77] Саидназаров, Р.С. Двоякопериодичиские решения некоторых классов эллиптичиских систем высокого порядка: дис. … канд. физ.-мат. наук: 01.01.02 [Текст] / Р.С. Саидназаров. – Курган-Тюбе. – 2016. – 124 с.

[78] Сафаров, Д. О размерности пространства решений степенного роста для одного класса эллиптических систем [Текст]/ Д. Сафаров // Дифференциальные уравнения. – 1979. – Т. 15, №1. – С. 112 – 115.

[79] Сафаров, Д. Двоякопериодические решения равномерно эллиптической системы первого порядка [Текст] / Д. Сафаров // Доклады РАН. – 2010. – Т. 430, №4. – С. 454 – 457.

[80] Сафаров, Д. Об исследовании одной эллиптической системы второго порядка с постоянными коэффициентами и отклоняющимся аргументом [Текст]/ Д. Сафаров //Доклады Академии наук Республики Таджикистан. – 2016. – Т. 59, №9-10. – С. 380-387.

[81] Сенчилов, В.В. Краевые задачи типа Неймана и типа Рикье для метааналитических функций в круге: автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук: 01.01.01 [Текст]/ Сенчилов, В.В. – Санкт-Петербург, – 2006. – 20 с.

[82] Солдатов, А.П. Эллиптические системы второго порядка в полуплоскости [Текст]/ А.П. Солдатов // Известия РАН. Сер. матем. – 2006. 70:6. – С. 161–192.

[83] Солдатов, А.П. Метод теории функций в краевых задачах на плоскости.1. Гладкий случай [Текст]/ А.П. Солдатов // Известия АН СССР. Сер. матем. –1991. – Т. 55, № 5. – С. 1070 – 1100.

[84] Солдатов, А.П. Задача Римана-Гильберта для эллиптической системы первого порядка в классах Гельдера [Текст]/ А.П. Солдатов, О.В. Чер-

нова // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. – 2009. – Т. 13, № 17. – С. 26–38.

[85] Солдатов, А.П. Задача Римана-Гильберта для бианалитических функций [Текст] / А.П. Солдатов, Чан Куанг Выонг // Научные ведомости БелГУ. Математика. Физика. – 2015. №5(202). Выпуск 38. – С. 83 – 88.

[86] Солдатов, А.П. Задача линейного сопряжения для полианалитических функций [Текст] / А.П. Солдатов, Чан Куанг Выонг // Известия вузов. Математика, –2016, №12, – С. 76 – 81.

[87] Товмасян, Н.Е. Задача Коши для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в полупространстве в классе обобщённых функций [Текст] / Н.Е. Товмасян // Дифференциальные уравнения. – 1982. – Т.VIII, № 1. – С. 132 – 138.

[88] Товмасян, Н.Е. Корректность граничных задач для уравнений в частных производных в полупространстве в классе обобщённых функций [Текст] / Н.Е. Товмасян // Сибирский математический журнал. – 1987. – Т. 28, № 2. – С. 172 – 185.

[89] Товмасян, Н.Е. Задача Дирихле для эллиптических уравнений второго порядка в полупространстве в классе функций полиномиального роста [Текст] / Н.Е. Товмасян // Дифференциальные уравнения. – 1989. – Т. XXV, № 6. – С. 1015 – 1024.

[90] Товмасян, Н.Е. Задача Дирихле для эллиптических систем в классе функций полиномиального роста [Текст] / Товмасян Н.Е, Бабаян, А.О. // Известия НАН Армении. Математика, – 2007. – Т. 39, №5. – С. 67 – 78.

[91] Товмасян, Н.Е. Граничные задачи для эллиптичиских уравнений второго порядка в полупространстве в классе функций полиномиального роста [Текст]/ Товмасян Н. Е, Бабаян, А.О. // Труды конф. «Неклассические уравнения математической физики». – Ереван. – 2007. – С. 273 – 282.

[92] Уокер, Р. Алгебраические кривые [Текст]/ Р. Уокер. – М.: ИЛ, 1952. – 236 с.

[93] Усманов, З.Д. Обобщённые системы Коши-Римана с сингулярной точкой / З.Д. Усманов. – Душанбе: Дониш, 1983. – 244 с.

[94] Фатулаев, Б.Ф. Краевые задачи типа Газемана и типа Карлемана для метааналитических функций: автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук: 01.01.01 [Текст]/ Б.Ф. Фатулаев. – Казань, –2000. – 20 с.

[95] Фатулаев, Б.Ф. О решении внешней краевой задачи типа Карлемана для метааналитических функций в случае единичного круга [Текст]/ Б.Ф. Фатулаев. //Труды математического центра им. Н.И. Лобачевского. – Т. 5. – Казань: "УНИПРЕСС", – 2000. – С. 209 – 210.

[96] Функциональный анализ. Серия «Справочная математическая библиотека». [Текст] / Под редакцией С.Г. Крейна. – М.: 1972, – 544 с.

[97] Халилов Ш.Б. К теории граничных задач для многомерных эллиптических по Петровскому систем уравнений второго порядка [Текст] / Ш.Б. Халилов, Б.Н. Рушанов // Доклады НАНТ. – 2022. – Т. 65, № 3-4. – С. 171 – 178.

[98] Хёрмандер, Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 2. Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами [Текст] / Л. Хёрмандер. – М.: Мир, – 1986. – 455 с.

[99] Хоанг, К. Т. Некоторые неэллиптические граничные задачи для системы уравнений Бицадзе [Текст] / Хоанг Куок Тоан // Дифференциальные уравнения. – 1979. – Т. 15, № 12. – С. 2282 – 2285.

[100] Чан, К. В. Обобщенные степенные ряды [Текст]/ Чан Куанг Выонг // Научные ведомости БелГУ. Математика. Физика. – 2012, №11(130). Выпуск 27. – С. 24 – 28.

[101] Чан, К. В. Краевые задачи для полианалитических функций: автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук: 01.01.01 [Текст]/Чан Куанг Выонг. – Владимир, – 2017. – 19 с.

[102] Шамсудинов, Ф.М. Об исследовании одного класса гиперболических уравнений второго порядка и связанных с ними переопределенных систем дифференциальных уравнений с сингулярными и сверхсингулярными

точками: автореф. дис. … доктора физ.-мат. наук: 01.01.02 [Текст] / Ф.М. Шамсудинов. – Душанбе, – 2019. – 54 с.

[103] Юденков А. В. Математическое моделирование на основе теории потенциала**.** [Текст]/ А.В. Юденков, А.М. Володченков, Л.П. Римская – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2020. - 152 с.

[104] Begehr, H. Boundary value problems for the inhomogeneons polyanalytic equation [Text] / H. Begehr, A. Kumar // Analysis. – 2007. – V. 27, № 4. – P. 353 – 373.

[105] Bers, L. Theory of pseudoanalytic functions [Text] / L. Bers. Lecture Notes, New York, – 1953. – 189 p.

[106] Dzuraev, A. On the Theory of First-Order Elliptic Systems in the Plane and Application [Text]/ A. Dzuraev // Complex Variables. – 1990. – V. 14. – P. 105 – 109.

[107] Iskhokov S.A., Rakhmonov B.A. Solvability and smoothness of solution to variational Dirichlet problem in entire space associated with a non-coercive form [Text] / S.A. Iskhokov, B.A. Rakhmonov // Ufa Mathematical Journal. 2020. T. 12. № 1. C. 13-29.

[108] Rowley, B. An index formula for elliptic systems in the plane [Text] / B. Rowley // Trans. Amer. Math. Soc. – 1997. – V. 349, № 8. – P. 3149 – 3179.

[109] Tovmasyan, N.E. Boundary Value Problems for Partial Differential Equations and Applications in Electrodynamics [Text]/ N.E. Tovmasyan. – Singapore: World Scientific, – 1994. – 232 p.

[110] Vekua, I.N. On one of the elliptic systems with singularities [Text] / I.N. Vekua // Proc. Intern. Conf. on Functional Analysis and Related Topics. Tokio. 1969. – P. 142 – 147.

[111] Zaripov S.Q. The new type of singular integro-differential equations (Volume 1) [Текст] / S.Q. Zaripov. – Germany: LAP LAMBERT Academic Publishing. – 2016. – 120p.

Б) РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. В журналах, зарегистрированных в реестре ВАК при Президенте Республики Таджикистан:

[1-А] Содиқов М.О. Доир ба ҳалҳои экспоненсиалии як синфи системаи чор муодилаҳои бо ҳосилаҳои хусусӣ [Матн] / М.О. Содиқов // Номаи донишгоҳ. Силсилаи илмҳои табиатшиносӣ ва иқтисодӣ. – Хуҷанд. – 2019, №4 (51). – С . 10 – 14.

[2-А] Содиқов М.О. Доир ба ҳалҳои системаи чор муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ дар фазои Швартс [Матн] / М.О. Содиқов, С. Байзаев // Номаи донишгоҳ. Силсилаи илмҳои табиатшиносӣ ва иқтисодӣ. – Хуҷанд. – 2020, №2 (53). – С . 3 – 10.

[3-А] Садиков М.О. О нормальной разрешимости систем с оператором Бицадзе в гёльдеровых пространствах [Текст] / С. Байзаев, М.О. Садиков // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. – 2021. №4. – С. 65 – 73.

[4-А] Садиков М.О. О решениях эллиптических систем, обобщающих уравнение метааналитических функций [Текст]/ М.О. Садиков // Номаи донишгоҳ. Силсилаи илмҳои табиатшиносӣ ва иқтисодӣ. – Хуҷанд. – 2021, №4 (59). – С . 20 – 23.

2. В других изданиях:

[5-А] Содиқов М.О. Доир ба ҳалҳои суст афзуншавандаи як системаи навъи эллипсии чор муодилаи хаттӣ [Матн] /М.О. Содиқов // Материалы Республиканской науч.-практ. конф. «Современные проблемы точных наук и их роль в формировании научного мировоззрения общества», посвященная 30-летию государственной независимости Республики Таджикистан. Худжанд». – Худжанд. – 2018. – С. 128 – 131.

[6-А] Садиков М.О. О решениях обобщенного уравнения бианалитических функций [Текст] / С. Байзаев, М.О. Садиков // Материалы межд. научной конф. «Уфимская осенняя математическая школа – 2021». Т. 1. – Уфа. – 2021. – С. 177 – 179.

[7-А] Садиков М.О. Об одном обобщении бианалитических функций [Текст] / С. Байзаев, М.О. Садиков // Сборник трудов межд. конф. по алгебре, анализу и геометрии. – Казань. – 2021. – С. 174 – 175.

[8-А] Садиков М.О. О бесконечномерности пространства полиномиальных решений одного класса четырехмерной эллиптической системы [Текст] /М.О. Садиков, Д.А. Воситова // Сб. статей II межд. науч.-практ. конф. «О применении дифференциальных уравнений при решении прикладных задач», посвященная 80-летию чл.-корр. НАНТ Э.Мухамадиева. – Душанбе. – 2021. – С. 37 – 39.

[9-А] Садиков М.О. Об экспоненциальных решениях одной системы уравнений с частными производными в общем случае [Текст] / М.О. Садиков // Материалы конф. «Проблемаҳои муосири таҳсилоти математикӣ ва технологияи иттилоотӣ дар мактабҳои миёнаю олӣ». – Хуҷанд. – 2021. – С. 74 – 77.

[10-А] Садиков М.О. О слабо возрастающих решениях одной системы четырёх уравнений эллиптического типа [Текст]/ М.О. Садиков // Материалы конф. «Рушди илмҳои табиатшиносӣ, дақиқ ва риёзӣ: роҳҳои татбиқи натиҷаҳои онҳо дар истеҳсолот». – Хуҷанд. – 2021. – С. 166 – 168.

[11-А] Содиқов М.О. Ҳалҳои суст афзуншавандаи системаи чор муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ [Матн] /М.О. Содиқов // Материалы Республиканской науч.-практ. конф. «Современные проблемы прикладной математики и их роль в формировании технического мировоззрения общества». – Худжанд. – 2021. – С. 153 – 156.

[12-А] Садиков М.О. О решениях эллиптических систем, обобщающих уравнение метааналитических функций [Текст] / С. Байзаев, М.О. Садиков // Материалы науч.-практ. конф. ”Илм ва инноватсия дар низоми татбиқи ҳадафҳои стратегияи миллӣ”. – Худжанд. – 2021. – С. 36 – 41.